1 · 2

·ФЕЙНМАН
·ЛЕЙТОН
·СЭНДС

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

1 СОВРЕМЕННАЯ НАУКА О ПРИРОДЕ · ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

2 ПРОСТРАНСТВО · ВРЕМЯ · ДВИЖЕНИЕ

ФЛФ

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS

VOLUME 1

RICHARD P. FEYNMAN
ROBERT B. LEIGHTON
MATTHEW SANDS

ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC.
READING, MASSACHUSETTS, PALO ALTO. LONDON
1963

Р. ФЕЙНМАН
Р. ЛЕЙТОН
М. СЭНДС

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

1

СОВРЕМЕННАЯ НАУКА О ПРИРОДЕ • ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

2

ПРОСТРАНСТВО • ВРЕМЯ • ДВИЖЕНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1976

УДК 530

Перевод с английского
А. В. Ефремова, Г. И. Копылова, О. А. Хрусталева

Под редакцией
Я. А. Смородинского

Издание третье

Редакция литературы по физике

Ф $\frac{20401\text{-}466}{041(01)\text{-}76}$ подписное

К читателям русского издания

Это лекции по общей физике, которые читал физик-теоретик. Они совсем не похожи ни на один известный курс. Это может показаться странным: основные принципы классической физики, да и не только классической, но и квантовой, давно установлены, курс общей физики читается во всем мире в тысячах учебных заведений уже много лет и ему пора превратиться в стандартную последовательность известных фактов и теорий, подобно, например, элементарной геометрии в школе. Однако даже математики считают, что их науке надо учить по-другому. А уж о физике и говорить нечего: она столь интенсивно развивается, что даже лучшие педагоги все время сталкиваются с большими трудностями, когда им надо рассказывать студентам о современной науке. Они жалуются, что им приходится ломать то, что принято называть старыми или привычными представлениями. Но откуда берутся привычные представления? Обычно они попадают в молодые головы в школе от таких же педагогов, которые потом будут говорить о недоступности идей современной науки. Поэтому прежде чем подойти к сути дела, приходится тратить много времени на то, чтобы убедить слушателей в ложности того, что было ранее внушено им как очевидная и непреложная истина. Было бы дико сначала рассказывать школьникам «для простоты», что Земля плоская, а потом, как открытие, сообщать о ее шарообразности. А так ли далек от этого абсурдного примера тот путь, по которому будущие специалисты входят в современный мир идей теории относительности и квантов? Осложняет дело также то обстоятельство, что большей частью лектор и слушатели — люди разных поколений, и лектору очень трудно уйти от соблазна вести слушателей той знакомой и надежной дорогой, по которой он сам в свое время дошел до желанных высот. Однако старая дорога не вечно остается лучшей. Физика развивается очень быстро, и, чтобы не отставать от нее, надо менять пути ее изучения. Все согласны с тем, что физика — одна из самых интересных наук. В то же время многие учебники физики никак не назовешь интересными. В таких учебниках изложено все, что следует по программе. Там обычно объясняется, какую пользу приносит физика и как важно ее изучать, но из них очень редко можно понять, почему заниматься физикой интересно. А ведь эта сторона вопроса тоже заслуживает внимания. Как же можно сделать скучный предмет и интересным и современным? об этом прежде всего должны подумать те физики, которые сами работают с увлечением и умеют передать это увлечение другим. Пора экспериментов уже наступила. Цель их — найти наиболее эффективные способы обучения физике, которые позволили бы быстро передать новому поколению весь тот запас знаний, который накоплен наукой за всю ее историю. Поиски новых путей в преподавании также всегда были важной частью науки. Преподавание, следуя развитию науки, должно непрерывно менять свои формы, ломать традиции, искать новые методы. Здесь важную роль играет то обстоятельство, что в науке все время происходит удивительный процесс своеобразного упрощения, который позволяет просто и кратко изложить то, что когда-то потребовало много лет работы.

Чрезвычайно интересная попытка в этом направлении была предпринята в Калифорнийском Технологическом институте (США), который сокращенно называют КАЛТЕХ, где группа профессоров и преподавателей после многочисленных дискуссий разработала новую программу по общей физике, а один из участников этой группы, крупный американский физик Ричард Фейнман, прочел лекции.

Лекции Фейнмана отличаются тем, что они обращены к слушателю, живущему во второй половине XX века, который уже многое знает или слышал. Поэтому в лекциях не тратится время на объяснение «ученым языком» того, что и так известно. Зато в них увлекательно рассказывается, как человек изучает окружающую его природу, о достигнутых сегодня границах в познании мира, о том, какие проблемы наука решает сегодня и будет решать завтра.

Лекции читались в 1961—1962 и 1962—1963 учебных годах; они записывались на магнитофон, а потом (и это сказалось само по себе трудной задачей) «переводились» на «письменный английский» профессорами М. Сэндсом и Р. Лейтоном. В этом своеобразном «переводе» сохранены многие особенности живой речи лектора, ее живость, шутки, отступления. Однако это очень ценное качество лекций отнюдь не было главным и самодовлеющим. Не менее важными были созданные лектором оригинальные методы изложения, в которых отразилась яркая научная индивидуальность автора, его точка зрения на пути обучения студентов физике. Это, разумеется, не случайно. Известно, что и в своих научных работах Фейнман всегда находил новые методы, которые очень быстро становились общепринятыми. Работы Фейнмана по квантовой электродинамике, статистике принесли ему широкое признание, а его метод — так называемые «диаграммы Фейнмана»— используется сейчас практически во всех областях теоретической физики.

Что бы ни говорили об этих лекциях — восторгались стилем изложения или сокрушались по поводу ломки старых добрых традиций, — одно остается бесспорным: надо начинать педагогические опыты. Наверное, не все согласятся с манерой автора излагать те или иные вопросы, не все согласятся с оценкой целей и перспектив современной физики. Но это послужит стимулом к появлению новых книг, в которых получат отражение другие взгляды. Это и есть эксперимент.

Но вопрос состоит не только в том, чтó рассказывать. Не менее важен и другой вопрос — в каком порядке это надо делать. Расположение разделов внутри курса общей физики и последовательность изложения — вопрос всегда условный. Все части науки настолько связаны друг с другом, что часто трудно решить, чтó надо излагать сначала, а чтó потом.

Однако в большинстве вузовских программ и имеющихся учебников до сих пор сохраняются определенные традиции. Отказ от привычной последовательности изложения — одна из отличительных особенностей фейнмановских лекций. В них рассказано не только о конкретных задачах, но и о месте, которое занимает физика в ряде других наук, о путях описания и изучения явлений природы. Вероятно, представители других наук — скажем, математики — не согласятся с тем местом, которое отводит этим наукам Фейнман. Для него, как физика, «своя» наука, конечно, выглядит самой главной. Но это обстоятельство не занимает много места в его изложении. Зато в его рассказе ярко отражаются те причины, которые побуждают физика вести тяжелую работу исследователя, а также те сомнения, которые у него возникают, когда он сталкивается с трудностями, кажущимися сейчас непреодолимыми.

Молодой естествоиспытатель должен не только понять, почему интересно заниматься наукой, но и почувствовать, какой дорогой ценой достаются победы и как порой бывают тяжелы дороги, к ним ведущие.

Надо также иметь в виду, что если сначала автор обходился без математического аппарата или использовал лишь тот, который изложен в лекциях, то от читателя, по мере продвижения его вперед, будет требоваться увеличение его математического багажа. Впрочем, опыт показывает, что математический анализ (по крайней мере его основы) выучивается сейчас легче, чем физика.

Лекции Фейнмана вышли в США в трех больших томах. Первый содержит в основном лекции по механике и теории теплоты, второй — электродинамику и физику сплошных сред, а третий — квантовую механику. Чтобы книга была доступна большему числу читателей и чтобы ею было удобнее пользоваться, русское издание будет выходить небольшими выпусками. Первые четыре из них соответствуют первому тому американского издания.

Кому будет полезна эта книга? Прежде всего — преподавателям, которые ее прочтут целиком: она заставит их задуматься об изменении сложившихся взглядов на то, как начинать обучать физике. Далее, ее прочтут студенты. Они найдут в ней много нового в дополнение к тому, что́ они узнают на лекциях. Конечно, ее попытаются читать и школьники. Большинству из них будет трудно одолеть все, но и то, что они смогут прочесть и понять, поможет им войти в современную науку, путь в которую всегда бывает трудным, но никогда не бывает скучным. Тому, кто не верит, что может пройти его, не стоит браться за изучение этой книги! И, наконец, ее могут читать все остальные. Читать просто так, для удовольствия. Это тоже очень полезно.

Фейнман в своем предисловии оценивает результаты своего опыта не очень высоко: слишком малая доля студентов, прослушавших его курс, усвоили все лекции. Но так и должно быть. Первый опыт редко приносит полный успех. Новые идеи всегда находят вначале лишь немного сторонников и лишь постепенно становятся привычными.

Я. Смородинский

Предисловие к третьему изданию

Сейчас фейнмановские лекции получили широкую известность: их много читают и часто цитируют. Поэтому вполне естественно, что давно возникла потребность в переиздании этого курса.

Первый том лекций не требует никаких дополнений: классическая механика не изменилась за это время. Мы исправили лишь опечатки, о которых нам сообщили многочисленные читатели. Кроме того, приведены новые значения фундаментальных постоянных и новые данные об элементарных частицах.

Изменился внешний вид курса: первый том выйдет в двух книгах, однако мы сохранили старую нумерацию выпусков. Первая книга содержит выпуски 1, 2, вторая — 3, 4.

Я. Смородинский

ПРЕДИСЛОВИЕ Р. ФЕЙНМАНА ▶

Это — лекции по физике, которые я читал в прошлом и позапрошлом годах в Калифорнийском Технологическом институте для студентов первого и второго курсов. Но это не дословная их запись. Их пригладили — местами очень сильно, а порой не очень. К тому же это лишь часть полного курса обучения. Дважды в неделю 180 слушателей собирались в большой аудитории и, прослушав лекцию, группами по 15—20 человек проводили еще семинары под руководством ассистентов. Вдобавок раз в неделю проводились и лабораторные работы.

Чего мы хотели добиться, читая эти лекции? Мы хотели утвердить интерес к физике у молодых ее энтузиастов, у вчерашних выпускников средней школы. Перед поступлением в институт они много наслышались о том, как интересна и как увлекательна современная физика — теория относительности, квантовая механика и т. д. Но если бы этот курс читался так, как он читался раньше, весь их энтузиазм за два года мало-помалу улетучился бы — чересчур уж редко при обычном обучении встречаются действительно величественные, новые, современные идеи. Студентов заставили бы изучать наклонную плоскость, электростатику и прочее в этом роде, и все их порывы были бы сведены на нет. Весь вопрос был в том, сможем ли мы так построить курс, чтобы у самых способных, самых горячих студентов сохранился и укрепился их энтузиазм.

Не сочтите эти лекции каким-то обзорным курсом. Нет, курс этот весьма серьезен. Читая его, я ориентировался на самых сообразительных, я хотел по возможности, чтобы даже самые сильные слушатели не были в состоянии до конца усвоить все, чтó есть в этих лекциях. Для этого я подкидывал им мысли о возможных применениях основных идей и понятий вне основной линии наступления. Для этой цели я старался поточнее формулировать все утверждения, указывать, где только можно, какие уравнения и идеи укладываются в физическую картину мира и как при дальнейшем углублении они могут измениться. Я понимал также, что таким студентам очень важно указать, чтó из изучаемого они (если, конечно, у них достанет соображения) могут сами вывести из уже известного, а чтó, наоборот, для них совершенно ново. Формулируя новые идеи, я пытался либо вывести их, если они могли быть выведены, либо объяснить, что это действительно новая идея, что на уже изученные понятия ее опереть никак нельзя и что поэтому нельзя ее считать доказуемой, а можно лишь включить со стороны.

Приступая к лекциям, я предполагал, что студенты все же кое-что вынесли из средней школы — разные там геометрические оптики, простенькие понятия из химии и тому подобное. Я не видел также смысла в том, чтобы устанавливать какой-то определенный порядок в лекциях, чтоб нельзя было упоминать о вещах, о которых подробно будет говориться только позже. Наоборот, я часто вкратце говорю о том, чтó студент по-настоящему изучит намного позднее, когда он будет лучше подготовлен. Например, понятие об индуктансе или об энергетических уровнях дается на первых порах очень приблизительное и только спустя много времени развивается как следует.

Рассчитывая курс на самого активного слушателя, я все же учел интересы и такого парня, которого все эти фейерверки мыслей и многосторонние приложения могут только встревожить и отпугнуть, от кого вообще нельзя ожидать, что он усвоит бóльшую часть материала. Я хотел, чтобы для него в лекциях оказалось по крайней мере основное ядро, или костяк, того, что он *может* получить. Я надеюсь, что он не очень будет нервничать, если не поймет в лекции всего. Пусть не понимает всего, пусть ухватит только самую суть, самое бьющее в глаза. Конечно, и для этого он должен проявить некоторую сообразительность, должен захотеть понять, какие теоремы и представления являются самыми главными, а что он сможет понять только позже и пока оставляет в стороне.

Была у меня одна серьезная трудность, когда я читал эти лекции: не работала обратная связь — от студента к преподавателю; я не видел, насколько хорошо эти лекции доходят. Это очень серьезная помеха, и я поныне не знаю, хороши ли эти лекции. Это по существу эксперимент, и, если бы мне пришлось его проделать еще раз, я бы его поставил иначе, но я надеюсь, что мне не придется браться за это дело вторично! И все же мне кажется, что в первой части курса, по крайней мере в отношении физики, все выглядит вполне прилично.

А вот второй частью курса я не очень доволен. В начале этой части, говоря об электричестве и магнетизме, я не смог придумать какого-либо особого, отличного от общепринятого способа изложения, не смог найти такого подхода к теме, который возбуждал бы к ней интерес. С электричеством и с магнетизмом, таким образом, немногое мне удалось сделать. После этой темы в конце второго курса я сначала собирался прочесть несколько лекций о свойствах твердых тел, касаясь главным образом таких вещей, как нормальные колебания, решения уравнения диффузии, колебательные системы, ортогональные функции и т. д., т. е. изложить начала того, что обычно именуют «методами математической физики». Задним числом могу сознаться, что, если бы я решился читать этот курс вторично, я бы непременно вернулся к этому намерению. Но поскольку повторение этих лекций не планируется, а вместо этого мне сказали, что неплохо было бы дать введение в квантовую механику, то именно ее вы и обнаружите в конце настоящего курса.

Совершенно ясно, что студентам, желающим хорошо разобраться в физике, можно было бы подождать с изучением квантовой механики и до третьего курса. Но, возражая, мне выдвинули довод, что многие студенты с моего курса изучают физику только в качестве основы для занятий другими науками. Обычный же способ изучения квантовой механики делает ее почти недоступной для большинства студентов, потому что у них нет возможности так долго изучать ее. А в то же время вся махина дифференциальных уравнений, этот общепринятый подход к квантовой механике редко используется в ее применениях, в частности в таких более сложных применениях, как электроника и химия. Поэтому я попробовал описать принципы квантовой механики так, чтобы знания уравнений в частных производных вначале не требовалось. Даже физику, я думаю, будет интересно такое изложение квантовой механики (по причинам, которые станут ясны из самих лекций). И все же мне кажется, что эксперимент с квантовой механикой не очень удался главным образом из-за того, что мне не хватило времени и конец пришлось скомкать (мне бы нужно было еще 3—4 лекции, чтобы полней изложить такие вопросы, как энергетические полосы и пространственная зависимость амплитуд). Да и, кроме того, я никогда прежде не излагал материал таким способом и отсутствие обратной связи ощущал особенно остро. Теперь я думаю, что за квантовую механику надо бы приниматься все-таки позже. Не исключено, что у меня появится возможность еще раз прочесть этот курс. Тогда я сделаю это получше.

В этом курсе нет лекций, посвященных решению задач. Они решались на семинарах. Хотя на трех лекциях я решал задачи, но в курс они не вошли. После лекции о вращающихся системах координат была прочитана лекция об инерциальной навигации, но, к сожалению, при издании ее опустили. Пятую и шестую лекции прочитал Мэтью Сэндс (я уезжал тогда из города).

Возникает естественный вопрос, насколько этот эксперимент удался. Моя личная точка зрения, которую, впрочем, не разделяют работавшие со студентами преподаватели, довольно пессимистична. Мне не кажется, что я хорошо поступил со студентами. Когда я наблюдал, как большинство студентов решает задачки на экзаменах, я подумывал о крахе всей моей системы преподавания. Правда, мои друзья напомнили мне, что среди студентов оказался десяток-другой разобравшихся, как это ни странно, почти во всем, активно трудившихся над материалом и подолгу с увлечением корпевших над трудными вопросами. Эти ребята, на мой взгляд, обладают сейчас первоклассной подготовкой по физике, и я попытаюсь после всего заполучить их к себе на работу. Впрочем, «обучение редко приносит плоды кому-либо, кроме тех, кто предрасположен к нему, но им оно почти не нужно» (Гиббонс).

Тем не менее я не хотел бы бросать ни одного студента на произвол судьбы, как это, видимо, бывало при чтении курса. Как все-таки помочь студентам? Может быть, надо больше поработать над составлением комплекса задач, которые могли бы пролить свет на идеи, развиваемые в лекциях? Задачи дадут хорошую возможность расширить лекционный материал и помогут сделать идеи лекций более осязаемыми и полными, лучше уложить их в голове.

Все же я думаю, что самое лучшее решение проблемы образования — это понять, что самым превосходным обучением является прямая, личная связь между учеником и хорошим учителем, когда ученик обсуждает идеи, размышляет о разных вещах и беседует о них. Невозможно многому научиться, просто отсиживая лекции или даже просто решая задачи. Но в наше время такое множество студентов должно быть обучено. что для идеалов приходится подыскивать эрзацы. Может быть, мои лекции помогут в этом. Может быть, в тех краях, где можно найти отдельного учителя для каждого ученика, эти лекции смогут вдохновить учителя и подбросить ему кое-какие идеи. Может быть, поразмыслив над ними, он только позабавится, а может, и разовьет их дальше.

Июнь 1963

Ричард Фейнман

ПРЕДИСЛОВИЕ ▸

В основу этой книги легли лекции по общей физике, которые профессор Р. Фейнман читал в 1961—1962 академическом году в Калифорнийском Технологическом институте. Это — первая половина двухгодичного вводного курса, обязательного для всех студентов КАЛТЕХа. В 1962—1963 академическом году был прочитан второй цикл лекций, чем завершилась основная часть рассчитанной на четыре года работы по перестройке вводного курса физики.

Необходимость такого коренного пересмотра курса вызывалась не только быстрым развитием физики за последние десятилетия, но и тем, что в последние годы первокурсники приходили в КАЛТЕХ с более глубокой математической подготовкой, чем раньше, — результат улучшения преподавания математики в средней школе. Мы хотели, используя преимущества более прочного математического фундамента, изложить побольше современного материала, что сделало бы курс более интересным, наводящим на размышления и лучше отражающим физику наших дней.

Чтобы иметь представление о том, что́ надо включить в курс и как это сделать, преподавателям физического факультета было предложено высказать свои идеи в виде краткой программы курса. Возникло несколько проектов перестройки, которые были обсуждены подробно и с пристрастием. Почти все сошлись в одном: перестройку курса нельзя начинать ни просто с переделки уже существующих учебников, ни даже с создания нового учебника; новый курс должен строиться на основе лекций, лекции должны читаться два или три раза в неделю. Создание соответствующих печатных руководств — это будет уже следующий шаг; эти же лекции определят и содержание будущих лабораторных работ. Вчерне были обрисованы общие контуры курса, но это был лишь предварительный набросок, многое в нем выглядело спорным и могло измениться по усмотрению того, кто взялся бы за чтение лекций.

Обсуждались и многочисленные варианты осуществления проекта. Первоначально предполагалось, что будет создана группа из N основных участников (лекторов), которые поровну распределят работу: каждый возьмет себе $1/N$ часть материала, прочтет лекции и подготовит их к печати. Однако отсутствие необходимого числа участников и трудность выработки среди них единой точки зрения, связанная с индивидуальными вкусами, взглядами и даже характером каждого, сделали этот план неосуществимым.

Счастливая идея о том, как все же можно создать, быть может, не просто новый курс, отличный от других, а, возможно, уникальный, пришла профессору М. Сэндсу. Он предложил, чтобы профессор Р. Фейнман подготовил и прочел лекции, которые будут записаны на магнитофонную ленту. После обработки и издания этих лекций получился бы новый учебник. Вот суть принятого в конце концов плана.

Сначала ожидалось, что необходимая редакторская работа сведется к подбору рисунков, расстановке запятых и исправлению грамматических ошибок; этим могли бы заняться между делом один-два студента старших курсов. К несчастью, эти надежды жили недолго. Оказалось, что даже простое приведение записей лекций к пригодному для чтения виду, даже без переработки и пересмотра материала лекций, требует много времени. Такая работа не под силу техническому редактору или студенту, она требует пристального внимания физика-профессионала, причем над каждой лекцией он должен потрудиться часов десять—двадцать.

Трудность редакторской работы, а также необходимость как можно скорее передать лекции в руки студентов сильно затруднили окончательную «доводку» материала, и мы были вынуждены ограничиться созданием предварительного, но годного для издания варианта лекций, который можно было использовать немедленно, хотя и нельзя считать окончательным. Крайняя нужда в большом количестве экземпляров лекций для наших студентов, а также интерес к лекциям студентов и преподавателей других институтов заставили нас издать лекции в их предварительном виде, не дожидаясь окончательной редакции, которой, может быть, никогда и не будет. Мы нисколько не заблуждаемся относительно полноты, связности и логической стройности материала; более того, уже в ближайшем будущем мы собираемся вновь модернизировать курс и думаем, что ни форма, ни содержание его не останутся долго без изменений.

Кроме лекций — наиболее важной части курса, — нужно было позаботиться о задачах, развивающих опыт и умение студентов, и о лабораторных работах, чтобы студенты могли «потрогать руками» изложенный в лекциях материал. Ни то, ни другое еще не достигло той законченности, которую имел материал лекций, хотя кое-что в этом направлении, конечно, сделано. Некоторые задачи были придуманы в ходе чтения лекций, они затем были улучшены, а число их увеличено при повторном чтении курса. Однако мы еще не уверены в том, что эти задачи достаточно разнообразны и углубляют содержание лекций настолько, чтобы студенты могли сами полностью понять, каким мощным аппаратом они владеют. Поэтому задачи будут опубликованы отдельно и в таком виде, который бы допускал их более или менее частую переделку.

Профессор Г. Неер предложил включить в курс несколько новых опытов. Среди них опыты, основанные на использовании воздушных подшипников с чрезвычайно малым трением: новый линейный воздушный желоб, с помощью которого можно количественно изучить одномерное движение, соударения тел и гармоническое движение; а также поддерживаемый на воздушной подушке и движимый воздухом максвелловский волчок, с помощью которого можно изучить вращение с ускорением, прецессию и нутацию гироскопа. Разработка новых лабораторных опытов будет, по-видимому, продолжаться в течение значительного времени.

Этот пересмотр учебной программы возглавляли профессора Р. Лейтон, Г. Неер и М. Сэндс. Официально в этой работе принимали участие профессора Р. Фейнман, Г. Нойгебауер, Р. Саттон, Г. Стаблер, Ф. Стронг и Р. Фогт с кафедр физики, математики и астрономии, а также профессора Т. Кофи, М. Плессет и К. Уилтс с кафедры технических наук. Мы сердечно благодарим за ценную помощь всех тех, кто принимал участие в пересмотре курса. Особенно мы обязаны фонду Форда, без финансовой помощи которого эта работа никогда не была бы осуществлена.

Июль 1963 *Роберт Б. Лейтон*

Глава **1**

АТОМЫ В ДВИЖЕНИИ

§ 1. Введение

Этот двухгодичный курс физики рассчитан на то, что вы, читатель, собираетесь стать физиком. Положим, это не так уж обязательно, но какой преподаватель не надеется на это! Если вы и впрямь хотите быть физиком, вам придется много поработать. Как-никак, а двести лет бурного развития самой мощной области знания что-нибудь да значат! Такое обилие материала, пожалуй, и не усвоишь за четыре года; вслед за этим нужно еще прослушать специальные курсы.

И все же весь результат колоссальной работы, проделанной за эти столетия, удается сконденсировать — свести в небольшое число *законов*, которые подытоживают все наши знания. Однако и законы эти тоже нелегко усвоить, и просто нечестно по отношению к вам было бы начинать изучение такого трудного предмета, не имея под рукой какой-нибудь схемы, какого-нибудь очерка взаимосвязи одних частей науки с другими. Первые три главы и представляют собой такой очерк. Мы познакомимся в этих главах с тем, как связана физика с остальными науками, как относятся эти остальные науки друг к другу, да и что такое вообще наука. Это поможет нам «ощутить» предмет физики.

Вы спросите: почему бы сразу, на первой же странице, не привести основные законы, а после только показывать, как они работают в разных условиях? Ведь именно так поступают в геометрии: сформулируют аксиомы, а потом остается только делать выводы. (Неплохая мысль: изложить за 4 минуты то, что и в 4 года не уложишь.) Сделать это невозможно по двум причинам. Во-первых, нам известны *не все* основные законы; наоборот, чем больше мы узнаем, тем сильнее расширяются границы того, что мы должны познать! Во-вторых, точная формулировка законов физики связана со многими необычными идеями и понятиями, требующими для своего описания столь же необычной математики. Нужна немалая практика только для того, чтобы наловчиться понимать смысл *слов*. Так что ваше предложение не пройдет. Придется нам двигаться постепенно, шаг за шагом.

Каждый шаг в изучении природы — это всегда только *приближение* к истине, вернее, к тому, что мы считаем истиной. Все, что мы узнаем, — это какое-то приближение, ибо *мы знаем, что не все еще законы мы знаем*. Все изучается лишь для того, чтобы снова стать непонятным или, в лучшем случае, потребовать исправления.

Принцип науки, почти что ее определение, состоит в следующем: *пробный камень всех наших знаний — это опыт*. Опыт, эксперимент — это *единственный судья* научной «истины». А в чем же источник знаний? Откуда приходят те законы, которые мы проверяем? Да из того же опыта; он помогает нам выводить законы, в нем таятся намеки на них. А сверх того нужно еще *воображение*, чтобы за намеками увидеть что-то большое и главное, чтобы отгадать нежданную, простую прекрасную картину, встающую за ними, и потом поставить опыт, который убедил бы нас в правильности догадки. Этот процесс воображения настолько труден, что происходит разделение труда: бывают физики-*теоретики*, они воображают, соображают и отгадывают новые законы, но опытов не ставят, и бывают физики-*экспериментаторы*, чье занятие — ставить опыты, воображать, соображать и отгадывать.

Мы сказали, что законы природы — это приближения; сперва открывают «неправильные» законы, а потом уж — «правильные». Но как опыт может быть «неверным»? Ну, во-первых, по самой простой причине: когда в ваших приборах что-то неладно, а вы этого не замечаете. Но такую ошибку легко уловить, надо лишь все проверять и проверять. Ну, а если не придираться к мелочам, *могут ли* все-таки результаты опыта быть ошибочными? Могут, из-за нехватки точности. Например, масса предмета кажется неизменной; вращающийся волчок весит столько же, сколько лежащий на месте. Вот вам и готов «закон»: масса постоянна и от скорости не зависит. Но этот «закон», как выясняется, неверен. Оказалось, что масса с увеличением скорости растет, но только для заметного роста нужны скорости, близкие к световой. *Правильный* закон таков: если скорость предмета меньше 100 *км/сек*, масса с точностью до одной миллионной постоянна. Вот примерно в такой приближенной форме этот закон верен. Можно подумать, что практически нет существенной разницы между старым законом и новым. И да, и нет. Для обычных скоростей можно забыть об оговорках и в хорошем приближении считать законом утверждение, что масса постоянна. Но на больших скоростях мы начнем ошибаться, и тем больше, чем скорость выше.

Но самое замечательное, что *с общей точки зрения любой приближенный закон абсолютно ошибочен.* Наш взгляд на мир потребует пересмотра даже тогда, когда масса изменится хоть на капельку. Это — характерное свойство общей картины мира, которая стоит за законами. Даже незначительный эффект иногда требует глубокого изменения наших воззрений.

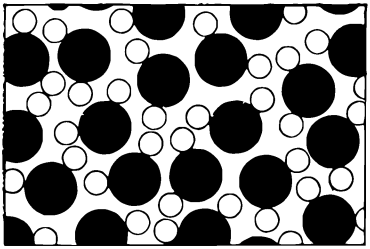
Так что же нам нужно изучить сначала? Учить ли нам *правильные*, но необычные законы с их странными и трудными понятиями, например теорию относительности, четырехмерное пространство-время и т. д.? Или же начать с простого закона «постоянной массы?» Он хоть и приближенный, но зато обходится без трудных представлений. Первое, бесспорно, приятней, притягательней; первое очень соблазняет, но со второго начать легче, и потом ведь это первый шаг к углубленному пониманию правильной идеи. Этот вопрос встает все время, когда преподаешь физику. На разных этапах курса мы по-разному будем решать его, но на каждой стадии мы будем стараться изложить, что́ именно сейчас известно и с какой точностью, как это согласуется с остальным и что́ может измениться, когда мы узнаем об этом больше.

Давайте перейдем к нашей схеме, к очерку нашего понимания современной науки (в первую очередь физики, но также и прочих близких к ней наук), так что, когда позже нам придется вникать в разные вопросы, мы сможем видеть, что́ лежит в их основе, чем они интересны и как укладываются в общую структуру.

Итак, *как же выглядит* картина мира?

§ 2. Вещество состоит из атомов

Если бы в результате какой-то мировой катастрофы все накопленные научные знания оказались бы уничтоженными и к грядущим поколениям живых существ перешла бы только одна фраза, то какое утверждение, составленное из наименьшего количества слов, принесло бы наибольшую информацию? Я считаю, что это — *атомная гипотеза* (можете называть ее не гипотезой, а фактом, но это ничего не меняет): *все тела состоят из атомов — маленьких телец, которые находятся*

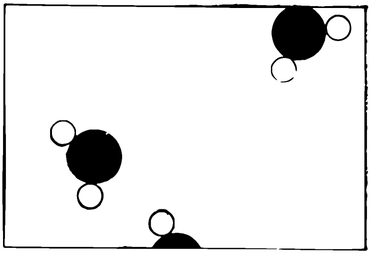


Фиг. 1.1. Капля воды (увеличенная в миллиард раз).

в беспрерывном движении, притягиваются на небольшом расстоянии, но отталкиваются, если одно из них плотнее прижать к другому. В одной этой фразе, как вы убедились, содержится *невероятное* количество информации о мире, стоит лишь приложить к ней немного воображения и чуть соображения.

Чтобы показать силу идеи атома, представим себе капельку воды размером 0,5 *см*. Если мы будем пристально разглядывать ее, то ничего, кроме воды, спокойной, сплошной воды, мы не увидим. Даже под лучшим оптическим микроскопом при 2000-кратном увеличении, когда капля примет размеры большой комнаты, и то мы *все еще* увидим относительно спокойную воду, разве что по ней начнут шнырять какие-то «футбольные мячи». Это парамеция — очень интересная штука. На этом вы можете задержаться и заняться парамецией, ее ресничками, смотреть, как она сжимается и разжимается, и на дальнейшее увеличение махнуть рукой (если только вам не захочется рассмотреть ее изнутри). Парамециями занимается биология, а мы прошествуем мимо них и, чтобы еще лучше разглядеть воду, увеличим ее опять в 2000 раз. Теперь капля вырастет до 20 *км*, и мы увидим, как в ней что-то кишит; теперь она уже не такая спокойная и сплошная, теперь она напоминает толпу на стадионе в день футбольного состязания с высоты птичьего полета. Что же это кишит? Чтобы рассмотреть получше, увеличим еще в 250 раз. Нашему взору представится что-то похожее на фиг. 1.1. Это капля воды, увеличенная в миллиард раз, но, конечно, картина эта условная. Прежде всего частицы изображены здесь упрощенно, с резкими краями — это первая неточность. Для простоты они расположены на плоскости, на самом же деле они блуждают во всех трех измерениях — это во-вторых. На рисунке видны «кляксы» (или кружочки) двух сортов — черные (кислород) и белые (водород); видно, что к каждому кислороду пристроились два водорода. (Такая группа из атома кислорода и двух атомов водорода называется молекулой.) Наконец, третье упрощение заключается

Фиг. 1.2. Пар под микроскопом.

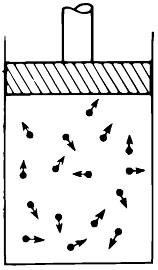


в том, что настоящие частицы в природе беспрерывно дрожат и подпрыгивают, крутясь и вертясь одна вокруг другой. Вы должны представить себе на картинке не покой, а движение. На рисунке нельзя также показать, как частицы «липнут друг к другу», притягиваются, пристают одна к одной и т. д. Можно сказать, что целые их группы чем-то «склеены». Однако ни одно из телец не способно протиснуться сквозь другое. Если вы попробуете насильно прижать одно к другому, они оттолкнутся.

Радиус атомов примерно равен 1 или 2 на 10^{-8} *см*. Величина 10^{-8} *см* это *ангстрем*, так что радиус атома равен 1 или 2 ангстремам (Å). А вот другой способ запомнить размер атома: если яблоко увеличить до размеров Земли, то атомы яблока сами станут размером с яблоко.

Представьте теперь себе эту каплю воды с ее частичками, которые приплясывают, играют в пятнашки и льнут одна к другой. Вода сохраняет свой объем и не распадается на части именно из-за взаимного притяжения молекул. Даже катясь по стеклу, капля не растекается, опять-таки из-за притяжения. И все вещества не улетучиваются по той же причине. Движение частиц в теле мы воспринимаем как *теплоту*; чем выше температура, тем сильнее движение. При нагреве воды толчея среди частиц усиливается, промежутки между ними растут, и наступает миг, когда притяжения между молекулами уже не хватает, чтобы удержать их вместе, вот тогда они и *улетучиваются*, удаляются друг от друга. Так получают водяной пар: при повышении температуры усиливается движение и частицы воспаряют.

На фиг. 1.2 показан пар. Рисунок этот плох в одном — при выбранном нами увеличении на комнату придется всего несколько молекул, поэтому сомнительно, чтобы целых $2^1/_2$ молекулы оказались на таком маленьком рисунке. На такой площадке скорее всего не окажется ни одной частицы. Но ведь надо что-то нарисовать, чтоб рисунок не был совсем пустым. Глядя на пар, легче увидеть характерные черты молекул воды. Для простоты на рисунке угол между атомами водорода взят 120°. На самом же деле он равен 105°3′,



Фиг. 1.3. Цилиндр с поршнем.

а промежуток между центрами атомов кислорода и водорода равен 0,957 Å. Как видите, мы довольно хорошо представляем себе эту молекулу.

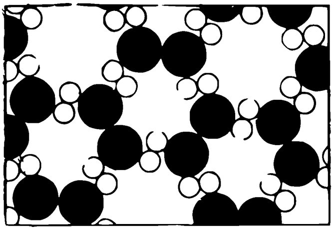
Давайте рассмотрим некоторые свойства водяного пара или других газов. Разрозненные молекулы пара то и дело ударяются о стенки сосуда. Представьте себе комнату, в которой множество теннисных мячей (порядка сотни) беспорядочно и беспрерывно прыгают повсюду. Под градом ударов стенки расходятся (так что их надо придерживать). Эту неумолкаемую дробь ударов атомов наши грубые органы чувств (их-то чувствительность не возросла в миллиард раз) воспринимают как *постоянный напор*. Чтобы сдержать газ в его пределах, к нему нужно приложить давление. На фиг. 1.3 показан обычный сосуд с газом (без него не обходится ни один учебник) — цилиндр с поршнем. Молекулы для простоты изображены теннисными мячиками, или точечками, потому что форма их не имеет значения. Они движутся беспорядочно и непрерывно. Множество молекул беспрерывно колотит о поршень. Их непрекращаемые удары вытолкнут его из цилиндра, если не приложить к поршню некоторую силу — *давление* (сила, собственно, — это давление, умноженное на площадь). Ясно, что сила пропорциональна площади поршня, потому что если увеличить его площадь, сохранив то же количество молекул в каждом кубическом сантиметре, то и число ударов о поршень возрастет во столько же раз, во сколько расширилась площадь.

А если в сосуде число молекул удвоится (и соответственно возрастет их плотность), а скорости их (и соответственно температура) останутся прежними? Тогда довольно точно удвоится и число ударов, а так как каждый из них столь же «энергичен», как и раньше, то выйдет, что давление пропорционально плотности. Если принять во внимание истинный характер сил взаимодействия атомов, то следует ожидать и небольшого спада давления из-за увеличения притяжения между атомами и легкого роста давления из-за увеличения доли общего объема, занятого самими атомами. И все же в хорошем приближении, когда атомов сравнительно немного (т. е. при невысоких давлениях), *давление пропорционально плотности.*

Легко понять и нечто другое. Если повысить температуру газа (скорость атомов), не меняя его плотности, что произойдет с давлением? Двигаясь быстрей, атомы начнут бить по поршню сильней; к тому же удары посыплются чаще — и давление возрастет. Вы видите, до чего просты идеи атомной теории.

А теперь рассмотрим другое явление. Пускай поршень медленно двинулся вперед, заставляя атомы тесниться в меньшем объеме. Что бывает, когда атом ударяет по ползущему поршню? Ясно, что после удара его скорость повышается. Можете это проверить, играя в пинг-понг: после удара ракеткой шарик отлетает от ракетки быстрей, чем подлетал к ней. (Частный пример: неподвижный атом после удара поршня приобретает скорость.) Стало быть, атомы, отлетев от поршня, становятся «горячее», чем были до толчка. Поэтому все атомы в сосуде наберут скорость. Это означает, что *при медленном сжатии газа его температура растет.* Когда медленно *сжимаешь* газ, его температура *повышается*, а когда медленно *расширяешь*, температура *падает*.

Вернемся к нашей капельке воды и посмотрим, что с ней будет, когда температура понизится. Положим, что толчея среди молекул воды постепенно утихает. Меж ними, как мы знаем, существуют силы притяжения; притянувшимся друг к другу молекулам уже нелегко покачиваться и прыгать На фиг. 1.4 показано, что́ бывает при низких температурах; мы видим уже нечто новое. Образовался *лед.* Конечно, картинка эта опять условна — у льда не два измерения, как здесь изображено, но в общих чертах она справедлива. Интересно, что в этом веществе *у каждого атома есть свое место,* и если каким-то образом мы расставим атомы на одном конце капли каждый на свое место, то за многие километры от него на другом конце (в нашем увеличенном масштабе) из-за жесткой структуры атомных связей тоже возникнет определенная правильная расстановка. Поэтому если потянуть за один конец ледяного кристалла, то за ним, противясь разрыву, потянется и другой — в отличие от воды, в которой эта правильная расстановка разрушена интенсивными движениями атомов. Разница между твердыми и жидкими телами состоит в том, что в твердых телах атомы расставлены в особом порядке, называемом *кристаллической структурой*, и даже в том случае, когда они находятся далеко друг от друга, ничего случайного в их размещении не наблюдается — положение атома на одном конце кристалла определяется положением атомов на другом конце, пусть между ними



Фиг. 1.4. Молекулы льда.

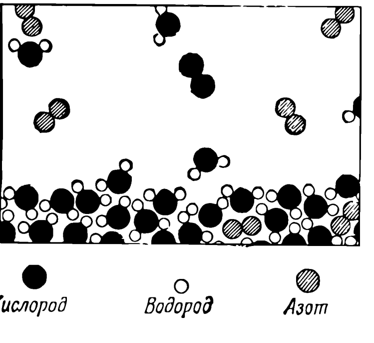
находятся хоть миллионы атомов. В жидкостях же атомы на дальних расстояниях сдвинуты как попало. На фиг. 1.4 расстановка молекул льда мною выдумана, и хотя кое-какие свойства льда здесь отражены, но в общем она неправильна. Верно схвачена, например, часть шестигранной симметрии кристаллов льда. Посмотрите: если повернуть картинку на 120°, получится то же самое расположение. Таким образом, лед имеет *симметрию*, вследствие которой снежинки все шестигранны. Из фиг. 1.4 можно еще понять, отчего, растаяв, лед занимает меньший объем. Смотрите, как много «пустот» на рисунке; у настоящего льда их тоже много. Когда система разрушается, все эти пустоты заполняются молекулами. Большинство простых веществ, за исключением льда и гарта (типографского сплава), при плавлении *расширяется*, потому что в твердых кристаллах атомы упакованы плотнее, а после плавления им понадобится место, чтобы колебаться; сквозные же структуры, наподобие льда, разрушаясь, становятся компактнее.

Но хотя лед обладает «жесткой» кристаллической структурой, его температура может тоже меняться, в нем есть запас тепла. Этот запас можно менять по своему желанию. Что же это за тепло? Атомы льда все равно не находятся в покое. Они дрожат и колеблются. Даже когда существует определенный порядок в кристалле (структура), все атомы все же колеблются «на одном месте». С повышением температуры размах их колебаний все растет, пока они не стронутся с места. Это называется *плавлением*. Наоборот, с падением температуры колебания все замирают, пока при абсолютном нуле температуры они не станут наименьшими из возможных (хотя полной остановки не наступит).

Этого минимального количества движения не хватает, чтобы растопить тело. Но есть одно исключение — гелий. Гелий при охлаждении тоже уменьшает движение своих атомов до предела, но даже при абсолютном нуле в них оказывается достаточный запас движения, чтобы предохранить гелий от замерзания. Гелий не замерзает и при абсолютном нуле, если только не сжимать его под высоким давлением. Повышая давление, *можно* добиться затвердения гелия.

§ 3. Атомные процессы

Так с атомной точки зрения описываются твердые, жидкие и газообразные тела. Но атомная гипотеза описывает и *процессы*, и мы теперь рассмотрим некоторые процессы с атомных позиций. Первым делом речь пойдет о процессах, происходящих на поверхности воды. Что здесь происходит? Мы усложним себе задачу, приблизим ее к реальной действительности, предположив, что над поверхностью находится воздух. Взгляните на фиг. 1.5. Мы по-прежнему видим молекулы, образующие толщу воды, но, кроме того, здесь изображена и ее поверхность, а над нею — различные молекулы: прежде всего молекулы воды в виде *водяного пара*, который всегда возникает над водной поверхностью (пар и вода находятся в равновесии, о чем мы вскоре будем говорить). Кроме того, над водой витают и другие молекулы — то скрепленные воедино два атома кислорода, образующие *молекулу кислорода*, то два атома азота тоже слипшиеся в молекулу азота. Воздух почти весь состоит из азота, кислорода, водяного пара и меньших количеств углекислого газа, аргона и прочих примесей. Итак, над поверхностью воды находится воздух — газ, содержащий некоторое количество водяного пара. Что происходит на этом рисунке? Молекулы воды непрерывно движутся. Время от времени какая-нибудь из молекул близ поверхности получает толчок сильнее остальных и выскакивает вверх. На рисунке этого, конечно, не видно, потому что здесь все *неподвижно*. Но попробуйте просто представить себе, как одна из молекул только что испытала удар и взлетает вверх, с другой случилось то же самое и т. д. Так, молекула за молекулой, вода исчезает — она испаряется. Если *закрыть* сосуд, мы обнаружим среди молекул находящегося в нем воздуха множество молекул воды. То и дело некоторые из них снова попадают в воду и остаются там. То, что казалось нам мертвым

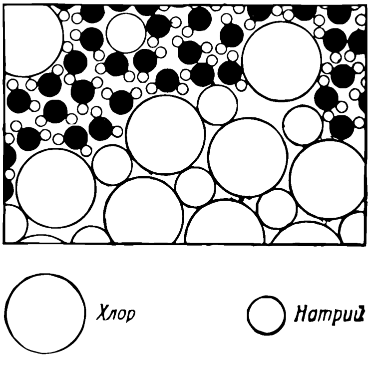


Фиг. 1.5. Молекулы воды, испаряющейся в воздух.

и неинтересным (скажем, прикрытый чем-нибудь стакан воды, который, может быть, 20 лет простоял на своем месте), на самом деле таит в себе сложный и интересный, беспрерывно идущий динамический процесс. Для нашего грубого глаза в нем ничего не происходит, но стань мы в миллиард раз зорче, мы бы увидали, как все меняется: одни молекулы взлетают, другие оседают.

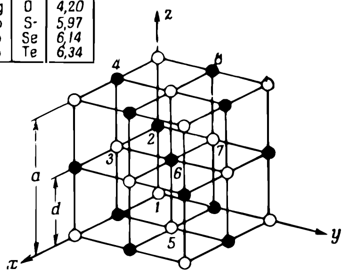
Почему же мы *не видим этих изменений?* Да потому, что сколько взлетает молекул, столько же и оседает! В общем-то там «ничего не происходит». Если раскрыть стакан и сдуть влажный воздух, на смену ему притечет уже сухой; число молекул, покидающих воду, останется прежним (оно ведь зависит только от движения в воде), а число возвращающихся молекул сильно уменьшится, потому что их уже над водой почти не будет. Число улетающих молекул превысит число оседающих, вода начнет испаряться. Мораль: если вам нужно испарять воду, включайте вентилятор!

Но это еще не все. Давайте подумаем, какие молекулы вылетают из воды? Если уж молекула выскочила, то это значит, что она случайно вобрала в себя излишек энергии; он ей понадобился, чтобы разорвать путы притяжения соседей. Энергия вылетающих молекул превосходит среднюю энергию молекул в воде, поэтому энергия остающихся молекул *ниже* той, которая была до испарения. Движение их уменьшается. Вода от испарения постепенно *остывает*. Конечно, когда молекула пара опять оказывается у поверхности воды, она испытывает сильное притяжение и может снова попасть в воду. Притяжение разгоняет ее, и в итоге возникает тепло. Итак, уходя, молекулы уносят тепло; возвращаясь — приносят. Когда стакан закрыт, баланс сходится, температура воды не меняется. Если же дуть на воду, чтобы испарение превысило оседание молекул, то вода охлаждается. Мораль: чтобы остудить суп, дуйте на него!



Фиг. 1.6. Молекулы соли, растворяющейся в воде.

Кристалл	●	○	a, Å
Каменная соль	Na	Cl	5,64
Сильвин	K	Cl	6,28
	Ag	Cl	5,54
	Mg	O	4,20
Свинцовый блеск	Pb	S	5,97
	Pb	Se	6,14
	Pb	Te	6,34



Фиг. 1.7. Структура кристалла соли.

Расстояние до ближайшего соседа $d=a/2$

Вы понимаете, конечно, что на самом деле все происходит гораздо сложнее, чем здесь описано. Не только вода переходит в воздух, но молекулы кислорода или азота время от времени переходят в воду и «теряются» в массе молекул воды. Попадание атомов кислорода и азота в воду означает растворение воздуха в воде; если внезапно из сосуда воздух выкачать, то молекулы воздуха начнут из воды выделяться быстрее, чем проникают в нее; мы увидим, как наверх подымаются пузырьки. Вы, наверно, слыхали, что это явление очень вредно для ныряльщиков.

Перейдем теперь к другому процессу. На фиг. 1.6 мы видим, как (с атомной точки зрения) соль растворяется в воде. Что получается, если в воду бросить кристаллик соли? Соль — твердое тело, кристалл, в котором «атомы соли» расставлены правильными рядами. На фиг. 1.7 показано трехмерное строение обычной соли (хлористого натрия). Строго говоря, кристалл состоит не из атомов, а из *ионов*. Ионы — это атомы с излишком или с нехваткой электронов. В кристалле соли мы находим ионы хлора (атомы хлора с лишним электроном) и ионы натрия (атомы натрия, лишенные одного электрона). Ионы в твердой соли скреплены друг с другом электрическим притяжением, но в воде некоторые из них, притянувшись к положительному водороду или отрицательному кислороду, начинают свободно двигаться. На фиг. 1.6 виден освободившийся ион хлора и другие атомы, плавающие в воде в виде ионов. На рисунке нарочно подчеркнуты некоторые детали процесса. Заметьте, например, что водородные концы молекул воды обычно обступают ион хлора, а возле иона натрия чаще оказывается кислород (ион натрия положителен, а атом кислорода в молекуле воды отрицателен, поэтому они притягиваются). Можно ли из рисунка понять, *растворяется* ли здесь соль в воде или же *выкристаллизовывается* из воды? Ясно, что *нельзя*; часть атомов уходит из кристалла, часть присоединяется к нему. Процесс этот *динамический*, подобный испарению; все зависит от того, много или мало соли в воде, в какую сторону нарушено равновесие. Под равновесным понимается такое состояние, когда количество уходящих атомов равно количеству приходящих. Если в воде почти нет соли, то больше атомов уходит в воду, чем возвращается из воды: соль растворяется. Если же «атомов соли» слишком много, то приход превышает уход, и соль выпадает в кристаллы.

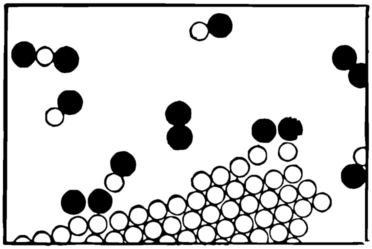
Мы мимоходом упомянули, что понятие *молекулы* вещества не совсем точно и имеет смысл только для некоторых видов веществ. Оно применимо к воде, в ней действительно три атома всегда скреплены между собой, но оно не очень подходит к твердому хлористому натрию. Хлористый натрий — это ионы хлора и натрия, образующие кубическую структуру. Нельзя естественным путем сгруппировать их в «молекулы соли».

Вернемся к вопросу о растворении и осаждении соли. Если повысить температуру раствора соли, то возрастет и число растворяемых атомов и число осаждаемых. Оказывается, что в общем случае трудно предсказать, в какую сторону сдвинется процесс, быстрей или медленней пойдет растворение. С ростом температуры большинство веществ начинает растворяться сильней, а у некоторых растворимость падает.

§ 4. *Химические реакции*

Во всех описанных процессах атомы и ионы не меняли своих напарников. Но, конечно, возможны обстоятельства, в которых сочетания атомов меняются, образуя новые молекулы. Это показано на фиг. 1.8. Процесс, в котором атомные партнеры меняются местами, называется *химической реакцией*. Описанные нами прежде процессы называются физическими, но трудно указать резкую границу между теми и другими. (Природе все равно, как мы это назовем, она просто делает свое дело.) На картинке мы хотели показать, как уголь горит в кислороде. Молекула кислорода состоит из *двух* атомов, сцепленных очень крепко. (А почему не из *трех* или даже не из *четырех*? Такова одна из характерных черт атомных процессов: атомы очень разборчивы, им нравятся определенные партнеры, определенные направления и т. д. Одна из обязанностей физики — разобраться, почему они хотят именно то, что хотят. Во всяком случае *два* атома кислорода, довольные и насыщенные, образуют молекулу.)

Фиг. 1.8. Уголь, горящий в кислороде.



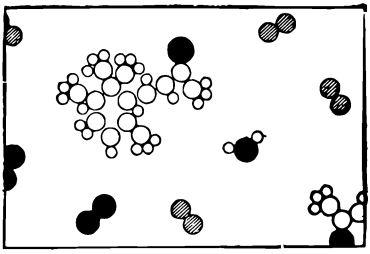
Предположим, что атомы углерода образуют твердый кристалл (графит или алмаз*). Одна из молекул кислорода может пробраться к углероду, каждый ее атом подхватит по атому углерода и улетит в новом сочетании углерод — кислород. Такие молекулы образуют газ, называемый угарным. Его химическое имя CO. Что это значит? Буквы CO — это фактически картинка такой молекулы: C — углерод, O — кислород. Но углерод притягивает к себе кислород намного сильнее, чем кислород притягивает кислород или углерод — углерод. Поэтому кислород для этого процесса может поступать с малой энергией, но, схватываясь с неимоверной жадностью и страстью с углеродом, высвобождает энергию, поглощаемую всеми соседними атомами. Образуется большое количество энергии движения (кинетической энергии). Это, конечно, и есть *горение*; мы получаем *тепло* от сочетания кислорода и углерода. Теплота в обычных условиях проявляется в виде движения молекул нагретого газа, но иногда ее может быть так много, что она вызывает и *свет*. Так получается *пламя*.

Вдобавок молекулы CO могут не удовольствоваться достигнутым. У них есть возможность подсоединить еще один атом кислорода; возникает более сложная реакция: кислород в паре с углеродом столкнется с другой молекулой CO. Атом кислорода присоединится к CO и в конечном счете образуется молекула из одного углерода и двух кислородов. Ее обозначают CO_2 и называют углекислым газом. Когда углерод сжигают очень быстро (скажем, в моторе автомашины, где взрывы столь часты, что углекислота не успевает образоваться), то возникает много угарного газа. Во многих таких перестановках атомов выделяется огромное количество энергии, наблюдаются взрывы, вспыхивает пламя и т. д.; все зависит от реакции.

Химики изучили эти расположения атомов и установили, что любое вещество — это свой тип ***расположения атомов***.

---

* Алмаз тоже может сгореть в воздухе.

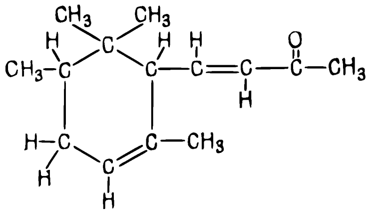


Фиг. 1.9. Запах фиалки.

Чтобы объяснить эту мысль, рассмотрим новый пример. У клумбы фиалок вы сразу чувствуете их «запах». Это значит, что в ваш нос попали *молекулы*, или расположения атомов особого рода. *Как* они туда попали? Ну, это просто. Раз запах — это молекулы особого рода, то, двигаясь и сталкиваясь повсюду, они *случайно* могли попасть и в нос. Конечно, они не стремились попасть туда. Это просто беспомощные толпы молекул, и в своих бесцельных блужданиях эти осколки вещества, случается, оказываются и в носу.

И вот химики могут взять даже такие необычные молекулы, как молекулы запаха фиалок, проанализировать их строение и описать нам *точное расположение* их атомов в пространстве. Мы, например, знаем, что молекула углекислого газа пряма и симметрична: O—C—O (это легко обнаружить и физическими методами). Но и для безмерно более сложных, чем те, с которыми имеет дело химия, расположений атомов можно после долгих увлекательных поисков понять, как выглядит это расположение. На фиг. 1.9 изображен воздух над фиалками. Снова мы находим здесь азот, кислород, водяной пар... (А он-то откуда здесь? От *влажных* фиалок. Все растения испаряют воду.) Среди них, однако, витает «чудовище», сложенное из атомов углерода, водорода и кислорода, облюбовавших для себя особого вида расположение. Это расположение намного сложнее, чем у углекислоты. К сожалению, мы не можем его нарисовать: хотя оно известно химикам очень точно, но оно ведь трехмерное, как его изобразить в двух измерениях?! Как нарисовать шесть углеродов, которые образуют кольцо, но не плоское, а «гармошкой»? Все углы, все расстояния в ней известны. Так вот, химическая *формула* — это просто картина такой молекулы. Когда химик пишет формулу на доске, он, грубо говоря, пытается нарисовать молекулу в двух измерениях. Например, мы видим кольцо из шести углеродов; углеродную цепочку, свисающую с одного конца; кислород, торчащий на конце цепочки; три водорода, привязанные вон к тому углероду; два углерода и три водорода, прилепленные вот здесь, и т. д.

Фиг. 1.10. Структурная формула запаха фиалки.



Как же химик узнает, что это за расположение? Возьмет он две пробирки с веществом, сольет их содержимое и смотрит: если смесь покраснела, значит, к такому-то месту молекулы прикреплен один водород и два углерода; если посинела, то... то это ничего не значит. Органическая химия может поспорить с самыми фантастическими страницами детективных романов. Чтобы узнать, как расположены атомы в какой-нибудь невероятно сложной молекуле, химик смотрит, что будет, если смешать два разных вещества! Да физик нипочем не поверит, что химик, описывая расположение атомов, понимает, о чем говорит. Но вот уже больше 20 лет, как появился физический метод, который позволяет разглядывать молекулы (не такие сложные, но по крайней мере родственные) и описывать расположение атомов не по цвету раствора, а по *измерению расстояний между атомами*. И что же? Оказалось, что химики почти никогда не ошибаются!

Оказывается, что действительно в запахе фиалок присутствуют три слегка различные молекулы, они отличаются только расстановкой атомов водорода.

Одна из проблем в химии — это придумать такое название для вещества, чтобы по нему можно было бы узнать, какое оно. Найти имя для его формы! Но оно должно описывать не только форму, а указывать еще, что здесь стоит кислород, а вон там — водород, чтобы было точно отмечено, где что стоит. Теперь вы понимаете, почему химические названия так сложны. Это не сложность, а полнота. Название молекулы запаха фиалок поэтому таково: 4-(2,2,3,6-тетраметил-5-циклогексан)-3-бутен-2-он. Оно полностью описывает строение молекулы (изображенной на фиг. 1.10), а его длина объясняется сложностью молекулы. Дело, значит, вовсе не в том, что химики хотят затуманить мозги, просто им приходится решать сложнейшую задачу описания молекулы словами!

Но откуда мы все-таки *знаем*, что атомы существуют? А здесь идет в ход уже описанный прием: мы *предполагаем* их существование, и все результаты один за другим оказываются такими, как мы предскажем, — какими они должны быть, если все *состоит* из атомов. Существуют и более прямые доказательства. Вот одно из них. Атомы так малы, что ни в какой микроскоп их не увидишь (даже в *электронный*, а уж в световой и подавно). Но атомы все время движутся, и если бросить в воду большой шарик (большой по сравнению с атомами), то и он начнет подрагивать. Все равно как в игре в пушбол, где большущий мяч толкают с разных сторон две команды. Толкают в разных направлениях, и куда мяч покатится, не угадаешь. Точно так же будет двигаться и «большой мяч» в воде: в разные моменты времени с разных сторон на него будут сыпаться неодинаковые удары. Поэтому когда мы глядим в хороший микроскоп на мельчайшие частички в воде, то видим их непрерывное метание — итог бомбардировки их атомами. Называется это *броуновским движением.*

Другие доказательства существования атомов можно извлечь из строения кристаллов. Во многих случаях их строение, определенное из опытов по прохождению рентгеновских лучей через кристаллы, согласуется по своему пространственному расположению с формой самого́ природного кристалла. Углы между разными гранями кристалла согласуются с точностью не до градусов, а до секунд дуги с углами, высчитанными в предположении, что кристалл сложен из множества «слоев» атомов.

Все состоит из атомов. Это самое основное утверждение. В биологии, например, самое важное предположение состоит в том, что *все, что делает животное, совершают атомы.* Иными словами, *в живых существах нет ничего, что не могло бы быть понято с той точки зрения, что они состоят из атомов, действующих по законам физики.* Когда-то это не было еще ясно. Потребовалось немало опытов и размышлений, прежде чем высказать это предположение, но теперь оно повсеместно принято и приносит огромную пользу, порождая новые идеи в области биологии.

Да посудите сами! Если уж стальной кубик или кристаллик соли, сложенный из одинаковых рядов одинаковых атомов, может обнаруживать такие интересные свойства; если вода — простые капельки, неотличимые друг от друга и покрывающие миля за милей поверхность Земли, — способна порождать волны и пену, гром прибоя и странные узоры на граните набережной; если все это, все богатство жизни вод — всего лишь свойство сгустков атомов, то *сколько же еще в них скрыто возможностей*? Если вместо того, чтобы выстраивать атомы по ранжиру, строй за строем, колонну за колонной, даже вместо того, чтобы сооружать из них замысловатые молекулы запаха фиалок, если вместо этого располагать их *каждый раз по-новому*, разнообразя их мозаику, не повторяя того, что уже было, — представляете, сколько необыкновенного, неожиданного может возникнуть в их поведении. Разве не может быть, что те «тела», которые разгуливают по улице и беседуют с вами, тоже не что иное, как сгустки атомов, но такие сложные, что уже не хватает фантазии предугадывать по их виду их поведение. Когда мы называем себя сгустками атомов, это не значит, что мы — *только* собрание атомов, потому что такой сгусток, который никогда не повторяется, прекрасно может оказаться способным и на то, чтобы сидеть у стола и читать эти строки.

Глава **2**

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВОЗЗРЕНИЯ

§ 1. Введение

В этой главе будут рассмотрены самые основные представления физики; здесь будет идти речь о том, как теперь мы представляем себе природу вещей. Я не буду рассказывать историю того, как стало известно, что эти представления правильны; это мы отложим до другого раза.

Предмет науки предстает перед нами во множестве проявлений, в обилии признаков. Спуститесь к морю, вглядитесь в него. Это ведь не просто вода. Это вода и пена, это рябь и набегающие волны, это облака, солнце и голубое небо, это свет и тепло, шум и дыхание ветра, это песок и скалы, водоросли и рыба, их жизнь и гибель, это и вы сами, ваши глаза и мысли, ваше ощущение счастья. И не то ли в любом другом месте, не такое ли разнообразие явлений и влияний? Вы не найдете в природе ничего простого, все в ней перепутано и слито. А наша любознательность требует найти в этом простоту, требует, чтобы мы ставили вопросы, пытались ухватить суть вещей и понять их многоликость как возможный итог действия сравнительно небольшого количества простейших процессов и сил, на все лады сочетающихся между собой.

И мы спрашиваем себя: отличается ли песок от камня? Быть может, это всего лишь множество камешков? А может, и Луна — огромный камень? Тогда, поняв, что такое камни, не поймем ли мы тем самым природу песка и Луны? А ветер — что это такое? Может, это всплески воздуха, как вон те всплески воды у берега? Что общего между всяким движением? А есть ли что-нибудь общее между всевозможными звуками? Сколько получится, если пересчитать все цвета? И так далее и так далее. Вот так мы постепенно пробуем проанализировать все вокруг, связать то, что кажется несвязуемым, в надежде, что удастся *уменьшить* количество *различных* явлений и тем самым их лучше понять.

Способ получать частичные ответы на подобные вопросы был придуман еще несколько сот лет назад. *Наблюдение*, *размышление* и *опыт* — вот что составляет так называемый *научный метод*. Мы ограничимся здесь только голым описанием фундаментальных идей физики, основ мировоззрения, возникшего в физике от применения научного метода.

Что значит «понять» что-либо? Представьте себе, что сложный строй движущихся объектов, который и есть мир, — это что-то вроде гигантских шахмат, в которые играют боги, а мы следим за их игрой. В чем правила игры, мы не знаем; все, что нам разрешили, — это *наблюдать* за игрой. Конечно, если посмотреть подольше, то кое-какие правила можно ухватить. Под *основными физическими воззрениями*, под *фундаментальной физикой* мы понимаем *правила игры*. Но, даже зная все правила, можно не понять какого-то хода просто из-за его сложности или ограниченности нашего ума. Тот, кто играет в шахматы, знает, что правила выучить легко, а вот понять ход игрока или выбрать наилучший ход порой очень трудно. Ничуть не лучше, а то и хуже обстоит дело в природе. Не исключено, что в конце концов все правила будут найдены, но пока отнюдь не все они нам известны. То и дело тебя поджидает рокировка или какой-нибудь другой непонятный ход. Но, помимо того, что мы не знаем всех правил, лишь очень и очень редко нам удается действительно объяснить что-либо на их основе. Ведь почти все встречающиеся положения настолько сложны, что нет никакой возможности, заглядывая в правила, проследить за планом игры, а тем более предугадать очередной ход. Приходится поэтому органичиваться самыми основными правилами. Когда мы разбираемся в них, то уже считаем, что «поняли» мир.

Но откуда мы знаем, что те правила, которые мы «ощущаем», справедливы на самом деле? Ведь мы не способны толково разобрать ход игры. Существует, грубо говоря, три способа проверки. Во-первых, мыслимы положения, когда природа устроена (или мы ее устраиваем) весьма просто, всего из нескольких частей; тогда можно точно предсказать все, что случится, проверив тем самым правила. (В углу доски может оказаться всего несколько фигур, и все их движения легко себе представить.)

Есть и второй, довольно неплохой, путь проверки правил: надо из этих правил вывести новые, более общие. Скажем, слон ходит только по диагонали; значит, сколько бы он ни ходил, он всегда окажется, например, на черном поле. Стало быть, не вникая в детали, наши представления о движении слона всегда можно проверить по тому, остается ли он все время на черном поле. Конечно, не исключено, что внезапно слон очутился на *белом* поле: после того как его побили, пешка прошла на последнюю горизонталь и превратилась в белопольного слона. Так же и в физике. Долгое время мы располагаем правилом, которое превосходно работает повсюду, даже когда детали процесса нам неизвестны, и вдруг иногда всплывает *новое правило*. С точки зрения физических основ самые интересные явления происходят в *новых* местах, там, где правила не годятся, а не в тех местах, где они *действуют*! Так открываются новые правила.

Есть и третий способ убедиться, что наши представления об игре правильны; мало оправданный по существу, он, пожалуй, самый мощный из всех способов. Это путь *грубых приближений*. Мы можем не знать, почему Алехин пошел *именно этой фигурой*. Но в *общих чертах* мы можем понимать, что он, видимо, собирает все фигуры для защиты короля, и сообразить, что в сложившихся обстоятельствах это самое разумное. Точно так же мы часто более или менее понимаем природу, хотя не знаем и не понимаем *каждого хода отдельной фигуры*.

Когда-то все явления природы грубо делили на классы — теплота, электричество, механика, магнетизм, свойства веществ, химические явления, свет (или оптика), рентгеновские лучи, ядерная физика, тяготение, мезонные явления и т. д. Цель-то, однако, в том, чтобы понять *всю природу* как разные стороны *одной совокупности* явлений. В этом задача фундаментальной теоретической физики нынешнего дня: *открыть законы, стоящие за опытом, объединить эти классы*. Исторически всегда рано или поздно удавалось их слить, но проходило время, возникали новые открытия, и опять вставала задача их включения в общую схему. Однажды уже возникла было слитная картина мира — и вдруг были открыты лучи Рентгена... Со временем произошло новое слияние... и тут обнаружили существование мезонов. Поэтому на любой стадии игра выглядит беспорядочно, незаконченно. Многое бывает объяснено с единой точки зрения, но всегда какие-то проволочки и нитки все же болтаются, всегда где-нибудь торчит что-то несуразное. Таково сегодняшнее положение вещей, которое мы попытаемся описать.

Вот взятые из истории примеры слияния. Во-первых, *теплоту* удалось свести к *механике*. Чем сильнее движение атомов, тем больше запас тепла системы; выходит, что *теплота, да и все температурные эффекты, могут быть поняты с помощью законов механики*. Другое величественное объединение было отпраздновано, когда обнаружилась связь между электричеством, магнетизмом и светом. Оказалось, что это разные стороны одной сущности; сейчас мы называем ее *электромагнитным полем*. А химические явления, свойства различных веществ и поведение атомных частиц объединились *квантовой химией*.

Возникает естественный вопрос: будет ли возможно в конце концов *все* слить воедино и обнаружить, что весь наш мир есть просто различные стороны чего-то одного? Этого никто не знает. Мы только знаем, что по мере нашего продвижения вперед то и дело удается что-то с чем-то объединить, а после опять что-то перестает укладываться в общую картину, и мы заново принимаемся раскладывать части головоломки, надеясь сложить из них что-нибудь целое. А сколько частей в головоломке, и будет ли у нее край — это никому не известно. И не будет известно, пока мы не сложим всей картины, если только когда-нибудь это вообще будет сделано. Здесь мы хотим только показать, насколько далеко зашел процесс слияния, как сегодня обстоит дело с объяснением основных явлений за счет наименьшего количества принципов. Или, выражаясь проще, *из чего все состоит и сколько всего таких элементов*?

§ 2. Физика до 1920 года

Нам было бы нелегко начать прямо с сегодняшних взглядов. Посмотрим лучше, как выглядел мир примерно в 1920 г., а затем сотрем с этой картины лишнее.

До 1920 г. картина была примерно такова. «Сцена», на которой выступает Вселенная, — это трехмерное *пространство*, описанное еще Евклидом; все изменяется в среде, называемой *временем*. Элементы, выступающие на сцене, — это *частицы*, например атомы; они обладают известными свойствами, скажем свойством инерции: когда частица движется в каком-то направлении, то делает она это до тех пор, пока на нее не подействуют *силы*. Следовательно, второй элемент — это *силы*; считалось, что они бывают двух сортов. Первый, чрезвычайно запутанный тип — сила взаимодействия, т. е. сила, скрепляющая атомы в разных их комбинациях; она, например, и решает, быстрее или медленнее начнет растворяться соль при нагревании. Другой же сорт сил — это взаимодействие на далеких расстояниях — притяжение, спокойное и плавное; оно меняется обратно пропорционально квадрату расстояния и именуется *тяготением*, или *гравитацией*. Закон ее известен и прост. Но *почему* тела остаются в движении, начав двигаться, или *отчего* существует закон тяготения — это было неизвестно.

Продолжаем наше описание природы. С этой точки зрения газ, как, впрочем, и *все* вещество, это мириады движущихся частиц. Таким образом, многое из увиденного нами на морском берегу теперь запросто увязывается в единое целое. Давление сводится к ударам атомов о стенки; снос атомов (их движение в одну сторону) — это ветер; *хаотические* внутренние движения — это *теплота*. Волны — избыток давления, места, где собралось слишком много частиц; разлетаясь, они нагнетают в новых местах такие же скопления частиц; эти волны избытка плотности суть *звуки*. Понять все это было немаловажным достижением (кое о чем мы уже писали в предыдущей главе).

Какие *сорта* частиц существуют? В то время считалось, что их 92; восемьдесят девять типов атомов были к тому времени открыты. Каждый тип имел свое название.

Дальше возникала проблема: *что такое силы близкодействия*. Почему атом углерода притягивает один, в лучшем случае два атома кислорода, но не более? В чем механизм взаимодействия между атомами? Уж не тяготение ли это? Нет. Оно чересчур слабо для этого. Надо представить себе силу, сходную с тяготением, тоже обратно пропорциональную квадрату расстояния, но несравненно более мощную. У нее есть еще одно отличие. Тяготение — это всегда притяжение; допустим теперь, что бывают «предметы» *двоякого сорта*, и эта новая сила (имеется, конечно, в виду электричество) обладает таким свойством, что одинаковые сорта *отталкиваются*, а разные *притягиваются*. «Предмет», несущий с собой это сильное взаимодействие, называется *зарядом*.

Что же тогда получается? Положим, что два различных сорта (плюс и минус) приложены друг к другу вплотную. Третий заряд находится вдалеке. Почувствует ли он притяжение? *Практически нет*, если первые два одинаковы по величине: притяжение одного и отталкивание другого уравновесятся. Значит, на заметных расстояниях сила очень мала. Но когда третий заряд *приблизится вплотную*, то возникнет *притяжение*: отталкивание однородных зарядов и притяжение разнородных будут стремиться свести между собой разнородные заряды и удалить друг от друга однородные. В итоге отталкивание окажется слабее притяжения. По этой причине атомы, слагающиеся из положительных и отрицательных зарядов, мало влияют друг на друга на заметных расстояниях. Зато уже если они сблизятся, то свободно могут «разглядывать изнутри» друг друга, перестраивать расположение своих зарядов и сильно взаимодействовать. В конечном итоге именно *электрическая* сила объясняет взаимодействие атомов. Сила эта столь велика, что все плюсы и минусы обычно вступают в предельно тесную связь друг с другом: они стянуты насколько возможно. Все тела, даже наши собственные, состоят из мельчайших плюс- и минус-долек, очень сильно взаимодействующих друг с другом. Количество плюсов и минусов хорошо сбалансировано. Только на мгновение случайно можно соскрести несколько плюсов или минусов (обычно минусы соскребать легче); тогда электрическая сила окажется *неуравновешенной* и можно почувствовать действие электрического притяжения.

Чтобы дать представление о том, насколько электричество сильнее тяготения, расположим две песчинки размером в миллиметр в 30 *м* одна от другой. Пусть все заряды только притягиваются и их взаимодействие друг на друга внутри песчинок не погашается взаимно. С какой силой эти две песчинки притягивались бы? С силой в *три миллиона тонн*! Понимаете теперь, почему *малейшего* избытка или нехватки положительных или отрицательных зарядов достаточно, чтобы произвести заметное электрическое действие? По той же причине заряженные тела не отличаются ни по массе, ни по размеру от незаряженных: нужно слишком мало частиц, чтобы зарядить тело, чтобы почувствовать, что оно заряжено.

Зная все это, легко было представить себе и устройство атома. Считалось, что в центре его положительно заряженное электричеством очень массивное «ядро», оно окружено некоторым числом «электронов», очень легких и заряженных отрицательно. Забегая вперед, заметим, что впоследствии в самом ядре были обнаружены два рода частиц — протоны и нейтроны, весьма тяжелые и обладающие близкими массами. Протоны заряжены положительно, а нейтроны не заряжены вовсе. Когда в ядре атома имеется шесть протонов и ядро окружено шестью электронами (отрицательные частицы обычного мира материальных тел — все электроны, они намного легче протонов и нейтронов), то этот атом в химической таблице стоит под номером 6 и называется углеродом. Атом, имеющий номер 8, называется кислородом, и т. д. Химические свойства зависят от внешней *оболочки* — электронов, а точнее, только от того, *сколько* их там; все *химические* особенности вещества зависят от одного-единственного числа — количества электронов. (Список названий элементов, составленный химиками, на самом деле может быть заменен нумерацией 1, 2, 3 и т. д. Вместо того чтобы говорить «углерод», можно было бы сказать «элемент шесть», подразумевая шесть электронов. Но, конечно, когда открывали элементы, не подозревали, что их можно так пронумеровать; к тому же именовать их по номерам не очень удобно. Лучше, чтобы у каждого из них было собственное имя и символ.)

И еще многое другое стало известно об электрической силе. Естественно было бы толковать электрическое взаимодействие как простое притяжение двух предметов, положительно и отрицательно заряженных. Однако выяснилось, что такой подход плохо помогает уяснению природы электрической силы. Толкование, более отвечающее положению вещей, таково: когда где-то имеется положительный заряд, то он искривляет в каком-то смысле пространство, создает в нем некоторое условие для того, чтобы минус-заряд, помещенный в это пространство, ощутил действие силы. Эта возможность порождать силы называется *электрическим полем*. Когда электрон помещен в электрическое поле, мы говорим, что он «притягивается». При этом действуют два правила: а) заряды создают поле и б) на заряды в поле действуют силы, заставляя их двигаться. Причина этого станет ясна, когда мы разберем следующее явление. Если мы зарядим тело, скажем расческу, электричеством, а затем положим рядом заряженный клочок бумаги и начнем водить расческой взад и вперед, то бумага будет все время поворачиваться к расческе. Ускорив движение расчески, можно обнаружить, что бумага несколько отстает от ее движения, возникает *запаздывание действия*. (Сперва, когда мы водим расческой медленно, дело усложняется *магнетизмом*. Магнитные влияния появляются, когда заряды *движутся друг относительно друга*, так что магнитные и электрические силы в действительности могут оказаться проявлениями одного и того же поля, двумя сторонами одного и того же явления. Изменяющееся электрическое поле не может существовать без магнитного действия.) Если бумагу отодвинуть, запаздывание возрастет. И тогда наблюдается интересная вещь. Хотя сила, действующая между двумя заряженными телами, изменяется обратно *квадрату* расстояния, при колебаниях заряда его влияние *простирается намного дальше*, чем можно было ожидать. Это значит, что оно уменьшается медленнее, чем по закону обратных квадратов.

Что-то похожее на это происходит, если в бассейн с водой брошен поплавок; можно подействовать на него «непосредственно», бросив в воду поблизости другой поплавок; при этом если вы смотрели *только на поплавки* (не на воду), то вы увидите лишь, что один из них сместился в ответ на движения другого, т. е. что между ними существует какое-то *взаимодействие*. А ведь дело только в том, что вы взволновали *воду*: это *вода* шевельнула второй поплавок. Из этого можно даже вывести «закон»: если шевельнуть чуть-чуть поплавок, все соседние поплавки зашевелятся. Будь поплавок подальше, он бы едва покачнулся, ведь мы возмутили поверхность воды один раз и *в одном месте*. Но когда мы начнем непрерывно покачивать поплавок, возникнет новое явление: побегут *волны* и влияние колебаний поплавка распространится *намного дальше.* Это будет колебательное влияние, и уж его не объяснить прямым взаимодействием поплавков. Мысль о непосредственном взаимодействии придется заменить предположением о существовании воды или, для электрических зарядов, того, что называется *электромагнитным полем.*

Таблица 2.1 ● ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ СПЕКТР

Частоты, *гц*	Название	Общее поведение
10^2	Электрические возмущения	Поле
$5 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^6$	Радиоволны	Волны
10^8	Ультракороткие волны и телевидение	
10^{10}	Радиолокация	
$5 \cdot 10^{14} - 5 \cdot 10^{15}$	Свет	
10^{18}	Рентгеновские лучи	Частицы
10^{21}	Гамма-излучение (ядерное)	
10^{24}	Гамма-излучение («искусственное»)	
10^{27}	Гамма-излучение (в космических лучах)	

Электромагнитное поле может передавать волны; одни волны — это *световые*, другие — *радиоволны*, общее же их название *электромагнитные волны.* Частота колебаний этих волн *разная. Только этим* они и отличаются одна от другой. Все чаще и чаще колебля заряд вверх-вниз и наблюдая затем, что получится, мы увидим разные эффекты; все они могут быть сведены в единую систему, если присвоить каждому номер — число колебаний в секунду. Обычные помехи от тока, текущего по проводам в жилых домах, имеют частоту порядка сотни колебаний в секунду. Повысив частоту до 500—1000 килогерц (1 *кгц* = 1000 колебаний в секунду), мы из квартиры выйдем «на воздух», потому что это — область радиочастот. (*Воздух* здесь, конечно, ни при чем! Радиоволны распространяются и в безвоздушном пространстве.) Увеличив еще частоты, мы доберемся до ультракоротких волн и телевидения. Затем пойдут совсем короткие волны, их назначение — *радиолокация.* Еще дальше, и нам уже не нужно приборов, чтобы регистрировать эти волны, их можно видеть невооруженным глазом. В полосе частот от $5 \cdot 10^{14}$ до $5 \cdot 10^{15}$ *гц* колебания заряженной расчески (если наловчиться так быстро водить ею) предстали бы перед нами в зависимости от частоты как красный, голубой или фиолетовый свет. Частоты с одной стороны полосы называются инфракрасными, а с другой —

ультрафиолетовыми. Тот факт, что мы способны видеть на определенных частотах, с физической точки зрения не делает эту часть электромагнитного спектра более впечатляющей, но с человеческой точки зрения это, конечно, самая интересная часть спектра. Продвигаясь по частоте еще дальше, мы получим рентгеновские лучи; это всего лишь высокочастотный свет. А еще дальше пойдет гамма-излучение (табл. 2.1). Гамма-излучение и рентгеновские лучи — почти одно и то же. Обычно те электромагнитные волны, которые исходят от ядер, называют гамма-излучением, а те, которые исходят от атомов, — рентгеновскими лучами, но если их частота совпадает, то физически эти волны уже не отличишь, каков бы ни был их источник. Волны еще более высоких частот, скажем 10^{24} *гц*, можно, оказывается, получать искусственно, на ускорителях; на синхротроне в КАЛТЕХе умеют это делать.

И наконец, неслыханно высокие частоты (в тысячу раз больше) обнаруживаются далее в волнах, присутствующих в *космических лучах*. Эти волны мы уже не умеем контролировать.

§ 3. Квантовая физика

Мы описали электромагнитное поле и поняли, что оно может передаваться как волны. Сейчас мы увидим, что на самом деле эти волны ведут себя очень странно: они отнюдь не похожи на волны. На высоких частотах они гораздо больше смахивают на *частицы*! Наука, которая умеет объяснять такое странное поведение, — *квантовая механика* — была изобретена вскоре после 1920 г. Еще до этого привычную картину трехмерного пространства и отдельно существующего времени изменил Эйнштейн; сперва он превратил ее в сочетание, называемое «пространство-время», а потом, чтобы объяснить тяготение, — еще и в «*искривленное* пространство-время». Таким образом, «сценой» стало уже пространство-время, а тяготение, по всей вероятности, это видоизмененное пространство-время.

А затем выяснилось, что и законы движения частиц неверны. Механические законы «инерции» и «силы», законы Ньютона — все они оказались *непригодными* в мире атомов. Было обнаружено, что поведение мельчайших телец *ничем не напоминает* поведения обычных, больших тел. Конечно, физика от этого становится труднее, но зато намного интереснее. Труднее потому, что поведение малых телец совершенно «неестественно»; оно противоречит нашему опыту, оно вообще ни на что не похоже и его нельзя описать никаким иным путем, кроме аналитического; а ведь это требует большого воображения.

Много особенностей есть у квантовой механики. В первую очередь она запрещает считать, что частица может двигаться через определенное точно указанное место с определенной точно указанной скоростью. Чтобы показать, насколько ошибочна обычная механика, отметим, что в квантовой механике имеется правило, согласно которому никто в одно и то же время не может знать и место и быстроту движения частицы. Неопределенность в импульсе и неопределенность в положении частицы дополняют друг друга: их произведение постоянно. Мы пока напишем это правило в виде $\Delta x \Delta p \geqslant \hbar/2\pi$, не вникая в подробности. Это правило представляет собой объяснение таинственного парадокса: раз атомы сделаны из плюс- и минус-зарядов, отчего бы минус-зарядам просто не усесться на плюс-заряды (они ведь притягиваются), отчего бы им не сблизиться до того тесно, что они погасят друг друга? *Почему атомы столь велики*? Почему ядро находится в центре, а электроны — вокруг него? Сперва объясняли это тем, что ядро очень велико; но ведь это не так, оно *очень мало*. Диаметр атома примерно 10^{-8} *см*, а ядра — что-то около 10^{-13} *см*. Чтобы увидеть ядро, надо было бы атом увеличить до размеров комнаты, и то ядро казалось бы малюсеньким, едва-едва различимым пятнышком; при этом все же почти *весь вес* атома приходился бы на бесконечно маленькое *ядро*. Но почему же электроны не падают на него? А вот из-за того же принципа неопределенности: если б электроны оказались в ядре, мы бы очень точно знали их положение и, следовательно, их импульс непременно должен был бы стать очень *большим* (но неопределенным), а, значит, *кинетическая энергия* тоже резко бы возросла. С такой энергией он бы выскочил из ядра. Немудрено, что ядро идет на соглашение с электронами: они оставляют себе какое-то место для этой неопределенности и затем колеблются с некоторым наименьшим запасом движения, лишь бы не нарушить этого правила. (Вспомните еще, что когда кристалл охлажден до абсолютного нуля, мы считаем, что атомы все же не прекращают своего движения, они все еще колеблются. Почему? Да если бы атомы остановились, мы бы знали и то, что они стоят, и где стоят, а это противоречит принципу неопределенности. Мы не смеем знать и где они и сколь быстро движутся, вот атомы и вынуждены беспрерывно дрожать!)

А вот другое интереснейшее изменение в идеях и философии науки, осуществленное квантовой механикой: невозможно никогда предсказать *точно*, что произойдет в каких-то обстоятельствах. Например, можно приготовить атом, способный излучать свет; момент испускания света мы можем заметить, поймав фотон (придет время, мы поговорим об этом). Но мы не можем предсказать, *когда* он собирается излучить, или если атомов несколько, то *какой* из них испустит свет. Может быть, по-вашему, все это из-за того, что в атомах есть какие-то внутренние «колесики», которых мы еще не разглядели? Нет, в атоме *нет* потайных колес; природа, насколько мы ее сегодня понимаем, ведет себя так, что *принципиально невозможно* делать точные предсказания о том, *что́ именно произойдет* в данном опыте. Ужасно, не правда ли? Ведь философы прежде всегда нас учили, что одно из основных атрибутов науки, неотделимых от нее, — это требование, чтобы в одинаковых условиях всегда происходили одни и те же события. Но это просто *неверно*, это *вовсе не* основное условие науки. На самом деле в равных обстоятельствах одинаковые события не происходят; предсказать их можно только в среднем, только статистически. И все-таки наука еще не совсем погибает.

Кстати, философы порой много говорят о вещах, *совершенно необходимых* науке; и это всегда, как можно в том убедиться, весьма наивно и, по всей видимости, ошибочно. К примеру, некоторые философы, и не только философы, утверждали, что для научных открытий существенно, чтобы один и тот же опыт, сделанный, скажем, в Стокгольме и в Кито, приводил к *одним и тем же* результатам. Но ведь это абсолютно неверно. Для *науки* это условие необязательно; оно может быть *установлено после опыта*, но нельзя этого требовать до опыта. Если, например, в Стокгольме проделан опыт по наблюдению северного сияния, то с какой стати он должен удасться в Кито? Вы там и сияния-то не увидите. «Но это ясно, — скажете вы. — Ничего иного и не могло быть, раз вы исследуете что-то внешнее, далекое от нас. А вот вы заберитесь в Стокгольме в ящик и закройте в нем шторки, ощутите ли вы тогда хоть какое-нибудь различие?» Бесспорно. Подвесьте в ящике маятник на шарнирном подвесе, его плоскость во время качаний начнет в Стокгольме медленно поворачиваться, а в Кито — нет, хотя шторки и там и там опущены. И этот факт вовсе не приведет к гибели науки. Ведь *в чем* ее основное предположение, ее фундаментальная философия? Мы уже сказали об этом в гл. 1: *единственное мерило справедливости любой идеи — это опыт*. Если выясняется, что большинство экспериментов в Кито приводят к тому же, что и в Стокгольме, то из этого «большинства экспериментов» можно вывести общий закон, а про те эксперименты, которые не приводят к одинаковым результатам, мы скажем, что на них повлиял характер местности близ Стокгольма. Мы можем разными способами подытоживать опыты, но пусть нас прежде времени не учат, что́ это за способы. Если нам говорят, что одни и те же опыты всегда должны приводить к одним и тем же результатам, — это прекрасно;

но когда проверка покажет, что это *не так*, стало быть, это *не так*. Верьте только своим глазам, а прочие свои идеи формулируйте уже на основе опыта.

Вернемся опять к квантовой механике и к основам физики. Мы не будем пока входить в детали квантовомеханических принципов, их не так просто понять. Мы их просто примем, как они есть, а остановимся на кое-каких их следствиях. Вот одно из них: то, что мы обычно считаем волнами, может вести себя как частица; частицы же ведут себя как волны; то же относится и к любым телам. Между волной и частицей просто нет различия. Квантовая механика *объединяет* идею поля, волн поля и частиц в одно. При низких частотах волновые свойства проявляются более явственно и поэтому оказываются полезнее для приближенного описания в образах нашего повседневного опыта. Но по мере того, как частота возрастает, становится все очевиднее, что через приборы, измеряющие наше явление, проходит не волна, а частица. На самом деле, хотя мы и говорим о высоких частотах, волновые явления, если частота их превышает 10^{12} *гц*, заметить уже нельзя. Мы только *приходим к выводу* о наличии высокой частоты, зная энергию частиц и предполагая, что верна идея квантовой механики о частице-волне.

Возникает к тому же и новый взгляд на электромагнитное взаимодействие. В добавление к электрону, протону и нейтрону появляется новая *частица*, называемая *фотоном*. Само это новое воззрение на взаимодействие электронов и фотонов, т. е. электромагнитную теорию, правильную в квантовомеханическом смысле, называют *квантовой электродинамикой*. Эту фундаментальную теорию взаимодействия света и вещества, или электрического поля и зарядов, следует считать крупнейшим достижением физики. В ней одной таятся главные правила всех обычных явлений, кроме тяготения и ядерных процессов. Например, из квантовой электродинамики выводятся все известные электрические, механические и химические законы: законы соударений бильярдных шаров, движения проводников в магнитном поле, удельной теплоемкости угарного газа, цвета неоновых букв, плотности соли и реакции образования воды из водорода и кислорода. Все это поддается расчету, если условия, в каких протекает явление, просты. Практически этого никогда не случается, но все же мы более или менее понимаем, что́ происходит. И до сего времени не было найдено ни одного исключения из законов квантовой электродинамики, только в атомных ядрах ее оказывается недостаточно; да и про них мы не можем сказать, что здесь наблюдаются какие-то исключения, просто мы не знаем, что́ там происходит.

Далее, квантовая электродинамика — в принципе это также теория всей химии и всех жизненных процессов, если предположить, что жизнь сводится в конечном счете к химии, а значит, и к физике (сама химия уже свелась к физике, и та часть физики, которая включает в себя химию, уже разработана). Мало того, та же квантовая электродинамика, эта величественная наука, предсказывает немало и новых явлений. Во первых, она говорит о свойствах фотонов очень высоких энергий, гамма-излучения и т. д. Она предсказала еще одно очень оригинальное явление, а именно, что, кроме электрона, должна существовать другая частица с той же массой, но с противоположным зарядом, так называемый *позитрон*, и что электрон и позитрон, повстречавшись, могут друг друга истребить, излучив при этом свет или гамма-кванты (что, собственно, одно и то же; свет и γ-излучение — лишь разные точки на шкале частот).

По-видимому, справедливо и обобщение этого правила: существование античастиц для любого сорта частиц. Античастица электрона носит имя позитрона; у других частиц названия присвоены по другому принципу: если частицу назвали *так-то*, то античастицу называют *анти-так-то*, скажем, антипротон, антинейтрон. В квантовую электродинамику вкладывают всего *два числа* (они называются массой электрона и зарядом электрона) и полагают, что все остальные числа в мире можно вывести из этих двух. На самом деле, однако, это не совсем верно, ибо существует еще целая совокупность химических чисел — весов атомных ядер. Ими нам и следует сейчас заняться.

§ 4. Ядра и частицы

Из чего состоят ядра? Чем части ядра удерживаются вместе? Обнаружено, что существуют силы огромной величины, которые и удерживают составные части ядра. Когда эти силы высвобождаются, то выделяемая энергия по сравнению с химической энергией огромна, это все равно, что сравнить взрыв атомной бомбы с взрывом тротила. Объясняется это тем, что атомный взрыв вызван изменениями внутри ядра, тогда как при взрыве тротила перестраиваются лишь электроны на внешней оболочке атома.

Так каковы же те силы, которыми нейтроны и протоны скреплены в ядре?

Электрическое взаимодействие связывают с частицей — фотоном. Аналогично этому Юкава предположил, что силы притяжения между протоном и нейтроном обладают полем особого рода, а колебания этого поля ведут себя как частицы. Значит, не исключено, что, помимо нейтронов и протонов, в мире существуют некоторые иные частицы. Юкава сумел вывести свойства этих частиц из уже известных характеристик ядерных сил. Например, он предсказал, что они должны иметь массу, в 200—300 раз большую, чем электрон. И — о, чудо! — в космических лучах как раз открыли частицу с такой массой! Впрочем, чуть погодя выяснилось, что это совсем не та частица. Назвали ее μ-мезон, или мюон.

И все же несколько попозже, в 1947 или 1948 г., обнаружилась частица — π-мезон, или пион, — удовлетворявшая требованиям Юкавы. Выходит, чтобы получить ядерные силы, к протону и нейтрону надо добавить пион. «Прекрасно! — воскликнете вы. — С помощью этой теории мы теперь соорудим квантовую ядродинамику, и пионы послужат тем целям, ради которых их ввел Юкава; посмотрим, заработает ли эта теория, и если да, то объясним все». Напрасные надежды! Выяснилось, что расчеты в этой теории столь сложны, что никому еще не удалось их проделать и извлечь из теории какие-либо следствия, никому не выпала удача сравнить ее с экспериментом. И тянется это уже почти 20 лет!

С теорией что-то не клеится; мы не знаем, верна она или нет; впрочем, мы уже знаем, что в ней чего-то не достает, что *какие-то* неправильности в ней таятся. Покуда мы топтались вокруг теории, пробуя вычислить следствия, экспериментаторы за это время кое-что открыли. Ну, тот же μ-мезон, или мюон. А мы до сей поры не знаем, на что он годится. Опять же, в космических лучах отыскали множество «лишних» частиц. К сегодняшнему дню их уже свыше 30, а связь между ними все еще трудно ухватить, и непонятно, чего природа от них хочет и кто из них от кого зависит. Перед нами все эти частицы пока не предстают как разные проявления одной и той же сущности, и тот факт, что имеется куча разрозненных частиц, есть лишь отражение наличия бессвязной информации без сносной теории. После неоспоримых успехов квантовой электродинамики — какой-то набор сведений из ядерной физики, обрывки знаний, полуопытных-полутеоретических. Задаются, скажем, характером взаимодействия протона с нейтроном и смотрят, что́ из этого выйдет, не понимая на самом деле, откуда эти силы берутся. Сверх описанного никаких особых успехов не произошло.

Но химических элементов ведь тоже было множество, и внезапно между ними удалось увидеть связь, выраженную периодической таблицей Менделеева. Скажем, калий и натрий — вещества, близкие по химическим свойствам, — в таблице попали в один столбец. Так вот, попробовали соорудить таблицу типа таблицы Менделеева и для новых частиц. Одна подобная таблица была предложена независимо Гелл-Манном в США и Нишиджимой в Японии. Основа их классификации —

новое число, наподобие электрического заряда. Оно присваивается каждой частице и называется ее «странностью» S. Число это не меняется (так же как электрический заряд) в реакциях, производимых ядерными силами.

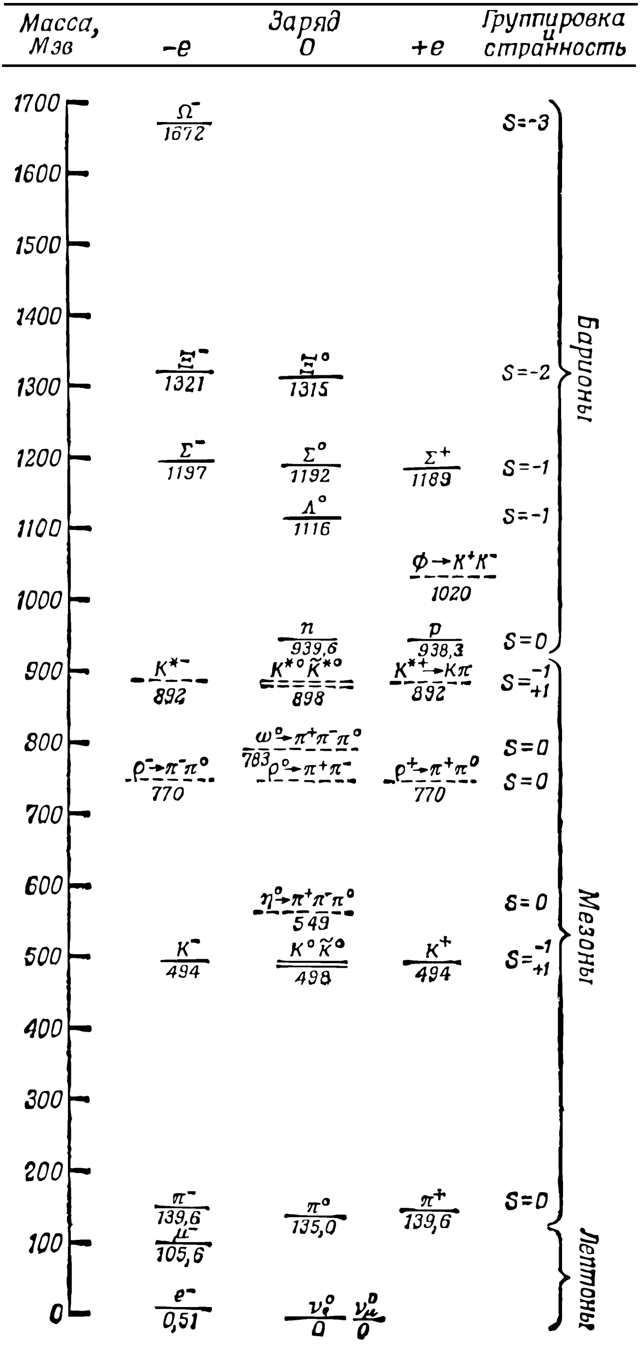
В табл. 2.2 приведены новые частицы. Мы не будем пока подробно говорить о них. Но из таблицы по крайней мере видно, как мало мы еще знаем. Под символом каждой частицы стоит ее масса, выраженная в определенных единицах, называемых мегаэлектронвольт, или *Мэв* (1 *Мэв* — это $1{,}782 \cdot 10^{-27}$ *г*). Не будем входить в исторические причины, заставившие ввести эту единицу. Частицы помассивнее стоят в таблице повыше. В одной колонке стоят частицы одинакового электрического заряда, нейтральные — посерединке, положительные — направо, отрицательные — налево.

Частицы подчеркнуты сплошной линией, «резонансы» — штрихами. Некоторых частиц в таблице нет совсем: нет фотона и гравитона, очень важных частиц с нулевыми массой и зарядом (они не попадают в барион-мезон-лептонную схему классификации), нет и кое-каких новейших резонансов (φ, f, $Y^{*\prime}$ и др.). Античастицы мезонов в таблице приводятся, а для античастиц лептонов и барионов надо было бы составить новую таблицу, сходную с этой, но только зеркально отраженную относительно нулевой колонки. Хотя все частицы, кроме электрона, нейтрино, фотона, гравитона и протона, неустойчивы, продукты их распада написаны только для резонансов. Странность лептонов тоже не написана, так как это понятие к ним неприменимо — они не взаимодействуют сильно с ядрами.

Частицы, стоящие над нейтроном и протоном, называют *барионами*. Это «лямбда» с массой 1115,4 *Мэв* и три другие — «сигмы», называемые сигма-минус, сигма-нуль, сигма-плюс, с почти одинаковыми массами. Группы частиц почти одинаковой массы (отличие на 1—2%) называются *мультиплетами*. У всех частиц в мультиплете странность одинакова. Первый мультиплет — это пара (*дублет*) протон — нейтрон, потом идет *синглет* (одиночка) лямбда, потом — *триплет* (тройка) сигм, дублет кси и синглет омега-минус. Начиная с 1961 г., начали открывать новые тяжелые частицы. Но *частицы ли* они? Живут они так мало, распадаются так быстро, что неизвестно, назвать ли их новыми частицами или считать «резонансным» взаимодействием между их продуктами распада, скажем, Λ и π при некоторой фиксированной энергии.

Для ядерных взаимодействий, кроме барионов, необходимы другие частицы — *мезоны*. Это, во-первых, три разновидности пионов (плюс, нуль и минус), образующие новый триплет. Найдены и новые частицы — K-мезоны (это дублет K^+ и K^0). У каждой частицы бывает античастица, если только частица

Таблица 2.2 ● ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ



не оказывается *своей собственной* античастицей, скажем π^+ и π^- — античастицы друг друга, а π^0 — сам себе античастица. Античастицы и K^- с K^+, и K^0 с $\overline{K^0}$. Кроме того, после 1961 г. мы начали открывать новые мезоны, или *вроде*-мезоны, распадающиеся почти мгновенно. Одна такая диковинка называется омега, ω, ее масса 783, она превращается в три пиона; есть и другое образование, из которого получается пара пионов.

Подобно тому как из очень удачной таблицы Менделеева выпали некоторые редкие земли, точно так же из нашей таблицы выпадают некоторые частицы. Это те частицы, которые с ядрами сильно не взаимодействуют, к ядерному взаимодействию отношения не имеют и между собой сильно тоже не взаимодействуют (под сильным понимается мощный тип взаимодействия, дающего атомную энергию). Называются эти частицы *лептоны*; к ним относятся электрон (очень легкая частица с массой 0,51 *Мэв*) и мюон (с массой в 206 раз больше массы электрона). Насколько мы можем судить по всем экспериментам, электрон и мюон различаются *только* массой. Все свойства мюона, все его взаимодействия ничем не отличаются от свойств электрона—только один тяжелее другого. Почему он тяжелее, какая ему от этого польза, мы не знаем. Кроме них, есть еще нейтральный лептон — *нейтрино*, с массой нуль. Более того, сейчас известно, что есть *два* сорта нейтрино: одни, связанные с электронами, а другие — с мюонами.

И наконец, существуют еще две частицы, тоже с ядрами не взаимодействующие. Одну мы знаем уже — это фотон; а если поле тяготения также обладает квантовомеханическими свойствами (хотя пока квантовая теория тяготения не разработана), то, возможно, существует и частица гравитон с массой нуль.

Что такое «масса нуль»? Массы, которые мы приводили, это массы *покоящихся* частиц. Если у частицы масса нуль, то это значит, что она не смеет *покоиться.* Фотон никогда не стоит на месте, скорость его равна всегда 300 000 *км/сек.* Мы с вами еще разберемся в теории относительности и попытаемся глубже вникнуть в смысл понятия массы.

Итак, мы встретились с целым строем частиц, которые все вместе, по-видимому, являются очень фундаментальной частью вещества. К счастью, эти частицы *не все* отличаются по своему взаимодействию друг от друга. Видимо, есть только *четыре типа* взаимодействий между ними. Перечислим их в порядке убывающей силы: ядерные силы, электрические взаимодействия, β-распадное взаимодействие и тяготение. Фотон взаимодействует со всеми заряженными частицами с силой, характеризуемой некоторым постоянным числом 1/137.

Детальный закон этой связи известен — это квантовая электродинамика. Тяготение взаимодействует со всякой *энергией*, но чрезвычайно слабо, куда слабее, чем электричество. И этот закон известен. Потом идут так называемые слабые распады: β-распад, из-за которого нейтрон распадается довольно медленно на протон, электрон и антинейтрино. Тут закон выяснен лишь частично. А так называемое сильное взаимодействие (связь мезона с барионом) обладает по этой шкале силой, равной единице, а закон его совершенно темен, хоть и известны кое-какие правила, вроде того, что количество барионов ни в одной реакции не меняется.

Таблица 2.3 ● ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Взаимодействие	Сила *	Закон
Фотон с заряженными частицами	$\sim 10^{-2}$	Известен
Тяготение с энергией	$\sim 10^{-40}$	»
Слабые распады	$\sim 10^{-5}$	Частично известен
Мезоны с барионами	~ 1	Неизвестен (кроме некоторых правил)

* «Сила» — безразмерная мера константы связи, проявляющаяся в каждом взаимодействии (знак $\sim$ означает «примерно»).

Положение, в котором находится современная физика, следует считать ужасным. Я бы подытожил его такими словами: вне ядра мы, видимо, знаем все; внутри него справедлива квантовая механика, нарушений ее принципов там не найдено. Сцена, на которой действуют все наши знания, — это релятивистское пространство-время; не исключено, что с ним связано и тяготение. Мы не знаем, как началась Вселенная, и мы ни разу не ставили опытов с целью точной проверки наших представлений о пространстве-времени на малых расстояниях, мы только *знаем*, что вне этих расстояний наши воззрения безошибочны. Можно было бы еще добавить, что правила игры — это принципы квантовой механики; и к новым частицам они, насколько нам известно, приложимы не хуже, чем к старым. Поиски происхождения ядерных сил приводят нас к новым частицам; но все эти открытия вызывают только замешательство. У нас нет полного понимания их взаимных отношений, хотя в некоторых поразительных связях между ними мы уже убедились. Мы, видимо, постепенно приближаемся к пониманию мира заатомных частиц, но неизвестно, насколько мы ушли по этому пути.

Глава **3**

ФИЗИКА И ДРУГИЕ НАУКИ

§ 1. Введение

Физика — это самая фундаментальная, самая всеобъемлющая из всех наук; огромным было ее влияние на все развитие науки. Действительно, ведь нынешняя физика вполне равноценна давнишней *натуральной философии*, из которой возникло большинство современных наук. Не зря физику вынуждены изучать студенты всевозможных специальностей; во множестве явлений она играет основную роль.

В этой главе мы попытаемся рассказать, какого рода фундаментальные проблемы встают перед соседними науками. Жаль, что нам не придется по-настоящему заняться этими науками, их проблемами; мы не сможем прочувствовать всю их сложность, тонкость и красоту. Из-за нехватки места мы не коснемся также связи физики с техникой, с промышленностью, с общественной жизнью и военным искусством. Даже на замечательной связи, объединяющей физику с математикой, мы не задержимся. (Математика, с нашей точки зрения, не наука — в том смысле, что она не относится к *естественным* наукам. Ведь мерило ее справедливости отнюдь не опыт.) Кстати, не все то, что не наука, уж обязательно плохо. Любовь, например, тоже не наука. Словом, когда какую-то вещь называют не наукой, это не значит, что с нею что-то неладно: просто не наука она, и все.

§ 2. Химия

Химия испытывает на себе влияние физики, пожалуй, сильней, чем любая другая наука, Когда-то, в свои младенческие годы, когда химия почти целиком сводилась к тому, что мы сейчас называем неорганической химией (т. е. химии веществ, не связанных с живыми телами), когда кропотливым трудом химиков открывались многие химические элементы, их связь друг с другом, изучались их соединения, анализировался состав почвы и минералов, в те годы химия сыграла важную роль в становлении физики. Эти науки взаимодействовали очень сильно: вся теория атомного строения вещества получила основательную поддержку в химическом эксперименте. Химическую теорию, т. е. теорию самих реакций, подытожила периодическая система Менделеева. Она выявила немало удивительных связей между разными элементами — стало ясно, что́ с чем и как соединяется; все эти правила составили неорганическую химию. Сами они в свою очередь были в конечном счете объяснены квантовой механикой. Стало быть, на самом деле теоретическая химия — это физика. Однако объяснение, даваемое квантовой механикой, — это все-таки объяснение *в принципе*. Мы уже говорили, что знание шахматных правил — это одно, а умение играть — совсем другое. Можно знать правила, а играть неважно. Точно так же очень и очень непросто точно предсказать, что произойдет в какой-то химической реакции. И все же в самых глубинах теоретический химии лежит квантовая механика.

Есть к тому же ветвь физики и химии, и очень важная ветвь, к которой они обе приложили руки. Речь идет о применении статистики к тем случаям, когда действуют законы механики, т. е. о *статистической механике*. В любой химической реакции действует много атомов, а движения их случайны и замысловаты. Если бы мы могли проанализировать каждое столкновение, подробно проследить движение каждой молекулы, то мы бы всегда знали, что случится. Но нужно так много чисел, чтобы отметить путь всех молекул, что никакой емкости вычислительной машины и уже во всяком случае емкости мозга не хватит. Значит, важно научиться работать с такими сложными системами. Статистическая механика, кроме того, лежит в основе теории тепловых явлений, или термодинамики.

В наше время неорганическая химия как наука свелась в основном к физической и квантовой химии; первая изучает скорости реакций и прочие их детали (как попадает молекула в молекулу, какая из частей молекулы оторвется первой и т. д.), а вторая помогает понимать происходящее на языке физических законов.

Другая ветвь химии — *органическая химия*, химия веществ, связанных с жизненными процессами. Одно время думали, что подобные вещества столь необыкновенны, что своими руками из неорганических веществ их изготовить нельзя. Но это оказалось не так: органические вещества отличаются от неорганических только большей сложностью расположения атомов. Органическая химия, естественно, тесно связана с биологией, снабжающей ее веществами, и с промышленностью; далее, многое из физической химии и квантовой механики столь же приложимо к органическим соединениям, как и к неорганическим. Впрочем, главные задачи органической химии вовсе не в этом, а в анализе и синтезе веществ, образуемых в биологических системах, в живых телах. Отсюда можно постепенно перейти к биохимии и к самой биологии, т. е. к молекулярной биологии.

§ 3. Биология

Итак, мы пришли к науке, которая занята изучением живого, — к *биологии*. Когда она делала свои первые шаги, биологи решали чисто описательные задачи; им нужно было выяснить, *каким* бывает живое, им приходилось, скажем, подсчитывать, сколько у блохи на ноге волосков, и т. д. Когда все это (с большим интересом) было изучено, они обратились к *механизму* функционирования живого, сперва, естественно, очень грубо, в общих чертах, потому что в разных тонкостях разобраться было непросто.

Когда-то между биологией и физикой существовали интересные отношения: именно биология помогла физике открыть *закон сохранения энергии*; ведь Майер установил этот закон при изучении количества тепла, выделяемого и поглощаемого живым организмом.

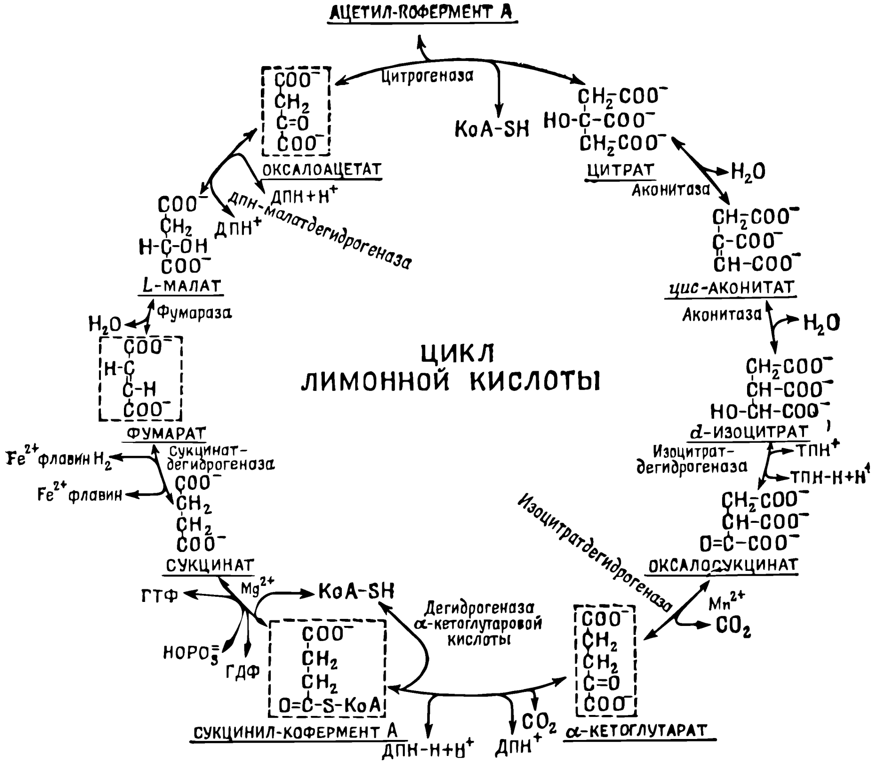
Если вглядеться в биологию живых организмов, можно заметить множество чисто физических явлений: циркуляцию крови, давление и т. п. Взять, к примеру, нервы. Наступив на острый камешек, мы мгновенно узнаем об этом: что-то нам о том говорит, какая-то информация поднимается вверх по ноге. Как же это происходит? Изучая нервы, биологи пришли к выводу, что это очень нежные трубочки со сложными, очень тонкими стенками. Через эти стенки в клетку поступают ионы; получается нечто вроде конденсатора с положительными ионами снаружи и отрицательными внутри. У такой мембраны есть замечательное свойство, если в одном месте она «разряжается», т. е. если в каком-то месте ионы пройдут насквозь, так что электрическое напряжение здесь упадет, то соседние ионы почувствуют это электрическое влияние; это так подействует на мембрану в соседнем месте, что она тоже пропустит сквозь себя ионы. В свою очередь это скажется на следующем месте и т. д. Возникнет волна «проницаемости» мембраны; она побежит вдоль нервного волокна, если один конец его «возбудится» острым камнем. Словно длинная цепочка костяшек домино, поставленных торчком; толкнешь крайнюю, она — следующую и т. д. Конечно, больше одного сообщения так не передашь, надо снова поднять все костяшки; и в нервной клетке тоже после этого идут процессы медленного накопления ионов и подготовки нерва к новому импульсу. Так мы узнаём, чтó мы делаем (или по крайней мере где мы находимся). Электрические явления при прохождении нервного импульса, конечно, можно регистрировать электрическими приборами. Поскольку эти явления *существуют*, то без физики электричества нельзя понять проводимость по нерву.

Обратное явление происходит, когда откуда-то из мозга по нерву передается сообщение. Что делается тогда на конце нерва? Нерв там дает разветвления, которые связаны с мышечной структурой; называют их *концевые ответвления*. По причинам, точно не известным, в момент, когда импульс достигает конца нерва, из него вылетают маленькие пакетики реактивов, называемые *ацетилхолин* (5—10 молекул за раз); они влияют на мышечное волокно, и оно сокращается — видите, как все просто! Но что же все-таки вынуждает мышцу сокращаться? Мышца — это большое число плотно расположенных волокон; в них содержатся два разных вещества — миозин и актомиозин; и все же механизм, при помощи которого химическая реакция, вызванная ацетилхолином, меняет размер молекулы, пока еще не выяснен. Иначе говоря, неизвестны самые основные процессы, ответственные за механические движения мышц.

Биология — настолько широкое поле деятельности, что есть уйма проблем, о которых мы даже не упоминаем; скажем, вопрос о том, как осуществляется зрение (что свет делает внутри глаза) или как работает ухо и т. д. (Как работает *мысль*, мы обсудим, когда будем говорить о психологии.)

Так вот, все эти вопросы, стоящие перед биологией, на самом деле для биолога отнюдь не главные, отнюдь не они лежат в основе жизни. Если мы их и поймем, нам все равно не понять сущности жизни. Вот вам пример: люди, изучающие нервы, понимают, что их работа очень нужна, ведь животных без нервов не бывает. Но *жизнь* без нервов *возможна*. У растений нет ни нервов, ни мышц, и все же они работают, живут (что одно и то же). Значит, самые фундаментальные проблемы биологии нужно искать глубже.

При этом мы установим, что у всех живых существ есть много общих черт. Самое же общее между ними то, что они состоят из *клеток*, внутри каждой из которых действует сложный механизм химических превращений. В растительных клетках, например, есть механизм поглощения света и вы-



Фиг. 3.1. Цикл Кребса.

работки сахарозы, которая потом в темноте поглощается, поддерживая жизнь растения. Когда животное поедает растение, сахароза порождает в животном цепь химических реакций, тесно связанных с фотосинтезом растений (и с обратной ему цепочкой в темноте).

В клетках живых организмов происходит множество хитро задуманных химических реакций: одно соединение превращается в другое, затем в третье, затем еще и еще. Фиг. 3.1 дает некое представление о гигантских усилиях, предпринятых в изучении биохимии; там сведены воедино наши знания о малой доле того множества цепочек реакций (примерно 1% общего количества), которые происходят в клетке.

Вы видите здесь ряд молекул, последовательно превращающихся одна в другую, — цикл с довольно мелкими шагами. Это — цикл Кребса, или дыхательный цикл. Судя по изменениям в молекулах, каждое вещество и каждый шаг в цикле довольно просты. Но *эти изменения относительно* *трудно воспроизводятся лабораторным путем.* Это открытие необыкновенной важности в биохимии. Дело вот в чем. Если есть два сходных вещества, то как раз их-то часто нельзя превратить друг в друга, потому что эти две формы обычно отделены энергетическим барьером, «перевалом». Ведь, желая перенести предмет на новое место на том же уровне по другую сторону перевала, вы сперва должны поднять его над перевалом. Это требует добавочной затраты энергии. По той же причине многие реакции не происходят, им не хватает так называемой *энергии активации.* Если вы хотите присоединить к химическому соединению лишний атом, то для того, чтобы он пристал куда надо, его следует придвинуть *вплотную*, иначе нужная перестановка не произойдет, он лишь немного взбежит по «склону» и скатится обратно. Но если б вы могли, буквально повертев молекулу в руках, раздвинуть ее атомы, ввести в образовавшуюся дыру ваш атом и затем закрыть отверстие, то вы бы *миновали* подъем, никакой затраты энергии не понадобилось бы и реакция прошла бы легче. Так вот, в клетках и впрямь существуют *очень* большие молекулы (куда больше, чем те, чьи изменения изображены на фиг. 3.1), которые как-то умеют расставить малые молекулы так, чтобы реакция протекала без труда. Они, эти большие сложные устройства, называются *ферменты* (или закваска; назвали их так потому, что обнаружили их при сбраживании сахара. Кстати, первые из реакций цикла Кребса были открыты именно при сбраживании). Реакции цикла идут только в присутствии ферментов.

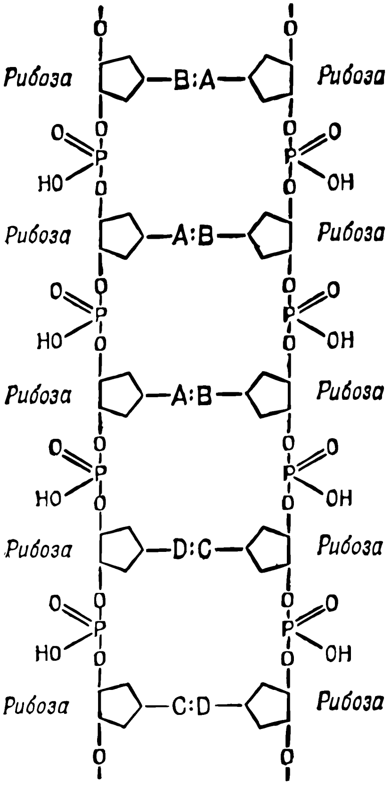
Сам фермент состоит из другого вещества — *белка.* Молекулы ферментов велики и сложны. Все ферменты отличаются друг от друга, причем каждый предназначен для контроля некоторой определенной реакции. На фиг. 3.1 возле каждой реакции обозначены названия нужного фермента (а иногда один фермент контролирует и две реакции). Подчеркнем, что сам фермент в реакцию не вовлекается. Он не изменяется, его дело только передвинуть атом с одного места в другое. Передвинет в одной молекуле и готов уже заняться следующей. Совсем как станок на фабрике, причем должен иметься запас нужных атомов и возможность избавляться от ненужных. Возьмите, например, водород: существуют ферменты, имеющие специальные ячейки для переноса водорода в любой химической реакции. Скажем, имеются три или четыре фермента, которые понижают количество водорода; они используются во многих местах цикла. Интересно, что механизм, высвобождающий водород в одном месте, придерживает этот атом, чтобы использовать его еще где-нибудь.

Важнейшая деталь цикла, приведенного на фиг. 3.1, это превращение **ГДФ** в **ГТФ** (гуаназиндифосфат в гуаназинтрифосфат), потому что во втором веществе — ГТФ — энергии намного больше, чем в первом. Подобно тому как в некоторых ферментах имеется «ящик» для переноса атомов водорода, бывают еще особые «ящики» для переноса *энергии*; в них входит трифосфатная группа. В ГТФ больше энергии, чем в ГДФ, и когда цикл идет в одну сторону, создаются молекулы с избытком энергии; они могут привести в действие другие циклы, которым *требуется* энергия, например цикл сжатия мышцы. Мышца не сократится, если нет ГТФ. Можно поместить в воду мышечное волокно и добавить туда ГТФ, тогда волокно сократится, превращая ГТФ в ГДФ (если только присутствуют нужные ферменты). Таким образом, процессы в мышцах есть взаимопревращение ГТФ и ГДФ; накопленный в течение дня ГТФ используется в темноте для того, чтобы пустить весь цикл в обратную сторону. Как видите, ферменту все равно, в какую сторону идет реакция; если б это было не так, нарушался бы один из законов физики.

Есть и другой резон, по которому для биологии и других наук важна именно физика, — это *техника эксперимента*. Например, нарисованная биохимическая схема не была бы еще до сего времени известна, если бы за нею не стояли большие достижения экспериментальной физики. Дело в том, что для анализа этих невообразимо сложных систем нет лучшего средства, нежели ставить *метки* на атомах, участвующих в реакции. Если ввести в цикл немного углекислоты с «зеленой меткой» на ней и посмотреть, где метка окажется через 3 *сек*, потом через 10 *сек* и т. д., то можно проследить течение всей реакции. Но как сделать «зеленую метку»? При помощи различных *изотопов*. Напомним, что химические свойства атомов определяются числом *электронов*, а не массой ядра. Но в атоме углерода, к примеру, может быть либо шесть, либо семь нейтронов наряду с обязательными для углерода шестью протонами. В химическом отношении атомы C^{12} и C^{13} не отличаются, но по массе и ядерным свойствам они различны, а значит, и различимы. Используя эти изотопы, можно проследить ход реакции. Еще лучше для этого радиоактивный изотоп C^{14}; с его помощью можно весьма точно проследить за малыми порциями вещества.

Вернемся, однако, к описанию ферментов и белков. Не все белки — ферменты, но все ферменты — белки. Существует множество белков — таких, как белки мышц, структурные белки, скажем, в хрящах, волосах, коже — не являющихся ферментами. И все-таки белки — очень характерная для жизни субстанция; во-первых, это составная часть всех ферментов, а во-вторых, составная часть многих иных живых веществ. Структура белков проста и довольно занятна. Они представляют собой ряды, или цепи, различных *аминокислот*. Существует два десятка разных аминокислот, и все они могут сочетаться друг с другом, образуя цепи, костяком которых являются группы CO—NH и т. п. Белок — это всего лишь цепочки, сложенные из этих 20 аминокислот. Каждая аминокислота, по всей вероятности, служит для каких-то специальных целей. В некоторых аминокислотах в определенном месте находится атом серы; два атома серы в одном и том же белке образуют связь, т. е. схватывают цепь в двух точках и составляют петлю. В других есть избыточный атом кислорода, придающий им кислотные свойства; характеристики третьих — щелочные. В некоторых бывают большие группы атомов, свисающие с одной стороны и занимающие много места. Одна из аминокислот — пролин — в действительности не амино-, а иминокислота. Эта небольшая разница приводит к тому, что когда в цепи есть пролин, то цепь перекручивается. Если бы вы захотели создать какой-то определенный белок, то вам пришлось бы дать такие указания: здесь поместите серный крюк, затем добавьте чего-нибудь, чтобы заполнить место, теперь привяжите что-нибудь, чтобы цепь перекрутилась, и т. д. Получились бы скрепленные между собой замысловатые цепочки со сложной структурой; все ферменты, по-видимому, устроены именно так. Одним из триумфов современной науки было открытие (в 1960 г.) точного пространственного расположения атомов некоторых белков; в них 56—60 аминокислот подключены друг за другом. Было установлено точное местоположение свыше 1000 атомов (даже до 2000, если считать и водород), входящих в сложную структуру двух белков (один из них — гемоглобин). А одна из печальных сторон этого открытия проявилась в том, что из этой картины ничего увидеть нельзя; мы не понимаем, почему она такая. Именно эту проблему и следует сейчас атаковать.

Есть и другая проблема в биологии: откуда ферменты «знают», кем им стать? От красноглазой мухи рождается опять красноглазая мушка; значит, вся информация о ферментах, создающих красный пигмент, должна перейти к очередной мушке. Передает эту информацию не белок, а вещество в ядре клетки, ДНК (дезоксирибонуклеиновая кислота). Это — та ключевая субстанция, которая передается от одной клетки к другой (половые клетки, например, почти целиком состоят из ДНК) и уносит с собой инструкцию, как делать ферменты. ДНК — это «калька», печатная матрица. На что похожа эта калька, как она должна действовать? Первое — она должна воспроизводить самое себя; второе — она должна быть способна давать задания белку. Что до первого, то можно было бы думать, что это происходит так же, как



Ф и г. 3.2. Схема ДНК.

воспроизведение клеток: клетки подрастают и делятся пополам. Может быть, молекулы ДНК тоже растут и тоже делятся? Нет, это исключено. Ведь *атомы* наверняка не растут и не делятся! Видимо, для репродукции молекул нужен другой путь, похитрее.

Структура ДНК долго изучалась сперва химически (составные части), затем рентгенографически (пространственная структура). В результате пришли к следующему знаменательному открытию: молекула ДНК — это пара цепочек, навитых друг на друга. Скелет каждой цепочки, хотя и похожий на белковые цепи, но химически отличный от них, — это ряд сахарных и фосфатных групп, как показано на фиг. 3.2. Из этой схемы видно, как в цепи может храниться инструкция, ибо, разняв цепочку на две нитки, вы получаете ряд веществ *BAADC*...; не исключено, что этот ряд у каждого организма свой. Значит, можно думать, что каждый особый *ряд* ДНК содержит в себе особые *указания*, как производить белки.

На схеме видны пары поперечных звеньев, присоединенных к сахарным группам и стягивающих между собой две нити. Эти звенья неодинаковы; есть четыре сорта звеньев — аденин, тимин, цитозин, гуанин, обозначаемые *A*, *B*, *C* и *D*. Интересно, что не всякие звенья спариваются. Например, возможны пары *AB* и *CD*; они размещены на двух нитях, так, что «подходят друг к другу», обладают сильной энергией взаимодействия. Но *C* к *A* или *B* к *C* не подходит; если в цепи стоит *C*, то в другой цепи в этом месте должно быть только *D*. Каждой букве в одной цепи соответствует определенная буква в другой.

Как же мыслится при этом воспроизведение? Пусть цепь расщеплена на две. Как сделать другую такую же? Если в веществе клетки есть фабрика, вырабатывающая фосфат, сахар и звенья *A*, *B*, *C*, *D* (пока не привязанные к цепи), то к нашей половинке цепочки присоединятся только подходящие звенья, дополняющие *BAADC*, т. е. *ABBCD*.... При делении клетки цепь разнимается посредине на две нитки, каждая переходит в свою клетку и там набирает себе дополнение.

Наконец, последний вопрос: как порядок следования *A*, *B*, *C*, *D* в ДНК определяет расстановку аминокислот в белках? Ответа пока нет. Это основная нерешенная проблема современной биологии. Пока мы располагаем только какими-то обрывками информации об этом. В клетке имеются мельчайшие частички — микросомы; сейчас известно, что в них и вырабатываются белки. Но микросомы находятся не в ядре, не там, где находится ДНК со своими инструкциями. По-видимому, в этом есть какой-то смысл. Известно, однако, что от ДНК отрываются кусочки молекул, не такие длинные, как ДНК, несущая в себе всю информацию, а нечто вроде некрупных ее долек. Называют их РНК, но не в этом дело. Это нечто вроде уменьшенной копии ДНК. Известно, что РНК как-то переносит в микросому сообщение о том, какой сорт белка нужно изготовить. (Этот факт уже известен.) После этого в микросоме образуется белок. Это тоже известно. Но различные детали того, как аминокислоты входят в белки и как они располагаются в согласии с кодом, зашифрованным в РНК, пока не известны. Мы не умеем читать этот код. Если «написано», например, *ABCCA*, то мы не знаем, какой белок будет приготовлен.

Право же, ни одна наука, ни одна отрасль знаний не движутся так бурно по всем направлениям вперед, как биология. Но если б мы должны были назвать то самое главное, что ведет нас сейчас все вперед и вперед в наших попытках понять явление жизни, мы обязаны были бы сказать: «*все тела состоят из атомов*», все, что происходит в живых существах, может быть понято на языке движений и покачиваний атомов.

§ 4. Астрономия

В нашем стремительном обзоре всей Вселенной очередь дошла до астрономии. Астрономия — старше физики. Фактически физика и возникла из нее, когда астрономия заметила поразительную простоту движения звезд и планет; объяснение этой простоты и стало *началом* физики. Но самым выдающимся открытием астрономии было открытие того, что *звезды состоят из таких же атомов, что и Земля**. Как это было доказано? Каждый атом испускает свет определенных частот, подобно тому как у каждого музыкального инструмента есть свое звучание — определенный набор частот, или высот, звука. Слыша одновременно несколько тонов, мы можем разделить их; но способности нашего глаза в этом отношении далеко не столь велики, он не может разделить смесь цветов на составляющие части. Однако с помощью спектроскопа *становится возможным* анализ частот световых волн, он позволяет видеть истинные тона атомов различных звезд. Ведь два химических элемента были даже обнаружены на звездах прежде, чем на Земле: гелий (он был открыт на Солнце, потому он так и назван) и технеций (его обнаружили на некоторых холодных звездах). Но раз звезды состоят из тех же атомов, что и Земля, то это сильно продвигает нас вперед в понимании сущности звезд. Нам хорошо известно поведение атомов при высоких температурах и невысоких плотностях, и это позволяет при помощи статистической механики анализировать поведение звездного вещества. Даже не умея воспроизводить звездное состояние на Земле, но опираясь на основные физические законы, мы часто указываем совершенно точно (а иногда почти точно), чтó происходит на звездах. Так физика помогает астрономии. Это может показаться странным, но распределение вещества внутри Солнца мы знаем куда лучше, чем его распределение внутри Земли. Казалось бы, чтó можно узнать, взглянув сквозь телескоп на пятнышко света? Однако *недра* звезд известны нам гораздо лучше, чем этого можно было бы ожидать, ибо мы умеем *рассчитывать*, чтó произойдет с атомами звезд при многих обстоятельствах.

---

* Как лихо я управился с этим! Как много скрыто за каждой фразой этого короткого рассказа. «Звезды и Земля сделаны из одинаковых атомов». Обычно мне одной такой темы хватает на целую лекцию Поэты утверждают, что наука лишает звезды красоты, для нее, мол, звезды — просто газовые шары. Ничего не «просто». Я тоже любуюсь звездами и чувствую их красоту. Но кто из нас видит больше? Обширность небес превосходит мое воображение... Затерянный в этой карусели, мой маленький глаз способен видеть свет, которому миллионы лет. Безбрежное зрелище Вселенной... и я сам — ее часть... Быть может, вещество моего тела извергнуто какой-нибудь забытой звездой, такой же, как вон та, чей взрыв я вижу сейчас. Или я смотрю на звезды гигантским оком Паломарского телескопа, вижу, как они устремляются во все стороны от той первоначальной точки, где, быть может, они некогда обитали бок о бок. Что это за картина и каков ее смысл? И *зачем все это?* Таинству Вселенной не причинит ущерба наше проникновение в какие-то ее тайны, ибо правда более поразительна, нежели все то, что было нарисовано воображением художников прошлого! Почему же нынешние поэты не говорят об этом? Что за народ эти лирики, если они способны говорить о Юпитере только если он подобен человеку, и молчат, если это огромный вращающийся шар из метана и аммиака?

Одно из наиболее впечатляющих открытий астрономии — это открытие источника энергии звезд, поддерживающего их горение. Один из тех, кто открыл это, отправился на прогулку с девушкой как раз в ночь после того, как понял, что на звездах происходит *ядерная реакция*, что в этом причина их свечения. Она сказала: «Взгляни, как чудесно сияют звезды!» А он ответил: «Да. Чудесно. А ведь сегодня я — единственный человек в мире, который знает, *почему* они сияют!» Она только рассмеялась. На нее не произвело впечатления, что он — единственный человек, понимающий, почему звезды светят. Что ж, как это ни печально, быть одиноким и непонятым — в порядке вещей.

Так вот, Солнце получает энергию от ядерного «сгорания» водорода, который переходит при этом в гелий. Из водорода в глубинах звезд вырабатываются далее другие химические элементы. Вещество, из которого сделаны *мы*, было когда-то «испечено» в звезде и выплеснуто наружу. Но откуда это известно? А вот откуда. Содержание различных изотопов в веществе — C^{12}, C^{13} и т. д. — никогда не меняется при *химических* превращениях, ибо для обоих изотопов C химические реакции одинаковы. Эти пропорции есть результат лишь *ядерных* реакций. Изучая пропорцию изотопов в остывшей, мертвой золе, каковой являемся мы, можно догадаться, на что была похожа *печь*, в которой сформировалось наше вещество. Она была похожа на звезды, и поэтому очень вероятно, что элементы «сделаны» в звездах и выброшены оттуда при взрывах, называемых нами Новыми и Сверхновыми звездами. Астрономия столь близка к физике, что еще не один раз в этом курсе мы обратимся к ней.

§ 5. Геология

Перейдем теперь к так называемым *наукам о Земле*, или *геологии*. К ним относятся прежде всего метеорология, или наука о погоде. Метеорологическая аппаратура — это физические приборы, так что метеорология снабжена приборами благодаря развитию экспериментальной физики (мы уже об этом говорили). Иное дело теория метеорологии, она никогда не была удовлетворительно разработана никем из физиков. «Странно, — скажете вы, — ведь это всего лишь воздух, разве мы не знаем уравнений движения воздуха?» Да, знаем. «Почему же, зная, в каком состоянии воздух сегодня, мы не можем предсказать его состояние на завтра?» Во-первых, мы не знаем, каково *на самом деле* сегодня состояние воздуха, ибо он то и дело где-то завихряется и струится. Воздух очень чувствителен к любым изменениям, он попросту неустойчив. Чтобы понять, о какой неустойчивости я говорю, взгляните как вода спокойно течет над плотиной и вдруг, падая, превращается во множество пузырьков и капель. Вы знаете состояние воды в момент, когда она переваливает через плотину, — она совершенно спокойна; откуда же берутся капли в момент падения? От чего зависит, на какие струи разобьется поток, где они возникнут, куда упадут? Все это неизвестно, потому что течение воды неустойчиво. Точно так же даже спокойный поток воздуха, проходя между гор, прихотливо распадается на отдельные вихри. Во многих областях науки мы сталкиваемся с тем, что носит название *турбулентное течение*, не поддающееся пока анализу. Так что перейдем-ка лучше от темы «погода» к самой геологии!

Главный вопрос геологии заключается в том, что сделало Землю такой, какая она есть? Самые очевидные из таких процессов происходят у нас на глазах: реки подмывают берега, поля заносит пылью и т. д. Это понять довольно легко, но ведь кроме эрозии, помимо разрушения должно что-то и обратное происходить. В среднем горы сейчас не ниже, чем в прошлом. Следовательно, должен происходить и процесс *горообразования*. Изучая геологию, вы убедитесь, что действительно происходит и горообразование, и вулканизм, но никто их не понимает; не понимает того, что́ составляет половину геологии. Действительно, природа вулканов не понята. Отчего бывают землетрясения, тоже в конечном счете не понято. Понимают, конечно, что если что-то с чем-то столкнется, то что-то треснет, что-то сдвинется — все это хорошо. Но что́ толкнуло, почему толкнуло? Существует теория, что внутри Земли имеются течения — происходит циркуляция из-за различия температур снаружи и внутри — и они в своем движении слегка подталкивают поверхность Земли. А если где-то встречаются два противных течения, то там должно накапливаться вещество, появляться горные хребты, они окажутся в сильно напряженном состоянии, возникнут вулканы, произойдут землетрясения.

Что можно сказать о недрах Земли? Хорошо известна скорость волн землетрясений в Земле и распределение плотности внутри нашей планеты. Но физики не смогли создать хорошей теории плотности вещества при давлениях, ожидаемых в центре Земли. Иными словами, мы не представляем себе слишком хорошо свойств вещества в таких условиях. Со своей планетой мы справляемся куда хуже, нежели с состоянием вещества в звездах. Необходимый для этого математический аппарат не разработан, он, по-видимому, чрезвычайно сложен; не исключено, однако, что найдется кто-то, кто поймет важность этой проблемы и разработает ее. Другое дело, что, даже вычислив плотность, мы не сможем представить себе циркулирующие течения или разобраться в свойствах горных пород при сверхвысоких давлениях. Мы не умеем предсказывать, насколько быстро эти породы «поддадутся» давлению; только опыт ответит на эти вопросы.

§ 6. *Психология*

Рассмотрим, наконец, еще одну науку — *психологию*. Сразу же уместно заметить, что психоанализ — это не наука; в лучшем случае это медицинский процесс, а скорее всего — знахарство. В психоанализе существует теория происхождения болезней — разные там «духи» и прочее. Знахарь тоже имеет теорию, по которой болезнь, скажем малярию, вызывает дух, витающий в воздухе; ее не вылечишь, если потрясти змеей над головой больного, а вот хинин помогает. Итак, если вы заболеете, советую вам отправиться к знахарю, потому что он лучше всех в племени разбирается в болезнях; однако его знание — это не наука. Психоанализ не был достаточно проверен экспериментально, и невозможно привести перечень случаев, когда он помогает, а когда не помогает и т. д.

Другие ветви психологии, а в нее входит, например, физиология ощущения (что происходит в глазе, а что в мозге), пожалуй, не столь интересны. Но в них были достигнуты хотя и малые, но вполне реальные успехи. Вот одна из интереснейших технических задач (хотите называйте ее психологией, хотите — нет). Центральная проблема в изучении мышления, или, если угодно, нервной системы, такова: пусть животное чему-либо научилось, пусть оно умеет делать что-то, чего прежде не умело; значит, клетки его мозга, если они состоят из атомов, изменились. *В чем же состоит это изменение?* Мы запечатлели что-то в своей памяти. Где это? Что там можно увидеть теперь? Этого мы не знаем. Мы запомнили какое-то число. Что это значит? Что изменилось в нервной системе? Неизвестно. Это очень важная проблема, совершенно притом не решенная. Даже если допустить, что в нас имеется какой-то механизм памяти, то все равно мозг — это столь невообразимая масса пересекающихся проводов и нервов, что, по всей вероятности, прямой анализ невозможен. Аналог этого — вычислительные машины и их элементы; в них тоже множество проводов, есть и элементы, похожие на синапсы (нервные связи). Жаль, что у нас нет времени разобрать интересный вопрос об отношении между мыслью и вычислительными машинами. Следует понимать все же, что этот вопрос очень мало скажет нам о реальной сложности повседневного поведения человека. Люди столь различны! И понадобится немало времени, чтоб в этом разобраться. Следует начать издалека. Если бы даже нам удалось представить, как действует *собака*, то это было бы замечательно! Собаку понять куда легче, но и то никто не может объяснить, как она действует.

§ 7. *С чего все пошло?*

Чтобы физика могла быть полезной другим наукам в отношении *теории*, а не только своими приборами и изобретениями, эти науки должны снабдить физика описанием их объекта на физическом языке. Если биолог спросит: «Почему лягушка прыгает?», то физик не сможет ответить. Но если он расскажет, что́ такое лягушка, что в ней столько-то молекул, что вот в этом месте у нее нервы и т. д., то это уже совсем иное дело. Если геолог более или менее толково объяснит нам, что такое Земля, а астроном — что такое звезды, тогда можно попробовать в этом разобраться. Чтобы был какой-то толк от физической теории, нужно знать, где расположены атомы. Чтобы понять химию, мы должны точно знать, из каких атомов состоят интересующие нас вещества, иначе мы ничего не проанализируем. Конечно, это лишь одно из ограничений.

Существует и другой *тип* задач в соседних науках, который в физике отсутствует. Назовем его, не имея лучшего термина, вопросом истории. *С чего все пошло*? Как все стало таким, как оно есть? Если, например, все в биологии будет нами понято, возникнет естественный вопрос: как появились все существа на Земле? Этим занимается теория эволюции — важная часть биологии. В геологии нам хочется знать не только, как образуются горы, но и как вначале возникла сама Земля, солнечная система и т. д. Это, естественно, приводит нас к желанию узнать, из какого рода материи складывалась тогда Вселенная. Как развились звезды? Каковы были начальные условия? Это — проблема астрономической истории. Сейчас многое прояснилось в происхождении звезд, элементов, из которых мы состоим, и даже чуточку стало ясней происхождение самой Вселенной.

В настоящее время физика не изучает вопросы истории. Мы не задаем вопрос: «Вот законы физики, как они возникли?» Мы не считаем в настоящее время, что зако́ны физики со временем как-то изменяются, что они прежде были иными, нежели ныне. Конечно, это *не исключено*, и если выяснится, что это *и впрямь так*, то исторические вопросы физики переплетутся с остальной историей Вселенной, и тогда физик будет обсуждать те же проблемы, что и астрономы, геологи и биологи.

Наконец, существует физическая проблема, общая многим наукам, очень старая к тому же, но до сего времени не решенная. Это не проблема поиска новых элементарных частиц, нет, это другой вопрос — вопрос давно, свыше ста лет назад, отставленный наукой в сторону. Ни один физик еще не смог математически безупречно проанализировать его, несмотря на его важность для сопредельных наук. Это — анализ *циркуляции*, или *вихревой жидкости*. Если проследить эволюцию звезды, то рано или поздно мы подойдем к такому моменту, когда в звезде начинается конвекция; и с этого момента мы уже не знаем, что будет дальше. Через несколько миллионов лет происходит взрыв звезды, но причина этого для нас остается загадкой. Мы не умеем анализировать погоду. Мы не знаем картины движений, которые должны происходить внутри Земли. В простейшей форме задача такова: пропустим через очень длинную трубку на большой скорости воду. Спрашивается: какое нужно давление, чтобы прогнать сквозь трубку данное количество воды? И никто, основываясь только на первичных законах и на свойствах самой воды, не умеет ответить на этот вопрос. Если вода течет неторопливо или когда сочится вязкая жижа вроде меда, то мы прекрасно все умеем. Ответ вы можете найти, например, в любом вашем учебнике. А вот с настоящей, мокрой водой, брызжущей из шланга, справиться мы не в силах. Это — центральная проблема, которую в один прекрасный день нам понадобится решить, а мы это не умеем.

Поэт сказал однажды: «Весь мир в бокале вина». Мы, вероятно, никогда не поймем, какой смысл он в это вкладывал, ибо поэты пишут не для того, чтобы быть понятыми. Но бесспорно, что, внимательно взглянув в бокал вина, мы поистине откроем целый мир. В нем и физические явления (искрящаяся жидкость, испарение, меняющееся в зависимости от погоды и вашего дыхания, блеск стекла) и атомы (о которых нам говорит уже наше воображение). Стекло — это очищенная горная порода; в его составе кроются секреты возраста Вселенной и развития звезд. А из какого удивительного набора реактивов состоит это вино! Как они возникли? Там есть закваска, ферменты, вытяжки и разные другие продукты. Ведь в вине скрывается большое обобщение: вся жизнь есть брожение. Изучая химию вина, нельзя не открыть, как это и сделал Луи Пастер, причины многих болезней. Сколько жизни в этом кларете, если он навязывает нашему сознанию свой дух, если мы должны быть столь осторожны с ним! Наш ограниченный ум для удобства делит этот бокал вина, этот мир на части: физику, биологию, геологию, астрономию, психологию и т. д., но ведь природа на самом деле никакого деления не знает! Давайте же и мы сольем это воедино, не забывая все же, что́ мы увидели. Пусть этот бокал доставит напоследок еще одно наслаждение: выпить его и обо всем позабыть!

Глава **4**

СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

§ 1. Что такое энергия?

С этой главы, покончив с общим описанием природы вещей, мы начнем подробное изучение различных физических вопросов. Чтобы показать характер идей и тип рассуждений, которые могут применяться в теоретической физике, мы разберем один из основных законов физики — сохранение энергии.

Существует факт, или, если угодно, *закон*, управляющий всеми явлениями природы, всем, что было известно до сих пор. Исключений из этого закона не существует; насколько мы знаем, он абсолютно точен. Название его — *сохранение энергии*. Он утверждает, что существует определенная величина, называемая энергией, которая не меняется ни при каких превращениях, происходящих в природе. Само это утверждение весьма и весьма отвлеченно; это по существу математический принцип, утверждающий, что существует некоторая численная величина, которая не изменяется ни при каких обстоятельствах. Это отнюдь не описание механизма явления или чего-то конкретного, просто-напросто отмечается то странное обстоятельство, что можно подсчитать какое-то число и затем спокойно следить, как природа будет выкидывать любые свои трюки, а потом опять подсчитать это число — и оно останется прежним. (Ну, все равно, как слон на черном шахматном поле: как бы ни разворачивались события на доске, какие бы ходы ни делались, слон все равно окажется на черном поле. Наш закон как раз такого типа.) И поскольку утверждение это отвлеченно, то мы выявим его смысл на некоторой аналогии.

Познакомимся с мальчиком, этаким Монтигомо Ястребиный Коготь; у него есть большие кубики, которые даже он не может ни сломать, ни разделить на части. Все они одинаковы. Пускай их у него 28 штук. Мама оставляет его утром дома наедине к этими кубиками. Каждый вечер она подсчитывает, сколько у него кубиков, — она немного любопытна! — и открывает поразительную закономерность: что́ бы ее сынишка ни вытворял с кубиками, их все равно оказывается 28! Так это тянется довольно долго, и вдруг в один прекрасный день она насчитывает только 27 штук. После недолгих поисков кубик обнаруживают под ковром: ей приходится все обыскать, чтобы убедиться в неизменности числа кубиков. В другой раз кубиков оказывается 26. Снова тщательное исследование показывает, что окно отворено; взглянув вниз, она видит два кубика в траве. В третий раз подсчет дает 30 кубиков! Это приводит маму в полное замешательство, но потом она вспоминает, что в гости приходил соседский Кожаный Чулок, видимо, он захватил с собой свои кубики и позабыл их здесь. Она убирает лишние кубики, затворяет плотно окно, не пускает больше гостей в дом и тогда все опять идет как следует, пока однажды подсчет не дает 25 кубиков... Правда, в комнате имеется ящик для игрушек, маме хочется и в него заглянуть, но мальчик кричит: «Не открывай мой ящик!» и начинает рев; мама к ящику не допускается. Как же быть? Но мама любопытна и хитра, она придумывает выход! Она знает, что кубик весит 500 *г*; она взвешивает ящик, когда все 28 кубиков на полу, он весит 1 *кг*. Когда в следующий раз она проверяет количество кубиков, она опять взвешивает ящик, вычитает 1 *кг* и делит на 500 *г*. Она открывает, что

$$\left(\begin{array}{c}\text{Число имеющихся}\\ \text{кубиков}\end{array}\right)+\frac{\text{Вес ящика}-1\ \text{кг}}{500\ \text{г}}=\begin{array}{c}\text{Постоянная}\\ \text{величина.}\end{array}\qquad(4.1)$$

Но опять возникают отклонения и от этой формулы. Снова в результате кропотливых изысканий выясняется, что при этом уровень воды в стиральной машине почему-то изменился. Дитя, оказывается, швыряет кубики в воду, а мать не может их увидеть — вода мыльная; но она может узнать, сколько в воде кубиков, добавив в формулу новый член. Первоначальный уровень воды 40 *см*, а каждый кубик подымает воду на $^1/_3$ *см*, так что новая формула такова:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Число имеющихся}\\ \text{кубиков}\end{array}\right)+\frac{\text{Вес ящика}-1\ \text{кг}}{500\ \text{г}}+$$

$$+\frac{\text{Уровень воды}-40\ \text{см}}{{}^1/_3\ \text{см}}=\begin{array}{c}\text{Постоянная}\\ \text{величина.}\end{array}\qquad(4.2)$$

Мир представлений мамы постепенно расширяется, она находит весь ряд членов, позволяющих рассчитывать, сколько кубиков находится там, куда она заглянуть не может. В итоге она открывает сложную формулу для количества, которое *должно быть рассчитано* и которое всегда остается тем же самым, что́ бы ее дитя ни натворило.

В чем же аналогия между этим примером и сохранением энергии? Самое существенное, что надлежит помнить в этой картинке, — это что *кубиков не существует*. Отбросьте в выражениях (4.1) и (4.2) первые члены и вы обнаружите, что считаете более или менее отвлеченные количества. Аналогия же в следующем. Во-первых, при расчете энергии временами часть ее уходит из системы, временами же какая-то энергия появляется. Чтобы проверить сохранение энергии, мы должны быть уверены, что не забыли учесть ее убыль или прибыль. Во-вторых, энергия имеет множество *разных форм* и для каждой из них есть своя формула: энергия тяготения, кинетическая энергия, тепловая энергия, упругая энергия, электроэнергия, химическая энергия, энергия излучения, ядерная энергия, энергия массы. Когда мы объединим формулы для вклада каждой из них, то их сумма не будет меняться, если не считать убыли энергии и ее притока.

Важно понимать, что физике сегодняшнего дня неизвестно, *что такое* энергия. Мы не считаем, что энергия передается в виде маленьких пилюль. Ничего подобного. Просто имеются формулы для расчета определенных численных величин, сложив которые, мы получаем число 28 — всегда одно и то же число. Это нечто отвлеченное, ничего не говорящее нам ни о механизме, ни о *причинах* появления в формуле различных членов.

§ 2. *Потенциальная энергия тяготения*

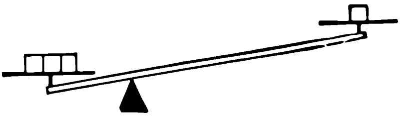
Сохранение энергии можно понять, только если имеются формулы для всех ее видов. Я сейчас рассмотрю формулу для энергии тяготения близ земной поверхности; я хочу вывести ее, но не так, как она впервые исторически была получена, а при помощи специально придуманной для этой лекции нити рассуждений. Я хочу вам показать тот достопримечательный факт, что нескольких наблюдений и строгого размышления достаточно, чтобы узнать о природе очень и очень многое. Вы увидите, в чем состоит работа физика-теоретика. Вывод подсказан блестящими рассуждениями Карно о к. п. д. тепловых машин *.

Рассмотрим грузоподъемные машины, способные подымать один груз, опуская при этом другой. Предположим еще,

---

* Нас здесь интересует не столько итоговая формула (4.3) (она вам, должно быть, знакома), сколько возможность получить ее теоретическим путем.

Фиг. 4.1. Простая грузоподъемная машина.



что вечное движение этих машин невозможно. (Именно недопустимость вечного движения и есть общая формулировка закона сохранения энергии.) Определяя вечное движение, нужно быть очень осторожным. Сделаем это сначала для грузоподъемных машин. Если мы подняли и опустили какие-то грузы, восстановили прежнее состояние машины и после этого обнаружили, что в итоге *груз поднят*, то мы получили вечный двигатель: поднятый груз может привести в движение что-то другое. Здесь существенно, чтобы машина, поднявшая груз, вернулась в *первоначальное положение* и чтобы она *ни от чего не зависела* (чтобы не получала от внешнего источника энергию для подъема груза, словом, чтобы не приходил в гости Кожаный Чулок со своими кубиками).

Очень простая грузоподъемная машина показана на фиг. 4.1. Она подымает тройной вес. На одну чашку весов помещают три единицы веса, на другую — одну. Правда, чтобы она и впрямь заработала, с левой чашки необходимо снять хоть малюсенький грузик. И наоборот, чтобы поднять единичный груз, опуская тройной, тоже нужно немного сплутовать и убрать с правой чашки часть груза. Мы понимаем, что в настоящей подъемной машине надо создать небольшую перегрузку на одну сторону, чтобы поднять другую. Но пока махнем на это рукой. Идеальные машины, хотя их и нет на самом деле, не нуждаются в перевесе. Машины, которыми мы фактически пользуемся, можно считать в некотором смысле *почти* обратимыми, т. е. если они поднимают тройной вес при помощи единичного, то они могут поднять также почти единичный вес, опуская тройной.

Представим, что имеются два класса машин — *необратимые* (сюда входят все реальные машины) и *обратимые*, которых на самом деле не существует; как бы тщательно ни изготавливать подшипники, рычаги и т. д., таких машин все равно не построишь. Но мы предположим все же, что обратимая машина существует и способна, опустив единичный груз (килограмм или грамм — все равно) на единичную длину, поднять в то же время тройной груз. Назовем эту обратимую машину машиной A. Положим, что данная обратимая машина подымает тройной груз на высоту X. Затем предположим, что имеется другая машина B, не обязательно обратимая, которая тоже опускает единичный вес на единицу длины, но поднимает тройной вес на высоту Y. Теперь можно доказать, что Y не больше X, т е. что нельзя соорудить машину, которая смогла бы поднять груз *выше*, чем обратимая. Почему? Посмотрите. Пусть Y выше X. Мы берем единичный вес и опускаем его на единицу длины машиной B, тем самым поднимая тройной груз на высоту Y. Затем мы можем опустить груз с высоты Y до X, *получив свободную энергию,* и включить обратимую машину A в обратную сторону, чтобы опустить тройной груз на X и поднять единичный вес на единичную высоту. Единичный вес очутится там, где он был прежде, и обе машины окажутся в состоянии начать работу сызнова! Итак, если Y больше X, то возникает вечный двигатель, а мы предположили, что такого не бывает. Мы приходим к выводу, что *Y не выше X*, т. е. из всех машин, которые можно соорудить, обратимая — наилучшая.

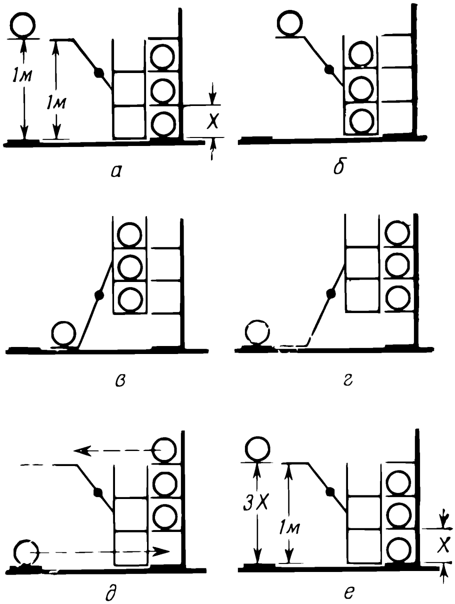
Легко понять также, что все обратимые машины должны поднимать груз *на одну и ту же высоту*. Положим, что машина B также обратима. То, что Y не больше X, остается, конечно, верным, но мы можем пустить машину в обратную сторону, повторить те же рассуждения и получить, что *X не больше Y*. Это очень знаменательное наблюдение, ибо оно позволяет узнать, на какую высоту разные машины могут поднимать грузы, *не заглядывая в их внутреннее устройство.* Если кто-нибудь придумал невероятно запутанную систему рычагов для подъема тройного веса на какую-то высоту за счет опускания единичного веса на единицу высоты и если мы сравним эту машину с простым обратимым рычагом, способным проделать то же самое, то первая машина не поднимет вес выше второй (скорее наоборот). А если его машина обратима, то мы знаем точно, на *какую* высоту она будет поднимать грузы.

Вывод: каждая обратимая машина, как бы она ни действовала, опуская 1 *кг* на 1 *м*, всегда подымает 3 *кг* на одну и ту же высоту X. Ясно, что мы доказали очень полезный всеобщий закон. Но возникает вопрос: чему равно X?

Пусть у нас есть обратимая машина, способная поднимать 3 *кг* за счет 1 *кг* на высоту X. Поместим три шара на стеллаж (как на фиг. 4.2). Четвертый лежит на подставке в одном метре от пола. Машина может поднять три шара, опустив один шар на 1 *м*. Устроим подвижную платформу с тремя полками высотой X, и пусть высота полок стеллажа тоже будет X (фиг. 4.2, *а*). Перекатим сперва шары со стеллажа на полки платформы (фиг. 4.2, *б*); предположим, что для этого энергии не понадобится, потому что полки и стеллаж находятся на одной высоте. Затем включим обратимую машину: она скатит одиночный шар на пол и подымет платформу на высоту X (фиг. 4.2, *в*). Но мы сконструировали платформу столь остроумно, что шары опять оказались в точности на

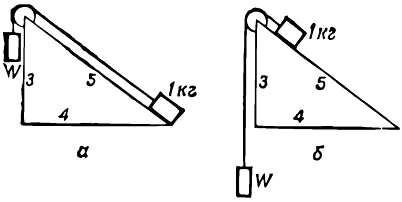
Фиг. 4.2. Обратимая машина.

а — начальное положение; б — загрузка шаров; в — 1 кг поднимает 3 кг на высоту X; г — разгрузка шаров; д — восстановление; е — конечное положение.



уровне полок стеллажа. Разгрузим же шары с платформы на стеллаж (фиг. 4.2). После разгрузки машина вернется в первоначальное положение. Теперь уже три шара лежат на трех верхних полках стеллажа, а четвертый шар — на полу. Но смотрите, какая странная вещь: по существу два шара мы не поднимали вовсе, ведь на полках *2* и *3* шары как лежали вначале, так лежат и теперь. В итоге поднялся только *один шар*, но зато на высоту $3X$. Если бы высота $3X$ оказалась больше 1 *м*, то можно было бы *опустить* шар, чтобы вернуть машину к начальным условиям (фиг. 4.2, *е*) и начать работу сначала. Значит, высота $3X$ не может быть больше 1 *м*, ибо начнется вечное движение. Точно так же можно доказать, что *1 м не может быть больше* $3X$*:* машина обратима, пустим ее назад и докажем. Итак, $3X$ *ни больше, ни меньше* 1 *м*. Мы открыли при помощи одних только рассуждений закон: $X = {}^1/_3$ *м*. Обобщить его легко: 1 *кг* падает при работе обратимой машины с некоторой высоты; тогда машина способна поднять p *кг* на $1/p$ высоты. Если, другими словами, 3 *кг* умножить на высоту их подъема (X), то это равно 1 *кг*, умноженному на высоту его падения (1*м*). Помножив все грузы в машине на высоту, на которой они лежат, дайте машине поработать и опять помножьте все веса на их высоты подъема; в итоге *должно выйти то же самое.* (Мы перешли от случая, когда двигался только один груз, к случаю, когда за счет опускания одного груза поднимается несколько грузов. Но это, надеюсь, понятно?)

Назовем сумму весов, умноженных на высоту, *потенциальной энергией тяготения*, т. е. энергией, которой обладает тело вследствие своего положения в пространстве по отношению



Фиг. 4.3. Наклонная плоскость.

к земле. Формула для энергии тяготения, пока тело не слишком далеко от земли (вес при подъеме ослабляется), такова:

$$\left(\begin{matrix}\text{Потенциальная энергия тяготения}\\ \text{для одного тела}\end{matrix}\right) = (\text{Вес}) \times (\text{Высота}). \qquad (4.3)$$

Не правда ли, очень красивое рассуждение? Вопрос только в том, справедливо ли оно. (Ведь, в конце концов, природа *не обязана* следовать нашим рассуждениям.) Например, не исключено, что в действительности вечное движение возможно. Или другие предположения ошибочны. Или мы просмотрели что-то в своих рассуждениях. Поэтому их непременно нужно проверить. И вот — справедливость их *подтверждает опыт.*

Потенциальная энергия — это общее название для энергии, связанной с расположением по отношению к чему-либо. В данном частном случае это — *потенциальная энергия тяготения.* Если же производится работа против электрических сил, а не сил тяготения, если мы «поднимаем» заряды «над» другими зарядами с помощью многочисленных рычагов, тогда запас энергии именуется *электрической потенциальной энергией.* Общий принцип состоит в том, что изменения энергии равны силе, умноженной на то расстояние, на котором она действует:

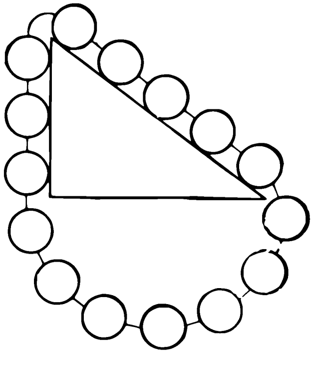
$$\left(\begin{matrix}\text{Изменение}\\ \text{энергии}\end{matrix}\right) = (\text{Сила}) \times \left(\begin{matrix}\text{Расстояние, на котором}\\ \text{она действует}\end{matrix}\right). \qquad (4.4)$$

По мере чтения курса мы еще не раз будем возвращаться к другим видам потенциальной энергии.

Принцип сохранения энергии во многих обстоятельствах оказывается очень полезен при предсказании того, что́ может произойти. В средней школе мы учили немало правил о блоках и рычагах. Мы можем теперь убедиться, что все эти «законы» *сводятся к одному*, и нет нужды запоминать 75 правил. Вот вам простой пример: наклонная плоскость. Пусть это треугольник со сторонами 3, 4, 5 (фиг. 4.3). Подвесим к блочку груз весом 1 *кг* и положим его на плоскость, а с другой стороны подвесим груз W.

Мы хотим знать, какова должна быть тяжесть W, чтобы уравновесить груз 1 *кг*. Рассуждаем так. Если грузы W и 1 *кг*

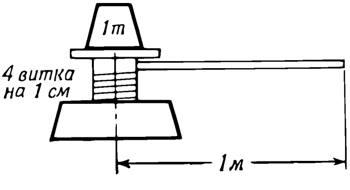
Фиг. 4.4. Это выгравировано на надгробии Стевина.



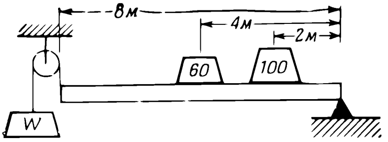
уравновешены, то это — обратимое состояние, и веревку можно двигать вверх — вниз. Пусть же вначале (фиг. 4.3, *а*) 1 *кг* находится внизу плоскости, а груз *W* — наверху. Когда *W* соскользнет вниз, груз 1 *кг* окажется наверху, а *W* опустится на длину склона (фиг. 4.3, *б*), т. е. на 5 *м*. Но ведь мы *подняли* 1 *кг* только на высоту 3 *м*, хотя опустили *W* на 5 *м*. Значит, $W = {}^3/_5$ *кг*. Заметьте, что этот ловкий вывод получен не из разложения сил, а из *сохранения энергии*. Ловкость, впрочем, относительна. Существует другой вывод, куда красивее. Он придуман Стевином и даже высечен на его надгробии. Фиг. 4.4 объясняет, почему должно получиться $^3/_5$ *кг*: цепь не вращается и нижняя ее часть уравновешена сама собой, значит сила тяги пяти звеньев с одной стороны должна уравнять силу тяги трех звеньев с другой (по длине сторон). Глядя на диаграмму, мы понимаем, что $W = {}^3/_5$ *кг*. (Неплохо было бы, если бы когда-нибудь что-нибудь подобное высекли и на вашем надгробном камне.)

А вот задача посложнее: домкрат, показанный на фиг. 4.5. Посмотрим, как в таком случае применять этот принцип. Для вращения домкрата служит ручка длиной 1 *м*, а нарезка винта имеет 4 витка на 1 *см*. Какую силу нужно приложить к ручке, чтобы поднять 1 *т*? Желая поднять 1 *т* на 1 *см*, мы должны обойти домкрат четырежды, каждый раз делая по 6,28 *м* ($2\pi r$), а всего 25,12 *м*. Используя различные блоки, и т. п., мы действительно можем поднять 1 *т* с помощью неизвестного груза *W*, приложенного к концу ручки. Ясно, что *W* равно примерно 400 *г*. Это — следствие сохранения энергии.

И еще более сложный пример (фиг. 4.6). Подопрем один конец стержня (или рейки) длиной 8 *м*. Посредине рейки



Фиг. 4.5. Домкрат.



Фиг. 4.6. Нагруженный стержень, подпертый с одного конца.

поместим груз весом 60 *кг*, а в 2 *м* от подпорки — груз весом 100 *кг*. Сколько надо силы, чтобы удержать рейку за другой конец в равновесии, пренебрегая ее весом? Пусть мы прикрепили блок и перекинули через него веревку, привязав ее к концу рейки. Каков же должен быть вес W, уравновешивающий стержень? Представим, что вес опустился на произвольное расстояние (для простоты пусть это будет 4 *см*); на сколько тогда поднимутся наши два груза? Середина рейки на 2 *см*, а второй груз (он лежит на четверти длины рейки) на 1 *см*. Значит, в согласии с правилом, что сумма весов, умноженных на высоты, не меняется мы должны написать: вес W на 4 *см* вниз плюс 60 *кг* на 2 *см* вверх плюс 100 *кг* на 1 *см* вверх, что после сложения должно дать нуль:

$$-4W+2\times 60+1\times 100=0, \quad W=55\,\text{кг}. \tag{4.5}$$

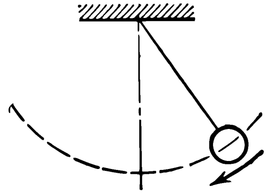
Выходит, чтобы удержать рейку, хватит 55 *кг*. Таким же путем можно разработать законы «равновесия» — статику сложных мостовых сооружений и т. д. Такой подход именуют *принципом виртуальной* (т. е. возможной или воображаемой) *работы*, потому что для его применения мы обязаны *представить* себе, что наша система чуть сдвинулась, даже если она в *действительности* не двигалась или вовсе *неспособна* двигаться. Мы используем небольшие воображаемые движения, чтобы применить принцип сохранения энергии.

§ 3. Кинетическая энергия

Чтобы рассказать о другом виде энергии, рассмотрим маятник (фиг. 4.7). Отведем его в сторону и затем отпустим. Он начнет качаться взад и вперед. Двигаясь от края к середине, он теряет высоту. Куда же девается потенциальная энергия? Когда он опускается до самого низа, энергия тяготения пропадает, однако он вновь взбирается вверх. Выходит, что энергия тяготения должна превращаться в другую форму. Ясно, что способность взбираться наверх остается у маятника благодаря тому, что он *движется*; значит, в наинизшей точке качания энергия тяготения переходит в другой вид энергии.

Мы должны получить формулу для энергии движения. Вспоминая наши рассуждения о необратимых машинах, мы легко поймем, что, двигаясь мимо наинизшей точки, маятник

Фиг. 4.7. Маятник.



должен обладать некоторым количеством энергии, которая позволит ему подняться на определенную высоту, и при этом независимо от *механизма* подъема или *пути* подъема. Возникает формула, выражающая равноценность обоих видов энергии, подобная той, которую писала мама, подсчитывая кубики. Получается другая форма представления энергии. Легко понять, какой она должна быть. Кинетическая энергия внизу равна весу, умноженному на высоту, на которую этот вес может подняться из-за своей скорости: к. э. $= WH$.

Нам нужна формула, предсказывающая высоту подъема по быстроте движения тела. Если мы толкнем что-нибудь с определенной скоростью, скажем, прямо вверх, то это тело достигнет определенной высоты; мы не знаем пока, какова эта высота, но нам ясно, что она зависит от скорости и что она войдет в нужную нам формулу. Значит, чтобы найти формулу для кинетической энергии тела, движущегося со скоростью V, нужно вычислить высоту, до которой она может добраться, и умножить на тяжесть тела. В одной из следующих глав мы убедимся, что получается

$$\text{к. э.} = \frac{WV^2}{2g}. \qquad (4.6)$$

Конечно, тот факт, что движение обладает энергией, никак не связан с полем тяготения, в котором находится тело. Неважно, *откуда* явилось движение. Это общая формула для любых скоростей. Кстати, и (4.3) и (4.6) — формулы приближенные; первая становится неправильной на больших высотах (настолько больших, что тяжесть тела ослабляется), а вторая — на больших скоростях (настолько больших, что требуются релятивистские поправки). Однако, когда мы вводим точные формулы для энергии, закон сохранения энергии опять соблюдается.

§ 4. Прочие формы энергии

В таком вот роде можно и дальше показывать существование энергии в разных формах. Отметим, во-первых, упругую энергию. Растягивая пружину, мы должны совершить какую-то работу, ведь растянутая пружина способна поднять груз. После растяжения она получает возможность выполнить работу. Если бы мы теперь составили сумму произведений весов на высоты, то она больше не сошлась бы, и нам пришлось бы в нее что-то вставить, чтобы учесть напряженность пружинки. Упругая энергия — это и есть формула растянутой пружины. Сколько же в ней энергии?

Когда вы отпускаете пружину, то упругая энергия при переходе пружины через точку равновесия обращается в энергию кинетическую; и далее все время совершаются переходы от сжатия и растяжения пружины к кинетической энергии движения (в переходы эти замешиваются еще изменения энергии тяготения, но если это нам мешает, то можно пружину не подвешивать, а положить). И так продолжается до тех пор, пока потери энергии... Постойте! Выходит, мы все время жульничали: то совершали обвес, чтобы рычаг наклонился, то говорили, что машины обратимы, то уверяли, что они будут работать вечно. А машина в конечном счете останавливается. Где же теперь, когда пружина перестала сжиматься-разжиматься, находится энергия? Она перешла в *новую* форму энергии — *тепло*.

В пружине или рычаге имеются кристаллы, состоящие из множества атомов; и при сборке частей машины требуется особая точность и тщательность, чтобы в работе машины ни один из атомов не сдвинулся со своего места, не поколебался. Нужно быть очень осторожным. Ведь обычно, когда машина вертится, то и дело происходят какие-то удары, покачивания, вызванные неровностями материала, и атомы начинают дрожать. Так теряются маленькие доли энергии; по мере того как движение замедляется, все сильнее становятся случайные, неожиданные дрожания атомов вещества машины. Конечно, это все еще кинетическая энергия, но не связанная с видимым движением.

Позвольте, какая кинетическая энергия? Что за сказка? Откуда известно, что это все еще кинетическая энергия? Оказывается, термометр способен обнаружить, что пружина или рычаг *нагреваются*, т. е. что и впрямь происходит определенный прирост кинетической энергии. Мы ее называем *тепловой*, а сами помним, что никакая это не новая форма энергии, а всего лишь кинетическая, но внутреннего движения. (Одна из трудностей всех опытов с большим количеством вещества в том и состоит, что невозможно взаправду показать сохраняемость энергии, сделать настоящую обратимую машину; каждый раз, когда поворачивается большой комок вещества, атомы не остаются в прежнем состоянии, в их систему включается некоторое количество случайного движения. Увидеть это нельзя, но измерить термометрами и другими приборами можно.)

Существует еще немало других форм энергии, но описать их сейчас сколько-нибудь подробно мы, конечно, не сможем.

Имеется энергия электрическая, связанная с притяжением и отталкиванием электрических зарядов.

Есть энергия излучения, или энергия света,— одна из форм электрической энергии, ибо свет может быть представлен как колебания электромагнитного поля.

Бывает энергия химическая — энергия, высвобождаемая в химических реакциях. Упругая энергия в некотором роде похожа на химическую; и химическая энергия есть энергия притяжения атомов друг к другу, и упругая энергия тоже. В настоящее время мы это понимаем следующим образом: химическая энергия складывается из двух частей — энергии движения электронов внутри атомов, т. е. из кинетической части, и электрической энергии притяжения электронов к протонам, т. е. из электрической части.

Дальше, бывает ядерная энергия, связанная с расстановкой частиц в ядре; для нее тоже существует формула, хотя основные законы нам и неведомы. Мы знаем, что это не электричество, не тяготение, просто химия — словом, неизвестно что. Видимо, это добавочная форма энергии.

И наконец, теория относительности видоизменяет формулу кинетической энергии, так что название это становится условным, сочетая ее с другим понятием: *энергией массы*. Любой объект обладает энергией уже потому, что он *существует*. Если электрон и позитрон спокойно стоят рядом, ничем не занимаясь (ни тяготением, ни чем иным), а потом сливаются и исчезают, то освобождается определенная порция энергии излучения, и эту порцию можно подсчитать. Все, что для этого нужно,— это знать массу объекта. Неважно, что это такое — два тела исчезли, определенная энергия появилась. Формулу впервые придумал Эйнштейн: это $E = mc^2$.

Из наших рассуждений ясно, что при анализе явления закон сохранения энергии незаменим; мы уже показали это на ряде примеров, для которых мы не знали всех формул. Владей мы формулами для всех типов энергии, мы могли бы узнавать, не вдаваясь в детали, сколько процессов происходит в таком-то явлении. Оттого законы сохранения столь важны. Встает естественный вопрос: какие еще есть в физике законы сохранения.

Существуют еще два закона, сходных с законом сохранения энергии. Один называется сохранением импульса (или количества движения). Другой — сохранением момента количества движения. Позже мы подробней познакомимся с ними.

В конечном счете мы не понимаем законов сохранения достаточно глубоко. Нам непонятно сохранение энергии. Мы не вправе представить себе энергию как некоторое количество неделимых порций. Вы, вероятно, слышали, что фотоны вылетают порциями и что энергия их равна постоянной Планка, умноженной на частоту. Это правда, но так как частота света может быть любой, то нет никакого закона, по которому порция энергии обязана иметь некоторую определенную величину. Это уже не кубики Монтигомо Ястребиного Когтя: любые количества энергии допустимы, по крайней мере в настоящее время. Для нас энергия — это не то, что можно пересчитать, а всего лишь математическая величина, абстракция, — обстоятельство довольно странное. В квантовой механике выявляется, что сохраняемость энергии тесно увязана с другим важным свойством мира — *с независимостью от абсолютного времени.* Мы можем поставить опыт в некоторый момент, а потом еще раз в другой момент; он будет протекать одинаково. Абсолютно ли верно это утверждение или нет — мы не знаем. Но если мы примем, что оно *абсолютно* верно, и добавим принципы квантовой механики, то из этого можно вывести принцип сохранения энергии. Это довольно тонкая и интересная вещь, которую нелегко пояснить. Другие законы сохранения также связаны между собой: сохранение импульса в квантовой механике — с утверждением, что неважно, *где* происходит опыт, его итог от этого не меняется. И подобно тому, как независимость от места связана с сохранением импульса, а независимость от времени — с сохранением энергии, точно так же от *поворота* наших приборов тоже ничего не должно изменяться; независимость от ориентации в пространстве имеет отношение к сохранению *момента количества движения.*

Кроме этого, существуют еще три закона сохранения; они точные, насколько ныне нам известно, и понять их намного легче, так как по своей природе они близки к подсчету кубиков. Первый из них — *сохранение заряда*; он просто означает, что если подсчитать, сколько есть положительных зарядов, и из этого вычесть количество отрицательных, то число это никогда не изменится. Вы можете избавиться от положительных вместе с отрицательными, но не создадите никогда чистого избытка одних над другими. И прочие два закона похожи на этот. Один называют *сохранением числа барионов.* Имеется некоторое количество удивительных частиц (примеры: нейтрон и протон), называемых барионами. В любой реакции, где бы в природе она ни происходила, если подсчитать, сколько барионов было в начале процесса (считая антибарион за —1 барион), то в конце их число окажется тем же. Другой закон — *сохранение числа лептонов.* Группа частиц, называемых лептонами, включает электрон, мюон и нейтрино. Антиэлектрон, т. е. позитрон, считается за —1 лептон. Подсчет общего числа лептонов в реакции обнаруживает, что на входе и на выходе реакции это число одинаково, по крайней мере насколько нам сейчас известно.

Вот вам шесть законов сохранения: три замысловатых, связанных с пространством и временем, а три простых, связанных с обычным счетом.

К сохраняемости энергии *доступность* и *полезность* энергии не имеет никакого отношения. В атомах морской воды немало энергии движения, так как температура моря довольно высока, но нет никакой возможности направить эту энергию в определенное русло, не отобрав ее откуда-нибудь еще. Иначе говоря, хотя нам известен тот факт, что энергия сохраняется, но не так-то просто сохранить энергию, пригодную для человека. Законы, управляющие количеством пригодной для человека энергии, называются *законами термодинамики* и включают понятие, называемое *энтропией необратимых термодинамических процессов.*

Наконец, остановимся на том, откуда мы сегодня можем получать необходимый запас энергии. Энергией нас снабжают Солнце и дожди, уголь, уран и водород. Впрочем, и дожди, и уголь в конце концов без Солнца были бы невозможны. Хотя энергия сохраняется, природа, по всей видимости, этим ничуть не интересуется; она освобождает из Солнца множество энергии, но только одна двухмиллиардная часть ее падает на Землю. Природа сохраняет энергию, но в действительности о ней не заботится, расточая ее направо и налево. Мы уже получаем энергию из урана, мы можем получать ее и из водорода, но пока это получение связано со взрывами, с большой опасностью. Если бы мы смогли научиться управлять термоядерными реакциями, то энергия, которую можно получать, тратя по 10 *л* воды в секунду, равнялась бы всей электроэнергии, производимой сейчас за это время в Соединенных Штатах. Шестисот литров речной воды в минуту хватило бы, чтобы снабжать энергией всю страну! Именно физикам придется придумать, как избавить нас от нужды в энергии. И это, бесспорно, достижимо.

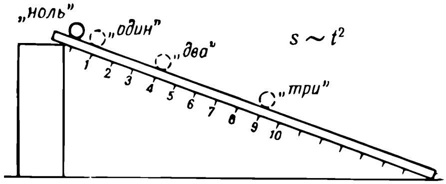
Глава **5**

ВРЕМЯ И РАССТОЯНИЕ

§ 1. *Движение*

В этой главе мы рассмотрим понятия *время* и *расстояние*. Мы уже говорили, что физика, как, впрочем, любая другая наука, основывается на *наблюдениях*. Можно даже сказать, что развитие физических наук до их современного уровня в огромной степени зависело от фактов, основанных на *количественных* наблюдениях. Только с помощью количественных наблюдений можно получить количественные соотношения — сердце современной физики.

Многие считают, что физика берет свое начало с опыта, проведенного Галилеем 350 лет назад, а сам Галилей является первым физиком. До этого времени изучение движения было чисто философским и основывалось на доводах, которые были плодом фантазии. Большинство этих доводов были придуманы Аристотелем и другими греческими философами и рассматривались как «доказанные». Но Галилей был скептиком и поставил следующий опыт: по наклонной плоскости он пускал шар и наблюдал за его движением (фиг. 5.1). Галилей не просто смотрел, как катится шар, а измерял то *расстояние*, которое прошел шар, и определял *время*, в течение которого шар проходил это расстояние. Способ измерения расстояний был хорошо известен еще задолго до Галилея, однако точного способа измерения времени, особенно коротких интервалов, не было. Хотя впоследствии Галилей изобрел более совершенные часы (отнюдь не похожие на современные), но в своих первых опытах для отсчета равных промежутков времени он использовал собственный пульс. Давайте сделаем то же самое.



Фиг. 5.1. Шарик катится по наклонной плоскости.

Будем отсчитывать удары пульса в то время, как шарик катится вниз: «Один... два... три... четыре... пять... шесть... семь... восемь...». Пусть кто-нибудь отмечает положение шарика на каждый счет. Теперь можно измерить *расстояние*, которое шарик прошел за один, два, три и т. д. равных интервала времени. Галилей сформулировал результат своих наблюдений следующим образом: если отмечать положения шарика через 1, 2, 3, 4, ... единицы времени от начала движения, то окажется, что эти отметки удалены от начального положения пропорционально числам 1, 4, 9, 16, ... Сейчас мы сказали бы, что расстояние пропорционально квадрату времени:

$$s \sim t^2.$$

Таким образом, изучение процесса *движения* (основы современной физики) начинается с вопросов: где и когда?

§ 2. Время

Разберем сначала, что́ мы понимаем под словом *время*. Что же *это такое*? Неплохо было бы найти подходящее определение понятия «время». В толковом словаре Вебстера, например, «время» определяется как «период», а сам «период», — как «время». Однако пользы от этого определения мало. Но и в определении «время — это то, что меняется, когда больше ничего не изменяется» не больше смысла. Быть может, следует признать тот факт, что время — это одно из понятий, которое определить невозможно, и просто сказать, что это нечто известное нам: это то, что отделяет два последовательных события!

Дело, однако, не в том, как дать *определение* понятия «время», а в том, как его измерить. Один из способов измерить время — это использовать нечто регулярно повторяющееся, нечто *периодическое*. Например, день. Казалось бы, дни регулярно следуют один за другим. Но, поразмыслив немного, сталкиваешься с вопросом: периодичны ли они? Все ли дни имеют одинаковую длительность? Создается впечатление, что летние дни длиннее зимних. Впрочем, некоторые зимние дни кажутся ужасно длинными, особенно если они скучны. О них обычно говорят: «Ужасно длинный день»!

Однако, по-видимому, все сутки в среднем одинаковы. Можно ли проверить, действительно ли они одинаковы и от одного дня до другого, хотя бы в среднем, проходит ли одно и то же время? Для этого необходимо произвести сравнение с каким-то другим периодическим процессом. Давайте посмотрим, как такое сравнение можно, например, провести с помощью песочных часов. С помощью таких часов мы можем создать периодический процесс, если будем стоять возле них день и ночь и переворачивать каждый раз, когда высыпятся последние крупинки песка.

Если затем подсчитать число переворачиваний песочных часов от каждого утра до следующего, то можно обнаружить, что число «часов» (т. е. число переворачиваний) в разные дни различно. Кто же виноват в этом? Может быть, Солнце? Может быть, часы? А может, и то и другое? После некоторых размышлений можно прийти к мысли, что следует считать «часы» не от утра до утра, а от полудня до полудня (полдень — это, конечно, не 12 часов, а момент, когда Солнце находится в наивысшем положении). На этот раз оказывается, что в каждых сутках число «часов» одинаково.

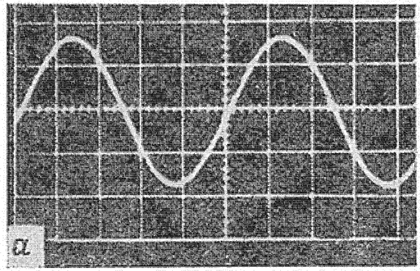
Теперь можно утверждать, что «час» и «сутки» имеют регулярную периодичность, т. е. отмечают последовательные равные интервалы времени, хотя нами и *не доказано*, что каждый из процессов действительно периодичен. Нас могут спросить: а вдруг есть некое всемогущее существо, которое замедляет течение песка ночью и убыстряет днем? Наш эксперимент, конечно, не может дать ответа на такого рода вопросы. Очевидно лишь то, что периодичность одного процесса согласуется с периодичностью другого. Поэтому при *определении* понятия «время» мы просто будем исходить из повторения некоторых очевидно периодических событий.

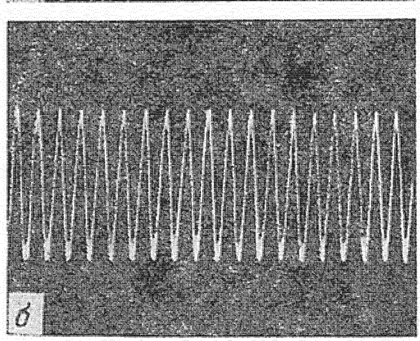
§ 3. *Короткие времена*

Заметим, что в процессе проверки «воспроизводимости» дней мы нашли метод измерения *части* дня, т. е. метод измерения меньших промежутков времени. Нельзя ли этот процесс продолжить и научиться измерять еще меньшие промежутки времени?

Галилей предположил, что каждый маятник отклоняется и возвращается назад за равные интервалы времени (если отклонения невелики). Сравнение числа отклонений маятника с «часом» показывает, что это действительно так. Таким способом можно измерять доли «часа». Если для подсчета числа колебаний маятника применить механический счетчик, то мы получим маятниковые часы наших дедов.

Фиг. 5.2. Две осциллограммы, снятые с экрана осциллографа.
а — при осциллографе, подключенном к одному осциллятору; б — при осциллографе, подключенном к осциллятору, период колебаний которого в десять раз меньше первого.





Договоримся теперь, что если маятник отклонится 3600 раз в час (и если в сутках 24 часа), то период колебаний такого маятника мы назовем «секундой». Итак, нашу первоначальную единицу «сутки» мы разделили приблизительно на 10^5 частей. Используя тот же принцип сравнения, можно и секунду разделить на все меньшие и меньшие части. Для этого оказывается более удобным использовать не простой механический, а *электрический маятник*, называемый осциллятором, период колебаний которого может быть очень малым. В таких электронных осцилляторах роль маятника выполняет электрический ток, который течет то в одном, то в другом направлении.

Давайте представим себе целый ряд таких осцилляторов, что период колебаний каждого последующего в десять раз меньше предыдущего. Это можно проверить путем простого подсчета числа колебаний последующего осциллятора за одно колебание предыдущего; только теперь этот подсчет трудно провести без устройства, расширяющего возможности наблюдения, своеобразного «микроскопа времени». Таким устройством может служить электронно-лучевой осциллограф, на светящемся экране которого строится график зависимости электрического тока (или напряжения) от времени.

Соединяя осциллограф сначала с одним осциллятором, а затем с другим, мы получим на экране графики зависимости тока от времени в одном и в другом осцилляторе (фиг. 5.2). А теперь нетрудно подсчитать, какое число периодов «быстрого» осциллятора укладывается в одном периоде «медленного».

Современная электроника позволяет создавать осцилляторы с периодами 10^{-12} *сек*, которые выверяются (калибруются) методом сравнения, подобным вышеописанному, на стандартную единицу времени — секунду. В последние несколько лет в связи с изобретением и усовершенствованием «лазера», или усилителя света, появилась возможность сделать осцилляторы с еще более коротким периодом. Пока еще невозможно калибровать их тем же методом, однако, несомненно, что и это скоро будет достигнуто.

Можно измерять промежутки времени, гораздо более короткие, чем 10^{-12} *сек*, но для этого используются совершенно другие методы. В сущности используется другое *определение* понятия «время». Один из таких методов — это измерение *расстояния* между двумя событиями, происходящими на движущемся объекте. Например, пусть в движущемся автомобиле сначала включают, а затем выключают фары. Если известно, *где* были включены фары и какова была скорость автомобиля, то можно вычислить, сколько времени они горели. Для этого нужно *расстояние*, на протяжении которого горели фары, разделить на скорость автомобиля.

Именно таким методом в последние годы измерялось время жизни π^0-мезона. При наблюдении в микроскоп мельчайших следов, оставленных на фотоэмульсии, в которой родился π^0-мезон, было обнаружено следующее: π^0-мезон, двигаясь со скоростью, близкой к скорости света, прежде чем распасться, проходит в среднем расстояние около 10^{-7} *м*. Таким образом, время жизни π^0-мезона составляет всего лишь 10^{-16} *сек*! Необходимо подчеркнуть, что здесь было использовано несколько другое определение понятия «время», но, поскольку оно не приводит к каким-либо противоречиям, можно быть уверенным в том, что эти определения в достаточной мере эквивалентны друг другу.

Развивая технику эксперимента, а если необходимо, меняя определение понятия «время», можно обнаружить еще более быстрые физические процессы. Мы, например, можем говорить о периоде вибраций ядра или о времени жизни недавно обнаруженных «странных» резонансов (частиц), которые уже упоминались в гл. 2. Время жизни этих частиц лишь ненамного больше 10^{-24} *сек*! Приблизительно столько времени требуется свету (который имеет наибольшую скорость распространения), чтобы пройти расстояние, равное диаметру ядра водорода (наименьший из известных объектов).

Что можно сказать о еще более коротких интервалах времени? Имеет ли смысл вообще говорить о них, если невозможно не только измерить, но даже разумно судить о процессах, происходящих в течение столь коротких интервалов? Возможно, нет. Это один из тех вопросов, на которые нет ответа. Может быть, кому-нибудь из вас посчастливится ответить на него в ближайшие 20—30 лет.

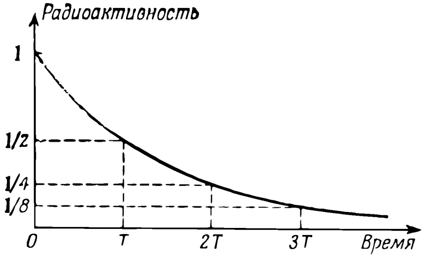
§ 4. Большие времена

Рассмотрим теперь промежутки времени, бóльшие «суток». Измерять большие времена легко: нужно просто считать дни, пока не придумаем что-нибудь лучшего. Первое, с чем мы сталкиваемся, это год — вторая естественная периодичность, состоящая приблизительно из 365 дней. Интересно, что в природе существуют естественные счетчики лет в виде годовых колец у деревьев или отложений речного ила. В некоторых случаях можно использовать эти естественные счетчики для определения времени, отделяющего нас от какого-либо отдаленного события в прошлом.

ТАБЛИЦА ВРЕМЕН

Годы	Секунды		Период полураспада
	10^{18}	????	
		Возраст Вселенной	
		Возраст Земли	U^{238}
10^9			
	10^{15}		
		Первый человек	
10^6			
	10^{12}	Возраст пирамид	
10^3			Ra^{226}
		Возраст США	
	10^9	Человеческая жизнь	H^3
1			
	10^6		
		Сутки	
	10^3	Свет проходит расстояние от Солнца до Земли	Нейтрон
	1	Один удар сердца	
	10^{-3}	Период звуковой волны	
	10^{-6}	Период радиоволны	μ-мезон
			$\pi\pm$-мезон
	10^{-9}	Свет проходит расстояние 1 *м*	
	10^{-12}	Период молекулярных вращений	
	10^{-15}	Период атомных колебаний	π^0-мезон
	10^{-18}	Свет проходит через атом	
	10^{-21}		
		Период ядерных колебаний	
	10^{-24}	Свет проходит через ядро	Странные частицы
		????	

Но, когда невозможно считать годы для очень больших отрезков времени, нужно искать какие-то другие способы



Фиг. 5.3. Уменьшение радиоактивности со временем.

Радиоактивность падает в два раза за каждый период полураспада T.

измерения. Одним из наиболее эффективных методов является использование в качестве «часов» радиоактивного вещества. Здесь мы сталкиваемся с «регулярностью» иного рода, чем в случае, скажем, маятника. Радиоактивность любого вещества для последовательных равных *интервалов* времени изменяется в одно и то же число раз. Если начертить график зависимости радиоактивности от времени, то мы получим кривую типа изображенной на фиг. 5.3. Мы видим, что если радиоактивность за T дней (период полураспада) уменьшается вдвое, то за $2T$ дней она уменьшится в четыре раза и т. д. Произвольный интервал времени t содержит t/T «периодов полураспада», и, следовательно, количество начального вещества уменьшится в $2^{t/T}$ раза.

Если мы знаем, что какой-то материал, например дерево, при своем образовании содержал некоторое количество A радиоактивного вещества, а прямые измерения показывают, что теперь он содержит количество B, то возраст этого материала можно просто вычислить, решив уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}=\frac{B}{A}.$$

А такие случаи, когда мы знаем первоначальное количество радиоактивного вещества, к счастью, существуют. Известно, например, что углекислый газ в воздухе содержит малую долю радиоактивного изотопа C^{14}, период полураспада которого составляет 5000 лет. Количество его благодаря действию космических лучей постоянно пополняется взамен распавшегося. Если мы измеряем *полное* содержание углерода в каком-то предмете и знаем, что определенная доля этого углерода была первоначально радиоактивным C^{14}, то нам известно и первоначальное количество A и мы можем пользоваться приведенной выше формулой. Если же путем точных измерений установлено, что оставшееся количество C^{14} соответствует 20 периодам полураспада, то можно сказать, что этот органический предмет жил приблизительно 100 000 лет назад.

Хотелоь бы, однако, узнать возраст еще более древних вещей. Это можно сделать, измерив содержание других радиоактивных элементов с большими периодами полураспада. Уран, например, имеет изотоп с периодом полураспада около 10^9 лет, так что если какой-то материал при своем образовании 10^9 лет назад содержал уран, то сегодня от него осталась только половина первоначального количества. При своем распаде уран превращается в свинец. Как определить возраст горной породы, которая образовалась много-много лет назад в результате какого-то химического процесса? Свинец по своим химическим свойствам отличается от урана, поэтому они первоначально входили в разные виды горных пород. Если взять такой вид породы, который вначале должен был содержать только уран, то мы обнаружим в нем некоторое количество свинца. Сравнивая доли свинца и урана, можно определить ту часть урана, которая в результате распада превратилась в свинец. Этим методом было установлено, что возраст некоторых горных пород составляет несколько миллиардов лет. Применяя шире этот метод путем сравнения содержания урана и свинца не только в некоторых горных породах, но и в воде океанов, а затем усредняя различные данные по всему земному шару, установили, что нашей планете исполнилось примерно 5,5 миллиарда лет.

Интересно, что возраст метеоритов, падающих на Землю, вычисленный по урановому методу, совпадает с возрастом самой Земли. Более того, оказалось, что и метеориты, и горные породы Земли составлены из одного и того же материала, поэтому существует мнение, что Земля образовалась из пород, «плававших» некогда в «околосолнечном» пространстве.

Некогда, во времена, еще более древние, чем возраст Земли (т. е. 5 миллиардов лет назад), начала свою историю Вселенная. Сейчас считают, что возраст по крайней мере нашей части Вселенной достигает примерно 10—12 миллиардов лет. Нам неизвестно, что́ было до этого. В сущности опять можно спросить: «А есть ли смысл говорить о том, что было до этого! И имеет ли смысл само понятие «время» до «рождения» Вселенной?»

§ 5. *Единицы и стандарты времени*

Мы уже говорили, что счет времени удобно вести в каких-то стандартных единицах, скажем в днях или секундах, и измерять длительности в количествах этой единицы или ее долях. Но что же выбрать за основную стандартную единицу? Можно ли, например, принять за отправную единицу человеческий пульс? Очевидно, нет. Уж очень непостоянна эта единица. Лучше обстоит дело с часами. Двое часов согласуются гораздо лучше, чем пульс. Вы скажете: ладно, давайте возьмем часы. Но чьи? Существует предание об одном швейцарском мальчике, которому хотелось, чтобы все часы в его городе отзванивали полдень и в одно и то же время. Он ходил по городу и доказывал всем, насколько это важно. Каждый считал, что это действительно было бы чудесно, если бы все другие часы в городе звонили полдень по *его* часам! В самом деле, очень трудно решить, чьи же часы мы должны выбрать в качестве стандарта. К счастью, существуют часы, которые признают все,— это наша Земля. Долгое время в качестве стандарта выбирался период вращения Земли. Однако по мере того, как измерения становились все более точными, обнаруживалось, что вращение Земли не строго периодично, если сравнивать его с лучшими часами. А этим «лучшим часам» можно доверять, ибо они согласуются друг с другом. Сейчас известно, что по разным причинам одни дни оказываются длиннее других и, кроме того, средний период вращения Земли на протяжении столетий несколько удлиняется.

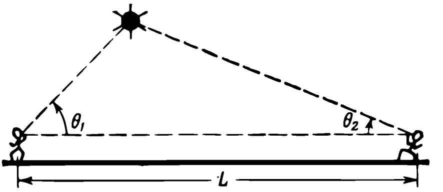
Вплоть до самого последнего времени не было найдено ничего более точного, чем вращение Земли, и поэтому все часы сверялись с длиной астрономических суток, а секунда определялась как 1/86 400 часть средних суток. Однако сейчас мы научились работать с некоторыми етественными осцилляторами, которые являются более точными стандартами времени, чем вращение Земли. Это так называемые «атомные часы». В основе их лежат колебания атомов, период которых нечувствителен к температуре и другим внешним воздействиям. Эти часы позволяют измерять время с точностью, лучшей $10^{-7}\%$. В последние два года профессор Гарвардского университета Норман Рамзей спроектировал и построил улучшенные атомные часы, работающие на колебаниях атомов водорода. Он считает, что эти часы могут быть еще в сто раз более точными. Сейчас ведутся измерения, которые покажут, насколько он прав.

А поскольку оказалось возможным создать часы гораздо более точные, чем астрономические, то ученые договариваются определять единицу времени с помощью новых стандартов — атомных часов *.

§ 6. Большие расстояния

Вернемся теперь к вопросу о *расстоянии*. Как далеко отстоят от нас окружающие предметы и как велики они? Всем

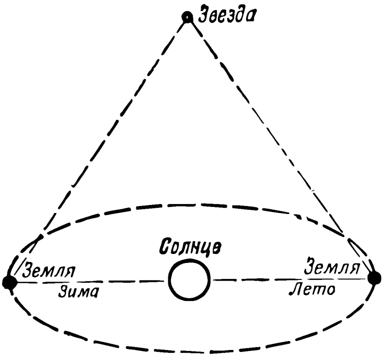
* Об этом ученые договорились в конце 1964 г., когда готовилось русское издание этой книги. — *Прим. ред.*



Фиг. 5.4. Определение высоты искусственного спутника методом триангуляции.

известно, что для измерения расстояния нужно взять какую-то единицу длины и считать, сколько этих единиц укладывается на данном отрезке. Но как измерить те предметы, которые меньше единицы длины? Как подразделить выбранную единицу длины? А точно так же, как и время: мы берем меньшую единицу длины и считаем, сколько таких единиц укладывается в большей. Таким методом мы сможем измерять все меньшие и меньшие длины.

Однако под расстоянием мы понимаем не только то, что можно измерить метром. Как, например, измерить метром расстояние между вершинами двух гор? Здесь на помощь приходит уже другой метод измерения расстояний — триангуляция. Хотя это означает использование другого определения понятия «расстояние», но в тех случаях, когда есть возможность применить оба метода, они дают одинаковый результат. Пространство все же более или менее соответствует представлениям Евклида, поэтому оба определения эквивалентны. Ну, а раз они согласуются на Земле, то мы более уверены в законности применения триангуляции и для больших расстояний. Этим методом была измерена, например, высота первого спутника (фиг. 5.4). Она оказалась равной приблизительно $5 \cdot 10^5$ *м*. При большей тщательности измерений тем же самым методом определялось расстояние до Луны. Направления двух телескопов в различных точках Земли дают два необходимых угла. Оказалось, что Луна удалена от нас на расстояние $4 \cdot 10^8$ *м*. Однако для Солнца таких измерений провести нельзя, по крайней мере до сих пор никому не удавалось. Дело в том, что точность, с которой можно сфокусировать телескоп на данную точку Солнца и с которой можно измерить углы, не достаточна для вычисления расстояния до Солнца. Как же все-таки определить его? Необходимо как-то расширить принцип триангуляции. Астрономические наблюдения позволяют измерить *относительное* расстояние между планетами и Солнцем и определить их относительное расположение. Таким образом, мы получаем план солнечной системы в неизвестном масштабе. Чтобы определить масштаб, требуется только одно *абсолютное* расстояние, которое было найдено многими различными способами. Один из способов, считавшийся до самого по-



Фиг. 5.5. Определение расстояния до ближайшей звезды методом триангуляции.

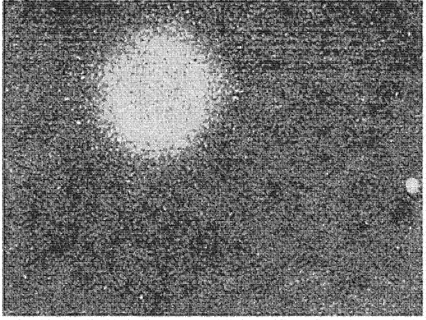
В качестве базы используется диаметр орбиты Земли.

следнего времени наиболее точным, заключается в определении расстояния от Земли до Эроса — малой планеты, которая по временам проходит недалеко от Земли. С помощью триангуляции можно определить расстояние до этого небольшого объекта и получить необходимый масштаб. Зная относительные расстояния, можно определить, например, все абсолютные расстояния от Земли до Солнца или до планеты Плутон.

В последний год достигнуты большие успехи в определении масштаба солнечной системы. В Лаборатории ракетных двигателей с помощью прямой радиолокационной связи были проведены очень точные измерения расстояния от Земли до Венеры. Здесь мы имеем дело еще с одним определением понятия «расстояние». Нам известна скорость распространения света (а стало быть, и скорость распространения радиоволн), и мы предполагаем, что эта скорость постоянна на всем протяжении между Землей и Венерой. Послав радиоволну по направлению к Венере, мы считаем время до прихода отраженной волны. А зная *время и скорость*, мы получаем *расстояние*.

А как измерить расстояние до еще более отдаленных объектов, например до звезд? К счастью, здесь снова можно возвратиться к нашему методу триангуляции, ибо движение Земли вокруг Солнца позволяет измерить расстояние до объектов, находящихся вне солнечной системы. Если мы направим телескоп на некую звезду один раз зимой, а другой раз летом (фиг. 5.5), то можно надеяться достаточно точно измерить углы и определить расстояние до этой звезды.

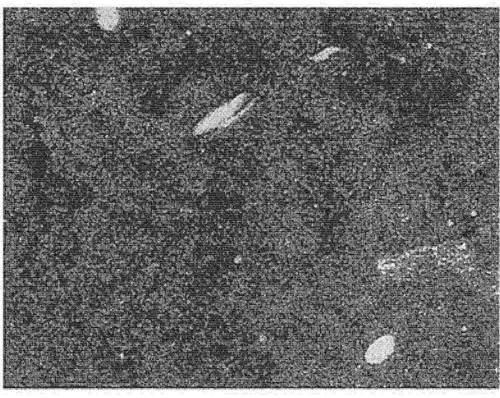
Но что делать, если звезда находится настолько далеко от нас, что уже невозможно пользоваться методом триангуляции? Астрономы всегда изобретают все новые и новые способы определения расстояний. Так, они научились определять размер и яркость звезд по их цвету. Оказалось, что



Фиг. 5.6. Скопление звезд вблизи центра нашей Галактики, удаленное от нас на расстояние 30 000 световых лет, или около $3 \cdot 10^{20}$ м.

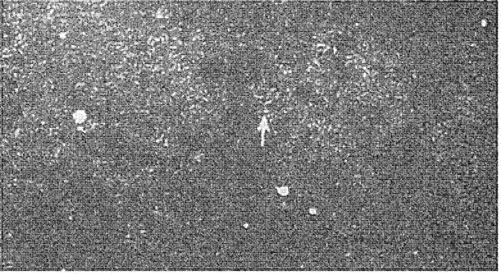
цвет и истинная яркость многих близлежащих звезд, расстояние до которых определялось методом триангуляции, в большинстве случаев связаны между собой гладкой зависимостью. Если теперь измерить цвет отдаленной звезды, то по этой зависимости можно определить ее истинную яркость, а измеряя *видимую яркость* звезды (вернее, по тому, насколько звезда нам кажется *тусклой*), можно вычислить расстояние до нее. (Для данной истинной яркости видимая яркость уменьшается как квадрат расстояния.) Правильность этого метода нашла неожиданное подтверждение в результатах измерений, проведенных для группы звезд, известных под названием «шарового скопления». Фотография этой группы звезд приведена на фиг. 5.6. Достаточно взглянуть на фотографию, чтобы убедиться, что все эти звезды расположены в одном месте. Тот же результат получается и с помощью метода сравнения цвета и яркости.

Изучение многих шаровых скоплений дает еще одну важную информацию. Оказалось, что существует участок неба с большой концентрацией таких шаровых скоплений, при-



Фиг. 5.7. Спиральная галактика, подобная нашей.

Если предположить, что диаметр этой галактики равен диаметру нашей Галактики, то, исходя из ее кажущегося размера, можно подсчитать расстояние; оно оказывается равным 30 миллионам световых лет ($3 \cdot 10^{23}$ м).

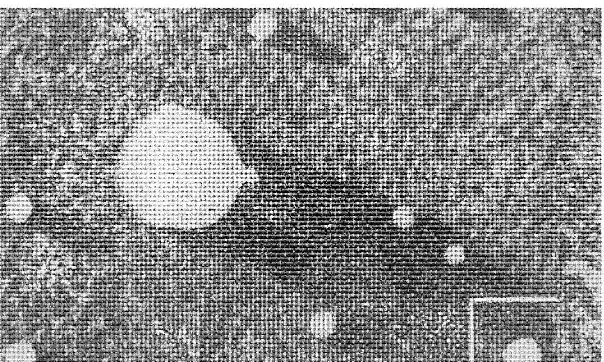


Фиг. 5.8. Наиболее удаленный от нас объект 3C295 в созвездии Волопаса (указан стрелкой), который измерялся в 1960 г. с помощью 200-дюймового телескопа.

чем большинство из них находится на одном и том же расстоянии от нас. Сравнивая эти данные с некоторыми другими, мы приходим к заключению, что эти скопления являются центром нашей Галактики. Таким образом мы определяем, что расстояние до центра Галактики составляет приблизительно 10^{20} *м*.

Данные о размере нашей Галактики дают ключ к определению еще больших межгалактических расстояний. На фиг. 5.7 приведена фотография галактики, которая по форме очень похожа на нашу Галактику. Возможно, что и размер ее тот же. (Есть еще ряд соображений, согласно которым размеры всех галактик приблизительно одинаковы.) А если это так, то можно узнать расстояние до нее. Мы измеряем угловой размер галактики (т. е. угол, который она занимает на небесном своде), знаем ее диаметр, а стало быть, можем вычислить расстояние. Опять та же триангуляция!

Недавно с помощью гигантского Паломарского телескопа были получены фотографии неимоверно далеких галактик. Одна из этих фотографий приведена на фиг. 5.8. Сейчас полагают, что расстояние до некоторых из них приблизительно равно половине размера Вселенной (10^{26} *м*) — наибольшего расстояния, которое можно себе представить!



Фиг. 5.9. Фотография вирусов, полученная с помощью электронного микроскопа.

Видна «большая» сфера, показанная для сравнения: диаметр ее равен $2\cdot10^{-7}$ м, или 2000 Å.

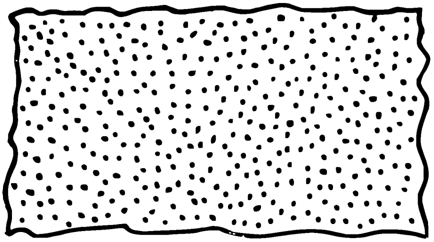
§ 7. *Малые расстояния*

Обратимся теперь к малым расстояниям. Подразделить метр просто. Без особых трудностей можно разделить его на тысячу равных частей. Таким же путем, хотя и несколько сложнее (используя хороший микроскоп), можно разделить миллиметр на тысячу частей и получить микрон (миллионную долю метра). Однако продолжать это деление становится трудно, поскольку невозможно «увидеть» объекты, меньшие, чем длина волны видимого света (около $5 \cdot 10^{-7}$ *м*).

Все же мы не останавливаемся на том, что недоступно глазу. С помощью электронного микроскопа можно получить фотографии, помогающие увидеть и измерить еще меньшие объекты — вплоть до 10^{-8} *м* (фиг. 5.9). А с помощью косвенных измерений (своего рода триангуляции в микроскопическом масштабе) можно измерять все меньшие и меньшие объекты. Сначала из наблюдений отражения света

ТАБЛИЦА РАССТОЯНИЙ

Световые годы	Метры	
		????
	10^{27}	
		Размеры Вселенной
10^{9}	10^{24}	
10^{6}		До ближайшей соседней Галактики
	10^{21}	
		До центра нашей Галактики
10^{3}		
	10^{18}	
1		До ближайшей звезды
	10^{15}	
		Радиус орбиты Плутона
	10^{12}	
		До Солнца
	10^{9}	
		До Луны
	10^{6}	
		Высота искусственного спутника
	10^{3}	
		Высота телевизионной башни
		Рост ребенка
	1	
	10^{-3}	
		Крупинка соли
	10^{-6}	
		Размер вируса
	10^{-9}	
	10^{-12}	Радиус атома
	10^{-15}	Радиус ядра
		????



Фиг. 5.10. Воображаемая пластинка углерода толщиной 1 см при сильном увеличении (если бы были видны только ядра атомов).

короткой длины волны (рентгеновских лучей) от образца с нанесенными на известном расстоянии метками измеряется длина волны световых колебаний. Затем по картине рассеяния того же света на кристалле можно определить относительное расположение в нем атомов, причем результат хорошо согласуется с данными о расположении атомов, полученными химическим путем. Таким способом определяется диаметр атомов (около 10^{-10} *м*).

Дальше в шкале расстояний имеется довольно большая незаполненная «щель» между атомными размерами 10^{-10} *м* и в 10^5 раз меньшими ядерными размерами (около 10^{-15} *м*). Для определения ядерных размеров применяются уже совершенно другие методы: измеряется *видимая площадь* σ, или так называемое *эффективное поперечное сечение*. Если же мы хотим определить радиус, то пользуемся формулой $\sigma = \pi r^2$, поскольку ядра можно приближенно рассматривать как сферические.

Эффективные сечения ядер можно определить, пропуская пучок частиц высокой энергии через тонкую пластинку вещества и измеряя число частиц, не прошедших сквозь нее. Эти высокоэнергетические частицы прорываются сквозь легкое облачко электронов, но при попадании в тяжелое ядро останавливаются или отклоняются. Предположим, что у нас имеется пластинка толщиной 1 *см*. На такой толщине укладывается приблизительно 10^8 атомных слоев. Однако ядра настолько малы, что вероятность того, что одно ядро закроет другое, очень незначительна. Можно себе представлять, что высокоэнергетическая частица, налетающая на пластинку углерода толщиной 1 *см*, «видит» приблизительно то, что в сильно увеличенном масштабе показано на фиг. 5.10.

Вероятность того, что очень малая частица столкнется с ядром, равна отношению площади, занимаемой ядрами (черные точки) к общей площади рисунка. Пусть над областью с площадью A по всей толщине пластинки находится N атомов (разумеется, каждый с одним ядром). Тогда доля площади, закрытая ядрами, будет равна $N\sigma/A$. Пусть теперь число частиц в нашем пучке до пластинки будет равно n_1, а после нее равно n_2; тогда доля частиц, *не* прошедших через пластинку, будет $(n_1 - n_2)/n_1$, что должно быть равно доле площади, занимаемой ядрами. Радиус же ядер вычисляется из равенства *

$$\pi r^2 = \sigma = \frac{A}{N}\,\frac{n_1 - n_2}{n_1}.$$

Из таких экспериментов мы находим, что радиусы ядер лежат в пределах от $1 \cdot 10^{-15}$ до $6 \cdot 10^{-15}$ *м*. Кстати, единица длины 10^{-15} *м* называется *ферми* в честь Энрико Ферми (1901—1958).

Что можно ожидать в области еще меньших расстояний? Можно ли их измерять? На этот вопрос пока еще нет ответа. Может быть, именно здесь, в каком-то изменении понятия пространства или измерения на малых расстояниях, кроется разгадка тайны ядерных сил.

Несколько слов о стандарте длины. Разумно в качестве стандарта использовать какую-то естественную единицу длины, например радиус Земли или некоторую его долю. Именно таким образом возник метр. Первоначально он определялся как $(\pi/2) \cdot 10^{-7}$ доля радиуса Земли. Однако такое определение нельзя считать ни особенно точным, ни удобным. Поэтому в течение долгого времени по международному соглашению в качестве эталона метра принималась длина между двумя метками, сделанными на особом брусе, который хранится в специальной лаборатории во Франции. Только много позднее поняли, что и такое определение метра не столь уж точно, как это необходимо, и не так уж универсально и постоянно, как этого хотелось бы. Поэтому сейчас принят новый стандарт длины как некоторое заранее установленное число длин волн определенной спектральной линии.

● ● ●

Результаты измерения расстояний и времени зависят от наблюдателя. Два наблюдателя, движущиеся друг относительно друга, измеряя один и тот же предмет или длительность одного и того же процесса, получат разные значения, хотя, казалось бы, мерили одно и то же. Расстояния и интервалы времени в зависимости от системы координат (т. е. системы отсчета), в которой производят измерения, имеют различную величину. В последующих главах мы будем более подробно разбирать этот вопрос.

---

* Это равенство справедливо только тогда, когда площадь, занимаемая ядрами, составляет малую долю общей площади, т. е. $(n_1 - n_2)/n_1$ много меньше единицы В противном же случае необходимо учитывать поправку на частичное «загораживание» одного ядра другим.

Законы природы не позволяют выполнять абсолютно точные измерения расстояний или интервалов времени. Мы уже упоминали ранее, что ошибка в определении положения предмета не может быть меньше, чем

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p},$$

где h — малая величина, называемая «постоянной Планка», а Δp — ошибка в измерении импульса (массы, умноженной на скорость) этого предмета. Как уже говорилось, эта неопределенность в измерении положения связана с волновой природой частиц.

Относительность пространства и времени приводит к тому, что измерения интервалов времени также не могут быть точнее, чем

$$\Delta t = \frac{h}{\Delta E},$$

где ΔE — ошибка в измерении энергии того процесса, продолжительностью которого мы интересуемся. Чтобы знать *более точно, когда* что-то произошло, мы вынуждены довольствоваться тем, что меньше знаем, *что́ же именно* произошло, поскольку наши знания об энергии, участвующей в процессе, будут менее точными. Эта неопределенность времени, так же как и неопределенность положения, связана с волновой природой вещества.

Глава **6**

ВЕРОЯТНОСТЬ

Истинная логика нашего мира — это подсчет вероятностей.

Джемс Кларк Максвелл

§ 1. Вероятность и правдоподобие

«Вероятность», или «шанс»,— это слово вы слышите почти ежедневно. Вот по радио передают прогноз погоды на завтра: «Вероятно, будет дождь». Вы можете сказать: «У меня мало шансов дожить до ста лет». Ученые тоже часто употребляют эти слова. Сейсмолога интересует вопрос: какова вероятность того, что в следующем году в Южной Калифорнии произойдет землетрясение такой-то силы? Физик может спросить: с какой вероятностью этот счетчик Гейгера зарегистрирует двадцать импульсов в последующие десять секунд? Дипломата или государственного деятеля волнует вопрос: каковы шансы этого кандидата быть избранным президентом? Ну, а вас, конечно, интересует: есть ли шансы что-либо понять в этой главе?

Под *вероятностью* мы понимаем что-то вроде предположения или догадки. Но почему и когда мы гадаем? Это делается тогда, когда мы хотим вынести какое-то заключение или вывод, но не имеем достаточно информации или знаний, чтобы сделать вполне определенное заключение. Вот и приходится гадать: может быть, так, а может быть и не так, но больше похоже на то, что именно так. Очень часто мы гадаем, когда нужно принять какое-то решение, например: «Брать ли мне сегодня с собой плащ или не стоит?» «На какую силу землетрясения должен я рассчитывать проектируемое здание?» «Нужно ли мне делать более надежную защиту?» «Следует ли мне менять свою позицию в предстоящих международных переговорах?» «Идти ли мне сегодня на лекцию?»

Иногда мы строим догадки потому, что хотим при ограниченности своих знаний сказать как можно *больше* о данной ситуации. В сущности ведь любое обобщение носит характер догадки. Любая физическая теория — это своего рода догадка. Но догадки тоже бывают разные: хорошие и плохие, близкие и далекие. Тому, как делать наилучшие догадки, учит нас теория вероятностей. Язык вероятностей позволяет нам количественно говорить о таких ситуациях, когда исход весьма и весьма неопределенен, но о котором все же в среднем можно что-то сказать.

Давайте рассмотрим классический пример с подбрасыванием монеты. Если монета «честная», то мы не можем знать наверняка, какой стороной она упадет. Однако мы предчувствуем, что при большом числе бросаний число выпадений «орла» и «решки» должно быть приблизительно одинаковым. В этом случае говорят: вероятность выпадения «орла» равна половине.

Мы можем говорить о вероятности исхода только тех наблюдений, которые собираемся проделать в будущем. *Под вероятностью данного частного результата наблюдения понимается ожидаемая нами наиболее правдоподобная доля исходов с данным результатом при некотором числе повторений наблюдения.* Вообразите себе повторяющееся N раз наблюдение, например подбрасывание вверх монеты. Если N_A — *наша оценка* наиболее правдоподобного числа выпадений с результатом A, например выпадений «орла», то под вероятностью $P(A)$ результата A мы понимаем отношение

$$P(A)=\frac{N_A}{N}. \qquad (6.1)$$

Наше определение требует некоторых комментариев. Прежде всего мы говорим о вероятности какого-то события только в том случае, если оно представляет собой возможный результат испытания, которое можно *повторить*. Но отнюдь не ясно, имеет ли смысл такой вопрос: какова вероятность того, что в этом доме поселилось привидение.

Вы, конечно, можете возразить, что никакая ситуация не может повториться в *точности*. Это верно. Каждое новое наблюдение должно происходить по крайней мере в другое время или в другом месте. По этому поводу я могу сказать только одно: необходимо, чтобы каждое «повторное» наблюдение казалось нам *эквивалентным*. Мы должны предполагать по крайней мере, что каждый новый результат наблюдения возник из равноценных начальных условий и из одного и того же уровня начальных знаний. Последнее особенно важно.

(Если вы заглянули в карты противника, то, конечно, ваши прогнозы о шансах на выигрыш будут совсем другими, чем если бы вы играли честно!)

Хочу отметить, что я *не собираюсь* рассматривать величины N и N_A в (6.1) только как результат каких-то действительных наблюдений. Число N_A — это просто наилучшая *оценка* того, что *могло бы* произойти при *воображаемых* наблюдениях. Поэтому вероятность зависит от наших знаний и способностей быть пророком, в сущности от нашего здравого смысла! К счастью, здравый смысл не столь уж субъективен, как это кажется на первый взгляд. Здравым смыслом обладают многие люди, и их суждения о степени правдоподобия того или иного события в большинстве случаев совпадают. Однако вероятность все же не является «абсолютным» числом. Поскольку в каком-то смысле она зависит от степени нашего невежества, постольку с изменением наших знаний она может меняться.

Отмечу еще одну «субъективную» сторону нашего определения вероятности. Мы говорили, что N_A — это «наша оценка наиболее вероятного числа случаев». При этом, конечно, мы не надеялись, что число нужных нам случаев будет *в точности* равно N_A, но оно должно быть где-то *близко* к N_A; это число *более вероятно*, чем любое другое. Если подбрасывать монету вверх 30 раз, то вряд ли можно ожидать, что число выпадений «орла» будет в точности 15; скорее это будет какое-то число около 15, может быть 12, 13, 14, 15, 16 или 17. Однако если *необходимо* выбрать из этих чисел какое-то одно число, то мы бы решили, что число 15 *наиболее правдоподобно*. Поэтому мы и пишем, что P (орел) $= 0{,}5$.

Но почему все же число 15 более правдоподобно, чем все остальные? Можно рассуждать следующим образом: если наиболее вероятное число выпадений «орла» будет N_O, а полное число подбрасываний N, то наиболее вероятное число выпадений «решек» равно $N - N_O$. (Ведь предполагается, что при каждом подбрасывании должны выпасть только *либо* «орел», либо «решка» и ничего другого!) Но если монета «честная», то нет основания думать, что число выпадений «орла», например, должно быть больше, чем выпадений «решки»? Так что до тех пор, пока у нас нет оснований сомневаться в честности подбрасывающего, мы должны считать, что $N_P = N_O$, а следовательно, $N_P = N_O = N/2$, или P(орел) $= P$(решка) $= 0{,}5$.

Наши рассуждения можно обобщить на *любую* ситуацию, в которой возможны m различных, но «равноценных» (т. е. равновероятных) результатов наблюдения. Если наблюдение может привести к m различным результатам и ни к чему больше и если у нас нет оснований думать, что один из результатов предпочтительнее остальных, то вероятность каждого *частного* исхода наблюдения A будет $1/m$, т. е. $P(A) = 1/m$.

Пусть, например, в закрытом ящике находятся семь шаров разного цвета и мы наугад, т. е. не глядя, берем один из них. Вероятность того, что у нас в руке окажется красный шар, равна $^1/_7$. Вероятность того, что мы из колоды в 36 карт вытащим даму пик, равна $^1/_{36}$, такая же, как и выпадение двух шестерок при бросании двух игральных костей.

● ● ●

В гл. 5 мы определяли размер ядра с помощью затеняемой им площади или так называемого эффективного сечения. По существу речь шла о вероятностях. Если мы «обстреливаем» быстрыми частицами тонкую пластинку вещества, то имеется некая вероятность, что они пройдут через нее, не задев ядер, однако с некоторой вероятностью они могут попасть в ядро. (Ведь ядра столь малы, что мы не можем *видеть* их, мы, следовательно, не можем прицелиться, и «стрельба» ведется вслепую.) Если в нашей пластинке имеется n атомов и ядро каждого из них затеняет площадь σ, то полная площадь, затененная ядрами, будет равна $n\sigma$. При большом числе N случайных выстрелов мы ожидаем, что число попаданий N_C будет так относиться к *полному* числу выстрелов, как затененная ядрами площадь относится к полной площади пластинки:

$$\frac{N_C}{N} = \frac{n\sigma}{A}. \tag{6.2}$$

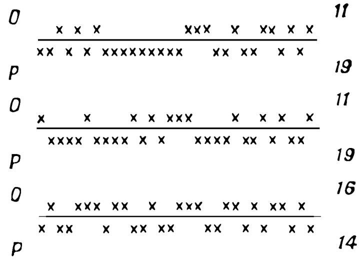
Поэтому можно сказать, что *вероятность* попадания каждой из выстреленных частиц в ядро при прохождении сквозь пластинку будет равна

$$P_C = \frac{n}{A}\sigma, \tag{6.3}$$

где n/A — просто число атомов, приходящихся на единицу площади пластинки.

§ 2. *Флуктуации*

Теперь мне бы хотелось несколько подробнее показать, как можно использовать идею вероятности, чтобы ответить на вопрос: сколько же в самом деле я *ожидаю* выпадений «орла», если подбрасываю монету N раз? Однако, прежде чем ответить на него, давайте посмотрим, что все-таки дает нам такой «эксперимент». На фиг. 6.1 показаны результаты, полученные в первых трех сериях испытаний по 30 испытаний в каждой. Последовательности выпадений «орла» и «решки» показаны в том порядке, как это происходило. В первый раз получилось



Фиг. 6.1. Последовательность выпадения «орла» и «решки».

Три серии опытов подбрасывания монеты по 30 раз в каждой серии.

11 выпадений «орла», во второй — тоже 11, а в третий — 16. Можно ли на этом основании подозревать, что монета была «нечестной»? Или, может быть, мы ошиблись, приняв 15 за наиболее вероятное число выпадений «орла» в каждой серии испытаний? Сделаем еще 97 серий, т. е. 100 серий по 30 испытаний в каждой. Результаты их приведены в табл. 6.1 *.

Таблица 6.1 ● ЧИСЛО ВЫПАДЕНИЙ «ОРЛА»

Проведено несколько серий испытаний, по 30 подбрасываний монеты в каждой

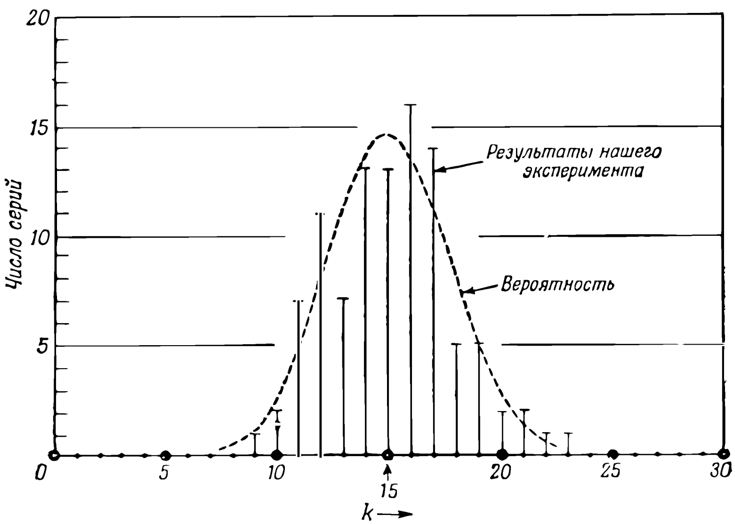
11	16	17	15	17	16	19	18	15	13
11	17	17	12	20	23	11	16	17	14
16	12	15	10	18	17	13	15	14	15
16	12	11	22	12	20	12	15	16	12
16	10	15	13	14	16	15	16	13	18
14	14	13	16	15	19	21	14	12	15
16	11	16	14	17	14	11	16	17	16
16	15	14	12	18	15	14	21	11	16
17	17	12	13	14	17	9	13	16	13

Взгляните на числа, приведенные в этой таблице. Вы видите, что большинство результатов «близки» к 15, так как почти все они расположены между 12 и 18. Чтобы лучше прочувствовать эти результаты, нарисуем график их *распределения*. Для этого подсчитаем число испытаний, в которых получилось k выпадений «орла», и отложим это число вверх над k. В результате получим фиг. 6.2. Действительно, в 13 сериях было получено 15 выпадений «орла», то же число серий дало 14 выпадений «орла»; 16 и 17 выпадений получались *больше* чем 13 раз. Должны ли мы из этого делать вывод, что монетам больше нравится ложиться «орлом» вверх? А может быть, мы неправы в выборе числа 15 как наиболее правдоподобного?

* Эти последние 97 экспериментов проводились следующим образом. Ящик, в котором находились 30 монет, энергично встряхивался; затем подсчитывалось число выпадений «орла».

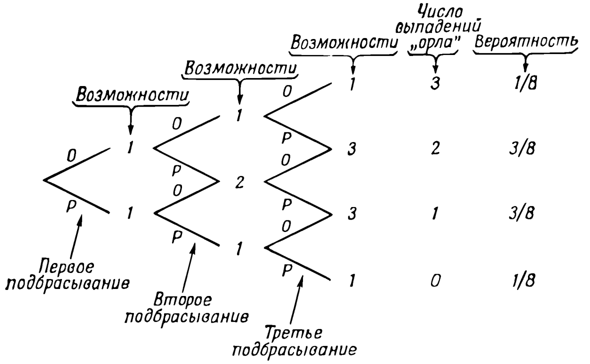
Может быть, в действительности более правдоподобно, что за 30 испытаний получается 16 выпадений «орла»? Минуточку терпения! Если мы сложим вместе результаты всех серий, то общее число испытаний будет 3000, а общее число выпадений «орла» в этих испытаниях достигает 1492, так что доля испытаний с выпадением «орла» в результате будет 0,497. Это очень близко к половине, но все же несколько *меньше*. Нет, мы все-таки *не можем* предполагать, что вероятность выпадения «орла» больше, чем 0,5! Тот факт, что в отдельных испытаниях «орел» чаще выпадал 16 раз, чем 15, является просто *случайным* отклонением, или *флуктуацией*. Мы же по-прежнему ожидаем, что *наиболее правдоподобным* числом выпадений должно быть 15.

Можно спросить: а какова вероятность того, что в серии из 30 испытаний «орел» выпадет 15 раз или 16, или какое-то другое число раз? Мы говорим, что вероятность выпадения «орла» в серии из *одного* испытания равна 0,5; соответственно вероятность невыпадения тоже равна 0,5. В серии из двух испытаний возможны *четыре* исхода: ОО, ОР, РО, РР. Так как каждый из них равновероятен, то можно заключить: а) вероятность двух выпадений «орла» равна $^1/_4$; б) вероятность одного выпадения «орла» равна $^2/_4$; в) вероятность невыпадения «орла» равна $^1/_2$. Это происходит потому, что существуют *две* возможности из четырех равных получить одно выпадение



Фиг. 6.2. Сводка результатов 100 серий по 30 испытаний в каждой.

Вертикальные линии показывают число серий, в которых выпадал k раз «орел». Пунктирная кривая показывает ожидаемое число серий с выпадением k раз «орла», полученное из вычисления вероятностей.

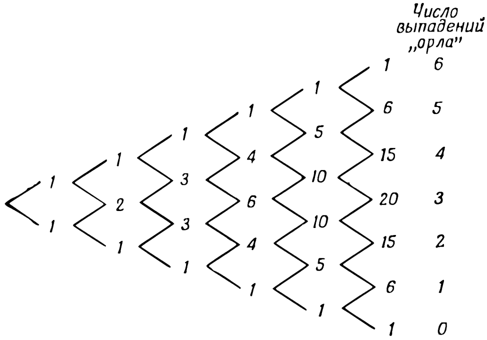


Фиг. 6.3. Диаграмма, иллюстрирующая число различных возможностей получения 0, 1, 2 и 3 выпадений «орла» в серии из трех испытаний

«орла» и только одна возможность получить два выпадения или не получить ни одного.

Рассмотрим теперь серию из трех испытаний. Третье испытание с равной вероятностью может дать либо «орел», либо «решку», поэтому существует только один способ получения трех выпадений «орла»: мы *должны* получить два выпадения «орла» в двух первых испытаниях и затем выпадение «орла» в последнем. Однако получить два выпадения «орла» можно уже *тремя* способами: после двух выпадений «орла» может выпасть «решка» и еще два способа — после одного выпадения «орла» в первых двух испытаниях выпадет «орел» в третьем. Так что число равновероятных способов получить 3, 2, 1 и 0 выпадений «орла» будет соответственно равно 1, 3, 3 и 1; полное же число всех возможных способов равно 8. Таким образом, получаются следующие вероятности: $^1/_8$, $^3/_8$, $^3/_8$, $^1/_8$.

Эти результаты удобно записать в виде диаграммы (фиг. 6.3). Ясно, что эту диаграмму можно продолжить, если мы интересуемся еще бóльшим числом испытаний. На фиг. 6.4 приведена аналогичная диаграмма для шести испытаний. Число «способов», соответствующих каждой точке диаграммы, — это просто число различных «путей» (т. е., попросту говоря, последовательность выпадения «орла» и «решки»), которыми можно прийти в эту точку из начальной, не возвращаясь при этом назад, а высота этой точки дает общее число выпадений «орла». Этот набор чисел известен под названием *треугольника Паскаля,* а сами числа называются *биномиальными коэффициентами,* поскольку они появляются при разложении выражения $(a+b)^n$. Обычно эти числа на нашей диаграмме обозначаются символом $\binom{n}{k}$, или C_k^n (число



Фиг. 6.4. Диаграмма, подобная изображенной на фиг. 6.3, для серии из шести испытаний.

сочетаний из n по k), где n — полное число испытаний, а k — число выпадений «орла». Отмечу попутно, что биномиальные коэффициенты можно вычислять по формуле

$$\binom{n}{k} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \tag{6.4}$$

где символ $n!$, называемый «n-факториалом», обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n, т. е. $1 \cdot 2 \cdot 3 \ \ldots \ (n-1) \cdot n$.

Теперь уже все готово для того, чтобы с помощью выражения (6.1) подсчитать вероятность $P(k, n)$ выпадения k раз «орла» в серии из n испытаний. Полное число всех возможностей будет 2^n (поскольку в каждом испытании возможны два исхода), а число равновероятных комбинаций, в которых выпадет «орел», будет $\binom{n}{k}$, так что

$$P(k, n) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \tag{6.5}$$

Поскольку $P(k, n)$ — доля тех серий испытаний, в которых выпадение «орла» ожидается k раз, то из ста серий k выпадений «орла» ожидается $100\ P(k, n)$ раз. Пунктирная кривая на фиг. 6.2 проведена как раз через точки функции $100\ P(k, 30)$. Видите, мы *ожидали* получить 15 выпадений «орла» в 14 или 15 сериях испытаний, а получили только в 13. Мы *ожидали* получить 16 выпадений «орла» в 13 или 14 сериях испытаний, а получили в 16. Но такие флуктуации вполне допускаются «правилами игры».

Использованный здесь метод можно применять и в более общей ситуации, где в каждом единичном испытании возможны только два исхода, которые давайте обозначим через В (выигрыш) и П (проигрыш). Вообще говоря, вероятности В и П в каждом отдельном испытании могут быть разными. Пусть p, например, будет вероятностью результата В. Тогда q (вероятность результата П) должна быть равна $(1-p)$.

В серии из n испытаний вероятность того, что результат В получится k раз, равна

$$P(k,\ n)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}. \qquad (6.6)$$

Эта функция вероятностей называется *биномиальным законом распределения вероятности.*

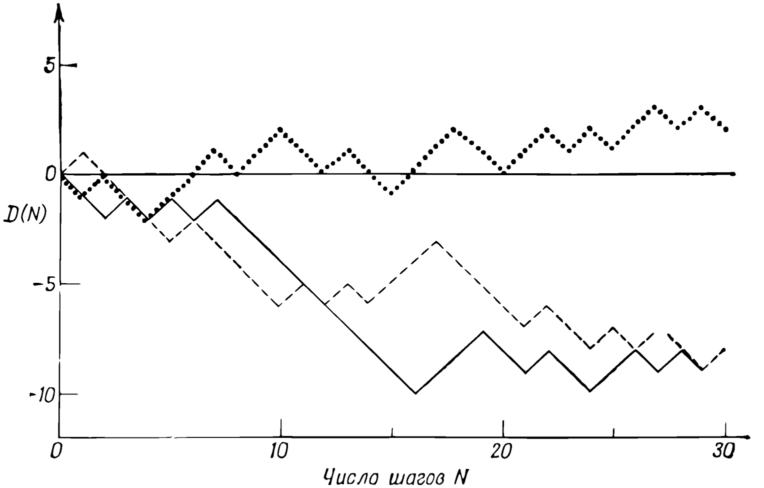
§ 3. Случайные блуждания

Существует еще одна интересная задача, при решении которой не обойтись без понятия вероятности. Это проблема «случайных блужданий». В простейшем варианте эта задача выглядит следующим образом. Вообразите себе игру, в которой игрок, начиная от точки $x = 0$, за каждый ход может продвинуться *либо* вперед(до точки x), *либо* назад (до точки $-x$), причем решение о том, куда ему идти, принимается совершенно *случайно*, ну, например, с помощью подбрасывания монеты. Как описать результат такого движения? В более общей форме эта задача описывает движение атомов (или других частиц) в газе — так называемое броуновское движение — или образование ошибки при измерениях. Вы увидите, насколько проблема «случайных блужданий» тесно связана с описанным выше опытом с подбрасыванием монеты.

Прежде всего давайте рассмотрим несколько примеров случайных блужданий. Их можно описать «чистым» продвижением D_N за N шагов. На фиг. 6.5 показаны три примера путей при случайном блуждании. (При построении их в качестве случайной последовательности решений о том, куда сделать следующий шаг, использовались результаты подбрасывания монеты, приведенные на фиг. 6.1.)

Что можно сказать о таком движении? Ну, во-первых, можно спросить: как далеко мы в среднем продвинемся? Нужно *ожидать*, что среднего продвижения вообще не будет, поскольку мы с равной вероятностью можем идти как вперед, так и назад. Однако чувствуется, что с увеличением N мы все с большей вероятностью можем блуждать где-то все дальше и дальше от начальной точки. Поэтому возникает вопрос: каково среднее *абсолютное расстояние,* т. е. каково среднее значение $|D|$? Впрочем, удобнее иметь дело не с $|D|$, а с D^2; эта величина положительна как для положительного, так и для отрицательного движения и поэтому тоже может служить разумной *мерой* таких случайных блужданий.

Можно показать, что ожидаемая величина D_N^2 равна просто N — числу сделанных шагов. Кстати, под «ожидаемой величиной» мы понимаем наиболее вероятное значение (угаданное наилучшим образом), о котором можно думать как об



Фиг. 6.5. Три примера случайного блуждания.

По горизонтали отложено число шагов N, по вертикали — координата D (N), т. е. чистое расстояние от начальной точки.

ожидаемом среднем значении *большого числа повторяющихся* процессов блуждания. Эта величина обозначается как $\langle D_N^2 \rangle$ и называется, кроме того, «средним квадратом расстояния». После одного шага D^2 всегда равно $+1$, поэтому, несомненно, $\langle D_1^2 \rangle = 1$. (За единицу расстояния всюду будет выбираться один шаг, и поэтому я в дальнейшем не буду писать единиц длины.)

Ожидаемая величина D_N^2 для $N > 1$ может быть получена из D_{N-1}. Если после $(N - 1)$ шагов мы оказались на расстоянии D_{N-1}, то еще один шаг даст *либо* $D_N = D_{N-1} + 1$, *либо* $D_N = D_{N-1} - 1$. Или для квадратов.

$$D_N^2 = \begin{cases} D_{N-1}^2 + 2D_{N-1} + 1, \\ \quad\text{либо} \\ D_{N-1}^2 - 2D_{N-1} + 1. \end{cases} \tag{6.7}$$

Если процесс повторяется большое число раз, то мы ожидаем, что каждая из этих возможностей осуществляется с вероятностью $1/2$, так что средняя ожидаемая величина будет просто средним арифметическим этих значений, т. е. ожидаемая величина D_N^2 будет просто $D_{N-1}^2 + 1$. Но какова величина D_{N-1}^2, вернее, какого значения ее мы ожидаем? Просто, по определению, ясно, что это должно быть «среднее ожидаемое значение» $\langle D_{N-1}^2 \rangle$, так что

$$\langle D_N^2 \rangle = \langle D_{N-1}^2 \rangle + 1. \tag{6.8}$$

Если теперь вспомнить, что $\langle D_1^2 \rangle = 1$, то получается очень простой результат:

$$\langle D_N^2 \rangle = N. \tag{6.9}$$

Отклонение от начального положения можно характеризовать величиной типа расстояния (а не квадрата расстояния); для этого нужно просто извлечь квадратный корень из $D \langle {}_N^2 \rangle$ и получить так называемое «среднее квадратичное расстояние» $D_{\text{ск}}$:

$$D_{\text{ск}} = \sqrt{\langle D^2 \rangle} = \sqrt{N}. \tag{6.10}$$

Мы уже говорили, что случайные блуждания очень похожи на опыт с подбрасыванием монет, с которого мы начали эту главу. Если представить себе, что каждое продвижение вперед или назад обусловливается выпадением «орла» или «решки», то D_N будет просто равно $N_O - N_P$, т. е. разности числа выпадений «орла» и «решки». Или поскольку $N_O + N_P = N$ (где N — полное число подбрасываний), то $D_N = 2N_O - N$. Вспомните, что раньше мы уже получали выражение для ожидаемого распределения величины N_O [она обозначалась тогда через k; см. уравнение (6.5)]. Ну а поскольку N — просто постоянная, то теперь такое же распределение получилось и для D. (Выпадение каждого «орла» означает невыпадение «решки», поэтому в связи между N_O и D появляется множитель 2.) Таким образом, на фиг. 6.2 график представляет одновременно и распределение расстояний, на которые мы можем уйти за 30 случайных шагов ($k = 15$ соответствует $D = 0$, а $k = 16$ соответствует $D = 2$ и т. д.).

Отклонение N_O от ожидаемой величины $N/2$ будет равно

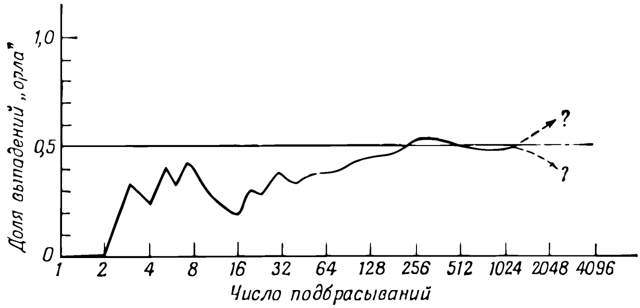
$$N_O - \frac{N}{2} = \frac{D}{2}, \tag{6.11}$$

откуда для среднего квадратичного отклонения получаем

$$\left(N_O - \frac{N}{2}\right)_{\text{ск}} = \frac{1}{2}\sqrt{N}. \tag{6.12}$$

Вспомним теперь наш результат для $D_{\text{ск}}$. Мы ожидаем, что среднее расстояние, пройденное за 30 шагов, должно быть равно $\sqrt{30} = 5{,}5$, откуда среднее отклонение k от 15 должно быть $5{,}5 : 2 \approx 2{,}8$. Заметьте, что средняя полуширина нашей кривой на фиг. 6.2 (т. е. полуширина «колокола» где-то посредине) как раз приблизительно равна 3, что согласуется с этим результатом.

Теперь мы способны рассмотреть вопрос, которого избегали до сих пор. Как узнать, «честна» ли наша монета? Сейчас мы можем, по крайней мере частично, ответить на него.



Фиг. 6.6. Доля выпадений «орла» в некоторой частной последовательности N подбрасываний монеты.

Если монета «честная», то мы ожидаем, что в половине случаев выпадет «орел», т. е.

$$\frac{\langle N_O \rangle}{N} = 0{,}5. \qquad (6.13)$$

Одновременно ожидается, что действительное число выпадений «орла» должно отличаться от $N/2$ на величину порядка $\sqrt{N}/2$, или, если говорить о *доле* отклонения, она равна

$$\frac{1}{N}\frac{\sqrt{N}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{N}},$$

т. е. чем больше N, тем ближе к половине отношение N_O/N.

На фиг. 6.6 отложены числа N_O/N для тех подбрасываний монеты, о которых мы говорили раньше. Как видите, при увеличении числа N кривая все ближе и ближе подходит к 0,5. Но, к сожалению, нет никаких *гарантий*, что для каждой данной серии или комбинации серий наблюдаемое отклонение будет *близко к ожидаемому* отклонению. Всегда есть конечная вероятность, что произойдет большая флуктуация — появление большого числа выпадений «орла» или «решки», — которая даст произвольно большое отклонение. Единственное, что можно сказать, — это *если* отклонения близки к ожидаемому $1/2\sqrt{N}$ (скажем, с множителем 2 или 3), то нет оснований считать монету «поддельной» (или что партнер плутует).

Мы не рассматривали еще случаи, когда для монеты или какого-то другого объекта испытания, подобного монете (в том смысле, что возможны два или несколько достоверно не предсказуемых исхода наблюдения, например камень, который может упасть только на какую-то из двух сторон), имеется достаточно оснований полагать, что вероятности разных исходов не равны. Мы определили вероятность $P(\text{О})$ как отношение $\langle N_\text{О} \rangle / N$. Но что принять за величину $\langle N_\text{О} \rangle$? Каким образом можно узнать, что *ожидается*? Во многих случаях самое лучшее, что можно сделать, это подсчитать число выпадений «орла» в большой серии испытаний и взять $\langle N_O \rangle = N_O$ (наблюденное). (Как можно ожидать чего-то еще?) При этом, однако, нужно понимать, что различные наблюдатели и различные серии испытаний могут дать другое значение $P(O)$, отличное от нашего. Следует *ожидать*, однако, что все эти различные ответы не будут расходиться больше чем на $1/2\sqrt{N}$ [если $P(O)$ близко к половине]. Физики-экспериментаторы обычно говорят, что «экспериментально найденная» вероятность имеет «ошибку», и записывают это в виде

$$P(O) = \frac{N_O}{N} \pm \frac{1}{2\sqrt{N}}. \tag{6.14}$$

При такой записи подразумевается, что существует некая «истинная» вероятность, которую в принципе *можно подсчитать,* но что различные флуктуации приводят к ошибке при экспериментальном ее определении. Однако нет возможности сделать эти рассуждения логически согласованными. Лучше все-таки, чтобы вы поняли, что вероятность в каком-то смысле — вещь субъективная, что она всегда основывается на какой-то неопределенности наших познаний и величина ее колеблется при их изменении.

§ 4. Распределение вероятностей

Давайте вернемся к проблеме случайных блужданий, но теперь уже с некоторым изменением. Пусть в дополнение к случайному выбору *направления* шага (+ или —) некоторым непредсказуемым образом меняется также и его *длина*, причем требуется выполнение одного-единственного условия, чтобы длина шага *в среднем* была равна единице. Эта задача уже больше похожа на тепловое движение молекул в газе. Обозначим длину шага величиной S, которая, вообще говоря, может быть любой, но наиболее часто будет принимать значения где-то «вблизи» единицы. Для большей определенности давайте положим $\langle S^2 \rangle = 1$, или, что эквивалентно, $S_{\text{ск}} = 1$. Вывод выражения для $\langle D^2 \rangle$ при этом останется тем же, за исключением того, что уравнение (6.8) изменится теперь следующим образом:

$$\langle D_N^2 \rangle = \langle D_{N-1}^2 \rangle + \langle S^2 \rangle = \langle D_{N-1}^2 \rangle + 1. \tag{6.15}$$

Так что, как и прежде,

$$\langle D_N^2 \rangle = N. \tag{6.16}$$

Каково же в этом случае будет распределение расстояний? Какова, например, вероятность того, что после 30 шагов D

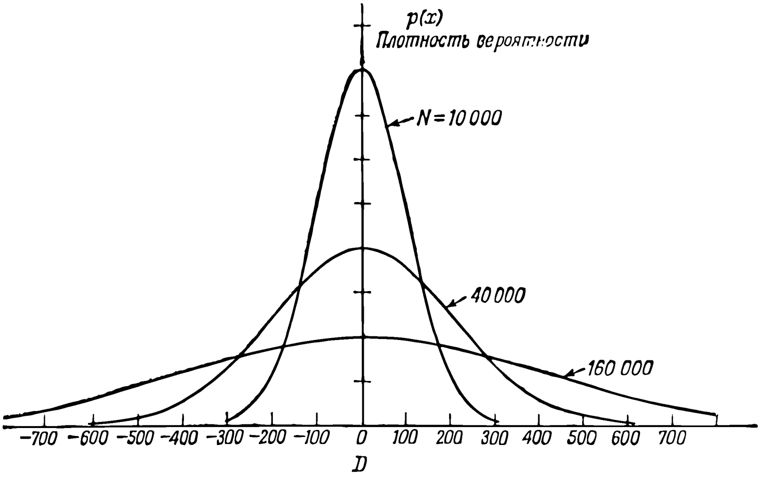
окажется равным нулю? Вероятность этого равна нулю! Вообще вероятность *любой заданной* величины D равна нулю. Действительно, совершенно невероятно, чтобы сумма всех шагов назад (при произвольной длине каждого из них) в точности скомпенсировалась шагами вперед. В этом случае мы уже не можем построить график типа изображенного на фиг. 6.2.

Если же, однако, не требовать, чтобы D было в точности равно, скажем, нулю, или единице, или двум, а вместо этого говорить о вероятности получения D где-то *вблизи* нуля, или единицы, или двух, то при этом мы можем нарисовать график, подобный приведенному на фиг. 6.2. Назовем $P(x, \Delta x)$ вероятностью того, что D будет находиться где-то внутри интервала Δx в окрестности величины x (скажем, где-то между x и $x+\Delta x$). Если Δx достаточно мало, то вероятность того, что D попадет в этот интервал, должна быть пропорциональна его ширине, т. е. Δx. Поэтому мы можем утверждать, что

$$P(x, \Delta x) = p(x)\Delta x. \tag{6.17}$$

Функция $p(x)$ называется *плотностью вероятности*.

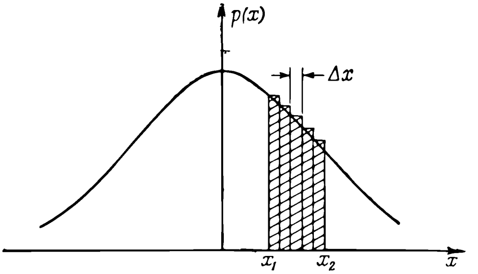
Вид кривой $p(x)$ зависит как от числа шагов N, так и от распределения шагов по длинам (т. е. от того, какую долю составляют шаги данной длины). К сожалению, я не могу здесь заниматься доказательством этого, а только скажу, что при достаточно большом числе шагов N плотность $p(x)$ *одинакова* для всех разумных распределений шагов по длинам и зависит лишь от самого N. На фиг. 6.7 показаны три гра-



Фиг. 6.7. Плотность вероятности оказаться при случайном блуждании через N шагов на расстоянии D.

D измеряется в единицах средней квадратичной длины шага.

Фиг. 6.8. Вероятность [заштрихованная область под кривой $p(x)$] того, что при случайном блуждании пройденное расстояние D окажется между x_1 и x_2.



фика $p(x)$ для различных N. Заметьте, что «полуширины» этих кривых, как это и должно быть по нашим предыдущим расчетам, приблизительно равны $\sqrt{N}$.

Вы, вероятно, заметили также, что величина $p(x)$ вблизи нуля обратно пропорциональна $\sqrt{N}$. Это происходит потому, что все кривые по форме очень похожи, только одни «размазаны» больше, а другие — меньше, и, кроме того, площади, ограниченные каждой кривой и осью x, должны быть равны. Действительно, ведь $p(x)\,\Delta x$ — это вероятность того, что D находится где-то внутри интервала Δx (Δx мало). Как определить вероятность того, что D находится где-то между x_1 и x_2? Для этого разобьем интервал между x_1 и x_2 на узкие полоски шириной Δx (фиг. 6.8) и вычислим сумму членов $p(x)\,\Delta x$ для каждой такой полоски. Геометрически эта вероятность [запишем ее в виде $P(x_1 < D < x_2)$] равна площади заштрихованной области на фиг. 6.8. При этом чем у́же будут наши полоски, тем точнее результат. Поэтому можно записать

$$P(x_1 < D < x_2) = \sum p(x)\,\Delta x = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx. \qquad (6.18)$$

Площадь же ограничения всей кривой просто равна вероятности того, что D принимает *какое-то* значение между $-\infty$ и $+\infty$. Ясно, что она должна быть равна единице, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1. \qquad (6.19)$$

Ну а поскольку ширина кривых на фиг. 6.7 пропорциональна $\sqrt{N}$, то, чтобы сохранить ту же площадь, их высота должна быть пропорциональна $1/\sqrt{N}$.

Плотность вероятности, которую мы только что описали, встречается наиболее часто. Она известна также под названием *нормальной*, или *гауссовой*, плотности вероятности и записывается в виде

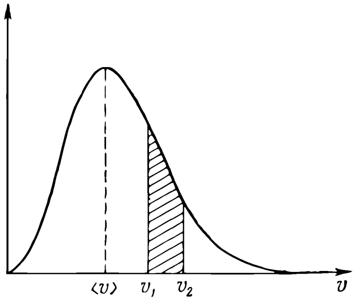
$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}, \qquad (6.20)$$

причем величина σ называется *стандартным отклонением.* В нашем случае $\sigma=\sqrt{N}$ или $\sqrt{N}\,S_{\text{ск}}$, если средняя квадратичная длина шага отлична от единицы.

Мы уже говорили о том, что движения молекул или каких-то других частиц в газе похожи на случайные блуждания. Представьте себе, что мы открыли в комнате пузырек с духами или каким-то другим органическим веществом. Тотчас же молекулы его начнут испаряться в воздух. Если в комнате есть какие-то воздушные течения, скажем, циркуляция воздуха, то они будут переносить с собой пары этого вещества. Но даже *в совершенно спокойном воздухе* молекулы будут распространяться, пока не проникнут во все уголки комнаты. Это можно определить по запаху или цвету. Если нам известен средний размер «шага» и число шагов в секунду, то можно подсчитать вероятность обнаружения одной или нескольких молекул вещества на некотором расстоянии от пузырька через какой-то промежуток времени. С течением времени число шагов возрастает и газ «расползается» по комнате, подобно нашим кривым на фиг. 6.7. Длина шагов и их частота, как вы узнаете впоследствии, связаны с температурой и давлением воздуха в комнате.

Вы знаете, что давление газа вызывается тем, что молекулы его бомбардируют стенки сосуда. Позднее, когда мы подойдем к количественному описанию этого явления, нам понадобится знать, с какой скоростью движутся молекулы, ударяясь о стенку, поскольку сила их ударов зависит от скорости. Однако говорить о какой-то *определенной* скорости молекул совершенно невозможно. В этом случае необходимо использовать вероятностное описание. Молекула может иметь любую скорость, но некоторые скорости предпочтительнее других. Все происходящее в газе можно описать, сказав, что вероятность того, что данная молекула движется с какой-то скоростью между v и $v+\Delta v$, будет равна $p(v)\Delta v$, где $p(v)$ — плотность вероятности, которая зависит от скорости v. Позднее я расскажу, как Максвелл, используя общие понятия и идеи теории вероятности, нашел математическое выражение для функции $p(v)$*. Примерный вид функции $p(v)$ показан на фиг. 6.9. Скорость может иметь любую величину, однако

* Максвелл получил выражение $p(v)=Cv^2e^{-av^2}$, где a — некоторая связанная с температурой постоянная, а C выбирается таким образом, чтобы полная вероятность была равна единице.



Фиг. 6.9. Распределение молекул газа по скоростям.

больше шансов за то, что она окажется где-то в окрестности наиболее вероятного или ожидаемого значения $\langle v \rangle$.

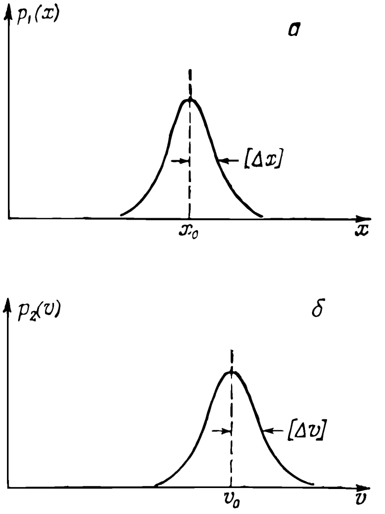
О кривой, показанной на фиг. 6.9, часто говорят в несколько ином смысле. Если мы возьмем газ, заключенный в каком-то сосуде (скажем, объемом 1 *л*), то окажется, что в нем имеется огромное количество молекул ($N \approx 10^{22}$). Поскольку $p(v)\,\Delta v$ — вероятность того, что первая попавшаяся молекула будет лететь со скоростью, находящейся в интервале Δv, то, по определению, *ожидаемое* число молекул $\langle \Delta N \rangle$ со скоростью, находящейся в этом же интервале, будет равно

$$\langle \Delta N \rangle = Np(v)\,\Delta v. \tag{6.21}$$

Поэтому $Np(v)$ можно назвать «распределением молекул по скоростям». Площадь под кривой между двумя значениями скоростей v_1 и v_2 [заштрихованная область на фиг. 6.9 для кривой $Np(v)$] представляет ожидаемое число молекул со скоростями между v_1 и v_2. Но в газе, который содержит обычно огромное число молекул, отклонения от ожидаемого значения будут очень малы (порядка $1/\sqrt{N}$), поэтому часто мы выбрасываем слово «ожидаемое» и говорим просто: «Число молекул со скоростями между v_1 и v_2 равно площади заштрихованного участка». Однако нужно все-таки помнить, что речь в таких случаях всегда идет о *вероятном* числе.

§ 5. Принцип неопределенности

Понятия вероятности оказались очень полезны при описании поведения газа, состоящего из огромного количества молекул. Немыслимо же в самом деле пытаться определить положение и скорость каждой из 10^{22} мокекул! Когда впервые теория вероятности была применена к таким явлениям, то это рассматривалось просто как удобный способ работы в столь сложной обстановке. Однако теперь мы полагаем, что вероятность *существенно необходима* для описания различных атомных процессов. Согласно квантовой механике, этой математической теории малых частичек, при *определении* положения частички и ее скорости всегда существует некоторая



Фиг. 6.10. Плотности вероятности координаты (а) и скорости (б) частицы.

неопределенность. В лучшем случае мы можем только сказать, что существует какая-то вероятность того, что частица находится вблизи точки x.

Для описания местоположения частицы можно ввести плотности вероятности $p_1(x)$, так что $p_1(x)\Delta x$ будет вероятностью того, что частица находится где-то между x и $x + \Delta x$. Если положение частицы установлено достаточно хорошо, то примерный вид функции $p_1(x)$ может иллюстрировать график, приведенный на фиг. 6.10, *а*. Точно такое же положение и со скоростью частицы: она тоже неизвестна нам точно. С некоторой вероятностью $p_2(v)\Delta v$ частица может двигаться со скоростью, находящейся в интервале между v и $v + \Delta v$.

Один из основных результатов квантовой механики состоит в том, что эти две плотности $p_1(x)$ и $p_2(v)$ не могут быть выбраны независимо в том смысле, что они обе не могут быть сколь угодно узкими. Если мы возьмем «полуширины» кривых $p_1(x)$ и $p_2(v)$ и обозначим их соответственно $[\Delta x]$ и $[\Delta v]$ (см. фиг. 6.10), то природа требует, чтобы *произведение* этих двух полуширин было не меньше величины h/m, где m — масса частицы, а h — некоторая фундаментальная физическая постоянная, называемая *постоянной Планка*. Это соотношение записывается следующим образом:

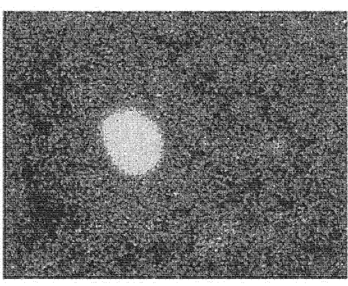
$$[\Delta x]\,[\Delta v] \geqslant \frac{h}{m} \tag{6.22}$$

и называется *принципом неопределенности Гейзенберга.*

Чтобы это соотношение выполнялось, частица должна себя вести очень курьезно. Вы видите, что правая часть соотношения (6.22) постоянна, а это означает, что если мы попытаемся «приколоть» частицу в каком-то определенном месте, то эта попытка окончится тем, что мы не сможем угадать, куда она летит и с какой скоростью. Точно так же если мы попытаемся заставить частицу двигаться очень медленно или с какой-то *определенной* скоростью, то она будет «расплываться», и мы не сможем точно указать, где она находится.

Принцип неопределенности выражает ту неясность, которая должна существовать при любой попытке описания природы. Наиболее точное и полное описание природы должно быть только вероятностным. Однако некоторым физикам такой способ описания приходится не по душе. Им кажется, что о *реальном* поведении частицы можно говорить только, когда одновременно заданы импульсы и координаты. В свое время на заре развития квантовой механики эта проблема очень сильно волновала Эйнштейна. Он часто качал головой и говорил: «Но ведь не гадает же господь бог «орел — решка», чтобы решить, куда должен двигаться электрон!» Этот вопрос беспокоил его в течение очень долгого времени, и до конца своих дней он, по-видимому, так и не смог примириться с тем фактом, что вероятностное описание природы — это максимум того, на что мы пока способны. Есть физики, которые интуитивно чувствуют, что наш мир можно описать как-то по-другому, что можно исключить эти неопределенности в поведении частиц. Они продолжают работать над этой проблемой, но до сих пор ни один из них не добился сколько-нибудь существенного результата.

Эта присущая миру неопределенность в определении положения частицы является наиболее важной чертой описания структуры атомов. В атоме водорода, например, который состоит из одного протона, образующего ядро, и электрона, находящегося где-то вне его, неопределенность в местонахождении электрона такая же, как и размеры самого атома! Мы не можем поэтому с уверенностью сказать, где, в какой части атома находится наш электрон, и уж, конечно, не может быть и речи ни о каких «орбитах». С уверенностью можно говорить только о *вероятности* $p(r)\Delta V$ обнаружить электрон в элементе объема ΔV на расстоянии r от протона. Квантовая механика позволяет в этом случае вычислять плотности вероятности $p(r)$, которая для невозмущенного атома



Фиг. 6.11. Воображаемый атом водорода.

Плотность («белизна») облачка пропорциональна плотности вероятности обнаружения электрона.

водорода равна Ae^{-r^2/a^2}. Это — колоколообразная функция наподобие изображенной на фиг. 6.8, причем число a представляет собой характерную величину радиуса, после которого функция очень быстро убывает. Несмотря на то что существует вероятность (хотя и небольшая) обнаружить электрон на большем, чем a, расстоянии от ядра, мы называем эту величину «радиусом атома». Она равна приблизительно 10^{-10} *м*.

Если вы хотите как-то представить себе атом водорода, то вообразите этакое «облако», плотность которого пропорциональна плотности вероятности. Пример такого облака показан на фиг. 6.11. Такая наглядная картинка, пожалуй, наиболее близка к истине, хотя тут же нужно помнить, что это *не реальное* «электронное облако», а только «облако вероятностей». Где-то внутри него находится электрон, но природа позволяет нам только гадать, где же именно он находится.

В своем стремлении узнать о природе вещей как можно больше современная физика обнаружила, что существуют вещи, познать которые точно ей никогда не удастся. Многому из наших знаний суждено навсегда остаться неопределенным. Нам дано знать *только* вероятности.

Глава 7

ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Движение планет

В этой главе речь пойдет об одном из самых далеко идущих обобщений, сделанных когда-либо человеческим разумом. Мы заслуженно восхищаемся умом человека, но неплохо было бы постоять некоторое время в благоговении и перед *природой*, полностью и беспрекословно подчиняющейся такому изящному и такому простому закону — закону тяготения. В чем же заключается этот закон? Каждый объект Вселенной притягивается к любому другому объекту с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Математическая запись этого утверждения такова:

$$F = G\frac{mm'}{r^2}.$$

Если к этому добавить, что любое тело реагирует на приложенную к нему силу ускорением в направлении этой силы, по величине обратно пропорциональным массе тела, то способному математику этих сведений достаточно для вывода всех дальнейших следствий.

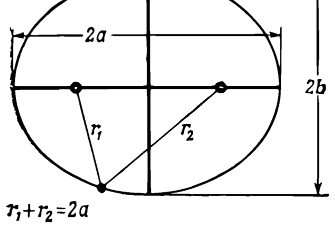
Но поскольку, как мы предполагаем, вы еще не столь талантливы, мы не оставим вас наедине с двумя голыми аксиомами. Давайте вместе разберем следствия из них. Мы изложим вкратце историю открытия закона тяготения, остановимся на некоторых выводах из него и на его влиянии на историю, на загадках этого закона и на уточнении его Эйнштейном; мы хотим еще обсудить связь закона тяготения с другими законами физики. Всего, конечно, в одну главу не уложишь, но в надлежащих местах других глав мы снова будем возвращаться к этому.

История начинается с древних; наши предки наблюдали движение планет среди звезд и в конце концов поняли, что планеты движутся вокруг Солнца — факт, заново открытый позже Коперником. Немного больше труда потребовалось, чтобы открыть, *как* именно они вращаются. В начале XV столетия шли большие дебаты о том, действительно ли планеты обращаются вокруг Солнца или нет. У Тихо Браге на этот счет было свое представление, далекое от того, что думали древние: мысль его состояла в том, что все споры о природе движения планет разрешатся, если достаточно точно измерить положение планет на небе. Если измерения точно установят, как движутся планеты, то не исключено, что из двух точек зрения удастся отобрать одну. Это была неслыханная идея — чтобы открыть что-то, лучше-де проделать тщательные опыты, чем приводить глубокие философские доказательства. Следуя ей, Тихо Браге многие годы изучал положения планет в своей обсерватории на острове Фюн, близ Копенгагена. Он составил объемистые таблицы, впоследствии, после смерти Тихо, изученные математиком Кеплером. Из его данных Кеплер и извлек замечательные, очень красивые и простые законы, управляющие движением планет.

§ 2. *Законы Кеплера*

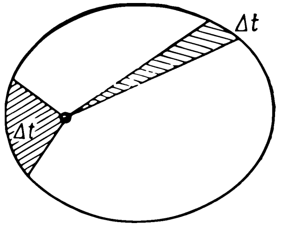
Прежде всего Кеплер понял, что все планеты движутся вокруг Солнца по кривой, называемой *эллипсом*, причем Солнце находится в фокусе эллипса. Эллипс — это не совсем овал, это особым образом точно определяемая кривая. Получить такую кривую можно, воткнув в фокусы по булавке, к которым привязана нить, натянутая карандашом. Выражаясь математически, это — геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух заданных точек (фокусов) постоянна. Или, если угодно, это — окружность, видимая под углом к своей плоскости (фиг. 7.1).

Другое наблюдение Кеплера состояло в том, что планеты движутся не с постоянной скоростью: поблизости от Солн-



Фиг. 7.1. Эллипс.

Фиг. 7.2. Кеплеров закон площадей.



ца — быстрее, а удаляясь — медленнее. Более точно: пусть планета наблюдается в два последовательных момента времени, скажем на протяжении недели, и к каждому положению планеты проведен радиус-вектор *. Дуга орбиты, пройденная планетой за неделю, и два радиус-вектора ограничивают некоторую площадь, заштрихованную на фиг. 7.2. Если такие же наблюдения в течение недели проделать в другое время, когда планета движется по дальнему участку орбиты (т. е. медленнее), то построенная таким же способом фигура окажется по площади равной прежней. Итак, в соответствии со вторым законом орбитальная скорость любой планеты такова, что радиус «заметает» равные площади в равные интервалы времени.

Третий закон был открыт Кеплером гораздо позже; он другого рода, нежели первые два: он уже касается не одной планеты, а связывает между собой разные планеты. Закон утверждает, что если сравнить между собой период обращения и размеры орбиты двух планет, то периоды пропорциональны полуторной степени размеров орбит. Здесь период — это время, нужное планете для того, чтобы обойти всю орбиту; размер же измеряется длиной наибольшего диаметра эллиптической орбиты, ее большой оси. Считая орбиты кругами (чем они почти и являются), можно сказать проще: время одного оборота по кругу пропорционально его диаметру (или радиусу) в степени $^3/_2$. Итак, три закона Кеплера таковы:

1. Все планеты движутся вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Радиус-вектор от Солнца до планеты «заметает» равные площади в равные интервалы времени.

3. Квадраты времен обращения двух планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит: $T^2 \sim a^3$.

§ 3. *Развитие динамики*

В то время, когда Кеплер открывал эти законы, Галилей изучал законы движения. Он пытался выяснить, что́

* Отрезок, соединяющий Солнце с точкой орбиты.

заставляет планеты двигаться. (В те дни одна из предлагавшихся теорий утверждала: планеты движутся потому, что за ними летят невидимые ангелы, которые взмахами своих крыльев гонят планеты вперед. Ныне эта теория, как вы вскоре увидите, несколько видоизменена! По-видимому, чтобы заставить планеты вращаться, невидимые ангелы обязаны витать во всевозможных направлениях и обходиться без крыльев. В остальном эти теории схожи!) И Галилей открыл одно знаменательное свойство движения, достаточное, чтобы понять эти законы. Это — принцип *инерции*: если при движении тела его ничто не касается, ничто не возмущает, то оно может лететь вечно с постоянной скоростью и по прямой. (А *почему* это так? Мы этого не знаем, но так уж оно повелось.)

Ньютон затем видоизменил эту мысль, говоря, что единственный способ изменить движение тела — это применить *силу*. Если тело разгоняется, значит сила была приложена *в направлении движения*. Если тело повернуло *в сторону*, то сила была приложена *сбоку*. Если, например, привязать камень к бечевке и вертеть им по кругу, то, чтобы удержать его на окружности, нужна сила. Мы должны все время *натягивать* бечевку. Закон состоит в следующем: *ускорение, производимое силой, обратно пропорционально массе*. Или иначе: *сила пропорциональна массе и ускорению*. Чем массивнее тело, тем бóльшая сила необходима, чтобы создать нужное ускорение. (Массу можно измерить, привязав к веревке другой камень и вертя им по тому же кругу с той же скоростью. Так можно обнаружить, что массивным телам нужна бóльшая сила.) Из этих рассуждений последовала блестящая мысль: чтобы удержать планету на ее орбите, никакой *касательной силы* не нужно (ангелам нет нужды летать по касательной), потому что планета и так будет лететь в нужном направлении. Если бы ничего ей не мешало, она бы удалилась по *прямой линии*. Но истинное движение уклоняется от этой прямой и отклоняется как раз поперек движения, а не по движению. Иными словами, благодаря принципу инерции сила, потребная для управления движением планет вокруг Солнца, это не сила, вращающая их *вокруг Солнца*, а сила, *направленная* к Солнцу (ну, а раз сила направлена к Солнцу, то, бесспорно, она и есть тот самый ангел!).

§ 4. Ньютонов закон тяготения

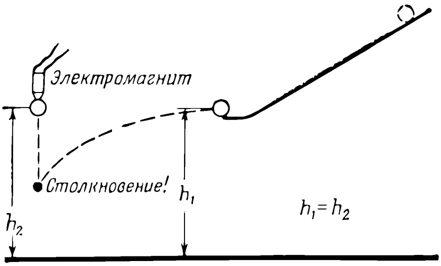
Лучше других поняв природу движения, Ньютон прикинул, что именно *Солнце* может явиться источником, штаб-квартирой сил, управляющих движением планет. Он убедился (вскоре, быть может, убедимся в этом и мы), что «заметание» равных площадей в равные интервалы времени есть верный знак того, что все отклонения от прямой в точности радиальны, или что закон площадей есть прямое следствие того, что все силы направлены точно *к Солнцу*.

Кроме того, из анализа третьего закона Кеплера можно вывести, что чем дальше от Солнца планета, тем слабее сила. Из сравнения двух планет на разных расстояниях следует, что силы обратно пропорциональны квадратам относительных расстояний. Сочетая оба закона, Ньютон пришел к заключению, что должна существовать сила, обратная квадрату расстояния и направленная по прямой между Солнцем и планетой.

Будучи человеком, склонным к обобщениям, Ньютон, конечно, предположил, что эта связь применима не только к Солнцу, удерживающему планеты, но что она носит более общий характер. Уже было известно, к примеру, что вокруг Юпитера обращаются луны, подобно тому как Луна ходит вокруг Земли, и Ньютону казалось естественным, что и планеты силой держат свои луны возле себя. Тогда он уже знал о силе, удерживающей *нас* на Земле, и предположил, что эта сила *всеобщая* и что *все притягивается ко всему*.

Тогда он спросил себя: притягивает ли Земля людей так же, как Луну («так же» значит обратно пропорционально квадрату расстояния). Если тело у поверхности Земли падает в первую секунду (из состояния покоя) на 4,9 *м*, то на сколько падает Луна? Можно возразить, что Луна вообще не падает. Но если бы на Луну не действовала сила, она бы унеслась по прямой линии, а на самом деле она обращается по круговой орбите; следовательно, она *падает* с того места, где она должна была бы быть, если бы сила на нее не действовала. Зная радиус орбиты Луны (около 384 000 *км*) и время ее оборота вокруг Земли (около 29 дней), можно подсчитать, сколько она проходит за 1 *сек* и затем на сколько за это время она падает *. Оказывается, что это расстояние примерно равно 1,36 *мм*. Это хорошо укладывается в закон обратных квадратов, потому что радиус Земли 6370 *км*, и если на этом расстоянии тела, падая, проходят в первую секунду 4,9 *м*, то на расстоянии в 384 тыс. *км*, т. е. в 60 раз дальше от центра Земли, они должны падать на 1/3600 от 4,9 *м*, или как раз на 1,36 *мм*. Желая подтвердить свою теорию тяготения подобными расчетами, Ньютон их аккуратно проделал и... получил сильнейшее несовпадение цифр. Он счел, что теория противоречит фактам, и не опубликовал ее. Шестью годами позже новые измерения радиуса Земли показали, что принятое в ту пору астрономами расстояние до Луны было

* Иначе говоря, на сколько окружность (орбита Луны) отходит от касательной к ней на протяжении пути, проходимого Луной за 1 *сек*.



Фиг. 7.3. Прибор для демонстрации независимости вертикальных и горизонтальных движений.

неверным. Услышав об этом, Ньютон провел новый расчет с исправленными цифрами и получил уже превосходное совпадение.

Мысль, что Луна «падает», несколько смущает; почему же она тогда *не приближается*? Эта мысль настолько интересна, что заслуживает дальнейшего пояснения: Луна «падает» в том смысле, что *отклоняется от прямой линии, по которой она бы двигалась, не будь больше никаких сил.*

Рассмотрим другой, уже чисто земной пример. Тело, выпущенное из рук у земной поверхности, упадет в первую секунду на 4,9 *м*. Тело, брошенное *горизонтально*, также падает на 4,9 *м*.

На фиг. 7.3 показан прибор, демонстрирующий это явление. Из горизонтального желоба выскакивает и летит вперед шарик. С той же высоты вертикально падает вниз другой шарик (имеется электрическая схема, выпускающая второй шар как раз в тот момент, когда первый соскальзывает с желоба). Они сталкиваются в воздухе, это значит, что они за одинаковое время снижаются одинаково. Пуля, выпущенная горизонтально, может пройти за 1 *сек* даже полкилометра, а вниз за это время она упадет на 4,9 *м*. Что случится, если пуля будет вылетать из ствола все быстрее? Не забудьте, что поверхность Земли кривая. Пуля может вылететь с такой скоростью, что, упав на 4,9 *м*, она все равно останется по отношению к Земле на первоначальной высоте. Может ли такое быть? Да; хотя она падает, но и Земля искривляется, вот и получается падение «вокруг» Земли. Надо только узнать, на каком расстоянии поверхность Земли окажется на 4,9 *м* ниже горизонта. На фиг. 7.4 изображена Земля с ее радиусом (6370 *км*) и касательный прямой путь пули (в отсутствие сил). Остается вспомнить одну из занятных геометрических теорем о том, что длина полухорды, перпендикулярной диаметру, равна среднему геометрическому между длинами отрезков диаметра. Значит, расстояние, пройденное пулей, есть среднее пропорциональное между 4,9 *м* падения и 12 740 *км* диаметра Земли, т. е.

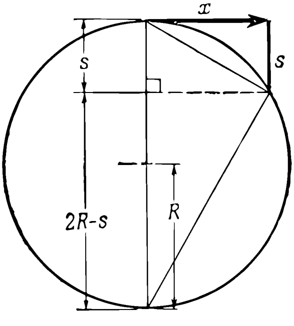
$$\sqrt{0{,}0049 \cdot 12\,740} \approx 7{,}9\ \textit{км}.$$

Итак, если пуля движется с быстротой 7,9 *км/сек*, она будет по-прежнему падать каждую секунду на 4,9 *м*, но никогда не приблизится к поверхности, уходящей от нее вследствие своей кривизны. Так было и с космонавтом Гагариным, который держался на одной высоте, делая примерно 8 *км* в секунду, т. е. 40 000 *км* за оборот (на самом деле чуть побольше, так как и летел он повыше).

Любое открытие нового закона полезно лишь тогда, когда из него можно извлечь больше того, что в него было вложено. Ньютон *применил* второй и третий законы Кеплера для того, чтобы вывести закон тяготения. Что же он *предсказал*? Первым предсказанием был его анализ движения Луны: движение это увязывалось с падением тел на Земле. Вторым был ответ на вопрос, *являются ли орбиты эллипсами*. Можно точно рассчитать движение, можно доказать и то, что это эллипс*; стало быть, никаких добавочных фактов для доказательства *первого* закона Кеплера не нужно. Так Ньютон сделал свое первое мощное предсказание.

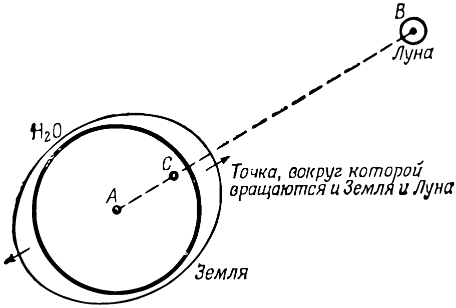
Закон тяготения объяснил многие явления, прежде непонятные. Например, притяжение Луны вызывает на Земле приливы — явление дотоле таинственное. Люди и раньше догадывались, что Луна притягивает воду под собой и получается прилив, но они не были так умны, как Ньютон, и думали, что должен быть только один прилив в сутки. Считалось, что Луна притягивает воду, вызывая прилив, но так как Земля вращается, то в каждом месте вода должна раз в сутки подняться и опуститься. А на самом деле прилив бывает каждые 12 часов. Была и другая школа передовой мысли; по ее мнению, прилив должен быть и на противоположной стороне Земли, потому что Луна всегда отрывает сушу от воды! Обе эти теории неверны. Настоящее объяснение примерно таково: притяжение Луной суши и воды «уравновешено» в центре. Но притяжение Луной тех масс воды, которые находятся на

* В нашем курсе нет этого доказательства.



Фиг. 7.4. Ускорение к центру на круговом пути.

Из планиметрии $x/s=(2R-s)/x\approx 2R/x$, где R — радиус Земли (6370 км); x — расстояние, «пройденное горизонтально» за 1 сек; s — длина пути «падения» за 1 сек (4,9 м).



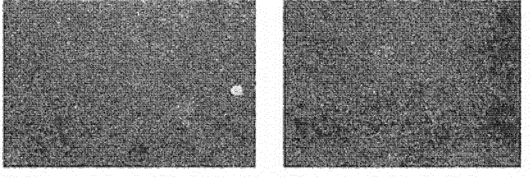
Фиг. 7.5. Система Земля — Луна с приливами.

«лунной» стороне Земли, *сильнее*, чем среднее притяжение всей Земли, а притяжение масс воды на обратной стороне Земли *слабее* среднего. Кроме того, вода в отличие от суши может течь. Истинная причина приливов и определяется этими двумя факторами.

Что мы понимаем под словом «уравновешено»? Что именно уравновешивается? А вот что. Если Луна притягивает к себе всю Землю, то почему Земля не падает «вверх» на Луну? По той же причине, почему и Луна не падает на Землю: Земля вращается вокруг точки, которая находится внутри Земли (но не в ее центре). Не Луна вращается вокруг Земли, а обе они вращаются вокруг общего центра и обе падают на него, как показано на фиг. 7.5. Это движение вокруг общего центра и уравновешивает падение каждого из двух небесных тел. Так что и Земля тоже движется не по прямой линии, а по круговой орбите. Массы воды на дальней стороне отбрасываются из-за «центробежной силы» сильнее, чем центр Земли, который как раз уравновешен притяжением Луны. Притяжение Луны на дальней стороне слабее и «центробежная сила» больше. В итоге равновесие воды нарушается: она удаляется от центра Земли. На ближней стороне Луна притягивает сильнее, но из-за меньшей величины радиус-вектора оказывается меньше и «центробежная сила», равновесие нарушается в обратную сторону, но по-прежнему *от* центра Земли. В итоге появляются *два* приливных «горба».

§ 5. Всемирное тяготение

Что же еще можно понять, зная о существовании тяготения? Всем известно, что Земля круглая. А почему? Ну, это понятно: конечно, благодаря тяготению. Земля круглая просто потому, что между всеми телами существует притяжение, и все, из чего возникла Земля, тоже взаимно притягивалось до тех пор, пока было куда притягиваться! Точнее говоря,

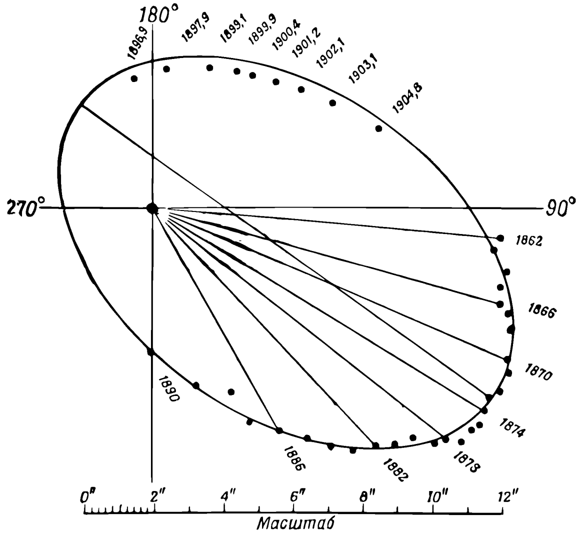


Фиг. 7.6. Система двойной звезды.

Земля *не совсем* шар; она ведь вращается, и центробежная сила на экваторе противодействует тяготению. Выходит, что Земля должна быть эллипсоидом, и можно даже получить правильную его форму. Итак, из закона тяготения следует, что и Солнце, и Луна, и Земля должны быть (приблизительно) шарами.

Что же еще следует из закона тяготения? Наблюдая за спутниками Юпитера, можно понять все законы их движения вокруг планеты. В этой связи стоит рассказать об одной заминке, которая вышла у закона тяготения с лунами Юпитера. Эти спутники очень подробно изучались Рёмером, и вот он заметил, что временами они нарушают расписание: то опаздывают, то приходят в назначенное место раньше времени (расписание можно составить, понаблюдав за ними достаточно долго и подсчитав по многим оборотам средний период обращения). Более того, он заметил, что опоздания случаются, когда Юпитер удален от Земли, а когда мы от Юпитера близко, то движение лун опережает расписание. Такую вещь очень трудно было уложить в закон тяготения, и ему бы угрожала безвременная кончина, не найдись другого объяснения. Ведь если закону противоречит хотя бы один случай, то закон неверен. Но причина расхождения оказалась очень естественной и красивой: дело просто в том, что необходимо какое-то время, чтобы увидеть луну на нужном месте, ведь свет от нее до нас доходит не мгновенно. Время это небольшое, когда Юпитер находится близко к Земле, но оно затягивается, когда Юпитер удалится от нее. Вот почему кажется, что луны в среднем торопятся или отстают в зависимости от того, близко ли или далеко они находятся от Земли. Это явление доказало, что свет распространяется не мгновенно, и снабдило нас первой оценкой его скорости (было это в 1676 г.).

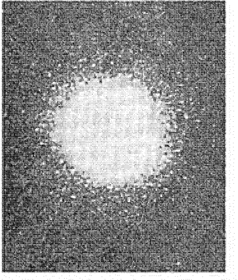
Если все планеты притягиваются друг к другу, то сила, управляющая, скажем, обращением Юпитера вокруг Солнца, это не совсем сила притяжения к Солнцу; ведь есть еще и притяжение, например, Сатурна. Оно невелико (Солнце куда больше Сатурна), но оно *есть*, и потому орбита Юпитера не может быть точным эллипсом; она чуть колеблется относительно эллиптической траектории, так что движение несколько усложняется. Были предприняты попытки проанализировать движение Юпитера, Сатурна и Урана на основе закона тяготения. Чтобы узнать, удастся ли мелкие отклонения и неправильности в движении планет полностью объяснить



Фиг. 7.7. Орбита Сириуса B по отношению к Сириусу A.

только на основе одного этого закона, рассчитали влияние каждой из них на остальные. Для Юпитера и Сатурна все сошло как следует, но Уран — что за чудеса! — повел себя очень странно. Он двигался не по точному эллипсу, чего, впрочем, и следовало ожидать из-за влияния притяжения Юпитера и Сатурна. Но и с учетом их притяжения движение Урана *все равно* было неправильным; таким образом, законы тяготения оказались в опасности (возможность эту нельзя было исключить). Двое ученых, Адамс и Леверрье, в Англии и Франции, независимо задумались об иной возможности: нет ли там *еще одной* планеты, тусклой и невидимой, пока еще не открытой. Эта планета, назовем ее N, могла притягивать Уран. Они рассчитали, где эта планета должна находиться, чтобы причинить наблюдаемые возмущения пути Урана. В соответствующие обсерватории они разослали письма, в которых говорилось: «Господа, направьте свои телескопы в такое-то место — и вы увидите там новую планету». Обратят ли на вас внимание или нет, часто зависит от того, с кем вы работаете. На Леверрье обратили внимание, послушались его и обнаружили планету N! Тогда и другая обсерватория поспешила начать наблюдения — и тоже увидела ее.

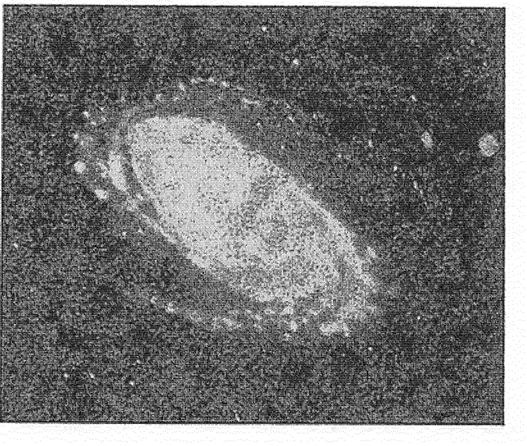
Это открытие показывает, что в солнечной системе законы Ньютона абсолютно верны. Но верны ли они на расстояниях, больших, чем относительно малые расстояния до планет? Во-первых, можно поставить вопрос: притягивают ли *звезды друг*



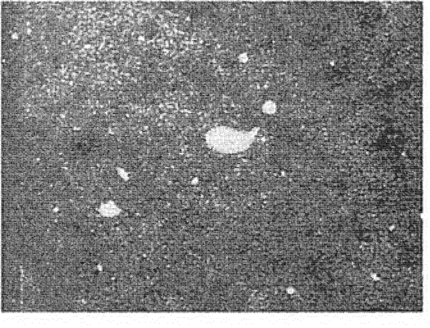
Фиг. 7.8. Шаровое звездное скопление

друга так же, как планеты? Положительные доказательства этого мы находим в *двойных звездах.* На фиг. 7.6 показана двойная звезда — две близкие звезды (третья звезда нужна, чтобы убедиться, что фотография не перевернута); вторая фотография сделана через несколько лет. Сравнивая с «фиксированной» звездой, мы видим, что ось пары повернулась, т. е. звезды ходят одна вокруг другой. Вращаются ли они в согласии с законами Ньютона? Тщательные замеры относительной позиции двойной звезды Сириус даны на фиг. 7.7. Получается превосходный эллипс (измерения начаты в 1862 г. и доведены до 1904 г.; с тех пор был сделан еще один оборот). Все сходится с законами Ньютона, кроме того, что Сириус А получается *не в фокусе.* В чем же дело? А в том, что плоскость эллипса не совпадает с «плоскостью неба». Мы видим Сириус не под прямым углом к плоскости его орбиты, а если на эллипс посмотреть сбоку, то он не перестанет быть эллипсом, но фокус может сместиться. Так что и двойные звезды можно анализировать в согласии с требованиями закона тяготения.

Справедливость закона тяготения на бóльших дистанциях видна из фиг. 7.8. Нужно быть лишенным воображения, чтобы не увидеть здесь работы тяготения. Здесь показано одно из красивейших небесных зрелищ — шаровое звездное скопление. Каждая точка — это звезда. Нам кажется, будто у центра они набиты вплотную; происходит это из-за слабой чувствительности телескопа; на самом деле промежутки между звездами



Фиг. 7.9. Галактика.

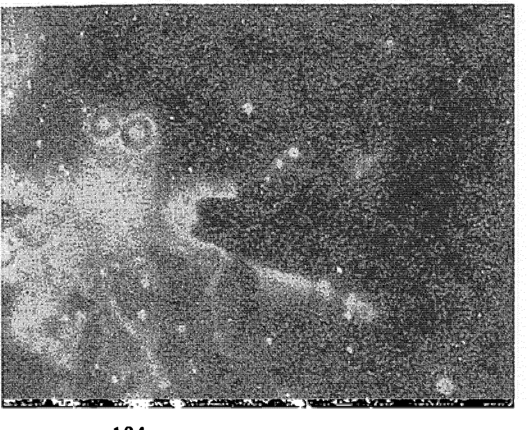


Фиг. 7.10. Облако галактик.

даже в середине очень велики, а столкновения крайне редки. Больше всего звезд в центре, а по мере удаления к краю их все меньше и меньше. Ясно, что между звездами действует притяжение, т. е. что тяготение существует и на таких гигантских расстояниях (порядка 100 000 диаметров солнечной системы).

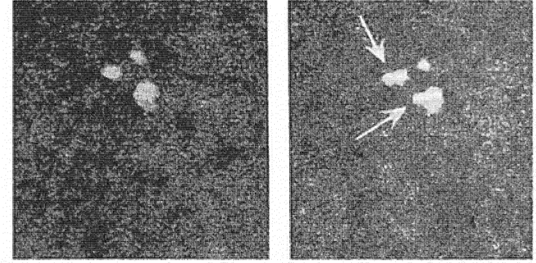
Но отправимся дальше и рассмотрим *всю галактику* (фиг. 7.9). Форма ее явственно указывает на стремление ее вещества стянуться. Конечно, доказать, что здесь действует закон обратных квадратов, нельзя; видно только, что и на таком протяжении есть силы, удерживающие всю галактику от развала. Вы можете сказать: «Ладно, все это разумно, но почему же эта штука, галактика, уже не похожа на шар?» Да потому, что она *вертится*, что у нее есть *момент количества движения* (запас вращения); если она сожмется, ей некуда будет его девать; ей остается только сплюснуться. (Кстати, вот вам хорошая задача: как образуются рукава галактики? Чем определяется ее форма? Детального ответа на эти вопросы еще нет.) Ясно, что очертания галактики определяются тяготением, хотя сложности ее структуры пока невозможно полностью объяснить. Размеры галактик — около 50 000—100 000 световых лет (Земля находится на расстоянии $8^1/_3$ световых минут от Солнца).

Но тяготение проявляется и на бóльших протяжениях. На фиг. 7.10 показаны какие-то скопления мелких пятен. Это



Фиг. 7.11. Межзвездное пылевое облако.

Фиг. 7.12. Образование новых звезд?

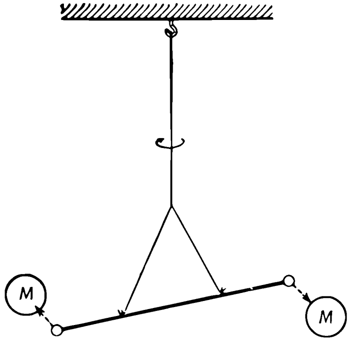


облако галактик, подобное звездному скоплению. Стало быть, и галактики притягиваются между собой на таких расстояниях, иначе бы они не собрались в «облако». По-видимому, и на расстояниях в *десятки миллионов* световых лет проявляется тяготение; насколько ныне известно, закон обратных квадратов действует повсюду.

Закон тяготения ведет не только к пониманию природы туманностей, но и к некоторым идеям о происхождении звезд. В большом облаке пыли и газа, подобном изображенному на фиг. 7.11, притяжение частиц пыли соберет их в комки. На фигуре видны «маленькие» черные пятнышки — быть может, начало скопления газа и пыли, из которых благодаря их притяжению начинает возникать звезда. Приходилось ли нам когда-либо видеть рождение звезды — вопрос спорный. На фиг. 7.12 дано некоторое свидетельство того, что приходилось. Слева показан светящийся газ, а внутри него — несколько звезд. Это снимок 1947 г. Снимок справа сделан через 7 лет; теперь видны уже два новых ярких пятна. Уж не скопился ли здесь газ, не вынудило ли его тяготение собраться в шар, достаточно большой, чтобы в нем началась звездная ядерная реакция, превращая его в звезду? Может быть, да, а может, и нет. Маловероятно, что нам повезло увидеть, как всего за семь лет звезда стала видимой, но еще менее вероятно увидеть рождение сразу *двух* звезд.

§ 6. Опыт Кавендиша

Итак, тяготение распространяется на огромные расстояния. Но если существует притяжение между *любыми* двумя объектами, то должна существовать и возможность измерить силу, действующую между ними. И не обязательно следить за движением звезд; почему бы не взять два шара, свинцовый и мраморный, и не проследить, как один будет двигаться к другому? Трудность столь простого по идее опыта заключается в крайней слабости, незаметности сил. Проводить его следует с исключительной осторожностью: сначала выкачать из аппарата воздух, убедиться, что нигде нет электрических зарядов и т. д., и только тогда можно попытаться измерить силу. Впервые она была измерена Кавендишем при помощи



Фиг. 7.13. Упрощенная схема прибора, использованного Кавендишем для проверки закона всемирного тяготения для малых тел и измерения постоянной тяготения G.

устройства, схематически изображенного на фиг. 7.13. Опыт Кавендиша доказал, что существует сила, действующая между двумя большими закрепленными свинцовыми шарами и двумя меньшими (тоже из свинца); в опыте шары размещались на концах коромысла, висящего на очень тонкой упругой нити. Измеряя, насколько закрутится нить, можно было узнать величину силы и убедиться, что она обратно пропорциональна квадрату расстояния. Таким образом точно определялся коэффициент G в формуле

$$F = G\frac{mm'}{r^2},$$

ибо все массы и расстояния здесь известны. Вы можете возразить: «Все это для Земли было известно и раньше». Все, кроме *массы* Земли. Определив из этого опыта величину G и зная силу притяжения Земли, можно было косвенно определить ее массу! Опыт поэтому называют «взвешиванием Земли». Кавендиш утверждал, что он взвесил Землю, хотя он только измерил коэффициент G; но это единственный способ определить массу Земли. Коэффициент G оказался равным

$$6{,}670 \cdot 10^{-11} \textit{ньютон} \cdot \textit{м}^2/\textit{кг}^2.$$

Трудно преувеличить силу влияния теории тяготения, ее величественных успехов на историю науки. Вместо царивших в прежние века неуверенности, сомнений, неполноты знаний, бесконечных споров и парадоксов перед людьми предстал новый закон во всей своей четкости и простоте. Как важно было то, что все луны, все планеты, все звезды подчиняются столь *простому правилу*! Но еще важнее то, что человек оказался в состоянии *понять* это правило и предсказывать на будущее пути планет! Это определило быстрый, успешный рост науки в последующие годы; у людей появилась надежда, что и в других явлениях мира прячутся такие же простые закономерности.

§ 7. *Что такое тяготение?*

Но почему закон так прост? Что можно сказать о причине этого? До сих пор мы только описывали, *как* Земля обращается вокруг Солнца, но ни слова не сказали о том, *что́ заставляет ее двигаться.* Ньютон не строил догадок об этом; ему было достаточно открыть, *что́* происходит, не входя в механизм происходящего. *Но и никто другой с тех пор никакого механизма не открыл.* Все физические законы отличаются в этом отношении своим абстрактным характером. Закон сохранения энергии — это теорема о величинах, которые нужно вычислить и сложить, не думая о причине этого; точно так же и великие законы механики представляют собой количественные математические закономерности, о внутреннем механизме работы которых никаких данных нет. Почему мы можем пользоваться математикой для описанных законов, не зная их причины? Никто и этого не знает. Мы продолжаем идти по этой дороге, потому что на ней все еще происходят открытия.

Предлагались многие механизмы тяготения. Интересно рассмотреть один из них, ибо до него время от времени додумывались то один, то другой ученый. Причем каждый сперва воспрянет духом и ходит осчастливленный своим «открытием», но потом начинает понимать, что тут что-то не так. Впервые это открытие произошло примерно в 1750 г. Представьте себе, что в пространстве носится в разных направлениях с огромной скоростью множество частиц, лишь слегка поглощаемых веществом. Поглощаясь, они передают свой импульс Земле. Но так как во всех направлениях их количество одинаково, то все импульсы уравновешиваются. Когда же неподалеку находится Солнце, то частицы, приближающиеся к Земле сквозь Солнце, частично им поглощаются, так что от Солнца их проходит меньше, чем с обратной стороны. Следовательно, Земля ощутит импульс, направленный к Солнцу, и нетрудно видеть, что он будет обратным квадрату расстояния: таков закон изменения пространственного угла, под которым видимо Солнце, с ростом расстояния. Что же плохо в этом механизме? Неверны те выводы, которые из него следуют. Появляется новая забота: Земля в своем движении вокруг Солнца будет испытывать больше столкновений с частицами спереди, чем сзади (когда бежишь навстречу дождю, лицо мокнет больше, чем затылок!). Поэтому спереди Земля получит больше импульсов, чем сзади, и должна почувствовать *сопротивление своему движению*, а это сказалось бы на замедлении ее движения по орбите. Можно подсчитать, сколько времени понадобится Земле, чтобы в результате такого сопротивления остановиться; оказывается, не так уж много; а раз

$$\frac{\text{Гравитационное притяжение}}{\text{Электрическое отталкивание}} = \frac{1}{4{,}17\cdot 10^{42}} =$$

$$= 1/4\,170\;000\;000\;000\;000\;000\;000\;000\;000\;000\;000\;000\;000\;000\;000\;000$$

Фиг. 7.14. Относительная сила электрического и гравитационного взаимодействия двух электронов.

Земля все же движется по своей орбите, то вся эта механика не проходит. И не было предложено ни одного механизма, «объясняющего» тяготение, который бы не предсказывал добавочных, *несуществующих* явлений.

Рассмотрим еще возможную связь тяготения с прочими силами. В нынешнее время не удается свести тяготение к другим силам. Тяготение отнюдь не проявление электричества или чего-либо подобного; этим его не объяснишь. И все же тяготение похоже на другие силы, и любопытно посмотреть, в чем. К примеру, электрическая сила между двумя заряженными телами чрезвычайно похожа на тяготение: она равна со знаком минус постоянной величине, умноженной на величины зарядов тел, и изменяется обратно квадрату расстояния. Правда, она действует в обратную сторону, т. е. отталкивает. Но замечательно не столько это, сколько одинаковая зависимость от расстояния, входящая в оба закона. Не исключено, что тяготение и электричество связаны значительно сильнее, чем мы думаем. Было сделано много попыток объединить их; так называемая единая теория поля — лишь одна из очень изящных попыток сочетать электричество с тяготением. Но самая интересная вещь в сопоставлении их друг с другом — это *относительная величина* этих *сил*. Любая теория, в которой появятся обе силы, обязана будет также объяснить величину тяготения (константу G).

Если мы измерим в естественных единицах отталкивание двух электронов (возникающее из-за того, что у них есть заряд) и их притяжение (возникающее оттого, что у них есть масса), то мы можем получить и отношение электрического отталкивания к гравитационному притяжению. Отношение это не зависит от расстояния, это фундаментальная мировая константа. Изображена она на фиг. 7.14. Гравитационное притяжение составляет $1/4{,}17\cdot 10^{42}$ от электрического отталкивания! Откуда же может возникнуть такое исполинское число в знаменателе? Оно же не случайно, ведь это не отношение объема Земли к объему тли. Мы рассматриваем два естественных свойства одного и того же предмета — электрона. Это фантастическое число есть естественная константа, и в нем таятся какие-то глубинные свойства природы. От каких же свойств оно зависит? Некоторые надеются, что если кто-нибудь однажды напишет «универсальное уравнение», то одним из его корней будет это число. Но очень трудно найти уравнение, в котором корнем было бы такое немыслимое число. Были придуманы и другие возможности; одна связывает его с возрастом Вселенной. Иначе говоря, необходимо найти в природе *еще* одно такое огромное число. При этом не собираются выражать возраст в *годах*, нет, ведь год — не «естественная» величина, она введена людьми.

Как пример чего-то естественного выберем время, за какое свет проходит сквозь протон, 10^{-24} *сек*. Разделив это число на возраст Вселенной ($2 \cdot 10^{10}$ лет $\approx 10^{18}$ *сек*), получим 10^{-42}—число со столькими же нулями; потому и предлагают считать постоянную всемирного тяготения связанной с возрастом мира. Если бы это было так, то она изменялась бы со временем: по мере старения Вселенной отношение ее лет к промежутку, в течение которого свет проносится мимо протона, возрастало бы. Возможно ли, что постоянная тяготения и впрямь меняется с годами? Ясно, что изменения столь малы, что в этом убедиться нелегко.

Вот один из способов проверить эту мысль. Зададим вопрос: что при этом должно было измениться за последние 10^9 лет (время появления жизни на Земле), т. е. за $^1/_{10}$ возраста Вселенной? За это время постоянная тяготения выросла бы на 10%. Оказывается, что если рассмотреть структуру Солнца — баланс между его массой и степенью генерации излучательной энергии внутри Солнца,—то при росте тяжести на 10% Солнце оказалось бы не на 10% ярче, а значительно больше: яркость его возросла бы как *шестая степень* постоянной тяготения! Можно подсчитать и то, на сколько при таком изменении тяжести Земля приблизится к Солнцу. В итоге выясняется, что Земля стала бы более чем на 100° горячее и, следовательно, вся вода из морей превратилась бы в пар. Поэтому мы сейчас *не верим*, что постоянная тяготения изменяется по мере того, как мир стареет. Все же приведенный нами аргумент не очень убедителен, и вопрос до конца не выяснен.

Как известно, сила тяготения пропорциональна массе, т. е. мере *инерции* тела, или мере того, насколько трудно удержать тело, вращающееся по кругу. Поэтому два тела, тяжелое и легкое, движущиеся бок о бок вокруг массивного тела по одному и тому же кругу с одной скоростью под действием тяготения, будут все время оставаться рядом, потому что движение по кругу *требует* для большего тела и большей силы.

Иначе говоря, тяжесть у большей массы больше *как раз в нужной пропорции*, так что два тела будут вращаться, не удаляясь одно от другого. Если же одно тело находится внутри другого, то оно и *останется* там; равновесие является совершенным. Поэтому Гагарин и Титов наблюдали невесомость всех предметов внутри космического корабля; выпущенный из руки карандаш, например, вращался вокруг Земли по той же траектории, что и весь корабль, поэтому он замирал, повиснув в воздухе. Любопытно, что эта сила *в точности* пропорциональна массе; если бы это было не так, то должны были бы наблюдаться явления, в которых инерция и вес отличаются. Отсутствие подобых явлений было с огромной точностью проверено на опыте, выполненном впервые Этвешем в 1909 г., а позже повторенном Дикке. У всех веществ масса и вес пропорциональны с точностью 1/1 000 000 000 или даже более того. Не правда ли, замечательный эксперимент?

§ 8. Тяготение и относительность

Заслуживает еще обсуждения видоизменение ньютонова закона тяготения, сделанное Эйнштейном. Оказывается, несмотря на вызванное им воодушевление, ньютонов закон тяготения все же неверен! Учтя требования теории относительности, Эйнштейн видоизменил этот закон. Согласно Ньютону, тяготение действовало мгновенно. Это значит вот что: сдвинув массу, мы должны в тот же миг почувствовать изменение силы в результате смещения; стало быть, таким способом можно посылать сигналы с бесконечной скоростью. А Эйнштейн выдвинул доводы, что *невозможно посылать сигналы быстрее скорости света*; закон тяготения, таким образом, должен быть ошибочным. Если исправить его, учтя запаздывание, то получится уже новый закон, закон тяготения Эйнштейна. Одна из особенностей нового закона легко укладывается в голове: по теории относительности Эйнштейна все, любой объект, обладающий энергией, обладает и массой в том смысле, что он должен тяготеть к другим объектам. Даже световой луч имеет «массу», ибо он обладает энергией. И когда луч света, неся с собой энергию, проходит мимо Солнца, то Солнце его притягивает. И луч уже идет не по прямой, а искривляется. Например, во время солнечных затмений звезды, окружающие Солнце, кажутся сдвинутыми с того места, где они наблюдались бы, если бы Солнца не было. И это явление и впрямь наблюдалось.

И наконец, сопоставим тяготение с другими теориями. В последние годы выяснилось, что любая масса обязана своим происхождением мельчайшим частицам и что существует несколько видов взаимодействия, например ядерные силы и т. п. Ни одна из этих ядерных или электрических сил пока тяготения не объясняет. Квантовомеханические стороны природы мы еще пока не распространили на тяготение. Когда на малых расстояниях начинаются квантовые эффекты, то тяготение оказывается еще настолько слабым, что нужды в квантовой теории тяготения не возникает. С другой стороны, для последовательности наших физических теорий было бы важно понять, должен ли закон Ньютона с внесенным Эйнштейном видоизменением быть изменен и дальше с тем, чтобы согласовываться с принципом неопределенности. Это последнее видоизменение пока не сделано.

Глава 8

ДВИЖЕНИЕ

§ 1. Описание движения

Чтобы найти законы, управляющие различными изменениями, происходящими с течением времени, нужно сначала *описать* эти изменения и придумать какой-то способ их записи. Начнем с самого простого изменения, которое происходит с телом, — с изменения его положения в пространстве, т. е. того, что мы называем *движением*. Рассмотрим движущийся предмет, на который нанесена маленькая отметка; ее мы будем называть точкой. Неважно, будет ли это кончик радиатора автомобиля или центр падающего шара. Мы будем пытаться описать тот факт, что она движется, и как это происходит.

На первый взгляд это кажется совсем просто, однако в описании изменения есть много хитростей. Некоторые изменения описать труднее, нежели движение точки на твердом предмете. Например, как описать движение облака, которое не только медленно перемещается, но вдобавок еще изменяет свои очертания или испаряется? Или как описать капризы женского ума? Впрочем, поскольку изменения облака хотя бы в принципе можно описать с помощью движения всех отдельных молекул его составляющих, то вполне возможно, что и изменения мыслей обусловлены тоже какими-то перемещениями атомов в мозгу, хотя мы еще не знаем простого способа их описания.

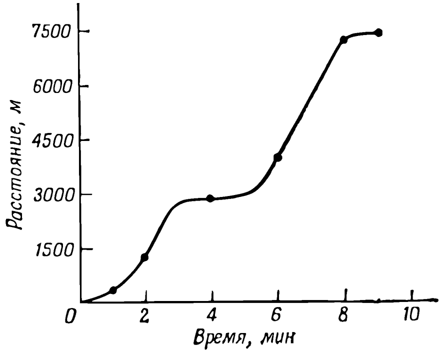
По этой причине мы начнем с движения точек. Пожалуй, еще можно считать эти точки атомами, но сначала, вероятно, лучше не гнаться за точностью, а просто представлять себе точку как какой-то маленький объект, маленький по сравнению с тем расстоянием, которое он проходит. Например, если говорят об автомобиле, прошедшем 100 *км*, то какая разница, имеется ли в виду его мотор или багажник. Конечно, небольшая разница есть, но обычно мы просто говорим «автомобиль», и то, что он не является абсолютной точкой, не имеет значения. Для наших целей не нужна абсолютная точность. Ради простоты забудем на время также и о том, что наш мир трехмерный, а сконцентрируем все свое внимание на движении в одном направлении (автомобиль движется по прямой дороге). Мы еще вернемся к понятию трех измерений, когда поймем, как описывается движение в одном измерении. Вы, вероятно, скажете, что это тривиально. Действительно, это так. Как описать движение в одном измерении, скажем движение автомобиля. Это проще простого. Приведу один из многих возможных способов. Чтобы определить положение автомобиля в различные моменты времени, мы измеряем расстояние его от начальной точки и записываем наши наблюдения. В табл. 8.1 буква s означает расстояние автомобиля от начальной точки в метрах, а t — время в минутах. Первая строка — нулевое рас-

Таблица 8.1 ● РАСПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ

t, *мин*	s, *м*	t, *мин*	s, *м*
0	0	5	3150
1	380	6	4050
2	1350	7	5550
3	2550	8	7050
4	2850	9	7500

стояние и нулевой момент времени. Автомобиль еще не начал двигаться. Через минуту после начала движения он проходит уже 380 *м*. Через две минуты он продолжает двигаться. Заметьте, что за вторую минуту он прошел большее расстояние, чем за первую, — автомобиль ускоряет свое движение, но между третьей и четвертой минутами что-то произошло, более того, на пятой минуте он остановился. По-видимому, у светофора, потому что дальше он опять набирает скорость и к концу шестой минуты проходит 4050 *м*, к концу седьмой — 5550, а к концу восьмой — 7050. Но в течение девятой минуты опять происшествие — автомобиль прошел всего лишь 450 *м* и остановился. Водитель нарушил правила движения и был остановлен полицейским.

Это один способ описать движение. Есть и другой способ — графический. Если по горизонтали откладывать время, а по вертикали — расстояние, то получим кривую, подобную



Фиг. 8.1. График зависимости расстояния, пройденного машиной, от времени.

изображенной на фиг. 8.1. Из рисунка видно, что с увеличением времени расстояние тоже увеличивается, сначала очень медленно, а затем все быстрее и быстрее. В районе четырех минут происходит замедление, а затем расстояние опять увеличивается в течение нескольких минут, и, наконец, на девятой минуте машина останавливается. Все эти сведения можно получить прямо из графика, не используя таблицы. Конечно, для построения нашего графика необходимо знать, где находится автомобиль не только каждую минуту, но и каждые полминуты, а может быть, и еще точнее. Кроме того, мы предполагаем, что машина где-то находится в любой момент времени.

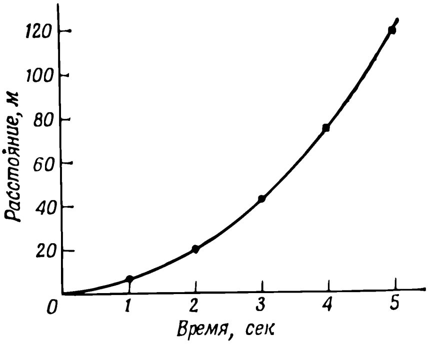
Так что движение автомобиля выглядит все же сложно. Давайте рассмотрим что-нибудь попроще, с более простым законом движения: например, падающий шар. В табл. 8.2

Таблица 8.2 ● РАСПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПАДАЮЩЕГО ШАРА

t, сек	*s, м*
0	0
1	5
2	20
3	45
4	80
5	125
6	180

даны значения времени в секундах и расстояния в метрах. За нулевой момент выберем момент начала падения. Через 1 *сек* после начала падения шарик пролетает 5 *м*, через 2 *сек* — 20 *м*, через 3 *сек* — 45 *м*. Если отложить эти числа на графике, то получим параболическую кривую зависимости

Фиг. 8.2. График зависимости расстояния. пройденного падающим шаром, от времени.



расстояния от времени для падающего тела (фиг. 8.2), которая описывается формулой

$$s = 5t^2. \tag{8.1}$$

Эта формула позволяет вычислить расстояние для любого момента времени. Вы скажете, что для первого графика (см. фиг. 8.1) тоже должна быть какая-то формула. Действительно это так. Ее можно записать в таком абстрактном виде:

$$s = f(t). \tag{8.2}$$

Это означает, что s — величина, зависящая от t, или, как говорят математики, s есть функция t. Однако мы не знаем, что это за функция, точнее, мы не можем записать ее через какие-то известные нам функции.

На этих двух примерах видно, что любое движение можно писать в общей и простой форме. Казалось бы, нет ничего хитрого! Однако хитрости все же есть, и не одна! Во-первых, что мы понимаем под *пространством* и *временем?* Это, оказывается, очень глубокие философские вопросы, которые нужно внимательно проанализировать, что не так-то легко. Теория относительности показывает, что понятия пространства и времени не так просты, как это кажется на первый взгляд. Впрочем, сейчас для начала нам не нужна такая скрупулезность в определении этих понятий. Возможно, вы скажете: «Странно, мне всегда говорили, что в науке *все* должно определяться точно». Это не так. Мы не можем определить точно все без исключения! Если бы мы пытались это сделать, то получилось бы нечто похожее на спор двух «философов», где один говорит: «Вы сами не знаете, о чем говорите»; а второй отвечает: «А что такое «знать»? Что такое «говорить»? Что такое «вы», наконец?» Ну и так до бесконечности. Так что для пользы дела лучше сначала условиться, что мы будем говорить хотя бы приблизительно об одних и тех же вещах.

Сейчас вы достаточно много знаете о времени, но помните, что здесь есть некоторые тонкости, которые мы еще обсудим в дальнейшем.

Другая хитрость (мы уже упоминали о ней) — это правильно ли думать, что наблюдаемая нами движущаяся точка всегда находится в каком-то определенном месте (т. е. где-то локализована). Разумеется, когда мы смотрим на нее, она находится в определенном месте; но можно ли это утверждать в те моменты, когда мы отвернулись. И вот оказывается, что при изучении движения атомов так думать нельзя. Невозможно посадить метку на атом и наблюдать за его движением. С этой тонкостью мы вплотную столкнемся в квантовой механике. Но сначала давайте рассмотрим те проблемы, которые возникают до введения этих усложнений, а уж после этого учтем те поправки, на которые нас вынуждают новейшие сведения о природе вещей. Итак, примем наиболее простую точку зрения о пространстве и времени. Мы приблизительно понимаем, что означают эти понятия, а тот, кому доводилось управлять автомобилем, знает и что такое скорость.

§ 2. Скорость

Хотя мы примерно представляем себе, что такое «скорость», однако здесь есть одна очень важная тонкость. Заметьте, что древние греки так и не смогли до конца разобраться в проблеме скорости. Тонкость, о которой идет речь, дает себя знать, когда пытаешься точно определить, что же подразумевается под понятием «скорость». Этот вопрос был камнем преткновения для древних греков, и потребовалось открытие новой области математики, помимо геометрии и алгебры, которые были известны и грекам, и арабам, и вавилонянам. Попробуйте-ка с помощью одной лишь алгебры решить следующую задачу. Воздушный шар надувается таким образом, что его объем увеличивается со скоростью 100 $см^3/сек$. С какой скоростью увеличивается его радиус, когда объем шара достигает 1000 $см^3$? Задачи такого рода были неразрешимы для древних греков. Кроме того, их сбивали с толку многочисленные «парадоксы». Вот один из них, придуманный Зеноном, который хорошо показывает, насколько была сложна в то время проблема скорости движения. «Предположим, — говорит он, — что Ахиллес бегает в десять раз быстрее черепахи. Но тем не менее он никогда не перегонит ее. Действительно, пусть в начале состязания черепаха находилась в 100 метрах впереди Ахиллеса. Тогда ко времени, когда Ахиллес пробежит эти 100 метров, черепаха окажется в 10 метрах впереди него. Пробежав и эти 10 метров, Ахиллес увидит черепаху в 1 метре впереди себя. За то время, пока он пробежит этот метр, черепаха пройдет 10 сантиметров и так далее... до бесконечности. Следовательно, в любой момент черепаха будет впереди Ахиллеса, и он никогда не сможет перегнать ее». В чем здесь ошибка? Конечный интервал времени можно разделить на бесконечное число частей точно так же, как и конечный отрезок длины, если последовательно делить его пополам. Но бесконечное число этапов до того места, где Ахиллес поравняется с черепахой, вовсе не означает бесконечное количество *времени*. Этот пример хорошо показывает, с какими трудностями приходилось сталкиваться в проблеме определения скорости.

Чтобы еще яснее представить себе эти трудности, вспомним старую шутку, которую вы наверняка слышали. Вы помните, что автомобиль, о котором мы говорили в начале этой лекции, был остановлен полицейским. Он подходит к машине и говорит: «Мадам (ибо за рулем была женщина), Вы нарушили правила уличного движения. Вы ехали со скоростью 90 километров в час». Женщина отвечает: «Простите, это невозможно. Как я могла делать 90 километров в час, если я еду всего лишь 7 минут!» Как бы вы ответили на месте полицейского? Конечно, если вы действительно настоящий полицейский, то такими хитростями вас не запутаешь. Вы бы твердо сказали: «Мадам, оправдываться будете перед судьей!» Но предположим, что у вас нет такого выхода. Вы хотите честно доказать нарушительнице ее вину и пытаетесь объяснить ей, что означает скорость 90 *км/час*. Как это сделать? Вы скажете: «Я имею в виду, мадам, что если бы вы продолжали ехать таким же образом, то через час Вы бы проехали 90 километров». «Да, но я ведь затормозила и остановила машину, — может ответить она, — так что теперь-то я уж никак не могла бы проехать 90 километров в час».

Аналогичная проблема возникает и в случае падающего шарика. Предположим, что мы хотим определить его скорость через 3 *сек*, если бы он двигался таким же образом. Но что означает «двигался таким же образом»? Сохранял бы ускорение, двигался быстрее, что ли? Конечно, нет! Сохранял бы ту же самую *скорость*. Но ведь это как раз то, что мы пытаемся определить! Если бы шарик продолжал двигаться «таким же образом», то он падал бы так же, как падает. Так что нужно придумать что-то лучшее для определения скорости. Что же все-таки должно сохраняться? Нарушительница могла бы вам еще ответить и так: «Если бы я продолжала ехать, как ехала, еще час, то налетела бы на стену в конце улицы!» В общем, как видите, полицейский оказался бы в очень трудном положении, пытаясь объяснить, что он имел в виду.

Многие физики думают, что единственным определением любого понятия является способ его измерения. Но тогда при объяснении вы должны прибегнуть к прибору, измеряющему скорость. «Смотрите, — скажете вы в этом случае, — ваш спидометр показывает 90». «Мой спидометр сломан и давно не работает», — ответит она. Но достаточно ли этого, чтобы поверить, что машина не двигалась? Мы полагаем, что как-то нужно было бы определять скорость и без помощи спидометра. Только при этих условиях можно сказать, что спидометр не работает, что он сломан. Это было бы абсурдным, если бы скорость не имела смысла без спидометра. Очевидно, что понятие «скорость» не зависит от спидометра. Спидометр нужен только для того, чтобы измерять ее. Давайте посмотрим, нельзя ли придумать лучшее определение понятия «скорость». Вы скажете: «Разумеется, мадам, если бы вы ехали таким же образом в течение часа, то налетели бы на стену, но за 1 секунду вы бы проехали 25 метров, так что вы делали 25 метров в секунду, и если бы продолжали ехать таким же образом, то в следующую секунду опять проехали бы 25 метров, а стена стоит гораздо дальше». «Но правила запрещают делать 90 километров в час, а не 25 метров в секунду». «Да ведь это то же самое, что и 90 километров в час», — ответите вы. А если это то же самое, то к чему тогда все длинные разговоры о 25 *м/сек*? В действительности же падающий шар не может двигаться одинаковым образом даже 1 *сек*, так как он постоянно ускоряется, и, следовательно, нужно определить скорость как-то точнее.

Но теперь мы, кажется, находимся на правильном пути, который приводит нас вот к чему. Если бы машина продолжала двигаться таким же образом следующую тысячную долю часа, то она прошла бы тысячную долю 90 *км*. Другими словами, нет никакой необходимости ехать целый час с той же быстротой, достаточно какого-то *момента*. Это означает, что за какой-то момент времени машина проходит такое же расстояние, как и идущая с постоянной скоростью 90 *км/час*. Наши рассуждения о 25 *м/сек*, возможно, и правильны; мы отмечаем, сколько машина прошла в следующую секунду, и если получается расстояние 25 *м*, то это означает, что скорость достигает 90 *км/час*.

Другими словами, можно определить скорость следующим образом. Определяем расстояние, которое было пройдено за очень малый отрезок времени, и, разделив его на этот отрезок времени, получаем скорость. Однако этот отрезок должен быть как можно меньше, и чем меньше, тем лучше, потому что в этот период могут произойти снова изменения. Смешно, например, для падающего тела в качестве такого отрезка принять час. Принять в качестве отрезка секунду, может быть, удобно для автомобиля, так как за секунду его скорость изменяется не слишком сильно, но этот отрезок велик для падающего тела. Таким образом, чтобы вычислить скорость более точно, нужно брать все меньшие и меньшие интервалы времени. Если на миллионную долю секунды мы разделим расстояние, которое было пройдено в течение этого времени, то получим расстояние в секунду, т. е. как раз то, что мы понимаем под скоростью. Именно это нужно было сказать нашей нарушительнице, т. е. дать то определение скорости, которое мы и будем использовать.

Такое определение содержит некую новую идею, которая была недоступна грекам в ее общей форме.

Она заключается в том, чтобы *малые* расстояния разделить на соответствующие *малые* отрезки времени и посмотреть, что́ произойдет с частным, если отрезок времени брать все меньше и меньше (иными словами, брать предел отношения пройденного расстояния к интервалу времени при неограниченном уменьшении последнего). Впервые эта идея была высказана независимо Ньютоном и Лейбницем и явилась основой новой области математики — *дифференциального исчисления.* Оно возникло в связи с описанием движения, и первым его приложением был ответ на вопрос: «Что означает 90 *км/час*?»

Попытаемся теперь точнее определить скорость. Пусть за некоторое малое время ε машина или какое-то другое тело прошли малое расстояние x; тогда скорость v определяется как

$$v = \frac{x}{\varepsilon},$$

причем точность будет тем больше, чем меньше ε. Математики записывают это следующим образом:

$$v = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x}{\varepsilon}, \tag{8.3}$$

т. е. скорость есть предел отношения x/ε при ε, стремящемся к нулю. Для нашей машины-нарушительницы невозможно точно вычислить скорость, так как таблица неполная. Ее положение известно нам только через интервалы 1 *мин*. Приближенно, конечно, можно сказать, что в течение седьмой минуты, например, она шла со средней скоростью 90 *км/час*, однако о ее скорости в конце шестой минуты ничего сказать невозможно. Может быть, она ускорялась и скорость с 40 *км/час* в начале шестой минуты возросла до 90 *км/час* в конце ее, а может быть, она двигалась иначе. Мы не знаем этого точно, так как у нас нет детальной записи ее движения между шестой и седьмой минутами. Только когда таблица будет пополнена бесконечным числом данных, из нее можно будет действительно вычислить скорость. Если, однако, нам известна полная математическая формула, как, например, в случае падающего тела [уравнение (8.1)], то скорость подсчитать можно. Ведь по формуле можно найти положение тела в любой момент времени.

В качестве примера давайте найдем скорость падающего шара через 5 *сек* после начала падения. Один способ — это посмотреть по табл. 8.2, что происходило с шариком на пятой секунде. В течение этой секунды он прошел 45 *м*, так что, казалось бы, он падал со скоростью 45 *м/сек*. Однако это неверно, поскольку скорость его все время изменялась. Конечно, *в среднем* в течение этой секунды она составляла 45 *м/сек*, но в действительности шар ускорялся и в конце пятой секунды падал быстрее 45 *м/сек*. Наша задача состоит в том, чтобы определить *скорость точно*. Сделаем это следующим образом. Нам известно, где шарик находился через 5 *сек*. За 5 *сек* он прошел расстояние 125 *м*. К моменту 5,1 *сек* общее расстояние, которое прошел шарик, составит, согласно уравнению (8.1), 130,05 *м*. Таким образом, за дополнительную десятую долю секунды он проходит 5,05 *м*. А поскольку 5,05 *м* за 0,1 *сек* то же самое, что и 50,5 *м/сек*, то это и будет его скорость. Однако это все еще не совсем точно. Для нас совершенно неважно, будет ли это скорость в момент 5 *сек*, или в момент 5,1 *сек*, или где-то посредине. Наша задача вычислить скорость *точно через* 5 *сек*, а этого мы пока не сделали. Придется улучшить точность и взять теперь на тысячную долю больше 5 *сек*, т. е. момент 5,001 *сек*. Полное расстояние, пройденное за это время, составляет

$$s = 5 \cdot 5{,}001^2 = 5 \cdot 25{,}010001 = 125{,}050005\ \text{м}.$$

Следовательно, в последнюю тысячную долю секунды шарик проходил 0,050005 *м*, и если разделить это число на 0,001 *сек*, то получим скорость 50,005 *м/сек*. Это уже очень близко, но все же еще *не точно*. Однако теперь уже ясно, как поступить, чтобы найти скорость точно. Удобнее решать эту задачу в несколько более общем виде. Пусть требуется найти скорость в некоторый момент времени t_0 (например, 5 *сек*). Расстояние, которое пройдено к моменту t_0 (назовем его s_0), будет $5t_0^2$ (в нашем случае 125 *м*). Чтобы определить расстояние, мы задавали вопрос: где окажется тело спустя время t^0 + (небольшой добавок), или $t_0+\varepsilon$? Новое положение тела будет $5(t_0+\varepsilon)^2 = 5t_0^2 + 10t_0\varepsilon + 5\varepsilon^2$. (Это расстояние больше того расстояния, которое шарик прошел за t_0 *сек*, т. е. больше $5t_0^2$.) Назовем это расстояние s_0+ (небольшой добавок), или s_0+x. Если теперь вычесть из него расстояние, пройденное к моменту t_0, то получим x — дополнительное расстояние, которое шарик прошел за добавочное время ε, т. е. $x = 10t_0\varepsilon + 5\varepsilon^2$. Так что в первом приближении скорость будет равна

$$v = \frac{x}{\varepsilon} = 10t_0 + 5\varepsilon. \tag{8.4}$$

Теперь мы уже знаем, что нужно делать, чтобы получить скорость точно в момент t_0: нужно брать отрезок ε все меньше и меньше, т. е. устремлять его к нулю. Таким путем из уравнения (8.4) получим

$$v\,(\text{в момент } t_0) = 10t_0.$$

В нашей задаче $t_0 = 5$ *сек*, следовательно, скорость равна $v = 10 \cdot 5 = 50$ *м/сек*. Это и есть нужный ответ. Раньше, когда ε бралось равным 0,1 и 0,001 *сек*, получалась несколько бо́льшая величина, чем 50 *м/сек*, но теперь мы видим, что на самом деле она в точности равна 50 *м/сек*.

§ 3. Скорость как производная

Процедура, которую мы только что выполнили, настолько часто встречается в математике, что для величин ε и x было придумано специальное обозначение: ε обозначается как Δt, а x — как Δs. Величина Δt означает «небольшой добавок к t», причем подразумевается, что этот добавок можно делать меньше. Значок Δ ни в коем случае не означает умножение на какую-то величину, точно так же как $\sin\theta$ не означает $s \cdot i \cdot n \cdot \theta$. Это просто некоторый добавок ко времени, причем значок Δ напоминает нам о его особом характере. Ну, а если Δ не множитель, то его нельзя сократить в отношении $\Delta s/\Delta t$. Это все равно, что в выражении $\sin\theta/\sin 2\theta$ сократить все буквы и получить $^1/_2$. В этих новых обозначениях скорость равна пределу отношения $\Delta s/\Delta t$ при Δt, стремящемся к нулю, т. е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{8.5}$$

Это по существу формула (8.3), но теперь яснее видно, что здесь все изменяется, а, кроме того, она напоминает, какие именно величины изменяются.

Существует еще один закон, который выполняется с хорошей точностью. Он гласит: изменение расстояния равно скорости, умноженной на интервал времени, за которое это изменение произошло, т. е. $\Delta s = v\Delta t$. Это правило строго справедливо только тогда, когда скорость не изменяется в течение интервала Δt, а это, вообще говоря, происходит, только когда Δt достаточно мало. В таких случаях обычно пишут $ds = v\,dt$, где под dt подразумевают интервал времени Δt при условии, что он сколь угодно мал. Если интервал Δt достаточно велик, то скорость за это время может измениться и выражение $\Delta s = v\Delta t$ будет уже приближенным. Однако если мы пишем dt, то при этом подразумевается, что интервал времени неограниченно мал и в этом смысле выражение $ds = vdt$ точное. В новых обозначениях выражение (8.5) имеет вид

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Величина ds/dt называется «производной s по t» (такое название напоминает о том, что́ изменяется), а сложный процесс нахождения производной называется, кроме того, дифференцированием. Если же ds и dt появляются отдельно, а не в виде отношения ds/dt, то они носят названия *дифференциалов*. Чтобы получше познакомить вас с новой терминологией, скажу еще, что в предыдущем параграфе мы нашли производную от функции $5t^2$, или просто производную от $5t^2$. Она оказалась равной $10t$. Когда вы больше привыкнете к новым словам, вам станет более понятна сама мысль. Для тренировки давайте найдем производную более сложной функции. Рассмотрим выражение $s = At^3 + Bt + C$, которое может описывать движение точки. Буквы A, B, C, так же как и в обычном квадратном уравнении, обозначают постоянные числа. Нам нужно найти скорость движения, описываемого этой формулой в любой момент времени t. Рассмотрим для этого момент $t + \Delta t$, причем к s прибавится некоторая добавка Δs, и найдем, как выражается Δs через Δt. Поскольку

$$s + \Delta s = A(t + \Delta t)^3 + B(t + \Delta t) + C =$$
$$= At^3 + Bt + C + 3At^2\Delta t + B\Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3,$$

а

$$s = At^3 + Bt + C,$$

то

$$\Delta s = 3At^2\Delta t + B\Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3.$$

Но нам нужна не сама величина Δs, а отношение $\Delta s/\Delta t$. После деления на Δt получим выражение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3At^2 + B + 3At(\Delta t) + A(\Delta t)^3,$$

которое после устремления Δt к нулю превратится в

$$\frac{ds}{dt} = 3At^2 + B.$$

В этом состоит процесс взятия производной, или дифференцирования функций. На самом деле он несколько легче, чем это кажется на первый взгляд. Заметьте, что если в разложениях, подобных предыдущим, встречаются члены, пропорциональные $(\Delta t)^2$ или $(\Delta t)^3$ или еще более высоким степеням, то их можно сразу вычеркнуть, поскольку они все равно обратятся в нуль, когда в конце мы будем Δt устремлять к нулю. После небольшой тренировки вы сразу будете видеть, что нужно оставлять, а что сразу отбрасывать. Существует много правил и формул для дифференцирования различных видов функций. Их можно либо запомнить, либо пользоваться специальными таблицами. Небольшой список таких правил приводится в табл. 8.3.

Таблица 8.3 ● НЕКОТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

s, u, v, w — произвольные функции;
a, b, c, n — произвольные постоянные.

Функция	Производная
$s=t^n$	$\dfrac{ds}{dt}=nt^{n-1}$
$s=cu$	$\dfrac{ds}{dt}=c\,\dfrac{du}{dt}$
$s=u+v+w+\cdots$	$\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{du}{dt}+\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{dw}{dt}+\cdots$
$s=c$	$\dfrac{ds}{dt}=0$
$s=u^a v^b w^c\ldots$	$\dfrac{ds}{dt}=s\left(\dfrac{a}{u}\,\dfrac{du}{dt}+\dfrac{b}{v}\,\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{c}{w}\,\dfrac{dw}{dt}+\cdots\right)$

§ 4. *Расстояние как интеграл*

Обсудим теперь обратную проблему. Пусть вместо таблицы расстояний нам дана таблица скоростей в различные моменты времени, начиная с нуля. В табл. 8.4 представлена зависимость скорости падающего шара от времени. Аналогичную таблицу можно составить и для машины, если

Таблица 8.4 ● СКОРОСТЬ ПАДАЮЩЕГО ШАРА

t, сек	*v, м/сек*
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40

записывать показания спидометра через каждую минуту или полминуты. Но можно ли, зная скорость машины в любой момент времени, вычислить расстояние, которое ею было пройдено? Эта задача обратна той, которую мы только что рассмотрели. Как же решить ее, если скорость машины непостоянна, если она то ускоряется до 90 *км/час*, то замедляется, затем где-то останавливается у светофора и т. д.? Сделать это нетрудно. Нужно использовать ту же идею и выражать полное расстояние через бесконечно малые его части. Пусть в первую секунду скорость будет v_1, тогда по формуле $\Delta s = v_1 \Delta t$ можно вычислить расстояние, пройденное за эту секунду. В следующую секунду скорость будет несколько другой, хотя, может быть, и близкой к первоначальной, а расстояние, пройденное машиной за вторую секунду, будет равно новой скорости, умноженной на интервал времени (1 *сек*). Этот процесс можно продолжить дальше, до самого конца пути. В результате мы получим много маленьких отрезков, которые в сумме дадут весь путь. Таким образом, путь является суммой скоростей, умноженных на отдельные интервалы времени, или $s = \sum v \Delta t$, где греческая буква $\sum$ (сигма) означает суммирование. Точнее, это будет сумма скоростей в некоторые моменты времени, скажем t_i, умноженные на Δt:

$$s = \sum_i v(t_i)\,\Delta t, \tag{8.6}$$

причем каждый последующий момент t_{i+1} находится по правилу $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Но расстояние, полученное этим методом, не будет точным, поскольку скорость за время Δt все же изменяется. Выход из этого положения заключается в том, чтобы брать все меньшие и меньшие интервалы Δt, т. е. разбивать время движения на все большее число все меньших отрезков. В конце концов мы придем к следующему, теперь уже точному выражению для пройденного пути:

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v(t_i)\,\Delta t. \tag{8.7}$$

Математики придумали для этого предела, как и для дифференциала, специальный символ. Значок Δ превращается в d, напоминая о том, что интервал времени сколь угодно мал, а знак суммирования превращается в $\int$ — искаженное большое S, первая буква латинского слова «Summa». Этот значок назван интегралом. Таким образом, мы пишем

$$s = \int v(t)\,dt, \tag{8.8}$$

где $v(t)$ — скорость в момент t. Сама же операция суммирования этих членов называется интегрированием. Она противоположна операции дифференцирования в том смысле, что производная этого интеграла равна $v(t)$, так что один оператор (d/dt) «уничтожает» другой $\left(\int\right)$. Это дает возможность получать формулы для интегралов путем обращения формул для дифференциалов: интеграл от функции, стоящей в правой колонке табл. 8.3, будет равен функции, стоящей в левой колонке. Дифференцируя все виды функций, вы сами можете составить таблицу интегралов.

Любая функция, заданная в аналитическом виде, т. е. выражающаяся через комбинацию известных нам функций, дифференцируется очень просто — вся операция выполняется чисто алгебраически, и в результате мы всегда получаем какую-то известную функцию. Однако интеграл не от всякой функции можно записать в аналитическом виде. Разумеется, для каждого частного интеграла всегда сначала пытаются найти такую функцию, которая, будучи продифференцирована, давала бы функцию, стоящую после знака интеграла (она называется подынтегральной). Однако это не всегда удается сделать. В таких случаях интеграл вычисляют просто суммированием, т. е. вычисляют суммы типа (8.6) со все меньшими и меньшими интервалами, пока не получат результат с достаточной точностью.

§ 5. Ускорение

Следующий шаг на пути к уравнениям движения — это введение величины, которая связана с *изменением* скорости движения. Естественно спросить: а как изменяется скорость движения? В предыдущих главах мы рассматривали случай, когда действующая сила приводила к изменению скорости. Бывают легковые машины, которые набирают с места за 10 *сек* скорость 90 *км/час.* Зная это, мы можем определить, как изменяется скорость, но только в среднем. Займемся следующим более сложным вопросом: как узнать быстроту изменения скорости. Другими словами, на сколько метров в секунду изменяется скорость за 1 *сек.* Мы уже установили, что скорость падающего тела изменяется со временем по формуле $v = 9{,}8t$ (см. табл. 8.4), а теперь хотим выяснить, насколько она изменяется за 1 *сек.* Эта величина называется ускорением.

Таким образом, ускорение определяется как быстрота изменения скорости. Всем сказанным ранее мы уже достаточно подготовлены к тому, чтобы сразу записать ускорение в виде производной от скорости, точно так же как скорость записывается в виде производной от расстояния. Если теперь продифференцировать формулу $v = 9{,}8t$, то получим ускорение падающего тела

$$a = \frac{dv}{dt} = 9{,}8. \tag{8.9}$$

(При дифференцировании этого выражения использовался результат, полученный нами раньше. Мы видели, что производная от Bt равна просто B (постоянной). Если же выбрать эту постоянную равной 9,8, то сразу находим, что производная от 9,8 t равна 9,8.) Это означает, что скорость падающего тела постоянно возрастает на 9,8 *м/сек* за каждую секунду. Этот же результат можно получить и из табл. 8.4. Как видите, в случае падающего тела все получается довольно просто, но ускорение, вообще говоря, непостоянно. Оно получилось постоянным только потому, что постоянна сила, действующая на падающее тело, а по закону Ньютона ускорение должно быть пропорционально силе.

В качестве следующего примера найдем ускорение в той задаче, с которой мы уже имели дело при изучении скорости:

$$s = At^3 + Bt + C.$$

Для скорости $v = ds/dt$ мы получили формулу

$$v = 3At^2 + B.$$

Так как ускорение — это производная скорости по времени, то для того, чтобы найти его значение, нужно продифференцировать эту формулу. Вспомним теперь одно из правил табл. 8.3, а именно что производная суммы равна сумме производных. Чтобы продифференцировать первый из этих членов, мы не будем проделывать всю длинную процедуру, которую делали раньше, а просто напомним, что такой квадратичный член встречался нам при дифференцировании функции $5t^2$, причем в результате коэффициент удваивался, а t^2 превращалось в t. Вы можете сами убедиться в том, что то же самое произойдет и сейчас. Таким образом, производная от $3At^2$ будет равна $6At$. Перейдем теперь к дифференцированию второго слагаемого. По одному из правил табл. 8.3 производная от постоянной будет нулем, следовательно, этот член не даст в ускорение никакого вклада. Окончательный результат: $a = dv/dt = 6At$.

Выведем еще две полезные формулы, которые получаются интегрированием. Если тело из состояния покоя движется с постоянным ускорением g, то его скорость v в любой момент времени t будет равна

$$v = gt,$$

а расстояние, пройденное им к этому моменту времени,

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Заметим еще, что поскольку скорость — это ds/dt, а ускорение — производная скорости по времени, то можно написать

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{8.10}$$

Так что теперь мы знаем, как записывается вторая производная.

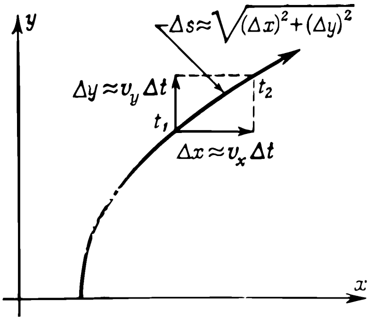
Существует, конечно, и обратная связь между ускорением и расстоянием, которая просто следует из того, что $a = dv/dt$. Поскольку расстояние является интегралом от скорости, то оно может быть найдено двойным интегрированием ускорения.

Все предыдущее рассмотрение было посвящено движению в одном измерении, а теперь мы коротко остановимся на движении в пространстве трех измерений. Рассмотрим движение частицы P в трехмерном пространстве. Эта глава началась с обсуждения одномерного движения легковой машины, а именно с вопроса, на каком расстоянии от начала движения находится машина в различные моменты времени. Затем мы обсуждали связь между скоростью и изменением расстояния со временем и связь между ускорением и изменением скорости. Давайте в той же последовательности разберем движение в трех измерениях. Проще, однако, начать с более наглядного двумерного случая, а уже потом обобщить его на случай трех измерений. Нарисуем две пересекающиеся под прямым углом линии (оси координат) и будем задавать положение частицы в любой момент времени расстояниями от нее до каждой из осей. Таким образом, положение частицы задается двумя числами (координатами) x и y, каждое из которых является соответственно расстоянием до оси y и до оси x (фиг. 8.3). Теперь мы можем описать движение, составляя, например, таблицу, в которой эти две координаты заданы как функции времени. (Обобщение на трехмерный случай требует введения еще одной оси, перпендикулярной двум первым, и измерения еще одной координаты z. Однако теперь расстояния берутся не до осей, а до координатных *плоскостей*.) Как определить скорость частицы? Для этого мы сначала найдем составляющие скорости по каждому направлению, или ее компоненты. Горизонтальная составляющая скорости, или x-компонента, будет равна производной по времени от координаты x, т. е.

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \tag{8.11}$$

а вертикальная составляющая, или y-компонента, равна

$$v_y = \frac{dy}{dt}. \tag{8.12}$$



Фиг. 8.3. Описание движения тела на плоскости и вычисление его скорости.

В случае трех измерений необходимо еще добавить

$$v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{8.13}$$

Как, зная компоненты скорости, определить полную скорость в направлении движения? Рассмотрим в двумерном случае два последовательных положения частицы, разделенных коротким интервалом времени $\Delta t = t_2 - t_1$ и расстоянием Δs. Из фиг. 8.3 видно, что

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{8.14}$$

(Значок $\approx$ соответствует выражению «приблизительно равно».) Средняя скорость в течение интервала Δt получается простым делением: $\Delta s/\Delta t$. Чтобы найти точную скорость в момент t, нужно, как это уже делалось в начале главы, устремить Δt к нулю. В результате оказывается, что

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{8.15}$$

В трехмерном случае точно таким же способом можно получить

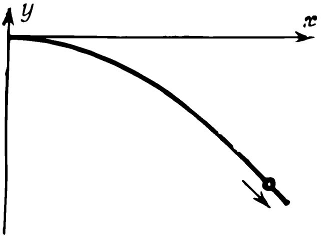
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{8.16}$$

Ускорения мы определяем таким же образом, как и скорости: x-компонента ускорения a_x определяется как производная от x-компоненты скорости v_x (т. е. $a_x = d^2x/dt^2$ — вторая производная по времени) и т. д.

Давайте рассмотрим еще один интересный пример смешанного движения на плоскости. Пусть шарик движется в горизонтальном направлении с постоянной скоростью u и в то же время падает вертикально вниз с постоянным ускорением g. Что это за движение? Так как $v_x = dx/dt = u$ и, следовательно, скорость v_x постоянна, то

$$x = ut, \tag{8.17}$$

Фиг. 8.4. *Парабола, которую описывает падающее тело, брошенное с горизонтальной начальной скоростью.*



а поскольку ускорение движения вниз постоянно и равно $-g$, то координата y падающего шара дается формулой

$$y = -\frac{1}{2} g t^2. \tag{8.18}$$

Какую же кривую описывает наш шарик, т. е. какая связь между координатами x и y? Из уравнения (8.18), согласно (8.17), можно исключить время, поскольку $t = x/u$, после чего находим

$$y = -\frac{g}{2u^2} x^2. \tag{8.19}$$

Эту связь между координатами x и y можно рассматривать как уравнение траектории движения шарика. Если изобразить ее графически, то получим кривую, которая называется параболой (фиг. 8.4). Так что любое свободно падающее тело, будучи брошенным в некотором направлении, движется по параболе.

Глава 9

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

§ 1. *Импульс и сила*

Открытие законов динамики или законов движения стало одним из наиболее драматических моментов в истории науки. До Ньютона движение различных тел, например планет, представлялось загадкой для ученых, но после открытия Ньютона все вдруг сразу стало понятно. Смогли быть вычислены даже очень слабые отклонения от законов Кеплера, обусловленные влиянием других планет. Движение маятника, колебания груза, подвешенного на пружине, и другие непонятные до того явления раскрыли свои загадки благодаря законам Ньютона. То же самое можно сказать и об этой главе. До нее вы не могли рассчитать, как движется грузик, прикрепленный к пружине, не говоря уже о том, чтобы определить влияние Юпитера и Сатурна на движение Урана. Но после этой главы вам будет доступно и то и другое!

Первый большой шаг в понимании движения был сделан Галилеем, когда он открыл свой *принцип инерции*: тело, предоставленное самому себе, если на него не действует никакая сила, сохраняет свое прямолинейное движение с постоянной скоростью, как двигалось до этого, или остается в покое, если оно до этого покоилось. Конечно, в природе такого не бывает. Попробуйте толкнуть кубик, стоящий на столе. Он остановится. Причина в том, что кубик *трется* о стол, он *не* предоставлен самому себе. Нужно иметь очень богатое воображение, чтобы увидеть за этим принцип инерции.

Естественно нужно еще разрешить следующий вопрос: а как *изменяется* скорость тела, если на него что-то *действует*? Ответ был дан

Ньютоном. Он сформулировал три закона. *Первый* закон представляет собой просто повторение принципа инерции Галилея. *Второй* закон говорит о том, как изменяется скорость тела, когда оно испытывает различные влияния, т. е. когда на него действуют *силы*. *Третий* закон в каком-то смысле описывает силы, но о нем мы поговорим несколько позже. Здесь будет идти речь о Втором законе, согласно которому под действием силы движение тел изменяется следующим образом: *скорость изменения со временем некой величины, называемой количеством движения*, или *импульсом*, *пропорциональна силе*. Позднее мы запишем короткую математическую формулировку этого закона, а сейчас давайте разберемся в его содержании.

Импульс и *скорость* — вещи разные. В физике употребляется много слов, и каждое из них в отличие от обычного разговорного языка имеет точный смысл. Примером может служить слово «импульс», и мы должны определить его точно. Толкните слегка рукой какой-нибудь легкий предмет — он тотчас начнет двигаться. Если с такой же силой толкнуть гораздо более тяжелый предмет, то он будет двигаться значительно медленней. В сущности нужно говорить не о «легком» или «тяжелом» предмете, а о *менее массивном* или *более массивном*, так как между *весом* и *инерцией* предмета есть разница, которую нужно понимать. (Сколько весит тело — это одно, а насколько трудно разогнать его — совсем другое.) Однако на поверхности Земли вес и инерция *пропорциональны* друг другу и зачастую рассматриваются как численно разные. Это часто приводит к непониманию разницы между ними. На Марсе, например, вес предметов будет отличаться от веса на Земле, но инертность останется той же самой, т. е. потребуется то же количество силы, чтобы преодолеть инерцию тела.

Количественной мерой инертности является *масса*. Ее можно измерять так: просто привязать предмет на веревочке, крутить его с определенной скоростью и измерять ту силу, которая необходима, чтобы удержать его. Этим способом можно измерять массу любых предметов. *Импульс* — это просто произведение *массы* тела на его *скорость*. Теперь можно записать Второй закон Ньютона в математической форме:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \tag{9.1}$$

Давайте разберем подробнее некоторые его стороны. При написании закона, подобного этому, обычно используется много интуитивных идей; что-то подразумевается, что-то предполагается и комбинируется в приближенный «закон». Но после этого необходимо снова вернуться назад и подробно изучить, что означает каждый член. Если же пытаться сделать это с самого начала, то можно безнадежно запутаться. Так что мы считаем некоторые положения само собой разумеющимися и не требующими никакого доказательства. Во-первых, мы считаем, что массы тел *постоянны*. Это, вообще говоря, неправильно, но мы начнем с ньютоновского приближения, когда масса считается постоянной и не изменяющейся с течением времени. Во-вторых, если сложить вместе два предмета, то масса образовавшегося тела равна *сумме* их масс. Это положение неявно предполагалось Ньютоном, когда он писал свои уравнения, в противном случае они были бы бессмысленны. Пусть, например, масса изменяется обратно пропорционально скорости, но тогда импульс *никогда бы не изменялся* и закон потерял бы всякое содержание, за исключением только того, что вы знаете, как изменяется масса со скоростью. Так что сначала мы считаем *массу неизменной*.

Несколько слов о силе. В качестве первого грубого приближения мы рассматривали силу как некий толчок или тягу, которая может быть произведена с помощью наших мышц, но теперь, пользуясь уравнением движения, мы можем определить ее более точно. Очень важно помнить, что закон Ньютона включает не только изменение *величины* импульса, но и изменение его *направления*. Итак, если масса постоянна, то уравнение (9.1) можно записать в виде

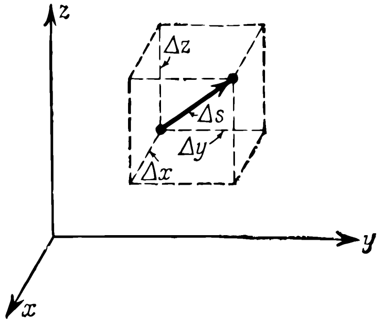
$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}, \tag{9.2}$$

где $\mathbf{a}$ — ускорение, т. е. «скорость изменения скорости». Второй закон Ньютона означает не только то, что изменения, вызванные данной силой, обратно пропорциональны массе, но и то, что *направление* изменения скорости совпадает с *направлением* действия силы. Важно понимать, что термин «ускорение» имеет в физике более широкий смысл, чем в обычной разговорной речи. Он означает не только увеличение скорости, но и замедление (в этом случае мы говорим, что ускорение отрицательно), и перемену направления движения. В гл. 7 мы уже познакомились с ускорением, направленным под прямым углом к скорости, и мы видели, что предмет, движущийся по окружности радиусом R со скоростью v, за малый интервал времени t уклоняется от своего прямого пути на расстояние $^1/_2(v^2/R)t^2$. Так что в этом случае ускорение направлено под прямым углом к направлению движения и равно

$$a = \frac{v^2}{R}. \tag{9.3}$$

Таким образом, сила, действующая под прямым углом к скорости, вызывает искривление пути, причем радиус кривизны

Ф и г. 9.1. Малое перемещение тела.



можно найти, деля силу на массу тела (при этом мы получаем ускорение) и используя затем формулу (9.3).

Термин «скорость» тоже имеет в физике более широкий смысл, чем в обыденной жизни. Это не просто некоторое количество метров в секунду, т. е. абсолютная величина скорости, но и *направление* перемещения в каждый момент времени. Математически мы можем описать и величину, и направление скорости, если будем задавать изменение координат тела с течением времени. Пусть, например, в некоторый момент тело движется так, как это показано на фиг. 9.1. Тогда за малый промежуток времени Δt оно пройдет некоторое расстояние Δx в направлении оси x, Δy в направлении оси y и Δz в направлении оси z. Результатом же этих изменений координат будет перемещение Δs вдоль диагонали параллелепипеда со сторонами Δx, Δy, Δz, которые следующим образом связаны с составляющими скорости и интервалом:

$$\Delta x = v_x \Delta t, \quad \Delta y = v_y \Delta t, \quad \Delta z = v_z \Delta t. \tag{9.4}$$

§ 2. Компоненты скорости, ускорения и силы

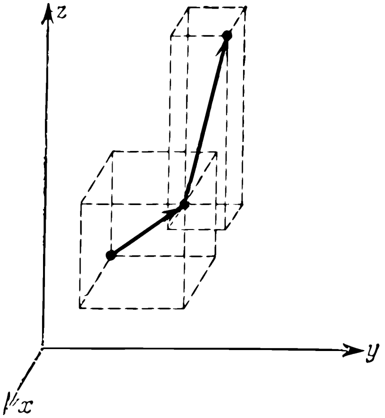
В уравнении (9.4) мы *разложили скорость на составляющие* (или *компоненты*), которые говорят нам, насколько быстро продвигается тело в направлениях x, y и z. Скорость будет полностью определена как в отношении ее направления, так и абсолютной величины, если задать числовые значения трех ее компонент:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{9.5}$$

При этом абсолютная величина равна

$$\frac{ds}{dt} = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{9.6}$$

Теперь пусть под действием силы меняется не только величина, но и направление скорости (фиг. 9.2). Хотя это



Фиг. 9.2. Скорость изменяется как по величине, так и по направлению.

довольно сложный случай, но с помощью подсчета изменения компонент его рассмотрение сильно упрощается. Изменение x-компоненты скорости за интервал Δt будет $\Delta v_x = a_x \Delta t$, где a_x то, что называется x-компонентой ускорения. Совершенно аналогично $\Delta v_y = a_y \Delta t$ и $\Delta v_z = a_z \Delta t$. В такой формулировке Второй закон Ньютона фактически превращается в три закона. Действительно, мы говорим, что сила имеет то же направление, что и ускорение, так что каждая из составляющих силы в направлениях x, y и z равна массе, умноженной на изменение соответствующей компоненты скорости:

$$
\begin{aligned}
F_x &= m\left(\frac{dv_x}{dt}\right) = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = ma_x, \\
F_y &= m\left(\frac{dv_y}{dt}\right) = m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = ma_y, \\
F_z &= m\left(\frac{dv_z}{dt}\right) = m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = ma_z.
\end{aligned}
\tag{9.7}
$$

Подобно скорости и ускорению, сила тоже может быть разложена на компоненты, причем каждая из них является проекцией отрезка прямой, численно равного абсолютной величине силы и указывающего направление ее действия, на оси x, y и z:

$$
\begin{aligned}
F_x &= F\cos(\widehat{xF}), \\
F_y &= F\cos(\widehat{yF}), \\
F_z &= F\cos(\widehat{zF}),
\end{aligned}
\tag{9.8}
$$

где F — абсолютная величина силы, а $(\widehat{xF})$, $(\widehat{yF})$ и $(\widehat{zF})$ — углы между направлением силы и осями x, y и z соответственно.

Уравнения (9.7) представляют собой полную форму Второго закона Ньютона. Зная силы, действующие на тело, и разлагая их на компоненты, можно с помощью этих уравнений найти движение тела. Давайте рассмотрим простой пример. Пусть в направлениях x и y не действуют никакие силы, а есть сила только в направлении z (скажем, вертикально). Тогда, согласно уравнению (9.7), изменяется только одна вертикальная составляющая скорости; что же касается горизонтальных, то они будут оставаться неизменными. Пример такого движения уже рассматривался в гл. 7 (см. фиг. 7.3). Таким образом, горизонтальное движение падающего тела остается неизменным, тогда как в вертикальном направлении оно движется так, как будто никакого горизонтального движения вообще нет. Другими словами, если компоненты *сил* не связаны друг с другом, то и движения в направлениях осей x, y и z будут независимы.

§ 3. Что такое сила?

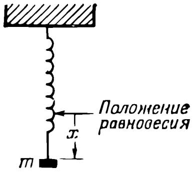
Чтобы пользоваться законами Ньютона, мы должны иметь какую-то формулу для сил; ведь эти законы говорят нам: *подумайте о силах*. Если тело ускоряется, стало быть, на него что-то действует. А как найти это «что-то»? Нашей программой на будущее должно быть *отыскание законов для сил*. Некоторые из таких законов были найдены самим Ньютоном. Например, формула для силы тяготения. Часть сведений о силах другого рода содержится в Третьем законе, который утверждает равенство сил действия и противодействия, но об этом более подробно пойдет речь в следующей главе.

Продолжим наш предыдущий пример. Что за силы действуют на тело вблизи поверхности Земли? Это — сила тяжести, направленная вертикально вниз, пропорциональная массе тела и для высот, много меньших, чем радиус Земли R, почти не зависящая от высоты; она равна $F = GmM/R^2 = mg$, где $g = GM/R^2$ — так называемое *ускорение силы тяжести*. В горизонтальном направлении тело по-прежнему будет двигаться с постоянной скоростью, однако движение в вертикальном направлении более интересно. По Второму закону Ньютона

$$mg = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right). \tag{9.9}$$

После сокращения массы m получаем, что ускорение в направлении x постоянно и равно g. Это хорошо известное движение свободно падающего тела, которое описывается уравнениями

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 + gt, \\ x &= x_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \tag{9.10}$$



Фиг. 9.3. Грузик на пружинке.

Рассмотрим другой пример. Представим, что мы смогли создать устройство (фиг. 9.3), в котором сила прямо пропорциональна отклонению от положения равновесия и направлена противоположно ему,—это пружина с грузиком. Действительно, поскольку сила тяжести компенсируется начальным натяжением пружины, то имеет смысл говорить только об *избыточной* силе. Если потянуть грузик вниз, то пружина растянется и потянет его вверх, если же толкать грузик вверх, то пружина сожмется и будет толкать его вниз. При этом все устроено таким образом, что чем больше сила и чем сильнее мы оттягиваем грузик вниз, тем больше растягивается пружина и тем сильнее она тянет его вверх, и наоборот. Наблюдая за работой этого устройства, мы видим довольно интересное движение: вверх — вниз, вверх — вниз... Возникает вопрос, могут ли уравнения Ньютона правильно описать его? Если применить закон Ньютона (9.7) для такого периодического осциллятора, то получим следующее уравнение:

$$-kx = m\left(\frac{dv_x}{dt}\right), \tag{9.11}$$

т. е. здесь мы встречаемся с таким положением, когда x-компонента скорости изменяется с быстротой, пропорциональной x. Нет смысла сейчас вводить многочисленные константы; в целях простоты предположим, что либо изменился масштаб времени, либо что-то произошло с другими единицами измерения, словом, они выбраны так, что k/m равно единице. Итак, будем пытаться решать уравнение

$$\frac{dv_x}{dt} = -x. \tag{9.12}$$

Чтобы пойти дальше, нужно сначала разобраться в том, что такое v_x; то, что это быстрота изменения положения, нам, разумеется, уже известно.

§ 4. *Смысл динамических уравнений*

Попытаемся теперь понять, что же означает уравнение (9.12). Пусть в данный момент времени t тело находится в точке x и движется со скоростью v_x. Каковы будут его положение и скорость спустя небольшой промежуток времени, т. е.

в момент $t+\varepsilon$? Если мы сможем ответить на этот вопрос, то проблема решена, так как, исходя из начальных условий, т. е. положения и скорости в некоторый начальный момент времени, можно сказать, как они изменяются в первый момент, а зная положение и скорость в первый момент, можно найти их и в следующий и т. д. Таким образом, шаг за шагом выстраивается вся картина движения. Для большей определенности предположим, что в момент $t=0$ положение грузика $x=1$, а его скорость $v_x=0$. Почему вообще движется грузик? Да потому, что на него в любом положении, за исключением положения равновесия $x=0$, действует *сила*. Если $x>0$, то эта сила направлена вверх. Следовательно, скорость, которая вначале была нулем, благодаря уравнениям движения начинает изменяться. Но как только скорость начинает возрастать, грузик приходит в движение. Для любого момента времени t при очень малом ε можно с достаточно хорошей точностью найти положение в момент $t+\varepsilon$ через скорость и положение в момент t:

$$x(t+\varepsilon)=x(t)+\varepsilon v_x(t). \tag{9.13}$$

Конечно, это выражение тем точнее, чем меньше ε, но оно может быть достаточно точным, даже когда интервал ε не исчезающе мал. Что теперь можно сказать о скорости? Чтобы определить скорость в момент $t+\varepsilon$, очевидно, нужно знать, как она изменяется со временем, т. е. нужно знать *ускорение*. А как узнать его? Вот здесь-то нам на помощь приходят уравнения динамики. Именно они позволяют определить, чему равно ускорение. В нашей задаче уравнение динамики говорит, что ускорение равно $-x$. Поэтому

$$v_x(t+\varepsilon)=v_x(t)+\varepsilon a_x(t), \tag{9.14}$$

$$=v_x(t)-\varepsilon x(t). \tag{9.15}$$

Уравнение (9.14) еще кинематическое; оно просто говорит о том, что из-за наличия ускорения скорость изменяется. Однако уравнение (9.15) уже *динамическое*, потому что оно связывает ускорение с силой. Оно говорит, что в данной частной задаче для данного момента времени ускорение можно заменить на $-x(t)$. Следовательно, если в какой-то момент времени нам известны положение x и скорость v_x, то мы знаем и ускорение, которое дает возможность найти скорость в следующий момент, а скорость в свою очередь определяет новое положение и т. д. Вот каким образом действует весь этот динамический механизм! Действующая сила немного изменяет скорость, а скорость приводит к небольшому изменению положения.

§ 5. Численное решение уравнений

Давайте теперь действительно решим нашу задачу. Допустим, что мы взяли $\varepsilon = 0{,}100$ *сек*. (Если после того, как мы проделаем все вычисления, окажется, что этот интервал не достаточно мал, то необходимо повторить все сначала с меньшим интервалом времени, например 0,010 *сек*.) Чему будет равно $x(0,1)$, если в начальный момент времени $x(0) = 1$? Оно равно старому положению $x(0)$ плюс скорость в начальный момент (которая равна нулю), умноженная на 0,10 *сек*. Таким образом, $x(0{,}1)$ равно 1,00, ибо грузик еще не начал двигаться. Но новая скорость в момент 0,10 *сек* будет равна старой скорости $v(0) = 0$ плюс ε, умноженное на ускорение. А само ускорение равно $-x(0) = -1{,}00$. Так что

$$v(0{,}1) = 0{,}00 + 0{,}10 \cdot 1{,}00 = -0{,}10.$$

В момент 0,20 *сек*

$$x(0{,}2) = x(0{,}1) + \varepsilon v(0{,}1) = 1{,}00 - 0{,}10 \cdot 0{,}10 = 0{,}99$$

и

$$v(0{,}2) = v(0{,}1) + \varepsilon a(0{,}1) = -0{,}10 - 0{,}10 \cdot 1{,}00 = -0{,}20.$$

Продолжая эту процедуру еще и еще, можно найти положение и скорость в любой момент времени, а это как раз то, что нам нужно. Однако практически мы используем нехитрый прием, который позволит увеличить точность вычислений. Если бы мы продолжали начатые нами расчеты, то они оказались бы довольно грубыми, поскольку интервал $\varepsilon = 0{,}10$ *сек* довольно большой. Пришлось бы уменьшить его, скажем, до 0,01 *сек*. Но тогда, чтобы проследить движение за какой-то разумный отрезок времени, потребовалось бы сделать множество шагов. Мы же организуем процесс таким образом, что сможем увеличить точность, используя тот же интервал $\varepsilon = 0{,}10$ *сек*. Этого можно достичь, несколько изменив метод расчета.

Заметьте, что новое положение тела равно старому плюс интервал времени ε, умноженный на скорость. Но что это за скорость? *В какой момент*? В начале интервала одна скорость, а в конце она совсем другая. Прием состоит в том, чтобы брать скорость в *середине интервала*. Если известна скорость в настоящий момент и известно, что она меняется, как же можно надеяться получить удовлетворительный результат, считая, что тело все время движется с той же скоростью, что и в настоящий момент? Более разумно использовать какую-то среднюю скорость между началом и концом интервала. Те же рассуждения применимы к изменению самой скорости: для подсчета ее изменений нужно использовать ускорение в средней точке между двумя моментами времени, в которых необходимо найти скорость. Таким образом, реально мы будем пользоваться следующими уравнениями: положение в конце интервала равно положению в начале плюс интервал ε, умноженный на скорость в *середине интервала*. Эта скорость в свою очередь равна скорости в середине предыдущего интервала (т. е. на отрезок ε меньше) плюс ускорение в начале интервала, умноженное на ε.

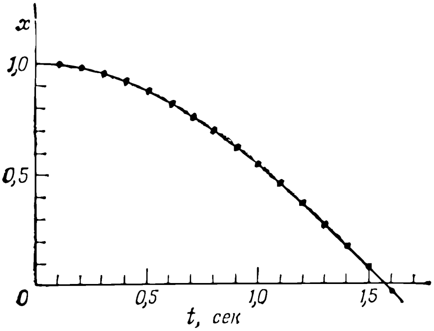
Таблица 9.1 ● РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $(dv_x/dt) = -x$
Интервал $\varepsilon = 0.10$ *сек*

t	x	v_x	a_x
0,0	1,000	0,000	−1,000
		−0,050	
0,1	0,995		−0,995
		−0,150	
0,2	0,980		−0,980
		−0,248	
0,3	0,955		−0,955
		−0,343	
0,4	0,921		−0,921
		−0,435	
0,5	0,877		−0,877
		−0,523	
0,6	0,825		−0,825
		−0,605	
0,7	0,765		−0,765
		−0,682	
0,8	0,696		−0,696
		−0,752	
0,9	0,621		−0,621
		−0,814	
1,0	0,540		−0,540
		−0,868	
1,1	0,453		−0,453
		−0,913	
1,2	0,362		−0,362
		−0,949	
1,3	0,267		−0,267
		−0,976	
1,4	0,169		−0,169
		−0,993	
1,5	0,069		−0,070
		−1,000	
1,6	−0,030		+0,030

Таким образом, мы будем пользоваться уравнениями

$$x(t+\varepsilon) = x(t) + \varepsilon v\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$
$$v\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) = v\left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \varepsilon a(t), \quad a(t) = -x(t). \tag{9.16}$$

Остается еще один небольшой вопрос: что такое $v(\varepsilon/2)$? Вначале у нас было $v(0)$, а не $v(-\varepsilon/2)$. Но теперь, чтобы начать



Фиг. 9.4 График движения грузика на пружинке.

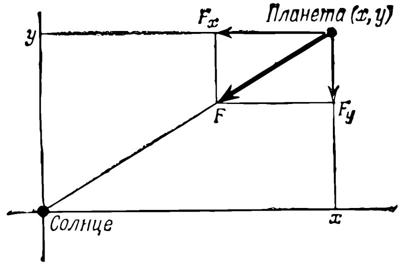
наши вычисления, необходимо использовать дополнительное уравнение $v(\varepsilon/2) = v(0) + (\varepsilon/2)a(0)$.

Ну, а теперь все готово для расчетов. Для удобства можно их выполнить в виде таблицы, в столбцах которой стоят время, положение, скорость и ускорение, причем скорость пишется в промежутках между строками (табл. 9.1). Такая таблица есть, конечно, просто удобный способ записи результатов, полученных из уравнений (9.16), и фактически полностью заменяет их. Мы просто заполняем одно за другим свободные места в ней и получаем очень интересную картину движения: сначала грузик находится в покое, затем понемногу приобретает отрицательную скорость (вверх), а это приводит к уменьшению его расстояния от точки равновесия. При этом хотя ускорение и становится меньше, оно все еще «подгоняет» скорость. Однако по мере приближения к положению равновесия ($x = 0$) ускорение становится все меньше и меньше, скорость нарастает все медленней и медленней, но все же еще нарастает вплоть до точки $x = 0$, которая достигается примерно через 1,5 *сек*. Скажем по секрету, что произойдет дальше. Грузик, конечно, не остановится в точке $x = 0$, а пойдет дальше, но теперь все будет наоборот: его положение x станет отрицательным, а ускорение — положительным. Скорость начнет уменьшаться. Интересно сравнить полученные нами числа с функцией $\cos t$. Результат этого сравнения представлен на фиг. 9.4. Оказывается, что в пределах точности наших расчетов (три знака после запятой) совпадение полное! Позднее вы узнаете, что функция $\cos t$ — точное решение нашего уравнения, так что у вас теперь есть наглядное представление о мощи численного анализа: столь простой расчет дает столь точный результат.

§ 6. *Движение планет*

Приведенный анализ очень подходит к движению осциллирующей пружинки с грузиком, но можно ли таким же путем вычислять движение планеты вокруг Солнца? Давайте

Фиг. 9.5. Сила притяжения, действующая на планету.



посмотрим, можно ли при некоторых приближениях получить эллиптическую орбиту. Предположим, что Солнце бесконечно тяжелое в том смысле, что его движение не будет приниматься в расчет.

Допустим, что в известной точке планета начала свое движение и имеет определенную скорость. Она движется вокруг Солнца по какой-то кривой, и мы попытаемся определить с помощью уравнений движения Ньютона и его же закона всемирного тяготения, что это за кривая. Как это сделать? В некоторый момент времени планета находится в каком-то определенном месте, на расстоянии r от Солнца; в этом случае известно, что на нее действует сила, направленная по прямой к Солнцу, которая, согласно закону тяготения, равна определенной постоянной, умноженной на произведение масс планеты и Солнца и деленной на квадрат расстояния между ними. Чтобы рассуждать дальше, нужно выяснить, какое ускорение вызывает эта сила.

Однако в отличие от предыдущей задачи нам потребуются теперь *компоненты* ускорения в двух направлениях, которые мы назовем x и y. Положение планеты в данный момент будет определяться координатами x и y, поскольку третья координата z всегда равна нулю.

Действительно, координатная плоскость xy выбрана нами таким образом, что z-компоненты как силы, так и начальной скорости равны нулю, а поэтому нет никаких причин, которые бы заставили планету выйти из этой плоскости. Сила при этом будет направлена по линии, соединяющей планету с Солнцем, как это показано на фиг. 9.5.

Из этого рисунка видно, что горизонтальная компонента силы так относится к полной ее величине, как координата x относится к расстоянию r. Это сразу следует из подобия треугольников. Кроме того, если x положительна, то F_x отрицательна, и наоборот.

Таким образом, $F_x/|F| = -x/r$, или $F_x = -|F|x/r = -GM\,mx/r^3$ и соответственно $F_y = -GM\,my/r^3$. Теперь можно воспользоваться динамическими законами (9.7) и написать, что x- или y-компонента ускорения, умноженная на массу планеты, равна соответственно x- или y-компоненте силы:

$$m\left(\frac{dv_x}{dt}\right)=-\frac{GMmx}{r^3},$$
$$m\left(\frac{dv_y}{dt}\right)=-\frac{GMmy}{r^3}, \qquad (9.17)$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Это именно та система уравнений, которую мы должны решить. Для того чтобы упростить вычисления, предположим, что либо единицы измерения времени или массы выбраны соответствующим образом, либо нам просто повезло, словом, получилось так, что $GM\equiv 1$. Для нашего случая предположим, что в начальный момент $t=0$ планета находилась в точке с координатами $x=0{,}500$ и $y=0{,}000$, а скорость ее в этот момент направлена параллельно оси y и равна 1,6300. Как же в этом случае делаются расчеты? Снова составляется таблица со столбцами для времени t, координаты x, x-компонент скорости v_x и ускорения a_x. Затем идут отделенные чертой три колонки: для координаты y, y-компонент скорости и ускорения. Однако, для того чтобы подсчитать ускорения, мы должны воспользоваться уравнением (9.17), согласно которому его компоненты равны $-x/r^3$ и $-y/r^3$, а $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Так что, получив x и y, мы должны где-то в сторонке провести небольшие вычисления — извлечь квадратный корень из суммы квадратов и получить расстояние. Удобно также отдельно вычислить и $1/r^3$.

После этого все готово, чтобы определить компоненты ускорения. Всю эту работу можно сильно облегчить, если пользоваться таблицами квадратов, кубов и обратных величин. На нашу долю останется тогда только умножение x на $1/r^3$, которое легко выполняется на логарифмической линейке.

Перейдем к дальнейшему. Возьмем интервал времени $\varepsilon=0{,}100$. В начальный момент $t=0$

$$x(0)=0{,}500, \qquad y(0)=0{,}000,$$
$$v_x(0)=0{,}000, \qquad v_y(0)=+1{,}630.$$

Отсюда находим

$$r(0)=0{,}500, \qquad \frac{1}{r^3}=8{,}000,$$
$$a_x=-4{,}000, \qquad a_y=0{,}000.$$

После этого можно вычислять компоненты v_x (0,05) и v_y (0,05):

$$v_x(0{,}05) = 0{,}000 - 4{,}000 \cdot 0{,}050 = -0{,}200,$$
$$v_y(0{,}05) = 1{,}630 + 0{,}000 \cdot 0{,}100 = 1{,}630.$$

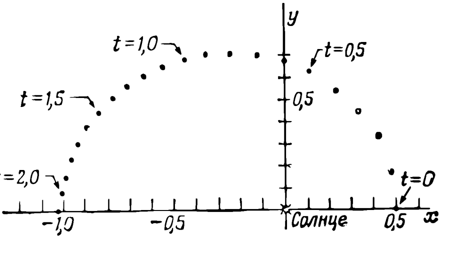
А теперь начнем наш основной расчет:

$$x(0{,}1) = 0{,}500 - 0{,}200 \cdot 0{,}1 = 0{,}480,$$
$$y(0{,}1) = 0{,}00 + 1{,}63 \cdot 0{,}1 = 0{,}163,$$
$$r = \sqrt{(0{,}480)^2 + (0{,}163)^2} = 0{,}507,$$
$$\frac{1}{r^3} = 7{,}67,$$
$$a_x(0{,}1) = 0{,}480 \cdot 7{,}67 = -3{,}68,$$
$$a_y(0{,}1) = -0{,}163 \cdot 7{,}70 = -1{,}256,$$
$$v_x(0{,}15) = -0{,}200 - 3{,}68 \cdot 0{,}1 = -0{,}568,$$
$$v_y(0{,}15) = 1{,}630 - 1{,}26 \cdot 0{,}1 = 1{,}505,$$
$$x(0{,}2) = 0{,}480 - 0{,}568 \cdot 0{,}1 = 0{,}423,$$
$$y(0{,}2) = 0{,}163 + 1{,}50 \cdot 0{,}1 = 0{,}313$$

и т. д.

В результате мы получим числа, приведенные в табл. 9.2, где приблизительно за 20 шагов прослежена половина пути нашей планеты вокруг Солнца. На фиг. 9.6 отложены координаты планеты x и y, приведенные в табл. 9.2. Точки представляют собой последовательные положения планеты через каждую десятую долю выбранной нами единицы времени. Видно, что сначала она двигалась быстро, а затем — все медленней и медленней. Видна также и форма кривой движения планеты. Итак, вы теперь знаете, как *реально* можно вычислять движение планет!

Давайте посмотрим теперь, как вычислить движение Нептуна, Юпитера, Урана и остальных планет. Можно ли сделать подробные расчеты со множеством планет, учитывая к тому же и движение Солнца? Разумеется, можно. Найдем сначала силу, действующую на каждую данную планету, например на



Фиг. 9.6. График движения планеты вокруг Солнца.

Таблица 9.2

● ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПУТИ ПЛАНЕТЫ ВОКРУГ СОЛНЦА

Решение системы уравнений: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{x}{r^3}$, $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{y}{r^3}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Интервал $\varepsilon = 0{,}100$

При $t = 0$, $v_y = 1{,}63$, $v_x = 0$, $x = 0{,}5$, $y = 0$

t	x	v_x	a_x	y	v_y	a_y	r	$1/r^3$
0,0	0,500		−4,00	0,000		0,00′	0,500	8,000
		−0,200			1,630			
0,1	0,480		−3,68	0,163		−1,25	0,507	7,675
		−0,568			1,505			
0,2	0,423		−2,91	0,313		−2,15	0,526	6,873
		−0,859			1,290			
0,3	0,337		−1,93	0,442		−2,57	0,556	5,824
		−1,055			1,033			
0,4	0,232		−1,11	0,545		−2,62	0,592	4,81
		−1,166			0,771			
0,5	0,115		−0,453	0,622		−2,45	0,633	3,942
		−1,211			0,526			
0,6	−0,006		+0,020	0,675		−2,20	0,675	3,252
		−1,209			0,306			
0,7	−0,127		+0,344	0,706		−1,91	0,717	2,712
		−1,175			0,115			
0,8	−0,245		+0,562	0,718		−1,64	0,758	2,296
		−1,119			−0,049			
0,9	−0,357		+0,705	0,713		−1,41	0,797	1,975
		−1,048			−0,190			
1,0	−0,462		+0,796	0,694		−1,20	0,834	1,723
		−0,968			−0,310			

1,1	−0,559		+0,858	0,663		−1,02	0,867	1,535
		−0,882			−0,412			
1,2	−0,647		+0,90	0,622		−0,86	0,897	1,385
		−0,792			−0,449			
1,3	−0,726		+0,92	0,572		−0,72	0,924	1,267
		−0,700			−0,570			
1,4	−0,796		+0,93	0,515		−0,60	0,948	1,173
		−0,607			−0,630			
1,5	−0,857		+0,94	0,452		−0,50	0,969	1,099
		−0,513			−0,680			
1,6	−0,908		+0,95	0,384		−0,40	0,986	1,043
		−0,418			−0,720			
1,7	−0,950		+0,95	0,312		−0,31	1,000	1,000
		−0,323			−0,751			
1,8	−0,982		+0,95	0,237		−0,23	1,010	0,970
		−0,228			−0,773			
1,9	−1,005		+0,95	0,160		−0,15	1,018	0,948
		−0,113			−0,778			
2,0	−1,018		+0,96	0,081		−0,08	1,021	0,939
		−0,037			−0,796			
2,1	−1,022		+0,95	0,001		0,00	1,022	0,936
		+0,058			−0,796			
2,2	−1,016		+0,96	−0,079		+0,07	1,019	0,945
					−0,789			
2,3								

Ось x пересекается в момент 2,101 *сек*, период обращения равен 4,20 *сек*. В момент 2,086 *сек* компонента скорости $v_x = 0$.

Орбита пересекается с осью x при $x = 1{,}022$, длина главной полуоси равна $\frac{1{,}022 + 0{,}500}{2} = 1{,}761$, $v_y = 0{,}796$.

Предсказываемое время полуоборота равно $\pi\,(0{,}761)^{3/2} = \pi\,(0{,}663) = 2{,}082$.

ту, которую мы обозначим номером i и координаты которой x_i, y_i и z_i ($i = 1$ может означать Солнце, $i = 2$ — Меркурий, $i = 3$ — Венеру и т. д.). Наша задача — найти координаты всех планет. По закону тяготения x-компонента силы, действующая на i-ю планету со стороны планеты номер j с координатами x_j, y_j, z_j, будет равна $-Gm_im_j(x_i - x_j)/r_{ij}^3$. Если же учесть силы со стороны всех планет, то получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
m_i\left(\frac{dv_{ix}}{dt}\right) &= \sum_{j=1}^{N}\left[-\frac{Gm_im_j(x_i - x_j)}{r_{ij}^3}\right],\\
m_i\left(\frac{dv_{iy}}{dt}\right) &= \sum_{j=1}^{N}\left[-\frac{Gm_im_j(y_i - y_j)}{r_{ij}^3}\right],\\
m_i\left(\frac{dv_{iz}}{dt}\right) &= \sum_{j=1}^{N}\left[-\frac{Gm_im_j(z_i - z_j)}{r_{ij}^3}\right],
\end{aligned}
\tag{9.18}
$$

где r_{ij} — расстояние между i-й и j-й планетами:

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \tag{9.19}$$

а $\sum$ означает суммирование по всем остальным планетам, т. е. по всем значениям j, за исключением, конечно, $j = i$. Таким образом, чтобы решить это уравнение, нужно лишь значительно увеличить количество столбцов в нашей таблице. Для движения Юпитера понадобится девять столбцов, для Сатурна — тоже девять и т. д. Если нам заданы все начальные положения и скорости, то из уравнения (9.18) можно подсчитать все ускорения, вычислив, конечно, предварительно по формуле (9.19) все расстояния r_{ij}. А сколько же времени потребуется на все эти вычисления? Если вы будете делать их сами дома, то очень много! Однако сейчас уже имеются машины, неимоверно быстро выполняющие все арифметические расчеты. Сложение, например, такая машина выполняет за 1 *мксек*, т. е. за одну миллионную долю секунды, а умножение — за 10 *мксек*. Так что если один цикл расчетов состоит из 30 операций умножения, то это займет всего лишь 300 *мксек*, или за 1 *сек* можно сделать 3000 циклов. Если мы хотим считать с точностью до одной миллиардной, то для того, чтобы покрыть все время обращения планеты вокруг Солнца, требуется $4 \cdot 10^5$ циклов. (Оказывается, что ошибка в расчетах приблизительно пропорциональна квадрату ε. Если брать интервал в тысячу раз меньший, то ошибка уменьшится в миллион раз. Так что для обеспечения нашей точности нужно взять интервал в 10 000 раз меньше.) На машине это займет 130 *сек*, или около 2 мин. Всего лишь 2 *мин*, для того чтобы «прогнать» Юпитер вокруг Солнца и при этом еще с точностью до одной миллиардной учесть все возмущения от других планет!

Итак, в начале этой главы для вас были загадкой движения грузика на пружинке, однако теперь, вооруженные таким мощным орудием, как законы Ньютона, вы можете вычислять не только такие простые явления, как качание грузика, но и неимоверно сложные движения планет, причем с любой желаемой точностью! Нужна только машина, знающая арифметику.

Глава **10**

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

§ 1. Третий закон Ньютона

Второй закон Ньютона, который связывает ускорение любого тела с действующей на него силой, позволяет хотя бы в принципе решить любую механическую задачу. Можно, например, с помощью числового метода, знакомого вам уже по предыдущей главе, определить движение нескольких частиц. Однако имеется еще достаточно причин, чтобы продолжить изучение законов Ньютона. Во-первых, существуют такие сравнительно простые случаи движения, которые можно изучать не только числовым путем, но и с помощью прямых математических методов. Вы знаете, например, что ускорение свободно падающего тела постоянно и равно 9,8 *м/сек*². Исходя из этого, можно было бы численно восстановить всю картину движения, однако гораздо проще и удобнее с помощью математического анализа найти общее решение: $s = s_0 + v_0t + 4{,}9t^2$. То же самое относится и к гармоническому осциллятору, расчету которого была посвящена часть предыдущей главы. Можно было бы просто аналитически доказать, что функция $\cos t$ является точным решением этой задачи, поэтому нет необходимости в арифметических упражнениях, если ответ можно получить более простым и строгим методом.

Одна из таких задач — движение планеты вокруг солнца. Можно, конечно, так же, как мы это делали в гл. 9, постепенно найти общую форму орбиты, однако и эта задача решается точно, причем в результате получается строго эллиптическая орбита.

Но, к сожалению, таких задач, которые могут быть точно решены с помощью анализа, очень мало. В том же гармоническом осцилляторе, например, если сила пружины не будет пропорциональна отклонению от положения равновесия, а окажется несколько сложнее, мы уже не сможем ничего поделать и вынуждены обращаться к численному расчету. Или, например, если вокруг Солнца вращается не одна планета, а две (т. е. всего три тела взаимодействуют друг с другом), то нам не удастся найти аналитическую форму такого движения и на деле задача тоже решается численно. Это знаменитая проблема трех тел, над которой в течение долгого времени бились лучшие умы человечества. Интересно, что, пока люди поняли ограниченные возможности математического анализа и необходимость использования числовых методов, потребовалось немало времени. Сейчас с помощью этих методов решается огромное количество задач, которые не могли быть решены аналитически. Та же знаменитая проблема трех тел, решение которой, как полагали, очень сложно, в числовом методе выглядит самой заурядной задачкой и решается способом, описанным в предыдущей главе, т. е. с помощью большого числа арифметических действий. Однако имеются ситуации, когда оба метода оказываются бессильны: простые задачи решаются аналитически, а задачи посложнее — числовым арифметическим методом, но очень сложные задачи невозможно решить ни так, ни этак. Возьмите, например, сложную задачу столкновения двух автомобилей или даже движение молекул газа. В кубическом миллиметре газа содержится бесчисленное количество частиц, и было бы безумием пытаться решать задачу со столькими переменными (около 10^{17}, т. е. сто миллионов миллиардов!). Столь же сложна задача о движении звезд в шаровом скоплении, где вместо двух или трех планет, движущихся вокруг Солнца, собрано громадное количество звезд. Эти проблемы нельзя решить прямыми методами, и нужно изыскать какие-то другие пути.

При таком положении, когда детальное рассмотрение невозможно, полезно знать некоторые общие свойства, т. е. общие теоремы или принципы, которые являются следствием законов Ньютона. Один из таких принципов — это закон сохранения энергии, который мы обсуждали в гл. 4. Вторым принципом является закон сохранения импульса, которому посвящена настоящая глава. Другая причина необходимости дальнейшего изучения механики — это существование некоторых общих свойств движения, которые повторяются при различных обстоятельствах; так что полезно изучить это свойство на каком-то одном частном случае. Мы, например, будем изучать столкновения; различные виды столкновений имеют много общего. Или возьмем течение жидкости, неважно какой; законы течения разных жидкостей имеют много общего. Еще один пример, который мы будем изучать, это колебания, или осцилляция, в частности свойства механических волн: звука, колебания стержней и т. д.

Когда мы обсуждали законы Ньютона, то уже говорили о том, что они являются своего рода программой, которая призывает нас обратить особое внимание на силы. Но о самих силах Ньютон сказал только две вещи. Он полностью сформулировал закон для сил тяготения, но почти ничего не знал о более сложных силах, например о силах между атомами. Однако он открыл одно правило, одно общее свойство всех сил, которое составляет Третий закон. Таким образом, все, что Ньютон знал о природе сил, — это закон тяготения и общий принцип, который гласит:

Сила действия равна силе противодействия.

Означает это примерно следующее. Пусть имеются два маленьких тела, скажем две частицы, и пусть первая из них толкает вторую с некоторой силой. Тогда в соответствии с Третьим законом Ньютона вторая частица будет толкать первую с той же силой, но в противоположную сторону. Более того, эти силы будут действовать вдоль одной и той же линии. Эта гипотеза, или, если хотите, закон, предложенный Ньютоном, выполняется с большой точностью, хотя, впрочем, он не абсолютно точен (с нарушениями его мы познакомимся позднее). Сейчас, однако, мы будем считать его совершенно точным. Разумеется, если есть еще третья частица, которая расположена не на той же линии, что две первые, то закон вовсе *не означает*, что сила, действующая на первую частицу, равна полной силе, действующей на вторую. Ведь эта третья частица может толкать две первые, в результате чего полная сила, действующая на первую частицу, будет направлена по-другому и, вообще говоря, не будет ни равна, ни противоположна силе, действующей на вторую частицу. Однако полная сила, действующая на каждую из частиц, может быть разложена на две составляющие, которые представляют собой силы, действующие между каждой парой частиц. Эти компоненты силы для каждой *пары* частиц должны быть равны по величине и противоположны по направлению.

§ 2. Закон сохранения импульса

Давайте посмотрим, чем интересен Третий закон Ньютона. Предположим для простоты, что имеются только две взаимодействующие частицы — частица 1 и частица 2, масса которых может быть различна. К какому следствию приводит равенство и противоположная направленность сил между ними?

Согласно Второму закону, сила равна скорости изменения импульса со временем, так что скорость изменения импульса частицы 1 равна скорости изменения импульса частицы 2, т. е.

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}. \qquad (10.1)$$

Но если *скорости изменения* все время равны по величине и противоположны по направлению, то и *полное изменение* импульса частицы 1 равно и противоположно *полному изменению* импульса частицы 2. Это означает, что если мы *сложим* эти импульсы, то скорость изменения суммы под воздействием одних только взаимных сил (их обычно называют внутренними силами) будет равна нулю, т. е.

$$\frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt} = 0. \qquad (10.2)$$

Напомним еще раз, что в нашей задаче мы предполагаем отсутствие каких-либо других сил, кроме внутренних. Но равенство нулю скорости изменения этой суммы означает просто, что величина $(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ не изменяется с течением времени. (Эта величина записывается также в виде $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ и называется *полным импульсом* двух частиц.) Таким образом, мы получили, что при наличии одних только внутренних сил полный импульс двух частиц остается неизменным. Это утверждение выражает закон сохранения полного импульса в данном случае. Из него следует, что если мы измеряем или подсчитываем величину $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$, т. е. сумму импульсов двух частиц, то для любых сил, действующих между ними, как бы сложны они ни были, мы должны получить одинаковый результат как до действия сил, так и после, т. е. полный импульс остается постоянным.

Рассмотрим теперь картину посложнее, когда есть три или большее число взаимодействующих частиц. Очевидно, что если существуют только внутренние силы, то полный импульс всех частиц остается постоянным, поскольку увеличение импульса одной частицы под воздействием другой частицы в точности компенсируется уменьшением импульса этой второй частицы из-за противодействия первой, т. е. внутренние силы так сбалансированы, что полный импульс всех частиц измениться не может. Таким образом, если нет сил, действующих на систему извне (внешних сил), то ничто не может изменить ее полный импульс и, следовательно, он остается постоянным.

Но нужно еще сказать о том, что произойдет, если будут еще существовать какие-то другие силы, кроме сил взаимодействия между частицами. Предположим, что мы изолировали систему взаимодействующих частиц. Если имеются только взаимные силы, полный импульс, как и прежде, меняться не будет, сколь бы сложны ни были эти силы. Если, однако, существуют силы, обусловленные частицами вне этой изолированной группы, то, как мы докажем позднее, сумма всех этих *внешних* сил равна скорости изменения полного импульса всех внутренних частиц. Это очень полезная теорема.

Закон сохранения полного импульса некоторого числа взаимодействующих частиц в отсутствие внешних сил можно записать в виде

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \ldots = \text{const}, \tag{10.3}$$

где m_i и $\mathbf{v}_i$ — просто масса и скорость частицы соответствующего номера. Однако для каждой из этих частиц Второй закон Ньютона

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \tag{10.4}$$

пишется для любой *составляющей* полной силы и импульса в любом заданном направлении, так что x-компонента силы, действующей на частицу, равна скорости изменения x-компоненты импульса этой частицы

$$f_x = \frac{d}{dt}(mv_x). \tag{10.5}$$

Точно такие же формулы можно написать для y- и z-компонент. Это означает, что уравнение (10.3) фактически представляет собой три уравнения: по одному на каждую из компонент.

Существует еще одно интересное следствие Второго закона Ньютона, кроме закона сохранения импульса. Доказательством его мы будем заниматься позднее, а сейчас я просто расскажу вам о нем. Следствие или, скорее, принцип состоит в том, что законы физики не изменяются от того, стоим ли мы на месте или движемся равномерно и прямолинейно. Пусть, например, на быстро летящем самолете ребенок играет с мячиком. Наблюдательный ребенок сразу заметит, что мячик прыгает точно так же, как и на земле. Иначе говоря, законы движения для ребенка в самолете (если только последний не меняет скорости) выглядят одинаково как на поле аэродрома, так и в полете. Этот факт известен под названием *принципа относительности*. В том виде, в котором он рассматривается здесь, мы будем называть его «принципом относительности Галилея» или «галилеевской относительностью», чтобы не путать его с более тщательным анализом, проделанным Эйнштейном, но об этом несколько позже.

Таким образом, из закона Ньютона мы вывели закон сохранения импульса, а теперь давайте посмотрим, какие специфические законы описывают соударение и рассеяние частиц. Однако для разнообразия, а также чтобы продемонстрировать типичные рассуждения, которыми мы часто пользуемся в физике в других случаях, когда, скажем, не известны законы Ньютона и должен быть принят иной метод рассмотрения, давайте обсудим законы рассеяния и соударения с совершенно другой точки зрения. Мы будем исходить из принципа относительности Галилея и в конце рассуждений придем к закону сохранения импульса.

Итак, начнем с утверждения, что законы природы не изменяются от того, что мы движемся прямолинейно с некоторой скоростью или стоим на месте. Однако прежде чем обсуждать процессы, в которых два тела сталкиваются и слипаются или разлетаются в стороны, давайте рассмотрим случай, когда эти два тела связаны между собой пружинкой или чем-то в этом роде, а затем вдруг освобождаются и разлетаются под действием этой пружинки или, быть может, небольшого взрыва в разные стороны. Кроме того, рассмотрим движение только в одном направлении. Предположим сперва, что эти два тела совершенно одинаковы и расположены симметрично. Когда между ними произойдет взрыв, одно из них полетит направо с некоторой скоростью v. Тогда естественно, что другое полетит налево с той же самой скоростью v, поскольку оба тела подобны и нет никаких причин считать, что левая сторона окажется предпочтительнее правой. Итак, с телами должно происходить нечто симметричное. Этот пример показывает, насколько полезны рассуждения такого рода в различных задачах. Но они не всегда столь ясны, когда затуманены формулами.

Таким образом, первый результат нашего эксперимента — одинаковые тела имеют одинаковую скорость. Но предположим теперь, что тела сделаны из различного материала, скажем один из меди, а другой из алюминия, но *массы* их равны. Мы будем предполагать, что если проделать наш опыт с двумя равными массами, то несмотря на то, что тела не одинаковы, скорости их тем не менее будут равны. В этом месте мне могут возразить: «Но ведь вы можете сделать и обратное. Вам незачем было это предполагать. Вы можете *определить* массы как равные, если они в нашем эксперименте приобретают одинаковую скорость». Давайте же примем это предложение и устроим небольшой взрыв между кусочком меди и очень большим куском алюминия, который настолько тяжел, что едва может быть сдвинут с места, тогда как медь стремительно отлетает. Это говорит о том, что алюминия слишком много. Уменьшим его количество и оставим лишь совсем маленький кусочек. Если устроить взрыв снова, то отлетит уже алюминий, а медь почти не сдвинется. Значит, сейчас слишком мало алюминия. Очевидно, что должно существовать какое-то промежуточное количество, которое можно подбирать, пока скорости разлета не станут равными. Теперь мы можем сказать, что раз равны скорости этих кусков, то массы их мы тоже будем считать равными (т. е. фактически мы переворачиваем сделанное ранее утверждение, что равные массы будут иметь одинаковую скорость). Самое интересное здесь, что физический закон превращается просто в определение. Но тем не менее какой-то физический закон здесь все же есть, и если мы примем такое определение равенства масс, то этот закон можно найти следующим образом.

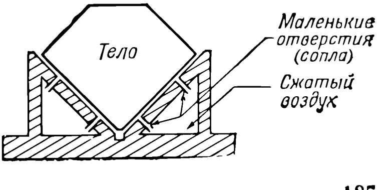
Пусть из предыдущего эксперимента нам известно, что два куска вещества A и B (медь и алюминий) имеют равные массы. Возьмем теперь третье тело, скажем кусок золота, и выравняем его массу (точно так же, как это делалось раньше) с массой меди. Если теперь в нашем эксперименте заменить медь золотом, то логически у нас нет никаких оснований утверждать, что эти массы (алюминия и золота) равны. Однако *опыт* показывает, что такое равенство имеет место. Таким образом, опытным путем мы обнаружили новый закон: если две массы порознь равны третьей (т. е. в нашем опыте они разлетаются с равными скоростями), то они равны между собой. (Этот закон вовсе *не следует* из подобного утверждения о величинах в *математике*; там оно просто постулируется). Видите, как легко по неосторожности сделать безосновательное заключение. Утверждение, что массы равны, когда равны скорости, — это еще *не определение*; ведь при этом мы предполагаем справедливость математических законов равенства, что в свою очередь приводит к предсказанию результатов некоторых экспериментов.

Возьмем еще один пример. Пусть при некоторой силе взрыва установлено, что масса A равна массе B. А что произойдет, если увеличить силу взрыва? Будут ли равны скорости разлета в этом случае? Логика здесь снова бессильна, но опыт говорит, что это *действительно* так. Снова мы получаем закон, который утверждает: если из равенства скоростей двух тел делается заключение о равенстве их масс, то это равенство не зависит от величины скорости. Из этих примеров видно, что то, что сначала казалось просто определением, в действительности предполагает справедливость каких-то законов природы.

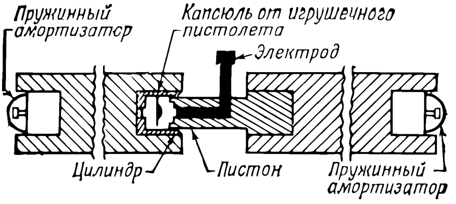
Итак, в дальнейших рассуждениях мы будем считать, что равные массы разлетаются в противоположные стороны с равными скоростями, если между ними происходит взрыв. А что произойдет, если мы обратим задачу, т. е. если два одинаковых тела, летящих навстречу друг другу с равными скоростями, сталкиваются и слипаются вместе? Как будут они двигаться? Здесь опять на помощь приходят соображения симметрии (т. е. что между левой и правой сторонами нет никакого различия), из которых следует, что образовавшееся тело должно стоять на месте. Мы будем также предполагать, что два тела с равной массой, летящих навстречу друг другу, даже если они сделаны из различного материала, после столкновения и слипания остановятся.

§ 3. Импульс все-таки сохраняется!

Можно экспериментально проверить наши предположения о том, что, во-первых, два покоящихся тела с равной массой, разорванные взрывом, полетят в разные стороны с равной скоростью и, во-вторых, что два тела, обладающие равными скоростями и массами, при соударении и слипании останавливаются. Такую проверку можно сделать с помощью замечательного устройства — воздушного желоба (фиг. 10.1). В этом устройстве нет никаких трущихся деталей — вопрос, который очень беспокоил Галилея. Он не мог поставить эксперимента со скользящими телами, ибо они не скользили свободно, но с помощью чудесного желоба мы можем теперь избавиться от трения. Наши тела будут лететь без помех, а скорость их, согласно предвидению Галилея, будет оставаться постоянной. Это достигается тем, что тело поддерживается воздушной подушкой, а поскольку трение о воздух очень мало, то тело планирует практически с постоянной скоростью, если на него не действуют никакие силы. Возьмем сначала два скользящих бруска, вес или массы которых с большой точностью равны друг другу (практически измеряется вес, но он, как вы знаете, пропорционален массе), и поместим между ними небольшой взрыватель в закрытом цилиндре (фиг. 10.2). Всю эту систему устанавливаем в центре желоба и электрической искрой поджигаем взрыватель. Что же произойдет? Если массы брусков одинаковы, то они, разлетевшись в стороны, одновременно достигнут концов желоба. Там они отскакивают от ограничителей, сталкиваются и слипаются в центре, точно в том же месте, откуда разлетелись (фиг. 10.3). Это интересный опыт. И в действительности происходит все так, как мы рассказали.

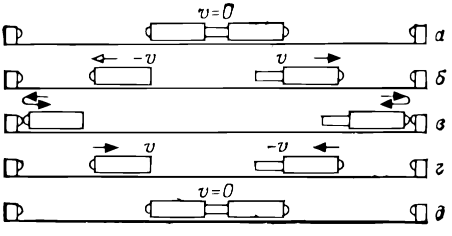


Фиг. 10.1. Воздушный желоб (вид с торца).



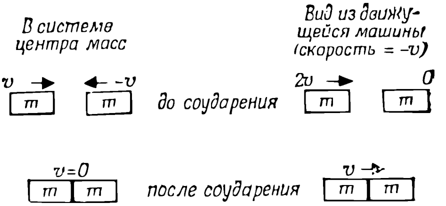
Фиг. 10.2. Продольный разрез скользящего бруска, скрепленного со взрывным цилиндром.

Теперь на очереди проблема посложнее. Допустим, мы имеем две массы, причем одна движется со скоростью v, а другая стоит на месте. Затем первая ударяет по второй и они слипаются. Что произойдет дальше? Образуется одно тело с массой $2m$, которое как-то будет двигаться. Но с какой скоростью? Вот в чем вопрос. Чтобы ответить на него, предположим, что мы едем вдоль желоба на автомобиле. Все законы физики должны при этом выглядеть точно так же, как и прежде, когда мы стояли на месте. Мы начали с того, что если столкнуть два тела с равными массами и одинаковыми скоростями v, то после слипания они останавливаются. А теперь представьте, что в это время мы катим на автомобиле со скоростью $-v$. Какую же картину мы увидим? Ясно, что одно из тел, поскольку оно все время летит рядом с автомобилем, будет казаться нам неподвижным. Второе же, которое движется навстречу со скоростью v, покажется нам несущимся с удвоенной скоростью $2v$ (фиг. 10.4). Наконец, образовавшееся после соударения и слипания тело будет казаться нам летящим со скоростью v. Отсюда мы делаем вывод, что если тело, летящее со скоростью $2v$, ударяется о покоящееся тело той же массы и прилипает к нему, то образовавшееся тело будет двигаться со скоростью v, или (что математически то же самое) тело со скоростью v, ударяясь о покоящееся тело той же массы и прилипая к нему, образует тело, движущееся со скоростью $v/2$. Заметьте, что если умножить массы тел на их скорости и сложить их, то получим одинаковый результат как до столкновения $(mv + 0)$, так и после $(2m \cdot v/2)$. Вот как обстоит дело, если тело, обладающее скоростью v, столкнется с телом, находящимся в покое.



Фиг. 10.3. Схема эксперимента с равными массами.

Фиг. 10.4. *Неупругое соударение равных масс.*



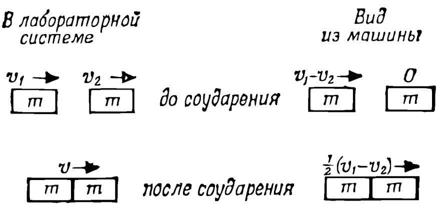
Точно таким же образом можно определить, что произойдет, когда сталкиваются два одинаковых тела, каждое из которых движется с *произвольной* скоростью.

Пусть одно тело летит со скоростью v_1, а другое — со скоростью v_2 в том же направлении ($v_1 > v_2$). Какова будет их скорость после соударения? Давайте снова сядем в машину и поедем, скажем, со скоростью v_2. Тогда одно из тел будет казаться нам стоящим на месте, а второе — налетающим на него со скоростью $v_1 - v_2$. Эта ситуация уже знакома нам, и мы знаем, что после соударения скорость нового тела по отношению к машине будет равна $^1/_2(v_1 - v_2)$. Что же касается действительной скорости относительно земли, то ее можно найти, прибавив скорость автомобиля: $v = {}^1/_2(v_1 - v_2) + v_2$ или $^1/_2(v_1 + v_2)$ (фиг. 10.5). Обратите внимание, что снова

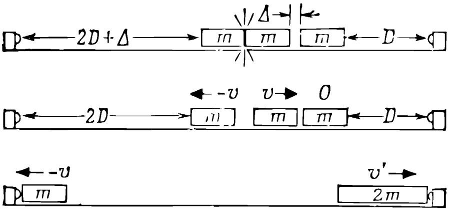
$$mv_1 + mv_2 = 2m \cdot \frac{1}{2}(v_1 + v_2). \tag{10.6}$$

Таким образом, принцип относительности Галилея помогает нам разобраться в любом соударении равных масс. До сих пор мы рассматривали движение в одном измерении, однако на основе его становится ясным многое из того, что будет происходить в более сложных случаях соударения: нужно только пустить автомобиль не вдоль направления движения тел, а под каким-то углом. Принцип остается тем же самым, хотя детали несколько усложняются.

Чтобы экспериментально проверить, действительно ли тело, летящее со скоростью v после столкновения с покоящимся телом той же массы, образует новое тело, летящее со скоростью $v/2$, проделаем на нашей замечательной установке



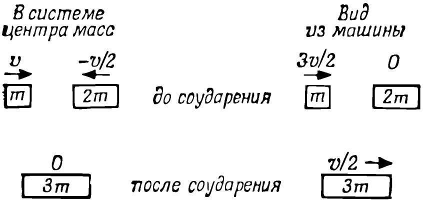
Фиг. 10.5. *Другой случай неупругого соударения равных масс.*



Фиг. 10.6. Экспериментальная проверка того факта, что масса m, ударяя со скоростью v массу m, образует тело с массой 2m и скоростью v/2.

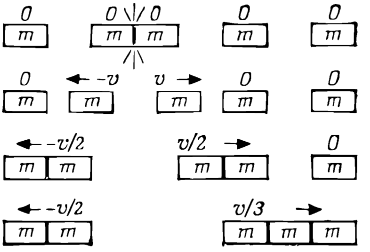
следующий опыт. Поместим в желоб три тела с одинаковыми массами, два из которых соединены цилиндром со взрывателем, а третье находится вблизи одного из них, хотя и несколько отделено от него. Оно снабжено клейким амортизатором, так что прилипает к тому телу, которое ударяет его. В первое мгновение после взрыва мы имеем два объекта с массами m, движущимися со скоростью v каждое. В последующее мгновение одно из тел сталкивается с третьим и образует новое тело с массой $2m$, которое, как мы полагаем, должно двигаться со скоростью $v/2$. Но как проверить, что скорость его действительно $v/2$? Для этого мы вначале установим тела таким образом, чтобы расстояния до концов желоба относились как 2 : 1, так что первое тело, которое продолжает двигаться со скоростью v, должно пролететь за тот же промежуток времени вдвое большее расстояние, чем скрепившиеся два других тела (с учетом, конечно, того малого расстояния Δ, которое второе тело прошло до столкновения с третьим). Если мы правы, то массы m и $2m$ должны достичь концов желоба одновременно; так оно и происходит на самом деле (фиг. 10.6).

Следующая проблема, которую мы должны решить: что получится, если тела имеют разные массы. Давайте возьмем массы m и $2m$ и устроим между ними взрыв. Что произойдет тогда? С какой скоростью полетит масса $2m$, если масса m летит со скоростью v? Фактически нам нужно повторить только что проделанный эксперимент, но с нулевым зазором между вторым и третьим телом. Разумеется, что при этом мы получим тот же результат — скорости тел с массами m и $2m$ должны быть соответственно равны $-v$ и $v/2$. Итак, при разлете тел с массами m и $2m$ получается тот же резуль-



Фиг. 10.7. Неупругое соударение между телами с массами m и 2m.

Фиг. 10.8. Разлет тел с массами $2m$ и $3m$.



тат, что и при симметричном разлете двух тел с массами m с последующим неупругим соударением одного из этих тел с третьим, масса которого тоже равна m. Более того, отразившись от концов, каждое из этих тел будет лететь с почти той же скоростью, но, конечно, в обратном направлении, и после неупругого соударения они останавливаются.

Перейдем теперь к следующему вопросу. Что произойдет, если тело с массой m и скоростью v столкнется с покоящимся телом с массой $2m$? Воспользовавшись принципом относительности Галилея, можно легко ответить на этот вопрос. Попросту говоря, нам нужно опять садиться в машину, идущую со скоростью $-v/2$ (фиг. 10.7), и наблюдать за только что описанным процессом. Скорости, которые мы при этом увидим, будут равны

$$v_1' = v - v_{\text{маш}} = v + \frac{v}{2} = \frac{3v}{2},$$

$$v_2' = -\frac{v}{2} - v_{\text{маш}} = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} = 0.$$

После соударения масса $3m$ покажется нам движущейся со скоростью $v/2$. Таким образом, мы получили, что отношение скоростей до и после соударения равно $3:1$, т. е. образовавшееся тело с массой $3m$ будет двигаться в три раза медленней. И в этом случае снова выполняется общее правило: сумма произведений массы на скорость остается той же как до, так и после соударения: $mv + 0$ равно $3m \cdot v/3$. Вы видите, как постепенно шаг за шагом устанавливается закон сохранения импульса.

Итак, мы рассмотрели столкновение одного тела с двумя. Используя те же рассуждения, можно предсказать результаты столкновения одного тела с тремя телами, двух тел с тремя телами и т. д. На фиг. 10.8 как раз показан случай разлета масс $2m$ и $3m$ из состояния покоя.

В каждом из этих случаев выполняется одно и то же правило: масса первого тела, умноженная на его скорость, плюс масса второго тела, умноженная на его скорость, равны произведению полной массы на скорость ее движения. Все это — примеры сохранения импульса. Итак, начав с простого случая симметричных равных масс, мы установили закон сохранения для более сложных случаев. В сущности это можно сделать для любого рационального отношения масс, а поскольку любое число может быть со сколь угодно большой точностью заменено рациональным, то закон сохранения импульса справедлив для любых масс.

§ 4. *Импульс и энергия*

Во всех предыдущих примерах мы рассматривали только случаи, когда два тела сталкиваются и слипаются или с самого начала были скреплены вместе, а потом разделяются взрывом. Однако существует множество примеров соударений, в которых тела *не* сцепляются, как, например, столкновение двух тел равной массы и одинаковой скорости, которые затем разлетаются в разные стороны. На какой-то краткий миг они соприкасаются и сжимаются. В момент наибольшего сжатия они останавливаются и их кинетическая энергия полностью переходит в энергию упругого сжатия (они как две сжатые пружины). Эта энергия определяется из кинетической энергии, которой обладали тела до столкновения и которая равна нулю в момент их остановки. Однако кинетическая энергия теряется только на одно мгновение. Сжатое состояние, в котором находятся наши тела, — это все равно что заряд в предыдущих примерах, который при взрыве выделяет энергию. В следующее мгновение происходит нечто подобное взрыву — тела разжимаются, отталкиваются друг от друга и разлетаются в стороны. Эта часть процесса вам тоже хорошо знакома: тела полетят в разные стороны с одинаковыми скоростями. Однако скорости отдачи, вообще говоря, будут меньше тех начальных скоростей, при которых они столкнулись, ибо для взрыва используется не вся энергия, а только какая-то ее часть, но это уже зависит от свойств материала, из которого сделаны тела. Если это мягкий материал, то кинетическая энергия почти не выделяется, но если это что-то более упругое, то тела более охотно отскакивают друг от друга. Неиспользованный остаток энергии превращается в тепло и вибрацию, тела нагреваются и дрожат; впрочем, энергия вибрации тоже вскоре превращается в тепло. В принципе можно сделать тела из столь упругого материала, что на тепло и вибрацию не будет расходоваться никакой энергии, а скорости разлета в этом случае будут практически равны начальным. Такое соударение мы называем *упругим*.

Тот факт, что скорости *до* и *после* соударения равны,— заслуга не закона сохранения импульса, а закона *сохранения энергии*, но то, что скорости разлета после симметричного соударения равны *друг другу*, в этом уже повинен закон сохранения импульса.

Точно таким же способом можно разобрать случай соударения тел с различными массами, различными начальными скоростями, различными упругостями и определить конечные скорости и потерю кинетической энергии; но мы не будем сейчас подробно разбирать эти явления.

Упругое соударение особенно часто встречается между системами, у которых нет никаких внутренних механизмов, никаких «шестеренок, маховиков или других частей». В таких случаях кинетическая энергия не может ни на что растратиться: ведь разлетающиеся тела находятся в тех же условиях, что и налетающие. Поэтому между элементарными объектами соударение всегда или почти всегда упругое. Говорят, например, что соударение между атомами и молекулами абсолютно упругое. Хотя это действительно очень хорошее приближение, но и эти соударения не *абсолютно* упругие; в противном случае трудно было бы понять, откуда у газа берется энергия на излучение тепла и света. Иногда при столкновениях молекул газа испускаются инфракрасные лучи, однако это случается крайне редко и к тому же излученная энергия очень мала, так что для многих целей столкновения молекул газа можно рассматривать как абсолютно упругие.

Давайте разберем интересный пример *упругого* столкновения двух тел *равных масс*. Если такие тела ударяются друг о друга с какой-то равной скоростью, то по соображениям симметрии они должны разлететься в стороны с той же скоростью. Но давайте посмотрим на этот процесс в несколько другой ситуации, когда одно из тел движется со скоростью v, а другое покоится. Что произойдет в этом случае? Такая задача не нова для нас. Нужно посмотреть из автомобиля, движущегося рядом с одной из частиц, на симметричное соударение. Мы увидим, как движущееся тело столкнется с покоящимся и остановится, а то, которое раньше покоилось, полетит вперед, причем в точности с той же скоростью, с которой двигалось первое. Тела попросту обменяются своими скоростями. Это легко можно подтвердить экспериментально. Вообще если два тела движутся навстречу друг другу с различными скоростями, то при упругом соударении они просто обмениваются скоростями.

Другой пример почти абсолютно упругого взаимодействия дает нам магнетизм. Положите пару U-образных магнитов на наши скользящие бруски в воздушном желобе так, чтобы они отталкивались друг от друга. Если теперь потихоньку подтолкнуть один из брусков к другому, то он, не касаясь, оттолкнет его, а сам остановится. Второй же брусок полетит вперед.

Закон сохранения импульса — очень полезная штука. Он позволяет решить многие проблемы, не входя в детали процесса. Нас, например, совершенно не интересовали детали движения газа при взрыве заряда, но тем не менее мы могли предсказать, во сколько раз одно тело будет двигаться быстрее второго при их разлете. Другой интересный пример — это ракетный двигатель. Ракета большой массы M с огромной скоростью V (относительно самой ракеты) извергает сравнительно небольшое количество m газа. Чтобы сохранить импульс, ракета начинает двигаться с небольшой скоростью v. Используя закон сохранения импульса, можно подсчитать, что

$$v = \frac{m}{M} V.$$

Однако по мере извержения скорость ракеты становится все больше и больше. Механизм действия ракетного двигателя в точности сходен с явлением отдачи ружья; здесь не нужен воздух, чтобы отталкиваться от него.

§ 5. *Релятивистский импульс*

Уже на нашей памяти закон сохранения импульса претерпел некоторые изменения. Они, однако, не коснулись самого закона как такового, просто изменилось понятие импульса. В теории относительности, как оказалось, импульс уже не сохраняется, если его понимать так же, как и прежде. Дело в том, что масса не остается постоянной, а *изменяется в зависимости от скорости*, а потому изменяется и импульс. Это изменение массы происходит по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{10.7}$$

где m_0 — масса покоящегося тела, c — скорость распространения света. Из этой формулы видно, что при обычных скоростях (если v не очень велико) m очень мало отличается от m_0, а импульс поэтому с очень хорошей точностью выражается старой формулой.

Компоненты импульса для одной частицы можно записать в виде

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{10.8}$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Если просуммировать x-компоненты импульсов всех взаимодействующих частиц, то эта сумма как до столкновения, так и после окажется одной и той же. Это и есть закон сохранения импульса в направлении оси x. То же можно сделать и в любом другом направлении.

В гл. 4 мы уже видели, что закон сохранения энергии неверен, если мы не признаем эквивалентности энергии во всех ее формах, т. е. электрической энергии, механической энергии, энергии излучения, тепловой и т. д. Про некоторые из этих форм, например тепло, можно сказать, что энергия «скрыта» в них. Напрашивается вопрос: а не существуют ли также «скрытые» формы импульса, скажем «тепловой импульс?» Дело в том, что импульс утаить невозможно; скрыть его очень трудно по следующим причинам.

Мера тепловой энергии — случайного движения атомов тела — представляет собой просуммированные *квадраты* их скоростей. В результате получается некоторая положительная величина, не имеющая направленного характера. Так что тепло как бы заключено внутри тела независимо от того, движется ли оно как целое или нет. Поэтому сохранение энергии в тепловой форме не очень очевидно. С другой стороны, если мы просуммируем *скорости*, которые имеют направление, и в результате получим не нуль, то это означает, что само тело целиком движется в некотором направлении, а такое макродвижение мы уже способны наблюдать. Так что никакой случайной внутренней потери импульса не существует: тело обладает определенным импульсом, только когда оно движется целиком. В этом и состоит основная причина того, что импульс трудно скрыть. Но тем не менее скрыть его все же *можно*, например в электромагнитное поле. Это еще одна из особенностей теории относительности.

Ньютон считал, что взаимодействие на расстоянии должно быть мгновенным. Но это, оказывается, неверно. Возьмем, например, электрические силы. Пусть электрический заряд, расположенный в некоторой точке, вдруг начинает двигаться, тогда его действие на другой заряд в другой точке не будет мгновенным: существует небольшое запаздывание. При таком положении, даже если силы действия и противодействия равны между собой, импульсы не будут компенсироваться. Существует небольшой промежуток времени, в течение которого будет происходить нечто странное: в то время как первый заряд испытывает какое-то воздействие силы и реагирует на нее изменением своего импульса, второй стоит как ни в чем не бывало и не изменяет импульса. На передачу влияния второму заряду через разделяющее их расстояние требуется некоторое время: «влияние» распространяется не мгновенно, а с некоторой конечной (хотя и очень большой) скоростью 300 000 *км/сек*. В течение этого крохотного промежутка времени импульс частиц не сохраняется. Но, разумеется, после того как второй заряд испытает влияние первого, импульсы компенсируются, наступает полный порядок, но все-таки в течение некоторого момента закон был нарушен. Мы представляем дело таким образом, что в течение этого интервала существует импульс другого рода, чем импульс частиц $m\mathbf{v}$, и это импульс электромагнитного поля. Если сложить его с импульсами частиц, то эта сумма в любой момент сохраняется. Однако тот факт, что электромагнитное поле может обладать импульсом и энергией, делает его реальностью, а утверждение о том, что между частицами действуют силы, переходит в утверждение о том, что частица создает поле, которое в свою очередь действует на другую частицу. Само же поле имеет многие свойства, аналогичные частицам; оно может нести энергию и импульс. Для иллюстрации рассмотрим еще один пример; в электромагнитном поле могут существовать волны, которые мы называем светом. И вот оказывается, что свет тоже несет какой-то импульс, так что когда он падает на предмет, то передает ему некоторое количество своего импульса. Это эквивалентно действию какой-то силы, ведь освещенный предмет изменяет свой импульс, как будто на него действует некоторая сила. Итак, падая на предмет, свет оказывает на него давление. Хотя это давление очень мало, но достаточно тонкими приборами его все же можно измерить.

Оказывается, что в квантовой механике импульс тоже не $m\mathbf{v}$, а нечто совсем другое. Здесь уже трудно определить точно, что же такое скорость частицы, но импульс все-таки существует. Разница же состоит в том, что когда частицы действуют как частицы, то их импульс по-прежнему $m\mathbf{v}$, но когда они действуют как волны, то импульс уже измеряется числом волн на 1 *см*: чем больше волн, тем больше импульс. Однако, несмотря на это различие, закон сохранения импульса справедлив и в квантовой механике. Неверными оказались уравнение Ньютона $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ и все его выводы закона сохранения импульса, тем не менее и в квантовой механике в конце концов этот закон продолжает действовать!

Глава 11

ВЕКТОРЫ

§ 1. *Симметрия в физике*

В этой главе мы вводим понятие, которое среди физиков известно под названием *симметрия законов физики*. Слово «симметрия» употребляется здесь в несколько необычном смысле, и поэтому нужно его определить. Как же определить симметрию какого-либо предмета? Когда мы говорим, что изображение симметрично, то этим мы хотим сказать, что одна его часть такая же, как другая. Профессор Герман Вейль дал такое определение симметрии: предмет симметричен, если его можно подвергнуть какой-либо операции, после которой он будет выглядеть как и вначале. Например, если мы повернем вазу на 180° вокруг вертикальной оси и она не изменит своего внешнего вида, то мы говорим, что обе стороны вазы симметричны. Мы будем понимать определение Вейля в более широком смысле и говорить о симметрии законов физики.

Предположим, что где-то мы установили сложную машину с множеством зацеплений, с какими-то маховиками, шатунами и т. п. Предположим теперь, что в каком-то другом месте мы собрали такое же устройство, все части которого являются точной копией частей прежней машины, причем сохранены все размеры и ориентация отдельных ее частей, все то же самое, только перенесено на некоторое расстояние. Затем мы запустим обе машины в одинаковых условиях и посмотрим, будут ли они работать совершенно одинаково? Будут ли движения отдельных частей одной машины повторять в точности соответствующие движения другой? Вообще говоря, ответ может быть *отрицательным*, потому что мы можем ведь выбрать для второй машины неудачное место, скажем поставить ее так, что какие-то ее части будут при работе ударяться о стенку, тогда машина вовсе не будет работать.

Любая физическая идея требует здравого смысла при своем осуществлении, ведь это не чисто математические или абстрактные идеи. Нужно понимать, что́ мы имеем в виду, когда говорим, что при перенесении какого-либо устройства в другое место наблюдаются те же явления. Под этим мы понимаем, что мы передвигаем все, что можно передвинуть. Если же при этом явление в чем-то изменяется, то мы предположим, что что-то послужило помехой, и займемся изучением причин. Если мы ничего не обнаружим, то объявим, что физические законы не обладают ожидаемой симметрией. Но если физические законы все-таки обладают симметрией, то мы найдем причину помех, во всяком случае мы надеемся найти ее. Осмотревшись, мы обнаружим, например, что работе машины мешает стена. Основной вопрос состоит в следующем: если мы достаточно хорошо изучим наши устройства, если все основные источники сил имеются внутри аппарата и если на другое место передвинуть все, что следовало передвинуть, то будут ли законы меняться? Будет ли машина на новом месте работать так, как раньше?

Ясно, что мы хотим передвинуть само устройство и источники *основных* влияний, а вовсе не *все* на свете — планеты, звезды и т. п., ибо если бы мы и совершили эту грандиозную работу, то наблюдали бы прежнее явление по той простой причине, что мы оказались бы на том же самом месте. Но мы и не можем передвинуть *все на свете*. Оказывается, что если передвигать наше устройство более или менее разумно, то оно будет работать одинаково. Другими словами, если мы не будем вламываться в стенку, будем знать происхождение внешних сил и постараемся, чтобы они были передвинуты вместе с машиной, то она будет работать на новом месте так же хорошо, как и прежде.

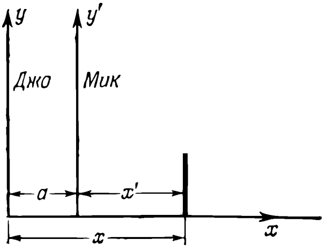
§ 2. Переносы начала

Мы ограничим наше рассмотрение законами механики, которую достаточно хорошо изучили. В предыдущих главах мы установили, что законы механики можно свести к трем справедливым для любой частицы уравнениям:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z. \qquad (11.1)$$

Это означает, что существует такой способ *измерения* расстояний x, y и z вдоль трех взаимно перпендикулярных осей и сил вдоль этих направлений, при котором определяемые

Фиг. 11.1. Две параллельные координатные системы.



уравнениями (11.1) законы верны. Расстояния должны отсчитываться от некоторого начала, но *где следует расположить это начало?* Ньютон сказал нам только, что такая точка, от которой можно начать отсчет, *существует*; может быть, это центр Вселенной, и при измерении расстояний от нее его законы верны. Но мы можем немедленно показать, что незачем искать центр Вселенной, ибо безразлично, какую точку взять за начало координат. Иными словами, предположим, что имеются два человека — Джо, который выбрал начало своей системы координат в какой-то точке, и Мик, который построил систему координат, параллельную первой, но принял за начало другую точку (фиг. 11.1), расположенную на расстоянии a по оси x в его системе.

Когда Джо определяет положение произвольной точки в пространстве, он находит три ее координаты: x, y и z (обычно мы опускаем ось z, ибо ее трудно изобразить на нашем чертеже). В системе Мика эта точка будет иметь другое значение x (чтобы отличить его, введем обозначение x') и, вообще говоря, другое значение y, хотя в нашем примере они численно равны. Таким образом, мы имеем

$$x' = x - a, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{11.2}$$

Чтобы сделать наш анализ полным, нужно знать, какие силы измеряет Мик. Если сила действует вдоль произвольной линии, то под силой вдоль направления x мы понимаем некоторую часть общей силы, которая равна произведению величины силы на косинус угла между направлением силы и осью x. Легко видеть, что Мик получит те же проекции силы, какие получил Джо, т. е. мы имеем систему уравнений

$$F_{x'} = F_x, \quad F_{y'} = F_y, \quad F_{z'} = F_z. \tag{11.3}$$

Уравнения (11.2) и (11.3) определяют соотношения между величинами, используемыми Джо и Миком.

Теперь поставим вопрос так: если Джо знает законы Ньютона, то будут ли они верны, когда их попробует использовать Мик? Имеет ли значение выбор начала координат?

Другими словами, предположим, что уравнения (11.1) верны, а (11.2) и (11.3) определяют соотношения между измеряемыми величинами; верно ли, что

$$m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)=F_{x'}, \tag{11.4а}$$

$$m\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right)=F_{y'}, \tag{11.4б}$$

$$m\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=F_{z'}? \tag{11.4в}$$

Чтобы проверить эти уравнения, дважды продифференцируем выражение для x' по времени. Прежде всего

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{d}{dt}(x-a)=\frac{dx}{dt}-\frac{da}{dt}.$$

Предположим теперь, что начало системы координат, которой пользуется Мик, фиксировано (не движется) относительно системы координат Джо, т. е. a постоянна и $da/dt=0$; таким образом, получаем

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Если предположить, что измеряемые Джо и Миком массы равны, то уравнение (11.4а) принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_{x'}.$$

Таким образом, произведения массы на ускорение одинаковы у обоих друзей. Можно получить и формулу для $F_{x'}$. Использовав (11.1), мы обнаружим

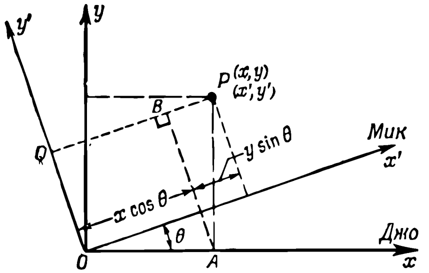
$$F_{x'}=F_x.$$

Следовательно, законы механики, с точки зрения Мика, точно такие же: он пишет законы Ньютона в других координатах, и эти законы оказываются верными. Это означает, что центра Вселенной нет и законы движения выглядят одинаково, с какого бы места они не наблюдались.

Верно и такое утверждение: если в каком-либо месте установить устройство с каким-то механизмом, то и в любом другом месте это устройство будет работать одинаково. Почему? Потому что любая машина, которую изучает Мик, подчиняется тем же уравнениям, которые описывают работу машины, контролируемой Джо. Поскольку *уравнения* одинаковы, то и *явления* одни и те же. Таким образом, доказательство того, что аппарат в новом месте будет работать так же, как на прежнем, сводится к доказательству, что отнесенные к новой точке пространства уравнения воспроизводят себя. Поэтому мы говорим, что *законы физики симметричны относительно перемещений в пространстве*, симметричны в том смысле, что законы не изменяются при перемещениях начала системы координат. Конечно, каждый интуитивно знает, что это верно, но интересно и полезно обсудить математику этого явления.

§ 3. Вращения

Разобрав вопрос о перенесении начала координат, мы рассмотрели первую задачу из серии более сложных теорем о симметрии физических законов. Следующая теорема утверждает, что и *направления* координатных осей можно выбрать произвольно. Другими словами, если мы сооружаем где-то какое-то устройство и наблюдаем, как оно работает, а затем по соседству соорудим аналогичное устройство, но расположим его под любым углом относительно первого, то будет ли второе устройство работать так же, как и первое? Вообще говоря, нет, если это, например, старые часы-ходики, известные еще нашим дедам. Если маятник ходиков расположен отвесно, они будут великолепно идти, но если их повернуть так, чтобы маятник уперся в стенку, верного времени они уже не покажут. Значит, нашу теорему нельзя применить к маятнику, если забыть о силе, которая заставляет его качаться. Если мы все-таки верим в симметрию физических законов относительно вращений, то мы должны сделать какие-то вполне определенные предположения о работе ходиков, например что для их работы важен не только часовой механизм, но и что-то, лежащее за его пределами, что-то, что следует обнаружить. Можно также предсказать, что ходики будут идти по-разному, если они попадут куда-то в другое место по отношению к загадочному пока источнику асимметрии (может быть, это Земля). Так и есть на самом деле. Мы знаем, что ходики на искусственном спутнике, например, вообще остановятся, ибо там отсутствует эффективная сила, а на Марсе скорость их хода будет совсем иной. Маятниковые часы содержат, помимо механизма, еще нечто вне их. Осознав этот факт, мы увидим, что вместе с ходиками нам придется повернуть и Землю. Но нам, конечно, незачем беспокоиться — сделать это очень легко. Мы просто подождем минуту или две, и Земля сама повернется, а ходики затикают уже в новом положении так же весело, как и раньше. Пока мы поворачиваемся в пространстве, измеряемые нами углы изменяются тоже; эти изменения не причиняют особых беспокойств, поскольку в



Фиг. 11.2. Две координатные системы, ориентированные по-разному.

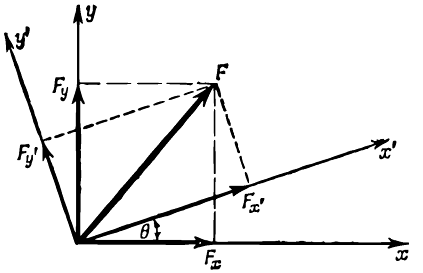
новых условиях мы чувствуем себя точно так же, как и в старых. Здесь может скрываться источник ошибки; верно, что в новом, повернутом относительно старого положении законы остаются прежними, но *неверно* то, что *во вращающейся* системе координат справедливы те же законы, что и в покоящейся. Если проделать достаточно тонкие опыты, то можно установить, что Земля *вращается*, но ни один из этих опытов не скажет нам, что Земля *повернулась*. Другими словами, мы не можем при помощи этих опытов установить ориентацию Земли, но можем сказать, что ориентация изменяется.

Обсудим теперь влияние ориентации системы координат на физические законы. Давайте посмотрим, не будут ли нам снова полезны Мик и Джо. Чтобы избежать ненужных сложностей, предположим, что эти молодые люди находятся в одной точке пространства (мы уже показали, что их системы координат можно перемещать). Пусть оси системы координат Мика повернуты относительно системы координат Джо на угол θ. Обе системы координат изображены на фиг. 11.2, где мы ограничились двумя измерениями. Произвольная точка P снабжается координатами (x, y) в системе Джо и (x', y') в системе Мика. Как и в предыдущем случае, начнем с того, что выразим координаты x' и y' через x, y и θ. Для этого опустим из P перпендикуляры на все четыре координатные оси и проведем AB перпендикулярно PQ. Из чертежа ясно, что x' можно представить как сумму двух отрезков вдоль оси x', а y' — как разность двух отрезков вдоль AB. Длины этих отрезков выражаются через x, y и θ; мы добавляем еще уравнение для третьей координаты:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Теперь (мы поступали так и раньше) установим соотношения между силами, измеряемыми двумя наблюдателями. Предположим, что сила F, имеющая (с точки зрения Джо) составля-

Фиг. 11.3. Составляющие силы в двух системах.



ющие F_x и F_y, действует на расположенную в точке P на фиг. 11.2 частицу массы m. Для простоты сдвинем обе системы координат так, что начала их переместятся в точку P, как показано на фиг. 11.3. Мик скажет нам, что сила, по его мнению, имеет составляющие $F_{x'}$ и $F_{y'}$ вдоль его осей. Составляющая F_x, как и F_y, имеет составляющие вдоль обеих осей x' и y'. Чтобы выразить $F_{x'}$ через F_x и F_y, сложим составляющие этих сил вдоль оси x'; точно таким же образом можно выразить и $F_{y'}$ через F_x и F_y. В результате получим

$$\begin{aligned} F_{x'} &= F_x \cos\theta + F_y \sin\theta, \\ F_{y'} &= F_y \cos\theta - F_x \sin\theta, \\ F_{z'} &= F_z. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Интересно отметить случайность, которая в дальнейшем окажется очень важной: формулы (11.5) и (11.6) для координат P и составляющих F соответственно *тождественны по форме.*

Как и раньше, предположим, что законы Ньютона справедливы в системе координат Джо и выражаются уравнениями (11.1). Снова возникает вопрос: может ли Мик пользоваться законами Ньютона, будут ли их предписания выполняться в повернутой системе координат? Другими словами, если предположить, что уравнения (11.5) и (11.6) дают связь между измеряемыми величинами, то верно ли, что

$$\begin{aligned} m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right) &= F_{x'}, \\ m\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right) &= F_{y'}, \\ m\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right) &= F_{z'}? \end{aligned} \tag{11.7}$$

Чтобы проверить эти уравнения, вычислим левые и правые части независимо, а затем сравним результаты. Чтобы вычислить левые части, умножим уравнения (11.5) на m и продифференцируем их дважды по времени, считая угол θ постоянным. Это дает

$$m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)=m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\cos\theta+m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\sin\theta,$$
$$m\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right)=m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cos\theta-m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\sin\theta, \qquad (11.8)$$
$$m\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Вычислим правые части уравнений (11.7), подставив (11.1) в уравнения (11.6). Получаем

$$F_{x'}=m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\cos\theta+m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\sin\theta,$$
$$F_{y'}=m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cos\theta-m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\sin\theta, \qquad (11.9)$$
$$F_{z'}=m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Глядите! Правые части уравнений (11.8) и (11.9) тождественны; значит, если законы Ньютона верны в одной системе координат, то ими можно пользоваться и в другой системе. Эти рассуждения заставляют нас сделать некоторые важные выводы: во-первых, никто не может утверждать, что избранная им система координат единственна, она может быть, конечно, более *удобной* при решении частных задач. Например, удобно, но не обязательно взять направление силы тяжести за одну из осей координат. Во-вторых, это означает, что любой механизм, если только он является самостоятельным устройством и обладает всем необходимым для создания силы, будет работать одинаково, как бы его ни повернули.

§ 4. Векторы

Насколько нам известно сейчас, не только законы Ньютона, но и все физические законы обладают двумя свойствами, которые называют инвариантностью (или симметрией) относительно перемещений и поворотов координатных осей. Эти свойства столь важны, что для учета их при изучении физических законов была разработана специальная математическая техника.

Решение поставленных в предыдущих параграфах задач потребовало довольно длинных расчетов. Чтобы свести их к минимуму, изобретен могучий математический аппарат. Эта система, называемая *векторным анализом*, определила название главы, хотя в ней, собственно говоря, речь идет о симметрии физических законов. Конечно, можно получить искомый результат, поступая так, как было описано раньше, но, чтобы облегчить и ускорить нашу задачу, мы применяем технику векторного анализа.

Заметим, что в физике важно знать величины двух типов (на самом деле их больше двух, но давайте начнем с двух). Величины первого типа, например число картофелин в мешке, мы будем называть обыкновенными числами, или *скалярами*. Еще одним примером такой величины может служить температура. Другие очень важные в физике величины имеют направление, это, например, скорость; мы должны задать не только быстроту перемещения тела, но и путь, по которому оно движется. Импульс и сила тоже имеют направление, как и смещение: когда кто-нибудь делает шаг, можно сказать не только, как далеко он шагнул, но и *куда* он шагает, т. е. определить направление его движения.

Все величины, имеющие направление, подобно шагу в пространстве, называются *векторами*.

Вектор определяется тремя числами. Чтобы описать шаг, скажем из начала координат в точку P, определяемую координатами x, y и z, мы фактически должны задать три числа. Но мы будем использовать для этой цели один-единственный математический символ $\mathbf{r}$, с которым нам чаще всего придется иметь дело в дальнейшем *. Это *не одно число*: символ $\mathbf{r}$ задается тремя числами: x, y и z. Символ $\mathbf{r}$ означает три числа, но не только *эти* три числа, потому что при переходе к другой системе координат нужно заменить их числами x', y' и z'. Однако мы хотим как можно более упростить нашу математику и используем *один и тот же символ* в качестве представителя трех чисел x, y, z и трех чисел x', y', z'. Точнее говоря, мы используем один и тот же символ в качестве представителя первого набора чисел в одной системе координат и делаем его представителем второго набора чисел, если захотим сменить систему координат. Это удобно потому, что нам не придется изменять формы уравнений при переходе от одной системы координат к другой. Если мы записываем уравнения, используя координаты x, y и z, а затем меняем систему отсчета, то появляются координаты x', y' и z', но мы пишем просто $\mathbf{r}$, условившись, что этот символ служит представителем x, y, z, если мы пользуемся первой системой отсчета, и x', y', z', если мы перешли к другой системе. Три числа, которые описывают векторную величину в заданной системе отсчета, называются *составляющими* (компонентами) вектора в направлении координатных осей системы отсчета. Иначе говоря, мы используем один символ для обозначения

---

* В книгах вектор обозначается полужирной буквой; в рукописях же используется стрелка: $\vec{r}$.

трех букв, и он соответствует наблюдению *одного и того же объекта с трех разных точек зрения.* Произнося слова «один и тот же объект», мы обращаемся к нашей физической интуиции, которая говорит нам, что шаг в пространстве не зависит от того, какими составляющими мы его описываем. Итак, символ $\mathbf{r}$ представляет один и тот же объект независимо от того, как мы ориентируем оси системы отсчета.

Предположим теперь, что существует другая направленная величина, например сила — еще одна величина, которую можно определить, задав связанные с ней три числа. Эти три числа переходят при изменении системы координат в другие три числа по строго определенным математическим правилам. Эти правила должны быть теми же самыми, которые определяли переход тройки чисел x, y, z в x', y', z'. Другими словами, вектор — это величина, определяемая тремя числами, которые преобразуются при изменениях системы координат так же, как составляющие шага в пространстве. Уравнение типа

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}$$

справедливо в *любой* системе координат, если оно верно хотя бы в одной из них. Оно заменяет нам три уравнения

$$F_x = x, \quad F_y = y, \quad F_z = z$$

или соответственно

$$F_{x'} = x', \quad F_{y'} = y', \quad F_{z'} = z'.$$

Тот факт, что физические соотношения между какими-либо величинами можно выразить в виде векторных уравнений, говорит о том, что эти соотношения верны в любой системе координат. Вот почему понятие вектора очень удобно в физике.

Давайте теперь рассмотрим некоторые свойства векторов. В качестве примера «вектора» можно указать скорость, импульс, силу и ускорение. Часто бывает удобно изобразить вектор в виде стрелки, указывающей направление действия. Но почему же можно представить силу стрелкой? Да потому, что она преобразуется по тем же законам, что и «шаг в пространстве». Именно поэтому можно представить силу в виде чертежа, как если бы это изображалось перемещение, причем выберем такой масштаб, чтобы единица силы, например ньютон, соответствовала некоторой длине. Проделав такую процедуру однажды, мы всегда сможем изображать силы в виде отрезков, потому что уравнение типа

$$\mathbf{F} = k\mathbf{r}$$

(где k — некоторая постоянная) имеет вполне определенный смысл. Возможность представлять силу отрезком сулит нам большие выгоды, потому что, изобразив отрезок или стрелку, можно не заботиться о координатных осях. При этом, конечно, всегда можно быстро подсчитать, как изменяются составляющие вектора при поворотах осей, потому что дело сводится к простому геометрическому построению.

§ 5. *Векторная алгебра*

Теперь мы должны описать законы, или правила, регулирующие возможные сочетания различных векторов. Прежде всего мы изучим *сумму двух* векторов. Пусть векторы **a** и **b** задаются в какой-нибудь системе координат составляющими a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z. Предположим, что кому-то пришло в голову составить три числа $a_x + b_x$, $a_y + b_y$, $a_z + b_z$. Получим ли мы в результате вектор? Вы можете сказать: «Разумеется, ведь это три числа, а три числа образуют вектор». Нет, вектор образуют *не любые* три числа! Чтобы задать вектор, мы должны связать заданные нам три числа с координатной системой так, чтобы при повороте координатных осей эти числа «поворачивались» относительно друг друга и «перемешивались» по описанным ранее правилам. Таким образом, мы должны выяснить, во что превращаются числа $a_x + b_x$, $a_y + b_y$, $a_z + b_z$, если известно, что при изменении системы координат числа a_x, a_y, a_z переходят в a'_x, a'_y, a'_z, а b_x, b_y, b_z переходят в b'_x, b'_y, b'_z? Получим ли мы после поворота координатных осей числа $a'_x + b'_x$, $a'_y + b'_y$, $a'_z + b'_z$? Ответ, конечно, будет утвердительным, потому что наше основное уравнение (11.5) определяет так называемое *линейное* преобразование. Если мы применим это преобразование к a_x и b_x и вычислим $a'_x + b'_x$, то окажется, что преобразованное $a_x + b_x$ есть то же самое, что и $a'_x + b'_x$. «Складывая» векторы **a** и **b** по только что описанному правилу, мы получаем новый вектор **c**. Мы запишем это так:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Вектор **c** обладает интересным свойством:

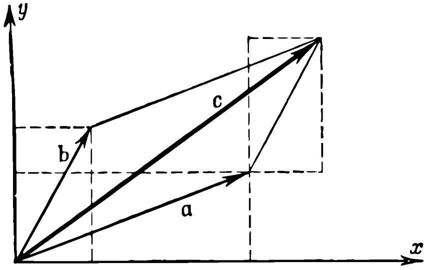
$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$

это легко проверить, написав составляющие вектора **c**. Кроме того,

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Векторы можно складывать в любом порядке.

Каков геометрический смысл $\mathbf{a} + \mathbf{b}$? Как будет выглядеть вектор **c**, если мы, скажем, изобразим **a** и **b** с помощью стрелок? Ответ на этот вопрос дает фиг. 11.4. Мы видим, что прибавить составляющие вектора **b** к составляющим вектора **a** проще всего, приложив соответствующим образом прямо-



Фиг. 11.4. Сложение векторов.

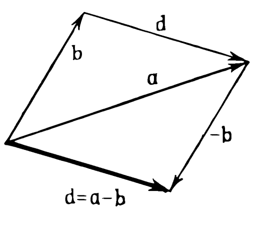
угольник, определяемый составляющими **b**, к такому же прямоугольнику, определяемому составляющими **a**. Поскольку **a** и **b** хорошо подогнаны к своим прямоугольникам, то это все равно, что поставить вектор **b** «ногами» на «голову» вектору **a**. Стрелка, соединяющая «ноги» вектора **a** и «голову» вектора **b**, и будет вектором **c**. Можно поступить иначе: поставить «ноги» **a** на «голову» **b**. Вспомнив геометрические свойства параллелограмма, можно убедиться в том, что мы снова получим тот же вектор **c**. Заметим, что, ставя векторы друг на друга, мы складываем их без помощи координатных осей.

Предположим, что мы умножили вектор **a** на число α. Что нужно понимать под таким произведением? Договоримся понимать под этим вектором с компонентами αa_x, αa_y, αa_z. Докажите сами, что это действительно вектор.

Рассмотрим теперь вычитание векторов. Можно определить вычитание тем же способом, что и сложение, но вместо того, чтобы складывать, будем вычитать составляющие. Можно также определить вычитание как сложение с отрицательным вектором $-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b}$. Результат будет тот же.

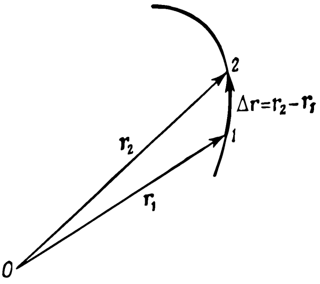
Вычитание векторов показано на фиг. 11.5. На этом чертеже изображено $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$; заметим также, что, зная векторы **a** и **b**, разность $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ можно легко найти из эквивалентного соотношения $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$. Таким образом найти разность векторов даже легче, чем сумму: просто нужно провести вектор, соединяющий **b** и **a**, и вы получите $\mathbf{a} - \mathbf{b}$!

Перейдем теперь к скорости. Почему скорость есть вектор? Если координаты точки равны x, y, z, то скорость ее равна dx/dt, dy/dt, dz/dt. Вектор это или не вектор? Дифференцируя



Фиг. 11.5. Вычитание векторов.

Фиг. 11.6. Перемещение частицы за малое время $\Delta t = t_2 - t_1$.



выражение (11.5), можно найти *закон преобразования* dx'/dt. Видно, что величины dx/dt, dy/dt преобразуются по тому же закону, что и x и y. Таким образом, скорость *есть* вектор. Выражение для скорости можно записать очень интересно:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Постараемся нагляднее представить себе, что такое скорость и почему она вектор. Далеко ли продвинется частица за малое время Δt? *Ответ*: на $\Delta\mathbf{r}$, т. е. если частица находится «здесь» в первое мгновение, а «там» — во второе, то векторная разность положений частицы равна вектору $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, расположенному вдоль направления движения. Как это выглядит, показано на фиг. 11.6. Если разделить этот вектор на промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, то мы получим вектор «средней скорости».

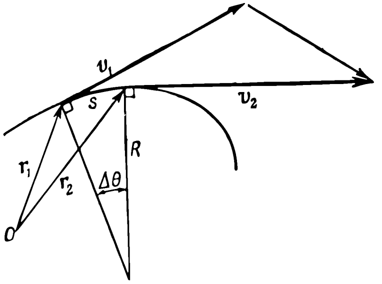
Иначе говоря, под вектором скорости мы понимаем предел разности радиус-векторов, соответствующих моментам $t + \Delta t$ и t, деленной на Δt при Δt, стремящемся к нулю:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{11.10}$$

Скорость есть вектор постольку, поскольку она равна разности двух векторов. Это верно также и потому, что составляющие этого вектора равны dx/dt, dy/dt, dz/dt. Подумав над тем, что сейчас было проделано, мы придем к выводу, что, продифференцировав *любой вектор* по времени, мы снова получим какой-то новый вектор. Таким образом, имеется несколько способов получать новые векторы: 1) умножая вектор на постоянное число; 2) дифференцируя вектор по времени; 3) складывая два вектора или вычитая.

§ 6. Законы Ньютона в векторной записи

Чтобы записать законы Ньютона в векторной форме, мы должны поучиться еще кое-чему и определить вектор ускорения. Этот вектор равен производной по времени вектора



Фиг. 11.7. Криволинейная траектория.

скорости, причем легко показать, что его составляющие равны вторым производным x, y и z по t:

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{11.11}$$

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{11.12}$$

После этого законы Ньютона можно записать таким образом:

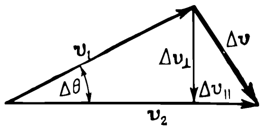
$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}, \tag{11.13}$$

или

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}. \tag{11.14}$$

Теперь задача о доказательстве инвариантности законов Ньютона относительно вращений сводится к следующему: нужно доказать, что **a** (ускорение) есть вектор; это мы уже сделали. Затем нужно доказать, что **F** (сила) есть вектор; это мы *предполагаем*. Следовательно, если сила есть вектор, то уравнение (11.13) будет выглядеть одинаково во всех системах координат, ибо нам известно, что ускорение тоже вектор. Запись уравнений в виде, не содержащем явно x, y, z, привлекательна тем, что нам нет необходимости выписывать *три* уравнения каждый раз, когда мы хотим записать законы Ньютона или другие законы физики. Мы записываем то, что выглядит как *один* закон, хотя фактически, конечно, это три закона для каждой оси системы координат, потому что любое векторное уравнение содержит в себе утверждение, что *все составляющие равны*.

Тот факт, что ускорение — это скорость изменения вектора скорости, помогает найти ускорение в любых, казалось бы, трудных обстоятельствах. Предположим, например, что частица, двигаясь по какой-то сложной кривой (фиг. 11.7), имеет в момент t_1 скорость $\mathbf{v}_1$, а несколько позже, в момент t_2, скорость $\mathbf{v}_2$. Чему равно ускорение? *Ответ*: ускорение равно разности скоростей, деленной на малый промежуток вре-



Фиг. 11.8. Диаграмма для вычисления ускорения.

мени; значит, нужно знать разность скоростей. Как же найти эту разность? Чтобы найти разность двух векторов, проведем вектор через концы векторов $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_1$, иначе говоря, начертим вектор Δ в качестве разности этих двух векторов. Верно? *Нет*! Мы можем поступать так только тогда, когда *начала* векторов расположены в одной точке! Вычитать векторы, приложенные к разным точкам, бессмысленно. Остерегайтесь этого! Чтобы вычесть векторы, нужно начертить другую схему. На фиг. 11.8 векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ перенесены параллельно и равны их двойникам, изображенным на фиг. 11.7. Теперь можно поговорить об ускорении. Ускорение, конечно, просто равно $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$. Интересно заметить, что разность скоростей можно разделить на две части: можно представить себе, что ускорение состоит из *двух составляющих*: $\Delta\mathbf{v}_\parallel$ — вектора, параллельного касательной к пути, и вектора $\Delta\mathbf{v}_\perp$, перпендикулярного к этой касательной. Эти векторы показаны на фиг. 11.8. Касательное к пути ускорение равно, естественно, лишь изменению *длины* вектора, т. е. изменению величины *скорости* v:

$$a_\parallel = \frac{dv}{dt}. \qquad (11.15)$$

Другую, поперечную составляющую ускорения легко вычислить, взглянув на фиг. 11.7 и 11.8. За короткое время Δt изменение угла между $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ равно малому углу $\Delta\theta$. Если величина скорости равна v, то

$$\Delta v_\perp = v\Delta\theta,$$

а ускорение a равно

$$a_\perp = v\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Теперь нам нужно знать $\Delta\theta/\Delta t$. Эту величину можно найти так: если в данный момент кривую можно приблизительно заменить окружностью радиусом R, то, поскольку за время Δt частица пройдет расстояние $s = v\Delta t$, изменение угла равно

$$\Delta\theta = v\frac{\Delta t}{R}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v}{R}.$$

Таким образом, как мы уже установили ранее,

$$a = \frac{v^2}{R}. \qquad (11.16)$$

§ 7. Скалярное произведение векторов

Давайте еще немного займемся свойствами векторов. Легко понять, что *длина* шага в пространстве одинакова во всех координатных схемах. Следовательно, если какому-то шагу r соответствуют составляющие x, y, z в одной системе координат и составляющие x', y', z' в другой системе, то расстояние $r = |\mathbf{r}|$ одно и то же в обеих системах. Сначала мы, конечно, должны вывести два расстояния

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

и

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

а затем проверить, что эти обе величины равны. Чтобы не возиться с квадратным корнем, будем сравнивать квадраты расстояний. Мы должны, таким образом, показать, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \tag{11.17}$$

Подставив в это уравнение определяемые соотношением (11.5) значения x', y', z', мы увидим, что это действительно так. Значит, кроме уже изученных нами векторных уравнений, существуют еще какие-то соотношения, верные в любой системе координат.

Незаметно мы получили новый тип величин. Мы можем построить функцию x, y и z, называемую *скалярной функцией*, — величину, которая не имеет направления, и одинакова в обеих системах координат. Из вектора можно построить скаляр. Хорошо бы найти общее правило для этого построения. Собственно говоря, мы уже нашли это правило: надо возвести в квадрат каждую из составляющих вектора и сложить их. Определим теперь новую величину, которую обозначим $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$. Это не вектор, а скаляр; это число, одинаковое во всех координатных системах и определяемое как сумма квадратов трех составляющих вектора:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{11.18}$$

Вы спросите: «В какой системе координат?» Но раз это число не зависит от системы координат, то ответ одинаков в *любой* системе координат. Мы имеем дело с новым *видом* величины, с *инвариантом*, или *скаляром*, полученным «возведением вектора в квадрат». Если теперь определить, исходя из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, величину

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{11.19}$$

то можно убедиться, что эта величина совпадает в штрихованной и нештрихованной системах координат. Чтобы доказать это, заметим, что это верно для величин $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$, где $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Сумма квадратов $(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2+(a_z+b_z)^2$ — инвариант:

$$(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2+(a_z+b_z)^2=$$
$$=(a_{x'}+b_{x'})^2+(a_{y'}+b_{y'})^2+(a_{z'}+b_{z'})^2. \quad (11.20)$$

Раскроем скобки в обеих сторонах этого уравнения. Перекрестные произведения дадут нам выражения типа (11.19), а суммы квадратов составляющих $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — выражения (11.18). Инвариантность слагаемых типа (11.18) приводит к инвариантности перекрестных произведений типа (11.19).

Величина $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ называется *скалярным произведением* двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и имеет много интересных и полезных свойств. Например, легко доказать, что

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}. \quad (11.21)$$

Есть еще очень простой геометрический способ вычисления $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, при котором не надо определять составляющих $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; просто $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ есть произведение длин векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на косинус угла между ними. Почему? Предположим, что мы выбрали такую систему координат, в которой вектор $\mathbf{a}$ направлен вдоль оси x; в этом случае вектор $\mathbf{a}$ имеет единственную ненулевую составляющую a_x, которая равна длине вектора $\mathbf{a}$. Таким образом, уравнение (11.19) сводится в этом случае к $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x$, что равно произведению длины вектора $\mathbf{a}$ на составляющую вектора $\mathbf{b}$ по направлению $\mathbf{a}$, которая в свою очередь равна $b\cos\theta$, т. е.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos\theta.$$

Таким образом, в этой частной системе координат мы доказали, что $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ равно произведению длин векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на косинус угла между ними θ. Но *если это верно в одной системе координат, то это верно и во всех системах*, потому что $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ не зависит от выбора системы координат.

Что хорошего может дать нам эта новая величина? Нужно ли физику скалярное произведение? Да, оно необходимо ему постоянно. Например, в гл. 4 мы назвали кинетической энергией величину $^1/_2mv^2$, но если частица движется в пространстве, то нужно возвести в квадрат отдельно составляющие скорости x, y и z, так что формулу для кинетической энергии можно записать в виде

$$\text{к. э.}=\frac{1}{2}m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right). \quad (11.22)$$

Энергия не имеет направления. Импульс же направление имеет, это — вектор, и он равен произведению массы на вектор скорости.

Другим примером скалярного произведения может служить работа, произведенная силой при перемещении какого-нибудь предмета с одного места на другое. Мы еще не дали определения работы, она равна изменению энергии, прибавке в весе, после того как сила $\mathbf{F}$ поработает вдоль пути $\mathbf{s}$:

$$\text{Работа} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}. \tag{11.23}$$

Иногда целесообразно говорить о составляющей вдоль определенного направления (например, вдоль вертикали, потому что это направление силы тяжести). Для этого удобно ввести *единичный вектор* вдоль интересующего нас направления. Под единичным вектором мы будем понимать вектор, скалярное произведение которого на себя равно единице. Пусть это будет вектор $\mathbf{i}$; тогда $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$. Скалярное произведение $\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}$ равно $a\cos\theta$, т. е. оно равно составляющей вектора $\mathbf{a}$ вдоль направления $\mathbf{i}$. Это наилучший способ получить составляющую вектора. Поступая так, мы можем найти все составляющие вектора и получить забавную формулу.

Предположим, что нам задана какая-то система координат x, y и z. Введем три вектора: $\mathbf{i}$ — единичный вектор вдоль оси x, $\mathbf{j}$ — единичный вектор вдоль оси y и $\mathbf{k}$ — единичный вектор вдоль оси z. Ясно, что $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$. Чему же равно произведение $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$? Если угол между векторами прямой, то их скалярное произведение равно нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1, \\ &\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1, \\ &\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1. \end{aligned} \tag{11.24}$$

Используя эти свойства векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, можно записать любой вектор $\mathbf{a}$ в виде

$$\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}. \tag{11.25}$$

Таким образом, можно от составляющих вектора легко перейти к самому вектору.

Мы изучили далеко не все свойства векторов. Однако, прежде чем углубиться в этот вопрос, научимся сперва применять обсужденные сейчас идеи в физике. И тогда, когда мы хорошо овладеем основным материалом, будет легче продвинуться дальше, не впадая в ошибки. Позднее мы увидим, что удобно определить еще одно произведение двух векторов, которое называется векторным произведением и записывается в виде $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Однако обсуждение этого вопроса лучше отложить до следующей главы.

Глава **12**

ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛЫ

§ 1. Что есть сила?

Хотя изучение законов физики интересно и поучительно, хотя они и помогают нам понимать природу и овладевать ее силами, все же порой стоит остановиться и поразмыслить: что же они на самом деле значат? Смысл любого утверждения — вещь, которая издавна, с незапамятных времен, интересовала и тревожила философов, а уж смысл физических законов тем более должен волновать нас, ведь повсеместно считается, что в этих законах таятся некоторые реальные знания. Смысл истины — это глубочайший философский вопрос; всегда важно вовремя спросить: что это значит?

Спросим же: в чем смысл физических законов Ньютона, в чем смысл формулы $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$? В чем смысл силы, массы и ускорения? Мы интуитивно понимаем, что такое масса; мы можем также *определить* ускорение, если нам понятно, что́ такое место и что́ такое время. Смысл этих понятий мы поэтому не будем обсуждать, а сосредоточимся на новом понятии *силы.* И здесь ответ тоже весьма прост: если тело ускоряется, значит на него действует сила. Так говорят законы Ньютона, и самое точное и красивое из мыслимых определений силы состояло бы в том, что сила есть масса тела, умноженная на его ускорение.

Имеется, положим, закон, что импульс сохраняется тогда, когда сумма внешних сил равна нулю. И вот у нас спрашивают: «А что это *значит:* сумма внешних сил равна нулю?» И мы любезно отвечаем: «Когда полный импульс постоянен, то сумма внешних сил равна нулю». Нет, здесь что-то не то. Ведь ничего нового мы при этом не сказали. Обнаружив основной закон, утверждающий, что сила есть масса на ускорение, а потом *определив* силы как произведение массы на ускорение, мы ничего нового не открываем. Можно также определить силу и на другой манер: движущееся тело, на которое сила не действует, продолжает двигаться по прямой с постоянной скоростью. Тогда, увидев, что тело *не* движется по прямой с постоянной скоростью, мы можем утверждать, что на него действует сила. Но такие высказывания не могут составить содержание физики: зачем же ей гонять определения по кругу? Несмотря на это, приведенное выше положение Ньютона, по-видимому, самое точное из всех определений силы, одно из тех, которые так много говорят сердцу математика. И все же оно совершенно бесполезно, потому что из одного определения никогда ничего никто не выводил. Можно деньденьской просиживать в кресле, определяя слова по своему хотению, но совсем иное дело — понять, чтó происходит при столкновении двух шаров или чтó бывает, когда груз висит на пружинке. *Поведение* тел и выбор определений — между этими вещами нет ничего общего.

Пусть, например, мы бы решились говорить, что тело, предоставленное самому себе, лежит на месте и не движется; тогда, заметив, что что-то движется, мы бы стали утверждать, будто на него действует «жила»— мера охоты к перемене мест. Мы получили бы прекрасный новый закон, все было бы хорошо, кроме тех случаев, когда действует «жила». Как видите, все было бы подобно нашему определению силы и точно так же не несло бы в себе никакой информации. Истинное же содержание законов Ньютона таково: предполагается, что сила обладает *независимыми свойствами* в дополнение к закону $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$; но *характерные* независимые свойства сил не описал полностью ни Ньютон, ни кто-нибудь еще; поэтому физический закон $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ — закон неполный. Он подразумевает, что, изучив характеристики величины, определяемой как произведение m на $\mathbf{a}$, мы обнаружим в них некоторую простоту; закон этот дает нам хорошую программу анализа природы, он подсказывает нам, что свойства этой величины — силы — могут оказаться простыми, что ее стоит изучать.

Первый пример таких сил — полный закон тяготения, предложенный Ньютоном. Формулируя свой закон, он отвечал на вопрос: что такое сила? Если бы ничего, кроме тяготения, не существовало, то сочетание этого закона и закона силы (второго закона движения) оказалось бы завершенной теорией. Но, кроме тяготения, существует и многое другое, и мы собираемся пользоваться законами Ньютона во всевозможных положениях. Поэтому нам придется кое-что порассказать о свойствах сил.

К примеру, говоря о силе, мы всегда неявно предполагаем, что когда нет физических тел, то сила равна нулю. Если мы видим, что сила не равна нулю, мы ищем по соседству ее *источник*. Это предположение совсем не то, что введенная нами «жила».

Одна из важнейших характеристик силы — ее материальное происхождение; и это свойство как раз *нельзя считать* определением.

Ньютон привел еще одно правило, касающееся сил: силы между взаимодействующими телами равны и противоположны; действие равно противодействию. И это правило, оказывается, не совсем верно. Да и сам закон $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ не совсем верен; будь он определением, мы бы должны были утверждать, что он точно верен *всегда*; а на самом деле это не так.

Вы можете заявить: «А мне не нравится эта неточность, я хочу, чтобы все определялось точно, да и во многих книжках написано, что наука — вещь точная, что в ней *все* определено». Но сколько бы вы ни настаивали на точном определении силы, вы его никогда не получите! Во-первых, и сам Второй закон Ньютона не точен, а во-вторых, чтобы понять физические законы, вы должны усвоить себе раз и навсегда, что все они — в какой-то степени приближения.

Любое простое высказывание является приближенным; в виде примера рассмотрим некоторый предмет... кстати, *что такое* предмет? «Философы» всегда отвечают: «Ну, например, стул».

Стоит услышать это и сразу становится ясно, что они сами не понимают того, о чем говорят. *Что* есть стул? Стул имеет определенную массу... Определенную? Насколько определенную? Из него время от времени вылетают атомы — немного, но все же! На него садится пыль, из него сыплется труха, да и лак со временем сходит. Четко определить стул, сказать точно, какие атомы принадлежат ему, какие — воздуху, а какие — лаку, невозможно. Значит, массу стула можно определить лишь приближенно. Точно так же невозможно определить массу отдельного предмета, ибо таких предметов не существует, в мире нет одиноких, обособленных объектов; любая вещь есть смесь множества других, и мы всегда имеем дело с рядом приближений и идеализаций. Вся суть в идеализации. В очень хорошем приближении (около 1 к 10^{10}) количество атомов стула за минуту не меняется. Если вас эта точность устраивает, вы имеете право считать массу стула постоянной. Точно так же можно идеально изучить и характеристики силы, стоит только не гнаться за точностью. Вас может не удовлетворить этот приближенный взгляд на природу, который пытается выработать физика (все время стремясь повысить точность приближений), вы можете предпочесть математическое определение, но оно никогда не действует в реальном мире. Математические определения хороши для математики — там можно полностью и до конца следовать логике, а физический мир сложен. Мы об этом уже говорили, приводя такие примеры, как океанские волны и бокал вина. Пытаясь разделить их на части, мы толкуем отдельно о массе вина и отдельно о массе бокала. Но как можно узнать, где одно, где другое, раз одно растворимо в другом? И сила, действующая на обособленный предмет, уже включает неточность, и всякая система рассуждений о реальном мире, по крайней мере сегодня, предполагает разного рода приближения.

Эта система ничем не похожа на математические рассуждения. В них все может быть определено, и в итоге всегда *не известно*, о чем говорят.

Действительно, ведь все великолепие математики в том и состоиг, что *в ней мы не знаем, о чем толкуем*. Ее законы, ее доказательства, ее логика не зависят от того, *чего* они касаются, — и в этом своя, особая красота. Когда вы имеете другую совокупность объектов, подчиняющихся той же системе аксиом, что и евклидова геометрия, то вы можете выдвинуть новые определения и делать выводы, сообразуясь с правильной логикой, — все следствия окажутся правильными, и совершенно неважно, чего они касаются. А в природе? Когда вы проводите линию или провешиваете ее при помощи луча света и теодолита (как это делается на геодезических съемках) — следует ли природа Евклиду? Нет, вы делаете приближение; крест на объективе имеет определенную толщину, а геометрическая линия — никакой; значит, применять ли в съемках евклидову геометрию или нет — это вопрос физики, а не математики.

Конечно, с экспериментальной (а не математической) точки зрения вам нужно знать, применимы ли законы Евклида к тому роду геометрии, которую вы используете, измеряя окрестности; вы предполагаете, что да, применимы. И, действительно, они прекрасно работают; прекрасно, но не точно, потому что ваши съемочные линии — это не настоящие геометрические линии. Приложимы или нет абстрактные евклидовы прямые к линиям, провешиваемым на опыте, — есть дело самого опыта; на этот вопрос чистым рассуждением не ответить.

Точно таким же образом вы не можете назвать $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ определением, вывести из него все чисто математически и сделать механику математической теорией: механика — это описание природы. Выдвигая подходящие постулаты, всегда можно создать математическую систему вроде евклидовой, но вы не можете создать математики мира; рано или поздно вам пришлось бы отвечать на вопрос: выполняются ли эти аксиомы на объектах природы? И вы немедленно завязли бы среди этих запутанных, «нечистых» реальных предметов, — правда, добиваясь все большей и большей точности приближений.

§ 2. *Трение*

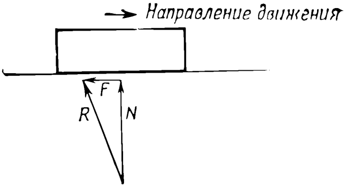
Итак, чтобы по-настоящему понять законы Ньютона, мы должны обсудить свойства сил; цель этой главы — начать это обсуждение и составить своего рода дополнение к законам Ньютона. Мы уже знакомы со свойствами ускорения и с другими сходными представлениями, теперь же нам предстоит заняться свойствами сил. Из-за сложности их мы в этой главе (в отличие от прежних) не будем гнаться за точными формулировками. Чтобы начать с конкретной силы, рассмотрим сопротивление, которое воздух оказывает летящему самолету. Каков закон этой силы? (Мы *обязаны* найти его; ведь закон существует для каждой силы!) Едва ли только он будет прост. Стоит представить себе торможение воздухом самолета — свист ветра в крыльях, вихри, порывы, дрожание фюзеляжа и множество других сложностей, — чтобы понять, что этот закон вряд ли выйдет простым и удобным. Тем замечательней тот факт, что у силы очень простая закономерность: $F \approx cv^2$ (постоянная, умноженная на квадрат скорости).

Каково же положение этого закона среди других? Подобен ли он закону $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$? Отнюдь. Во-первых, он эмпирический, и получен он грубыми измерениями в аэродинамической трубе. Но вы возразите: «Что ж, закон $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ тоже мог бы быть эмпирическим». Но разве в этом дело? Различие не в эмпиричности, а в том, что, насколько мы понимаем, этот закон трения есть результат множества влияний и в основе своей ничуть не прост. Чем больше мы станем его изучать, чем точнее мерить, тем *сложней* (а не *проще*) представится он нам. Иными словами, все глубже вникая в закон торможения самолета, мы все ясней будем понимать его «фальшь». Чем глубже взгляд, чем аккуратней измерения, тем усложненней становится истина; она не предстанет перед нами как итог простых фундаментальных процессов (впрочем, мы и с самого начала об этом догадывались). На очень слабых скоростях (самолету, например, они даже недоступны) закон меняется: торможение уже зависит от скорости почти линейно. Или, к примеру, торможение шара (или пузырька воздуха или чего-нибудь еще) за счет трения о вязкую жидкость (наподобие меда), — оно тоже при малых скоростях пропорционально скорости, а на больших, когда образуются вихри (не в меде, конечно, а в воде или воздухе), опять возникает примерная пропорциональность квадрату скорости ($F = cv^2$); при дальнейшем росте скорости и это правило не годится. Можно, конечно, говорить: «Ну, здесь слегка меняется коэффициент». Но ведь это просто уловка.

Во-вторых, есть и другие сложности: можно ли, скажем, эту силу делить на части — на силу трения крыльев, фюзеляжа, хвоста и т. д.? Конечно, когда нужно бывает узнать вращательные моменты, действующие на части самолета, то так делать можно, но тогда уже надо иметь специальный закон трения для крыльев и т. д. И выясняется тот удивительный факт, что сила, действующая на крыло, зависит от другого крыла, т. е. если убрать самолет и оставить в воздухе одно крыло, то сила будет совсем не такой, какой она была бы, если бы в воздухе был весь самолет. Причина, конечно, в том, что ветер, бьющий в нос самолета, стекает на крылья и меняет силу торможения. И хотя кажется чудом, что существует такой простой, грубый эмпирический закон, пригодный для создания самолетов, но он не из тех законов физики, которые называют *основными*: по мере углубления он становится все сложней и сложней. Какое-нибудь изучение зависимости коэффициента c от формы носа самолета сразу разрушает его простоту. Никакой простой зависимости не остается. То ли дело — закон тяготения: он прост, и дальнейшее его углубление только подчеркивает это.

Мы только что говорили о двух типах трения, возникающих в результате быстрого движения в воздухе или медленного в меде. Но есть еще вид трения — сухое, или трение скольжения: о нем говорят тогда, когда одно твердое тело скользит по другому. Чтобы продолжать движение, такому телу нужна сила. Ее называют силой трения. Происхождение ее — вопрос очень запутанный. Обе соприкасающиеся поверхности неравномерны, если разглядывать их на атомном уровне. В точках соприкосновения атомы сцепляются; при нажиме на тело сцепка рвется и возникают колебания (во всяком случае, происходит нечто похожее). Прежде думали, что механизм трения несложен: поверхность покрыта неровностями и трение есть результат подъема скользящих частей на эти неровности; но это неправильно, ведь тогда бы не было потерь энергии, а на самом деле энергия на трение тратится. Механизм потерь иной: неровности при скольжении сминаются, возникают колебания и движение атомов, и тепло растекается по обоим телам. И здесь крайне неожиданным оказывается, что эмпирически это трение можно приближенно описать простым законом. Сила, нужная для того, что-

Фиг. 12.1. Соотношение между силой трения и нормальной составляющей силы при скольжении.



бы преодолевать трение и тащить один предмет по поверхности другого, зависит от силы, направленной по нормали (по перпендикуляру) к поверхностям соприкосновения. В довольно хорошем приближении можно считать, что сила трения пропорциональна нормальной силе с более или менее постоянным коэффициентом:

$$F = \mu N, \tag{12.1}$$

где μ — *коэффициент трения* (фиг. 12.1). Хотя коэффициент μ не очень постоянен, эта формула оказывается хорошим эмпирическим правилом, позволяющим прикидывать, какая сила понадобится в тех или иных практических или инженерных обстоятельствах. Только когда нормальная сила или быстрота движения очень уж велика, закон отказывает: выделяется чересчур много тепла. Важно понимать, что у любого из этих эмпирических законов есть ограничения, вне которых они не работают.

Приближенную справедливость формулы $F = \mu N$ можно засвидетельствовать простым опытом. Положим брусок весом W на плоскость, наклоненную под углом θ. Подымем плоскость круче, пока брусок под тяжестью собственного веса не соскользнет с нее. Составляющая веса вниз вдоль плоскости $W \sin \theta$ равна силе трения F, раз брусок скользит равномерно. Слагающая веса, нормальная к плоскости, это $W \cos \theta$; она и есть нормальная сила N. Формула превращается в $W \sin \theta = \mu W \cos \theta$, откуда $\mu = \sin \theta / \cos \theta = \operatorname{tg} \theta$. Согласно этому закону, при определенном наклоне плоскости брусок начинает скользить. Если брусок нагрузить дополнительным весом, то все силы в формуле возрастут в той же пропорции, и W из формулы выпадет. Если величина μ не изменилась, то нагруженный брусок опять соскользнет при таком же наклоне. Определив из опыта угол θ, убедимся, что при большем весе бруска скольжение все равно начинается на том же угле наклона. Даже если вес возрос многократно, это правило соблюдается. Мы приходим к заключению, что от веса коэффициент трения не зависит.

Когда проделываешь этот опыт, легко заметить, что при правильном угле наклона θ брусок скользит не непрерывно, а с остановками: на одном месте он застрянет, а на другом рванется вперед. Такое поведение есть признак того, что коэффициент трения только грубо можно считать постоянным: он меняется от места к месту. Столь же неуверенное поведение наблюдается и при изменении нагрузки бруска. Различия в трении возникают от разной гладкости или твердости частей поверхности, от грязи, ржавчины и прочих посторонних влияний. Таблицы, в которых перечислены коэффициенты трения «стали по стали», «меди по меди» и прочее, — все это сплошное надувательство, ибо в них этими мелочами пренебрегают, а ведь они-то и определяют значение μ. Трение «меди о медь» и т. д. — это на самом деле трение «о загрязнения, приставшие к меди».

В опытах описанного типа трение от скорости почти не зависит. Многие верят, что трение, которое нужно преодолеть, чтобы привести предмет в движение (статическое), больше силы, необходимой для поддержания уже возникшего движения (трение скольжения). Но на сухих металлах трудно заметить какую-либо разницу. Мнение это порождено, вероятно, опытами, в которых присутствовали следы масла или смазки, а может быть, там бруски закреплялись пружинкой или чем-нибудь гибким, как бы привязываясь к опоре.

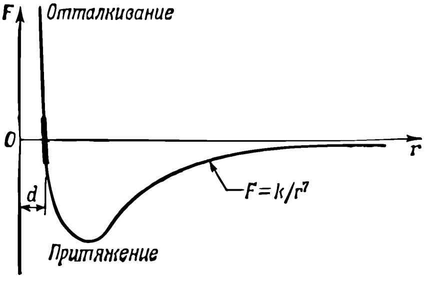
Очень трудно добиться точности в количественных опытах по трению, и до сей поры трение не очень хорошо проанализировано, несмотря на огромное значение такого анализа для техники. Хотя закон $F = \mu N$ для стандартных поверхностей почти точен, причину такого вида закона на самом деле не понимают. Чтобы показать, что μ мало зависит от скорости, нужны особо тонкие эксперименты, потому что от быстрых колебаний нижней поверхности видимое трение сильно падает. В опытах на больших скоростях надо заботиться, чтобы тела не дрожали, а то видимое трение сразу уменьшается. Во всяком случае, этот закон трения относится к тем полуопытным законам, которые поняты не до конца и не становятся понятней, несмотря на огромные усилия. Оценить коэффициент трения между двумя веществами сейчас практически никому не под силу.

Раньше было уже сказано, что попытки измерить μ при скольжении чистых веществ (меди по меди) ведут к сомнительным результатам, потому что соприкасающиеся поверхности — не чистая медь, а смеси окислов и прочих загрязнений. Если мы хотим получить совершенно чистую медь, если мы вычистим и отполируем поверхности, дегазируем вещество в вакууме и соблюдем все необходимые предосторожности, то все равно μ мы не получим. Потому что два куска меди слипнутся, и тогда хоть ставь плоскость торчком! Коэффициент μ, для умеренно жестких поверхностей обычно меньший единицы, тут вырастает до нескольких единиц! Причина такого неожиданного поведения вот в чем: когда соприкасаются атомы одного сорта, то они не могут «знать», что они принадлежат разным кускам меди. Будь там между ними другие атомы (атомы окислов, смазки, тонких поверхностных слоев загрязнений), тогда атомам меди было бы «ясно», находятся ли они на одном куске или на разных. Вспомните теперь, что именно из-за сил притяжения между атомами медь является твердым веществом, и вам станет понятно, почему невозможно правильно определить коэффициент трения для чистых металлов.

То же явление наблюдается в простом домашнем опыте со стеклянной пластинкой и бокалом. Поставьте бокал на пластинку, накиньте на него петлю и тяните; он неплохо скользит и коэффициент трения чувствуется; конечно, этот коэффициент слегка нерегулярен, но все же это коэффициент. Увлажните теперь пластинку и ножку бокала и потяните; вы почувствуете, что они слиплись. Внимательно вглядевшись, можно обнаружить даже царапины. Дело в том, что вода может удалять жир и прочие вещества, засоряющие поверхность; остается чистый контакт стекло — стекло. Этот контакт настолько хорош, что разорвать его не так-то просто: нарушить его трудней, чем вырвать кусочки стекла, вот и возникают царапины.

§ 3. *Молекулярные силы*

А теперь перейдем к характеристике молекулярных сил. Это силы, действующие между атомами; ими в конечном счете и вызывается трение. Классической физике так и не удалось удовлетворительно объяснить молекулярные силы. Чтобы их полностью понять, понадобилась квантовая механика. Эмпирически, однако, силу, действующую между двумя атомами, можно изобразить примерно так, как на фиг. 12.2, где эта сила F представлена как функция расстояния r между



Фиг. 12.2. Сила, действующая между двумя атомами, как функция расстояния между ними.

атомами. Бывают и другие случаи: в молекуле воды, например, отрицательные заряды размещены главным образом на атоме кислорода и центры положительных и отрицательных зарядов оказываются не в одной точке, поэтому соседние молекулы испытывают действие сравнительно больших сил. Называют эти силы *диполь-дипольными.* Но во многих системах заряды сбалансированы куда лучше, в частности в газообразном кислороде они почти симметричны. В этом случае, хоть минус- и плюс-заряды рассеяны по молекуле, распределение их таково, что центры минус- и плюс-зарядов совпадают. Молекулы, центры которых не совпадают, называются *полярными*; произведение заряда на промежуток между центрами называется *дипольным моментом.* У неполярных молекул центры зарядов совпадают. Для них для всех оказывается, что, хотя суммарный общий заряд равен нулю, сила на больших расстояниях ощущается как притяжение и изменяется обратно пропорционально седьмой степени удаления, т. е. $F = k/r^7$, где k — постоянная, зависящая от типа молекул. Почему это так, вы узнаете тогда, когда выучите квантовую механику. У диполей силы притяжения еще заметнее. И наоборот, если атомы или молекулы тесно сблизить, они очень сильно отталкиваются; именно по этой причине мы не проваливаемся на нижний этаж!

Эти молекулярные силы можно увидеть почти непосредственно и в опыте со скольжением бокала по стеклу, и в опыте с двумя тщательно отшлифованными и пригнанными плоскими поверхностями. Примером таких поверхностей могут служить плитки Иоганссона, которыми пользуются в машиностроении как стандартами для точных измерений длин. Если, прижав одну из плиток к другой, осторожно поднять верхнюю плитку, то нижняя тоже поднимется. Ее поднимут молекулярные силы, демонстрируя прямое притяжение атомов одной плитки к атомам другой.

И все же эти молекулярные силы притяжения не являются фундаментальными в том смысле, в каком фундаментально тяготение; они возникают в итоге неимоверно сложного взаимодействия всех электронов и ядер одной молекулы со всеми электронами и ядрами другой. Никакой простой формулы, которая бы учитывала все эти сложности, нельзя получить, так что это явление не фундаментальное.

Именно потому, что молекулярные силы притягивают на большом удалении и отталкивают на малом (см. фиг. 12.2), и существуют твердые тела; их атомы скреплены воедино взаимным притяжением, но держатся все же на расстоянии друг от друга (если их сблизить, сразу включается отталкивание). На том расстоянии d, где кривая на фиг. 12.2 пересекает ось r, сила равна нулю, т. е. наступает равновесие; на этом расстоянии и располагается молекула от молекулы. Если молекулы сблизить теснее, чем на расстояние d, то возникает отталкивание, изображенное частью кривой выше оси r. Но даже для ничтожного сближения требуются огромные силы, потому что кривая круто идет вверх на расстояниях, меньших d. А стоит чуть развести молекулы, как начинается слабое притяжение, возрастающее по мере удаления. Если же их резко потянуть, то они навсегда отделятся и связь разорвется.

Когда молекулы лишь *слегка* сводят или *слегка* разводят от положения равновесия d, то маленький участок кривой близ этого положения можно считать за прямую линию. Поэтому часто обнаруживается, что при небольших сдвигах *сила пропорциональна смещению*. Этот принцип известен как *закон Гука*, или *закон упругости*; он утверждает, что силы, стремящиеся после деформации тела вернуть его в начальное состояние, пропорциональны этой деформации. Закон, конечно, соблюдается лишь тогда, когда деформации малы; когда они велики, тело либо разорвется, либо сломается, смотря по характеру деформаций. Величина силы, до которой закон Гука еще действует, зависит от материала; скажем, у теста или замазки она очень мала, у стали — относительно велика. Закон Гука легко можно продемонстрировать на длинной стальной пружине, подвешенной вертикально. Грузик на нижнем конце пружины слегка раскручивает витки проволоки и тем самым немного оттягивает вниз каждый виток, приводя в общем на большом числе витков к заметному смещению. Если измерить общее удлинение пружины, скажем от гирьки весом 100 *г*, то окажется, что каждые добавочные 100 *г* груза вызовут примерно такое же удлинение, что и первые 100 *г*. Это постоянство отношения силы к смещению нарушается, когда пружина перегружена; тогда закон Гука больше не выполняется.

§ 4. Фундаментальные силы. Поля

Мы хотим побеседовать теперь об оставшихся фундаментальных силах. Называем мы их фундаментальными потому, что законы их действия фундаментально просты. Сперва рассмотрим электрическую силу.

Тела несут в себе электрические заряды, которые состоят просто из электронов и протонов. Если два тела заряжены, меж ними действует электрическая сила; если величины зарядов равны соответственно q_1 и q_2, то сила изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между зарядами

$$F = (\text{const}) \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Для разноименных зарядов этот закон похож на закон тяготения, но для *одноименных* сила становится отталкивающей и ее знак (направление) меняется. Сами заряды q_1 и q_2 могут быть и положительными и отрицательными; практически, пользуясь формулой, можно получить правильный знак силы, если поставить возле q их знаки. Сила направлена вдоль отрезка, соединяющего заряды. Коэффициент в формуле зависит, конечно, от выбора единиц силы, заряда и длины. Обычно заряд измеряют в *кулонах*, промежуток — в *метрах*, а силу — в *ньютонах*. Чтобы получить силу в ньютонах, константа (по историческим причинам ее пишут в виде $1/4\pi\varepsilon_0$) должна принимать численное значение

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=8{,}99\cdot 10^9 \textit{ ньютон}\cdot\textit{м}^2/\textit{кулон}^2, \tag{а}$$

т. е.

$$\varepsilon_0=8{,}854\cdot 10^{-12} \textit{ кулон}^2/\textit{ньютон}\cdot\textit{м}^2. \tag{б}$$

Итак, закон силы для покоящихся зарядов имеет вид

$$\mathbf{F}=\frac{q_1q_2\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{12.2}$$

В природе самый важный из всех зарядов — это заряд отдельного электрона, он равен $1{,}60\cdot 10^{-19}$ *кулон*. Кто работает не с большими зарядами, а с электрическими силами между фундаментальными частицами, те предпочитают как-то выделить сочетание $(q_{эл})^2/4\pi\varepsilon_0$, в котором $q_{эл}$ определяется как заряд электрона. Это сочетание часто встречается, и для упрощения расчетов его обозначают e^2; его численное значение в системе СИ оказывается равным $(1{,}52\cdot 10^{-14})^2$. Удобство пользоваться константой в этой форме заключается в том, что сила в *ньютонах*, действующая между двумя электронами, запишется просто как e^2/r^2 (r дано в *метрах*), без каких-либо коэффициентов. На самом деле электрические силы намного сложней, чем следует из этой формулы, потому что формула относится к покоящимся телам. Сейчас мы рассмотрим более общий случай.

Анализ фундаментальных сил (не сил трения, а электрических сил или сил тяготения) связан с интересным и очень важным понятием.

Теория этих сил намного сложнее, чем об этом следует из закона обратных квадратов. Закон этот действует лишь тогда, когда взаимодействующие тела находятся в покое. Поэтому нужен усовершенствованный метод обращения с очень сложными силами — силами, которые возникают, когда тела начинают двигаться запутанным образом. Как оказалось, для анализа сил такого типа очень полезен подход, основанный на введении понятия «поля». Чтобы пояснить мысль на примере, скажем, электрической силы, положим, что в точке P находится заряд q_1, а в точке R — заряд q_2. Сила, действующая между зарядами, равна

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{r^3}. \tag{12.3}$$

Чтобы проанализировать эту силу при помощи понятия поля, мы говорим, что заряд q_1 в точке P создает в точке R такие «условия», при которых заряд q_2, попадая в R, «ощущает» действие силы. Это один из мыслимых путей описания действия силы. Может быть, он выглядит странно: мы говорим, что действие силы $\mathbf{F}$ на заряд q_2 в точке R можно разбить на две части — на q_2 и $\mathbf{E}$, причем величина $\mathbf{E}$ существует в точке R безотносительно к тому, есть ли там заряд или нет (лишь бы все прочие заряды были на своих местах). Величина $\mathbf{E}$ есть «условие», созданное зарядом q_1, а $\mathbf{F}$ — ответ, отклик заряда q_2 на $\mathbf{E}$. Величину $\mathbf{E}$ называют *электрическим полем*. Это — вектор. Формула для электрического поля $\mathbf{E}$, созданного в точке R зарядом q_1, находящимся в точке P, такова: заряд q_1, умноженный на постоянную $1/4\pi\varepsilon_0$, деленный на r^2 (r — расстояние от P до R); поле действует по направлению радиус-вектора (вектор направления радиус-вектора — это радиус-вектор, деленный на свою длину). Таким образом, выражение для $\mathbf{E}$ таково:

$$\mathbf{E} = \frac{q_1 \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{12.4}$$

А затем мы пишем

$$\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}, \tag{12.5}$$

т. е. связываем силу, поле и заряд в поле. В чем же суть всего этого? Суть в том, что анализ разделяется на две части. Одна часть говорит, что что-то *создает* поле, а другая — что оно *действует* на что-то. Позволяя нам рассматривать две части независимо, это разделение упрощает во многих случаях расчеты трудных задач. Когда зарядов много, то сперва мы рассчитываем суммарное электрическое поле, создаваемое этими зарядами в R, а потом, зная величину заряда, помещенного в R, находим силу, действующую на него.

Да и в случае тяготения мы можем сделать то же самое. Сила теперь $\mathbf{F} = -Gm_1 m_2 \mathbf{r}/r^3$. Анализ полностью совпадает: сила притяжения тела в поле тяготения равна произведению массы тела на поле $\mathbf{C}$. Сила, действующая на m_2, равна массе m_2, умноженной на поле $\mathbf{C}$, созданное массой m_1, т. е. $\mathbf{F} = m_2 G$. Значит, поле $\mathbf{C}$, создаваемое массой m_1, есть $\mathbf{C} = -Gm_1 \mathbf{r}/r^3$; оно, как и электрическое поле, направлено по радиусу.

Такое разделение на две части не так уж тривиально, как могло бы показаться на первый взгляд. Оно было бы тривиальным, было бы просто иной записью того же самого, если бы законы действия сил были совсем просты, но они очень сложны, и оказывается, что поле настолько реально, что почти не зависит от объектов, создающих его. Можно колебать заряд, и влияние этого (поле) скажется на расстоянии. Если колебания прекратятся, в поле все равно будут ощущаться следы этих колебаний, потому что взаимодействие двух частиц не происходит мгновенно. Оттого и желательно уметь запоминать, что здесь раньше происходило. Если сила действия на заряд зависит от того, где другой заряд был вчера и каким он тогда был, то должна быть возможность проследить за тем, что было вчера; в этом и состоит сущность поля. Чем сложнее силы, тем реальней поле, и наша техника разделения становится все менее и менее искусственной.

Желая анализировать силы при помощи полей, мы нуждаемся в законах двоякого рода. Первые — это отклик на поле. Они дают нам уравнения движения. Например, закон отклика массы на поле тяжести состоит в том, что сила равна массе, умноженной на поле тяжести, или если тело еще и заряжено, то отклик заряда на электрическое поле равен заряду, умноженному на электрическое поле. Вторая часть анализа природы в таких положениях — это формулировка законов, определяющих напряженность поля и способ его возникновения. Эти законы иногда называют *уравнениями поля*. В нужный момент мы с ними познакомимся, а пока скажем о них лишь несколько слов.

Вот вам для начала самое замечательное свойство поля, оно абсолютно точно и легко усваивается. Общее электрическое поле, создаваемое группой источников, есть векторная сумма полей, создаваемых по отдельности первым, вторым и т. д. источниками. Иными словами, когда поле создано множеством зарядов и если отдельное поле первого есть $\mathbf{E}_1$, а второго — $\mathbf{E}_2$ и т. д., то мы должны просто сложить эти векторы, чтобы получить общее поле. Принцип этот выражается в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \ldots \qquad (12.6)$$

или, в согласии с определением поля,

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{q_i \mathbf{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}. \qquad (12.7)$$

Можно ли эти методы применить к тяготению? Силу притяжения двух масс m_1 и m_2 Ньютон выразил в виде $\mathbf{F} = -Gm_1m_2\mathbf{r}/r^3$. Но в соответствии с понятием поля можно сказать, что m_1 создает поле $\mathbf{C}$ во всем окружающем пространстве и сила, притягивающая m_2, равна

$$\mathbf{F} = m_2\mathbf{C}. \qquad (12.8)$$

По аналогии с электричеством

$$\mathbf{C}_i = -\frac{Gm_i\mathbf{r}_i}{r_i^3}, \tag{12.9}$$

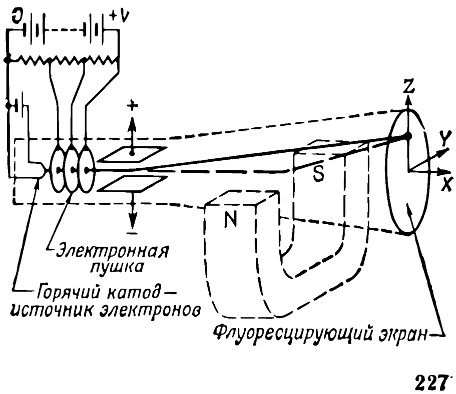
и тогда поле тяжести нескольких масс равно

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 + \ldots. \tag{12.10}$$

В гл. 7, где рассматривалось движение планет, мы по существу использовали именно этот принцип. Мы складывали все векторы сил, чтобы обнаружить общую силу, действующую на планету. Разделив на ее массу, мы и получим (12.10).

Уравнения (12.6) и (12.10) выражают так называемый *принцип суперпозиции*, или *наложения* полей. Этот принцип провозглашает, что общее поле нескольких источников есть сумма полей, создаваемых каждым из них. Насколько нам ныне известно, закон этот в электричестве наверняка выполняется даже тогда, когда заряды движутся и закон сил усложняется. Бывают иногда кажущиеся нарушения, но внимательный анализ всегда доказывает, что просто забыли какой-нибудь из движущихся зарядов. Но в отличие от электрических зарядов для сильных полей тяжести он не совсем точен. В теории тяготения Эйнштейна доказывается, что уравнение Ньютона (12.10) соблюдается лишь приближенно.

С электричеством тесно связана сила другого рода, называемая магнитной; ее тоже можно анализировать через понятие поля. Некоторые из качественных связей между этими силами видны в опыте с электронной трубкой (фиг. 12.3). На одном конце трубки помещен источник, испускающий поток электронов, а внутри имеется устройство, разгоняющее электроны до большой скорости и посылающее часть их на светящийся экран на другом конце трубки. Световое пятно в центре экрана, в месте ударов электронов, позволяет проследить за их путем. На пути к экрану пучок проходит сквозь узкую



Фиг. 12.3. Электронная трубки.

щель между параллельными металлическими пластинами, расположенными, допустим, плашмя. К пластинам подведено напряжение, позволяющее любую из них заряжать отрицательно. Напряжение создает между пластинами электрическое поле.

В первой части опыта отрицательное напряжение подается на нижнюю пластину, т. е. на ней образуется избыток электронов. Одноименные заряды отталкиваются, и поэтому светящееся пятно на экране взлетает внезапно вверх. (Можно сказать и иначе: электроны «чувствуют» поле и отвечают отклонением вверх.) Затем переключим напряжение и зарядим отрицательно уже верхнюю пластину. Световое пятно на экране опустится вниз, показывая, что электроны пучка отталкиваются электронами верхней пластины. (Иначе говоря, электроны «ответили» на изменение направления поля.)

Во второй части опыта напряжение на пластины уже не подается, а вместо этого проверяется влияние магнитного поля на электронный пучок. Для этого необходим подковообразный магнит, достаточно широкий, чтобы «оседлать» практически всю трубку. Предположим, что мы подвели магнит снизу к трубке, обхватили им ее и направили полюсы кверху (в виде буквы U). Мы замечаем, что пятно на экране смещается, скажем, кверху, когда магнит приближается снизу. Выходит, что магнит отталкивает пучок. Но не так все просто: если мы перевернем магнит, не переставляя его сторон, и приблизим его к трубке сверху, то пятно снова сдвинется *вверх*, т. е. вместо отталкивания наступило притяжение. А теперь вернем магнит в первоначальное положение, когда он обхватывал трубку снизу. Да, пятно по-прежнему отклоняется кверху; но повернем магнит на 180° вокруг вертикальной оси, чтобы он имел вид буквы U, но уже с переставленными полюсами. Смотрите-ка, пятно прыгает вниз и остается там, даже если мы переворачиваем теперь U вверх ногами.

Чтобы понять такое своеобразное поведение, нужно придумать какую-то иную комбинацию сил. Объясняется все это вот как. Вдоль магнита, от полюса к полюсу, тянется *магнитное поле*. Оно направлено всегда от одного определенного полюса (который можно снабдить какой-нибудь меткой) к другому. Вращение магнита вокруг его оси не меняет направления поля, а перестановка полюсов местами меняет. Например, если электроны летят горизонтально по оси x, а магнитное поле тоже горизонтально, но направлено по оси y, то магнитная сила, действующая на *движущийся электрон*, направлена по оси z (вверх или вниз, это уже зависит от того, как направлено поле — по оси y или против нее).

Мы пока не дадим полного закона сил взаимодействия зарядов, движущихся друг относительно друга в произвольных направлениях, потому что он чересчур сложен, но зато приведем формулы для случая, *когда поля известны*. Действие силы на заряженный предмет зависит от его движения; когда предмет неподвижен, сила, действующая на него, считается пропорциональной заряду с коэффициентом, называемым *электрическим полем*. Когда тело движется, сила изменяется, и поправка, новый «кусок» силы, оказывается линейно *зависящей от скорости* и направленной *поперек* скорости $\mathbf{v}$ и поперек другой векторной величины — *магнитной индукции* $\mathbf{B}$. Когда составляющие электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}$ суть соответственно (E_x, E_y, E_z) и (B_x, B_y, B_z), а составляющие скорости $\mathbf{v}$ суть (v_x, v_y, v_z), то составляющие суммарной электрической и магнитной сил, действующих на движущийся заряд q, таковы:

$$
\begin{aligned}
F_x &= q\,(E_x + v_y B_z - v_z B_y),\\
F_y &= q\,(E_y + v_z B_x - v_x B_z),\\
F_z &= q\,(E_z + v_x B_y - v_y B_x).
\end{aligned}
\tag{12.11}
$$

Если случайно магнитное поле имеет только компоненту B_y, а скорость — только v_x, то у магнитной силы остается составляющая вдоль z, поперек B и y.

§ 5. *Псевдосилы*

Очередной тип сил, который нам предстоит рассмотреть, — это псевдосилы.

В гл. 11 мы обсудили взаимоотношение двух молодых людей, Джо и Мика, обладателей различных систем координат. Пусть положение частицы по измерениям Мика есть x, а Джо дает для нее x'; тогда связь между ними такова:

$$x = x' + s, \quad y = y', \quad z = z',$$

где s показывает, насколько сместилась система Джо относительно системы Мика. Пусть у Мика в системе выполняются законы движения. Как они выглядят для Джо? Сперва мы обнаружим, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{ds}{dt}.$$

Раньше мы считали s постоянной и убедились, что законы движения при этом не меняются, так как $ds/dt = 0$; в конечном счете в обеих системах все законы физики одинаковы. Но пусть $s = ut$, где u — постоянная скорость движения по прямой. Тогда s непостоянна и ds/dt — не нуль, а u, т. е. константа. Но ускорение d^2x/dt^2 такое же, как d^2x'/dt^2, потому что $du/dt = 0$. Этим доказывается закон, использованный в гл. 10, а именно: когда мы движемся по прямой с постоянной скоростью, все законы физики выглядят так, как если бы мы стояли. Это преобразование Галилея. А теперь мы хотим рассмотреть случай поинтереснее, когда s зависит от времени еще сложнее, например $s = at^2/2$. Тогда $ds/dt = at$, а $d^2s/dt^2 = a$, т. е. ускорение постоянно; можно рассмотреть также случай, когда ускорение само оказывается функцией времени. Это значит, что хотя закон силы с точки зрения Джо выглядит как

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,$$

но закон силы, по мнению Мика, иной:

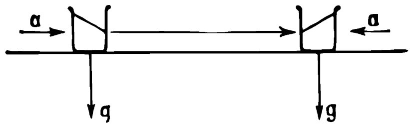
$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'} - ma.$$

Иначе говоря, поскольку система координат Мика ускоряется по отношению к системе Джо, появляется добавочный член ma. Чтобы работать с законами Ньютона, Мик обязан подправить силы, ввести в них этот член. Другими словами, появляется кажущаяся, мистическая, новая сила неведомого происхождения; она возникает, конечно, из-за того, что у Мика координатная система неправильна. Это — пример псевдосилы; с другими примерами можно встретиться, если система координат *вращается*.

Примером псевдо- (как бы-, вроде-) силы является хорошо известная «центробежная сила». Наблюдатель во вращающейся системе координат (во вращающемся ящике) обнаружит таинственные силы, не вызываемые ни одним из известных источников сил; они отбрасывают предметы к стенке ящика. А объясняются они просто тем, что у наблюдателя нет ньютоновой системы координат — простейшей из всех.

Псевдосилы обнаруживаются на любопытном опыте, состоящем в том, что мы толкаем с ускорением кувшин с водой по столу. Тяжесть действует на воду вниз, но из-за горизонтального ускорения есть еще и псевдосила в горизонтальном направлении, назад по отношению к ускорению. Сумма силы тяжести и псевдосилы образует угол с вертикалью, во время ускорения поверхность воды перпендикулярна к этой сумме сил, т. е. наклонена под углом к столу, и вода приподнята к задней стенке кувшина. Когда мы перестаем толкать кувшин, когда он замедляется вследствие трения, псевдосила меняет свое направление и вода приливает к передней стенке кувшина (фиг. 12.4).

Очень важным свойством псевдосил следует считать то, что они всегда пропорциональны массам; то же справедливо и для тяжести. Существует поэтому возможность, что ***тя-***



Фиг. 12.4. Иллюстрация к псевдосилам.

жесть — это тоже псевдосила. Не может ли статься, что тяготение вызывается отсутствием правильной системы координат? Ведь мы всегда можем получить силу, пропорциональную массе, стоит только представить, что тело ускоряется. Например, человек, помещенный в ящик, который стоит на земле, обнаруживает, что его что-то прижимает к полу с силой, пропорциональной его массе. Если бы земли не было вовсе, а ящик все еще покоился, то человек плавал бы в пространстве. С другой стороны, если бы опять не было земли, а ящик кто-то *тащил бы вверх* с ускорением g, то человек в ящике, анализируя физику этого явления, обнаружил бы псевдосилу, прижимающую его к полу точно так же, как это делает тяжесть.

Эйнштейн выдвинул знаменитую гипотезу, что ускорение вызывает имитацию (подобие) тяготения, что силы ускорения (псевдосилы) *нельзя отличить* от сил тяготения; нельзя сказать, какая часть данной силы — тяжесть, а какая — псевдосила.

Казалось бы, ничто не мешает считать тяжесть псевдосилой, говорить, что нас прижимает вниз оттого, что нас ускоряет вверх; но как быть с жителями Новой Зеландии, на другой стороне Земли — их-то куда ускоряет? Эйнштейн понял, что тяготение можно считать псевдосилой одновременно только в одной точке; его рассуждения привели к предположению, что *геометрия мира* сложнее обычной геометрии Евклида. Наше обсуждение вопроса чисто качественное и не претендует ни на что, кроме общей идеи.

Чтобы пояснить в общих чертах, как тяготение может быть результатом действия псевдосил, мы приведем чисто геометрический пример, ничего общего не имеющий с истинным положением вещей. Предположим, что мы с вами обитаем в двумерном мире и ничего о третьем измерении не знаем. Мы бы считали, что живем на плоскости, а на самом деле, предположим, жили бы на шаре; пускай теперь мы бросили предмет вдоль нашей поверхности, не действуя больше на него никакими силами. Как бы он двигался? Нам казалось бы, что он движется по прямой линии, но поскольку третьего измерения нет и он должен был бы оставаться на поверхности шара, то он двигался бы по кратчайшему расстоянию на сфере, т. е. по окружности большого круга. Бросим точно так же другой предмет, но в ином направлении;

он направится тоже по дуге большого круга. Мы думаем, что находимся на плоскости, и надеемся поэтому, что расстояние между двумя предметами будет расти линейно с течением времени. Но тщательные наблюдения вдруг обнаружат, что на достаточно большом расстоянии предметы снова начнут сближаться, как если бы они притягивали друг друга. Но они *не* притягиваются один к другому; все дело в геометрии, это с нею происходит что-то «чудно́е». Хотя эта картинка и не касается геометрии Евклида (не показывает нам, что в ней есть «чудно́го»), но она показывает, что, заметно исказив геометрию, можно все тяготение отнести за счет псевдосилы. В этом и состоит общая идея теории тяготения Эйнштейна.

§ 6. Ядерные силы

Мы заключим эту главу кратким обзором единственных ныне известных сил, отличающихся от перечисленных, — *ядерных сил.* Эти силы действуют внутри ядра атома, и, хотя их много изучали, никто ни разу еще не смог рассчитать силу, действующую между двумя ядрами; и фактически закон ядерных сил сейчас не известен. Эти силы имеют крайне незначительную протяженность действия — они действуют только на размерах ядра около 10^{-13} *см.* Поскольку частицы столь малы, а расстояния так коротки, нам нечего надеяться на законы Ньютона — здесь действуют только законы квантовой механики. Анализируя ядра, мы больше не говорим о силах; мы заменяем понятие силы понятием энергии взаимодействия двух частиц (позже об этом будет сказано подробнее). Любые формулы, которые можно написать для ядерных сил, представляют довольно грубые приближения, в которых опущены многие детали взаимодействия; выглядят они примерно так: силы внутри ядер убывают не обратно квадрату расстояния, а отмирают экспоненциально за некоторым расстоянием r_0 (порядка 10^{-13} *см*) как $F = (1/r^2) \times \exp(-r/r_0)$. Иначе говоря, чуть частицы удалятся, как силы тут же исчезают, хотя ближе 10^{-13} *см* они очень велики. По-видимому, законы ядерных сил сложны до чрезвычайности; мы их не понимаем, и вся задача анализа фундаментального механизма, стоящего за ними, не решена. Попытки решить эту задачу привели к открытию множества необычных частиц, например π-мезонов, но происхождение сил все равно остается темным.

Глава **13**

РАБОТА И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ (I)

§ 1. Работа падающего тела

В гл. 4 мы разобрали вопрос о сохранении энергии. При этом законами Ньютона мы не пользовались. Интересно теперь посмотреть, как возникает сохранение энергии из-за того, что действуют эти законы. Для ясности мы начнем с самых простых примеров и постепенно будем их усложнять.

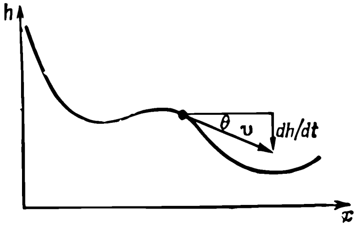
Простейший пример сохранения энергии — это тело, падающее вниз, т. е. тело, движущееся только в вертикальном направлении. Если оно меняет свою высоту под влиянием только тяжести, то из-за движения оно обладает кинетической энергией T (или к. э.). Кроме того, у него есть потенциальная энергия mgh (сокращенно U, или п. э.). Их сумма постоянна:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{к. э.}} + \underbrace{mgh}_{\text{п. э.}} = \text{const},$$

или

$$T + U = \text{const}. \tag{13.1}$$

Мы хотим показать, что это утверждение правильно. Что значит доказать его правильность? Второй закон Ньютона говорит, как движется тело, как со временем изменяется его скорость (а именно, что в падении она растет пропорционально времени, а высота падения меняется как квадрат времени). Если поэтому отмерять высоту от нулевой точки (где тело покоилось), то не будет ничего странного в том, что она окажется равной квадрату скорости, умноженному на какие-то постоянные. Однако все же рассмотрим это повнимательней.



Фиг. 13.1. Тело, движущееся под действием тяжести по кривой без трения.

Попробуем вычислить *прямо* из второго закона Ньютона, как обязана меняться кинетическая энергия; мы продифференцируем кинетическую энергию по времени и потом применим закон Ньютона. Дифференцируя $^1/_2\ mv^2$ по времени, получаем

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{1}{2}m2v\frac{dv}{dt}=mv\frac{dv}{dt}, \qquad (13.2)$$

потому что m считается постоянной. Но по второму закону Ньютона $m(dv/dt)=F$, так что

$$\frac{dT}{dt}=Fv. \qquad (13.3)$$

В общем случае получается $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$, но для нашего одномерного случая лучше оставить просто произведение силы на скорость.

Сила в нашем простом примере постоянна, равна $-mg$ и направлена вниз (знак минус именно это и показывает), а скорость есть степень изменения положения по вертикали (высоты h) со временем. Поэтому степень изменения кинетической энергии равна $-mg(dh/dt)$. Взгляните: что за чудо! Перед нами снова чья-то скорость изменения — скорость изменения со временем величины mgh! Поэтому выходит, что с течением времени изменения в кинетической энергии и в величине mgh остаются равными и противоположными, так что их сумма остается неизменной. Что и требовалось доказать.

Мы только что показали, пользуясь Вторым законом Ньютона, что для постоянных сил энергия сохраняется, если только прибавлять потенциальную энергию mgh к кинетической $^1/_2\ mv^2$. Исследуем этот вопрос дальше; посмотрим, можно ли его обобщить, можно ли еще продвинуться в его понимании. Действует ли этот закон только для свободно падающих тел или является более общим? Из того, что мы знаем о сохранении энергии, можно ожидать, что он будет верен для тела, движущегося из одной точки в другую по кривой без трения и под действием одной лишь тяжести (фиг. 13.1). Когда тело, начав двигаться с высоты H, достигает высоты h, то опять должна быть верной та же формула, хотя бы скорость уже не была направлена по вертикали. Нам надо понять, *почему* она все еще правильна. Проведем тот же анализ; отыщем скорость изменения кинетической энергии во времени. Опять будет получаться $mv\,(dv/dt)$ — скорость изменения величины импульса, т. е. *сила в направлении движения* — касательная сила F_t. Итак,

$$\frac{dT}{dt}=mv\frac{dv}{dt}=F_t v.$$

Скорость — это скорость изменения расстояния вдоль кривой ds/dt, а касательная сила F_t теперь оказывается меньше mg в отношении, равном отношению расстояния ds вдоль пути к вертикальному расстоянию dh. Иными словами,

$$F_t=-mg\sin\theta=-mg\frac{dh}{ds},$$

так что

$$F_t\frac{ds}{dt}=-mg\left(\frac{dh}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)=-mg\frac{dh}{dt}$$

(ds выпадает). И опять, как прежде, мы получили величину $-mg\,(dh/dt)$, равную скорости изменения mgh.

Чтобы точно уяснить себе, как вообще соблюдается сохранение энергии в механике, рассмотрим сейчас некоторые полезные понятия.

Во-первых, рассмотрим скорость изменения кинетической энергии в общем трехмерном случае. Кинетическая энергия, когда движение имеет три измерения, равна

$$T=\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right).$$

Дифференцируя ее по времени, получаем три устрашающих члена:

$$\frac{dT}{dt}=m\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}\right). \tag{13.4}$$

Но ведь $m\,(dv_x/dt)$ — это сила F_x, действующая на тело в направлении x. Значит, в правой части формулы (13.4) стоит $F_xv_x+F_yv_y+F_zv_z$. Призвав на помощь векторный анализ, вспоминаем, что это $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. Итак,

$$\frac{dT}{dt}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \tag{13.5}$$

А можно это вывести и быстрей: если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два вектора, зависящих от времени, то производная, от $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ равна

$$\frac{d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{dt}=\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt}+\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)\cdot\mathbf{b}. \tag{13.6}$$

Подставим сюда $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{v}$:

$$\frac{d\,(^1/_2\,mv^2)}{dt}=\frac{d\,(^1/_2\,m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}{dt}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}. \tag{13.7}$$

Так как понятие кинетической энергии и вообще энергии очень важно, то различным величинам в этих уравнениях присвоены разные имена: $^1/_2\, mv^2$ называется, как известно, *кинетической энергией*; $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ называется *мощностью*: сила, действующая на тело, умноженная («скалярно») на скорость тела, — это мощность, сообщаемая телу этой силой. Получается великолепная теорема: *скорость изменения кинетической энергии тела равна мощности, затраченной силами, действующими на тело.*

Но для изучения сохранения энергии анализ следует продолжить. Давайте оценим изменение кинетической энергии за очень короткое время dt. Умножив обе части уравнения (13.7) на dt, найдем, что изменение кинетической энергии равно силе, скалярно умноженной на дифференциал пройденного расстояния

$$dT = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}. \tag{13.8}$$

А интегрируя, получаем

$$\Delta T = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}. \tag{13.9}$$

Что это значит? Это значит, что, как бы и по какой бы кривой траектории ни двигалось тело под действием силы, все равно изменение в к. э. при переходе от одной точки кривой к другой равно интегралу от компоненты силы вдоль кривой, умноженной на дифференциал смещения $d\mathbf{s}$ (интегрирование от первой точки до второй). И у этого интеграла есть имя: его называют *работой, совершенной силой над телом.* Немедленно мы обнаруживаем, что *мощность — это работа за секунду.* И еще мы замечаем, что работу производит только составляющая силы *вдоль направления движения.* В нашем первом простом примере участвовали только вертикальные силы с одной-единственной составляющей F_z, равной $-mg$. В этих обстоятельствах совершенно неважно, как тело движется, прямо вниз или по параболе, все равно от $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ (которое можно написать как $F_x dx + F_y dy + F_z dz$) остается только $F_z dz = -mg dz$, потому что прочие составляющие силы — нули. Значит, в этом случае

$$\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{z_1}^{z_2} -mg\,dz = -mg\,(z_2 - z_1), \tag{13.10}$$

так что в потенциальную энергию входит только *высота*, с которой тело падает.

Несколько слов о единицах. Так как сила измеряется в ньютонах, а для получения работы ее умножают на расстояние, то работу измеряют в единицах *ньютон·метр*, но большинство людей этого названия не любит, предпочитая название *джоуль* (*дж*). Это только другое слово, а единица та же. Итак, работу измеряют в джоулях. Мощность же — в джоулях в секунду; эту единицу называют *ватт* (*вт*). Если умножить ватты на время, то получим произведенную работу. Работу, которую местная энергосистема производит в наших квартирах (в техническом смысле), оценивается в ваттах, умноженных на время. Например, киловатт-час — это 1000 *вт* $\times$ 3600 *сек*, т. е. $3{,}6\cdot 10^6$ *дж*.

Приведем еще несколько примеров работы и сохранения энергии. Рассмотрим тело, которое вначале имеет кинетическую энергию и быстро двигается, скользя по полу с трением. Оно останавливается. В начале кинетическая энергия *не равна* нулю, а в конце она *равна нулю*; существует работа, произведенная силами, потому что раз есть трение, то есть и составляющая силы в направлении, противоположном направлению движения, и энергия постепенно теряется. Теперь рассмотрим массу на конце маятника, который качается в вертикальной плоскости в поле тяжести без трения. Здесь наблюдается нечто другое, потому что, когда масса опускается, сила направлена тоже вниз, а когда подымается, сила направлена в обратную сторону, так что у $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ на спуске и на подъеме разные знаки. В соответствующих точках спуска и подъема значения $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ равны по величине, но противоположны по знаку, так что в итоге интеграл есть чистый нуль. Поэтому кинетическая энергия в конце спуска в точности такая же, какой она была в начале подъема; это и есть принцип сохранения энергии. (Заметьте, что в присутствии сил трения сохранение энергии на первый взгляд не выполняется. Значит, нужно искать другую *форму* энергии. И действительно, оказывается, что когда два тела трутся друг о друга, то возникает тепло, мы же сейчас делаем вид, что об этом не знаем.)

§ 2. Работа, выполняемая тяжестью

Теперь займемся задачей потруднее, когда силы уже не постоянны и не направлены вниз, как раньше. Мы рассмотрим, например, движение планеты вокруг Солнца или спутника вокруг Земли.

Сперва мы рассмотрим движение тела, которое падает из точки 1 *прямо* на Солнце или на Землю (фиг. 13.2). Будет ли

Фиг. 13.2. Падение малой массы m под действием тяжести на большую массу M.

в этих обстоятельствах сохраняться энергия? Единственное отличие от того, что было раньше, — что теперь сила не постоянна, она *меняется* по мере падения. Мы знаем, что сила равна произведению GM/r^2 на массу m падающего тела. Конечно, и теперь кинетическая энергия при падении возрастает, как возрастала и тогда, когда нас еще не волновало изменение силы с высотой. Вопрос только в том, можно ли отыскать иную, отличную от mgh, формулу для потенциальной энергии, найти другую функцию расстояния от Земли, чтобы для нее сохранение энергии не нарушалось.

Этот одномерный случай рассматривать легко, потому что мы знаем, что изменение кинетической энергии равно интегралу от начала движения до конца от силы $-GMm/r^2$ по перемещению dr

$$T_2 - T_1 = -\int_1^2 GMm\,\frac{dr}{r^2}. \qquad (13.11)$$

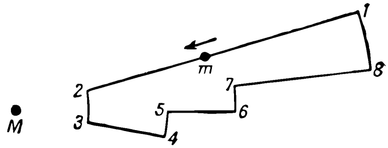
В формуле нет никакого косинуса, потому что сила и перемещение направлены одинаково. Интегрировать dr/r^2 легко; получается $(-1/r)$, так что

$$T_2 - T_1 = +GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \qquad (13.12)$$

Перед нами другая формула для потенциальной энергии. Уравнение (13.12) говорит нам, что величина $^1/_2\,mv^2 - GMm/r$, вычисленная в точке *1*, в точке *2* или в любой другой, остается постоянной.

У нас теперь есть формула для потенциальной энергии в поле тяготения для вертикального движения. Здесь возникает интересный вопрос: можно ли добиться *вечного движения* в поле тяготения? Поле-то меняется, в разных местах у него разная напряженность и разное направление. Нельзя ли взять бесконечную ленту без трения и запустить ее, скажем, так: пусть она сперва поднимает тело из одной точки в другую, потом проводит его по дуге окружности в третью точку, опускает на некоторый уровень, сдвигает по наклонному направлению и выводит на новый путь и т. п., так что по возвращении в начальную точку оказывается, что поле тяготения совершило некоторую работу и кинетическая энергия тела возросла? Нельзя ли так начертить эту траекторию, чтобы, обойдя по ней, тело приобрело чуть-чуть больше скорости, чем имело вначале? Так получится вечное движение. Но ведь оно невозможно, значит, мы обязаны доказать, что такая траектория немыслима. Мы должны доказать следующее предположение: раз трения нет, тело должно вернуться ни с меньшей, ни с большей скоростью, а как раз с такой, чтобы еще и еще делать круги по этому замкнутому пути.

Фиг. 13.3. Замкнутый путь обхода в поле тяготения.



Или, другими словами, вся работа, *произведенная в движении по замкнутому пути, должна быть нулем* для сил тяжести, потому что если бы она не была нулем, то можно было бы получить энергию за счет такого движения тела. (Если бы работа оказалась меньше нуля, так что скорость в конце обхода уменьшилась бы, то для получения энергии стоило бы только повернуть обратно; силы ведь зависят не от направления движения, а только от положения. Если в одном направлении работа получится с плюсом, то в обратном она будет с минусом; любая ненулевая работа означает создание вечного двигателя.)

Так что же, действительно ли работа равна нулю? Попробуем показать, что да. Сперва мы лишь на пальцах поясним, почему это так, а уж потом оформим математически. Положим, мы выдумали траекторию, показанную на фиг. 13.3; масса падает от *1* к *2*, поворачивает до *3*, обратно поднимается к *4*, затем через *5*, *6*, *7*, *8* движется обратно к *1*. Все линии идут либо по радиусу, либо по кругу с центром M. Какая работа совершается на таком пути? Между *1* и *2* она равна произведению GMm на разность $1/r$ в этих точках:

$$W_{12}=\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_1^2(-GMm)\frac{dr}{r^2}=-GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

От *2* до *3* сила в точности направлена поперек движения, и $W_{23}=0$. От *3* к *4*

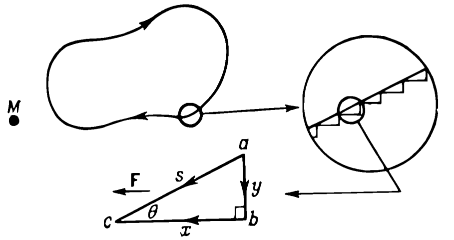
$$W_{34}=\int_3^4 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=-GMm\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_3}\right).$$

Так же получаются $W_{45}=0$, $W_{56}=-GMm(1/r_6-1/r_5)$, $W_{67}=0$, $W_{78}=-GMm(1/r_8-1/r_7)$ и $W_{81}=0$. Всего

$$W=GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}-\frac{1}{r_6}+\frac{1}{r_7}-\frac{1}{r_8}\right).$$

Но ведь $r_2=r_3$, $r_4=r_5$, $r_6=r_7$, $r_8=r_1$. Поэтому $W=0$.

Но возникает подозрение, не слишком ли эта кривая проста. А что даст *настоящая* траектория? Что ж, попробуем настоящую. Сразу же ясно, что ее можно достаточно точно представить как ряд зазубрин (фиг. 13.4) и поэтому... и т. д., что и требовалось доказать. Но надо еще посмотреть,



Фиг. 13.4. *«Плавный» путь обхода.*

Показан увеличенный отрезок этого пути и близкая к нему траектория, состоящая из радиальных и круговых участков, а также один из зубцов этой траектории.

действительно ли работа обхода вокруг маленького треугольника тоже равна нулю. Увеличим один из треугольников (см. фиг. 13.4). Равны ли работы по пути от a к b и от b к c работе, совершаемой, когда идешь напрямик от a к c? Пусть сила действует в каком-то направлении. Расположим треугольник так, чтобы у его катета bc было как раз такое направление. Предположим также, что сам треугольник так мал, что сила всюду на нем постоянна. Какова работа на отрезке ac? Она равна

$$W_{ac}=\int_a^c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=Fs\cos\theta$$

(поскольку сила постоянна). Теперь определим работу на двух катетах. На вертикальном катете ab сила перпендикулярна к ds, так что работа равна нулю. На горизонтальном катете bc

$$W_{bc}=\int_b^c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=Fx.$$

Мы убеждаемся таким образом, что работа обхода по бокам маленького треугольника такая же, как и по склону, потому что $s\cos\theta$ равно x. Мы уже показали прежде, что работа при движении по зазубринам (как на фиг. 13.3) равна нулю, а теперь видим, что производимая работа одинакова, независимо от того, движемся ли мы по зазубринам или срезаем путь между ними (если только зазубрины малы, но ведь ничто не мешает сделать их такими); поэтому *работа обхода по любому замкнутому пути в поле тяготения равна нулю.*

Это очень примечательный результат. Благодаря ему нам становятся известны такие подробности о движении планет, о которых мы раньше и не догадывались. Выясняется, что когда планета вертится вокруг Солнца одна, без спутников и в отсутствие каких-либо других сил, то квадрат ее скорости минус некоторая константа, деленная на расстояние до Солнца, вдоль орбиты не меняется. Например, чем ближе планета к Солнцу, тем быстрее она движется. Но насколько быстрее? А вот насколько: если вместо движения вокруг

Солнца вы толкнете ее к Солнцу с той же скоростью и подождете, пока она не упадет на нужное расстояние, то приобретенная скорость будет как раз такой, какой планета обладает на этой орбите, потому что получился просто другой пример сложного пути обхода. Если планета вернется по такому пути обратно, ее кинетическая энергия окажется прежней. Поэтому независимо от того, движется ли она по настоящей невозмущенной орбите или же по сложному пути (но без трения), кинетическая энергия в момент возвращения на орбиту оказывается как раз такой, какой нужно.

Значит, когда мы проводим численный анализ движения планеты по орбите (как мы делали раньше), мы можем проверить, не сделали ли заметных ошибок при расчете этой постоянной величины, энергии, на каждом шаге; она не должна меняться. Для орбиты, приведенной в табл. 9.2 (стр. 174), энергия меняется* примерно на 1,5% с начала движения до конца. Почему? То ли потому, что в численном методе мы пользовались конечными приращениями, то ли из-за мелких погрешностей в арифметике.

Рассмотрим энергию в другой задаче: задаче о массе, подвешенной на пружине. Когда отклоняют массу от положения равновесия, сила, восстанавливающая ее положение, пропорциональна смещению. Можно ли в этих условиях вывести закон сохранения энергии? Да, потому что работа, совершаемая этой силой, равна

$$W = \int_0^x \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^x (-kx)\, dx = -\frac{1}{2} kx^2. \qquad (13.13)$$

Значит, у массы, подвешенной на пружине, сумма кинетической энергии ее колебаний и $^1/_2\ kx^2$ постоянна. Посмотрим, как это происходит. Оттянем массу вниз; она неподвижна и скорость ее равна нулю, но x не равно нулю, теперь величина x максимальна, так что имеется и некоторый запас энергии (потенциальной). Отпустим теперь массу: начнется какой-то процесс (в детали мы не вникаем), но в любое мгновение кинетическая плюс потенциальная энергии будут постоянны. Например, когда масса проходит через точку первоначального равновесия, то $x = 0$, но тогда значение v^2 наибольшее, и чем больше величина x^2, тем меньше v^2 и т. д. Значит, во время колебаний соблюдается равновесие между величинами x^2 и v^2. Мы получили, таким образом, новое правило: потенциальная энергия пружины равна $^1/_2kx^2$, если сила равна $-kx$.

---

* Энергия в единицах табл. 9.2 есть $^1/_2\left(v_x^2 + v_y^2\right) - 1/r$.

§ 3. *Сложение энергий*

Перейдем теперь к более общему случаю и рассмотрим, чтó произойдет, если тел много. Предположим, что имеется несколько тел; пронумеруем их: $i = 1, 2, 3, \ldots$ и пусть все они притягивают друг друга. Что тогда произойдет? Можно доказать, что если сложить кинетические энергии всех тел и добавить сюда сумму (по всем *парам* частиц) их взаимных потенциальных энергий тяготения $-GMm/r_{ij}$, то все вместе даст постоянную:

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{\text{пары } ij} \left(-\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}\right) = \text{const}. \qquad (13.14)$$

Как же это доказать? Мы продифференцируем обе стороны по времени и докажем, что получится нуль. При дифференцировании $^1/_2 m_i v_i^2$ мы получим производные скорости — силы [как в (13.5)], а потом эти силы заменим их величиной, известной нам из закона тяготения, и увидим в конце концов, что останется как раз производная по времени от

$$\sum_{\text{пары}} \left(-\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}\right).$$

Начинаем доказательство. Производная кинетической энергии по времени есть

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\right) = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i =$$

$$= \sum_i \left(\sum_j -\frac{Gm_i m_j \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\right) \cdot \mathbf{v}_i. \qquad (13.15)$$

Производная по времени от потенциальной энергии есть

$$\frac{d}{dt} \sum_{\text{пары}} \left(-\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}\right) = \sum_{\text{пары}} \left(+\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2}\right)\left(\frac{dr_{ij}}{dt}\right),$$

но

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

так что

$$\frac{dr_{ij}}{dt} = \frac{1}{2r_{ij}} \left[2(x_i - x_j)\left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_j}{dt}\right) + \right.$$

$$\left. + 2(y_i - y_j)\left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{dy_j}{dt}\right) + 2(z_i - z_j)\left(\frac{dz_i}{dt} - \frac{dz_j}{dt}\right)\right] =$$

$$= \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j}{r_{ij}} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{\mathbf{v}_i}{r_{ij}} + \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{\mathbf{v}_j}{r_{ji}},$$

потому что $\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$, хотя $r_{ij} = r_{ji}$. Итак,

$$\frac{d}{dt}\sum_{\text{пары}}\left(-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}\right)=\sum_{\text{пары}}\left[\frac{Gm_im_j\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\cdot\mathbf{v}_i + \frac{Gm_im_j\mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}^3}\cdot\mathbf{v}_j\right]. \quad (13.16)$$

Теперь внимательно посмотрим, что значит $\sum_i\left\{\sum_j\right\}$ и $\sum_{\text{пары}}$. В (13.15) $\sum_i\left\{\sum_j\right\}$ означает, что i принимает по порядку все значения $i = 1, 2, 3, \ldots$, и для каждого i индекс j принимает все значения, кроме i. Если, например, $i = 3$, то j принимает значения $1, 2, 4, \ldots$.

С другой стороны, в (13.16) $\sum_{\text{пары}}$ означает, что каждая пара i и j встречается лишь однажды. Скажем, частицы 1 и 3 дают только один член в сумме. Чтобы отметить это, можно договориться, что i принимает значения $1, 2, 3, \ldots$, а j для каждого i — только значения, *большие* чем i. Если, скажем, $i = 3$, то j равно $4, 5, 6, \ldots$. Но вспомним, что каждая пара i, j дает два слагаемых в сумме, одно с $\mathbf{v}_i$, а другое с $\mathbf{v}_j$, и что оба эти члена выглядят так же, как член в уравнении (13.14) [но только в последнем в сумму входят *все* значения i и j (кроме $i = j$)]. В уравнениях (13.16) и (13.15) член за членом совпадут по величине. Знаки их, однако, будут противоположны, так что производная по времени от суммы потенциальной и кинетической энергий действительно равна нулю. Итак, мы видим, что и в системе многих тел *кинетическая энергия составляется из суммы энергий отдельных тел* и что потенциальная энергия тоже состоит из взаимных потенциальных энергий пар частиц. Почему она складывается из энергий пар? Это можно уяснить себе следующим образом: положим, мы хотим найти всю работу, которую нужно совершить, чтобы развести тела на определенные расстояния друг от друга. Можно это сделать не за один раз, а постепенно, доставляя их одно за другим из бесконечности, где на них никакие силы не влияли. Сперва мы приведем тело 1, на что работы не потребуется, потому что, пока нет других тел, силы отсутствуют. Доставка тела 2 потребует работы $W_{12} = -Gm_1m_2/r_{12}$. И вот теперь самый существенный момент: мы доставляем тело 3 в точку *3*. В любой момент сила, действующая на 3, слагается из двух частей: из силы, действующей со стороны 1, и силы со стороны 2. Значит, и *вся произведенная работа равна сумме работ каждой из сил*, потому что раз $\mathbf{F}_3$ разбивается на сумму сил

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23},$$

то работа равна

$$\int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{F}_{13} \cdot d\mathbf{s} + \int \mathbf{F}_{23} \cdot d\mathbf{s} = W_{13} + M_{23}.$$

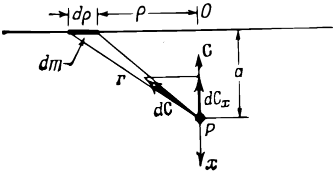
Стало быть, вся работа равна сумме работ, произведенных против силы 1 и против силы 2, как если бы они действовали независимо. Продолжая рассуждать таким образом, мы увидим, что полная работа, которую необходимо выполнить, чтобы собрать данную конфигурацию тел, в точности равна значению (13.14) для потенциальной энергии. Именно из-за того, что тяготение подчиняется принципу наложения сил, можно потенциальную энергию представить в виде суммы по всем парам частиц.

§ 4. Поле тяготения больших тел

Теперь рассчитаем поля, встречающиеся во многих физических задачах, когда речь идет о *распределении масс.* Мы пока не рассматривали распределения масс, а занимались только отдельными частицами. Но интересно рассчитать и поля, образуемые более чем одной частицей. Для начала найдем силу притяжения со стороны плоского пласта вещества бесконечной протяженности. Сила притяжения единичной массы в данной точке P (фиг. 13.5), конечно, направлена к плоскости. Расстояние от точки до плоскости есть a, а масса единицы площади этой плоскости есть μ. Пусть μ будет постоянной: слой однороден. Какой же величины поле $d\mathbf{C}$ создается массой dm, удаленной от O не ближе, чем на ρ, и не дальше, чем на $\rho + d\rho$ (O — это точка плоскости, ближайшая к P)? *Ответ*: $d\mathbf{C} = G(dm\mathbf{r}/r^3)$. Но оно, это поле, направлено вдоль r, а мы понимаем, что из трех составляющих $\mathbf{C}$ после сложения всех $d\mathbf{C}$ должна остаться лишь x-составляющая. Она равна

$$dC_x = G\frac{dm\,r_x}{r^3} = G\frac{dm\,a}{r_3}.$$

Все массы dm, которые находятся на одном и том же расстоянии r от P, дадут одно и то же значение dC_x, так что за dm можно сразу принять массу всего кольца между ρ и



Фиг. 13.5. Сила притяжения материальной точки материальной плоскостью.

$\rho + d\rho$, т. е. $dm = \mu 2\pi\rho d\rho$ ($2\pi\rho d\rho$ — это площадь кольца радиусом ρ и шириной $d\rho$ при $d\rho \ll \rho$). Итак,

$$dC_x = G\mu 2\pi\rho \frac{d\rho\, a}{r^3}.$$

Но $\rho d\rho = r dr$ из-за того, что $r^2 = \rho^2 + a^2$. Поэтому

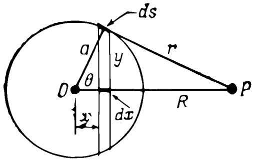
$$C_x = 2\pi G\mu a \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = 2\pi G\mu a\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\infty}\right) = 2\pi G\mu. \qquad (13.17)$$

Стало быть, сила не зависит от расстояния a! Почему? Не ошиблись ли мы? Казалось бы, чем дальше от плоскости, тем сила слабее. Но нет! Если точка находится вплотную к плоскости, то большая часть вещества притягивает ее под неудачными углами, а если вдалеке, то у большей части вещества притяжение направлено прямее к плоскости. На любом расстоянии самая «влиятельная» часть плоскости лежит в некотором конусе. С удалением сила ослабляется обратно пропорционально квадрату расстояния, но в том же конусе под тем же углом оказывается *больше вещества*, а рост количества вещества тоже пропорционален квадрату расстояния! Этот анализ может быть сделан более строгим, если заметить, что дифференциал вклада любого данного конуса не зависит от расстояния в результате противоположных изменений напряженности поля данной массы и количества самой этой массы (с ростом расстояния). Впрочем, на самом деле сила не постоянна, ибо на другой стороне плоскости она меняет знак.

Мы решили, кстати, и задачу по электричеству: мы доказали, что у заряженной пластины, каждая единица площади которой несет заряд σ, электрическое поле равно $\sigma/2\varepsilon_0$ и направлено *от пластины*, если она заряжена положительно, и *к ней*, если она заряжена отрицательно. Чтобы доказать это, надо просто вспомнить, что в законе тяготения G играет ту же роль, что $^1/_4\,\pi\varepsilon_0$ в электричестве.

А теперь пусть имеются две пластины, одна с положительным зарядом $+\sigma$, а другая с отрицательным $-\sigma$ (на единицу площади), и пусть промежуток между ними равен D. Каково поле этих пластин? Снаружи пластин поле равно нулю. Отчего? Оттого, что одна из них отталкивает, а другая притягивает и у обеих сила *не зависит от расстояния*; значит, силы уничтожаются! А вот поле *между пластинами* вдвое больше, чем поле одной пластины, направлено оно от положительной пластины к отрицательной и равно $E = \sigma/\varepsilon_0$.

Перейдем теперь к еще более интересному и важному вопросу; впрочем, мы давно уже ответили на него, предположив, что сила притяжения Земли в точке на ее поверхности



Фиг. 13.6. Тонкий сферический слой масс (или зарядов).

или над нею такая же, как если бы вся масса Земли сосредоточилась в ее центре. Справедливость этого предположения не очевидна: ведь когда мы находимся у самой земли, какая-то часть ее массы очень к нам близка, а другая далека и т. д. Когда мы складываем действие всех таких масс, то кажется чудом, что в конце концов сила сводится к тому, что вся Земля сжалась в одну точку, стянулась к своему центру!

Мы теперь покажем, что это чудо обыкновенное; чтобы продемонстрировать это, разобьем Землю на тонкие сферические слои. Пусть вся масса сферы равна m. Давайте рассчитаем *потенциальную энергию* частицы массы m' на расстоянии R от центра сферы (фиг. 13.6). Мы увидим, что потенциальная энергия как раз такая, как если бы масса m сферы вся собралась в ее центре. (Легче иметь дело с потенциальной энергией, чем с напряженностью поля: не нужно думать об углах, а просто складывать потенциальные энергии всех частей сферы.) Нарежем сферу на узкие пояски, и пусть x — расстояние плоскости пояска от центра сферы; тогда вся масса пояска толщиной dx находится на одном и том же расстоянии r от точки P, а потенциальная энергия притяжения этого пояска равна $-Gm'dm/r$. Сколько же массы содержится в пояске dx? Вот сколько:

$$dm = 2\pi y\mu\, ds = \frac{2\pi y\mu\, dx}{\sin\theta} = \frac{2\pi y\mu\, dx\, a}{y} = 2\pi a\mu\, dx,$$

где $\mu = m/4\pi a^2$ — поверхностная плотность массы. (Вообще площадь поверхности шарового пояса пропорциональна его высоте.) Поэтому потенциальная энергия притяжения массы dm есть

$$dW = -\frac{Gm'\, dm}{r} = -\frac{Gm' 2\pi a\mu\, dx}{r}.$$

Но мы видим, что

$$r^2 = y^2 + (R-x)^2 = y^2 + x^2 + R^2 - 2Rx = a^2 + R^2 - 2Rx.$$

Значит,

$$2r\, dr = -2R\, dx,$$

или

$$\frac{dx}{r}=\frac{dr}{R}.$$

Поэтому

$$dW=-\frac{Gm'2\pi a\mu\, dr}{R}$$

и получается

$$W=-\frac{Gm'2\pi a\mu}{R}\int\limits_{R-a}^{R+a}dr=-\frac{Gm'2\pi a\mu}{R}2a=-\frac{Gm'(4\pi a^2\mu)}{R}=$$

$$=-\frac{Gm'm}{R}. \quad (13.18)$$

Стало быть, для тонкого слоя потенциальная энергия массы m', внешней по отношению к слою, такова, как если бы масса слоя собралась в его центре. Землю же можно представить в виде ряда таких слоев, и притяжение каждого из слоев зависит только от его массы; сложив их, получим *всю массу* планеты; значит, и вся Земля действует так, словно все ее вещество находится в ее центре!

Но посмотрим, что произойдет, если точка P окажется внутри слоя. Проделывая те же расчеты вплоть до интегрирования, мы получим разность двух значений r, но уже в другой форме: $(a+R)-(a-R)=2R$ (двойное расстояние от P до центра). Другими словами, теперь W становится равной $W=-Gmm'/a$, что *не зависит от* R, т. е. точка P *всюду* внутри сферы обладает одной и той же энергией тяготения. А значит, на нее не действует никакая сила, и не нужно никакой работы, чтобы двигать ее внутри. Когда потенциальная энергия тела всюду, в любой точке внутри сферы, одинакова, то на тело не действует никакая сила. Внутри сферы тело не испытывает действия сил, сила действует только снаружи.

Глава **14**

РАБОТА И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ (II)

§ 1. Работа

В предыдущей главе мы ввели много новых понятий и идей, играющих важную роль в физике. Идеи эти столь важны, что, пожалуй, стоит посвятить целую главу внимательному ознакомлению с ними. Мы не будем здесь повторять «доказательства» и красивые приемы, позволяющие просто получать важные результаты, а вместо этого сосредоточим наше внимание на обсуждении самих идей.

Штудируя любой вопрос технического характера, для понимания которого нужна математика, мы всегда сталкиваемся с необходимостью понять и отложить в памяти массу фактов и идей, объединенных определенными связями. Существование этих связей можно «доказать» или «показать». Ничего не стоит спутать само доказательство с тем соотношением, которое оно устанавливает. Конечно, куда важнее выучить и запомнить не доказательство, а само соотношение. Тогда уже в любом случае мы сможем сказать: «Легко показать, что...» то-то и то-то верно, а то и действительно показать это. Приводимые доказательства почти всегда состряпаны, сфабрикованы с таким расчетом, чтобы, во-первых, их легко было воспроизвести мелом на доске или пером на бумаге и, во-вторых, чтобы они выглядели поглаже. В итоге доказательство выглядит обманчиво просто, хотя, быть может, на самом деле автор много часов искал разные пути расчета, пока не нашел самый изящный — тот, который приводит к результату за кратчайшее время! Глядя на вывод формулы, надо вспоминать не этот вывод, а скорее сам факт, что то-то и то-то *можно до-*

казать. Конечно, если доказательство требует особых математических выкладок или «трюков», никогда прежде не виденных, то надо обратить внимание... впрочем, не на сами трюки, а на их идею.

Ни одно из доказательств, приведенных в этом курсе, автор не запомнил с тех времен, когда сам учил физику. Наоборот, он просто вспоминает, что то-то является верным, и, пытаясь пояснить, как это доказывается, сам придумывает доказательство в тот момент, когда оно необходимо. И всякий, кто действительно изучил предмет, должен быть в состоянии поступать так же, не запоминая доказательств. Вот почему в этой главе мы будем избегать вывода различных положений, сделанных ранее, а просто будем подводить итоги.

Первая идея, которую нужно будет переварить, — это то, что *работа производится силой*. Физический термин «работа» ничего общего не имеет с общежитейским ее смыслом...

Физическая работа выражается в виде $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, или «контурный интеграл от $\mathbf{F}$ по $d\mathbf{s}$ скалярно»; последнее означает, что если сила направлена, скажем, в одну сторону, а тело, на которое сила действует, перемещается в другую сторону, то *работу совершает только составляющая силы в направлении перемещения*. Если бы, например, сила была постоянна, а смещение произошло на конечный отрезок $\Delta\mathbf{s}$, то работа, выполненная постоянной силой на этом пути, была бы равна произведению составляющей силы вдоль $\Delta\mathbf{s}$ на Δs. Правило гласит: «работа есть сила на путь», но подразумевается лишь составляющая силы в направлении перемещения, умноженная на Δs, или, что одно и то же, составляющая перемещения в направлении силы, умноженная на $\mathbf{F}$.

Очевидно, что сила, направленная под прямым углом к перемещению, никакой работы не произведет.

Если, далее, вектор смещения $\Delta\mathbf{s}$ разложить на составляющие, т. е. если истинное смещение есть $\Delta\mathbf{s}$ и мы хотим считать, что оно состоит из составляющих смещения Δx в направлении x, Δy в направлении y и Δz в направлении z, то вся произведенная работа перемещения тела из одного места в другое может быть рассчитана по трем частям: отдельно работа смещения вдоль x, вдоль y и вдоль z. Работа перемещения вдоль x требует знания только соответствующей составляющей силы F_x и т. д., так что работа равна $F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$. Когда сила не постоянна, а движение запутанное, криволинейное, то нужно разбить путь на множество малых $\Delta\mathbf{s}$, сложить работы переноса тела вдоль каждого $\Delta\mathbf{s}$ и перейти к пределу при $\Delta\mathbf{s}$, стремящемся к нулю. В этом смысл понятия «контурный интеграл».

Все, что мы только что сказали, содержится в формуле $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Но одно дело назвать эту формулу прекрасной, и совсем другое — понять ее смысл и ее следствия.

Смысл слова «работа» в физике настолько отличается от того, что подразумевают под этим словом в обычных обстоятельствах, что надо тщательно проследить это различие. Например, по точному смыслу физического определения работы, если вы держите в руках двухпудовую гирю, вы не совершаете никакой работы. Вас бросает в пот, ваши руки дрожат, вы дышите тяжело, как будто взбежали по лестнице, а работы вы не совершаете. Когда вы взбегаете по лестнице, то считается, что вы *совершаете* работу; когда вы сбегаете по лестнице вниз, то, согласно физике, мир производит работу над вами, а вот когда вы держите предмет, стоя неподвижно, никакой работы не производится. Физическое определение работы отличается от физиологического по причинам, которые мы сейчас кратко изложим.

Когда вы держите груз, вы, конечно, выполняете «физиологическую» работу. Отчего вас бросает в пот? Почему для такого занятия вам необходимо хорошо питаться? Почему все механизмы внутри вас работают в полную силу, когда вы подставили спину под груз? Ведь можно на этот груз не тратить никаких усилий, стоит лишь положить его на стол, и стол спокойно и мирно, не нуждаясь ни в какой энергии, будет держать себе тот же груз на той же высоте! Физиология дает примерно следующее объяснение. У человека и у других животных есть два рода мышц. Одни, называемые *поперечнополосатыми*, или *скелетными*, контролируются нашей волей; таковы, например, мышцы рук. Другие мышцы называются *гладкими* (например, мышцы внутренностей или у моллюсков большой замыкающий мускул, который закрывает створки). Гладкие мышцы работают очень медленно, но способны «оцепенеть»; это значит, что если, скажем, моллюску нужно удержать свои створки в определенном положении, то он их удержит, какая бы сила на них ни нажимала. Многие часы способен он без устали держать створки под нагрузкой, подобно столу, на который положен груз; мышца «застывает» в определенном положении, молекулы ее как бы схватываются друг с другом, не совершая никакой работы, не требуя от моллюска никаких усилий. Нам же нужны непрерывные усилия, чтобы удержать вес. Это объясняется просто устройством поперечнополосатых мышц. Когда нервный импульс достигает мышечного волокна, оно несколько сокращается и затем опять расслабляется; когда мы держим груз, то в мышцу сплошным и обильным потоком текут нервные импульсы, множество волокон сокращается, пока другие отдыхают. Это даже можно увидеть: когда рука устает держать тяжесть, она начинает дрожать. Происходит это потому, что поток импульсов нерегулярен и уставшие мышцы не успевают вовремя на них ответить. Почему же мышцы собраны по такой неудачной схеме? Неизвестно почему, но природа не сумела создать *быстродействующих* гладких мышц. А куда удобнее было бы поднимать грузы именно гладкими мышцами: они способны замирать на месте, они могут цепенеть и для этого не нужно было бы совершать никакой работы и не нужна никакая энергия. Правда, у этих мышц есть один недостаток: они очень медленно работают.

Но вернемся к физике и зададим еще один вопрос: *зачем* нам подсчитывать выполненную работу? *Ответ*: потому что это интересно и полезно. Потому что работа, которую производит над частицей равнодействующая всех приложенных к ней сил, в точности равна изменению кинетической энергии этой частицы. Если тело толкнуть, оно наберет скорость, и

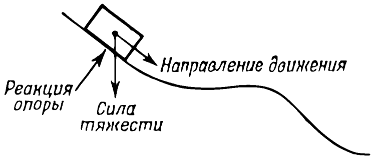
$$\Delta (v^2) = \frac{2}{m} \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}.$$

§ 2. *Движение при наложенных связях*

Силы и работа обладают еще одним интересным свойством. Пусть имеется некоторый уклон, какая-то криволинейная колея, по которой частица должна двигаться без трения. Или имеется маятник — груз на ниточке; нить маятника вынуждает груз двигаться по кругу вокруг точки подвеса. Намотав нить на колышек, можно в качании менять точку подвеса, так что траектория груза будет складываться из двух окружностей разного радиуса. Все это примеры так называемых *неподвижных связей без трения*.

В движении с неподвижными связями без трения эти связи не производят никакой работы, потому что реакции связей всегда прилагаются к телу под прямым углом к самим связям; так обстоит дело и с реакцией колеи, и с натяжением нити.

Силы, возникающие при движении частицы вниз по склону под действием тяжести, весьма и весьма запутанны: здесь и реакции связи, и сила тяжести, и т. п. И все же, если основывать свои расчеты движения лишь на сохранении энергии и на учете *только силы тяжести*, получается правильный результат. Это выглядит довольно странно, потому что это не совсем правильно; надо было бы пользоваться *равнодействующей* силой. Тем не менее работа, произведенная только силой тяжести, оказывается равной изменению кинетической энергии, потому что работа сил связей равна нулю (фиг. 14.1).



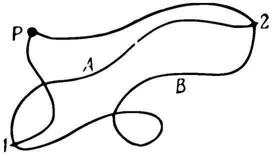
Фиг. 14.1. Силы, действующие на тело, скользящее без трения.

Важное свойство сил, о котором мы говорили, состоит в том, что если силу можно разбить на две или несколько «частей», то работа, выполняемая самой силой при движении по некоторой кривой, равна сумме работ, произведенных каждой «частью» силы. Если мы представляем силу в виде векторной суммы нескольких сил (силы тяжести, реакции связей и т. д., или x-составляющих всех сил плюс y-составляющие и т. д., или еще как-нибудь), то работа всей силы равна сумме работ тех частей, на которые мы ее разделили.

§ 3. *Консервативные силы*

В природе существуют силы, скажем сила тяжести, обладающие замечательным свойством — «консервативностью» (никаких политических идей, ничего двусмысленного в этом понятии нет). Когда мы подсчитываем, какую работу выполняет сила, двигая тело от одной точки к другой, то вообще работа зависит от траектории; но в особых случаях эта зависимость пропадает. Если работа не зависит от траектории, мы говорим, что сила консервативна. Иными словами, если интеграл от произведения силы на приращения смещений между точками *1* и *2* (фиг. 14.2) один раз вычислен вдоль кривой A, а другой — вдоль кривой B, и оба раза получается одинаковое количество джоулей, и если это выполнено для *любой кривой*, соединяющей эту пару точек, и если это же справедливо *для любой пары точек*, то говорят, что сила консервативна. В таких обстоятельствах интеграл работы между точками *1* и *2* можно легко подсчитать и дать для него формулу. А в других случаях это не так просто: нужно задавать еще форму кривой; но когда работа не зависит от кривой, то, ясное дело, остается только зависимость от *положений* точек *1* и *2*.

Чтобы доказать это, рассмотрим фиг. 14.2. Фиксируем произвольную точку P. Криволинейный интеграл работы на участке (*1*,*2*) можно вычислить, разбив его на две части: работу на участке (*1*, P) и работу на участке (P, *2*), потому что сейчас у нас всюду консервативные силы, и по какому пути ни пойти, значение работы одно и то же. Работа перемещения из точки P в любую точку пространства является функцией положения конечной точки. Она зависит и от P, но



Фиг. 14.2. Возможные пути, соединяющие две точки в поле сил.

мы во всем дальнейшем анализе точку P закрепим, так что работа перемещения тела от точки P к точке 2 будет некоторой функцией положения точки 2. Она зависит от того, где находится точка 2; если переместить тело в другую точку, ответ будет другой.

Обозначим эту функцию положения через $-U(x, y, z)$; желая отметить, что речь идет именно о точке 2 с координатами x_2, y_2, z_2, мы будем просто писать $U(2)$, сокращая обозначение $U(x_2, y_2, z_2)$. Работу перемещения из точки 1 в точку P можно написать, обратив направление интегрирования (переменив знаки всех $d\mathbf{s}$). Другими словами, работа на участке $(1, P)$ равна работе на участке $(P, 1)$ со знаком минус:

$$\int_1^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_P^1 \mathbf{F} \cdot (-d\mathbf{s}) = -\int_P^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Значит, работа на участке $(P,1)$ есть $-U(1)$, а на участке $(P,2)$ есть $-U(2)$. Поэтому интеграл от 1 до 2 равен $-U(2)$ плюс $[-U(1)$ назад$]$, т. е. $+U(1) - U(2)$:

$$U(1) = -\int_P^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad U(2) = -\int_P^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U(1) - U(2). \tag{14.1}$$

Величина $U(1) - U(2)$ называется изменением потенциальной энергии, а U можно назвать потенциальной энергией. Мы будем говорить, что когда предмет находится в положении 2, то он обладает потенциальной энергией $U(2)$, а в положении 1 — потенциальной энергией $U(1)$. Когда он находится в положении P, его потенциальная энергия равна нулю. Если бы вместо P взять любую другую точку Q, то оказалось бы (это предоставляется доказать вам самим), что *потенциальная энергия всех точек изменилась бы только на постоянную добавку*. Так как сохранение энергии зависит только от *изменений* ее, то эта добавочная постоянная никакого значения не имеет. Вот поэтому точка P произвольна.

Итак, у нас имеются два утверждения: 1) работа, выполняемая силой, равна изменению кинетической энергии системы, но 2) математически для консервативных сил выполненная работа равна минус изменению функции U, называемой потенциальной энергией. Как следствие этих утверждений возникает еще одно: *если действуют только консервативные силы, сумма потенциальной U и кинетической T энергий остается постоянной:*

$$T + U = \text{const}. \tag{14.2}$$

Рассмотрим формулу потенциальной энергии для ряда случаев. Если поле тяготения однородно, если мы не поднимаемся до высот, сравнимых с радиусом Земли, то сила постоянна и направлена вертикально, а работа равна просто произведению силы на расстояние по вертикали. Стало быть,

$$U(z) = mgz, \tag{14.3}$$

и за точку P с нулевой потенциальной энергией можно принять любую точку на поверхности $z = 0$. Но можно также говорить, что потенциальная энергия равна $mg(z - 6)$, если нам так уж этого хочется! Все результаты в нашем анализе останутся теми же, кроме того что потенциальная энергия на поверхности $z = 0$ будет равна $-mg6$. Разницы никакой, ведь в расчет надо принимать только *разности* потенциальных энергий.

Энергия, необходимая для сжатия пружины на расстояние x от точки равновесия, равна

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2, \tag{14.4}$$

и нуль потенциальной энергии приходится на точку $x = 0$, т. е. на равновесное состояние пружины. И здесь тоже мы можем добавить любую константу.

Потенциальная энергия тяготения точечных масс M и m на расстоянии r друг от друга равна

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \tag{14.5}$$

Константа здесь выбрана так, чтобы потенциал исчезал на бесконечности. Конечно, эту же формулу можно применить и к электрическим зарядам, поскольку закон один и тот же:

$$U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{14.6}$$

Давайте теперь поработаем с одной из этих формул, посмотрим, поняли ли мы их смысл.

Вопрос: С какой скоростью должна отправиться ракета с Земли, чтобы покинуть ее?

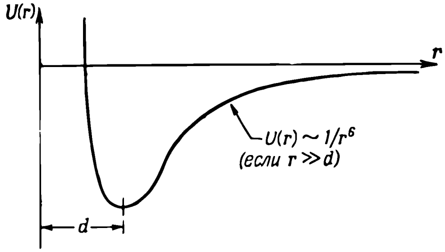
Ответ: Сумма кинетической и потенциальной энергий должна быть постоянной; покинуть Землю — значит удалиться от нее на миллионы километров; если у ракеты только-только хватает сил, чтобы покинуть Землю, то надо предположить, что там, вдалеке, ее скорость будет равна нулю и что на бесконечности она будет едва-едва двигаться. Пусть a — радиус Земли, а M — ее масса. Кинетическая плюс потенциальная энергии первоначально были равны $^1/_2mv^2 - GmM/a$. В конце движения эти обе энергии должны сравняться. Кинетическую энергию в конце движения мы считаем нулевой, потому что тело еле движется (почти с нулевой скоростью), а потенциальная энергия равна величине GmM, деленной на бесконечность, т. е. опять нулевая. Значит, с одной стороны стоит разность двух нулей; поэтому квадрат скорости должен быть равен $2GM/a$. Но GM/a^2 это как раз то, что называют ускорением силы тяжести g. Итак,

$$v^2 = 2ga.$$

С какой скоростью должен двигаться искусственный спутник, чтобы не падать на Землю? Мы когда-то решали эту задачу и получили $v^2 = GM/a$. Значит, чтобы покинуть Землю, нужна скорость, в $\sqrt{2}$ большая, чем скорость вращения спутника вокруг Земли. Иными словами, чтобы улететь с Земли, нужно *вдвое больше энергии* (энергия пропорциональна квадрату скорости), чем чтобы облететь вокруг нее. Поэтому исторически сначала были совершены облеты искусственных спутников вокруг Земли, для чего понадобились скорости около 7,8 *км/сек.* И только потом космические корабли были заброшены в мировое пространство; для этого потребовалось уже вдвое больше энергии, т. е. скорости около 11,2 *км/сек.*

Продолжим теперь наш обзор характеристик потенциальной энергии. Давайте рассмотрим взаимодействие двух молекул или двух атомов, например двух атомов кислорода. Когда они находятся далеко друг от друга, они притягиваются с силой, обратно пропорциональной седьмой степени расстояния, а при тесном сближении они сильно отталкиваются. Проинтегрировав минус седьмую степень расстояния, чтобы получить работу, мы увидим, что потенциальная энергия U (функция расстояния между атомами кислорода) изменяется как минус шестая степень расстояния (на больших расстояниях).

Если мы чертим некую кривую потенциальной энергии $U(r)$ (фиг. 14.3), то при больших r она выглядит как r^{-6}, а при достаточно малых r достигает минимума. Минимум потенциальной энергии в точке $r = d$ означает, что если мы сдвинемся от нее на малое расстояние, на очень малое расстояние, то произведенная работа, равная изменению потенциальной энергии на этом промежутке, почти равна нулю, потому что на донышке кривой энергия почти не меняется. Значит, в этой точке сила равна нулю, и это есть точка равновесия. Условие равновесия можно высказать и иначе: для



Фиг. 14.3. Потенциальная энергия взаимодействия двух атомов как функция расстояния между ними.

удаления из точки равновесия в любую сторону нужно затратить работу. Когда два атома кислорода расположены так, что никакой энергии из их силы взаимодействия больше выжать нельзя, то они находятся в наинизшем энергетическом состоянии и промежуток между ними равен d. Так выглядит молекула кислорода, когда она не нагрета. При нагревании атомы колеблются и расходятся; их можно и совсем развести, но для этого нужно определенное количество работы или энергии, равное разности потенциальных энергий в точках $r = d$ и $r = \infty$. При попытке сблизить атомы энергия быстро возрастает вследствие их взаимного отталкивания.

Почему мы говорим о потенциальной энергии? Потому что идея *силы* не очень пригодна для квантовой механики, там более естественна идея *энергии*. Когда мы рассматриваем более сложные взаимодействия: ядерного вещества, молекул и т. д., то, хотя понятия силы и скорости «рассасываются» и исчезают, оказывается, что понятие энергии все же остается. Поэтому в книгах по квантовой механике мы находим кривые потенциальной энергии, но очень редко увидим график силы взаимодействия двух молекул, потому что те, кто изучает эти явления, больше уже привыкли думать об энергии, чем о силе.

Заметим еще, что, когда на тело одновременно действуют несколько консервативных сил, потенциальная энергия тела есть сумма потенциальных энергий от каждой силы. Это то, что мы утверждали и раньше, потому что, когда сила представляется векторной суммой сил, работа, производимая ею, равна сумме работ, производимых отдельными силами; поэтому ее можно представить как изменения потенциальных энергий от каждой силы по отдельности. Значит, общая потенциальная энергия равна сумме всех частей.

Мы можем обобщить это на случай системы многих тел, как, например, Юпитера, Сатурна, Урана и т. д. или атомов кислорода, азота, углерода и т. д., взаимодействующих друг с другом попарно, причем силы взаимодействия каждой пары консервативны. В таких условиях кинетическая энергия всей системы есть просто сумма кинетических энергий всех отдельных атомов, или планет, или частиц, а потенциальная энергия системы есть сумма потенциальных энергий взаимодействия отдельных пар, рассчитанных в предположении, что других частиц нет. (На самом деле для молекулярных сил это неверно, и формула получается несколько сложнее; для ньютонова тяготения это определенно справедливо, а для молекулярных сил годится лишь как приближение. Можно, конечно, говорить о потенциальной энергии молекулярных сил, но она иногда оказывается более сложной функцией положений атомов, чем простая сумма попарных взаимодействий.) Поэтому потенциальная энергия в частном случае тяготения представляется суммой по всем парам i и j членов $-Gm_im_j/r_{ij}$ [как было показано в уравнении (13.14)]. Уравнение (13.14) выражает математически следующее предложение: общая потенциальная плюс общая кинетическая энергии не меняются со временем. Пусть себе различные планеты вращаются, обращаются и покачиваются, все равно, если подсчитать общую потенциальную и общую кинетическую энергии, то окажется, что их сумма всегда остается постоянной.

§ 4. *Неконсервативные силы*

Мы потратили немало времени, обсуждая свойства консервативных сил. Что же мы теперь скажем о неконсервативных силах? Мы хотим разобраться в этом вопросе более подробно, чем это обыкновенно делают, и показать, что неконсервативных сил не бывает! Оказывается, все основные силы природы, по-видимому, консервативны. Не подумайте, что это следствие из законов Ньютона. На самом деле, насколько представлял себе это сам Ньютон, силы могут быть неконсервативными, как, например, трение, которое кажется неконсервативным. Употребляя слово «кажется», мы проводим современную точку зрения, которая доказывает, что все глубинные силы, все силы взаимодействия между частицами на самом фундаментальном уровне суть силы консервативные.

Когда мы, например, анализируем систему наподобие большого шарового звездного скопления (фотографию такого скопления мы показывали) с тысячами взаимодействующих звезд, то формула для общей потенциальной энергии состоит просто из суммы слагаемых, каждое из которых выражает взаимодействие какой-то пары звезд; точно так же и кинетическая энергия есть сумма кинетических энергий всех отдельных звезд. Но шаровое скопление как целое движется и в пространстве, и окажись мы от него так далеко, что не смогли бы различать отдельных деталей, мы бы приняли его за единый предмет. Если бы при этом к нему были приложены какие-то силы, то часть из них могла бы двигать его как целое и мы бы увидели, как центр этого тела движется.

С другой стороны, прочие силы могли бы, если так можно выразиться, «тратиться» на повышение потенциальной или кинетической энергии «частиц» внутри «тела». Положим, например, что действие этих сил привело бы к расширению всего скопления и увеличению скоростей «частиц». Общая энергия «тела» на самом деле сохранялась бы. Но, глядя издалека нашими слабыми глазами, не различающими беспорядочных внутренних движений, мы бы видели только кинетическую энергию всего тела и нам бы казалось, что энергия не сохраняется, хотя все дело было бы в том, что мы не различаем деталей. Оказывается, что это всегда так: общая энергия Вселенной, кинетическая плюс потенциальная, если как следует посмотреть, всегда постоянна.

Изучая тончайшие свойства вещества на атомном уровне, *не всегда легко* разделить общую энергию на две части, потенциальную и кинетическую, и не всегда такое разделение необходимо. Во всяком случае, оно возможно *почти* всегда, так что давайте говорить, что оно *всегда* возможно и что потенциальная плюс кинетическая энергии мира постоянны. Итак, общая потенциальная плюс кинетическая энергии внутри целого мира постоянны, и если «мир» — это изолированный кусок вещества, то энергия его постоянна, если только нет внешних сил. Но, как мы видели, часть кинетической и потенциальной энергий предмета может быть внутренней (например, внутренние молекулярные движения), внутренней в том смысле, что мы ее не замечаем. Мы знаем, что в стакане воды все колеблется, все части беспрерывно движутся, так что внутри имеется определенная кинетическая энергия, на которую мы обычно никакого внимания не обращаем. Мы не замечаем движения атомов, рождающего теплоту, и поэтому не называем его кинетической энергией, но основа тепла — все-таки кинетическая энергия. Точно так же и внутренняя потенциальная энергия может, например, иметь форму химической энергии: когда мы сжигаем бензин, выделяется энергия, потому что потенциальные энергии атомов при новом их размещении оказываются ниже, чем при прежнем расположении. Строго говоря, теплоту нельзя считать чисто кинетической энергией, в нее входит и часть потенциальной энергии; то же относится и к химической энергии, так что лучше объединить их и говорить, что общая кинетическая и потенциальная энергии внутри тела — это частично тепло, частично химическая энергия и т. д. Во всяком случае, все эти различные формы внутренней энергии иногда рассматривают как «потерянную» энергию в том смысле, как сказано выше; когда мы изучим термодинамику, нам все это станет яснее.

В качестве другого примера возьмем трение. Неверно, что кинетическая энергия в результате трения исчезает; это неверно, хотя скользящее тело и впрямь останавливается и кажется, что кинетическая энергия пропала. Но она не пропадает, ибо атомы внутри тела начинают двигаться с большим запасом кинетической энергии; хоть мы это не в силах увидеть, но можно догадаться об этом по повышению температуры. Конечно, если не обращать внимания на тепловую энергию, то теорема о сохранении энергии покажется неправильной.

Еще в одном случае может показаться, что энергия не сохраняется: когда мы изучаем часть всей системы. Вполне естественно, что если что-то взаимодействует с чем-то внешним и мы пренебрегаем этим взаимодействием, то теорема о сохранении энергии будет выглядеть неверной.

В классической физике в потенциальную энергию включались только тяготение и электричество, но теперь у нас есть и атомная энергия и многое другое. В классической теории, например, свет — это особая форма энергии, но можно, если нам этого хочется, представить себе энергию света как кинетическую энергию фотонов, и тогда наша формула (14.2) опять окажется справедливой.

§ 5. *Потенциалы и поля*

Теперь обратимся к некоторым идеям, связанным с потенциальной энергией и с понятием *поля*. Пусть два больших тела A и B притягивают к себе третье малое тело с суммарной силой $\mathbf{F}$. Мы уже отмечали в гл. 12, что сила притяжения частицы может быть представлена как произведение ее массы m на вектор $\mathbf{C}$, зависящий лишь от *положения* частицы:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{C}.$$

Тяготение можно анализировать, считая, что в каждом месте пространства имеется вектор $\mathbf{C}$, который «действует» на массу, помещенную в это место, но который присутствует там безотносительно к тому, поместили ли мы туда массу или нет. Вектор $\mathbf{C}$ имеет три составляющие, и каждая из них является функцией от (x, y, z) — функцией положения в пространстве. Такую вещь мы называем *полем* и говорим, что тела A и B *создают* поле, т. е. «делают» вектор $\mathbf{C}$. Когда тело помещено в поле, то сила действия на это тело равна его массе, умноженной на величину вектора поля в той точке, куда тело попало.

С потенциальной энергией можно сделать то же самое. Так как потенциальная энергия, интеграл от (Сила) $\cdot$ ($d\mathbf{s}$), может быть записана в виде массы m, умноженной на интеграл от (Поле) $\cdot$ ($d\mathbf{s}$) — это простое изменение масштаба, — то потенциальную энергию $U(x, y, z)$ тела, расположенного в точке (x, y, z), можно записать как произведение m на другую функцию. Назовем ее *потенциалом* Ψ. Интеграл $\int \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}$ рався $-\Psi$, подобно тому как $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -U$; они отличаются только масштабом:

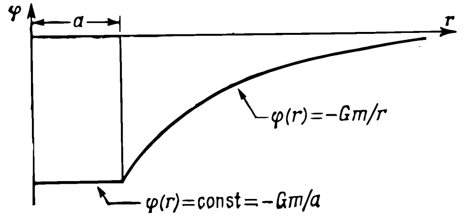
$$U = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -m \int \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = m\Psi. \tag{14.7}$$

Зная в каждой точке пространства эту функцию $\Psi(x, y, z)$, можно немедленно вычислить потенциальную энергию тела в любой точке, а именно $U(x, y, z) = m\Psi(x, y, z)$. Теперь, как видите, это стало делом пустяковым. Но на самом деле это отнюдь не пустяк, потому что иногда намного приятнее описать поле, задав распределение потенциала во всем пространстве, чем задавать $\mathbf{C}$. Вместо трех сложных компонент векторной функции проще задать скалярную функцию Ψ. Кроме того, когда поле создается многими массами, величину Ψ рассчитывать легче, чем три компоненты $\mathbf{C}$: потенциалы — скаляры, их можно просто складывать, не заботясь о направлениях сил. А поле $\mathbf{C}$, как мы сейчас увидим, легко восстановить, зная Ψ.

Пусть у нас есть точечные массы m_1, m_2, ... в точках 1, 2 ..., и мы хотим знать потенциал Ψ в некоторой произвольной точке P. Тогда он оказывается простой суммой потенциалов отдельных масс в точке P:

$$\Psi(P) = \sum_i \left(-\frac{Gm_i}{r_{iP}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{14.8}$$

Этой формулой, представляющей потенциал в виде суммы потенциалов отдельных масс, мы пользовались в предыдущей главе, чтобы вычислить потенциал сферического слоя (мы тогда сложили потенциалы всех поясков, на какие был нарезан слой). Итог расчета показан на фиг. 14.4. Потенциал отрицателен, равен нулю на бесконечности, падает как $1/r$, пока r не станет равным a, и затем внутри слоя становится постоянным. Вне слоя потенциал равен $-Gm/r$ (m — масса слоя), что полностью совпадает с потенциалом точки с массой m, помещенной в центре сферического слоя. Но такое совпадение существует только для точек снаружи слоя, а во внутренних точках потенциал оказывается равным $-Gm/a$ и больше не меняется! А *когда потенциал постоянен, то пóля нет*: если потенциальная энергия не меняется, то сила отсутствует,



Фиг. 14.4. Потенциал тяготеющего сферического слоя радиусом а.

потому что, когда мы двигаем тело из одной внутренней точки в другую, работа, выполняемая силой, в точности равна нулю. Почему? Да потому, что работа передвижения тела из одной точки в другую равна минус изменению потенциальной энергии (или соответствующий интеграл от поля равен изменению потенциала). Но потенциальная энергия в обеих точках *одинакова*, значит, ее изменение равно нулю, и поэтому никакой работы при любых движениях внутри сферического слоя не производится. А это возможно лишь тогда, когда внутри слоя нет никаких сил.

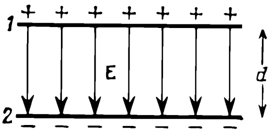
В этих рассуждениях кроется ключ к вычислению силы или напряженности поля, когда потенциальная энергия известна. Пусть потенциальная энергия тела в точке (x, y, z) дана, а мы хотим узнать, какая сила действует на него в этой точке. Для этого нужно знать потенциал не только в этой точке, но и в соседних. Почему? Попробуем вычислить x-компоненту силы (если мы это сумеем сделать, то точно таким же способом мы вычислим и y- и z-компоненты, определив тем самым всю силу). Если б мы сдвинули тело на малое расстояние Δx, то работа, произведенная силой над телом, равнялась бы x-компоненте силы, умноженной на Δx (если Δx достаточно мало), и должна была бы быть равна изменению потенциальной энергии при переходе от одной точки к другой:

$$\Delta W = -\Delta U = F_x \Delta x. \tag{14.9}$$

Мы просто применили формулу $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\Delta U$ для *очень малых расстояний*. Теперь разделим на Δx и обнаружим, что сила равна

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}. \tag{14.10}$$

Конечно, это не совсем точно. На самом деле нам нужно перейти в (14.10) к пределу при Δx, стремящемся к нулю, потому что (14.10) *точно* соблюдается только для бесконечно малых Δx. Мы узнаем в правой части (14.10) производную U по x и хотим написать $-dU/dx$. Но U зависит и от x, и от y, и от z, и для такого случая математики придумали другое обозначение, которое рассчитано на то, чтобы напоминать нам, что надо быть очень осторожным, дифференцируя такую функцию. Этот символ напоминает, что *только* x считается *изменяющимся*, а y и z — нет. Вместо d они просто пишут «6 навыворот», или ∂. (По-моему, когда начинаешь изучать дифференциальные исчисления, то вообще лучше работать с ∂, а не с d; d всегда хочется сократить, а вот на ∂ как-то рука не поднимается!) Итак, они пишут $\partial U/\partial x$, а иногда в припадке строгости, желая быть *очень* бдительными, они ставят за ∂x скобку с маленькими y, z внизу $(\partial U/\partial x)_{yz}$, что озна-



Фиг. 14.5. Поле между параллельными пластинами.

чает: «Продифференцируй U по x, считая y и z постоянными». Но мы чаще всего не будем отмечать, чтó осталось постоянным, из контекста это всегда можно понять. Но зато *всегда* будем писать ∂ вместо d как предупреждение о том, что эта производная берется при постоянных значениях прочих переменных. Ее называют *частной производной*, т. е. производной, для вычисления которой меняют часть переменных. x.

Итак, мы обнаруживаем, что сила в направлении x равна минус частной производной U по x:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{14.11}$$

Точно так же и сила в направлении y получается дифференцированием U по y при постоянных x и z, а третья составляющая силы опять-таки есть производная по z при x и y постоянных:

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{14.12}$$

В этом и состоит способ получать силу из потенциальной энергии. *Поле* получается из потенциала в точности так же:

$$C_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad C_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad C_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \tag{14.13}$$

Заметим, кстати, что существует и другое обозначение (впрочем, пока оно нам не понадобится). Так как **C** есть вектор с компонентами x, y, z, то символы $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, дающие x-, y, z-компоненты поля, чем-то напоминают векторы. Математики изобрели знаменитый символ ∇, или grad, называемый «градиентом»; это не величина, а оператор, он делает из скаляра вектор. У него есть три составляющие: x-компонента этого grad есть $\partial/\partial x$, y-компонента — $\partial/\partial y$, а z-компонента — $\partial/\partial z$, и мы можем позабавиться, переписав наши формулы в виде

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad \mathbf{C} = -\nabla \Psi. \tag{14.14}$$

Глядя на ∇, мы мгновенно узнаем, что наши уравнения векторные; но на самом деле уравнение (14.14) означает в точности то же, что и (14.11) и (14.12); просто это другой способ записи. Не желая писать каждый раз три уравнения, мы пишем одно лишь ∇U.

Еще один пример полей и потенциалов связан с электричеством. В этом случае сила, действующая на неподвижное тело, равна заряду, умноженному на поле: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. (В x-составляющую силы входят, вообще говоря, и члены, которые зависят от магнитного поля. Но из уравнения (12.11) легко увидеть, что сила, действующая на частицу со стороны магнитных полей, всегда направлена поперек поля и поперек ее скорости. Благодаря этому свойству магнетизм *не производит никакой работы* над движущимся зарядом, потому что сила перпендикулярна перемещению. Значит, вычисляя кинетическую энергию в электрическом и магнитном полях, можно пренебречь вкладом магнитного поля, так как оно не изменяет кинетической энергии.) Положим, что имеется только электрическое поле. Тогда мы можем рассчитать энергию или произведенную работу точно таким же способом, как и для тяготения: вычислить величину φ, равную минус интегралу от $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ от произвольной фиксированной точки P до точки, в которой вычисляется потенциал; тогда потенциальная энергия в электрическом поле равна просто произведению заряда на эту величину φ:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s},$$
$$U = q\varphi.$$

В качестве примера рассмотрим две параллельные металлические пластины с поверхностным зарядом $\pm\sigma$ (на единицу площади) каждая. Такая штука называется плоским конденсатором. Мы уже убедились раньше, что снаружи пластин сила равна нулю, а между ними существует постоянное электрическое поле. Оно направлено от плюса к минусу и равно σ/ε_0 (фиг. 14.5). Мы хотим знать, какую работу надо совершить, чтобы перенести заряд от одной пластины к другой. Работа равна интегралу от (Сила) $\cdot$ ($d\mathbf{s}$). Его можно записать как произведение заряда на значение потенциала на пластинке *1* минус та же величина на пластине *2*:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Интеграл здесь легко вычислить, так как сила постоянна, и если обозначить толщину конденсатора d, то интеграл равен

$$\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0}\int_1^2 dx = \frac{q\sigma d}{\varepsilon_0}.$$

Разница в потенциалах $\Delta\varphi = \sigma d/\varepsilon_0$ называется *напряжением* и φ измеряют в вольтах. Когда мы говорим, что пара пластин заряжена до определенного напряжения, мы хотим этим сказать, что разность электрических потенциалов двух пластин равна стольким-то вольтам. У конденсатора, сделанного из двух параллельных пластин с поверхностным зарядом $\pm\sigma$, напряжение (или разность потенциалов этой пары пластин) равно $\sigma d/\varepsilon_0$.

Глава **15**

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Принцип относительности

Свыше двухсот лет считалось, что уравнения движения, провозглашенные Ньютоном, правильно описывают природу. Потом в них была обнаружена ошибка. Обнаружена и тут же исправлена. И заметил ошибку, и исправил ее в 1905 г. один и тот же человек — Эйнштейн.

Второй закон Ньютона, выражаемый уравнением:

$$\mathbf{F}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt},$$

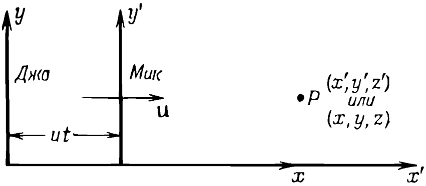
безмолвно предполагал, что m — величина постоянная. Но теперь мы знаем, что это не так, что масса тела возрастает со скоростью. В формуле, исправленной Эйнштейном, m появилась в таком виде:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (15.1)$$

Здесь «масса покоя» m_0 — это масса неподвижного тела, а c — скорость света (примерно $3\cdot10^5$ *км/сек*).

Кому теория нужна лишь для решения задач, тому этой формулы будет вполне достаточно. Больше ничего от теории относительности ему не понадобится; он просто введет в законы Ньютона поправку на изменяемость массы. Из самой формулы очевидно, что рост массы в обычных условиях незначителен.

Даже если v — скорость спутника (около 8 *км/сек*), то и при этих условиях $v/c=3/10^5$; подстановка этой величины в формулу показывает, что поправка к массе составит не более одной двухмиллиардной части самой массы



Фиг. 15.1. Две системы координат, находящиеся в равномерном относительном движении вдоль оси x.

что, пожалуй, заметить невозможно. На самом деле, правильность формулы подтверждена наблюдением движения разнообразных частиц, скорость которых практически вплотную подходила к скорости света. В обычных условиях рост массы незаметен; тем замечательней, что он сперва был обнаружен теоретически, а уж после открыт на опыте. Хотя для достаточно больших скоростей рост может быть как угодно велик, открыт он был не таким путем. Закон этот в момент своего открытия означал лишь едва заметное изменение в некоторых цифрах. Тем интереснее разобраться, как сочетание физического размышления и физического эксперимента вызвало его к жизни. Вклад в это дело внесло немалое число людей, но конечным итогом их деятельности явилось открытие Эйнштейна.

У Эйнштейна, собственно говоря, есть две теории относительности. Мы будем здесь говорить только о *специальной теории относительности*, ведущей свое начало с 1905 г. В 1915 г. Эйнштейн выдвинул еще одну теорию, называемую *общей теорией относительности*. Она обобщает специальную теорию на случай тяготения; мы не будем ее здесь обсуждать.

Принцип относительности впервые высказал Ньютон в одном из следствий из Законов Движения: «Относительные движения друг по отношению к другу тел, заключенных в каком-либо пространстве, одинаковы, покоится ли это пространство или движется равномерно и прямолинейно без вращения». Это означает, к примеру, что при свободном полете межпланетного корабля с постоянной скоростью все опыты, поставленные на этом корабле, все явления, наблюдаемые на нем, будут таковы, как будто он покоится (конечно, при условии, что наружу из корабля выходить не будут). В этом смысл принципа относительности. Мысль эта — довольно проста; вопрос только в том, *верно ли*, что во всех опытах, производимых внутри движущейся системы, законы физики выглядят такими же, какими они были бы, если бы система стояла на одном месте. Давайте же сначала посмотрим, так ли выглядят законы Ньютона в движущейся системе. Для этого нам снова понадобится помощь наших молодых людей — Мика и Джо.

Пускай Мик отправился вдоль по оси x с постоянной скоростью u и измеряет свое положение в какой-то точке, показанной на фиг. 15.1. Он обозначает «x-расстояние» точки в своей системе координат как x'. Джо стоит на месте и измеряет положение той же точки, обозначая ее x-координату в своей системе через x. Связь между координатами в двух системах ясна из рисунка. За время t начало системы Мика сдвинулось на ut, и если обе системы вначале совпадали, то

$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \quad & y' &= y, \\ z' &= z, & t' &= t. \end{aligned} \tag{15.2}$$

Если подставить эти преобразования координат в законы Ньютона, то законы эти превращаются в такие же законы, но в штрихованной системе; это значит, что законы Ньютона имеют одинаковый вид в движущейся и в неподвижной системах; потому-то, проделав любые опыты по механике, и нельзя сказать, движется система или нет.

Принцип относительности применялся в механике уже издавна. Многие, в частности Гюйгенс, пользовались им для вывода законов столкновения биллиардных шаров почти так же, как мы в гл. 10 доказывали сохранение импульса.

В прошлом столетии в результате исследования явлений электричества, магнетизма и света интерес к принципу относительности возрос. Максвелл подытожил в своих уравнениях электромагнитного поля многие тщательные исследования этих явлений. Его уравнения сводят воедино электричество, магнетизм, свет. Однако уравнения Максвелла, по-видимому, *не подчиняются* принципу относительности: если преобразовать их подстановкой (15.2), то *их вид не останется прежним.* Значит, в движущемся межпланетном корабле оптические и электрические явления не такие, как в неподвижном; их можно использовать для определения его скорости, в частности определить и абсолютную скорость корабля, сделав подходящие электрические или оптические измерения. Одно из следствий уравнений Максвелла заключается в том, что если возмущение поля порождает свет, то эти электромагнитные волны распространяются во все стороны одинаково и с одинаковой скоростью $c = 300\,000$ *км/сек*. Другое следствие уравнений: если источник возмущения движется, то испускаемый свет все равно мчится сквозь пространство со скоростью c. Так же бывает и со звуком: скорость звуковых волн тоже не зависит от движения источника.

Эта независимость от движения источника света ставит интересный вопрос. Положим, что мы едем в автомашине со скоростью u, а свет от задних фар распространяется со скоростью *c*. Дифференцируя первую строчку в (15.2), получаем

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}-u.$$

Это означает, что, в согласии с преобразованиями Галилея, видимая скорость света по измерениям, проведенным из автомашины, будет не c, а $c-u$. Например, скорость автомашины 100 000 *км/сек*, а скорость света 300 000 *км/сек*, тогда свет от фар будет удаляться с быстротой 200 000 *км/сек*. Во всяком случае, измерив скорость света, испускаемого фарами (если только справедливы преобразования Галилея для света), можно узнать скорость автомашины. На этой идее основывалось множество опытов по определению скорости Земли, но ни один из них не удался: *никакой скорости* обнаружено не было. Вы скоро познакомитесь очень подробно с одним из таких опытов. Вы разберетесь, что в нем случилось и в чем было дело. Что-то неладное творилось в ту пору с уравнениями физики. Но что именно?

§ 2. Преобразование Лоренца

Когда стало ясно, что с уравнениями физики не все ладится, первым долгом подозрение пало на уравнения электродинамики Максвелла. Они только-только были написаны, им было всего 20 лет от роду; казалось почти естественным, что они неверны. Их принялись переписывать, видоизменять и подгонять к тому, чтобы оказался выполненным принцип относительности в галилеевой форме (15.2). При этом в уравнениях электродинамики появились новые члены; они предсказывали новые электрические явления, но эксперимент никаких таких явлений не обнаружил, и пришлось отказаться от попыток изменить уравнения Максвелла. Постепенно всем становилось ясно, что максвелловы законы электродинамики абсолютно правильны, а загвоздка в чем-то другом.

Между тем Лоренц заметил одно замечательно любопытное явление: когда он делал в уравнениях Максвелла подстановку

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \tag{15.3а}$$

$$y'=y, \tag{15.3б}$$

$$z'=z, \tag{15.3в}$$

$$t'=\frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \tag{15.3г}$$

то форма уравнений после подстановки не менялась! Уравнения (15.3) теперь называют *преобразованием Лоренца*.

А Эйнштейн, следуя мысли, впервые высказанной Пуанкаре, предположил, что *все физические законы не должны меняться от преобразований Лоренца.* Иными словами, надо менять не законы электродинамики, а законы механики. Но как же изменить законы Ньютона, чтобы *они* при преобразованиях Лоренца не менялись? Когда такая цель поставлена, то остается только переписать уравнения Ньютона так, чтобы выполнялись поставленные условия. Как оказалось, единственное, что нужно от них потребовать, — это чтоб масса m в уравнениях Ньютона приобрела вид (15.1). Стоит внести это изменение, и наступает полная гармония между уравнениями Ньютона и Максвелла. Если вы теперь, желая согласовать измерения, проведенные Миком и Джо, используете преобразования Лоренца, то вы ни за что не узнаете, кто из них движется, ибо форма всех уравнений в обеих системах координат будет одной и той же!

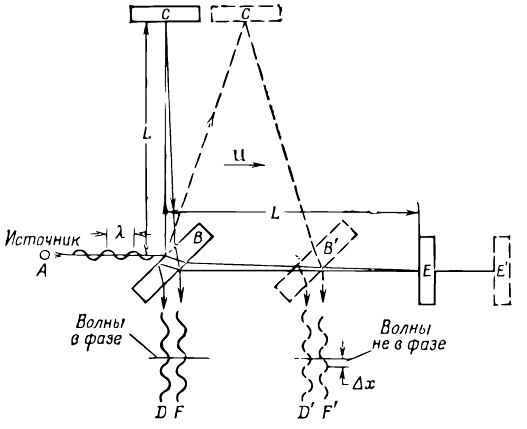
Интересно понять, что означает эта замена старых преобразований координат и времени на новые. Старые (галилеевы) кажутся очевидными, новые (лоренцевы) выглядят необычно. Как же это может быть, с логической и с экспериментальной точек зрения, что справедливы не старые преобразования, а новые? Чтобы разобраться в этом, мало изучить законы механики, надо (как это и сделал Эйнштейн) проанализировать и наши представления о *пространстве* и *времени*, иначе этих преобразований не поймешь. В течение некоторого времени мы будем изучать эти представления и следствия из них. Покамест же стоит отметить, что такой анализ оказывается вполне оправданным — его результаты согласуются с данными опыта.

§ 3. Опыт Майкельсона — Морли

Мы уже говорили, что в свое время были сделаны попытки определить абсолютную скорость движения Земли сквозь воображаемый «эфир», который, как думали тогда, пропитывает собой все пространство. Самый известный из таких опытов проделали в 1887 г. Майкельсон и Морли. Но только через 18 лет отрицательные результаты их опыта объяснил Эйнштейн.

Для опыта Майкельсона — Морли использовали прибор, схема которого показана на фиг. 15.2. Главные части прибора: источник света A, посеребренная полупрозрачная стеклянная пластинка B, два зеркала C и E. Все это жестко укрепляется на тяжелой плите. Зеркала C и E размещены были на одинаковом расстоянии L от пластинки B. Пластинка B расщепляет падающий пучок света на два, перпендикулярных один к другому; они направляются на зеркала

Фиг. 15.2. Схема опыта Майкельсона — Морли.



и отражаются обратно на пластинку B. Пройдя снова сквозь пластинку B, оба пучка накладываются друг на друга (D и F). Если время прохождения света от B до E и обратно равно времени прохождения от B до C и обратно, то возникающие пучки D и F окажутся в фазе и усилятся взаимно; если же эти времена хоть немного отличаются, то в пучках возникает сдвиг по фазе и, как следствие, — интерференция. Если прибор в эфире «покоится», то времена в точности равны, а если он движется направо со скоростью u, то появится разница во времени. Давайте посмотрим, почему.

Сначала подсчитаем время прохождения света от B к E и обратно. Пусть время «туда» равно t_1, а время «обратно» равно t_2. Но пока свет движется от B до зеркала, сам прибор уйдет на расстояние ut_1, так что свету придется пройти путь $L + ut_1$ со скоростью c. Этот путь можно поэтому обозначить и как ct_1; следовательно,

$$ct_1 = L + ut_1, \quad \text{или} \quad t_1 = \frac{L}{c-u}$$

(этот результат становится очевидным, если учесть, что скорость света по отношению к прибору есть $c - u$; тогда как раз время равно длине L, деленной на $c - u$). Точно так же можно рассчитать и t_2. За это время пластинка B приблизится на расстояние ut_2, так что свету на обратном пути придется пройти только $L - ut_2$. Тогда

$$ct_2 = L - ut_2, \quad \text{или} \quad t_2 = \frac{L}{c+u}.$$

Общее же время равно

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - u^2};$$

удобнее это записать в виде

$$t_1 + t_2 = \frac{2L/c}{1 - u^2/c^2}. \qquad (15.4)$$

А теперь подсчитаем, сколько времени t_3 свет будет идти от пластинки B до зеркала C. Как и прежде, за время t_3 зеркало C сдвинется направо на расстояние ut_3 (до положения C'), а свет пройдет по гипотенузе BC' расстояние ct_3. Из прямоугольного треугольника следует

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2,$$

или

$$L^2 = c^2t_3^2 - u^2t_3^2 = (c^2 - u^2)\,t_3^2,$$

откуда

$$t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$

При обратной прогулке от точки C' свету приходится пройти то же расстояние; это видно из симметрии рисунка. Значит, и время возвращения то же (t_3), а общее время равно $2t_3$. Мы запишем его в виде

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (15.5)$$

Теперь мы можем сравнить оба времени. Числители в (15.4) и (15.5) одинаковы — это время распространения света в покоящемся приборе. В знаменателях член u^2/c^2 мал, если только u много меньше c. Знаменатели эти показывают, насколько изменяется время из-за движения прибора. Заметьте, что эти изменения *неодинаковы* — время прохождения света до C и обратно чуть меньше времени прохождения до E и обратно. Они не совпадают, даже если расстояния от зеркал до B одинаковы. Остается только точно измерить эту разницу.

Здесь возникает одна техническая тонкость: а что если длины L не точно равны между собой? Ведь точного равенства все равно никогда не добьешься. В этом случае надо просто повернуть прибор на 90°, расположив BC *по* движению, а BE — *поперек*. Различие в длинах тогда перестает играть роль, и остается только наблюдать за *сдвигом* интерференционных полос при повороте прибора.

Во время опыта Майкельсон и Морли расположили прибор так, что отрезок BE оказался параллельным движению Земли по орбите (в определенный час дня и ночи). Орбитальная скорость равна примерно 30 *км/сек*, и «снос эфира» в определенные часы дня или ночи и в определенное время года должен достигать этой величины. Прибор был достаточно чувствителен, чтобы заметить такое явление. Но никакого различия во временах обнаружено не было — скорость движения Земли сквозь эфир оказалось невозможно обнаружить. Результат опыта был нулевой.

Это было загадочно. Это настораживало. Первую плодотворную идею, как выйти из тупика, выдвинул Лоренц. Он допустил, что все материальные тела при движении сжимаются, но только в направлении движения. Таким образом, если длина покоящегося тела есть L_0, то длина тела, движущегося со скоростью u (назовем ее $L_{\|}$, где значок $\|$ показывает, что движение происходит вдоль длины тела), дается формулой

$$L_{\|}=L_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,. \tag{15.6}$$

Если эту формулу применить к интерферометру Майкельсона — Морли, то расстояние от B до C останется прежним. а расстояние от B до E укоротится до $L\sqrt{1-u^2/c^2}$. Таким образом, уравнение (15.5) не изменится, но L в уравнении (15.4) изменится в соответствии с (15.6). В результате мы получим

$$t_1+t_2=\frac{(2L/c)\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-u^2/c^2}=\frac{2L/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,. \tag{15.7}$$

Сравнивая это с (15.5), мы видим, что теперь $t_1+t_2=2t_3$. Стало быть, если прибор действительно сокращается так, как мы предположили, то становится понятным, почему опыт Майкельсона — Морли никакого эффекта не дал.

Хотя гипотеза сокращения успешно объясняла отрицательный итог опыта, она сама оказалась беззащитной перед обвинением, что ее единственная цель — избавиться от трудностей в объяснении опыта. Она была чересчур искусственной. Однако сходные трудности возникали и в других опытах по обнаружению эфирного ветра. В конце концов стало казаться, что природа вступила в «заговор» против человека, что она прибегла к конспирации и то и дело вводит какие-то новые явления, чтобы свести к нулю каждое явление, с помощью которого человек пытается измерить u.

И наконец, было признано (на это указал Пуанкаре), что *полная конспирация — это и есть закон природы*! Пуанкаре предположил, что в природе *есть закон*, заключающийся в том, что нельзя обнаружить эфирный ветер *никаким* способом, т. е. абсолютную скорость обнаружить невозможно.

§ 4. Преобразование времени

При проверке, согласуется ли идея о сокращении расстояний с фактами, обнаруженными в других опытах, оказывается, что все действительно согласуется, если только считать, что *время тоже преобразуется* и притом так, как это высказано в уравнении (15.3). По этой-то причине время t_3, которое затратит свет на путешествие от B к C и обратно, оказывается неодинаковым, если его вычисляет человек, делающий этот опыт в движущемся межпланетном корабле, или же неподвижный наблюдатель, который следит со стороны за этим кораблем. Для первого время t_3 равно просто $2L/c$, а для второго оно равно $2L/c\sqrt{1-u^2/c^2}$ [уравнение (15.5)]. Иными словами, если вы со стороны наблюдаете, как космонавт закуривает папиросу, вам кажется, что он делает это медленнее, нежели обычно, хотя сам он считает, что все происходит в нормальном темпе. Стало быть, не только длины должны сокращаться, но и приборы для измерения времени («часы») должны замедлить свой ход. Иначе говоря, когда часы на космическом корабле отсчитывают, по мнению космонавта, 1 *сек*, то, по мнению стороннего наблюдателя, пройдет $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ *сек*.

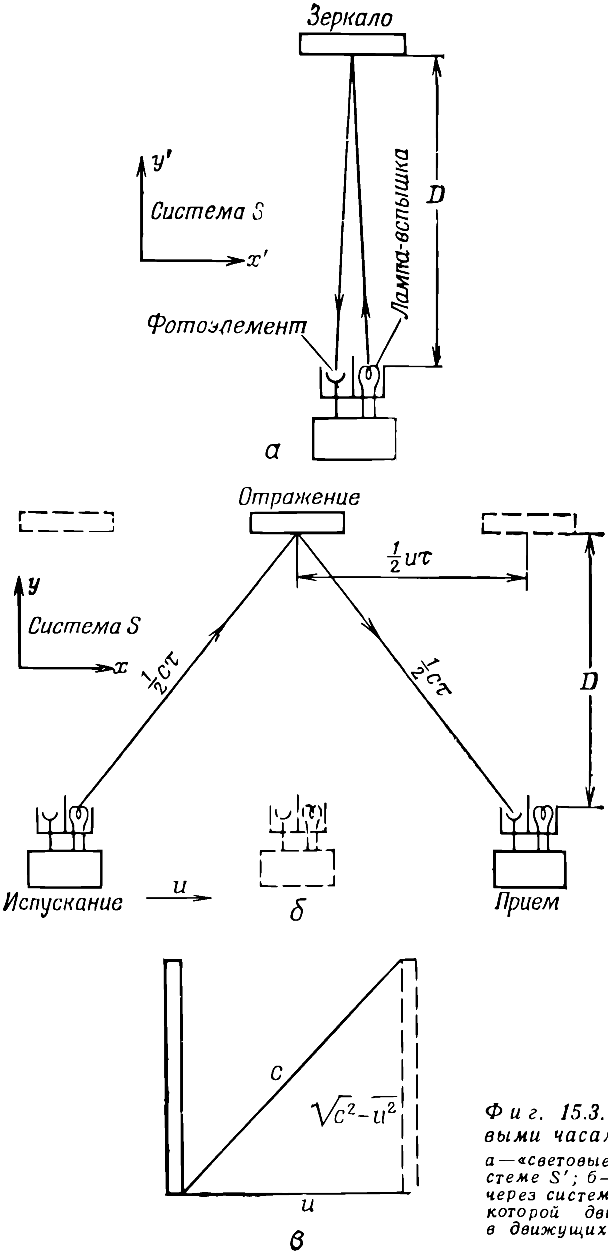
Замедление хода часов в движущейся системе — явление весьма своеобразное, и его стоит пояснить. Чтобы понять его, давайте проследим, что бывает с часовым механизмом, когда часы движутся. Так как это довольно сложно, то лучше часы выбрать попроще. Пусть это будет стержень (метровой длины) с зеркалами на обоих концах. Если пустить световой сигнал между зеркалами, то он будет без конца бегать туда-сюда, а часы будут тикать каждый раз, как только свет достигнет нижнего конца. Конструкция довольно глупая, но в принципе такие часы возможны. И вот мы изготовим двое таких часов со стержнями равной длины и синхронизуем их ход, пустив их одновременно; ясно, что они всегда будут идти одинаково: ведь длина стержней одна и та же, а скорость света c — тоже. Дадим одни часы космонавту; пусть он возьмет их с собой на межпланетный корабль и поставит их поперек направления движения, тогда длина стержня не изменится. Да, но откуда мы знаем, что поперечная длина не меняется? Наблюдатель может договориться с космонавтом, что на высоте y в тот момент, когда стержни поравняются, каждый сделает другому на его стержне метку. Из симметрии следует, что отметки придутся на те же самые координаты y и y', в противном случае одна метка окажется ниже или выше другой и, сравнив их, можно будет сказать, кто из них двигался на самом деле.

Так что же происходит в движущихся часах? Входя на борт корабля, космонавт убедился, что это вполне приличные стандартные часы и ничего особенного в их поведении на корабле он не заметил. Если бы он что-то заметил, то сразу понял бы, что он движется; если хоть что-то меняется в результате движения, то ясно, что он движется. Принцип же относительности утверждает, что в равномерно движущейся системе это невозможно; стало быть, в часах никаких изменений не произошло. С другой стороны, когда внешний наблюдатель взглянет на пролетающие мимо часы, он увидит, что свет, перебегая от зеркала к зеркалу, на самом деле движется зигзагами, потому что стержень все время перемещается боком. Мы уже анализировали такое зигзагообразное движение в связи с опытом Майкельсона — Морли. Когда за заданное время стержень сдвинется на расстояние, пропорциональное u (фиг. 15.3), то расстояние, пройденное за то же время светом, будет пропорционально c, и поэтому расстояние по вертикали пропорционально $\sqrt{c^2 - u^2}$.

Значит, свету понадобится *больше времени*, чтобы пройти движущийся стержень из конца в конец, — больше, чем когда стержень неподвижен. Поэтому кажущийся промежуток времени между тиканьями движущихся часов удлинится в той же пропорции, во сколько гипотенуза треугольника длиннее катета (из-за этого в формуле и появляется корень). Из рисунка также видно, что чем u больше, тем сильнее видимое замедление хода часов. И не только такие часы начнут отставать, но (если только теория относительности правильна!) любые часы, основанные на любом принципе, также должны отстать, причем в том же отношении. За это можно поручиться, не проделывая дальнейшего анализа. Почему?

Чтобы ответить и на этот вопрос, положим, что у нас есть еще двое часов, целиком сходных между собой, скажем, с зубчатками и камнями, или основанных на радиоактивном распаде, или еще каких-нибудь. Опять согласуем их ход с нашими первыми часами. Пусть, пока свет прогуляется до конца и обратно, известив о своем прибытии тиканьем, за это время новая модель завершит свой цикл и тоже возвестит об этом какой-нибудь вспышкой, звонком или любым иным сигналом. Захватим с собой на космический корабль новую модель часов. Может быть, эти часы уже не отстанут, а будут идти так же, как и неподвижный двойник. Ах, нет! Если они разойдутся с первой моделью (которая тоже находится на корабле), то человек сможет использовать этот разнобой между показаниями обоих часов, чтобы определить скорость корабля. А ведь считается, что скорость узнать немыслимо. Смотрите, как ловко! *Нам не нужно ничего знать о механизме работы* новых часов, не нужно знать, что именно *в них* замедляется, мы просто знаем, что, какова бы ни была причина, ход часов будет выглядеть замедленным, и притом в любых часах одинаково.

Что же выходит? Если *все* движущиеся часы замедляют свой ход, если любой способ измерения времени приводит к



Фиг. 15.3. *Опыт со «световыми часами».*

а — «световые часы» покоятся в системе S′; б — те же часы движутся через систему S; в — диагональ, по которой движется пучок света в движущихся «световых часах».

замедленному темпу течения времени, нам остается только сказать, что *само время*, в определенном смысле, кажется на движущемся корабле замедленным. На корабле все: и пульс космонавта, и быстрота его соображения, и время, потребное для зажигания папиросы, и период возмужания и постарения — все это должно замедлиться в одинаковой степени, ибо иначе можно будет узнать, что корабль движется. Биологи и медики иногда говорят, что у них нет уверенности в том, что раковая опухоль будет в космическом корабле развиваться дольше. Однако с точки зрения современного физика это случится почти наверняка; в противном случае можно было бы по быстроте развития опухоли судить о скорости корабля!

Очень интересным примером замедления времени при движении снабжают нас мю-мезоны (мюоны) — частицы, которые в среднем через $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ *сек* самопроизвольно распадаются. Они приходят на Землю с космическими лучами, но могут быть созданы и искусственно в лаборатории. Часть космических мюонов распадается еще на большой высоте, а остальные — только после того, как остановятся в веществе. Ясно, что при таком кратком времени жизни мюон не может пройти больше 600 *м*, даже если он будет двигаться со скоростью света. Но хотя мюоны возникают на верхних границах атмосферы, примерно на высоте 10 *км* и выше, их все-таки обнаруживают в земных лабораториях среди космических лучей. Как это может быть? Ответ состоит в том, что разные мюоны летят с различными скоростями, иногда довольно близкими к скорости света. С их собственной точки зрения они живут всего лишь около 2 *мксек*, с нашей же — их жизненный путь несравненно более долог, достаточно долог, чтобы достигнуть поверхности Земли. Их жизнь удлиняется в $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ раз. Среднее время жизни мюонов разных скоростей было точно измерено, причем полученное значение хорошо согласуется с формулой.

Мы не знаем, почему мезон распадается и каков его внутренний механизм, но зато мы знаем, что его поведение удовлетворяет принципу относительности. Тем и полезен этот принцип — он позволяет делать предсказания даже о тех вещах, о которых другим путем мы мало чего узнаем. К примеру, еще не имея никакого представления о причинах распада мезона, мы все же можем предсказать, что если его скорость составит $^9/_{10}$ скорости света, то кажущаяся продолжительность отведенного ему срока жизни будет равна $2{,}2 \cdot 10^{-6}/\sqrt{1-9^2/10^2}$ *сек*. И это предсказание оправдывается. Правда, неплохо?

§ 5. Лоренцево сокращение

Теперь мы вернемся к преобразованию Лоренца (15.3) и попытаемся лучше понять связь между системами координат (x, y, z, t) и (x', y', z', t'). Будем называть их системами S и S', или соответственно системами Джо и Мика. Мы уже отметили, что первое уравнение основывается на предположении Лоренца о том, что по направлению x все тела сжимаются. Как же можно доказать, что такое сокращение действительно бывает? Мы уже понимаем, что в опыте Майкельсона — Морли по принципу относительности *поперечное* плечо BC не может сократиться; в то же время нулевой результат опыта требует, чтобы *времена* были равны. Чтобы получился такой результат, приходится допустить, что продольное плечо BE кажется сжатым в отношении $\sqrt{1-u^2/c^2}$. Что означает это сокращение на языке Джо и Мика? Положим, что Мик, двигаясь с системой S' в направлении x', измеряет метровой линейкой координату x' в некоторой точке. Он прикладывает линейку x' раз и думает, что расстояние равно x' метрам. С точки же зрения Джо (в системе S) линейка у Мика в руках укорочена, а «на самом деле» отмеренное им расстояние равно $x'\sqrt{1-u^2/c^2}$ метров. Поэтому если система S' удалилась от системы S на расстояние ut, то наблюдатель в системе S должен сказать, что эта точка (в его координатах) удалена от начала на $x = x'\sqrt{1-u^2/c^2} + ut$, или

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Это и есть первое уравнение из преобразований Лоренца.

§ 6. Одновременность

Подобным же образом из-за различия в масштабах времени появляется и знаменатель в уравнении (15.3г) в преобразованиях Лоренца. Самое интересное в этом уравнении — это новый и неожиданный член в числителе, член ux/c^2. В чем его смысл? Внимательно вдумавшись в положение вещей, можно понять, что события, происходящие, по мнению Мика (наблюдателя в системе S'), в разных местах одновременно, с точки зрения Джо (в системе S), вовсе *не* одновременны. Когда одно событие случилось в точке x_1 в момент t_0, а другое — в точке x_2 в тот же момент t_0, то соответствующие моменты t'_1 и t'_2 отличаются на

$$t'_2 - t'_1 = \frac{u\,(x_1 - x_2)/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Это явление можно назвать «нарушением одновременности удаленных событий». Чтобы пояснить его, рассмотрим следующий опыт.

Пусть человек, движущийся в космическом корабле (система S'), установил в двух концах корабля часы. Он хочет знать, одинаково ли они идут. Как синхронизовать ход часов? Это можно сделать по-разному. Вот один из способов, он почти не требует вычислений. Расположимся как раз где-то посредине между часами. Из этой точки пошлем в обе стороны световые сигналы. Они будут двигаться в обоих направлениях с одинаковой скоростью и достигнут обоих часов в одно и то же время. Вот этот-то одновременный приход сигналов и можно применить для согласования хода. Положим, что человек в S' таким способом согласует ход часов. Посмотрим, согласится ли наблюдатель в системе S, что эти часы идут одинаково. Космонавт в системе S' имеет право верить, что их ход одинаков; ведь он не знает, что он движется. Но наблюдатель в системе S сразу рассудит, что раз корабль движется, то часы на носу корабля удалились от светового сигнала и свету пришлось пройти больше половины длины корабля, прежде чем он достиг часов; часы на корме, наоборот, двигались к световому сигналу — значит, его путь сократился. Поэтому сигнал сперва дошел до часов на корме, хотя космонавту в системе S' показалось, что сигналы достигли обоих часов одновременно. Итак, выходит, что когда космонавт считает, что события в двух местах корабля произошли одновременно (при одном и том же значении t' в его системе координат), то в другой системе координат *одинаковым* t' отвечают *разные* значения t!

§ 7. Четырехвекторы

Что еще можно обнаружить в преобразованиях Лоренца? Любопытно, что в них преобразование x и t по форме похоже на преобразование x и y, изученное нами в гл. 11, когда мы говорили о вращении координат. Тогда мы получили

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \end{aligned} \tag{15.8}$$

т. е. новое x' перемешивает старые x и y, а y' тоже их перемешивает. Подобным же образом в преобразовании Лоренца новое x' есть смесь старых x и t, а новое t' — смесь t и x. Значит, преобразование Лоренца похоже на вращение, но «вращение» в *пространстве и времени*. Это весьма странное понятие. Проверить аналогию с вращением можно, вычислив величину

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{15.9}$$

В этом уравнении три первых члена в каждой стороне представляют собой в трехмерной геометрии квадрат расстояния между точкой и началом координат (сферу). Он не меняется (остается инвариантным), несмотря на вращение осей координат. Аналогично, уравнение (15.9) свидетельствует о том, что существует определенная комбинация координат и времени, которая остается инвариантной при преобразовании Лоренца. Значит, имеется полная аналогия с вращением; аналогия эта такого рода, что векторы, т. е. величины, составленные из «компонент», преобразуемых так же, как и координаты, оказываются полезными и в теории относительности.

Итак, мы расширим понятие вектора. Пока он у нас мог иметь только пространственные компоненты. Теперь включим в это понятие и временну́ю компоненту, т. е. мы ожидаем, что существуют векторы с четырьмя компонентами: три из них похожи на компоненты обычного вектора, а к ним привязана четвертая — аналог времени.

В следующих главах мы проанализируем это понятие. Мы увидим, что если идеи этого параграфа приложить к импульсу, то преобразование даст три пространственные составляющие, подобные обычным компонентам импульса, и четвертую компоненту — временну́ю часть (которая есть не что иное, как *энергия*).

§ 8. *Релятивистская динамика*

Теперь мы готовы к тому, чтобы с более общей точки зрения исследовать, как преобразования Лоренца изменяют законы механики. [До сих пор мы только объясняли, как изменяются длины и времена, но не объяснили, как получить измененную формулу для m, уравнение (15.1). Это будет сделано в следующей главе.] Изучение следствий формулы Эйнштейна для массы m в механике Ньютона мы начнем с закона силы. Сила есть быстрота изменения импульса, т. е.

$$\mathbf{F}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt},$$

Импульс по-прежнему равен mv, но теперь

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}=\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{15.10}$$

Это законы Ньютона в записи Эйнштейна. При этом видоизменении, если действие и противодействие по-прежнему равны (может, не каждый момент, но по крайней мере после усреднения по времени), то, как и раньше, импульс должен сохраняться, но сохраняющейся величиной является не старое $m\mathbf{v}$ при постоянном m, а выражение (15.10) с переменной массой. С таким изменением в формуле для импульса сохранение импульса по-прежнему будет существовать.

Посмотрим теперь, как импульс зависит от скорости. В ньютоновой механике он ей пропорционален. В релятивистской механике в большом интервале скоростей (много меньших c) они также примерно пропорциональны [см. (15.10)], потому что корень мало отличается от единицы. Но когда v почти равно c, то корень почти равен нулю и импульс поэтому беспредельно растет.

Что бывает, когда на тело долгое время воздействует постоянная сила? В механике Ньютона скорость тела беспрерывно будет возрастать и может превысить даже скорость света. В релятивистской же механике что невозможно. В теории относительности беспрерывно растет не скорость тела, а его импульс, и рост этот сказывается не на скорости, а на массе тела. Со временем ускорение, т. е. изменения в скорости, практически исчезает, но импульс продолжает расти. Поскольку сила приводит к очень малым изменениям в скорости тела, мы, естественно, считаем, что у тела громадная инерция. Но как раз это самое и утверждает релятивистская формула (15.10) для массы тела; она говорит, что инерция крайне велика, когда v почти равно c. Разберем пример. Чтобы отклонить быстрые электроны в синхротроне Калифорнийского технологического института, необходимо магнитное поле, в 2000 раз более сильное, чем следует из законов Ньютона. Иными словами, масса электронов в синхротроне в 2000 раз больше их нормальной массы, достигая массы протона! Если m в 2000 раз больше m_0, то $1 - v^2/c^2$ равно 1/4 000 000, или v отличается от c на 1/8 000 000, т. е. скорость электронов вплотную подходит к скорости света. Если электроны и свет одновременно отправятся в соседнюю лабораторию (находящуюся, скажем, в 200 *м*), то кто явится первым? Ясное дело, свет: он всегда движется быстрее *. Но насколько быстрее? Трудно сказать, насколько раньше во времени, но зато можно сказать, на какое расстояние отстанут электроны: на $^1/_{30}$ *мм*, т. е. на $^1/_3$ толщины этого листка бумаги! Масса электронов в этих состязаниях чудовищна, а скорость не выше скорости света.

На чем еще скажется релятивисткий рост массы? Рассмотрим движение молекул газа в баллоне. Если газ нагреть, скорость молекул возрастет, а вместе с нею и их масса. Газ станет тяжелее. Насколько?

---

* Правда, *видимый* свет проигрывает гонку из-за преломления в воздухе, но γ-излучение ее, несомненно, выиграет.

Разлагая $m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2} = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ в ряд по формуле бинома Ньютона, можно найти приближенно рост массы при малых скоростях. Получается

$$m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right).$$

Из формулы ясно, что при малых v ряд быстро сходится и первых двух-трех членов здесь вполне достаточно. Значит, можно написать

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2}\right), \tag{15.11}$$

где второй член и выражает рост массы за счет повышения скорости. Когда растет температура, v^2 растет в равной мере, значит, увеличение массы пропорционально повышению температуры. Но $^1/_2 m_0 v^2$ — это кинетическая энергия в старомодном, ньютоновом смысле этого слова. Значит, можно сказать, что прирост массы газа равен приросту кинетической энергии, деленной на c^2, т. е. $\Delta m = \Delta(\text{к. э.})/c^2$.

§ 9. *Связь массы и энергии*

Это наблюдение навело Эйнштейна на мысль, что массу тела можно выразить проще, чем по формуле (15.1), если сказать, что масса равна полному содержанию энергии в теле, деленному на c^2. Если (15.11) помножить на c^2, получается

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \ldots . \tag{15.12}$$

Здесь левая часть дает полную энергию тела, а в последнем члене справа мы узнаем обычную кинетическую энергию. Эйнштейн осмыслил первый член справа (очень большое постояннное число $m_0 c^2$) как часть полной энергии тела, а именно как его внутреннюю энергию, или «энергию покоя».

К каким следствиям мы придем, если вслед за Эйнштейном предположим, что *энергия тела всегда равна* mc^2? Тогда мы сможем вывести формулу (15.1) зависимости массы от скорости, ту самую, которую до сих пор мы принимали на веру. Пусть тело сперва покоится, обладая энергией $m_0 c^2$. Затем мы прикладываем к телу силу, которая сдвигает его с места и поставляет ему кинетическую энергию; раз энергия примется возрастать, то начнет расти и масса (это все заложено в первоначальном предположении). Пока сила действует, энергия и масса продолжают расти. Мы уже видели (см. гл. 13), что быстрота роста энергии со временем равна произведению силы на скорость

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{15.13}$$

Кроме того, $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$ [см. гл. 9, уравнение (9.1)]. Связав все это с определением E и подставив в (15.13), получим

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}. \tag{15.14}$$

Мы хотим решить это уравнение относительно m. Для этого помножим обе части на $2m$. Уравнение обратится в

$$c^2 (2m) \frac{dm}{dt} = 2m\mathbf{v} \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}. \tag{15.15}$$

Теперь нам нужно избавиться от производных, т. е. проинтегрировать обе части равенства. В величине $(2m)\,dm/dt$ можно узнать производную по времени от m^2, а в $(2m\mathbf{v}) \cdot d(m\mathbf{v})/dt$ — производную по времени от $(mv)^2$. Значит, (15.15) совпадает с

$$c^2 \frac{d(m^2)}{dt} = \frac{d(m^2v^2)}{dt}. \tag{15.16}$$

Когда производные двух величин равны, то сами величины могут отличаться не больше чем на константу C. Это позволяет написать

$$m^2c^2 = m^2v^2 + C. \tag{15.17}$$

Определим теперь константу C явно. Так как уравнение (15.17) должно выполняться при любых скоростях, то можно взять $v = 0$ и обозначить в этом случае массу через m_0. Подстановка этих чисел в (15.17) дает

$$m_0^2c^2 = 0 + C.$$

Это значение C теперь можно подставить в уравнение (15.17). Оно принимает вид

$$m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2. \tag{15.18}$$

Разделим на c^2 и перенесем члены с m в левую часть

$$m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2,$$

откуда

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{15.19}$$

А это и есть формула (15.1), т. е. как раз то, что необходимо, чтобы в уравнении (15.12) было соответствие между массой и энергией.

В обычных условиях изменения в энергии приводят к очень малым изменениям в массе: почти никогда не удается из данного количества вещества извлечь много энергии; но в атомной бомбе с энергией взрыва, эквивалентной 20 000 тонн тринитротолуола, весь пепел, осевший после взрыва, на 1 *г* легче первоначального количества расщепляющегося материала. Это потому, что выделилась энергия, которая имела массу 1 *г*, в согласии с формулой $\Delta E = \Delta(mc^2)$. Вывод об эквивалентности массы и энергии прекрасно подтвердился в опытах по аннигиляции материи — превращению вещества в энергию. Электрон с позитроном могут взаимодействовать в покое, имея каждый массу покоя m_0. При сближении они исчезают, а вместо них излучаются два γ-луча, каждый опять с энергией m_0c^2. Этот опыт прямо сообщает нам о величине энергии, связанной с существованием массы покоя у частицы.

Глава ***16***

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭНЕРГИЯ И РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ИМПУЛЬС

§ 1. Относительность и «философы»

В этой главе мы продолжим обсуждение принципа относительности Эйнштейна — Пуанкаре, его влияния на наши физические воззрения и на весь характер человеческого мышления.

Пуанкаре следующим образом сформулировал принцип относительности: «Согласно принципу относительности, законы физических явлений обязаны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, который относительно него переносится равномерным движением, так что у нас нет и не может быть никаких способов отличить, уносит ли нас такое движение или не уносит».

Когда эта мысль обрушилась на человечество, среди философов началась суматоха. Особенно среди «философов за чашкой чая», которые говорят: «О, это очень просто: теория Эйнштейна утверждает, что все относительно!» Поразительное множество таких «философов» — и не только рассуждающих за чашкой чая (впрочем, не желая их обижать, я буду говорить только о «философах за чашкой чая») — твердят: «Из открытий Эйнштейна следует, что все относительно; это оказало глубокое влияние на нашу мысль». И еще потом добавляют: «В физике было доказано, что явления зависят от системы отсчета». Можно услышать немало подобных вещей, но трудно понять их смысл. По-видимому, системы отсчета, о которых идет речь, — это те системы координат, которыми мы пользовались в анализе теории относительности. Итак, тот факт что «все зависит от системы отсчета», оказывает могучее влияние на современную мысль. Остается только удивляться, почему? Ведь прежде всего сама идея: «все зависит от точки зрения» — настолько проста, что несомненно, не было нужды обременять себя анализом трудностей физической теории относительности, чтобы открыть ее. Всякий, кто идет по тротуару, знает, что все, что он видит, зависит от его системы отсчета. Сперва он видит лица прохожих, а уж потом — их затылки. И почти во всех философских заключениях, о которых говорят, что они проистекли из теории относительности, нет ничего более глубокого, чем утверждения типа: «Пешеход выглядит спереди иначе, нежели сзади». Известный рассказ о нескольких слепых, споривших, на что похож слон, тоже весьма напоминает теорию относительности с точки зрения таких философов.

Но в теории относительности, пожалуй, есть кое-что и поглубже, чем наблюдение, что человек спереди выглядит иначе, чем сзади. Принцип относительности куда глубже этого, ведь *с его помощью мы можем делать определенные предсказания*. Но было бы более чем странно, если бы только это наблюдение позволило нам предсказывать поведение природы.

Есть и другая школа «философов». Эти чувствуют себя очень неуютно из-за теории относительности, которая заявляет, что нельзя определить свою абсолютную скорость, не глядя ни на что снаружи корабля. Они восклицают: «Вполне понятно, что никто не может измерить своей скорости, не выглядывая наружу. Само собой очевидно, что *бессмысленно* говорить о чьей-то скорости, если не глядеть по сторонам. Глупцы были те физики, которые думали иначе. Их вдруг осенило, вот они и рады; но если бы мы, философы, представляли, какие проблемы стояли перед физиками, мы их давно решили бы чисто мозговым усилием и сразу же поняли бы, что невозможно определить скорость, не выглянув наружу. И мы сделали бы громадный вклад в эту их физику». Эти философы всегда топчутся около нас, они мельтешат на обочинах науки, то и дело порываясь сообщить нам что-то. Но никогда на самом деле они не понимали всей тонкости и глубины наших проблем.

Наша неспособность засечь абсолютное движение — это результат *опытов*, а не итог плоского философствования. Это легко пояснить. Начать с того, что еще Ньютон считал, что действительно невозможно узнать свою скорость, если движешься прямолинейно и равномерно. Ведь первым-то провозгласил принцип относительности именно Ньютон (мы цитировали его слова в предыдущей главе). Почему же в те, ньютоновы времена философы не поднимали такого шума о том, что «все относительно» и так далее и тому подобное? А потому, что пока Максвелл не развил свою электродинамику, существовали физические законы, позволявшие утверждать, что *можно* измерить свою скорость, даже не выглянув наружу; но вскоре после Максвелла *экспериментально* было установлено, что это *невозможно.*

А теперь скажите, *действительно* ли так уж абсолютно и определенно необходимо с философской точки зрения, чтобы невозможно было знать свою скорость, не посмотрев по сторонам? Одним из следствий теории относительности явилось развитие философии, которая утверждала: «Определять можно только то, что поддается измерению! Так как ясно, что нельзя измерить скорость, не видя, по отношению к чему она измеряется, то естественно, что понятие абсолютной скорости *смысла не имеет.* Физики обязаны понять, что можно говорить только о том, что поддается измерению». Но *в этом-то и весь вопрос:* сказать, *можем ли мы определить* абсолютную скорость, — это все равно что решить, можно или нельзя *выяснить из эксперимента,* движется ли корабль, не выглядывая в иллюминатор. Иными словами, нельзя *априори* утверждать, что что-то измеримо, а что-то нет; это решает не рассуждение, а эксперимент. Немного найдется философов, которые хладнокровно объявят очевидным, что если скорость света внутри автомобиля равна 300 000 *км/сек*, а скорость самого автомобиля достигает 100 000 *км/сек*, то свет проносится мимо наблюдателя на дороге тоже со скоростью 300 000 *км/сек.* Для них это потрясающий факт; даже те из них, для кого относительность разумеется сама собой, обнаруживают, когда вы предъявляете им конкретный факт, что совсем не так уж очевидно.

И наконец, есть даже «философы», утверждающие, что вообще мы не в состоянии обнаруживать никакого движения, не выглядывая наружу. А уж это просто неверно. Действительно, нельзя заметить *равномерного* движения по *прямой* линии, но если бы вся комната *вертелась*, мы бы определенно об этом знали, потому что все в ней разлеталось бы к стенкам — наблюдались бы всяческого рода «центробежные» эффекты. Тот факт, что Земля наша вращается вокруг своей оси, можно обнаружить, не глядя на звезды, скажем, с помощью так называемого маятника Фуко. Стало быть, неверно, что «все относительно»; нельзя обнаружить только *равномерное движение*, не выглядывая наружу. Равномерное *вращение* вокруг фиксированной оси обнаружить *можно.* А когда вы это скажете философу, он очень огорчится, что прежде этого не понимал; ему, видите ли, казалось, что просто невозможно установить вращение вокруг оси, не наблюдая внешний мир. Правда, если он достаточно сообразителен, то через некоторое время он может вернуться и заявить: «Понял! На самом деле никакого абсолютного вращения не существует.

Видите ли, — скажет он, — на самом деле мы вращаемся *относительно звезд.* И вследствие какого-то невыясненного влияния, оказываемого на тела звездами, возникает центробежная сила».

Ну что ж! Судя по всему, это верно; в настоящее время у нас нет способа узнать, существовала бы центробежная сила, если бы не было звезд и туманностей. Не в наших силах сделать такой эксперимент — убрать все туманности, а затем измерить наше вращение; значит, тут мы ничего сказать не можем. Мы должны допустить, что философ может оказаться прав. Он тогда расцветает от удовольствия и изрекает: «И вообще совершенно необходимо, чтобы все в мире в конечном счете подчинялось тому же принципу: *абсолютное* вращение — это бессмысленно, можно говорить только о вращении *по отношению* к туманностям». И тут-то мы ему ответим: «А тогда скажи, друг мой, само собой или не само собой разумеется, что равномерное движение по прямой линии *относительно туманностей* не должно никак чувствоваться внутри автомобиля?» И теперь, когда движение уже больше не абсолютное, когда оно стало движением *относительно туманностей*, вопрос оказывается темным и на него можно ответить, лишь поставив эксперимент.

Но в *чем* же в таком случае выразились философские влияния теории относительности? *Какие новые идеи и предложения* внушил физикам принцип относительности? Если ограничиться только этого рода влияниями, то их можно описать следующим образом. Первое открытие, по существу, состояло в том, что даже те идеи, которые уже очень долго держатся и очень точно проверены, могут быть ошибочными. Каким это было большим потрясением — открыть, что законы Ньютона неверны, и это после того, как все годы они казались точными! Теперь, конечно, ясно, что не опыты были неправильными, а просто все они проделывались в слишком ограниченном интервале скоростей — таком узком, что релятивистские эффекты невозможно было заметить. И все же теперь мы взираем на наши законы физики куда более смиренно — ведь любой из них *может* оказаться ошибочным!

Во-вторых, если возникают некие «странные» идеи, вроде того, что когда идешь, то время тянется медленнее и т. д., то неуместен вопрос: *нравится* ли это нам? Единственно уместен здесь другой вопрос: согласуются ли эти идеи с тем, что показал опыт? Иначе говоря, «странные идеи» должны быть согласны только с *экспериментом.* Единственный резон, почему мы должны обсуждать поведение часов и т. п., состоит в следующем: мы должны доказать, что, хотя определение растяжения времени и очень странно, с нашим способом измерять время оно *вполне согласуется.*

И наконец, теория относительности подсказала нам еще кое-что; может быть, это был чисто технический совет, но он оказался чрезвычайно полезным при изучении других физических законов. Совет состоял в том, что надо *обращать внимание на симметрию законов*, или, более определенно, искать способы, с помощью которых законы можно преобразовать, сохраняя при этом их форму. Когда мы обсуждали теорию векторов, мы отмечали, что основные законы движения не меняются, когда мы особым образом изменяем пространственные и временные переменные (пользуемся преобразованием Лоренца). Идея изучать операции, при которых основные законы не меняются, оказалась и впрямь очень полезной.

§ 2. Парадокс близнецов

Чтобы продолжить наше изучение преобразований Лоренца и релятивистских эффектов, рассмотрим известный «парадокс» — парадокс близнецов, скажем, Петера и Пауля. Подросши, Пауль улетает на космическом корабле с очень высокой скоростью. Петер остается на Земле. Он видит, что Пауль уносится с огромной скоростью, и ему кажется, что часы Пауля замедляют свой ход, сердце Пауля бьется реже, мысли текут ленивее. С точки зрения Петера, все замирает. Сам же Пауль, конечно, ничего этого не замечает. Но когда после долгих странствий он возвратится на Землю, он окажется моложе Петера! Верно ли это? Да, это одно из тех следствий теории относительности, которые легко продемонстрировать. Мю-мезоны живут дольше, если они движутся; так и Пауль проживет дольше, если будет двигаться. «Парадоксом» это явление называют лишь те, кто считает, что принцип относительности утверждает относительность *всякого движения*. Они восклицают: «Хе-хе-хе! А не можем ли мы сказать, что с точки зрения Пауля двигался *Петер* и что именно Петер должен был медленнее стареть? Из симметрии тогда следует единственный возможный вывод: при встрече возраст обоих братьев должен оказаться одинаковым».

Но ведь чтобы встретиться и помериться годами, Пауль должен либо остановиться в конце путешествия и сравнить часы, либо, еще проще, вернуться. А возвратиться может только тот, кто двигался. И он знает о том, что двигался, потому что ему пришлось повернуть, а при повороте на корабле произошло много необычных вещей: заработали ракеты, предметы скатились к одной стенке и т. д. А Петер ничего этого не испытал.

Поэтому можно высказать такое правило: тот, *кто почувствовал ускорение*, кто увидел, как вещи скатывались к стенке, и т. д., — тот и окажется моложе. Разница между братьями имеет «абсолютный» смысл, и все это вполне правильно. Когда мы обсуждали долгую жизнь движущегося мю-мезона, в качестве примера мы пользовались его прямолинейным движением сквозь атмосферу. Но можно породить мю-мезоны и в лаборатории и заставить с помощью магнита их двигаться по кругу. И даже при таком ускоренном движении они проживут дольше, причем столько же, сколько и при прямолинейном движении с этой скоростью. Можно было бы попытаться разрешить парадокс опытным путем: сравнить покоящийся мю-мезон с закрученным по кругу. Несомненно, окажется, что закрученный мю-мезон проживет дольше. Такого опыта еще никто не ставил, но он и не нужен, потому что и так все прекрасно согласуется. Конечно, те, кто настаивает на том, что каждый отдельный факт должен быть непосредственно проверен, этим не удовлетворятся. А мы все же уверенно беремся предсказать результат опыта, в котором Пауль кружится по замкнутому кругу.

§ 3. *Преобразование скоростей*

Главное отличие принципа относительности Эйнштейна от принципа относительности Ньютона заключается в том, что законы преобразований, связывающих координаты и времена в системах, движущихся относительно друг друга, различны. Правильный закон преобразований (Лоренца) таков:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\
y' &= y, \\
z' &= z, \\
t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.
\end{aligned}
\tag{16.1}
$$

Эти уравнения отвечают сравнительно простому случаю, когда наблюдатели движутся относительно друг друга вдоль общей оси x. Конечно, мыслимы и другие направления движения, но самое общее преобразование Лоренца выглядит довольно сложно: в нем перемешаны все четыре числа. Мы и впредь будем пользоваться этой простой формулой, так как она содержит в себе все существенные черты теории относительности.

Рассмотрим теперь дальнейшие следствия этого преобразования. Прежде всего интересно разрешить эти уравнения относительно x, y, z, t. Это система четырех линейных уравнений для четырех неизвестных, и их можно решить — выразить x, y, z, t через x', y', z', t'. Результат этот потому интересен, что он говорит нам, как «покоящаяся» система координат выглядит с точки зрения «движущейся». Ясно, что из-за относительности движения и постоянства скорости тот, кто «движется», может, если пожелает, счесть себя неподвижным, другого — движущимся. А поскольку он движется в обратную сторону, то получит то же преобразование, но с противоположным знаком у скорости. Это в точности то, что дает и прямое решение системы, так что все сходится. Вот если бы не сошлось, было бы от чего встревожиться!

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{16.2}$$

Теперь займемся интересным вопросом о сложении скоростей в теории относительности. Напомним, что первоначально загадка состояла в том, что свет проходит 300 000 *км/сек* во всех системах, даже если они движутся друг относительно друга. Это — частный случай более общей задачи. Приведем пример. Пусть предмет внутри космического корабля движется вперед со скоростью 200 000 *км/сек*; скорость самого корабля тоже 200 000 *км/сек*. С какой скоростью перемещается предмет с точки зрения внешнего наблюдателя? Хочется сказать 400 000 *км/сек*, но эта цифра уж больно подозрительна: получается скорость бóльшая, чем скорость света! Разве можно себе это представить?

Общая постановка задачи такова. Пусть скорость тела внутри корабля равна v (с точки зрения наблюдателя на корабле), а сам корабль имеет скорость u по отношению к Земле. Мы желаем знать, с какой скоростью v_x это тело движется с точки зрения земного наблюдателя. Впрочем, это тоже не самый общий случай, потому что движение происходит в направлении x. Могут быть формулы для преобразования скоростей в направлении y или в любом другом; если они будут нужны, их всегда можно вывести. Внутри корабля скорость тела равна $v_{x'}$. Это значит, что перемещение x' равно скорости, умноженной на время:

$$x' = v_{x'}t'. \tag{16.3}$$

Остается только подсчитать, какие у тела значения x и t с точки зрения внешнего наблюдателя, если x' и t' связаны соотношением (16.3). Подставим (16.3) в (16.2) и получим

$$x = \frac{v_{x'}t' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{16.4}$$

Но здесь x выражено через t'. А скорость с точки зрения внешнего наблюдателя — это «*его*» *расстояние*, деленное на «*его*» *время*, а *не на время другого наблюдателя*! Значит, надо и *время* подсчитать с его позиций

$$t = \frac{t' + u(v_{x'}t')/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{16.5}$$

А теперь разделим x на t. Квадратные корни сократятся, останется же

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{u + v_{x'}}{1 + uv_{x'}/c^2}. \tag{16.6}$$

Это и есть искомый закон: суммарная скорость не равна сумме скоростей (это привело бы ко всяким несообразностям), но «подправлена» знаменателем $1 + uv/c^2$.

Что же теперь будет получаться? Пусть ваша скорость внутри корабля равна половине скорости света, а скорость корабля тоже равна половине скорости света. Значит, и u равно $^1/_2c$, и v равно $^1/_2c$, но в знаменателе uv равно $^1/_4$, так что

$$v = \frac{^1/_2c + {}^1/_2c}{1 + {}^1/_4} = \frac{4c}{5}.$$

Выходит по теории относительности, что $^1/_2$ и $^1/_2$ дают не 1, а $^4/_5$. Небольшие скорости, конечно, можно складывать, как обычно, потому что, пока скорости по сравнению со скоростью света малы, о знаменателе $(1 + uv/c^2)$ можно забыть, но на больших скоростях положение меняется.

Возьмем предельный случай. Положим, что человек на борту корабля наблюдает, как распространяется *свет*. Тогда $v = c$. Что обнаружит земной наблюдатель? Ответ будет такой:

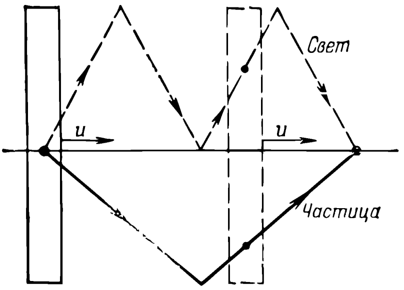
$$v = \frac{u + c}{1 + uc/c^2} = c\,\frac{u + c}{u + c} = c.$$

Значит, если что-то движется со скоростью света внутри корабля, то, с точки зрения стороннего наблюдателя, скорость не изменится, она по-прежнему будет равна скорости света! Это именно то, ради чего в первую очередь предназначал Эйнштейн свою теорию относительности.

Конечно, бывает, что движение тела не совпадает по направлению с равномерным движением корабля. Например, тело движется «вверх» со скоростью $v_{y'}$ по отношению к кораблю, а корабль движется «горизонтально». Проделывая такие же манипуляции (только x надо заменить на y), получаем

$$y = y' = v_{y'}t',$$

Фиг. 16.1. Траектории светового луча и частицы внутри движущихся часов.



так что при $v_{x'} = 0$

$$v_y = \frac{y}{t} = v_{y'} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \qquad (16.7)$$

Итак, боковая скорость тела уже не $v_{y'}$, а $v_{y'}\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Этот результат мы получили, пользуясь формулами преобразований. Но он вытекает и прямо из принципа относительности по следующей причине (всегда бывает полезно докопаться до первоначальной причины). Мы уже раньше рассуждали (см. фиг. 15.3) о том, как могут работать движущиеся часы; свет кажется распространяющимся наискось со скоростью c в неподвижной системе, в то время как в движущейся системе он просто движется вертикально с той же скоростью. Мы нашли, что *вертикальная компонента* скорости в неподвижной системе меньше скорости света на множитель $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ [см. уравнение (15.3)]. Пусть теперь материальная частица движется в тех же «часах» взад-вперед со скоростью, равной $1/n$ скорости света (фиг. 16.1). Пока частица пройдет туда и обратно, свет пройдет этот путь ровно n раз (n — целое число). Значит, каждое тиканье «часов с частицей» совпадает с n-м тиканьем «световых часов». *Этот факт должен остаться верным и тогда, когда тело движется*, потому что физическое явление совпадения остается совпадением в любой системе. Ну а поскольку скорость c_y меньше скорости света, то скорость v_y частицы должна быть меньше соответствующей скорости в том же отношении (с квадратным корнем)! Вот почему в любой вертикальной скорости появляется корень.

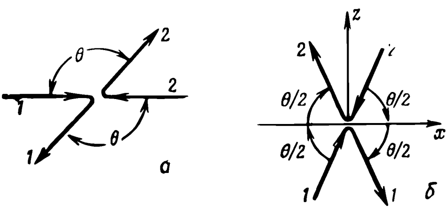
§ 4. Релятивистская масса

Из предыдущей главы мы усвоили, что масса тела растет с увеличением его скорости. Но никаких доказательств этого, похожих на те рассуждения с часами, которыми мы обосновали замедление времени, мы не привели. Сейчас, однако, мы можем доказать, что (как следствие принципа относительности и прочих разумных соображений) масса должна изменяться именно таким образом. (Мы должны говорить о «прочих соображениях» по той причине, что нельзя ничего доказать, нельзя надеяться на осмысленные выводы, не опираясь на какие-то законы, которые предполагаются верными.) Чтобы не изучать законы преобразования силы, обратимся к *столкновениям* частиц. Здесь нам не понадобится закон действия силы, а хватит только предположения о сохранении энергии и импульса. Кроме того, мы предположим, что импульс движущейся частицы — это вектор, всегда направленный по ее движению. Но мы не будем считать импульс *пропорциональным* скорости, как это делал Ньютон. Для нас он будет просто некоторой *функцией* скорости. Мы будем писать вектор импульса в виде вектора скорости, умноженного на некоторый коэффициент

$$\mathbf{p} = m_v \mathbf{v}. \qquad (16.8)$$

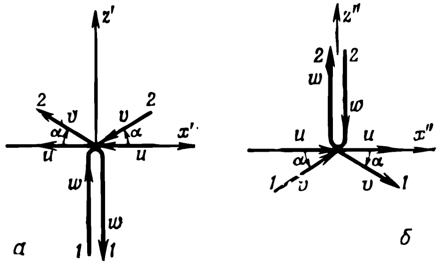
Индекс v у коэффициента будет напоминать нам, что это функция скорости v. Будем называть этот коэффициент «массой». Ясно, что при небольших скоростях это как раз та самая масса, которую мы привыкли измерять. Теперь, исходя из того принципа, что законы физики во всех системах координат одинаковы, попробуем показать, что формула для m_v должна иметь вид $m_0\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Пусть у нас есть две частицы (к примеру, два протона), которые между собой совершенно одинаковы и движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. Их общий импульс равен нулю. Что с ними случится? После столкновения их направления движения должны все равно остаться противоположными, потому что если это не так, то их суммарный вектор импульса будет отличен от нуля, т. е. не сохранится. Раз частицы одинаковы, то и скорости их должны быть одинаковы; более того, они просто должны остаться прежними, иначе энергия при столкновении изменится. Значит, схема такого упругого обратимого столкновения будет выглядеть, как на фиг. 16.2, *а*: все стрелки одинаковы, все скорости равны. Предположим, что такие столкновения всегда можно подготовить, что в них допустимы любые уг-



Фиг. 16.2. Упругое столкновение одинаковых тел, движущихся с равными скоростями в противоположных направлениях, при различном выборе систем координат.

Фиг. 16.3. Еще две картины того же столкновения (видимые из движущихся автомашин).



лы θ и что начальные скорости частиц могут быть любыми. Далее, напомним, что одно и то же столкновение выглядит по-разному, смотря по тому, как повернуты оси. Для удобства мы так повернем оси, чтобы горизонталь делила пополам угол между направлениями частиц до и после столкновения (фиг. 16.2, *б*). Это то же столкновение, что и на фиг. 16.2, *а*, но с повернутыми осями.

Теперь начинается самое главное: взглянем на это столкновение с позиций наблюдателя, движущегося на автомашине со скоростью, совпадающей с горизонтальной компонентой скорости одной из частиц. Как оно будет выглядеть? Наблюдателю покажется, что частица *1* поднимается прямо вверх (горизонтальная компонента у нее пропала), а после столкновения падает прямо вниз по той же причине (фиг. 16.3, *а*). Зато частица *2* движется совсем иначе, она проносится мимо с колоссальной скоростью и под малым углом (но этот угол и до и после столкновения *одинаков*). Обозначим горизонтальную компоненту скорости частицы *2* через u, а вертикальную скорость частицы *1* — через w.

Чему же равна вертикальная скорость $u \operatorname{tg} \alpha$ частицы *2*? Зная это, можно получить правильное выражение для импульса, пользуясь сохранением импульса в вертикальном направлении. (Сохранение горизонтальной компоненты импульса и так обеспечено: у обеих частиц до и после столкновения эта компонента одинакова, а у частицы *1* она вообще равна нулю. Так что следует требовать только сохранения вертикальной скорости $u \operatorname{tg} \alpha$.) Но вертикальную скорость *можно* получить, просто взглянув на это столкновение с другой точки зрения! Посмотрите на столкновение, изображенное на фиг. 16.3, *а*, из автомашины, которая движется теперь налево со скоростью u. Вы увидите то же столкновение, но перевернутое «вверх ногами» (фиг. 16.3, *б*). Теперь уже частица *2* упадет и подскочит со скоростью w, а горизонтальную скорость u приобретет частица *1*. Вы уже, конечно, догадываетесь, чему равна вертикальная скорость $u \operatorname{tg} \alpha$; она равна $w\sqrt{1 - u^2/c^2}$ [см. уравнение (16.7)]. Кроме того, нам известно, что изменение вертикального импульса вертикально движущейся частицы равно

$$\Delta p = 2m_w w$$

(двойка здесь потому, что движение вверх перешло в движение вниз). У частицы, движущейся косо, скорость равна v, ее компоненты равны u и $w\sqrt{1-u^2/c^2}$, а масса ее m_v. Изменение *вертикального* импульса этой частицы $\Delta p' = 2m_v w\sqrt{1-u^2/c^2}$, так как в соответствии с нашим предположением (16.8) любая компонента импульса равна произведению одноименной компоненты скорости на массу, отвечающую этой скорости. Но суммарный импульс равен нулю. Значит, и вертикальные импульсы должны взаимно сократиться, отношение же массы, движущейся со скоростью w, к массе, движущейся со скоростью v, должно оказаться равным

$$\frac{m_w}{m_v} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{16.9}$$

Перейдем к предельному случаю, когда w стремится к нулю. При очень малых w величины v и u практически совпадут, $m_w \to m_0$, а $m_v \to m_u$. Окончательный результат таков:

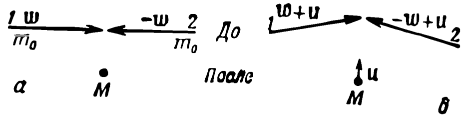
$$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{16.10}$$

Проделайте теперь такое интересное упражнение: проверьте, будет ли выполнено условие (16.9) при произвольных w, когда масса подчиняется формуле (16.10). При этом скорость v, стоящую в уравнении (16.9), можно найти из прямоугольного треугольника

$$v^2 = u^2 + w^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right).$$

Вы увидите, что (16.9) выполняется тождественно, хотя выше нам понадобился только предел этого равенства при $w \to 0$.

Теперь перейдем к дальнейшим следствиям, считая уже, что, согласно (16.10), масса зависит от скорости. Рассмотрим так называемое *неупругое столкновение*. Для простоты предположим, что из двух одинаковых тел, сталкивающихся с равными скоростями w, образуется новое тело, которое больше не распадается (фиг. 16.4, *а*). Массы тел до столкновения равны, как мы знаем, $m_0/\sqrt{1-w^2/c^2}$. Предположив сохраняемость импульса и приняв принцип относительности, можно продемонстрировать интересное свойство массы вновь образованного тела. Представим себе бесконечно малую скорость u, поперечную к скоростям w (можно было бы работать и с конечной скоростью u, но с бесконечно малым значением u



Фиг. 16.4. Две картины неупругого соударения тел равной массы.

легче во всем разобраться), и посмотрим на это столкновение, двигаясь в лифте со скоростью — u. Перед нами окажется картина, изображенная на фиг. 16.4, *б*. Составное тело обладает неизвестной массой M. У тела *1*, как и у тела *2*, есть компонента скорости u, направленная вверх, и горизонтальная компонента, практически равная w. После столкновения остается масса M, движущаяся вверх со скоростью u, много меньшей и скорости света, и скорости w. Импульс должен остаться прежним; посмотрим поэтому, каким он был до столкновения и каким стал потом. До столкновения он был равен $p \approx 2m_w u$, а потом стал $p' = M_u u$. Но M_u из-за малости u, по существу, совпадает с M_0. Благодаря сохранению импульса

$$M_0 = 2m_w. \tag{16.11}$$

Итак, *масса тела, образуемого при столкновении двух одинаковых тел, равна их удвоенной массе*. Вы, правда, можете сказать: «Ну и что ж, это просто сохранение массы». Но не торопитесь восклицать: «Ну и что ж!», потому что *сами-то массы тел были больше, чем когда тела неподвижны*. Они вносят в суммарную массу M не массу покоя, а *больше*. Не правда, поразительно! Оказывается, сохранение импульса в столкновении двух тел требует, чтобы образуемая ими масса была больше их масс покоя, хотя после столкновения эти тела сами придут в состояние покоя!

§ 5. *Релятивистская энергия*

Немного выше мы показали, что зависимость массы от скорости и законы Ньютона приводят к тому, что изменения в кинетической энергии тела, появляющиеся в результате работы приложенных к нему сил, оказываются всегда равными

$$\Delta T = (m_u - m_0)\,c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2. \tag{16.12}$$

Потом мы продвинулись дальше и обнаружили, что полная энергия тела равна полной его массе, умноженной на c^2. Продолжим эти рассуждения.

Предположим, что наши два тела с равными массами (те, которые столкнулись) можно «видеть» даже тогда, когда они оказываются внутри тела M. Скажем, протон с нейтроном столкнулись, но все еще продолжают двигаться внутри M. Масса тела M, как мы обнаружили, равна не $2m_0$, а $2m_w$. Этой массой $2m_w$ снабдили тело его составные части, чья масса покоя была $2m_0$; значит, *избыток* массы составного тела равен привнесенной кинетической энергии. Это означает, конечно, что *у энергии есть инерция*. Ранее мы говорили о нагреве газа и показали, что поскольку молекулы газа движутся, а движущиеся тела становятся массивнее, то при нагревании газа и усилении движения молекул газ становится тяжелее. Но на самом деле такое рассуждение является совершенно общим; наше обсуждение свойств неупругого соударения тоже показывает, что добавочная масса появляется всегда, даже тогда, когда она не является *кинетической* энергией. Иными словами, если две частицы сближаются и при этом образуется потенциальная или другая форма энергии, если части составного тела замедляются потенциальным барьером, производя работу против внутренних сил, и т. д.,— во всех этих случаях масса тела по-прежнему равна полной привнесенной энергии. Итак, вы видите, что выведенное выше сохранение массы равнозначно сохранению энергии, поэтому в теории относительности нельзя говорить о неупругих соударениях, как это было в механике Ньютона. Согласно механике Ньютона, ничего страшного не произошло бы, если бы два тела, столкнувшись, образовали тело с массой $2m_0$, не отличающееся от того, какое получилось бы, если их медленно приложить друг к другу. Конечно, из закона сохранения энергии мы знаем, что внутри тела имеется добавочная кинетическая энергия, но по закону Ньютона на массу это никак не влияет. А теперь выясняется, что это невозможно: поскольку до столкновения у тел была кинетическая энергия, то составное тело окажется *тяжелее*; значит, это будет уже *другое* тело. Если осторожно приложить два тела друг к другу, то возникает тело с массой $2m_0$; когда же вы их с силой столкнете, то появится тело с большей массой. А если масса отличается, то мы можем это *заметить*. Итак, сохранение импульса в теории относительности с необходимостью сопровождается сохранением энергии.

Отсюда вытекают интересные следствия. Пусть имеется тело с измеренной массой M, и предположим, что что-то стряслось и оно распалось на две равные части, имеющие скорости w и массы m_w. Предположим теперь что эти части, двигаясь через вещество, постепенно замедлились и остановились. Теперь их масса m_0. Сколько энергии они отдали веществу? По теореме, доказанной раньше, каждый кусок отдаст энергию $(m_w - m_0)c^2$. Она перейдет в разные формы, например в теплоту, в потенциальную энергию и т. д. Так как $2m_w = M$, то высвободившаяся энергия $E = (M-2m_0)c^2$. Это уравнение было использовано для оценки количества энергии, которое могло бы выделиться при ядерном расщеплении в атомной бомбе (хотя части бомбы не точно равны, но примерно они равны). Масса атома урана была известна (ее измерили заранее), была известна и масса атомов, на которые она расщеплялась, — иода, ксенона и т. д. (имеются в виду не массы движущихся атомов, а массы *покоя*). Иными словами, и M и m_0 были известны. Вычтя одно значение массы из другого, можно прикинуть, сколько энергии высвободится, если M распадется «пополам». По этой причине все газеты считали Эйнштейна «отцом» атомной бомбы. На самом же деле под этим подразумевалось только, что он мог бы заранее подсчитать выделившуюся энергию, если бы ему указали, какой процесс произойдет. Энергию, которая должна высвободиться, когда атом урана подвергнется распаду, подсчитали лишь за полгода до первого прямого испытания. И как только энергия действительно выделилась, ее непосредственно измерили (не будь формулы Эйнштейна, энергию измерили бы другим способом), а с момента, когда ее измерили, формула уже была не нужна. Это отнюдь не принижение заслуг Эйнштейна, а скорее критика газетных высказываний и популярных описаний развития физики и техники. Проблема, как добиться того, чтобы процесс выделения энергии прошел эффективно и быстро, ничего общего с формулой не имеет.

Формула имеет значение и в химии. Скажем, если бы мы взвесили молекулу двуокиси углерода и сравнили ее массу с массой углерода и кислорода, мы бы могли определить, сколько энергии высвобождается, когда углерод и кислород образуют углекислоту. Плохо только то, что эта разница масс так мала, что технически опыт очень трудно проделать.

Теперь обратимся к такому вопросу: нужно ли отныне добавлять к кинетической энергии m_0c^2 и говорить с этих пор, что полная энергия объекта равна mc^2? Во-первых, если бы нам были *видны* составные части с массой покоя m_0 внутри объекта M, то можно было бы говорить, что часть массы M есть механическая масса покоя составных частей, а другая часть — их кинетическая энергия, третья — потенциальная. Хотя в природе и на самом деле открыты различные частицы, с которыми происходят как раз такие реакции (реакции слияния в одну), однако никакими способами *невозможно* при этом *разглядеть внутри* M какие-то *составные части*. Например, распад K-мезона на два пиона происходит по закону (16.11), но бессмысленно считать, что он состоит из 2π, потому что он распадается порой и на 3π!

А поэтому возникает *новая идея*: нет нужды знать, как тела устроены изнутри; нельзя и не нужно разбираться в том, какую часть энергии внутри частицы можно считать энергией покоя тех частей, на которые она распадется. Неудобно, а порой и невозможно разбивать полную энергию mc^2 тела на энергию покоя внутренних частей, их кинетическую и потенциальную энергии; вместо этого мы просто говорим о *полной энергии* частицы. Мы «сдвигаем начало отсчета» энергий, добавляя ко всему константу m_0c^2, и говорим, что полная энергия частицы равна ее массе движения, умноженной на c^2, а когда тело остановится, его энергия есть его масса в покое, умноженная на c^2.

И наконец, легко обнаружить, что скорость v, импульс P и полная энергия E довольно просто связаны между собой. Как это ни странно, формула $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ очень редко употребляется на практике. Вместо этого незаменимыми оказываются два соотношения, которые легко доказать:

$$E^2 - P^2c^2 = M_0^2c^4 \qquad (16.13)$$

$$Pc = \frac{Ev}{c}. \qquad (16.14)$$

Глава ***17***

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

§ 1. Геометрия пространства-времени

Теория относительности показывает, что связь между местоположением события и моментом, в какой оно происходит, при измерениях в двух разных системах отсчета совсем не такая, как можно было ожидать на основе наших интуитивных представлений. Очень важно ясно представить себе связь пространства и времени, возникающую из преобразований Лоренца. Поэтому мы глубже рассмотрим этот вопрос.

Координаты и время (x, y, z, t), измеренные «покоящимся» наблюдателем, преобразуются в координаты и время (x', y', z', t'), измеренные внутри «движущегося» со скоростью u космического корабля:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{17.1}$$

Давайте сравним эти уравнения с уравнением (11.5), которое тоже связывает измерения в двух системах, только одна из них теперь *вращается* относительно другой:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{17.2}$$

В этом частном случае у Мика и Джо оси x' и x повернуты на угол θ. Но и в том и в другом случае мы замечаем, что «штрихованные» величины — это «перемешанные» между собой «нештрихованные»: новое x' есть смесь x и y, а новое y' — другая смесь x и y.

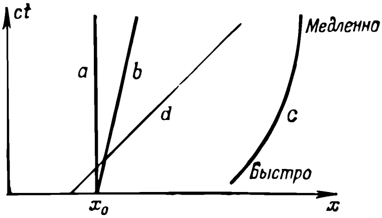
Проведем следующую аналогию: когда мы глядим на предмет, мы различаем его «видимую ширину» и «видимую толщину». Но эти два понятия — «ширина» и «толщина» — отнюдь не *основные* свойства предмета. Отойдите в сторону, взгляните на предмет под другим углом — видимая ширина и видимая толщина предмета станут другими. Можно написать формулы, позволяющие узнать новые ширину и толщину по известным старым и по углу поворота. Уравнения (17.2) — как раз эти формулы. Можно сказать, что данная толщина есть своего рода «смесь» всех ширин и всех толщин. Если б мы не могли сдвинуться с места, если б мы на данный предмет всегда глядели из одного и того же положения, то нам все эти рассуждения показались бы неуместными; мы ведь и так всегда видели бы пред собой «настоящую» ширину и «настоящую» толщину и знали бы, что это совершенно разные качества предмета: один связан с углом, под каким виден предмет, другой требует фокусирования глаза и даже интуиции. Они казались бы абсолютно различными, их незачем было бы смешивать. Только потому, что мы *в состоянии* обойти вокруг предмета, мы понимаем, что ширина и толщина — это разные стороны одного и того же предмета.

Нельзя ли взглянуть на преобразование Лоренца таким же способом? Ведь и здесь перед нами смесь — смесь местоположения и момента времени. Из значений координаты и времени получается новая координата. Иначе говоря, в измерениях пространства, сделанных одним человеком, есть с точки зрения другого малая примесь времени. Наша аналогия позволяет высказать следующую мысль: «реальность» предмета, на который мы смотрим, включает нечто большее (говоря грубо и образно), чем его «ширину» и его «толщину», потому что обе они *зависят* от того, *как* мы смотрим на предмет. Оказавшись на новом месте, наш мозг немедленно пересчитывает и ширину, и толщину. Но когда мы будем двигаться с большой скоростью, наш мозг не сможет немедленно пересчитать координаты и время: у нас нет опыта движений со скоростями, близкими к световой, мы не ощущаем время и пространство как явления одной природы. Все равно как если бы нас усадили на какое-то место, заставили бы разглядывать ширину какого-то предмета и при этом не разрешали бы даже поворачивать голову. Мы теперь понимаем, что, будь у нас такая возможность, мы могли бы увидеть немножко от времени другого человека, как бы «заглянуть» сзади него.

Итак, мы должны попытаться представить себе предметы в мире нового типа, в котором время с пространством смешано в том же смысле, в каком предметы нашего привычного

Фиг. 17.1. Пути трех частиц в пространстве-времени.

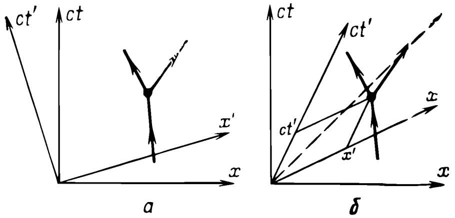
a — частица покоится в точке $x=x_0$; b — частица отправилась из точки $x=x_0$ с постоянной скоростью; c — частица начала было двигаться, но затормозила; d — распространение света.



пространственного мира можно разглядеть с разных направлений. Мы должны считать, что предметы, занимающие некоторое место и существующие некоторый период времени, занимают некую «дольку» мира нового типа и что мы смотрим на эту «дольку» с разных точек зрения, когда движемся с разной скоростью. Этот новый мир, эта геометрическая реальность, в которой имеются «дольки», занимающие некоторое пространство и существующие некоторое время, называется *пространством-временем*. Данная точка (x, y, z, t) в пространстве-времени носит название *события*. Представьте, например, что ось x мы поместили горизонтально, оси y и z — в двух других направлениях, взаимно перпендикулярных и перпендикулярных странице (!), а ось t направили вертикально. Как на такой диаграмме изобразится, скажем, движущаяся частица? Когда частица неподвижна, у нее есть какая-то координата x; время течет, а x остается все тем же, и тем же, и тем же. Значит, ее «путь» — это прямая, параллельная оси (a на фиг. 17.1). С другой стороны, если она равномерно удаляется, то с течением времени растет и x (b на фиг. 17.1). Таким образом, частица, которая сперва двигалась, а потом стала замедлять свой ход, изобразится чем-то похожим на кривую c на фиг. 17.1. Другими словами, всякая устойчивая, нераспадающаяся частица изображается линией в пространстве-времени. А распадающаяся частица изобразится вилкой, потому что она превращается в две частицы, выходящие из одной точки.

А как обстоит дело со светом? Скорость света всегда одна и та же, значит, свет можно изображать прямыми линиями одинакового наклона (d на фиг. 17.1).

Итак, согласно высказанной нами идее, если происходит некое событие, например частица внезапно распадается в какой-то пространственно-временно́й точке (x, t) на две, то, если это для чего-нибудь нужно, поворотом осей можно получить значения x и t в новой системе (фиг. 17.2, a). Но это не так: ведь уравнение (17.1) *не совпадает* с преобразованием (17.2), в них по-разному расставлены знаки, в одном встречаются $\sin\theta$, и $\cos\theta$, а в другом — некоторые алгебраические величины. (Вообще-то иногда алгебраические величины



Фиг. 17.2. Два изображения распада частицы.
а — неверное; б — верное.

выражаются через косинус и синус, но в данном случае это невозможно.) А все-таки эти выражения *очень похожи*. Как мы с вами увидим, нельзя представлять себе пространство-время в виде реальной обычной геометрии, и все из-за этой разницы в знаках. На самом деле, хотя мы этого пока не подчеркивали, оказывается, что движущийся наблюдатель должен пользоваться осями, равнонаклоненными к линии светового луча, и проектировать точку на эти оси при помощи отрезков, им параллельных. Это показано на фиг. 17.2, *б*. Мы не будем заниматься этой геометрией, она не особенно помогает; легче работать прямо с уравнениями.

§ 2. *Пространственно-временны́е интервалы*

Хотя геометрия пространства-времени не обычная (не евклидова), тем не менее эта геометрия очень похожа на евклидову, но в некоторых отношениях весьма своеобразная. Если это представление о геометрии правильно, то должны существовать такие функции координат и времени, которые не зависят от системы координат. К примеру, при обычных вращениях, если взять две точки, одну для простоты в начале координат обеих систем, а другую в любом другом месте, то в обеих системах координат расстояние между точками будет одинаково. Это первое свойство точек, которое не зависит от частного способа измерения: квадрат расстояния, или $x^2 + y^2 + z^2$, не меняется при поворотах. А как с пространством-временем? Не трудно показать, что и здесь есть нечто, не зависящее от способа измерения, а именно комбинация $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ одинакова до и после преобразования

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \qquad (17.3)$$

Поэтому эта величина, подобно расстоянию, «реальна» в том смысле, который был придан этому слову выше; ее называют *интервалом* между двумя пространственно-временны́ми точками, одна из которых в этом случае совпадает с началом координат. (Точнее говоря, это не интервал, а квадрат интервала, точно так же как и $x^2 + y^2 + z^2$ — квадрат расстояния.) Это название подчеркивает различие в геометриях; обратите внимание, что в формуле присутствует c, а некоторые знаки обращены.

Давайте избавимся от c, оно нам не нужно, если мы хотим иметь удобное пространство, в котором x и t можно переставлять. Представьте, к какой путанице приведет измерение ширины по углу, под которым виден предмет, а толщины — по сокращению мышц при фиксировании глаза на предмет и выражение толщины в *метрах*, а ширины *в радианах*. При преобразованиях уравнений типа (17.2) тогда получится страшная неразбериха и ни за что не удастся разглядеть всю простоту и ясность предмета по той технической причине, что одно и то же будет измеряться двумя различными единицами. С помощью уравнений (17.1) и (17.3) природа говорит нам, что время равнозначно пространству; время становится пространством; *их надо измерять в одинаковых единицах*. Какое расстояние измеряет секунда? Из уравнения (17.3) это легко понять: секунда — это $3 \cdot 10^8$ *м*, *расстояние, которое свет проходит за* 1 *сек*. Иначе говоря, если бы расстояния и время мы измеряли в одинаковых единицах (секундах), то единицей длины было бы $3 \cdot 10^8$ *м* и уравнения упростились бы. А другой способ уравнять единицы — это измерять время в метрах. Чему равен метр времени? Метр времени — это время, за какое свет проходит расстояние в 1 *м*, т. е. $(1/3) \cdot 10^{-8}$ *сек*, или 3,3 миллиардных доли секунды! Иными словами, нам нужно записать все уравнения в системе единиц, где $c = 1$. Когда время и пространство станут измеряться в одинаковых единицах, уравнения, естественно, упростятся:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - ux}{\sqrt{1 - u^2}}; \end{aligned} \tag{17.4}$$

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{17.5}$$

Может быть, вы сомневаетесь в законности этого или вас «пугает», что, положив $c = 1$, вы не сможете вернуться к правильным уравнениям? Напротив, без c их гораздо легче запомнить, с c легко поставить на нужные места, если присмотреться к размерностям. Скажем, в $\sqrt{1 - u^2}$ мы видим, что из неименованного числа 1 приходится вычитать именованное (квадрат скорости u^2); естественно, этот квадрат нужно разделить на c^2, чтобы сделать вычитаемое безразмерным. Таким путем можно расставить c, где полагается.

Очень интересно различие между пространством-временем и обыкновенным пространством, различие между интервалом и расстоянием. Посмотрите на формулу (17.5). Если два события произошли в какой-то системе координат в одно и то же время, но в разных точках пространства, то, поместив начало координат в точку, изображающую одно из событий, мы получим, что $t = 0$, а, например, $x \neq 0$. Значит, квадрат интервала получится отрицательным, а сам интервал — мнимым (корень квадратный из отрицательного числа). Интервалы в этой теории бывают и действительные, и мнимые, потому что их квадраты могут быть и положительными, и отрицательными (в отличие от расстояния, квадрат которого бывает только положительным). Когда интервал мнимый, говорят, что *интервал* между двумя событиями (точками) *пространственно-подобный* (а не мнимый), потому что такой интервал получался бы всегда, если бы весь мир застыл на одном времени. С другой стороны, если два предмета в данной системе координат попадают в одно и то же место в разные моменты времени, тогда $t \neq 0$, а $x = y = z = 0$ и квадрат интервала положителен; это называется *времени-подобным интервалом.* Далее, если провести на диаграмме пространства-времени две прямые под углом 45° (в четырех измерениях они обратятся в «конус», называемый световым), то точки на этих прямых будут отделены от начала координат нулевым интервалом. Куда бы из начала координат ни распространялся свет, все равно $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$, т. е. интервал между событием прихода света в любую точку и началом всегда равен нулю [как легко видеть из (17.5)]. Кстати, мы сейчас доказали, что скорость света в любых системах координат одинакова: ведь если интервал в обеих системах одинаков, то, будучи равен нулю в одной из них, равен нулю и в другой, и квадрат скорости света — отношение $x'^2 + y'^2 + z'^2$ к t'^2 — опять равен c^2.

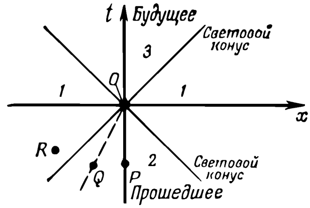
Сказать, что скорость распространения света — инвариант, — это все равно, что сказать, что интервал равен нулю.

§ 3. *Прошедшее, настоящее, будущее*

Пространственно-временну́ю область, окружающую данную точку пространства-времени, можно разделить на три области, как показано на фиг. 17.3. В одной из них интервалы пространственно-подобны, в остальных двух — времени-подобны. Эти три области, на которые распадается окружающее точку пространство-время, в физическом отношении связаны с самой точкой очень интересно.

Из области *2* физический объект или сигнал, двигаясь со скоростью, меньшей скорости света, может прийти в точку O.

Фиг. 17.3. Область пространства-времени, окружающая начало координат.



Поэтому события в этой области могут воздействовать на событие в точке O, могут влиять на него из прошлого ($t < 0$). Действительно, предмет в точке P на оси отрицательных t оказывается точно в «прошлом» по отношению к точке O; P — это та же пространственно-временна́я точка O, но в более ранний момент времени. Что в ней когда-то случилось, теперь сказывается на точке O. (К сожалению, именно такова наша жизнь.) Другой предмет из Q попадет в O, двигаясь с определенной скоростью, меньшей, чем c; значит, если бы этот предмет двигался в космическом корабле, он мог бы тоже оказаться прошлым той же точки O пространства-времени. Это означает, что в какой-то другой системе координат ось времени могла бы пройти через O и Q. Таким образом, все точки области *2* оказываются по отношению к O в «прошлом»; все, что в этой области происходит, *может* сказаться на O. Поэтому область *2* можно назвать *воздействующим прошлым*; это геометрическое место всех событий, которые хоть каким-то образом могут повлиять на событие в точке O.

А зато область *3* — это та область, *на которую* в свою очередь могут повлиять события в O; в тела, расположенные внутри области *3*, можно «попасть пулей», скорость которой меньше скорости света. Это тот мир, чье будущее в наших руках (если мы сами находимся в точке O); область *3* можно назвать *воздействуемым будущим*. Остальное пространство-время (область *1*) интересно тем, что на события в нем из *точки* O влиять нельзя и, обратно, ничто, происходящее в этой области, никак не может повлиять на положение *в точке* O, потому что ничто не может обогнать свет. Конечно, если что-то произойдет в точке R, это *может* сказаться *позднее*; если, например, Солнце «сию минуту» взорвется, то мы узнаем об этом лишь через 8 минут, и раньше этого времени взрыв никак отразиться на нас не может.

То, что происходит «сейчас», «сию минуту» — это на самом деле нечто таинственное; оно не поддается определению, не поддается и воздействию, однако несколько позже оно может воздействовать на нас (или мы на него, если какое-то время тому назад мы позаботились об этом). Когда мы смотрим на звезду Альфа Центавра, мы видим ее такой, какой она была

4 года тому назад; нам может захотеться узнать, на что она похожа «сейчас». «Сейчас» — это значит в этот же момент в нашей системе координат. Альфу Центавра мы можем видеть только при помощи световых лучей, явившихся к нам из нашего прошлого, прошлого четырехлетней давности, но что́ на ней происходит «сейчас», мы не знаем. Происходящее на ней «сейчас» сможет воздействовать на нас только через четыре года. «Альфа Центавра сейчас» — это идея, или понятие, существующее в нашем мозге; никакого физического определения для такого понятия в этот момент нет, потому что надо подождать, прежде чем «сейчас» удастся увидеть; для Альфы Центавра даже правильное понятие «сейчас» не поддается определению сию минуту. Ведь «сейчас» зависит от системы координат. Если бы, к примеру, Альфа Центавра двигалась, то наблюдатель на ней не согласился бы с нашим пониманием его «сейчас», потому что его оси координат были бы повернуты на какой-то угол, а его «сейчас» было бы совсем *другим* временем. Мы уже говорили, что одновременность не определяется однозначно.

Встречаются порой предсказатели судьбы, гадалки, люди, утверждающие, что они могут узнавать будущее; немало чудесных историй рассказывается и о людях, которые внезапно видят перед собой свое воздействуемое будущее. От этого возникает множество парадоксов: ведь если мы знаем, что что-то случится, то наверняка сможем избежать этого, если захотим. На самом же деле ни один провидец будущего не способен узнать даже настоящее! Нам никто не скажет, что́ сию минуту происходит достаточно далеко от нас, потому что это ненаблюдаемо.

Напоследок я задам вопрос, ответить на который предоставляю вам самим. Если бы внезапно появилась возможность знать, что происходит в области *1* пространства-времени, — возник бы от этого парадокс или нет?

§ 4. Еще о четырехвекторах

Вернемся опять к аналогии между преобразованием Лоренца и вращением пространственных осей. Мы уже убедились, что полезно собирать воедино отличные от координат величины, которые преобразуются так же, как и координаты; эти соединенные величины называют *векторами*, или направленными отрезками. При обычных вращениях немало величин преобразуется в точности так же, как x, y, z (например, скорость с тремя компонентами x, y, z); при переходе из одной системы координат в другую ни одна из компонент не остается прежней, все они приобретают новые значения. Но «сама» скорость, во всяком случае, более реальна, чем любая из ее компонент, и изображаем мы эту скорость направленным отрезком.

Теперь мы спросим: существуют ли величины, которые преобразуются при переходе от неподвижной системы к движущейся так же, как и x, y, z, t? Наш опыт обращения с векторами подсказывает, что три из этих величин, подобно x, y, z, могли бы представлять собой три компоненты обычного пространственного вектора, а четвертая могла бы оказаться похожей на обычный скаляр относительно пространственных вращений: она бы не изменялась, пока мы не перейдем в движущуюся систему координат. Возможно ли, однако, связать с одним из известных «тривекторов» некоторый четвертый объект (который можно назвать «временно́й компонентой») таким образом, чтобы вся четверка «вращалась» точно так же, как изменяются пространство и время в пространстве-времени? Мы сейчас покажем, что действительно существует по крайней мере одна такая четверка (на самом деле далеко не одна): *три компоненты импульса и энергия в качестве временно́й компоненты преобразуются вместе* и образуют так называемый «четырехвектор». Доказывая это, мы избавимся от c тем же приемом, какой употреблялся в уравнении (17.4). Например, энергия и масса отличаются только множителем c^2 и при надлежащем выборе единиц измерения энергия совпадет с массой. Вместо того чтобы писать $E = mc^2$, мы положим $E = m$. Если понадобится, в окончательных уравнениях можно опять расставить c в нужных степенях.

Итак, уравнения для энергии и импульса имеют вид

$$E = m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}},$$
$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{17.6}$$

Значит, при таком выборе единиц получится

$$E^2 - p^2 = m_0^2. \tag{17.7}$$

Скажем, если энергия выражена в электронвольтах (*эв*), то чему равна масса в 1 *эв*? Она равна массе с энергией покоя 1 *эв*, т. е. $m_0c^2 = 1$ *эв*. У электрона, например, масса покоя равна $0{,}511 \cdot 10^6$ *эв*.

Как же будут выглядеть импульс и энергия в новой системе координат? Чтобы узнать это, надо преобразовать уравнения (17.6). Это преобразование легко получить, зная, как преобразуется скорость. Пусть некоторое тело имело скорость v, а мы наблюдаем за ним из космического корабля, который сам имеет скорость u, и обозначаем соответствующие величины штрихами. Для простоты сперва мы рассмотрим случай, когда скорость v направлена по скорости u. (Более общий случай мы рассмотрим позже.) Чему равна скорость тела v' по измерениям из космического корабля? Эта скорость равна «разности» между v и u. По прежде полученному нами закону

$$v' = \frac{v - u}{1 - uv}. \tag{17.8}$$

Теперь подсчитаем, какой окажется энергия E' по измерениям космонавта. Он, конечно, воспользуется той же массой покоя, но зато скорость станет v'. Он возведет v' в квадрат, вычтет из единицы, извлечет квадратный корень и найдет обратную величину

$$v'^2 = \frac{v^2 - 2uv + u^2}{1 - 2uv + u^2v^2},$$

$$1 - v'^2 = \frac{1 - 2uv + u^2v^2 - v^2 + 2uv - u^2}{1 - 2uv + u^2v^2} =$$

$$= \frac{1 - v^2 - u^2 + u^2v^2}{1 - 2uv + u^2v^2} = \frac{(1 - v^2)(1 - u^2)}{(1 - uv)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v'^2}} = \frac{1 - uv}{\sqrt{1 - v^2}\,\sqrt{1 - u^2}}. \tag{17.9}$$

Энергия E' просто равна массе m_0, умноженной на это выражение. Но нам хочется выразить энергию через нештрихованные энергию и импульс. Мы замечаем, что

$$E' = \frac{m_0 - m_0uv}{\sqrt{1 - v^2}\,\sqrt{1 - u^2}} = \frac{\left(m_0/\sqrt{1 - v^2}\right) - \left(m_0v/\sqrt{1 - v^2}\right)u}{\sqrt{1 - u^2}},$$

или

$$E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - u^2}}. \tag{17.10}$$

Мы узнаем в этом выражении знакомое нам преобразование

$$t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

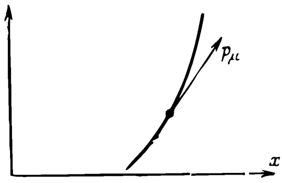
Теперь мы должны найти новый импульс p'_x. Он равен энергии E', умноженной на v', и так же просто выражается через E и p:

$$p'_x = E'v' = \frac{m_0(1 - uv)}{\sqrt{1 - v^2}\,\sqrt{1 - u^2}}\;\frac{v - u}{1 - uv} = \frac{m_0v - m_0u}{\sqrt{1 - v^2}\,\sqrt{1 - u^2}}.$$

Итак,

$$p'_x = \frac{p_x - uE}{\sqrt{1 - u^2}}, \tag{17.11}$$

Фиг. 17.4. Четырехвектор импульса частицы.



и мы опять распознаем в этой формуле знакомое нам

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Итак, преобразование старых энергии и импульса в новые энергию и импульс в точности совпадало с преобразованием t и x в t' и x и t в x': если мы в уравнениях (17.4) будем писать E каждый раз, когда увидим t, а вместо x всякий раз будем подставлять p_x, то уравнения (17.4) превратятся в уравнения (17.10) и (17.11). Если все верно, то это правило предполагает добавочные равенства $p'_y = p_y$ и $p'_z = p_z$. Чтобы их доказать, надо посмотреть, как преобразуется движение вверх или вниз. Но как раз в предыдущей главе мы рассмотрели такое движение. Мы анализировали сложное столкновение и заметили, что поперечный импульс действительно не меняется при переходе в движущуюся систему координат. Стало быть, мы уже убедились, что $p'_y = p_y$ и $p'_z = p_z$. Итак, полное преобразование равно

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - uE}{\sqrt{1 - u^2}}, \\ p'_y &= p_y, \\ p'_z &= p_z, \\ E' &= \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - u^2}}. \end{aligned} \tag{17.12}$$

Таким образом, эти преобразования выявили четыре величины, которые преобразуются подобно x, y, z, t. Назовем их *четырехвектор импульса*. Так как импульс — это четырехвектор, его можно изобразить на диаграмме пространства-времени движущейся частицы в виде «стрелки», касательной к пути (фиг. 17.4). У этой стрелки временна́я компонента дает энергию, а пространственные — тривектор импульса; сама стрелка «реальнее», чем один только импульс или одна лишь энергия: ведь и импульс, и энергия зависят от нашей точки зрения.

§ 5. *Алгебра четырехвекторов*

Четырехвекторы обозначаются иначе, чем тривекторы. Например, тривектор импульса обозначают **p**. Если хотят дать более детальную запись, то говорят о трех компонентах p_x, p_y, p_z; можно писать и короче p_i, оговаривая, что i принимает три значения x, y и z. Для четырехвекторов мы будем применять похожее обозначение: будем писать p_μ, а μ пусть заменяет собой *четыре* направления t, x, y, z.

Конечно, можно пользоваться любыми обозначениями. Не улыбайтесь, что мы так много говорим об обозначениях; учитесь изобретать их: в них вся сила. Ведь и сама математика в значительной степени состоит в изобретении лучших обозначений. Идея четырехвектора — это тоже усовершенствование обозначений с таким расчетом, чтобы преобразования было легче запомнить.

Итак, A_μ — это общий четырехвектор, p_μ — четырехимпульс, p_t — энергия, p_x — импульс в направлении x, p_y — в направлении y, p_z — в направлении z. Складывая четырехвекторы, складывают их соответствующие компоненты.

Если четырехвекторы связаны каким-то уравнением, то это значит, что уравнение выполняется для *любой компоненты*. Например, если закон сохранения тривектора импульса соблюдается в столкновении частиц, т. е. сумма импульсов множества взаимодействующих или сталкивающихся частиц постоянна, то это означает, что сумма всех компонент импульсов постоянна и в направлении x, и в направлении y, и в направлении z.

Сам по себе такой закон в теории относительности невозможен: *он неполон*; это все равно, что говорить только о двух компонентах тривектора. Неполон он потому, что при повороте осей разные компоненты смешиваются, значит, в закон сохранения должны войти все три компоненты. Таким образом, в теории относительности нужно дополнить закон сохранения импульса, включив в него сохранение временно́й компоненты. *Абсолютно необходимо*, чтобы сохранение первых трех компонент сопровождалось сохранением четвертой, иначе не получится релятивистской инвариантности. Четвертое уравнение — это как раз *сохранение энергии*; оно должно сопровождать сохранение импульса для того, чтобы четырехвекторные соотношения в геометрии пространства-времени были справедливы.

Итак, закон сохранения энергии и импульса в четырехмерном обозначении таков:

$$\sum_{\substack{\text{налетающие}\\ \text{частицы}}} p_\mu = \sum_{\substack{\text{разлетающ.}\\ \text{частицы}}} p_\mu, \tag{17.13}$$

или в чуть измененных обозначениях

$$\sum_i p_{i\mu} = \sum_j p_{i\mu}, \tag{17.14}$$

где $i = 1, 2, \ldots$ относится к сталкивающимся частицам, $j = 1, 2, \ldots$ — к частицам, возникающим при столкновении, а $\mu = x, y, z$ или t. Вы спросите: «А что по осям координат?» Это неважно. Закон верен для любых компонент, при *любых* осях.

В векторном анализе нам встретилось одно понятие — скалярное произведение двух векторов. Что соответствует ему в пространстве-времени? При обычных вращениях неизменной остается величина $x^2 + y^2 + z^2$. В четырехмерном мире таким свойством при преобразованиях обладает величина $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ [уравнение (17.3)]. Как можно это записать? Можно было бы, например, пользоваться значком наподобие $A_\mu \diamondsuit B_\mu$, но обычно пишут

$$\sum_\mu{}' A_\mu A_\mu = A_t^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2. \tag{17.15}$$

Штрих при $\sum$ напоминает, что первый «временно́й» член положителен, а остальные три отрицательны. Эта величина одна и та же в любой системе координат, и можно назвать ее квадратом длины четырехвектора. Чему равен, например, квадрат длины четырехвектора импульса отдельной частицы? *Ответ*: $p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$, или, иначе, $E^2 - p^2$, потому что p_t это и есть E. Чему равно $E^2 - p^2$? Должно по условию получиться что-то, что одинаково в любой системе координат, в частности и в системе координат, которая движется вместе с частицей, так что частица в этой системе покоится. Но если частица неподвижна, значит, у нее нет импульса. Значит, у нее остается только энергия, совпадающая в этом случае с ее массой. Итак, $E^2 - p^2 = m_0^2$, т. е. квадрат длины четырехвектора импульса равен m_0^2.

Пользуясь выражением для квадрата вектора, легко изобрести скалярное произведение двух четырехвекторов: если один из них a_μ, а другой b_μ, то скалярное произведение определяется так:

$$\sum{}' a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \tag{17.16}$$

Это выражение не меняется при преобразовании системы координат.

Следует еще упомянуть о частицах с нулевой массой покоя, например о фотоне — частице света. Фотон похож на частицу тем, что он переносит энергию и импульс. Энергия фотона равна произведению некоторой постоянной (постоянная

Планка) на частоту света: $E = h\nu$. Такой фотон несет с собой и импульс, который (как у всякой частицы) равен постоянной h, деленной на длину волны света: $p = h/\lambda$. Но у фотона связь между частотой и длиной волны вполне определенна: $\nu = c/\lambda$. (Количество волн, проходящих за 1 *сек*, помноженное на их длину, даст расстояние, проходимое светом в 1 *сек*, т. е. c.) Мы сходу получаем, что энергия фотона равна его импульсу, умноженному на c, и, далее, полагая $c = 1$, что *энергия равна импульсу*. Но это и значит, что масса покоя равна нулю. Давайте вдумаемся в это любопытное обстоятельство. Если фотон — частица с нулевой массой покоя, то что с ним бывает, когда он останавливается? *Но он никогда не останавливается*! Он всегда движется со скоростью c. Обычная формула для энергии — это $m_0/\sqrt{1 - v^2}$. Можно ли утверждать, что при $m_0 = 0$ и $v = 1$ энергия фотона равна нулю? Нет, нельзя; на самом деле фотон может обладать (и обладает) энергией, хоть и не имеет массы покоя, за счет того, что всегда движется со скоростью света!

Мы знаем также, что импульс любой частицы равен произведению полной энергии на скорость: $p = vE$ при $c = 1$, или, в обычных единицах, $p = vE/c^2$. Для любой частицы, движущейся со скоростью света, $p = E$, если $c = 1$. Формулы для энергии фотона в движущейся системе даются по-прежнему уравнением (17.12), но вместо импульса туда нужно подставить энергию, умноженную на c (на 1). Изменение энергии при преобразовании означает изменение частоты света. Это явление называется эффектом Допплера; формулу для него легко получить из уравнения (17.12), положив $E = p$ и $E = h\nu$.

Как сказал Минковский: «Пространство само по себе и время само по себе погрузятся в реку забвенья, а останется жить лишь своеобразный их союз».

Глава ***18***

ДВУМЕРНЫЕ ВРАЩЕНИЯ

§ 1. Центр масс

В предыдущих главах мы изучали механику точек, или маленьких частиц, внутренняя структура которых нас совершенно не интересовала. В последующих нескольких главах мы изучим применение законов Ньютона к более сложным вещам. Но ведь чем сложнее объект, тем он интереснее, и вы сами увидите, что явления, связанные с такими более сложными объектами, поистине поразительны. Разумеется, все эти явления не содержат ничего большего, чем комбинации законов Ньютона, однако временами просто трудно поверить, что все это произошло из $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$!

Что это за более сложные объекты, с которыми мы будем иметь дело в дальнейшем? Это может быть течение воды, вращение галактик и т. д. Но сначала давайте разберемся с наиболее простым из сложных объектов — *твердым телом.* Этим термином мы будем называть монолитный объект, который одновременно с изменением положения может еще и вращаться как целое. Впрочем, даже такой простой объект может двигаться достаточно сложно, поэтому давайте сначала рассмотрим наиболее простой случай движения, когда тело крутится вокруг *неподвижной оси*, причем каждая точка этого тела движется в плоскости, перпендикулярной этой оси. Такое вращение тела вокруг неподвижной оси называется *плоским*, или *двумерным.* Позднее, когда мы обобщим наш результат на случай трех измерений, вы увидите, что вращение гораздо более хитрая штука, чем механика частицы, и без достаточного опыта в двух измерениях понять трехмерные вращения очень трудно.

К первой интересной теореме о движении сложного тела можно прийти следующим образом: попробуйте бросить какой-нибудь предмет, состоящий из множества скрепленных между собой кубиков и стержней. Вы знаете, конечно, что он полетит по параболе; это мы обнаружили еще, когда изучали движение точки. Однако теперь наш объект *не* точка. Он поворачивается, покачивается и все же летит по параболе; вы можете в этом убедиться. *Какая же точка* тела описывает параболу? Ну разумеется, не угол кубика, потому что он поворачивается, не конец стержня, не его середина и не центр кубика. Но все-таки *что-то* движется по параболе, существует некий эффективный «центр», который движется по параболе. Таким образом, первая теорема о сложных объектах говорит, что *существует* какая-то «средняя» точка, вполне определенная математически, которая движется по параболе. Точка эта не обязательно находится в самом теле, она может лежать и где-то вне его.

Это так называемая теорема о центре масс, и доказывается она следующим образом.

Любой объект можно рассматривать как множество маленьких частичек, атомов, связанных различными силами. Пусть i обозначает номер одной из таких частиц (их страшно много, поэтому i может быть равно, например, 10^{23}). Сила, действующая на i-ю частицу, равна массе, умноженной на ускорение этой частицы:

$$\mathbf{F}_i = m_i\left(\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}\right). \tag{18.1}$$

В последующих главах наши движущиеся объекты и все их части будут двигаться со скоростями, много меньшими, чем скорость света, и поэтому для всех величин мы будем рассматривать только нерелятивистское приближение. Масса при этих условиях будет постоянна, так что

$$\mathbf{F}_i = \frac{d^2(m_i\mathbf{r}_i)}{dt^2}. \tag{18.2}$$

Если теперь сложить все силы, действующие на частицы, т. е. сложить все $\mathbf{F}_i$ со всеми значениями индекса, то в результате мы должны получить полную силу $\mathbf{F}$. Складывая же правые части уравнения (18.2) для всех частиц и вспоминая, что производная от суммы равна сумме производных, получаем

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} = \frac{d^2\left(\sum_i m_i\mathbf{r}_i\right)}{dt^2}. \tag{18.3}$$

Поэтому полная сила равна второй производной от суммы произведений масс частиц на их положение.

Но полная сила, действующая на все частицы, — это то же самое, что и внешняя сила. Почему? Да потому что, какие бы силы ни действовали между частицами, пусть это будет притяжение или отталкивание, или атомные силы, все равно, когда мы складываем их вместе и применяем Третий закон Ньютона, по которому силы действия и противодействия между любыми двумя частицами равны друг другу, то эти взаимные силы сокращаются друг с другом и в результате останутся только силы, действующие со стороны атомов, находящихся вне тела. Так что, если уравнение (18.3) представляет собой сумму по некоторому числу частиц, образующих наш объект, то *внешняя* сила, действующая на него, равна просто сумме всех сил, действующих на *все* частицы, образующие этот объект. Уравнение (18.3) неплохо было бы записать в виде полной массы тела, умноженной на какое-то ускорение. Сделать это можно. Пусть M будет суммой масс всех частиц, т. е. полной массой тела. Если теперь *определить* вектор $\mathbf{R}$ как

$$\mathbf{R}=\frac{\sum\limits_{i} m_i\mathbf{r}_i}{M}, \tag{18.4}$$

то, поскольку M постоянна, уравнение (18.3) перейдет в

$$\mathbf{F}=\frac{d^2(M\mathbf{R})}{dt^2}=M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}. \tag{18.5}$$

Таким образом, внешняя сила равна полной массе, умноженной на ускорение некоторой точки $\mathbf{R}$; эта точка и называется *центром масс* тела. Она расположена где-то в «середине» тела — некое среднее $\mathbf{r}$, в котором различные $\mathbf{r}_i$ учитываются в зависимости от их важности, т. е. в зависимости от того, какую долю вносят они в полную массу.

Мы подробно обсудим эту важную теорему несколько позднее, а сейчас остановимся на двух примерах. Пусть на тело не действуют никакие внешние силы, скажем, оно плавает где-то в пустом пространстве. Оно может делать все, что ему угодно: крутиться, покачиваться, изгибаться, но при этом его *центр масс*, эта искусственно выделенная нами математическая точка, *должен двигаться с постоянной скоростью*. В частности, если вначале этот центр покоился, то он так и будет покоиться все время. Поэтому если мы возьмем какой-то космический корабль со всеми его пассажирами, вычислим его центр масс и обнаружим, что он стоит на месте, то можно быть уверенным, что центр масс так и останется на месте, если только на корабль не будут воздействовать какие-то внешние силы. Сам корабль, конечно, может немного перемещаться, но это потому, что пассажиры внутри корабля ходят взад и вперед. Так, если все пассажиры одновременно перейдут в носовую часть, то корабль немного подастся назад, чтобы среднее положение всех масс осталось в точности на том же самом месте.

Означает ли это, что в результате неподвижности центра масс ракета не может двигаться вперед? Конечно, нет, но, чтобы продвинуть вперед интересующую нас часть ракеты, мы что-то должны выбросить назад. Иными словами, если вначале ракета покоилась, а затем выбросила из сопла некоторое количество газа, то газ этот полетит назад, а сама ракета полетит при этом вперед, однако центр масс останется точно на том же месте, где он был и раньше. Так что в ракете интересующая нас часть продвинется вперед за счет другой, которая улетит назад.

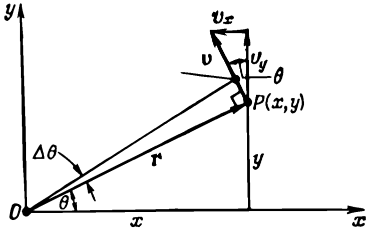
Второе замечание относительно движения центра масс. Его можно рассматривать отдельно от всех «внутренних» движений тела и, следовательно, его можно не учитывать при изучении вращения. Собственно поэтому мы и начали изучать вращения с центра масс.

§ 2. Вращение твердого тела

Поговорим теперь о вращении. Как известно, обычные предметы не вращаются просто так: они колеблются, вибрируют, изгибаются. Поэтому, чтобы упростить рассуждения, рассмотрим движение несуществующего идеального объекта, который мы назвали *твердым телом.* В таком объекте связи между атомами столь сильны, что те небольшие силы, которые необходимы, чтоб привести его в движение, не могут деформировать тело. Форма его все время остается одной и той же. Если мы хотим изучить движение такого тела и условимся не принимать во внимание движение его центра масс, то ему остается лишь *вращаться.* Вот это вращение мы и должны описать. Каким образом? Предположим, что в теле существует какая-то воображаемая неподвижная линия (она может проходить через центр масс, а может и не проходить); вокруг этой линии, как вокруг оси, вращается наше тело. Но как все-таки определить, что такое вращение? Сделать это совсем просто. Отметив какую-то точку на теле, где угодно, только не на оси, и зная, куда она перешла через некоторый промежуток времени, мы точно можем сказать, в каком положении находится тело. Единственное, что нужно знать для описания положения точки, — это *угол.* Таким образом, изучение вращения заключается в изучении изменения угла со временем.

Чтобы описать вращение, измерим угол, на который поворачивается тело. Разумеется, речь идет не об угле между

Фиг. 18.1. *Кинематика двумерного вращения.*



двумя точками *внутри* самого тела или *на* теле, а об *угловом изменении положения* всего тела как целого от одного момента времени до другого.

Сначала давайте разберемся с кинематикой вращения. Изменение угла со временем очень похоже на изменение положения при одномерном движении; для плоского вращения мы можем говорить об угловом положении и угловой скорости. Между этими двумя движениями — плоским вращением и одномерным перемещением — существует очень интересная связь: почти каждая величина в одном случае имеет свой аналог в другом. Прежде всего угол θ, указывающий, насколько *повернулось* тело, соответствует пройденному точкой расстоянию s. Угловая скорость $\omega = d\theta/dt$, которая показывает, с какой быстротой изменяется угол, соответствует обычной скорости $v = ds/dt$, описывающей быстроту изменения положения. Если угол измеряется в радианах, то угловая скорость ω равна какому-то числу радиан в секунду. Чем больше угловая скорость, тем быстрее вращается объект и тем быстрее изменяется угол. Если продифференцировать угловую скорость по времени, то получим величину $\alpha = d\omega/dt$, которую мы будем называть угловым ускорением. Оно может служить аналогом обычного ускорения.

Теперь нам следует связать динамику вращения с динамикой частиц, из которых сделано тело, т. е. выяснить, как движется каждая данная частица, если угловая скорость составляет столько-то радиан в секунду. Для этого давайте возьмем какую-то частицу, расположенную на расстоянии r от оси, и будем, как обычно, говорить, что в данный момент времени она находится в определенном положении $P(x, y)$ (фиг. 18.1). Через промежуток времени Δt тело целиком повернется на угол $\Delta\theta$, а вместе с ним повернется и наша частица. Хотя расстояние от нее до оси вращения O остается тем же самым, она уже переместится в другую точку, Q. Первое, что хотелось бы знать, это насколько изменятся расстояния x и y. Если обозначить через r длину OP, то длина

PQ будет равна $r\Delta\theta$ (просто по определению угла). Тогда изменение расстояния x будет равно проекции $r\Delta\theta$ на ось x

$$\Delta x = -PQ\sin\theta = -r\,\Delta\theta\,\frac{y}{r} = -y\,\Delta\theta. \qquad (18.6)$$

Аналогично,

$$\Delta y = x\,\Delta\theta. \qquad (18.7)$$

Если тело вращается с угловой скоростью ω, то, деля обе части равенства (18.6) и (18.7) на Δt, мы найдем компоненты скорости частицы

$$v_x = -\omega y \quad \text{и} \quad v_y = \omega x. \qquad (18.8)$$

Если же нам требуется абсолютная величина скорости, то мы просто пишем

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 x^2 + \omega^2 y^2} = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega r. \qquad (18.9)$$

Не удивительно, что абсолютная величина скорости получилась равной ωr; это же очевидно; ведь полное пройденное расстояние равно $r\Delta\theta$, а поэтому расстояние, пройденное за 1 *сек*, будет $r\Delta\theta/\Delta t$, или $r\omega$.

Перейдем теперь к рассмотрению *динамики* вращения. Здесь следует ввести новое понятие — *силу*. Давайте посмотрим, нельзя ли изобрести нечто, играющее ту же роль, что и сила в линейном движении. Это нечто мы будем называть *моментом силы*, или просто *моментом*. Обычно под силой мы понимаем нечто, заставляющее покоящееся тело двигаться, а то, что заставляет тело вращаться, есть «вращающая», или «крутящая», сила; ее мы называем *моментом*. Таким образом, качественно момент силы — это кручение; но что такое момент силы количественно? Количественную теорию момента можно получить, изучая *работу*, затраченную на поворот тела. Этот подход очень хорош и для определения силы: если мы знаем, какая требуется работа, чтобы совершить данное перемещение, то знаем и силу. Чтобы продолжить соответствие между угловыми и линейными величинами, мы должны приравнять работу, которая производится при повороте тела на какой-то угол, к произведению *момента* на этот *угол*. Другими словами, при таком определении момента теорема о работе имеет абсолютный аналог: работа есть сила на перемещение, или момент на угол. Это сразу говорит нам, что́ такое момент количественно. Рассмотрим, например, твердое тело, вращающееся вокруг оси, на которое действуют различные силы. Сконцентрируем сначала наше внимание на одной силе, приложенной к некоторой точке (x, y). Какую работу мы затрачиваем, поворачивая тело на некоторый малый угол $\Delta\theta$? Нетрудно понять, что она равна

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y. \tag{18.10}$$

Теперь нужно только подставить выражения (18.6) и (18.7) для Δx и Δy и получить

$$\Delta W = (xF_y - yF_x)\Delta\theta, \tag{18.11}$$

т. е. работа, которую мы проделали, равна углу, на который было повернуто тело, умноженному на какую-то странную комбинацию сил и расстояний. Эта «странная комбинация» и есть момент. Таким образом, определяя изменение работы как момент, умноженный на угол поворота, мы получаем формулу, выражающую момент через силы. (Это понятно. Поскольку момент не является полностью новым понятием, не зависящим от механики Ньютона, то он должен определенным образом выражаться через силу.)

Пусть теперь на тело действует несколько сил. Тогда работа, производимая этими силами, равна сумме работ от каждой силы, так что ΔW будет иметь вид суммы множества членов: по одному для каждой из сил, однако *каждый из них пропорционален* $\Delta\theta$. Эту величину $\Delta\theta$ можно вынести за скобку и получить, что работа равна сумме моментов от всех действующих сил, умноженной на $\Delta\theta$. Эту сумму можно назвать полным моментом сил и обозначить τ. Как видите, моменты складываются по обычным законам алгебры, однако, как вы узнаете после, это происходит из-за того, что мы ограничиваемся только плоскими вращениями. Эта ситуация напоминает одномерное движение, в котором силы просто складываются алгебраически; ведь все они в этом случае действуют вдоль одной и той же прямой. В трехмерном пространстве все более сложно. Таким образом, для двумерного вращения

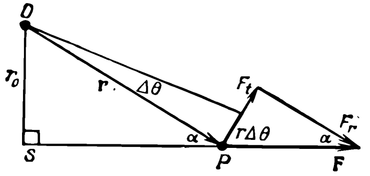
$$\tau_i = x_i F_{yi} - y_i F_{xi} \tag{18.12}$$

и

$$\tau = \sum \tau_i. \tag{18.13}$$

Нужно только помнить, что это справедливо лишь для вращения вокруг одной оси. Если брать различные оси, то все x_i и y_i изменятся, соответственно изменяются (обычно) и величины моментов.

Отвлечемся теперь на минуту и заметим, что предыдущий способ введения момента дает очень важный результат для тела, находящегося в равновесии: если сбалансированы все силы, действующие на объект, и перемещающие и вращающие, то нужно, чтобы не только *полная сила* была равна нулю, но и *полный момент*, так как при *малом перемещении*



Фиг. 18.2. Вращающий момент, создаваемый силой.

объекта, находящегося в равновесии, никакой работы не производится. Следовательно, из того, что $\Delta W = \tau\Delta\theta = 0$, можно заключить, что сумма всех моментов должна быть равна нулю. Таким образом, для равновесия необходимо выполнение двух условий: а) сумма всех сил равна нулю и б) сумма всех моментов тоже равна нулю. Попробуйте доказать сами, что в двумерном случае достаточно равенства нулю суммы моментов сил относительно какой-либо *одной* оси.

Вернемся теперь к случаю одной силы, действующей на тело, и попытаемся выяснить, что же геометрически означает странное выражение $xF_y - yF_x$. На фиг. 18.2 вы видите силу **F**, приложенную в точке P. Когда тело поворачивается на малый угол $\Delta\theta$, то естественно, что произведенная при этом работа равна составляющей в направлении перемещения, умноженной на величину перемещения. Иначе говоря, работает только тангенциальная составляющая силы, которая умножается на расстояние $r\Delta\theta$. Поэтому момент равен тангенциальной составляющей силы (перпендикулярной радиусу), умноженной на радиус. Это хорошо согласуется с нашим первоначальным понятием момента, потому что полностью радиальная сила не может крутить тело. Крутящее действие силы, очевидно, происходит только от той ее части, которая не тянет тело от центра. Она и называется тангенциальной составляющей. Ясно, кроме того, что данная сила закручивает тело тем сильнее, чем дальше от центра она приложена. Попробуйте раскрутить тело давлением прямо *на* его ось! Таким образом, тот факт, что момент силы пропорционален как радиальному расстоянию, так и тангенциальной составляющей силы, имеет свой смысл.

Существует еще третье, очень интересное выражение для момента силы. Как вы только что узнали, момент силы равен силе, умноженной на радиус и на синус угла α (см. фиг. 18.2). Если теперь продолжить линию действия силы и провести прямую, перпендикулярную к ней, то нетрудно видеть, что длина OS (она часто называется *плечом силы*) во столько раз короче радиуса, во сколько тангенциальная составляющая силы меньше полной ее величины. Поэтому можно записать, что момент равен произведению величины силы на длину ее плеча.

Мы не знаем точно, откуда произошел термин «момент силы» — по-видимому, от латинского *movimentum*, что означает способность силы двигать объект (используя какой-либо рычаг), тем более заметную, чем длинней плечо силы. Кстати, в математике слово «момент» означает усреднение с весом, в качестве которого взято расстояние до оси.

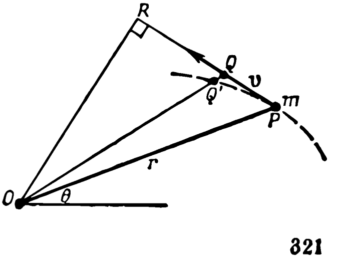
§ 3. Момент количества движения

Хотя до сих пор мы рассматривали только специальный случай твердого тела, свойства момента и его математическое выражение интересны даже тогда, когда тело не твердое. Можно доказать очень интересную теорему: подобно тому как внешняя сила равна скорости изменения величины p, которая называется полным импульсом системы частиц, так и момент силы равен скорости изменения некоторой величины L, называемой *моментом количества движения*, или *угловым моментом* группы частиц.

Чтобы доказать это, рассмотрим систему частиц, на которую действуют силы, и посмотрим, что произойдет с системой в результате действия вращающих моментов, созданных этими силами. Для начала давайте возьмем только *одну* частицу. Такая частица с массой m и осью O изображена на фиг. 18.3. Она не обязательно должна вращаться по окружности вокруг оси O, а может двигаться и по эллипсу, подобно планете вокруг Солнца, или по какой-нибудь другой кривой. Главное то, что она движется, что на нее действует сила, которая ускоряет ее в соответствии с обычными законами: x-компонента силы равна массе, умноженной на x-компоненту ускорения, и т. д. Но посмотрим теперь, как действует *момент силы*. Он, как вы знаете, равен $xF_y - yF_x$, а x- и y-компоненты силы в свою очередь равны массе, умноженной соответственно на x- и y-компоненту ускорения, так что

$$\tau = xF_y - yF_x = xm\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - ym\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right). \qquad (18.14)$$

Хотя сразу и не видно, что это выражение является производной от какой-то простой величины, но на самом деле оно



Фиг. 18.3. Движение частицы относительно оси вращения О.

равно производной от $xm(dy/dt) - ym(dx/dt)$. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left(xm\frac{dy}{dt} - ym\frac{dx}{dt}\right) = xm\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}m\frac{dy}{dt} -$$

$$- ym\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}m\frac{dx}{dt} = xm\frac{d^2y}{dt^2} - ym\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (18.15)$$

Оказывается, таким образом, что момент силы равен скорости изменения со временем некоторой величины! Давайте обратим внимание на эту величину и прежде всего дадим ей имя. Она будет называться моментом количества движения, или угловым моментом, и обозначаться буквой L

$$L = xm\frac{dy}{dt} - ym\frac{dx}{dt} = xp_y - yp_x. \qquad (18.16)$$

Хотя во всех наших рассмотрениях мы не принимали в расчет теорию относительности, тем не менее второе выражение для L верно и при учете ее. Итак, мы нашли, что у обычного импульса также существует вращательный аналог — угловой момент, который связан с компонентами импульса точно так же, как и момент силы связан с компонентами силы! Так что если мы хотим вычислить момент количества движения относительно какой-то оси, то должны взять тангенциальную составляющую импульса и умножить ее на радиус. Другими словами, угловой момент показывает, насколько быстро движется частица *вокруг* какого-то центра, ведь он учитывает только тангенциальную часть импульса. Более того, чем дальше от центра удалена линия, по которой направлен импульс, тем больше будет угловой момент. Точно так же, поскольку геометрия в этом случае та же, что и в случае момента силы, существует плечо импульса (оно, разумеется, *не совпадает* с плечом силы, действующей на частицу), которое равно расстоянию линии импульса от оси. Таким образом, угловой момент равен просто величине импульса, умноженного на его плечо. Точно так же, как и для момента силы, для углового момента мы можем написать следующие три формулы:

$$\begin{aligned} L &= xp_y - yp_x = \\ &= rp_{\text{танг}} = \\ &= p \cdot \text{Плечо импульса}. \end{aligned} \qquad (18.17)$$

Момент количества движения, как и момент силы, зависит от положения оси, относительно которой он вычисляется.

Прежде чем перейти к рассмотрению более чем одной частицы, применим полученные выше результаты к движению планеты вокруг Солнца. В каком направлении действует сила? Конечно, по направлению к Солнцу. А какой при этом будет момент силы? Разумеется, все зависит от того, в каком месте мы выберем ось, однако результат получится совсем простым, если в качестве точки вращения выбрать само Солнце. Поскольку момент силы равен силе, умноженной на ее плечо, или компоненте силы, перпендикулярной к радиусу r, умноженной на r, то в этом случае нет никакой тангенциальной составляющей силы, а поэтому момент силы относительно оси, проходящей через Солнце, равен нулю. Следовательно, момент количества движения должен оставаться постоянным. Давайте-ка посмотрим, что это означает. Произведение тангенциальной компоненты скорости на массу и радиус, будучи моментом количества движения, должно оставаться постоянным, потому что скорость его изменения есть момент силы, который в нашем случае равен нулю. Это означает что остается постоянным произведение тангенциальной компоненты скорости на радиус, поскольку масса-то уж, конечно, не изменяется. Но такая величина, характеризующая движение планеты, уже вычислялась нами раньше. Предположим, что мы взяли маленький промежуток времени Δt. Какое расстояние пройдет планета при своем движении из точки P в точку Q (фиг. 18.3)? Как велика *площадь* той области, которую «заметает» прямая, соединяющая планету с Солнцем? Пренебрегая площадью $QQ'P$, которая очень мала по сравнению с OPQ, находим, что площадь этой области равна половине основания PQ, умноженного на высоту OR. Другими словами, «заметенная» площадь равна половине произведения скорости на ее плечо. Так что скорость изменения этой площади пропорциональна моменту количества движения, который остается постоянным. Итак, мы получим, что закон Кеплера о равных площадях за равные промежутки времени является просто словесным описанием закона сохранения момента количества движения, когда моменты внешних сил отсутствуют.

§ 4. Закон сохранения момента количества движения

Посмотрим теперь, что получается в случае большого количества частиц, т. е. когда тело состоит из множества частичек со множеством сил, действующих между ними и извне. Разумеется, мы уже знаем, что момент силы, действующий на любую i-ю частицу (т. е. произведение силы, действующей на i-ю частицу, на ее плечо), равен скорости изменения момента количества движения этой частицы, а момент количества движения i-й частицы в свою очередь равен произведению импульса частицы на его плечо. Допустим теперь, что мы сложили моменты сил τ_i всех частиц и назвали это полным моментом сил τ. Эта величина должна быть равна скорости изменения суммы моментов количества движения всех частиц L_i. Эту сумму можно принять за определение новой величины, которую мы назовем полным моментом количества движения L. Точно так же, как импульс тела равен сумме импульсов составляющих его частиц, момент количества движения тела тоже равен сумме моментов составляющих его частиц. Таким образом, скорость изменения полного момента количества движения L равна полному моменту сил

$$\tau = \sum \tau_i = \sum \frac{dL_i}{dt} = \frac{dL}{dt}. \tag{18.18}$$

С непривычки может показаться, что полный момент сил — ужасно сложная штука. Ведь нужно учитывать все внутренние и внешние силы. Однако если мы вспомним, что по закону Ньютона силы действия и противодействия не только равны, но и (что особенно важно!) *действуют по одной и той же прямой в противоположных направлениях* (неважно, говорил ли об этом сам Ньютон или нет, неявно он подразумевал это), то два *момента* внутренних сил между двумя взаимодействующими частицами должны быть равны друг другу и направлены противоположно, поскольку для любой оси плечи их будут одинаковы. Поэтому все внутренние моменты сил взаимно сокращаются и получается замечательная теорема: *скорость изменения момента количества движения относительно любой оси равна моменту внешних сил относительно этой же оси!*

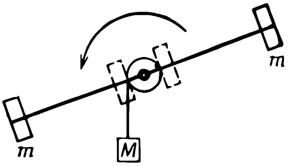
$$\tau = \sum \tau_i = \tau_{\text{внеш}} = \frac{dL}{dt}. \tag{18.19}$$

Итак, мы получили в руки мощную теорему о движении большого коллектива частиц, которая позволяет нам изучать общие свойства движения, не зная деталей его внутреннего механизма. Эта теорема верна для любого набора частиц, независимо от того, образуют ли они твердое тело или нет.

Особенно важным частным случаем этой теоремы является *закон сохранения момента количества движения*, который гласит: если на систему частиц не действуют никакие внешние моменты сил, то ее момент количества движения остается постоянным.

Рассмотрим один очень важный частный случай набора частиц, когда они образуют твердое тело, т. е. объект, который всегда имеет определенную форму и геометрический размер и может только крутиться вокруг какой-то оси. Любая часть такого объекта в любой момент времени расположена

Фиг. 18.4. Зависимость «инерции вращения» от плеча масс.



одинаковым образом относительно других его частей. Попытаемся теперь найти полный момент количества движения твердого тела. Если масса i-й частицы его равна m_i, а положение ее (x_i, y_i), то задача сводится к определению момента количества движения этой частицы, поскольку полный момент количества движения равен сумме моментов количества движения всех таких частиц, образующих тело. Для движущейся по окружности точки момент количества движения равен, конечно, произведению ее массы на скорость и на расстояние до оси вращения, а скорость в свою очередь равна угловой скорости, умноженной на расстояние до оси:

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega. \tag{18.20}$$

Суммируя L_i для всех частиц, получаем

$$L = I\omega, \tag{18.21}$$

где

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \tag{18.22}$$

Это выражение очень похоже на формулу для импульса, который равен произведению массы на скорость. Скорость при этом заменяется на угловую скорость, а масса, как видите, заменяется на некоторую новую величину, называемую *моментом инерции* I. Вот что играет роль массы при вращении! Уравнения (18.21) и (18.22) говорят нам, что инерция вращения тела зависит не только от масс составляющих его частичек, но и от того, *насколько далеко расположены они от оси*. Так что если мы имеем два тела равной массы, но в одном из них массы расположены дальше от оси, то его инерция вращения будет больше. Это легко продемонстрировать на устройстве, изображенном на фиг. 18.4. Масса M в этом устройстве не может падать слишком быстро, потому что она должна крутить тяжелый стержень. Расположим сначала массы m около оси вращения, причем грузик M будет как-то ускоряться. Однако после того, как мы изменим момент инерции, расположив массы m гораздо дальше от оси, мы увидим, что грузик M ускоряется гораздо медленнее, чем прежде. Происходит это вследствие возрастания инертности вращения, которая составляет физический смысл момента инерции — суммы произведений всех масс на квадраты их расстояний от оси вращения.

Между массой и моментом инерции имеется существенная разница, которая проявляется удивительным образом. Дело в том, что масса объекта обычно не изменяется, тогда как момент инерции *легко* изменить. Представьте себе, что вы встали на стол, который может вращаться без трения, и держите в вытянутых руках гантели, а сами медленно вращаетесь. Можно легко изменить момент инерции, согнув руки; при этом наша масса останется той же самой. Когда мы проделаем все это, то закон сохранения момента количества движения будет творить чудеса, произойдет нечто удивительное. Если моменты внешних сил равны нулю, то момент количества движения равен моменту инерции I_1, умноженному на угловую скорость ω_1, т. е. ваш момент количества движения равен $I_1\omega_1$. Согнув затем руки, вы тем самым уменьшили момент инерции до величины I_2. Но поскольку из-за закона сохранения момента количества движения произведение $I\omega$ должно остаться тем же самым, то $I_1\omega_1$ должно быть равно $I_2\omega_2$. Так что если вы *уменьшили* момент инерции, то ваша угловая скорость в результате этого должна *возрасти*.

Глава **19**

ЦЕНТР МАСС; МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

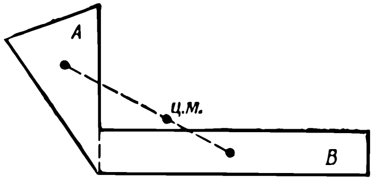
§ 1. Свойства центра масс

В предыдущей главе мы установили факт существования некоторой замечательной точки, называемой *центром масс*. Она замечательна тем, что если на частицы, образующие тело (неважно, будет ли оно твердым или жидким, звездным скоплением или чем-то другим), действует великое множество сил (конечно, имеются в виду только внешние силы, поскольку все внутренние силы компенсируют друг друга), то результирующая сила приводит к такому ускорению этой точки, как будто в ней сосредоточена вся масса тела M. Давайте теперь обсудим свойство центра масс несколько подробнее.

Положение центра масс (сокращенно ц. м.) определяется уравнением

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м.}}=\frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{\sum m_i}. \tag{19.1}$$

Это, разумеется, векторное уравнение, т. е. фактически три уравнения — по одному для каждого из трех направлений. Но мы будем рассматривать только x-направление; если вы поймете, чтó происходит в x-направлении, то поймете и два остальных. Что означает равенство $X_{\text{ц. м.}}=\sum m_ix_i/\sum m_i$? Предположим на минуту, что тело разделено на маленькие кусочки с одинаковой массой m, причем полная масса будет равна числу таких кусочков N, умноженному на массу одного кусочка, скажем 1 *г*, или какую-то другую единицу. Тогда наше уравнение просто означает, что нужно взять координаты x всех кусочков, сложить их



Фиг. 19.1. Центр масс сложного тела лежит на линии, соединяющей центры масс двух составляющих его частей.

и результат разделить на число кусочков, т. е. $X_{\text{ц. м.}} = m\sum x_i/mN = \sum x_i/N$. Иными словами, если массы кусочков равны, то $X_{\text{ц. м.}}$ будет просто средним арифметическим x-координат всех кусочков. Но предположим, что один из кусочков вдвое тяжелее, чем каждый из остальных. Тогда в нашу формулу его координата будет входить с коэффициентом 2, т. е. в суммах ее нужно учитывать дважды. Нетрудно понять, почему это происходит. Ведь тяжелый кусочек можно представить себе как бы состоящим из двух легких, таких же, как и все остальные, так что, когда мы вычисляем среднее, его координату x нужно учитывать дважды: ведь кусочков-то в этом месте два. Таким образом, $X_{\text{ц.м.}}$ равно просто среднему арифметическому x-координат всех масс, причем каждая координата считается некоторое число раз, пропорциональное массе, как будто она разделена на маленькие кусочки единичной массы. Исходя из этого, легко доказать, что $X_{\text{ц м.}}$ должна находиться где-то между самой близкой и самой далекой частичкой. Вообще центр масс должен лежать где-то внутри многогранника, проведенного через крайние точки тела. Однако вовсе не обязательно, чтобы центр масс находился в самом теле; ведь могут быть тела, подобные окружности, например обруч, центр масс которого находится в геометрическом центре, а не на самом обруче.

Конечно, если объект симметричен, например прямоугольник, обладающий линией симметрии, то его центр масс должен лежать где-то на этой линии. Кстати, прямоугольник имеет еще одну линию симметрии и это однозначно определяет положение его центра масс. Для просто симметричного объекта центр масс должен лежать где-то на оси симметрии: ведь отрицательных x в этом случае ровно столько же, сколько и положительных.

Существует еще один очень забавный способ нахождения центра масс. Вообразите себе тело, состоящее из двух кусков A и B (фиг. 19.1). Центр масс в этом случае можно найти следующим образом. Находим сначала отдельно центры масс составных частей A и B и их полные массы M_A и M_B. После этого находим центр масс двух точечных тел, одно из которых имеет массу M_A и расположено в центре масс части A, а другое — массу M_B и расположено в центре масс части B. Полученная точка и будет центром масс всего тела. Другими словами, если нам известны центры масс всех частей сложного тела, то, чтобы найти его центр масс, не нужно повторять все сначала, а достаточно просто найти центр масс системы точечных тел с массами, равными массам каждой из частей и расположенными в их центрах масс. Посмотрим, как это получается.

Пусть мы хотим определить центр масс сложного тела, одни из частиц которого принадлежат части A, а другие — части B. При этом мы можем разбить полную сумму $\sum m_i x_i$ на сумму по части A, т. е. $\sum_A m_i x_i$, и сумму по части B, т. е. $\sum_B m_i x_i$. Если бы мы находили центр масс только части A, то нам потребовалась бы первая из этих сумм, которая, как вы знаете, равна $M_A X_A$, т. е. полной массе части A на x-координату ее центра масс: это просто следствие теоремы о центре масс, примененной к части A. То же самое можно сказать и о части B. Сумма $\sum_B m_i x_i$ должна быть равна $M_B X_B$. Сложив эти два результата, мы, конечно, должны получить MX, т. е.

$$MX_{\text{ц. м.}} = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A X_A + M_B X_B. \qquad (19.2)$$

Полная же масса M, очевидно, равна $M_A + M_B$, так что выражение (19.2) представляет собой не что иное, как определение центра масс двух точек, одна из которых имеет массу M_A и координату X_A, а другая — массу M_B и координату X_B.

Теорема о движении центра масс интересна не только сама по себе, она еще играет очень важную роль в развитии нашего понимания физики. Если мы предположим, что законы Ньютона верны только для маленьких частей, составляющих большое тело, то эта теорема показывает, что они верны также и для большого тела. Мы можем не знать его детального строения и нам известны лишь общая масса и полная сила, действующая на него. Другими словами, законы Ньютона имеют ту особенность, что если они справедливы в малом масштабе, то справедливы и в большом. Нет никакой нужды рассматривать футбольный мяч как ужасно сложную вещь, состоящую из мириадов взаимодействующих частиц, а достаточно изучить только движение его центра масс под действием внешней силы $\mathbf{F}$, чтобы получить $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — ускорение центра масс, а m — полная масса мяча. Итак, закон $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ воспроизводит сам себя в большом масштабе. (Наверное, должно быть какое-нибудь хорошее греческое слово, которым можно было бы назвать подобные воспроизводящие себя в большом масштабе законы.)

Нетрудно, конечно, догадаться, что первый открытый человеком закон должен быть именно таким законом, воспроизводящим самого себя в большом масштабе. Почему? Да просто потому, что истинный размер фундаментальных «винтиков и колесиков» Вселенной есть атомный размер, который настолько меньше размеров окружающих нас вещей, что только сейчас начинает входить в обычную жизнь. Итак, первая открытая человеком закономерность не могла иметь отношения к размерам атомного масштаба. Если бы законы для малых частиц не воспроизводили себя в большом масштабе, то открыть их было бы не так-то легко. А что можно сказать об обратной проблеме? Должны ли законы микромира быть теми же самыми, что и для больших тел? Никакой необходимости в этом, конечно, нет.

Давайте, однако, предположим, что истинное движение атомов описывается неким странным уравнением, которое *не воспроизводит* себя при переходе к большему масштабу. Вместо этого оно обладает тем свойством, что при таком переходе его можно *приближенно заменить каким-то выражением*, которое при все большем и большем увеличении масштаба воспроизводит само себя. Это вполне может случиться, и в действительности так оно и происходит. Законы Ньютона являются как бы «кончиком хвоста» атомных законов, продолженных до очень больших размеров. Истинные законы движения частиц очень малых размеров весьма специфичны, но если мы возьмем большое число частиц и скомбинируем законы их движения, то приближенно, *и только приближенно*, получим законы Ньютона. После этого законы Ньютона позволяют нам двигаться ко все большим размерам, оставаясь при этом теми же самыми законами. В сущности, при переходе ко все большим и большим размерам они все точнее и точнее описывают природу. Так что факт самовоспроизводимости законов Ньютона — отнюдь не фундаментальное свойство природы, а важная историческая особенность.

Основываясь на своих первых наблюдениях, мы никоим образом не смогли бы открыть фундаментальные атомные законы, поскольку наблюдения эти были слишком грубыми. Действительно, фундаментальные атомные законы, которые мы называем квантовой механикой, так сильно отличаются от законов Ньютона, что понять их не просто. Ведь у нас есть только опыт обращения с телами больших размеров, а крохотные атомы ведут себя совершенно невиданным для таких тел образом. Мы не можем сказать: «Электроны в атомах напоминают планеты, крутящиеся вокруг Солнца», или что-то в этом роде. Они не похожи *ни на что* известное нам, ибо мы не видим *ничего похожего на них*. Если мы применяем квантовую механику ко все большим и большим объектам, то законы поведения такого коллектива атомов *не воспроизводят* поведения одного атома, а дают *новый закон* — закон Ньютона, который уже воспроизводит сам себя, начиная с объектов весом в 1 миллионную микрограмма, содержащих еще миллиарды и миллиарды атомов, и вплоть до тел величиной с Землю и даже еще больших.

Вернемся, однако, к центру масс. Часто его называют *центром тяжести*, так как во многих случаях для силы тяготения можно провести точно такие же рассуждения, как и для масс. Если размеры достаточно малы, то силу тяжести можно считать не только пропорциональной массе, но и направленной всюду параллельно некоторой фиксированной линии.

Возьмем тело, в котором сила тяжести действует на каждую из составляющих его частей, а m_i — масса одной из этих частей. Действующая на нее сила тяжести будет тогда равна произведению m_i на g. Возникает вопрос: в какой точке нужно приложить одну-единственную силу, чтобы сбалансировать притяжение всего тела так, чтобы оно (если это твердое тело) не вращалось? *Ответ*: сила должна проходить через центр масс. Доказывается это следующим образом. Чтобы тело не вращалось, сумма моментов всех сил должна быть равна нулю, ибо если нет момента сил, то нет и изменения момента количества движения, и поэтому нет и вращения. Таким образом, мы должны подсчитать сумму всех моментов, действующих на все частицы, и посмотреть, какой получится полный момент относительно любой данной оси: он должен быть равен нулю, если ось проходит через центр масс. Направив ось x горизонтально, а ось y вертикально, мы найдем, что моменты сил равны силам, направленным вниз, умноженным на плечо x (т. е. сила на плечо относительно той оси, для которой измеряется момент силы). Полный же момент равен сумме

$$\tau = \sum m_i g x_i = g \sum m_i x_i. \qquad (19.3)$$

Чтобы полный момент отсутствовал, сумма $\sum m_i x_i$ должна быть равна нулю. Но эта сумма равна MX — полной массе, умноженной на расстояние от оси x до центра масс. Итак, это расстояние должно быть равно нулю.

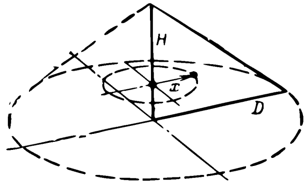
Разумеется, мы провели проверку только для x-направления, однако если мы действительно взяли центр масс, то тело должно быть уравновешено в любом положении, поэтому, повернув его на 90°, мы вместо оси x получим ось y. Другими словами, если держать тело за центр масс, то параллельное гравитационное поле не дает никакого момента сил. Если же объект настолько велик, что становится существенной непараллельность сил притяжения, то точку, в которой должна быть приложена уравновешивающая сила, описать не просто:

она несколько отклоняется от центра масс. Вот почему нужно помнить, что центр масс и центр тяжести — разные вещи. Тот факт, что тело, поддерживаемое точно за центр масс, уравновешено в любом положении, имеет еще одно интересное следствие. Если вместо гравитационных сил взять инерционные псевдосилы, возникающие вследствие ускорения, то, чтобы найти точку, уцепившись за которую мы уравновесим все моменты этих сил, можно использовать ту же самую математическую процедуру. Предположим, что мы заключили тело внутрь ящика, который ускоряется вместе со всем его содержимым. Тогда, с точки зрения наблюдателя, сидящего в этом ящике, на тело вследствие инерции будет действовать некая эффективная сила. Иначе говоря, чтобы заставить тело двигаться вместе с ящиком, нужно подталкивать и ускорять его. Эта сила «уравновешивается силой инерции», которая равна массе тела, умноженной на ускорение ящика. Наблюдателю в ящике будет казаться, будто тело находится в однородном гравитационном поле, величина g которого равна ускорению ящика a. Таким образом, инерционные силы, возникающие вследствие ускорения тела, не имеют момента относительно центра масс.

Этот факт имеет очень интересное следствие. В инерционной системе, движущейся без ускорения, момент сил всегда равен скорости изменения момента количества движения. Однако равенство момента силы и скорости изменения момента количества движения *остается справедливым* даже для ускоряющегося тела, если взять ось, проходящую через центр масс. Таким образом, теорема о равенстве момента сил скорости изменения момента количества движения верна в двух случаях: 1) ось фиксирована — в инерциальной системе; 2) ось проходит через центр масс — даже когда тело ускоряется.

§ 2. Положение центра масс

Математическая техника вычисления центра масс относится к области курсов математики; там подобные задачи служат хорошими примерами по интегральному исчислению. Но, даже умея интегрировать, полезно знать некоторые трюки для вычисления положения центра масс. Один из таких трюков основан на использовании так называемой теоремы Паппа, которая работает следующим образом. Если мы возьмем какую-то замкнутую фигуру и образуем твердое тело, вращая эту фигуру в пространстве так, чтобы каждая точка двигалась перпендикулярно к плоскости фигуры, то объем образующегося при этом тела равен произведению площади фигуры на расстояние, пройденное ее центром тяжести! Разумеется, эта теорема верна и в том случае, когда плоская



Фиг. 19.2. Прямоугольный треугольник и прямой круговой конус, образованный вращением этого треугольника.

фигура движется по прямой линии, перпендикулярной к ее площади, однако если мы движем ее по окружности или какой-то другой кривой, то при этом получается гораздо более интересное тело. При движении по кривому пути внутренняя часть фигуры продвигается меньше, чем внешняя и эти эффекты компенсируют друг друга. Так что если мы хотим определить центр масс плоской фигуры с однородной плотностью, то нужно помнить, что объем, образуемый вращением ее относительно оси, равен расстоянию, которое проходит центр масс, умноженному на площадь фигуры.

Например, если нам нужно найти центр масс прямоугольного треугольника с основанием D и высотой H (фиг. 19.2), то это делается следующим образом. Вообразите себе ось, проходящую вдоль H, и поверните треугольник на 360° вокруг этой оси. Это дает нам конус. Расстояние, которое проходит x-координата центра масс, равно $2\pi x$, а площадь области, которая двигалась, т. е. площадь треугольника, равна $^1/_2HD$. Произведение расстояния, пройденного центром масс, на площадь треугольника равно объему конуса, т. е. $^1/_3\pi D^2H$. Таким образом, $(2\pi x)(^1/_2HD) = {}^1/_3\pi D^2H$, или $x = D/3$. Совершенно аналогично вращением вокруг второго катета или просто по соображениям симметрии находим, что $y = H/3$. Вообще центр масс любого однородного треугольника находится в точке пересечения трех его медиан (линий, соединяющих вершину треугольника с серединой противоположной стороны), которая отстоит от основания на расстоянии, равном $^1/_3$ длины каждой медианы.

Как это увидеть? Рассеките треугольник линиями, параллельными основанию, на множество полосок. Заметьте теперь, что медиана делит каждую полоску пополам, следовательно, центр масс должен лежать на медиане.

Возьмем теперь более сложную фигуру. Предположим, что требуется найти положение центра масс однородного полукруга, т. е. круга, разрезанного пополам. Где будет находиться центр масс в этом случае? Для полного круга центр масс расположен в геометрическом центре, но для полукруга найти его положение труднее. Пусть r — радиус круга, а x — расстояние центра масс от прямолинейной границы полукруга. Вращая его вокруг этого края как вокруг оси, мы получаем шар. При этом центр масс проходит расстояние $2\pi x$, а площадь полукруга равна $^1/_2\pi r^2$ (половине площади круга). Так как объем шара равен, конечно, $4\pi r^3/3$, то отсюда находим

$$(2\pi x)\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)=\frac{4\pi r^3}{3},$$

или

$$x=\frac{4r}{3\pi}.$$

Существует еще другая теорема Паппа, которая фактически является частным случаем сформулированной выше теоремы, а потому тоже справедлива. Предположим, что вместо твердого полукруга мы взяли полуокружность, например кусок проволоки в виде полуокружности с однородной плотностью, и хотим найти ее центр масс. Оказывается, что *площадь*, которая «заметается» плоской кривой при ее движении, аналогичном вышеописанному, равна расстоянию, пройденному центром масс, умноженному на *длину* этой кривой. (Кривую можно рассматривать как очень узкую полоску и применять к ней предыдущую теорему.)

§ 3. Вычисление момента инерции

Рассмотрим теперь проблему определения *момента инерции* различных тел. Общая формула для нахождения момента инерции объекта относительно оси z имеет вид

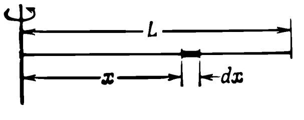
$$I=\sum m_i\left(x_i^2+y_i^2\right),$$

или

$$I=\int(x^2+y^2)\,dm=\int(x^2+y^2)\,\rho\,dv. \tag{19.4}$$

Иными словами, нужно сложить все массы, умножив каждую из них на квадрат ее расстояния до оси $\left(x_i^2+y_i^2\right)$. Заметьте, что это верно даже для трехмерного тела, несмотря на то, что расстояние имеет такой «двумерный вид». Впрочем, в большинстве случаев мы будем ограничиваться двумерными телами.

В качестве простого примера рассмотрим стержень, вращающийся относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной к нему (фиг. 19.3). Нам нужно просуммировать теперь все массы, умноженные на квадраты расстояния x (в этом случае все y — нулевые). Под суммой, разу-



Фиг. 19.3. Прямой стержень, вращающийся вокруг оси, проходящей через один из его концов.

меется, я имею в виду интеграл от x^2, умноженный на «элементики» массы. Если мы разделим стержень на кусочки длиной dx, то соответствующий элемент массы будет пропорционален dx, а если бы dx составляло длину всего стержня, то его масса была бы равна M. Поэтому

$$dm = \frac{M\,dx}{L}$$

и

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M\,dx}{L} = \frac{M}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{ML^2}{3}. \qquad (19.5)$$

Размерность момента инерции всегда равна массе, умноженной на квадрат длины, так что единственная существенная величина, которую мы вычислили, это множитель $^1/_3$.

А чему будет равен момент инерции I, если ось вращения проходит через середину стержня? Чтобы найти его, нам снова нужно взять интеграл, но уже в пределах от $-{}^1/_2L$ до $+{}^1/_2L$. Заметим, однако, одну особенность этого случая. Такой стержень с проходящей через центр осью можно представлять себе как два стержня с осью, проходящей через конец, причем масса каждого из них равна $M/2$, а длина равна $L/2$. Моменты инерции двух таких стержней равны друг другу и вычисляются по формуле (19.5). Поэтому момент инерции всего стержня равен

$$I = \frac{2\,(M/2)\,(L/2)^2}{3} = \frac{ML^2}{12}. \qquad (19.6)$$

Таким образом, стержень гораздо легче раскрутить, если ось проходит через середину, чем через конец.

Можно, конечно, продолжить вычисление моментов инерции других интересующих нас тел. Но поскольку такие расчеты требуют большого опыта в вычислении интегралов (что очень важно само по себе), они как таковые не представляют для нас большого интереса. Впрочем, здесь имеются некоторые очень интересные и полезные теоремы. Пусть имеется какое-то тело и мы хотим узнать его момент инерции относительно какой-то оси. Это означает, что мы хотим найти его инертность при вращении вокруг этой оси. Если мы будем двигать тело за стержень, подпирающий его центр масс так, чтобы оно не поворачивалось при вращении вокруг оси (в этом случае на него не действуют никакие моменты сил инерции, поэтому тело не будет поворачиваться, когда мы начнем двигать его), то для того, чтобы повернуть его, понадобится точно такая же сила, как если бы вся масса была сосредоточена в центре масс и момент инерции был бы просто равен $I_1 = MR^2_{\text{ц.м.}}$, где $R_{\text{ц.м.}}$ — расстояние от центра масс до оси вращения. Однако формула эта, разумеется, неверна.

Она не дает правильного момента инерции тела. Ведь в действительности при повороте тело вращается. Крутится не только центр масс (что давало бы величину I_1), само тело тоже должно поворачиваться относительно центра масс. Таким образом, к моменту инерции I_1 нужно добавить $I_ц$ — момент инерции относительно центра масс. Правильный ответ состоит в том, что момент инерции относительно любой оси равен

$$I = I_ц + MR^2_{ц.\,м.}. \tag{19.7}$$

Эта теорема называется *теоремой о параллельном переносе оси.* Доказывается она очень легко. Момент инерции относительно любой оси равен сумме масс, умноженных на сумму квадратов x и y, т. е. $I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$. Мы сейчас сосредоточим наше внимание на x, однако все в точности можно повторить и для y. Пусть координата x есть расстояние данной частной точки от начала кординат; посмотрим, однако, как все изменится, если мы будем измерять расстояние x' от центра масс вместо x от начала координат. Чтобы это выяснить, мы должны написать

$$x_i = x'_i + X_{ц.\,м.}.$$

Возводя это выражение в квадрат, находим

$$x_i^2 = x_i'^2 + 2X_{ц.\,м.}x'_i + X^2_{ц.\,м.}.$$

Что получится, если умножить его на m_i и просуммировать по всем i? Вынося постоянные величины за знак суммирования, находим

$$I_x = \sum m_i x_i'^2 + 2X_{ц.\,м.} \sum m_i x'_i + X^2_{ц.\,м.} \sum m_i.$$

Третью сумму подсчитать легко; это просто $MX^2_{ц.\,м.}$. Второй член состоит из двух сомножителей, один из которых $\sum m_i x'_i$; он равен x'-координате центра масс. Но это должно быть равно нулю, ведь x' *отсчитывается* от центра масс, а в этой системе координат среднее положение всех частиц, взвешенное их массами, равно нулю. Первый же член, очевидно, представляет собой часть x от $I_ц$. Таким образом, мы и приходим к формуле (19.7).

Давайте проверим формулу (19.7) на одном примере. Просто проверим, будет ли она применима для стержня. Мы уже нашли, что момент инерции стержня относительно его конца должен быть равен $ML^2/3$. А центр масс стержня, разумеется, находится на расстоянии $L/2$. Таким образом, мы должны получить, что $ML^2/3 = ML^2/12 + M(L/2)^2$. Так как одна четвертая + одна двенадцатая = одной третьей, то мы не сделали никакой грубой ошибки.

Кстати, чтобы найти момент инерции (19.5), вовсе не обязательно вычислять интеграл. Можно просто предположить, что он равен величине ML^2, умноженной на некоторый неизвестный коэффициент γ. После этого можно использовать рассуждения о двух половинках и для момента инерции (19.6) получить коэффициент $^1/_4\gamma$. Используя теперь теорему о параллельном переносе оси, докажем, что $\gamma = {^1/_4}\gamma + {^1/_4}$, откуда $\gamma = {^1/_3}$. Всегда можно найти какой-нибудь окольный путь!

При применении теоремы о параллельных осях важно помнить, что ось $I_ц$ *должна быть параллельна* оси, относительно которой мы хотим вычислять момент инерции.

Стоит, пожалуй, упомянуть еще об одном свойстве, которое часто бывает очень полезно при нахождении момента инерции некоторых типов тел. Оно состоит в следующем: если у нас есть *плоская фигура* и тройка координатных осей с началом координат, расположенным в этой плоскости, и осью z, направленной перпендикулярно к ней, то момент инерции этой фигуры относительно оси z равен сумме моментов инерции относительно осей x и y. Доказывается это совсем просто. Заметим, что

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i y_i^2$$

(поскольку все $z_i = 0$). Аналогично,

$$I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum m_i x_i^2,$$

но

$$I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = I_x + I_y.$$

Момент инерции однородной прямоугольной пластинки, например с массой M, шириной w и длиной L относительно оси, перпендикулярной к ней и проходящей через ее центр, равен просто

$$I = \frac{M(w^2 + L^2)}{12},$$

поскольку момент инерции относительно оси, лежащей в плоскости пластинки и параллельной ее длине, равен $Mw^2/12$, т. е. точно такой же, как и для стержня длиной w, а момент инерции относительно другой оси в той же плоскости равен $ML^2/12$, такой же, как и для стержня длиной L.

Итак, перечислим свойства момента инерции относительно данной оси, которую мы назовем осью z:

1. Момент инерции равен

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int (x^2 + y^2)\, dm.$$

2. Если предмет состоит из нескольких частей, причем момент инерции каждой из них известен, то полный момент инерции равен сумме моментов инерции этих частей.
3. Момент инерции относительно любой данной оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение полной массы на квадрат расстояния данной оси от центра масс.
4. Момент инерции плоской фигуры относительно оси, перпендикулярной к ее плоскости, равен сумме моментов инерций относительно любых двух других взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости фигуры и пересекающихся с перпендикулярной осью.

Таблица 19.1 ● ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

Предмет	Ось	I_z
Тонкий стержень длиной L	Проходит через центр перпендикулярно к стержню	$ML^2/12$
Тонкое концентрическое кольцо с радиусами r_1 и r_2	Проходит через центр кольца перпендикулярно к плоскости кольца	$M\left(r_1^2+r_2^2\right)/2$
Сфера радиуса r	Проходит через центр	$2Mr^2/5$

В табл. 19.1 приведены моменты инерции некоторых элементарных фигур, имеющих однородную плотность масс, а в табл. 19.2—моменты инерции некоторых фигур, которые могут быть получены из табл. 19.1 с использованием перечисленных выше свойств.

§ 4. Кинетическая энергия вращения

Продолжим изучение динамики вращения. При обсуждении аналогии между линейным и угловым движением в гл. 18 мы использовали теорему о работе, но ничего не говорили о кинетической энергии. Какова будет кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω? Используя нашу аналогию, можно немедленно угадать правильный ответ. Момент инерции соответствует массе, угловая скорость соответствует обычной скорости, так что кинетическая энергия должна быть равна $^1/_2I\omega^2$. Так оно и есть на самом деле, и сейчас мы покажем это. Предположим, что тело вращается вокруг некоторой оси, так что каждая точка движется со скоростью ωr_i, где r_i — расстоя-

Предмет	Ось z	I_z
Прямоугольник со сторонами a и b	Проходит через центр параллельно b	$Ma^2/12$
Прямоугольник со сторонами a и b	Проходит через центр перпендикулярно к плоскости	$M(a^2+b^2)/12$
Тонкое концентрическое кольцо с радиусами r_1 и r_2	Любой диаметр	$M\left(r_1^2+r_2^2\right)/4$
Прямоугольный параллелепипед со сторонами a, b и c	Проходит через центр параллельно c	$M(a^2+b^2)/12$
Прямоугольный круговой цилиндр радиуса r, длиной L	Проходит через центр параллельно L	$Mr^2/2$
Прямоугольный круговой цилиндр радиуса r, длиной L	Проходит через центр перпендикулярно к L	$M(r^2/4+L^2/12)$

ние от данной точки до оси. Если масса этой точки равна m_i, то полная кинетическая энергия всего тела равна просто сумме кинетических энергий всех частиц

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum m_i (r_i\omega)^2,$$

а поскольку ω — постоянная, одна и та же для всех точек, то

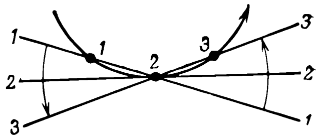
$$T=\frac{1}{2}\omega^2\sum m_i r_i^2=\frac{1}{2}I\omega^2. \qquad (19.8)$$

В конце гл. 18 мы отмечали, что существуют очень интересные явления, связанные с вращением не абсолютно твердого тела, способного изменять свой момент инерции. Именно, в примере с вращающимся столом у нас был момент инерции I_1 и угловая скорость ω_1 при вытянутых руках. Согнув руки, мы изменили момент инерции до I_2, а угловую скорость — до ω_2. Так как у нас нет никаких моментов сил относительно оси вращения стола, то момент количества движения должен остаться постоянным. Это означает, что $I_1\omega_1=I_2\omega_2$. А что можно сказать об энергии? Это очень интересный вопрос. Согнув руки, мы начинаем вращаться быстрее, но момент инерции при этом уменьшается и может показаться, что кинетическая энергия должна остаться той же самой. Это однако, неверно, потому что в действительности *сохраняется* $I\omega$, а не $I\omega^2$. Сравним теперь кинетические энергии в начале и в конце. В начале кинетическая энергия равна $^1/_2 I_1\omega_1^2={}^1/_2 L\omega_1$, где $L=I_1\omega_1=I_2\omega_2$ — момент количества движения. Точно таким же образом кинетическая энергия в конце равна $T = {}^1/_2 L\omega_2$, а поскольку $\omega_2 > \omega_1$, то кинетическая энергия в конце оказывается большей, чем в начале. Итак, вначале, когда руки были вытянуты, мы вращались с какой-то кинетической энергией, затем, согнув руки, мы стали вращаться быстрее и наша кинетическая энергия возросла. А как быть с законом сохранения энергии? Ведь должен же кто-то произвести работу, чтобы увеличить энергию? Это сделали мы сами! Но когда, в какой момент? Когда мы держим гантели горизонтально, то никакой работы не производим. Выпрямляя руки в стороны и сгибая их, мы тоже не можем произвести никакой работы. Это, однако, верно только, пока нет никакого вращения! При *вращении* же на гантели действует центробежная сила. Они стремятся вырваться из наших рук, так что, сгибая во время вращения руки, мы преодолеваем противодействие центробежной силы. Работа, которая на это затрачивается, и составляет разницу в кинетических энергиях вращения. Вот откуда берется этот добавок.

Существует еще одно очень интересное явление, которое мы рассмотрим только описательно, чтобы просто иметь о нем представление. Хотя изучение этого явления требует несколько большего опыта, но упомянуть о нем стоит, ибо оно очень любопытно и дает много интересных эффектов.

Возьмем снова эксперимент с вращающимся столиком. Рассмотрим отдельно тело и руки, с точки зрения человека, вращающегося на столике. Согнув руки с гантелями, мы стали вращаться быстрее, но заметьте, что тело при этом *не изменило своего момента инерции*; тем не менее оно стало вращаться быстрее, чем прежде. Если бы мы провели вокруг тела окружность и рассмотрели только предметы внутри этой окружности, то *их* момент количества движения *изменился* бы; они закрутились бы быстрее. Следовательно, когда мы сгибаем руки, на тело должен действовать момент силы. Однако центробежная сила не может дать никакого момента, так как она направлена по радиусу. Это говорит о том, что среди сил, возникающих во вращающейся системе, центробежная сила не одинока: *есть еще и другая сила*. Эта другая сила носит название *кориолисовой силы*, или *силы Кориолиса*. Она обладает очень странным свойством: оказывается, что если мы во вращающейся системе двигаем какой-то предмет, то она толкает его вбок. Как и центробежная сила, эта сила кажущаяся. Но если мы живем во вращающейся системе и хотим что-то двигать по радиусу, то для этого мы должны тянуть его несколько вбок. Именно эта «боковая» сила создает момент, который раскручивает наше тело.

Перейдем теперь к формулам и покажем, как кориолисова сила работает на практике. Пусть Мик сидит на карусели, *Фиг. 19.4. Три последовательных положения движущейся по радиусу точки вращающегося столика.*



которая кажется ему неподвижной. С точки зрения Джо, который стоит на земле и знает истинные законы механики, карусель крутится. Предположим, что мы провели радиальную прямую на карусели и пусть Мик двигает прямо по этой линии какую-то массу. Я хочу показать, что для того, чтобы все было так, как мы описали, необходима боковая сила. Это можно увидеть, обратив внимание на момент количества движения вращающейся массы. Она крутится все время с одной и той же угловой скоростью ω, поэтому ее момент количества движения равен

$$L = mv_{\text{танг}}r = m\omega r \cdot r = m\omega r^2.$$

Если масса расположена близко к центру, то он сравнительно мал, но если мы передвигаем ее в новое положение, если мы увеличиваем r, то масса m приобретает больший момент количества движения, т. е. во время движения по радиусу на нее *должен действовать некоторый момент силы.* (Чтобы на карусели двигаться по радиусу, нужно наклониться и толкаться вбок. Попробуйте как-нибудь сами проделать это.) Поскольку момент силы равен скорости изменения L во время движения массы m по радиусу, то

$$\tau = F_{\text{К}}r = \frac{dL}{dt} = \frac{d(m\omega r^2)}{dt} = 2m\omega r\frac{dr}{dt},$$

где через $F_{\text{К}}$ обозначена сила Кориолиса. В действительности мы хотели узнать, какую боковую силу должен прилагать Мик, чтобы двигать массу m со скоростью $v_r = dr/dt$. Как видите, она равна $F_{\text{К}} = \tau/r = 2m\omega v_r$.

Теперь, имея формулу для кориолисовой силы, давайте рассмотрим несколько более подробно всю картину в целом. Как можно понять причину возникновения этой силы из элементарных соображений? Заметьте, что кориолисова сила не зависит от расстояния до оси и поэтому действует даже на оси! Оказывается, что легче всего понять именно силу, действующую на оси вращения. Для этого нужно просто посмотреть на все происходящее из инерциальной системы Джо, который стоит на земле. На фиг. 19.4 показаны три последовательных положения массы m, которая при $t = 0$ проходит через ось. Из-за вращения карусели масса, как мы видим, движется не по прямой линии, а по некоторому *кривому пути*, касающемуся диаметра в точке $r = 0$. Но для того чтобы она двигалась по кривому пути, должна действовать ускоряющая сила. Это и есть кориолисова сила.

Однако с кориолисовой силой мы встречаемся не только в подобных ситуациях. Можно показать, что если предмет движется с постоянной скоростью по краю диска, то на него тоже действует кориолисова сила. Почему? Мик видит предмет движущимся со скоростью $v_М$, а Джо видит его движущимся по окружности со скоростью $v_д = v_М + \omega r$, поскольку предмет вдобавок переносится каруселью. Как мы уже знаем, действующая в этом случае сила будет, в сущности, полностью центробежной силой скорости $v_д$, равной $mv_д^2/r$. Но, с точки зрения Мика, она должна состоять из трех частей. Все это можно записать в следующем виде:

$$F_r = -\frac{mv_Д^2}{r} = -\frac{mv_М^2}{r} - 2mv_М\omega - m\omega^2 r.$$

Итак, F_r — это сила, которую измеряет Мик. Попытаемся понять, откуда что берется. Может ли Мик признать первый член? «Конечно, — сказал бы он, — даже если бы я не вращался, то такая центробежная сила должна возникнуть, если побежать по кругу со скоростью $v_М$». Итак, это просто центробежная сила, появления которой Мик ожидает и которая не имеет ничего общего с вращением карусели. Вдобавок Мик думает, что должна быть еще одна центробежная сила, действующая даже на неподвижные предметы на его карусели. Это дает третий член. Однако в дополнение к ним существует еще один член — второй, который опять равен $2\,m\omega v_М$. Раньше, при радиальной скорости, кориолисова сила $F_К$ была тангенциальна. Теперь же, при тангенциальной скорости, она радиальна. В самом деле, одно выражение отличается от другого только знаком. Сила всегда имеет одно и то же направление по отношению к скорости независимо от того, куда направлена скорость. Она действует под прямым углом к скорости и равна по величине $2\,m\omega v$.

Глава **20**

ВРАЩЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Моменты сил в трехмерном пространстве

В этой главе мы рассмотрим одно из наиболее замечательных и забавных следствий законов механики — поведение крутящегося колеса. Для этого нам прежде всего нужно расширить математическое описание вращения, понятие момента количества движения, момента силы и т. д. на трехмерное пространство. Однако мы не будем *использовать* эти уравнения во всей их общности и изучать все следствия, ибо это займет многие годы, а нас ждут другие разделы, к которым мы вскоре должны перейти. В вводом курсе можно остановиться только на основных законах и их приложениях к весьма ограниченному числу особенно интересных случаев.

Прежде всего хочу отметить, что для вращения в трех измерениях твердого тела или какого-то иного объекта остается верным все, что мы получили для двух измерений. Иначе говоря, $xF_y - yF_x$ так и остается моментом силы «в плоскости xy», или моментом силы «относительно оси z». Остается справедливым также, что этот момент силы равен скорости изменения величины $xp_y - yp_x$; если вы вспомните вывод уравнения (18.15) из законов Ньютона, то увидите, что фактически мы не использовали того обстоятельства, что движение плоское, и просто дифференцировали величину $xp_y - yp_x$ и получали $xF_y - yF_x$, так что эта теорема остается верной. Величину $xp_y - yp_x$ мы называли моментом количества движения в плоскости xy, или моментом количества движения относительно оси z. Кроме плоскости xy, можно использовать другие пары осей и получить другие уравнения. Возьмем, например, плоскость yz. Уже из симметрии ясно, что если мы просто подставим y вместо x, а z вместо y, то для момента силы получим выражение $yF_z - zF_y$ и $yp_z - zp_y$ будет угловым моментом в этой плоскости. Разумеется, можно еще взять и плоскость zx и получить для нее

$$zF_x - xF_z = \frac{d}{dt}(zp_x - xp_z).$$

Совершенно ясно, что для движения одной частицы мы получаем три уравнения для трех плоскостей. Более того, если мы складывали такие величины, как $xp_y - yp_x$, для многих частиц и называли это полным угловым моментом, то теперь у нас есть три сорта подобных выражений для трех плоскостей: xy, yz и zx, а сделав то же самое с моментами сил, мы можем также говорить и о полных моментах сил в этих плоскостях. Таким образом, появляются законы о том, что внешний момент сил в некоторой плоскости равен скорости изменения углового момента в той же плоскости. Это просто обобщение того, что писалось для двух измерений.

Однако теперь можно сказать: «Но ведь есть еще и другие плоскости. Разве нельзя в конце концов взять плоскость под каким-то углом и вычислять действующие в ней моменты сил. Для каждого такого случая нужно писать другие системы уравнений, так что в результате их наберется масса!» Здесь следует отметить очень интересное обстоятельство. Оказывается, что если мы в комбинации $x'F_{y'} - y'F_{x'}$ для «косой» плоскости выразим величины x', $F_{y'}$ и т. д. через их компоненты, то результат можно записать в виде некоторой *комбинации* трех моментов в плоскостях xy, yz и zx. В этом нет ничего нового. Другими словами, если нам известны три момента сил в плоскостях xy, yz и zx, то момент силы в любой другой плоскости, как и угловой момент, может быть записан в виде их комбинации: скажем, 6% одного, 92% другого и т. д. Этим свойством мы сейчас и займемся.

Пусть Джо для своих координатных осей x, y, z определял все моменты сил и все угловые моменты во всех плоскостях. Однако Мик направил свои оси x', y', z' по-другому. Чтобы немного облегчить задачу, предположим, что повернуты только оси x и y. Мик выбрал другие оси x' и y', а его ось z осталась той же самой. Это означает, что плоскости yz и zx у него новые, а поэтому моменты сил и угловые моменты у него тоже окажутся новыми. Например, его момент сил в плоскости $x'y'$ окажется равным $x'F_{y'} - y'F_x$ и т. д. Следующая задача — найти связь между новыми и старыми моментами сил. Ее вполне можно решить, установив связь одного набора осей с другим. «Да это же напоминает то, что мы делали с векторами», — скажете вы. Действительно, я собираюсь делать в точности то же самое. «А не вектор ли он этот момент сил?» — спросите вы. *Действительно,* он — вектор, однако этого нельзя сказать просто так, без всякого математического анализа. Так что следующим этапом должен быть анализ. Однако мы не будем подробно обсуждать каждый шаг, а только покажем, как это все работает. Моменты сил, вычисленные Джо, равны

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= xF_y - yF_x, \\ \tau_{yz} &= yF_z - zF_y, \\ \tau_{zx} &= zF_x - xF_z. \end{aligned} \tag{20.1}$$

● ● ●

В этом месте мы сделаем отступление и заметим, что в подобных случаях, если оси координат выбраны неправильно, для некоторых величин получается неверный знак. Почему бы не написать $\tau_{yz} = zF_y - yF_z$? Этот вопрос связан с тем обстоятельством, что система координат может быть либо «левая», либо «правая». Однако выбрав (произвольно) знак, скажем, у τ_{xy}, можно всегда определить правильное выражение для остальных двух величин путем замены по какой-либо из двух схем:

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ \nearrow & & \searrow \\ z & \leftarrow & y \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{ccc} & x & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ z & \rightarrow & y \end{array}$$

● ● ●

Теперь Мик подсчитывает моменты сил в своей системе

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= x'F_{y'} - y'F_{x'}, \\ \tau_{y'z'} &= y'F_{z'} - z'F_{y'}, \\ \tau_{z'x'} &= z'F_{x'} - x'F_{z'}. \end{aligned} \tag{20.2}$$

Пусть одна система координат повернута на угол θ по отношению к другой, так что ось z осталась той же самой. (Угол θ ничего не имеет общего с вращением объекта или с чем-то происходящим внутри системы координат. Это просто связь между осями, используемыми одним человеком, и осями, используемыми другим. Мы предполагаем, что он остается постоянным.) При этом координаты в двух системах связаны так:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{20.3}$$

Точно таким же образом, поскольку сила является вектором, она преобразуется в новой системе координат так же, как

x, y и z. Просто, по определению, объект называется вектором тогда и только тогда, когда различные его компоненты преобразуются как x, y и z

$$\begin{aligned} F_{x'} &= F_x \cos\theta + F_y \sin\theta, \\ F_{y'} &= E_y \cos\theta - F_x \sin\theta, \\ F_{z'} &= F_z. \end{aligned} \tag{20.4}$$

Теперь можно определить, как преобразуется момент силы. Для этого в уравнение (20.2) нужно просто подставить вместо x', y' и z' выражение (20.3), а для $F_{x'}$, $F_{y'}$ и $F_{z'}$ — выражение (20.4). Врезультате для $\tau_{x'y'}$ получается длинный ряд членов, но оказывается (и на первый взгляд это удивительно), что все сводится просто к выражению $xF_y - yF_x$, которое, как известно, является моментом силы в плоскости xy:

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} = {} & (x\cos\theta + y\sin\theta)(F_y\cos\theta - F_x\sin\theta) - \\ & - (y\cos\theta - x\sin\theta)(F_x\cos\theta + F_y\sin\theta) = \\ = {} & xF_y(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - yF_x(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \\ & + xF_x(-\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta) + \\ & + yF_y(\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta) = \\ = {} & xF_y - yF_x = \tau_{xy}. \end{aligned} \tag{20.5}$$

Результат совершенно ясен, ведь мы только повернули оси, лежащие *в плоскости* xy, при этом момент относительно оси z в этой плоскости не отличается от прежнего: ведь плоскость-то осталась той же самой! Более интересно выражение для $\tau_{y'z'}$. Здесь уже мы имеем дело с новой плоскостью. Если теперь повторить то же самое с плоскостью $y'z'$, то получим

$$\begin{aligned} \tau_{y'z'} &= (y\cos\theta - x\sin\theta)F_z - z(F_y\cos\theta - F_x\sin\theta) = \\ &= (yF_z - zF_y)\cos\theta + (zF_x - xF_z)\sin\theta = \\ &= \tau_{yz}\cos\theta + \tau_{zx}\sin\theta. \end{aligned} \tag{20.6}$$

И наконец, для плоскости $z'x'$

$$\begin{aligned} \tau_{z'x'} &= z(F_x\cos\theta + F_y\sin\theta) - (x\cos\theta + y\sin\theta)F_z = \\ &= (zF_x - xF_z)\cos\theta - (yF_z - zF_y)\sin\theta = \\ &= \tau_{zx}\cos\theta - \tau_{yz}\sin\theta. \end{aligned} \tag{20.7}$$

Мы хотели найти правило для определения момента сил в новой системе через момент сил в старой и нашли его. Как можно запомнить это правило? Если внимательно посмотреть на уравнения (20.5) — (20.7), то нетрудно увидеть, что между ними и уравнениями для x, y и z существует тесная связь. Если каким-то образом мы бы могли назвать τ_{xy} z-компонентой чего-то, скажем z-компонентой вектора $\boldsymbol{\tau}$, то все было бы в порядке: уравнение (20.5) мы бы понимали как преобразование вектора τ, ибо z-компонента его, как это и должно быть, оставалась бы неизменной. Аналогично, если связать плоскость yz с x-компонентой новоиспеченного вектора, а плоскость zx с y-компонентой, то закон преобразования будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}\tau_{z'} &= \tau_z,\\ \tau_{x'} &= \tau_x \cos\theta + \tau_y \sin\theta,\\ \tau_{y'} &= \tau_y \cos\theta - \tau_x \sin\theta,\end{aligned} \tag{20.8}$$

что в точности соответствует закону преобразования векторов.

Мы, следовательно, доказали, что комбинацию $xF_y - yF_x$ можно отждествить с тем, что обычно называется z-компонентой некоторого искусственно введенного вектора. Хотя момент сил является своего рода «кручением» в плоскости и, казалось бы, не имеет векторного характера, математически он все-таки ведет себя как вектор. Этот вектор направлен под прямым углом к плоскости кручения, а его длина пропорциональна силе кручения. Три компоненты такой величины будут преобразовываться при вращении как самый настоящий вектор.

Итак, мы представляем момент силы в виде вектора. Согласно правилу, с каждой плоскостью, в которой он действует, мы связываем прямую, перпендикулярную к этой плоскости. Однако перпендикулярность к плоскости оставляет неопределенный знак вектора. Чтобы определить его, необходимо еще одно дополнительное правило, которое говорило бы нам, что если момент силы действует определенным образом в плоскости xy, то соответствующий ему вектор направлен «вверх» по оси z. Это означает, что предварительно кто-то должен сказать нам, где «право», а где «лево». Предположим, что система координат xyz правосторонняя; тогда правило должно быть таким: если представить себе кручение как ввертывание болта с правовинтовой резьбой, то направление вектора, связанного с этим кручением, определяется поступательным движением болта.

Почему же момент можно отождествить с вектором? А это счастливая случайность: с каждой плоскостью можно связать только одну ось и, следовательно, с моментом можно связать только один вектор. Это свойство — особенность трехмерного пространства. В двумерном пространстве, например, момент — самый обычный скаляр, не нуждающийся в направлении. В трехмерном пространстве он — вектор. Если бы у нас было четыре измерения, то возникло бы большое затруднение, ибо (если, например, в качестве четвертого измерения взять время) дополнительно к трем плоскостям xy, yz и zx появятся также плоскости tx, ty и tz. Всего, следовательно, получается *шесть* плоскостей, а представить себе шесть величин в виде одного четырехмерного вектора невозможно.

Однако нам еще долго предстоит оставаться в трехмерном пространстве, поэтому стоит отметить, что в предыдущих математических рассмотрениях совершенно не существенно то, что x — координата, а F — сила, а существен только закон преобразования векторов. Поэтому не будет никакой разницы, если мы вместо координаты x подставим x-компоненту любого другого вектора. Иначе говоря, если мы хотим вычислить величину $a_x b_y - a_y b_x$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы, и назвать ее z-компонентой некоторой новой величины c_z, то эта величина будет вектором $\mathbf{c}$. Было бы хорошо для такой связи трех компонент нового вектора $\mathbf{c}$ с векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ придумать какое-то математическое обозначение. Для такой связи пользуются обозначением: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Таким образом, в дополнение к обычному скалярному произведению в векторном анализе мы получили произведение нового сорта, так называемое *векторное произведение*. Итак, запись $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ это то же самое, что

$$\begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y, \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z, \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \tag{20.9}$$

Если переменить порядок векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т. е. вместо $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ взять $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, то знак вектора $\mathbf{c}$ при этом изменится, ибо c_z равно $b_x a_y - b_y a_x$. Векторное произведение поэтому не похоже на обычное умножение, для которого $ab = ba$. Для векторного произведения $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Отсюда немедленно следует, что если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, то векторное произведение равно нулю, т. е. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

Векторное произведение очень хорошо передает свойство вращения, поэтому важно понимать геометрическую связь векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Связь между компонентами определяется уравнениями (20.9), исходя из которых можно получить следующие геометрические соотношения. Во-первых, вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен как к вектору $\mathbf{a}$, так и к вектору $\mathbf{b}$. (Попробуйте вычислить $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ и вы увидите, что в результате получится нуль.) Во-вторых, величина вектора $\mathbf{c}$ оказывается равной произведению абсолютных величин векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$, умноженному на синус угла между ними. А куда направлен вектор $\mathbf{c}$? Вообразите, что мы доворачиваем вектор $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$ в направлении угла, меньшего 180°; если крутить в ту же сторону болт с правовинтовой резьбой, то он должен двигаться в направлении вектора $\mathbf{c}$. То, что мы берем *право*винтовой болт, а не *лево*винтовой, — простая договоренность, которая постоянно напоминает нам, что в отличие от настоящих, «честных» векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вектор нового типа $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ по своему характеру слегка отличается от них, ибо строится он искусственно, по особому рецепту. У обычных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, кроме того, есть специальное название: мы называем их *полярными векторами*. Примерами таких векторов служат координата $\mathbf{r}$, сила $\mathbf{F}$, импульс $\mathbf{p}$, скорость $\mathbf{v}$, электрическое поле $\mathbf{E}$ и т. д. Все это обычные полярные векторы. Векторы же, содержащие одно векторное произведение обычных векторов, называются *аксиальными векторами*, или *псевдовекторами*. Примерами псевдовекторов, несомненно, могут служить момент силы $\boldsymbol{\tau}$ и момент импульса $\mathbf{L}$. Кроме того, оказывается, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, как и магнитное поле $\mathbf{B}$, тоже псевдовектор.

Чтобы расширить наши сведения о математических свойствах векторов, нужно знать все правила их умножения, как векторного, так и скалярного. В настоящий момент нам нужны лишь очень немногие из них, однако в целях полноты мы выпишем все правила с участием векторного произведения. Впоследствии мы будем ими пользоваться. Эти правила таковы:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c},\\
&\text{б)}\quad (\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),\\
&\text{в)}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c},\\
&\text{г)}\quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),\\
&\text{д)}\quad \mathbf{a}\times\mathbf{a}=0,\\
&\text{е)}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0.
\end{aligned}\tag{20.10}$$

§ 2. Уравнения вращения в векторном виде

Возникает вопрос: можно ли с помощью векторного произведения записать какое-нибудь уравнение физики? Да, конечно, с его помощью записываются очень многие уравнения. Сразу же видно, например, что момент силы равен векторному произведению радиус-вектора на силу

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}.\tag{20.11}$$

Это просто краткая запись трех уравнений: $\tau_x=yF_z-zF_y$ и т. д. С помощью того же символа можно представить момент количества движения одной частицы в виде векторного произведения вектора расстояния от начала координат (радиус-вектора) на вектор импульса

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}.\tag{20.12}$$

Векторная форма динамического закона вращения в трехмерном пространстве напоминает уравнение Ньютона $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$; именно вектор момента силы равен скорости изменения со временем вектора момента количества движения

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \qquad (20.13)$$

Если мы сложим (20.13) для многих частиц, то получим, что внешний момент сил, действующий на систему, равен скорости изменения полного момента количества движения

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{внеш}} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{полн}}}{dt}. \qquad (20.14)$$

Еще одна теорема: если полный момент внешних сил равен нулю, то вектор полного момента количества движения системы остается постоянным. Эта теорема называется *законом сохранения момента количества движения*. Если на данную систему не действуют никакие моменты сил, то ее момент количества движения не изменяется.

А что можно сказать об угловой скорости? Вектор ли она? Мы уже рассматривали вращение твердого тела вокруг некоторой фиксированной оси, а теперь давайте на минуту предположим, что оно одновременно вращается вокруг *двух* осей. Тело может находиться, например, в коробке и вращаться там вокруг некоторой оси, а сама коробка в свою очередь вращается вокруг какой-то другой оси. Результатом же такого сложного движения будет вращение тела вокруг некоторой новой оси. Самое удивительное здесь то, что эта новая ось может быть найдена следующим образом. Если вращение в плоскости xy представить как вектор, направленный вдоль оси z, длина которого равна скорости вращения, а в виде другого вектора, направленного вдоль оси y, изобразить скорость вращения в плоскости zx, то, сложив их по правилу параллелограмма, получим результат, величина которого говорит о скорости вращения тела, а направление определяет плоскость вращения. Попросту говоря, угловая скорость *в самом деле* есть вектор, для которого скорость вращения в трех плоскостях представляет прямоугольные проекции на эти плоскости*.

В качестве простого примера с использованием вектора угловой скорости подсчитаем мощность, затрачиваемую моментом сил, действующим на твердое тело. Так как мощ-

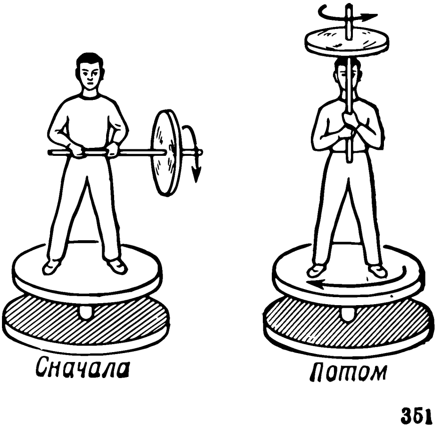
* Что это действительно так, доказывается с помощью рассмотрения перемещения частиц твердого тела за бесконечно малый промежуток времени Δt. Это не самоочевидно, и я предоставляю тем, кто интересуется, доказать это.

ность — это скорость изменения работы со временем, то в трехмерном пространстве она оказывается равной $P = \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\omega}$.

Все формулы, которые мы писали для плоского вращения, могут быть обобщены на три измерения. Если взять, например, твердое тело, вращающееся вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то можно спросить: «Чему равна скорость точки с радиус-вектором $\mathbf{r}$?» В качестве упражнения попытайтесь доказать, что скорость частицы твердого тела задается выражением $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, а $\mathbf{r}$ — положение частицы. Другим примером векторного произведения служит формула для кориолисовой силы, которую можно записать как $\mathbf{F}_{\text{К}} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$. Иначе говоря, если в системе координат, вращающейся со скоростью $\boldsymbol{\omega}$, частица движется со скоростью $\mathbf{v}$ и мы все хотим описать через величины этой вращающейся системы, то необходимо добавлять еще псевдосилу $\mathbf{F}_{\text{К}}$.

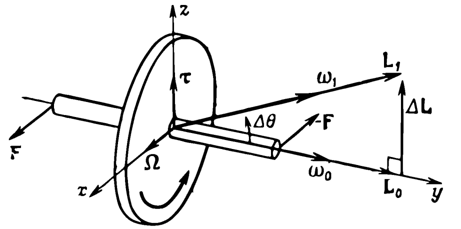
§ 3. Гироскоп

Вернемся теперь снова к закону сохранения момента количества движения. Его можно продемонстрировать с помощью быстро вращающегося колеса, или гироскопа (фиг. 20.1). Если стать на крутящийся стул и держать вращающееся колесо в горизонтальном положении, то его момент количества движения будет направлен горизонтально. Момент количества движения относительно *вертикальной* оси нельзя изменить из-за фиксированного направления оси стула (трением пренебрегаем). Если теперь повернуть ось с колесом вертикально, то колесо приобретет момент количества движения относительно вертикальной оси. Однако *система* в целом (колесо, вы сами и стул) *не может иметь* вертикальной компоненты, поэтому вы вместе со стулом должны



Фиг. 20.1. Быстро вращающийся гироскоп.

а — ось направлена горизонтально, момент количества движения относительно вертикальной оси равен нулю; б — ось направлена вертикально, момент количества движения относительно вертикальной оси должен остаться равным нулю; человек и стул крутятся в направлении, противоположном вращению колеса.



Фиг. 20.2. Гироскоп.

крутиться в направлении, обратном вращению колеса, чтобы скомпенсировать его.

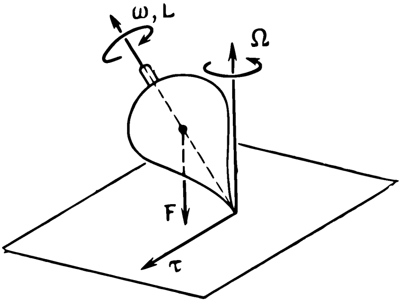
Прежде всего давайте более подробно проанализируем явление, которое мы только что описали. Самое удивительное, в чем нам следует разобраться, это откуда берутся силы, раскручивающие нас вместе со стулом, когда мы поворачиваем ось гироскопа вертикально. На фиг. 20.2 показано колесо, быстро вращающееся вокруг оси y, т. е. его угловая скорость направлена по этой оси. В ту же сторону направлен и момент количества движения. Предположим теперь, что мы хотим вращать колесо относительно оси x с малой угловой скоростью Ω; какая сила для этого требуется? Через малый промежуток времени Δt ось займет новое положение, отклонившись от горизонтального положения на угол $\Delta\theta$. Поскольку основная часть момента количества движения происходит от вращения колеса (медленное вращение вокруг оси x дает очень малый вклад), мы видим, что вектор момента количества движения изменяется. Каково же изменение этого вектора? Он остается тем же самым *по величине*, однако *направление* его меняется на угол $\Delta\theta$. Величина вектора ΔL поэтому равна $\Delta L = L_0 \Delta\theta$; в результате возникает момент силы, равный скорости изменения момента количества движения $\tau = \Delta L/\Delta t = L_0 (\Delta\theta/\Delta t) = L_0\Omega$. Учитывая направление различных величин, мы видим, что

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_0. \qquad (20.15)$$

Таким образом, если Ω и $\mathbf{L}_0$ направлены горизонтально, как это показано на фигуре, то $\boldsymbol{\tau}$ направлен *вертикально*. Чтобы уравновесить такой момент, к концам оси в горизонтальном направлении должны быть приложены силы $\mathbf{F}$ и $-\mathbf{F}$. Откуда берутся эти силы, кто их прикладывает? Да мы сами, собственными руками, когда стараемся повернуть ось колеса в вертикальное положение. Но Третий закон Ньютона требует, чтобы равные и противоположно направленные силы (и равный, но противоположно направленный *момент*) действовали на нас. Они и заставляют нас крутиться вокруг вертикальной оси z в противоположном направлении.

Фиг. 20.3. Быстро вращающийся волчок.

Заметьте, что направление вектора момента силы совпадает с направлением прецессии.



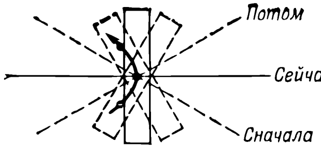
Этот результат можно обобщить на быстро вращающийся волчок. В обычном вращающемся волчке сила тяжести, действующая на его центр масс (ц. м.), создает момент относительно точки соприкосновения волчка с полом (фиг. 20.3). Этот момент действует в горизонтальном направлении и заставляет волчок прецессировать, т. е. ось его будет описывать круговой конус вокруг вертикальной оси. Если Ω — угловая скорость прецессии (направленная вертикально), то мы снова находим

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_0.$$

Таким образом, если к быстро вращающемуся волчку приложить момент сил, то возникнет прецессия в направлении этого момента, т. е. под прямым углом к силам, создающим момент.

Итак, теперь мы можем утверждать, что поняли прецессию гироскопа, и математически мы действительно поняли ее. Однако вся эта математика может показаться нам в каком-то смысле «колдовством». Между прочим, по мере углубления во все более сложную физику многие простые вещи легче вывести математически, чем действительно понять их фундаментальный или простой смысл. По мере того как вы будете переходить ко все более и более современным работам по физике, то обнаружите одно странное обстоятельство: математика дает результаты, которые *никто* не может понять непосредственно. В качестве примера можно взять уравнение Дирака, которое получается очень просто и красиво, но понять его следствия трудновато. В нашем частном случае прецессия волчка кажется чудом, каким-то тайнодействием с прямыми углами, окружностями, крутящимися силами и правовинтовыми болтами. Но давайте все-таки попытаемся понять ее физическую сущность.

Как можно объяснить этот момент сил с помощью реально действующих сил и ускорений? Заметьте, что, когда колесо



Фиг. 20.4. Движение частицы вращающегося колеса, показанного на фиг. 20.2.

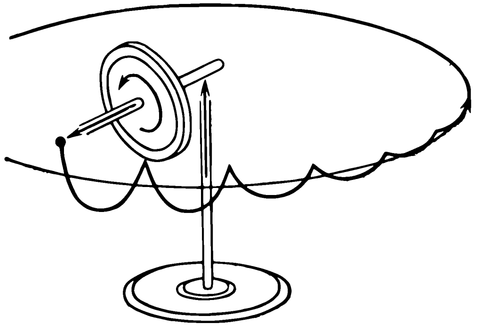
При повороте оси эти частицы движутся по кривой линии.

прецессирует, частицы колеса в действительности не движутся уже в одной плоскости (фиг. 20.4). Мы показали ранее (см. фиг. 19.4, стр. 80), что частица, которая пересекает ось прецессии, движется по *кривому пути*. Но для этого требуется какая-то боковая сила, которая возникает благодаря производимому нами давлению на ось колеса. Это давление по спицам передается частицам обода. «Постойте, — скажете вы, — а как относительно частиц на другой стороне колеса, которые движутся в обратном направлении?» Нетрудно догадаться, что действующие на них силы должны быть *направлены в противоположную сторону*, поэтому полная сила должна быть равна нулю. Таким образом, силы уравновешиваются, но одна из них приложена на одной стороне колеса, а другая — на другой. Эти силы можно было бы приложить непосредственно к колесу, однако из-за того, что колесо твердое, их можно приложить к оси, а через спицы они передаются на колесо.

До сих пор мы доказали, что, если колесо прецессирует, оно может скомпенсировать моменты сил, вызванные силой притяжения или какой-то другой причиной. Однако мы только показали, что прецессия есть одно из возможных решений уравнения. Другими словами, только при том условии, что действует момент и *колесо запущено правильно*, мы получим чистую прецессию. Но мы не доказали (и это вообще неверно), что чистая прецессия—*наиболее общее* движение вращающегося тела под действием момента сил. Общее движение включает, кроме того, какие-то колебания и отклонения от главной прецессии. Эти колебания называются *нутацией*.

Кое-кто любит говорить, что когда на гироскоп действует момент, то он поворачивается и прецессирует, что момент сил *приводит* к прецессии. Кажется очень странным, что, будучи запущенным, гироскоп *не падает* под действием силы тяжести, а движется вбок! Как это может случиться, что направленная *вниз* сила тяжести, которую мы хорошо знаем и чувствуем, заставляет его двигаться *вбок*? Ни одна из формул в мире, подобная (20.15), не скажет нам этого, потому что формула (20.15)—это особый случай, верный только тогда, когда прецессия гироскопа уже установилась. Если же говорить о деталях, то в действительности происходит следующее. Когда мы держим гироскоп за ось, так что он никак не может

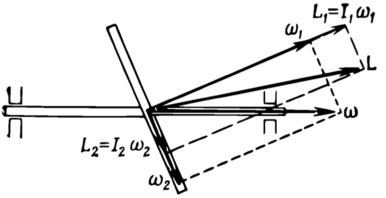
Фиг. 20.5. Истинное движение конца оси гироскопа под действием силы тяжести тотчас же после его освобождения.



прецессировать (но сохраняет свое вращение), то на него не действуют никакие моменты сил, даже момент силы тяжести, поскольку своими пальцами мы компенсируем его. Но стоит только освободить ось, как в тот же момент на нее подействует момент силы тяжести. По простоте душевной каждый решит, что конец оси должен при этом падать, и он действительно начинает падать. Это можно просто видеть, если гироскоп вращается не слишком быстро.

Итак, как и ожидается, конец оси гироскопа действительно начинает падать. Но поскольку он падает, то, стало быть, он вращается и тем самым создает момент сил. Это сообщает оси гироскопа движение вокруг вертикальной оси такое же, как и при постоянной прецессии. Однако вскоре скорость начинает превышать скорость при постоянной прецессии, поэтому ось начинает подниматься вверх до прежнего уровня. В результате конец оси описывает циклоиду (кривую, которую описывает камень, застрявший в шине автомобиля). Обычно это очень быстрое, незаметное для глаз движение, к тому же оно скоро затухает благодаря трению в подшипниках, а выживает только «чистая» прецессия (фиг. 20.5). Однако чем медленнее крутится колесо, тем нутация более заметна.

После того как движение устанавливается, ось гироскопа оказывается несколько ниже, чем она была вначале. Почему? (Это более сложная деталь, и мы упоминаем о ней только для того, чтобы не оставлять у читателя впечатления, что гироскоп — это чудо. Он действительно удивительная штука, но все же не чудо.) Если мы держали ось абсолютно горизонтально, а затем внезапно отпустили ее, то с помощью уравнения прецессии мы можем установить, что ось начинает прецессировать, т. е. двигаться по кругу в горизонтальной плоскости. Но это невозможно! Хотя мы и не обращали на это внимания раньше, колесо обладает *каким-то* моментом инерции прецессирующей оси, и если оно даже медленно вращается



Фиг. 20.6. Момент количества движения вращающегося тела не обязательно параллелен угловой скорости.

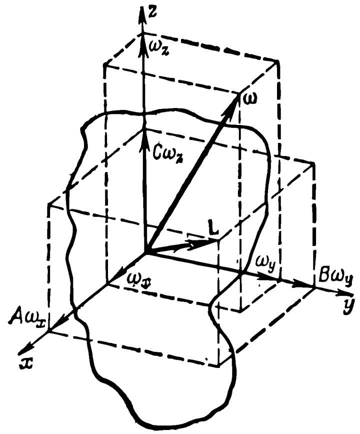
вокруг этой оси, все равно имеет небольшой момент количества движения. Отчего это происходит? Ведь если опора идеальная (т. е. если нет никакого трения), то относительно вертикальной оси никакого момента сил не может возникнуть. Тогда каким же образом прецессия все же возникает, если нет никаких моментов? *Ответ:* движение по циклоиде конца оси стремится к среднему стационарному движению, которое эквивалентно движению центра катящегося колеса, т. е. он устанавливается несколько ниже горизонтали. По этой причине собственный угловой момент гироскопа имеет небольшую вертикальную компоненту, которая в точности компенсирует момент количества движения прецессии. Как видите, ось должна немного опуститься, немного поддаться силе тяжести, чтобы иметь возможность крутиться вокруг вертикальной оси. Так работает гироскоп.

§ 4. Момент количества движения твердого тела

Прежде чем расстаться с вопросом о вращении в трехмерном пространстве, обсудим еще, хотя бы качественно, некоторые неочевидные явления, возникающие при трехмерных вращениях.

Главное из них: момент количества движения твердого тела *не обязательно* направлен в ту же сторону, что и угловая скорость. Рассмотрим колесо, прикрепленное наклонно к оси, однако ось по-прежнему проходит через его центр тяжести (фиг. 20.6). Если вращать колесо вокруг оси, то всем известно, что из-за наклонной посадки оно будет трясти подшипники. Качественно мы знаем, что при вращении на колесо должна действовать центробежная сила, которая старается оттянуть его массу подальше от оси. Она старается выпрямить плоскость колеса так, чтобы оно было перпендикулярно к оси. Чтобы уравновесить это стремление, в подшипниках должен возникнуть момент сил. Но если в подшипниках возникает момент сил, то должна быть какая-то скорость изменения момента количества движения. Как может изменяться момент количества движения, если колесо просто вращается

Фиг. 20.7. Угловая скорость и момент количества движения твердого тела ($A > B > C$).



вокруг оси? Предположим, что мы разбили угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ на компоненты ω_1 и ω_2 — перпендикулярную и параллельную плоскости колеса. Чему при этом будет равен момент количества движения? Так как моменты инерции относительно этих двух осей различны, то отношение компонент момента количества движения, которые (при таком частном выборе осей) равны произведениям моментов инерции на соответствующие компоненты угловых скоростей, отличается от отношения компонент угловой скорости. Поэтому вектор момента количества движения не направлен вдоль оси. Поворачивая вал, мы должны поворачивать и вектор момента количества движения, что приводит к возникновению момента силы, действующего на ось.

Момент инерции имеет еще одно очень важное и интересное свойство (я не буду доказывать его здесь, так как это очень сложно), которое легко описать и использовать. Наше предыдущее рассмотрение основано именно на этом свойстве. Оно состоит в следующем: любое твердое тело, даже неправильной формы, как, например, картошка, имеет такие три взаимно перпендикулярные проходящие через центр масс оси, что момент инерции относительно одной из них имеет наибольшую возможную величину из всех осей, проходящих через центр масс, а момент инерции относительно другой оси имеет наименьшую величину. Момент инерции относительно третьей имеет какую-то промежуточную величину между двумя первыми или равную одной из них. Эти оси, называемые *главными осями* тела, обладают тем важным свойством, что, если тело вращается вокруг одной из них, его момент количества движения имеет то же направление, что и угловая скорость. Если тело имеет оси симметрии, то направление главных осей совпадает с осями симметрии.

Если в качестве осей x, y и z выбрать главные оси тела и назвать соответствующие моменты инерции через A, B и C, то нетрудно подсчитать момент количества движения и кинетическую энергию вращения тела при любой угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (фиг. 20.7). Разлагая $\boldsymbol{\omega}$ на компоненты ω_x, ω_y и ω_z по осям x, y и z и используя направленные вдоль этих осей единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, можно записать момент количества движения в виде

$$\mathbf{L} = A\omega_x\mathbf{i} + B\omega_y\mathbf{j} + C\omega_z\mathbf{k}, \tag{20.16}$$

причем кинетическая энергия будет равна

$$\text{к. э.} = \frac{1}{2}\left(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2\right) = \frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{20.17}$$

Глава ***21***

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

§ 1. Линейные дифференциальные уравнения

Обычно физику как науку делят на несколько разделов: механику, электричество и т. п., и мы «проходим» эти разделы один за другим. Сейчас, например, мы «проходим» в основном механику. Но то и дело происходят странные вещи: переходя к новым разделам физики и даже к другим наукам, мы сталкиваемся с уравнениями, почти не отличающимися от уже изученных нами ранее. Таким образом, многие явления имеют аналогию в совсем других областях науки. Простейший пример: распространение звуковых волн во многом похоже на распространение световых волн. Если мы достаточно подробно изучим акустику, то обнаружим потом, что «прошли» довольно большую часть оптики. Таким образом, изучение явлений в одной области физики может оказаться полезным при изучении других ее разделов. Хорошо с самого начала предвидеть такое возможное «расширение рамок раздела», иначе могут возникнуть недоумения, почему мы тратим столько времени и сил на изучение небольшой задачи механики.

Гармонический осциллятор, к изучению которого мы сейчас переходим, будет встречаться нам почти всюду; хотя мы начнем с чисто механических примеров грузика на пружинке, малых отклонений маятника или каких-то других механических устройств, на самом деле мы будем изучать некое *дифференциальное уравнение*. Это уравнение непрестанно встречается в физике и в других науках и фактически описывает столь многие явления, что, право же, стоит того, чтобы изучить его получше. Такое уравнение описывает колебания грузика на пружинке, колебания заряда, текущего взад и вперед по электрической цепи, колебания камертона, порождающие звуковые волны, аналогичные колебания электронов в атоме, порождающие световые волны. Добавьте сюда уравнения, описывающие действия регуляторов, например поддерживающих заданную температуру термостата, сложные взаимодействия в химических реакциях и (уже совсем неожиданно) уравнения, относящиеся к росту колонии бактерий, которых одновременно и кормят, и травят ядом, или к размножению лис, питающихся кроликами, которые в свою очередь едят траву, и т. д.

Мы привели очень неполный список явлений, которые описываются почти теми же уравнениями, что и механический осциллятор. Эти уравнения называются *линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.* Это уравнения, состоящие из суммы нескольких членов, каждый из которых представляет собой производную зависимой величины по независимой, умноженную на постоянный коэффициент. Таким образом,

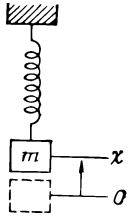
$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \qquad (21.1)$$

называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами (все a_n — постоянные).

§ 2. *Гармонический осциллятор*

Пожалуй, простейшей механической системой, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, является масса на пружинке. После того как к пружинке подвесят грузик, она немного растянется, чтобы уравновесить силу тяжести. Проследим теперь за вертикальными отклонениями массы от положения равновесия (фиг. 21.1). Отклонения вверх от положения равновесия мы обозначим через x и предположим, что имеем дело с абсолютно упругой пружиной. В этом случае противодействующие растяжению силы прямо пропорциональны растяжению. Это означает, что сила равна $-kx$ (знак минус напоминает нам, что сила противодействует смещениям). Таким образом, умноженное на массу ускорение должно быть равно $-kx$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \qquad (21.2)$$



Фиг. 21.1. Грузик, подвешенный на пружинке.

Простой пример гармонического осциллятора.

Для простоты предположим, что вышло так (или мы нужным образом изменили систему единиц), что $k/m = 1$. Нам предстоит решить уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x. \tag{21.3}$$

После этого мы вернемся к уравнению (21.2), в котором k и m содержатся явно.

Мы уже сталкивались с уравнением (21.3), когда только начинали изучать механику. Мы решили его численно [см. вып. 1, уравнение (9.12)], чтобы найти движение. Численным интегрированием мы нашли кривую (см. фиг. 9.4, вып. 1), которая показывает, что если частица m в начальный момент выведена из равновесия, но покоится, то она возвращается к положению равновесия. Мы не следили за частицей после того, как она достигла положения равновесия, но ясно, что она на этом не остановится, а будет *колебаться (осциллировать)*. При численном интегрировании мы нашли время возврата в точку равновесия: $t = 1{,}570$. Продолжительность полного цикла в четыре раза больше: $t_0 = 6{,}28$ «*сек*». Все это мы нашли численным интегрированием, потому что лучше решать не умели. Но математики дали в наше распоряжение некую функцию, которая, если ее продифференцировать дважды, переходит в себя, умножившись на -1. (Можно, конечно, заняться прямым вычислением таких функций, но это много труднее, чем просто узнать ответ.)

Эта функция есть: $x = \cos t$. Продифференцируем ее: $dx/dt = -\sin t$, а $d^2x/dt^2 = -\cos t = x$. В начальный момент $t = 0$, $x = 1$, а начальная скорость равна нулю; это как раз те предположения, которые мы делали при численном интегрировании. Теперь, зная, что $x = \cos t$, найдем *точное* значение времени, при котором $x = 0$. *Ответ:* $t = \pi/2$, или 1,57108. Мы ошиблись раньше в последнем знаке, потому что численное интегрирование было приближенным, но ошибка очень мала!

Чтобы продвинуться дальше, вернемся к системе единиц, где время измеряется в настоящих секундах. Что будет решением в этом случае? Может быть, мы учтем постоянные k и m, умножив на соответствующий множитель $\cos t$? Попробуем.

Пусть $x = A\cos t$ тогда $dx/dt = -A\sin t$ и $d^2x/dt^2 = -A\cos t = -x$. К нашему огорчению, мы не преуспели в решении уравнения (21.2), а снова вернулись к (21.3). Зато мы открыли важнейшее свойство линейных дифференциальных уравнений: *если умножить решение уравнения на постоянную, то мы снова получим решение.* Математически ясно — почему. Если x есть решение уравнения, то после умножения обеих частей уравнения на A производные тоже умножатся на A и поэтому Ax так же хорошо удовлетворит уравнению, как и x. Послушаем, что скажет по этому поводу физик. Если грузик растянет пружинку вдвое больше прежнего, то вдвое возрастет сила, вдвое возрастет ускорение, в два раза больше прежней будет приобретенная скорость и за то же самое время грузик пройдет вдвое большее расстояние. Но это вдвое большее расстояние — как раз то самое расстояние, которое *надо* пройти грузику до положения равновесия. Таким образом, чтобы достичь равновесия, требуется *столько же времени* и оно не зависит от начального смещения. Иначе говоря, если движение описывается линейным уравнением, то независимо от «силы» оно будет развиваться во времени одинаковым образом.

Ошибка пошла нам на пользу — мы узнали, что умножив решение на постоянную, мы получим решение прежнего уравнения. После нескольких проб и ошибок можно прийти к мысли, что вместо манипуляций с x надо изменить шкалу *времени.* Иначе говоря, уравнение (21.2) должно иметь решение вида

$$x = \cos\omega_0 t. \tag{21.4}$$

(Здесь ω_0 — вовсе не угловая скорость вращающегося тела, но нам не хватит всех алфавитов, если каждую величину обозначать особой буквой.) Мы снабдили здесь ω индексом 0, потому что нам предстоит встретить еще много всяких омег: запомним, что ω_0 соответствует естественному движению осциллятора. Попытка использовать (21.4) в качестве решения более успешна, потому что $dx/dt = -\omega_0 \sin\omega_0 t$ и $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2\cos\omega_0 t = -\omega_0^2 x$. Наконец-то мы решили то уравнение, которое и хотели решить. Это уравнение совпадает с (21.2), если $\omega_0^2 = k/m$.

Теперь нужно понять физический смысл ω_0. Мы знаем, что косинус «повторяется» после того, как угол изменится на 2π. Поэтому $x = \cos\omega_0 t$ будет периодическим движением; полный цикл этого движения соответстует изменению «угла» на 2π. Величину $\omega_0 t$ часто называют *фазой* движения. Чтобы изменить $\omega_0 t$ на 2π, нужно изменить t на t_0 (*период* полного колебания); конечно, t_0 находится из уравнения $\omega_0 t_0 = 2\pi$. Это значит, что $\omega_0 t_0$ нужно вычислять для одного цикла, и все будет повторяться, если увеличить t на t_0; в этом случае мы увеличим фазу на 2π. Таким образом,

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (21.5)$$

Значит, чем тяжелее грузик, тем медленнее пружинка будет колебаться взад и вперед. Инерция в этом случае будет больше, и если сила не изменится, то ей понадобится большее время для разгона и торможения груза. Если же взять пружинку пожестче, то движение должно происходить быстрее; и в самом деле, период уменьшается с увеличением жесткости пружины.

Заметим теперь, что период колебаний массы на пружинке не зависит от того, *как* колебания начинаются. Для пружинки как будто безразлично, насколько мы ее растянем. Уравнение движения (21.2) определяет *период* колебаний, но ничего не говорит об амплитуде колебания. Амплитуду колебания, конечно, определить можно, и мы сейчас займемся этим, но для этого надо задать *начальные условия.*

Дело в том, что мы еще не нашли самого общего решения уравнения (21.2). Имеется несколько видов решений. Решение $x = \cos \omega_0 t$ соответствует случаю, когда в начальный момент пружинка растянута, а скорость ее равна нулю. Можно иначе заставить пружинку двигаться, например улучить момент, когда уравновешенная пружинка покоится ($x = 0$), и резко ударить по грузику; это будет означать, что в момент $t = 0$ пружинке сообщена какая-то скорость. Такому движению будет соответствовать другое решение (21.2) — косинус нужно заменить на синус. Бросим в косинус еще один камень: если $x = \cos \omega_0 t$ — решение, то, войдя в комнату, где качается пружинка, в тот момент (назовем его «$t = 0$»); когда грузик проходит через положение равновесия ($x = 0$), мы будем вынуждены заменить это решение другим. Следовательно, $x = \cos \omega_0 t$ не может быть общим решением; общее решение должно допускать, так сказать, перемещение начала отсчета времени. Таким свойством обладает, например, решение $x = a \cos \omega_0 (t - t_1)$, где t_1 — какая-то постоянная. Далее, можно разложить

$$\cos(\omega_0 t + \Delta) = \cos \omega_0 t \cos \Delta - \sin \omega_0 t \sin \Delta$$

и записать

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

где $A = a \cos \Delta$ и $B = -a \sin \Delta$. Каждую из этих форм можно использовать для записи общего решения (21.2): любое из существующих в мире решений дифференциального уравнения $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 x$ можно записать в виде

$$x = a \cos \omega_0 (t - t_1), \tag{21.6а}$$

или

$$x = a \cos (\omega_0 t + \Delta), \tag{21.6б}$$

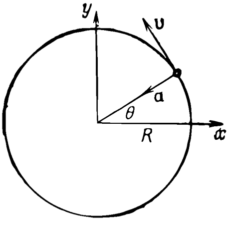
или

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \tag{21.6в}$$

Некоторые из встречающихся в (21.6) величин имеют названия: ω_0 называют *угловой частотой*; это число радианов, на которое фаза изменяется за 1 *сек*. Она определяется дифференциальным уравнением. Другие величины уравнением не определяются, а зависят от начальных условий. Постоянная a служит мерой максимального отклонения груза и называется *амплитудой* колебания. Постоянную Δ иногда называют *фазой* колебания, но здесь возможны недоразумения, потому что другие называют фазой $\omega_0 t + \Delta$ и говорят, что фаза зависит от времени. Можно сказать, что Δ — это *сдвиг фазы* по сравнению с некоторой, принимаемой за нуль. Не будем спорить о словах. Разным Δ соответствуют движения с разными фазами. Вот это верно, а называть ли Δ фазой или нет — уже другой вопрос.

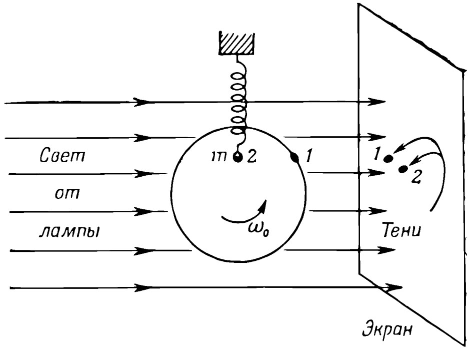
§ 3. *Гармоническое движение и движение по окружности*

Косинус в решении уравнения (21.2) наводит на мысль, что гармоническое движение имеет какое-то отношение к движению по окружности. Это сравнение, конечно, искусственное, потому что в линейном движении неоткуда взяться окружности: грузик движется строго вверх и вниз. Можно оправдаться тем, что мы уже решили уравнение гармонического движения, когда изучали механику движения по окружности. Если частица движется по окружности с постоянной скоростью v, то радиус-вектор из центра окружности к частице поворачивается на угол, величина которого пропор-



Фиг. 21.2. Частица, движущаяся по кругу с постоянной скоростью.

Фиг. 21.3. Демонстрация эквивалентности простого гармонического движения и равномерного движения по окружности.



циональна времени. Обозначим этот угол $\theta = vt/R$ (фиг. 21.2). Тогда $d\theta/dt = \omega_0 = v/R$. Известно, что ускорение $a = v^2/R = \omega_0^2 R$ и направлено к центру. Координаты движущейся точки в заданный момент равны

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta.$$

Что можно сказать об ускорении? Чему равна x-составляющая ускорения, d^2x/dt^2? Найти эту величину можно чисто геометрически: она равна величине ускорения, умноженной на косинус угла проекции; перед полученным выражением надо поставить знак минус, потому что ускорение направлено к центру:

$$a_x = -a\cos\theta = -\omega_0^2 R\cos\theta = -\omega_0^2 x. \qquad (21.7)$$

Иными словами, когда частица движется по окружности, горизонтальная составляющая движения имеет ускорение, пропорциональное горизонтальному смещению от центра. Конечно, мы знаем решения для случая движения по окружности: $x = R\cos\omega_0 t$. Уравнение (21.7) не содержит радиуса окружности; оно одинаково при движении по любой окружности при одинаковой ω_0. Таким образом, имеется несколько причин, по которым следует ожидать, что отклонение грузика на пружинке окажется пропорциональным $\cos\omega_0 t$ и движение будет выглядеть так, как если бы мы следили за x-координатой частицы, движущейся по окружности с угловой скоростью ω_0. Проверить это можно, поставив опыт, чтобы показать, что движение грузика вверх-вниз на пружинке в точности соответствует движению точки по окружности. На фиг. 21.3 свет дуговой лампы проецирует на экран тени движущихся рядом воткнутой во вращающийся диск иголки и вертикально колеблющегося груза. Если вовремя и с нужного места заставить грузик колебаться, а потом осторожно подобрать скорость движения диска так, чтобы частоты их движений совпали, тени на экране будут точно следовать одна за другой. Вот еще способ убедиться в том, что, находя численное решение, мы почти вплотную подошли к косинусу.

Здесь можно подчеркнуть, что поскольку математика равномерного движения по окружности очень сходна с математикой колебательного движения вверх-вниз, то анализ колебательных движений очень упростится, если представить это движение как проекцию движения по окружности. Иначе говоря, мы можем дополнить уравнение (21.2), казалось бы, совершенно лишним уравнением для y и рассматривать оба уравнения совместно. Проделав это, мы сведем одномерные колебания к движению *по окружности*, что избавит нас от решения дифференциального уравнения. Можно сделать еще один трюк — ввести комплексные числа, но об этом в следующей главе.

§ 4. Начальные условия

Давайте выясним, какой смысл имеют A и B или a и Δ. Конечно, они показывают, как началось движение. Если движение начнется с малого отклонения, мы получим один тип колебаний; если слегка растянуть пружинку, а потом ударить по грузику — другой. Постоянные A и B или a и Δ, или какие-нибудь две другие постоянные определяются обстоятельствами, при которых началось движение, или, как обычно говорят, *начальными условиями*. Нужно научиться определять постоянные, исходя из начальных условий. Хотя для этого можно использовать любое из соотношений (21.6), лучше всего иметь дело с (21.6 в). Пусть в начальный момент $t=0$ грузик смещен от положения равновесия на величину x_0 и имеет скорость v_0. Эта самая общая ситуация, какую только можно придумать. (Нельзя задать начального *ускорения*, потому что оно зависит от свойств пружины; мы можем распорядиться только величиной x_0.) Вычислим теперь A и B. Начнем с уравнения для

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t;$$

поскольку нам понадобится и скорость, продифференцируем x и получим

$$v = -\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t.$$

Эти выражения справедливы для всех t, но у нас есть дополнительные сведения о величинах x и v при $t=0$. Таким образом, если положить $t=0$, мы должны получить слева x_0 и v_0, ибо это то, во что превращаются x и v при $t=0$. Кроме того, мы знаем, что косинус нуля равен единице, а синус нуля равен нулю. Следовательно,

$$x_0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A$$

и

$$v_0 = -\omega_0 A \cdot 0 + \omega_0 B \cdot 1 = \omega_0 B.$$

Таким образом, в этом частном случае

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{w_0}.$$

Зная A и B, мы можем, если пожелаем, найти a и Δ.

Итак, задача о движении осциллятора решена, но есть одна интересная вещь, которую надо проверить. Надо выяснить, сохраняется ли энергия. Если нет сил трения, то энергия должна сохраняться. Сейчас нам удобно использовать формулы

$$x = a\cos(\omega_0 t + \Delta)$$

и

$$v = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \Delta).$$

Давайте найдем кинетическую энергию T и потенциальную энергию U. Потенциальная энергия в произвольный момент времени равна $^1/_2 kx^2$, где x — смещение, а k — постоянная упругости пружинки. Подставляя вместо x написанное выше выражение, найдем

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t + \Delta).$$

Разумеется, потенциальная энергия зависит от времени; она всегда положительна, это тоже понятно: ведь потенциальная энергия — это энергия пружины, а она изменяется вместе с x. Кинетическая энергия равна $^1/_2 mv^2$; используя выражение для v, получаем

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 \sin^2(\omega_0 t + \Delta).$$

Кинетическая энергия равна нулю при максимальном x, ибо в этом случае грузик останавливается; когда же грузик проходит положение равновесия ($x = 0$), то кинетическая энергия достигает максимума, потому что именно тогда грузик движется быстрее всего. Изменение кинетической энергии, таким образом, противоположно изменению потенциальной энергии. Полная энергия должна быть постоянной. Действительно, если вспомнить, что $k = m\omega_0^2$, то

$$T + U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2\left[\cos^2(\omega_0 t + \Delta) + \sin^2(\omega_0 t + \Delta)\right] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2.$$

Энергия зависит от квадрата амплитуды: если увеличить амплитуду колебания вдвое, то энергия возрастет вчетверо. *Средняя* потенциальная энергия равна половине максимальной и, следовательно, половине полной; средняя кинетическая энергия также равна половине полной энергии.

§ 5. Колебания под действием внешней силы

Нам остается рассмотреть *колебания гармонического осциллятора* под действием внешней силы. Движение в этом случае описывается уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t). \tag{21.8}$$

Давайте подумаем, как будет вести себя грузик при этих обстоятельствах. Внешная движущая сила может зависеть от времени каким угодно образом. Начнем с простейшей зависимости. Предположим, что сила осциллирует

$$F(t) = F_0 \cos\omega t. \tag{21.9}$$

Обратите внимание, что ω — это не обязательно ω_0: будем считать, что можно изменять ω, заставляя силу действовать с разной частотой. Итак, надо решить уравнение (21.8) в случае специально подобранной силы (21.9). Каким будет решение (21.8)? Одно из частных решений (общим решением мы еще займемся) выглядит так:

$$x = C\cos\omega t, \tag{21.10}$$

где постоянную C еще надо определить. Иначе говоря, пытаясь найти решение в таком виде, мы предполагаем, что, если тянуть грузик взад и вперед, он в конце концов начнет качаться взад и вперед с частотой действующей силы. Проверим, может ли это быть. Подставив (21.10) в (21.8), получим

$$-m\omega^2 C\cos\omega t = -m\omega_0^2 C\cos\omega t + F_0\cos\omega t. \tag{21.11}$$

Мы уже заменили k на $m\omega_0^2$, потому что удобнее сравнивать две частоты. Уравнение (21.11) можно поделить на содержащийся в каждом члене косинус и убедиться, что при правильно подобранном значении C выражение (21.10) будет решением. Эта величина C должна быть такой:

$$C = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \tag{21.12}$$

Таким образом, грузик m колеблется с частотой действующей на него силы, но амплитуда колебания зависит от сотношения между частотой силы и частотой свободного движения осциллятора. Если ω очень мала по сравнению с ω_0, то грузик движется вслед за силой. Если же чересчур быстро менять направление толчков, то грузик начинает двигаться в противоположном по отношению к силе направлении. Это следует из равенства (21.12), которое говорит нам, что величина C отрицательна, если ω больше *собственной* частоты гармонического осциллятора ω_0. (Мы будем называть ω_0 собственной частотой гармонического осциллятора, а ω — приложенной частотой.) При очень высокой частоте знаменатель становится очень большим и грузик практически не движется.

Найденное нами решение справедливо только в том случае, когда уже установилось равновесие между осциллятором и действующей силой; это происходит после того, как вымрут другие движения. Эти вымирающие движения называют *переходным* откликом на силу $F(t)$, а движение, описываемое (21.10) и (21.12), — *равновесным* откликом.

Приглядевшись к формуле (21.12), мы заметим любопытную вещь: если частота ω почти равна ω_0, то C приближается к бесконечности. Таким образом, если настроить силу «в лад» с собственной частотой, отклонения грузика достигнут гигантских размеров. Об этом знает всякий, кому когда-либо приходилось раскачивать ребенка на качелях. Это довольно трудно сделать, если закрыть глаза и беспорядочно толкать качели. Но если найти правильный ритм, то раскачать качели легко, однако, как только мы опять собьемся с ритма, толчки начнут тормозить качели и от такой работы будет мало проку.

Если частота ω будет в точности равна ω_0, то амплитуда должна стать *бесконечной*, что, разумеется, невозможно. Мы ошиблись, потому что решали не совсем верное уравнение. Составляя уравнение (21.8), мы забыли о силе трения и о многих других силах. Поэтому амплитуда никогда не достигнет бесконечности; пожалуй, пружинка порвется гораздо раньше!

Глава **22**

АЛГЕБРА

§ 1. Сложение и умножение

Изучая осциллятор, нам придется воспользоваться одной из наиболее замечательных, пожалуй, самой поразительной из формул, какие можно найти в математике. Физик обычно расправляется с этой формулой примерно за две минуты, даже не обратив на нее внимания. Но наука ведь не только приносит практическую пользу, а служит источником удовольствия, поэтому давайте не будем торопиться проходить мимо этой драгоценности, а посмотрим, как она выглядит в великолепном окружении, которое обычно называют элементарной алгеброй.

Вы можете спросить: «Зачем нужна математика в книге по физике?» Вот несколько уважительных причин: прежде всего математика — очень важный рабочий инструмент, но этим можно оправдать затрату всего лишь двух минут на вывод этой формулы. Однако при изучении теоретической физики мы обнаруживаем, что все физические законы можно записать в виде математических формул, именно это придает законам простоту и красоту. Таким образом, глубокое понимание математических соотношений в конце концов необходимо для понимания природы. Но главная причина — это красота темы: ведь хотя люди разрезали природу на много кусков и продолжают кромсать ее, изучая очень много предметов, такое разделение искусственно, и мы всегда будем получать наслаждение, собирая вместе отдельные куски.

Еще одна причина, по которой следует заняться поглубже алгеброй: хотя многие из вас уже знакомились с алгеброй в средней школе, но это было только первым знакомством и многие формулы еще непривычны, поэтому стоит еще раз вспомнить алгебру, чтобы не тратить на формулы столько же сил, сколько их уйдет на изучение самой физики.

То, чем мы займемся, с точки зрения математики не будет настоящей алгеброй. Математик главным образом интересуется тем, как изложить то или иное математическое утверждение и какие предположения обязательны при выводе теоремы, а какие нет. Для нас важнее результат доказательства. Например, теорема Пифагора интересна для нас потому, что в ней сообщается, что сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы; это очень интересный факт, и мы будем использовать его, не заботясь о том, действительно ли это доказанная Пифагором теорема или просто аксиома. В том же самом духе мы изложим элементарную алгебру, по возможности чисто качественно. Мы говорим *элементарная* алгебра потому, что существует ветвь математики, называемая *высшей* алгеброй, где может оказаться неверным, что $ab = ba$, но таких вещей мы касаться не будем.

Изучение алгебры начнем с середины. Предположим, что нам уже известно, что существуют целые числа, что есть нуль и что́ значит увеличить число на единицу. Не говорите, пожалуйста: «Вот так середина!», потому что для математика это середина, ведь он знает теорию множеств и может *вывести* все эти свойства целых чисел. Но мы не будем вторгаться в область философии математики и математической логики, а ограничимся предположением, что нам известны целые числа и мы умеем считать. Если взять целое число a и прибавить к нему b раз по единице, мы получим число $a + b$; этим определяется *сложение* целых чисел.

Определив сложение, проделаем вот что: начнем с нуля и прибавим к нему b раз число a; таким образом мы определим *умножение* целых чисел и будем называть результат *произведением* a на b.

Теперь можно проделать ряд *последовательных умножений*: если умножить единицу b раз на число a, то мы *возведем* a *в степень* b и запишем результат в виде a^b. Исходя из этих определений, легко доказать такие соотношения:

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{а)} & a + b = b + a & \text{ж)} & a^b a^c = a^{(b+c)} \\
\text{б)} & a + (b + c) = (a + b) + c & \text{з)} & (a^b)^c = a^{(bc)} \\
\text{в)} & ab = ba & \text{и)} & a + 0 = a \\
\text{г)} & a(b + c) = ab + ac & \text{к)} & a \cdot 1 = a \\
\text{д)} & (ab)c = a(bc) & \text{л)} & a^1 = a \\
\text{е)} & (ab)^c = a^c b^c & &
\end{array}\right\} \quad (22.1)$$

Эти результаты хорошо известны, мы не хотим долго на них останавливаться, а выписаны они больше для порядка. Конечно, 1 и 0 обладают особыми свойствами, например $a+0=a$, $a\cdot 1=a$ и a в первой степени равно a.

Составляя табличку формул (22.1), мы пользовались такими свойствами, как непрерывность и соотношение порядка; дать им определение очень трудно: для этого создана целая наука. Кроме того, мы выписали, конечно, слишком много «правил»; некоторые из этих правил можно вывести из других, но не будем на этом останавливаться.

§ 2. *Обратные операции*

Кроме прямых операций сложения, умножения и возведения в степень, существуют *обратные* операции. Их можно определить так. Предположим, что нам заданы a и c; как найти b, удовлетворяющее уравнениям $a+b=c$, $ab=c$, $b^a=c$? Если $a+b=c$, то b определяется при помощи *вычитания*: $b=c-a$. Столь же проста операция *деления*: если $ab=c$, то $b=c/a$; это решение уравнения $ab=c$ «задом наперед». Если вам встретится степень: $b^a=c$, то надо запомнить, что b называется корнем a-й степени из c. Например, на вопрос: «Какое число, будучи возведенным в куб, дает 8?» — следует отвечать: «*Кубический корень* из 8, т. е. 2». Обратите внимание, что, когда дело доходит до степени, появляются *две* обратные операции. Действительно, ведь раз a^b и b^a — различные числа, то можно задать и такой вопрос: «В какую степень надо возвести 2, чтобы получить 8?» В этом случае приходится брать *логарифм*. Если $a^b=c$, то $b=\log_a c$. Не надо пугаться громоздкой записи числа b в этом случае; находить его так же просто, как и результаты других обратных операций. Хотя логарифм «проходят» гораздо позже корня, это такая же простая вещь: просто-напросто это разного сорта решения алгебраических уравнений. Выпишем вместе прямые и обратные операции:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{а) сложение} & \text{а}'\text{) вычитание} \\
\qquad a+b=c & \qquad b=c-a \\
\text{б) умножение} & \text{б}'\text{) деление} \\
\qquad ab=c & \qquad b=\dfrac{c}{a} \\
\text{в) возведение в степень} & \text{в}'\text{) извлечение корня} \\
\qquad b^a=c & \qquad b=\sqrt[a]{c} \\
\text{г) возведение в степень} & \text{г}'\text{) взятие логарифма} \\
\qquad a^b=c & \qquad b=\log_a c
\end{array}\right\} \quad (22.2)$$

В чем же идея? Выписанные соотношения верны для целых чисел, потому что они выводятся из определений сложения, умножения и возведения в степень. Подумаем, *нельзя ли расширить класс объектов, которые по-прежнему будут обозначаться буквами a, b и c и для которых по-прежнему будут верны все сформулированные нами правила*, хотя сложение уже нельзя будет понимать как последовательное увеличение числа на единицу, а возведение в степень—как последовательное перемножение целых чисел.

§ 3. *Шаг в сторону и обобщение*

Если кто-нибудь, усвоив наши определения, приступит к решению алгебраических уравнений, он быстро натолкнется на неразрешимые задачи. Решите, например, уравнение $b = 3 - 5$. Вам придется в соответствии с определением вычитания найти число, которое дает 3, если к нему добавить 5. Перебрав все целые положительные числа (а ведь в правилах говорится только о таких числах), вы скажете, что задача не решается. Однако можно сделать то, что потом станет системой, великой идеей: наткнувшись на неразрешимую задачу, надо сначала *отойти в сторону, а затем обобщить*. Пока алгебра состоит для нас из правил и целых чисел. Забудем о первоначальных определениях сложения и умножения, но сохраним правила (22.1) и (22.2) и предположим, что они верны *вообще* не только для целых положительных чисел (для них эти правила были выведены), а для более широкого класса чисел. Раньше мы записывали целые положительные числа в виде символов, чтобы вывести правила; теперь правила будут определять символы, а символы будут представителями каких-то более общих чисел. Манипулируя правилами, можно показать, что $3 - 5 = 0 - 2$. Давайте определим новые числа: $0-1$, $0-2$, $0-3$, $0-4$ и т. д. и назовем их *целыми отрицательными числами*. После этого мы сможем решить *все* задачи на вычитание. Теперь вспомним и о других правилах, например $a(b + c) = ab + ac$; это даст нам правило умножения отрицательных чисел. Перебрав все правила, мы увидим, что они верны как для положительных, так и для отрицательных чисел.

Мы значительно расширили область действия наших правил, но достигли этого ценой изменения смысла символов.

Уже нельзя, например, сказать, что умножить 5 на -2 значит сложить 5 минус два раза. Эта фраза бессмысленна. Тем не менее, пользуясь правилами, вы всегда получите верный результат.

Возведение в степень приносит новые хлопоты. Кто-нибудь обязательно захочет узнать, что означает символ $a^{(3-5)}$. Мы знаем, что 3—5 — это решение уравнения $(3-5)+5=3$. Следовательно, мы знаем, что $a^{(3-5)}a^5 = a^3$. Теперь можно разделить на a^5, тогда $a^{(3-5)} = a^3/a^5$. Еще одно усилие, и вот окончательный результат: $a^{(3-5)} = 1/a^2$. Таким образом, мы установили, что возведение числа в отрицательную степень сводится к делению единицы на число, возведенное в положительную степень. Все было бы хорошо, если бы $1/a^2$ не было бессмысленным символом. Ведь a — это целое положительное или отрицательное число, значит, a^2 больше единицы, а мы не умеем делить единицу на числа, большие чем единица!

Система так система. Натолкнувшись на неразрешимую задачу, надо расширить царство чисел. На этот раз нам трудно делить: нельзя найти целого числа ни положительного, ни отрицательного, которое появилось бы в результате деления 3 на 5. Так назовем это и другие подобные ему числа рациональными дробями и предположим, что дроби подчиняются тем же правилам, что и целые числа. Тогда мы сможем оперировать дробями так же хорошо, как и целыми числами.

Еще один пример на степень: что такое $a^{3/5}$? Мы знаем только, что $(3/5)\ 5 = 3$, ибо это определение числа $3/5$, и еще, что $(a^{3/5})^5 = a^{(3/5)5}$, ибо это одно из правил. Вспомнив определение корня, мы получим $a^{(3/5)} = \sqrt[5]{a^3}$. Определяя таким образом дроби, мы не вводим никакого произвола. Сами правила следят за тем, чтобы подстановка дробей вместо написанных нами символов не была бессмысленной процедурой. Замечательно, что эти правила справляются с дробями так же хорошо, как и с целыми числами (положительными и отрицательными)!

Пойдем дальше по пути обобщения. Существуют ли еще уравнения, которых мы не научились решать? Конечно. Например, нам не под силу уравнение $b = 2^{1/2} = \sqrt{2}$. Невозможно найти *рациональную дробь*, квадрат которой равен 2. В наше время это выяснить довольно просто. Мы знаем десятичную систему и не пугаемся бесконечной десятичной дроби, которую можно использовать для приближения корня из двух. Хотя идея такого приближения появилась еще у древних греков, однако усваивалась она с большим трудом. Чтобы точно сформулировать суть такого приближения, надо постичь такие высокие материи, как непрерывность и соотношения порядка, а это очень трудный шаг. Это сделал Дедекинд очень точно и очень формально. Однако, если не заботиться о математической строгости, легко понять, что числа типа $\sqrt{2}$ можно представить в виде целой последовательности десятичных дробей (потому что если остановиться на какой-нибудь десятичной дроби, то получится рациональное число), которая все ближе и ближе подходит к желанному результату. Этих знаний нам вполне достаточно; они позволят свободно обращаться с иррациональными числами и вычислять числа типа $\sqrt{2}$ с нужной точностью.

§ 4. *Приближенное вычисление иррациональных чисел*

Теперь такой вопрос: как возвести число в иррациональную степень? Например, нам хочется узнать, что такое $10^{\sqrt{2}}$. Ответ в принципе очень прост. Возьмем вместо $\sqrt{2}$ его приближение в виде конечной десятичной дроби — это рациональное число. Возводить в рациональную степень мы умеем; дело сводится к возведению в целую степень и извлечению корня. Мы получим *приближенное значение* числа $10^{\sqrt{2}}$. Можно взять десятичную дробь подлиннее (это снова рациональное число). Тогда придется извлечь корень большей степени; ведь знаменатель рациональной дроби увеличится, но зато мы получим более точное приближение. Конечно, если взять приближенное значение $\sqrt{2}$ в виде очень длинной дроби, то возведение в степень будет делом очень трудным. Как справиться с этой задачей?

Вычисление квадратных корней, кубичных корней и других корней невысокой степени — вполне доступный нам арифметический процесс; вычисляя, мы последовательно, один за другим, пишем знаки десятичной дроби. Но для того, чтобы возвести в иррациональную степень или взять логарифм (решить обратную задачу), нужен такой труд, что применить прежнюю процедуру уже не просто. На помощь приходят таблицы. Их называют таблицами логарифмов или таблицами степеней, смотря по тому, для чего они предназначены. Они экономят время: чтобы возвести число в иррациональную степень, мы не вычисляем, а только перелистываем страницы.

Хотя вычисление собранных в таблицы значений — процедура чисто техническая, а все же дело это интересное и имеет большую историю. Поэтому посмотрим, как это делается. Мы вычислим не только $x = 10^{\sqrt{2}}$, но решим и другую задачу: $10^x = 2$, или $x = \log_{10} 2$. При решении этих задач мы не откроем новых чисел; это просто вычислительные задачи. Решением будут иррациональные числа, бесконечные десятичные дроби, а их как-то неудобно объявлять новым видом чисел.

Подумаем, как решить наши уравнения. Общая идея очень проста. Если вычислить 10^1 и $10^{4/10}$, и $10^{1/100}$, и $10^{4/1000}$, и т. д., а затем перемножить результаты, то мы получим $10^{1,414\ldots}$, или $10^{\sqrt{2}}$. Поступая так, мы решим любую задачу такого рода. Однако вместо $10^{1/10}$ и т. д. мы будем вычислять $10^{1/2}$, и $10^{1/4}$ и т. д. Прежде чем начинать вычисления, объясним еще, почему мы обращаемся к числу 10 чаще, чем к другим числам. Мы знаем, что значение таблиц логарифмов выходит далеко за рамки математической задачи вычисления корней, потому что

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c. \qquad (22.3)$$

Это хорошо известно всем, кто пользовался таблицей логарифмов, чтобы перемножить числа. По какому же основанию b брать логарифмы? Это безразлично; ведь в основу таких вычислений положен только принцип, общее свойство логарифмической функции. Вычислив логарифмы один раз по какому-нибудь произвольному основанию, можно перейти к логарифмам по другому основанию при помощи умножения. Если умножить уравнение (22.3) на 61, то оно останется верным, поэтому если перемножить все числа в таблице логарифмов по основанию b на 61, то можно будет пользоваться и такой таблицей. Предположим, что нам известны логарифмы всех чисел по основанию b. Иначе говоря, можно решить уравнение $b^a = c$ для любого c; для этого существует таблица. Задача состоит в том, как найти логарифм этого же числа c по другому основанию, например x. Нам нужно решить уравнение $x^{a'} = c$. Это легко сделать, потому что x всегда можно представить так: $x = b^t$. Найти t, зная x и b, просто: $t = \log_b x$. Подставим теперь $x = b^t$ в уравнение $x^{a'} = c$; оно перейдет в такое уравнение: $(b^t)^{a'} = b^{ta'} = c$. Иными словами, произведение ta' есть логарифм c по основанию b. Значит, $a' = a/t$. Таким образом, логарифмы по основанию x равны произведениям логарифмов по основанию b на постоянное число $1/t$. Следовательно, все таблицы логарифмов эквивалентны с точностью до умножения на число $1/\log_b x$. Это позволяет нам выбрать для составления таблиц любое основание, но мы решили, что удобнее всего взять за основание число 10. (Может возникнуть вопрос: не существует ли все-таки какого-нибудь естественного основания, при котором все выглядит как-то проще? Мы попытаемся ответить на этот вопрос позднее. Пока все логарифмы будут вычисляться по основанию 10.)

Теперь посмотрим, как составляют таблицу логарифмов. Работа начинается с последовательных извлечений квадратного корня из 10. Результат можно увидеть в табл. 22.1. Показатели степеней записаны в ее первом столбце, а числа 10^s — в третьем. Ясно, что $10^1 = 10$. Возвести 10 в половинную степень легко — это квадратный корень из 10, а как извлекать квадратный корень из любого числа, знает каждый *. Итак, мы нашли первый квадратный корень; он равен 3,16228. Что это дает? Кое-что дает. Мы уже можем сказать, чему равно $10^{0,5}$, и знаем по крайней мере *один* логарифм.

Таблица 22.1 ● ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ 10

Показатель степени s	$1024\ s$	10^s	$(10^s - 1)/s$
1	1024	10,00000	9,00
1/2	512	3,16228	4,32
1/4	256	1,77828	3,113
1/8	128	1,33352	2,668
1/16	64	1,15478	2,476
1/32	32	1,074607	2,3874
1/64	16	1,035633	2,3445
1/128	8	1,018152	$2{,}3234^{211}$
1/256	4	1,0090350	$2{,}3130^{104}$
1/512	2	1,0045073	$2{,}3077^{53}$
1/1024	1	1,0022511	$2{,}3051^{26}_{26}$
			↓
$\Delta/1024$	Δ	$1 + 0{,}0022486\Delta$	←2,3025
$(\Delta \to 0)$		$\left(= 1 + 2{,}3025 \dfrac{\Delta}{1024}\right)$	

Логарифм числа 3,16228 очень близок к 0,50000. Однако нужно еще приложить небольшие усилия: нам нужна более подробная таблица. Извлечем еще один квадратный корень и найдем $10^{1/4}$, что равно 1,77828. Теперь мы знаем еще один логарифм: 1,250 — это логарифм числа 17,78; кроме того, мы можем сказать, чему равно $10^{0,75}$: ведь это $10^{(0,5+0,25)}$, т. е. произведение второго и третьего чисел из третьего столбца табл. 22.1. Если сделать первый столбец таблицы достаточно длинным, то таблица будет содержать почти все числа; перемножая числа из третьего столбца, мы получаем 10 почти в любой степени. Такова основная идея таблиц. В нашей таблице содержится десять последовательных корней из 10; основной труд по составлению таблицы вложен в вычисления этих корней.

---

* Квадратный корень лучше всего извлекать не тем способом, которому обычно учат в школе, а немного иначе. Чтобы извлечь квадратный корень из числа N, выберем достаточно близкое к ответу число a, вычислим N/a и среднее $a' = \frac{1}{2}[a + (N/a)]$; это среднее будет новым числом a, новым приближением корня из N. Этот процесс очень быстро приводит к цели: число значащих цифр удваивается после каждого шага.

Почему же мы не продолжаем повышать точность таблиц дальше? Потому что мы кое-что уже подметили. Возведя 10 в очень малую степень, мы получаем единицу с малой добавкой. Это, конечно, происходит потому, что если возвести, например, $10^{1/1000}$ в 1000-ю степень, то мы снова получим 10; ясно, что $10^{1/1000}$ не может быть большим числом: оно очень близко к единице. Более того, малые добавки к единице ведут себя так, будто их каждый раз делят на 2; поглядите-ка на таблицу повнимательнее: 1815 переходит в 903, потом в 450, 225 и т. д. Таким бразом, если вычислить еще один, одиннадцатый, квадратный корень, он с большой точностью будет равен 1,00112, и этот результат мы *угадали* еще до вычисления. Можно ли сказать, какова будет добавка к единице, если возвести 10 в степень $\Delta/1024$, когда Δ стремится к нулю? Можно. Добавка будет приблизительно равна $0,0022511\Delta$. Конечно, не в точности $0,0022511\Delta$; чтобы вычислить эту добавку поточнее, делают такой трюк: вычитают из 10^s единицу и делят разность на показатель степени s. Отклонения полученного таким образом частного от его точного значения одинаковы для любой степени s. Видно, что эти отношения (табл. 22.1) примерно равны. Сначала они сильно различаются, но потом все ближе подходят друг к другу, явно стремясь к какому-то числу. Что это за число? Проследим, как меняются числа четвертого столбца, если опускаться вниз по столбцу. Сначала разность двух соседних чисел равна 0,0211, потом 0,0104, потом 0,0053 и, наконец, 0,0026. Разность каждый раз убывает наполовину. Сделав еще один шаг, мы доведем ее до 0,0013, потом до 0,0007, 0,0003, 0,0002 и, наконец, примерно до 0,0001; надо последовательно делить 26 на 2. Таким образом, мы спустимся еще на 26 единиц и найдем для предела 2,3025. (Позднее мы увидим, что правильнее было бы взять 2,3026, но давайте возьмем то, что у нас получилось.) Пользуясь этой таблицей, можно возвести 10 в любую степень, если ее показатель каким угодно способом выражается через 1/1024.

Теперь легко составить таблицу логарифмов, потому что все необходимое для этого мы уже припасли. Процедура этого изображена в табл. 22.2, а нужные числа берутся из второго и третьего столбцов табл. 22.1.

Предположим, что мы хотим знать логарифм 2. Это значит, что мы хотим знать, в какую степень надо возвести 10, чтобы получить 2. Может быть, возвести 10 в степень $1/2$? Нет, получится слишком большое число. Глядя на табл. 22.1, можно сказать, что нужное нам число лежит между $1/4$ и $1/2$. Поиск его начнем с $1/4$; разделим 2 на 1,778..., получится 1,124...; при делении мы отняли от логарифма двух 0,250000, и теперь нас интересует логарифм 1,124.... Отыскав его, мы прибавим к результату $^1/_4 = 256/1024$. Найдем в табл.22.1 число, которое бы при движении по третьему столбцу сверху вниз стояло сразу за 1,124... . Это 1,074607. Отношение 1,124... к 1,074607 равно 1,046598. В конце концов мы представим 2 в виде произведения чисел из табл. 22.1:

$$2 = (1{,}77828) \cdot (1{,}074607) \cdot (1{,}036633) \cdot (1{,}0090350) \cdot (1{,}000573).$$

Для последнего множителя (1,000573) в нашей таблице места не нашлось; чтобы найти его логарифм, надо представить это число в виде $10^{\Delta/1024} \approx 1 + 2{,}3025\Delta/1024$. Отсюда легко найти, что $\Delta = 0{,}254$. Таким образом, наше произведение можно представить в виде десятки, возведенной в степень $1/1024\ (256 + 32 + 16 + 4 + 0{,}254)$. Складывая и деля, мы получаем нужный логарифм: $\log_{10} 2 = 0{,}30103$; этот результат верен до пятого десятичного знака!

Таблица 22.2 ● ВЫЧИСЛЕНИЯ $\log_{10} 2$

$$2 : 1{,}77828 = 1{,}124682$$

$$1{,}124682 : 1{,}074607 = 1{,}046598 \text{ и т. д.}$$

$$2 = (1{,}77828)\ (1{,}074607)\ (1{,}036633)\ (1{,}0090350)\ (1{,}000573) =$$

$$= 10^{\left[\frac{1}{1024}(256+32+16+4+0{,}254)\right]} = 10^{\left[\frac{308{,}254}{1024}\right]} =$$

$$= 10^{0{,}30103}\ \left(\frac{0{,}000573 \cdot 1024}{2{,}3025} = \frac{573}{2249} = 0{,}254\right)$$

Следовательно, $\log_{10} 2 = 0{,}30103$

Мы вычисляли логарифмы точно так же, как это делал мистер Бриггс из Галифакса в 1620 г. Закончив работу, он сказал: «Я вычислил последовательно 54 квадратных корня из 10». На самом деле он вычислил только 27 первых корней, а потом сделал фокус с Δ. Вычислить 27 раз квадратный корень из 10, вообще-то говоря, немного сложнее, чем 10 раз, как это сделали мы. Однако мистер Бриггс сделал гораздо большее: он вычислял корни с точностью до шестнадцатого десятичного знака, а когда опубликовал свои таблицы, то оставил в них лишь 14 десятичных знаков, чтобы округлить ошибки. Составить таблицы логарифмов с точностью до четырнадцатого десятичного знака таким методом — дело очень трудное. Зато целых 300 лет спустя составители таблиц логарифмов занимались тем, что уменьшали таблицы мистера Бриггса, выкидывая из них каждый раз разное число десятичных знаков. Только в последнее время при помощи электронных вычислительных машин оказалось возможным составить таблицы логарифмов независимо от мистера Бриггса. При этом использовался более эффективный метод вычислений, основанный на разложении логарифма в ряд.

Составляя таблицы, мы натолкнулись на интересный факт: если показатель степени ε очень мал, то очень легко вычислить 10^{ε}; это просто $1 + 2{,}3025\varepsilon$. Это значит, что $10^{n/2{,}3025} = 1 + n$ для очень малых n. Кроме того, мы говорили с самого начала, что вычисляем логарифмы по основанию 10 только потому, что у нас на руках 10 пальцев и по десяткам нам считать удобнее. Логарифмы по любому другому основанию получаются из логарифмов по основанию 10 простым умножением. Теперь настало время выяснить, не существует ли математически выделенного основания логарифмов, выделенного по причинам, не имеющим ничего общего с числом пальцев на руке. В этой естественной *шкале* формулы с логарифмами должны выглядеть проще. Составим новую таблицу логарифмов, умножив все логарифмы по основанию 10 на 2,3025... . Это соответствует переходу к новому основанию — *натуральному*, или основанию e. Заметим, что $\log_e(1 + n) \approx n$ или $e^n \approx 1 + n$, когда $n \to 0$.

Легко найти само число e; оно равно $10^{1/2{,}3025}$ или $10^{0{,}4342294\ldots}$. Это 10 в иррациональной степени. Для вычисления e можно воспользоваться таблицей корней из 10. Представим 0,434294... сначала в виде 444,73/1024, а числитель этой дроби в виде суммы $444{,}73 = 256 + 128 + 32 + 16 + 8 + 4 + 0{,}73$. Число e поэтому равно произведению чисел

$$(1{,}77828) \cdot (1{,}33352) \cdot (1{,}074607) \cdot (1{,}036633) \cdot (1{,}018152) \times$$
$$\times (1{,}009035) \cdot (1{,}001643) = 2{,}7184.$$

(Числа 0,73 нет в нашей таблице, но соответствующий ему результат можно представить в виде $1 + 2{,}3025\Delta/1024$ и вычислить при $\Delta = 0{,}73$.) Перемножив все 7 сомножителей, мы получим 2,7184 (на самом деле должно быть 2,7183, но и этот результат хорош). Используя такие таблицы, можно возводить число в иррациональную степень и вычислять логарифмы иррациональных чисел. Вот как надо обращаться с иррациональностями!

§ 5. *Комплексные числа*

Хотя мы хорошо поработали, все-таки *есть еще* уравнения, которые нам не под силу! Например, чему равен квадратный корень из -1? Предположим, что это x, тогда $x^2 = -1$. Нет ни рационального, ни иррационального числа, квадрат которого был бы равен -1. Придется снова пополнить запас чисел. Предположим, что уравнение $x^2 = -1$ все же имеет решение, и обозначим это решение буквой i; число i имеет пока только одно свойство: будучи возведенным в квадрат, оно дает -1. Вот пока и все, что можно о нем сказать.

Однако уравнение $x^2 = -1$ имеет два корня. Буквой i мы обозначили один из корней, но кто-нибудь может сказать: «А я предпочитаю иметь дело с корнем $-i$; моя буква i просто минус ваша i». Возразить ему нечего, потому что число i определяется соотношением $i^2 = -1$; это соотношение останется верным, если изменить знак i. Значит, любое уравнение, содержащее какое-то количество i, остается верным, если сменить знаки у всех i. Такая операция называется *комплексным сопряжением.* Далее, ничто не мешает нам получать новые числа вот так: сложить i несколько раз, умножить i на какое-нибудь наше старое число, прибавить результат умножения к старому числу и т. д. Все это можно сделать, не нарушая ранее установленных правил. Таким образом мы приходим к числам, которые можно записать в виде $p + iq$, где p и q — числа, с которыми мы имели дело ранее, их называют *действительными* числами. Число i называют *мнимой единицей,* а произведение действительного числа на мнимую единицу — *чисто мнимым* числом. Самое общее число a имеет вид $a = p + iq$, и его называют *комплексным числом.* Обращаться с комплексными числами несложно; например, нам надо вычислить произведение $(r + is)(p + iq)$. Вспомнив о правилах, мы получим

$$\begin{aligned}(r + is)(p + iq) &= rp + r(iq) + (is)p + (is)(iq) = \\ &= rp + i(rq) + i(sp) + (ii)(sq) = \\ &= (rp - sq) + i(rq + sp),\end{aligned} \tag{22.4}$$

потому что $ii = i^2 = -1$. Теперь мы получили общее выражение для чисел, удовлетворяющих правилам (22.1).

Умудренные опытом, полученным в предыдущих разделах, вы скажете: «Рано говорить об общем выражении, надо еще определить, например, возведение в мнимую степень, а потом можно придумать много алгебраических уравнений, ну хотя бы $x^6 + 3x^2 = -2$, для решения которых потребуются новые числа». В том-то и дело, что, кроме действительных чисел, *достаточно изобрести только одно число* — квадратный корень из -1, после этого *можно решить любое алгебраическое уравнение*! Эту удивительную вещь должны доказывать уже математики. Доказательство очень красиво, очень интересно, но далеко не самоочевидно. Действительно, казалось бы, естественнее всего ожидать, что по мере продвижения в дебри алгебраических уравнений придется изобретать снова, снова и снова. Но самое чудесное, что больше ничего не надо изобретать. Это последнее изобретение. Изобретя комплексные числа, мы установим правила, по которым с этими числами надо обращаться, и больше ничего изобретать не будем. Мы научимся возводить комплексные числа в комплексную степень и выражать решение любого алгебраического уравнения в виде конечной комбинации уже известных нам символов. К новым числам это не приведет. Например, квадратный корень из i, или i^i — опять те же комплексные числа. Сейчас мы рассмотрим это подробнее.

Мы уже знаем, как надо складывать и умножать комплексные числа; сумма двух комплексных чисел $(p+iq)+(r+is)$ — это число $(p+r)+i(q+s)$. Но вот *возведение комплексных чисел в комплексную степень* — уже задача потруднее. Однако она оказывается не труднее задачи о возведении в комплексную степень действительных чисел. Посмотрим поэтому, как возводится в комплексную степень число 10, не в иррациональную, а комплексную; нам надо знать число $10^{(r+is)}$. Правила (22.1) и (22.2) несколько упрощают задачу:

$$10^{(r+is)}=10^r 10^{is}. \qquad (22.5)$$

Мы знаем, как вычислить 10^r, перемножить числа мы тоже умеем, не умеем только вычислить 10^{is}. Предположим, что это комплексное число $x+iy$. Задача: дано s, найти x и y. Если

$$10^{is}=x+iy,$$

то должно быть верным и комплексно сопряженное уравнение

$$10^{-is}=x-iy.$$

(Некоторые вещи можно получить и без вычислений, надо просто использовать правила.) Перемножая эти равенства, можно получить еще один интересный результат:

$$10^{is}10^{-is}=10^0=1=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2. \qquad (22.6)$$

Если мы каким-то образом найдем x, то определить y будет очень легко.

Однако *как* все-таки возвести 10 в мнимую степень? Где искать помощи? Правила нам уже не помогут, но утешает вот что: если удастся возвести 10 в какую-нибудь одну мнимую степень, то ничего не стоит возвести 10 уже в любую степень. Если известно 10^{is} для одного значения s, то вычисление в случае вдвое большего s сводится к возведению в квадрат и т. д. Но как же возвести 10 в хотя бы одну мнимую степень? Для этого сделаем дополнительное предположение; его, конечно, нельзя ставить в один ряд с правилами (22.1) и (22.2), но оно приведет к разумным результатам и позволит нам шагнуть далеко вперед. Предположим, что «закон» $10^\varepsilon = 1+2{,}3025\varepsilon$ (когда ε очень мало) верен не только для действительных, *но и для комплексных* ε. Если это так, то

$10^{is} = 1 + 2{,}3025 \cdot is$ при $s \to 0$. Предполагая, что s очень мало (скажем, равно $^1/_{1024}$), мы получаем хорошее приближение числа 10^{is}.

Теперь можно составить таблицу, которая позволит вычислить *все* мнимые степени 10, т. е. найти числа x и y. Надо поступить так. Начнем с показателя $^1/_{1024}$. Возводя 10 в эту степень, мы получим примерно $1 + 2{,}3025\ i/1024$. Тогда

$$10^{i/1024} = 1{,}00000 + 0{,}0022486\, i. \qquad (22.7)$$

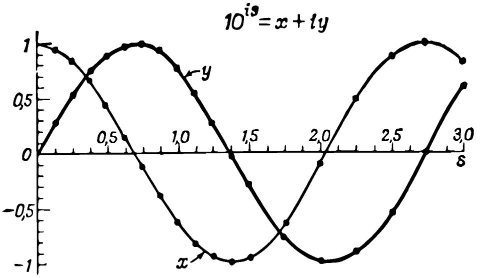
Умножая это число само на себя много раз, мы дойдем до степеней более высоких. Мы просто-напросто перевернули процедуру составления таблицы логарифмов и, вычислив квадрат, 4-ю степень, 8-ю степень и т. д. числа (22.7), составили табл. 22.3. Интересно, что сначала все числа x были положительными, а потом вдруг появилось отрицательное число. Это значит, что существует число s, для которого действительная часть 10^{is} равна *нулю*. Значение iy в этом случае равно i, т. е. $10^{is} = i$, или $is = \log_{10} i$. В качестве примера (см. табл. 22.3) вычислим с ее помощью $\log_{10} i$. Процедура поиска $\log_{10} i$ в точности повторяет то, что мы делали, вычисляя $\log_{10} 2$.

Таблица 22.3 ● ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТОВ $10^{i/1024} = 1 + 0{,}0022486\ i$

Степень is	$1024s$	10^{is}
$i/1024$	1	$1{,}00000+0{,}00225$ *i
$i/512$	2	$1{,}00000+0{,}00450\ i$
$i/256$	4	$0{,}99996+0{,}00900\ i$
$i/128$	8	$0{,}99984+0{,}01800\ i$
$i/64$	16	$0{,}99936+0{,}03599\ i$
$i/32$	32	$0{,}99742+0{,}07193\ i$
$i/16$	64	$0{,}98967+0{,}14349\ i$
$i/8$	128	$0{,}95885+0{,}28402\ i$
$i/4$	256	$0{,}83872+0{,}54467\ i$
$i/2$	512	$0{,}40672+0{,}91356\ i$
$i/1$	1024	$-0{,}66928+0{,}74332\ i$

* Должно быть $0{,}0022486\ i$.

Произведение каких чисел из табл. 22.3 равно чисто мнимому числу? После нескольких проб и ошибок мы найдем, что лучше всего умножить «512» на «128». Их произведение равно $0{,}13056 + 0{,}99144\ i$. Приглядевшись к правилу умножения комплексных чисел, можно понять, что надежду на успех сулит умножение этого числа на число, мнимая часть которого приблизительно равна действительной части нашего



Фиг. 22.1. Вещественная и мнимая части функции 10^{is}.

числа. Мнимая часть «64» равна 0,14349, что довольно близко к 0,13056. Произведение этих чисел равно — 0,01350+0,99993i. Мы перескочили через нуль, поэтому результат нужно *разделить* на 0,99996+0,00900 i. Как это сделать? Изменим знак i и умножим на 0,99996—0,00900 i (ведь $x^2+y^2=1$). В конце концов обнаружим, что если возвести 10 в степень $i(^1/_{1024})$ (512+128+64—4—2+0,20) или 698,20i/1024, то получится мнимая единица. Таким образом, $\log_{10} i = 0{,}68226\, i$.

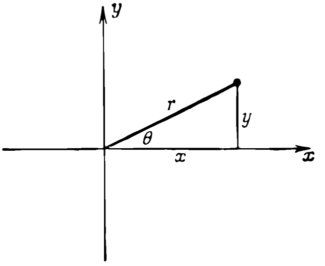
§ 6. Мнимые экспоненты

Чтобы лучше понять, что такое число в мнимой степени, вычислим *последовательные степени* десяти. Мы не будем каждый раз удваивать степень, чтобы не повторять табл. 22.3, и посмотрим, что́ случится с действительной частью после того, как она станет отрицательной. Результат можно увидеть в табл. 22.4.

В этой таблице собраны последовательные произведения числа $10^{i/8}$. Видно, что x уменьшается, проходит через нуль, достигает почти — 1 (в промежутке между $p=10$ и $p=11$ величина точно равна —1) и возвращается назад. Точно так же величина y ходит взад-вперед.

Точки на фиг. 22.1 соответствуют числам, приведенным в табл. 22.4, а соединяющие их линии помогают следить за изменением x и y. Видно, что числа x и y осциллируют; 10^{is} *повторяет себя.* Легко объяснить, почему так происходит. Ведь i в четвертой степени — это i^2 *в квадрате.* Это число равно единице; следовательно, если $10^{0,68i}$ равно i, то, возведя это число в четвертую степень, т. е. вычислив $10^{2,72i}$, мы получим +1. Если нужно получить, например, $10^{3,00i}$, то нужно умножить $10^{2,72i}$ на $10^{0,28i}$. Иначе говоря, функция 10^{is} повторяется, имеет период. Мы уже знаем, как выглядят такие кривые! Они похожи на график синуса или косинуса, и мы назовем их на время алгебраическим синусом и алгебраическим косинусом. Теперь перейдем от основания 10 к натуральному основанию. Это только изменит масштаб горизон-

Фиг. 22.2. Комплексное число как точка на плоскости.



тальной оси; мы обозначим 2,3025s через t и напишем $10^{is}=e^{it}$, где t — действительное число. Известно, что $e^{it}=x+iy$, и мы запишем это число в виде

$$e^{it}=\underline{\cos}\, t+i\, \underline{\sin}\, t. \tag{22.8}$$

Каковы свойства алгебраического косинуса $\underline{\cos}\, t$ и алгебраического синуса $\underline{\sin}\, t$? Прежде всего $x^2+y^2=1$; это мы уже доказали, и это верно для любого основания, будь то 10 или e. Следовательно, $\underline{\cos}^2\, t+\underline{\sin}^2\, t=1$. Мы знаем, что $e^{it}=1+it$ для малых t; значит, если t — близкое к нулю число, то $\underline{\cos}\, t$ близок к единице, а $\underline{\sin}\, t$ близок к t. Продолжая дальше, мы придем к выводу, что *все свойства этих замечательных функций*, получающихся в результате возведения в мнимую степень, *в точности совпадают со свойствами тригонометрического синуса и тригонометрического косинуса.*

Таблица 22.4 ● ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧИСЛА $10^{i/8}$

p	$10^{ip/8}$	p	$10^{ip/8}$
0	1,00000+0,00000 i	10	−0,96596+0,25880 i
1	0,95882+0,28402 i	11	−0,99969−0,02620 i
2	0,83867+0,54465 i	12	−0,95104−0,30905 i
3	0,64944+0,76042 i	14	−0,62928−0,77717 i
4	0,40672+0,91356 i	16	−0,10447−0,99453 i
5	0,13050+0,99146 i	18	+0,45454−0,89098 i
6	−0,15647+0,98770 i	20	+0,86648−0,49967 i
7	−0,43055+0,90260 i	22	+0,99884+0,05287 i
8	−0,66917+0,74315 i	24	+0,80890+0,58836 i
9	−0,85268+0,52249 i		

* Должно быть 0,002246 i.

А как обстоит дело с периодом? Давайте найдем его. В какую степень надо возвести e, чтобы получить i? Иными словами, чему равен логарифм i по основанию e? Мы вычислили уже логарифм i по основанию 10; он равен $0{,}68226\,i$; чтобы перейти к основанию e, мы умножим это число на 2,3025 и получим $1{,}5709\,i$. Новое число (без i) можно назвать «алгебраическим $\pi/2$». Но поглядите-ка, оно отличается от настоящего $\pi/2$ всего лишь последним десятичным знаком, и это просто-напросто следствие наших приближений при вычислениях! Таким образом, чисто алгебраически возникли две новые функции — синус и косинус; они принадлежат алгебре и только алгебре. Мы пошли по их следам и обнаружили, что это те же самые функции, которые так естественно возникают в геометрии. Мы отыскали мост между алгеброй и геометрией.

Подводя итог нашим поискам, мы напишем одну из самых замечательных формул математики

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{22.9}$$

Вот она, наша жемчужина.

Связь между алгеброй и геометрией можно использовать для изображения комплексных чисел на плоскости; точка на плоскости определяется координатами x и y (фиг. 22.2). Представим каждое комплексное число в виде $x+iy$. Если расстояние точки от начала координат обозначить через r, а угол радиуса-вектора точки с осью x — через θ, то выражение $x+iy$ можно представить в виде $re^{i\theta}$. Это следует из геометрических соотношений между x, y, r и θ. Таким образом, мы объединили алгебру и геометрию.

Начиная эту главу, мы знали только целые числа и умели их считать. Зато у нас была небольшая идея о могуществе шага в сторону и обобщения. Используя алгебраические «законы», или свойства чисел, сведенные в уравнения (22.1), и определения обратных операций (22.2), мы смогли создать не только новые числа, но и такие полезные вещи, как таблицы логарифмов, степеней и тригонометрические функции (они возникли при возведении действительных чисел в мнимые степени), и все это удалось сделать, извлекая много раз квадратный корень из десяти!

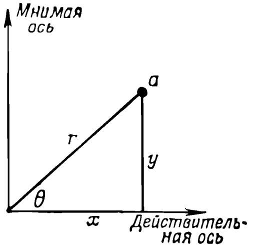
Глава **23**

РЕЗОНАНС

§ 1. Комплексные числа и гармоническое движение

Мы снова будем говорить в этой главе о гармоническом осцилляторе, особенно об осцилляторе, на который действует внешняя сила. Для анализа этих задач нужно развить новую технику. В предыдущей главе мы ввели понятие комплексного числа, которое состоит из действительной и мнимой частей и которое можно изобразить на графике. Действительная часть числа будет изображаться абсциссой, а мнимая — ординатой. Комплексное число a можно записать в виде $a=a_r+ia_i$; при такой записи индекс r отмечает действительную часть a, а индекс i — мнимую. Взглянув на фиг. 23.1, легко сообразить, что комплексное число $a = x + iy$ можно записать и так: $x + iy = r \exp(i\theta)$, где $r^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = aa^*$ (a^* — это комплексное сопряженное к a число; оно получается из a изменением знака i). Итак, комплексное число можно представить двумя способами: явно выделить его действительную и мнимую части или задать его модулем r и фазовым углом θ. Если заданы r и θ, то x и y равны $r\cos\theta$ и $r\sin\theta$, и, наоборот, исходя из числа $x + iy$, можно найти $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и угол θ; $\operatorname{tg}\theta$ равен y/x (т. е. отношению мнимой и действительной частей).

Чтобы применить комплексные числа к решению физических задач, проделаем такой трюк. Когда мы изучали осциллятор, то имели дело с внешней силой, пропорциональной $\cos\omega t$. Такую силу $F = F_0\cos\omega t$ можно рассматривать как действительную часть комплексного числа $F = F_0\exp(i\omega t)$, потому что $\exp(i\omega t) = \cos\omega t + i\sin\omega t$. Такой переход



Фиг. 23.1. Комплексное число, изображенное точкой на «комплексной плоскости».

удобен: ведь иметь дело с экспонентой легче, чем с косинусом. Итак, трюк состоит в том, что все относящиеся к осциллятору функции рассматриваются как действительные части каких-то комплексных функций. Найденное нами комплексное число F, разумеется, не настоящая сила, ибо физика не знает комплексных сил: все силы имеют только действительную часть, а мнимой части взяться просто неоткуда. Тем не менее мы будем говорить «сила» $F_0 \exp(i\omega t)$, хотя надо помнить, что речь идет лишь о *действительной ее части.*

Рассмотрим еще один пример. Как представить косинусоидальную волну, фаза которой сдвинулась на Δ? Конечно, как действительную часть $F_0 \exp[i(\omega t - \Delta)]$; экспоненту в этом случае можно записать в виде $\exp[i(\omega t - \Delta)] = \exp(i\omega t)\exp(-i\Delta)$. Алгебра экспонент гораздо легче алгебры синусов и косинусов; вот почему удобно использовать комплексные числа. Часто мы будем писать так:

$$F = F_0 e^{-i\Delta} e^{i\omega t} = \hat{F} e^{i\omega t}. \tag{23.1}$$

Шляпка над буквой будет указывать, что мы имеем дело с комплексным числом, т. е.

$$\hat{F} = F_0 e^{-i\Delta}.$$

Однако пора начать решать уравнения, используя комплексные числа, тогда мы увидим, как надо применять комплексные числа в реальных обстоятельствах. Для начала попытаемся решить уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t, \tag{23.2}$$

где F — действующая на осциллятор сила, а x — его смещение. Хотя это и абсурдно, предположим, что x и F — комплексные числа. Тогда x состоит из действительной части и умноженной на i мнимой части; то же самое касается и F. Уравнение (23.2) в этом случае означает

$$\frac{d^2(x_r + ix_i)}{dt^2} + \frac{k(x_r + ix_i)}{m} = \frac{F_r + iF_i}{m}$$

или

$$\frac{d^2x_r}{dt^2}+\frac{kx_r}{m}+i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{kx_i}{m}\right)=\frac{F_r}{m}+\frac{iF_i}{m}.$$

Комплексные числа равны, когда равны их действительные и мнимые части; следовательно, *действительная часть x удовлетворяет уравнению, в правой части которого стоит действительная часть силы.* Оговорим с самого начала, что такое разделение действительных и мнимых частей возможно *не всегда*, а только в случае *линейных* уравнений, т. е. уравнений, содержащих x лишь в нулевой и первой степенях. Например, если бы уравнение содержало член λx^2, то, сделав подстановку x_r+ix_i, мы получили бы $\lambda\,(x_r+ix_i)^2$, и выделение действительной и мнимой частей привело бы нас к $\lambda\left(x_r^2-x_i^2\right)$ и $2i\lambda x_r x_i$. Итак, мы видим, что действительная часть уравнения содержит в этом случае член $-\lambda x_i^2$. Мы получили совсем не то уравнение, какое собирались решать.

Попытаемся применить наш метод к уже решенной задаче о вынужденных колебаниях осциллятора, т. е. об осцилляторе, на который действует внешняя сила. Как и раньше, мы хотим решить уравнение (23.2), но давайте начнем с уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kx}{m}=\frac{1}{m}\,\hat{F}e^{i\omega t}, \tag{23.3}$$

где $\hat{F}e^{i\omega t}$ — комплексное число. Конечно, x — тоже комплексное число, но запомним правило: чтобы найти интересующие нас величины, надо взять действительную часть x. Найдем решение (23.3), описывающее вынужденные колебания. О других решениях поговорим потом. Это решение имеет ту же частоту, что и внешняя (приложенная) сила. Колебание, кроме того, характеризуется амплитудой и фазой, поэтому если представить смещение числом $\hat{x}$, то модуль его скажет нам о размахе колебаний, а фаза комплексного числа — о временно́й задержке колебания. Воспользуемся теперь замечательным свойством экспоненты: $(d/dt)\,[\hat{x}\exp(i\omega t)]=$ $=i\omega\hat{x}\exp(i\omega t)$. Дифференцируя экспоненциальную функцию, мы опускаем вниз экспоненту, делая ее простым множителем. Дифференцируя еще раз, мы снова приписываем такой же множитель, поэтому очень просто написать уравнение для $\hat{x}$: каждое дифференцирование по времени надо заменить умножением на $i\omega$. (Дифференцирование становится теперь столь же простым, как и умножение! Идея использовать экспоненциальные функции в линейных дифференциальных уравнениях почти столь же грандиозна, как изобретение логарифмов, которые заменили умножение сложением. Здесь дифференцирование заменяется умножением.) Таким образом, мы получаем уравнение

$$(i\omega)^2 \hat{x} + \frac{k\hat{x}}{m} = \frac{\hat{F}}{m}. \tag{23.4}$$

[Мы опустили общий множитель $e^{i\omega t}$.] Смотрите, как все просто! Дифференциальное уравнение немедленно сводится к чисто алгебраическому; сразу же можно написать его решение

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}/m}{(k/m) - \omega^2},$$

поскольку $(i\omega)^2 = -\omega^2$. Решение можно несколько упростить, подставив $k/m = \omega_0^2$, тогда

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \tag{23.5}$$

Это, конечно, то же самое решение, которое уже было нами получено ранее. Поскольку $m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$ — действительное число, то фазовые углы $\hat{F}$ и $\hat{x}$ совпадают (или отличаются на 180°, если $\omega^2 > \omega_0^2$). Об этом тоже уже говорилось. Модуль $\hat{x}$, который определяет размах колебаний, связан с модулем $\hat{F}$ множителем $1/m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$; этот множитель становится очень большим, если ω приближается к ω_0. Таким образом, можно достичь очень сильного отклика, если приложить к осциллографу нужную частоту ω (если с нужной частотой толкать подвешенный на веревочке маятник, то он поднимается очень высоко).

§ 2. *Вынужденные колебания с торможением*

Итак, мы можем решить задачу о колебательном движении, пользуясь изящной математикой. Однако изящество немногого стоит, когда задача и так решается просто; математику надо использовать тогда, когда решаются более сложные задачи. Перейдем поэтому к одной из таких задач, которая, кроме того, ближе к действительности, чем предыдущая. Из уравнения (23.5) следует, что, если ω в точности равна ω_0, амплитуда колебания становится бесконечной. Этого, конечно, не может быть, потому что многие вещи, например трение, ограничивают амплитуду, а мы их не учитывали. Изменим теперь (23.2) так, чтобы учесть трение.

Сделать это обычно довольно трудно, потому что силы трения очень сложны. Однако во многих случаях можно считать, что сила трения *пропорциональна скорости* движения объекта. Именно такое трение препятствует медленному движению тела в масле или другой вязкой жидкости. Когда предмет стоит на месте, на него не действуют никакие силы, но чем скорее он движется и чем быстрее масло должно обтекать этот предмет, тем больше сопротивление. Таким образом, мы предположим, что в (23.2), кроме уже написанных членов, существует еще один — сила сопротивления, пропорциональная скорости: $F_f = -c(dx/dt)$. Удобно записать c как произведение m на другую постоянную γ; это немного упростит уравнение. Мы уже проделывали такой фокус, когда заменяли k на $m\omega^2_0$, чтобы упростить вычисления. Итак, наше уравнение имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F, \tag{23.6}$$

или, если положить $c = m\gamma$ и $k = m\omega_0^2$ и поделить обе части на m,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}. \tag{23.6a}$$

Эта самая удобная форма уравнения. Если γ очень мало, то мало и трение, и, наоборот, большие значения γ соответствуют громадному трению. Как решать это новое линейное уравнение? Предположим, что внешняя сила равна $F_0\cos(\omega t + \Delta)$; можно было бы подставить это выражение в (23.6a) и попытаться решить полученное уравнение, но мы применим наш новый метод. Представим F как действительную часть $\hat{F}\exp(i\omega t)$, а x — как действительную часть $\hat{x}\exp(i\omega t)$ и подставим эти комплексные числа в (23.6a). Собственно говоря, и подставлять-то нечего; внимательно посмотрев на (23.6a), вы тут же скажете, что оно превратится в

$$e^{i\omega t}\left[(i\omega)^2\hat{x} + \gamma(i\omega)\hat{x} + \omega_0^2\hat{x}\right] = \frac{\hat{F}}{m}e^{i\omega t}. \tag{23.7}$$

[Если бы мы попытались решить (23.6a) старым прямолинейным способом, то оценили бы по достоинству магический «комплексный» метод.] Поделив обе части уравнения на $\exp(i\omega t)$, найдем отклик осциллятора $\hat{x}$ на силу $\hat{F}$:

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right)}. \tag{23.8}$$

Итак, отклик $\hat{x}$ равен силе $\hat{F}$, умноженной на некоторый множитель. Этот множитель не имеет ни названия, ни какой-то своей собственной буквы, и мы будем обозначать его буквой R:

$$R = \frac{1}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right)};$$

тогда

$$\hat{x} = \hat{F}R. \tag{23.9}$$

Этот множитель можно записать либо как $p+iq$, либо как $\rho\exp(i\theta)$. Запишем его в виде $\rho\exp(i\theta)$ и посмотрим, к чему это приведет. Внешняя сила—это действительная часть числа $F_0\exp(i\Delta)\exp(i\omega t)$, она равна $F_0\cos(\omega t+\Delta)$. Уравнение (23.9) говорит нам, что отклик $\hat{x}$ равен $\hat{F}R$; мы условились писать R в виде $R = \rho\exp(i\theta)$; следовательно,

$$\hat{x} = R\hat{F} = \rho e^{i\theta}F_0 e^{i\Delta} = \rho F_0 e^{i(\theta+\Delta)}.$$

Вспомним (об этом уже говорилось), что физическое значение x, равное действительной части комплексного числа $\hat{x}\exp(i\omega t)$, равно действительной части $\rho F_0\exp[i(\theta+\Delta)]\exp(i\omega t)$. Но ρ и F_0 — действительны, а действительная часть $\exp[i(\theta+\Delta+\omega t)]$ — это просто $\cos(\omega t+\Delta+\theta)$. Таким образом,

$$x = \rho F_0\cos(\omega t+\Delta+\theta). \tag{23.10}$$

Это значит, что амплитуда отклика равна амплитуде силы F, умноженной на коэффициент усиления ρ; мы нашли «размах» колебаний. Но это еще не все: видно, что x колеблется не в такт с силой; фаза силы равна Δ, а у x она сдвинута на дополнительную величину θ. Следовательно, ρ и θ — это величина и фазовый сдвиг отклика.

Найдем теперь значение ρ. Квадрат модуля любого комплексного числа равен произведению этого числа на комплексно сопряженное, т. е.

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2\left(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega\right)\left(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega\right)} =$$

$$= \frac{1}{m^2\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right]}. \tag{23.11}$$

Можно найти и фазовый угол θ

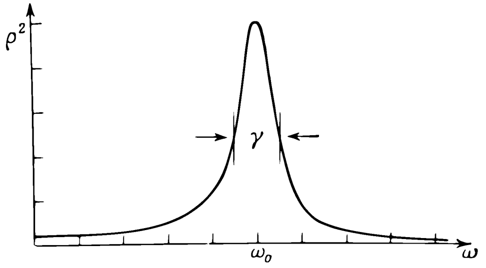
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta} = m\left(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega\right);$$

значит,

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{23.12}$$

Знак минус возник оттого, что $\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta$. Угол θ отрицателен при всех значениях ω, т. е. смещение x отстает по фазе от силы F.

На фиг. 23.2 показано, как изменяется ρ^2 при изменении частоты (ρ^2 для физика интереснее, чем ρ, потому что ρ^2 пропорционально квадрату амплитуды, а значит, и той *энергии*,



Фиг. 23.2. График зависимости ρ^2 *от* ω.

которую передает осциллятору внешняя сила). Очевидно, что если γ мало, то основной член в (23.11) — это $1/(\omega_0^2-\omega^2)^2$, и отклик стремится к бесконечности, если ω приближается к ω_0. Но эта «бесконечность» — не настоящая бесконечность, потому что даже если $\omega=\omega_0$, то все еще остается слагаемое $1/\gamma^2\omega^2$. Зависимость сдвига фазы от частоты изображена на фиг. 23.3.

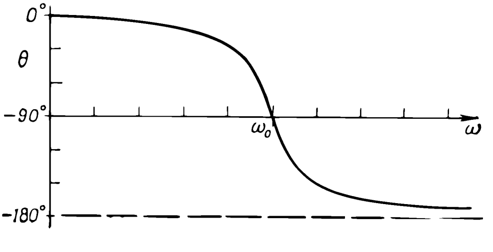
Иногда приходится иметь дело с формулой, немного отличающейся от (23.8); она тоже называется «резонансной» и, несмотря на некоторое отличие от (23.8), описывает те же самые явления. Дело в том, что если значение γ очень мало, то наиболее интересная область резонансной кривой лежит около частоты $\omega=\omega_0$, а здесь при малых γ формулу (23.8) с большой степенью точности можно заменить приближенной формулой. Поскольку $\omega_0^2-\omega^2=(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)$, то для ω, очень близких к ω_0, разность квадратов почти равна $2\omega_0(\omega_0-\omega)$, а $\gamma\omega$ можно заменить на $\gamma\omega_0$. Значит, $\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega\approx 2\omega_0(\omega_0-\omega+i\gamma/2)$ и

$$\hat{x}\approx\frac{\hat{F}}{2m\omega_0(\omega_0-\omega+i\gamma/2)},\quad \text{если}\quad \gamma\ll\omega_0\quad\text{и}\quad\omega\approx\omega_0. \tag{23.13}$$

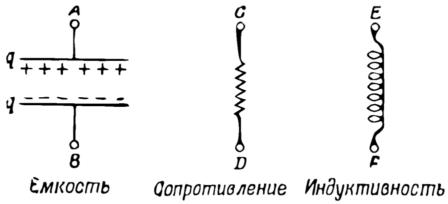
Легко найти и ρ^2:

$$\rho^2\approx\frac{1}{4m^2\omega_0^2\left[(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2/4\right]}.$$

А теперь решите сами такую задачу: с увеличением частоты значение ρ^2 сначала растет, достигает при ω_0 максимума, а



Фиг. 23.3. График зависимости θ *от* ω.



Фиг. 23.4. Три пассивных элемента цепи.

потом снова убывает. На каком расстоянии от ω_0 расположены частоты, которым соответствуют значения ρ^2, вдвое меньшие максимального? Покажите, что при очень малом γ эти точки отстоят друг от друга на расстоянии $\Delta\omega = \gamma$. Это значит, что резонанс делается более острым по мере того, как влияние трения становится все слабее и слабее.

Другой мерой ширины резонанса может служить «добротность» $Q = \omega_0/\gamma$ (чем у́же резонанс, тем больше Q); если $Q = 1000$, то по шкале частот ширина резонансной кривой равна всего 0,001. Резонансной кривой на фиг. 23.2 соответствует $Q = 5$.

Явление резонанса важно потому, что оно проявляется довольно часто; описанию некоторых видов этих проявлений мы посвятим остаток главы.

§ 3. Электрический резонанс

Простейшие и самые широкие технические применения резонанс нашел в электричестве. Имеется довольно много устройств, из которых собираются электрические цепи. Их часто называют *пассивными элементами цепи*, и бывают они трех типов, хотя в каждый элемент одного типа всегда примешано чуточку элементов других типов. Прежде чем подробно описать эти элементы, заметим, что наше представление о механическом осцилляторе как о массе, подвешенной к концу пружины, всего лишь приближение. В «массе» сосредоточена вовсе не вся масса системы: пружина тоже обладает какой-то массой, пружина тоже инерционна. Точно так же «пружина» не состоит из одной пружины, масса тоже немного упруга, а не *абсолютно* тверда, как это может показаться. Подпрыгивая вверх и вниз, она слегка изгибается под толчком пружины. Так же обстоит дело и в электричестве. Расположить все предметы по «элементам цепи» с чистыми, идеальными характеристиками можно только приближенно. Так как у нас нет времени обсуждать пределы таких приближений, мы просто предположим, что они допустимы.

Итак, о трех элементах цепи. Первый называется *емкостью* (фиг. 23.4); в качестве примера емкости могут служить две металлические пластинки, разделенные тонким слоем диэлектрика. Если пластинки зарядить, то между ними возникает разность потенциалов. Та же самая разность потенциалов будет между точками A и B, потому что при любой дополнительной разности потенциалов вдоль соединительных проводов заряды стекут по проводам. Таким образом, заданной разности потенциалов V между пластинками соответствуют определенные заряды $+q$ и $-q$ на каждой пластинке. Между пластинками существует некое электрическое поле; мы даже вывели соответствующую формулу для него (см. гл. 13 и 14)

$$V=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}=\frac{qd}{\varepsilon_0 A}, \tag{23.14}$$

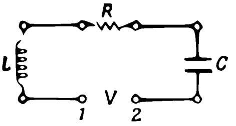
где d — расстояние между пластинками, A — площадь пластинок. Заметим, что разность потенциалов линейно зависит от заряда. Если построить емкость не из параллельных пластин, а придать отдельным электродам какую-нибудь другую форму, разность потенциалов будет по-прежнему пропорциональна заряду, но постоянную пропорциональности не так-то легко будет рассчитать. Однако надо знать только одно: разность потенциалов между концами емкости *пропорциональна заряду* $V=q/C$; множитель пропорциональности равен $1/C$ (C и есть *емкость* объекта).

Второй элемент цепи называется *сопротивлением*; этот элемент оказывает сопротивление текущему через него электрическому току. Оказывается, что все металлические провода, а также многие другие материалы сопротивляются току одинаково; если к концам куска такого материала приложить разность потенциалов, то электрический ток в куске $I=dq/dt$ будет пропорционален приложенной разности потенциалов

$$V=RI=R\frac{dq}{dt}. \tag{23.15}$$

Коэффициент пропорциональности называют *сопротивлением* R. Соотношение между током и разностью потенциалов вам, наверное, уже известно. Это закон Ома.

Если представлять себе заряд, сосредоточенный в емкости, как нечто аналогичное смещению механической системы x, то электрический ток dq/dt аналогичен скорости, сопротивление R аналогично коэффициенту трения c, а $1/C$ аналогично постоянной упругости пружины k. Самое интересное во всем этом, что существует элемент цепи, аналогичный *массе*! Это спираль, порождающая внутри себя магнитное поле, когда через нее проходит ток. *Изменение* магнитного поля порождает на концах спирали разность потенциалов,



Фиг. 23.5. Электрический колебательный контур, состоящий из сопротивления, индуктивности и емкости.

пропорциональную dI/dt. (Это свойство спирали используется в трансформаторах.) Магнитное поле пропорционально току, а наведенная разность потенциалов (так ее называют) пропорциональна скорости изменения тока

$$V = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}. \tag{23.16}$$

Коэффициент L — это коэффициент *самоиндукции*; он является электрическим аналогом массы.

Предположим, мы собираем цепь из трех последовательно соединенных элементов (фиг. 23.5); приложенная между точками *1* и *2* разность потенциалов заставит заряды двигаться по цепи, тогда на концах каждого элемента цепи тоже возникает разность потенциалов: на концах индуктивности $V_L = L(d^2q/dt^2)$, на сопротивлении $V_R = R(dq/dt)$, а на емкости $V_C = q/C$. Сумма этих напряжений дает нам полное напряжение V:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t). \tag{23.17}$$

Мы видим, что это уравнение в точности совпадает с механическим уравнением (23.6); будем решать его точно таким же способом. Предположим, что $V(t)$ осциллирует; для этого надо соединить цепь с генератором синусоидальных колебаний. Тогда можно представить $V(t)$ как комплексное число $\hat{V}$, помня, что для определения настоящего напряжения $V(t)$ это число надо еще умножить на $\exp(i\omega t)$ и взять действительную часть. Аналогично можно подойти и к заряду q, а поэтому напишем уравнение, в точности повторяющее (23.8): вторая производная $\hat{q}$ — это $(i\omega)^2\hat{q}$, а первая — это $(i\omega)\hat{q}$. Уравнение (23.17) перейдет в

$$\left[L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C}\right]\hat{q} = \hat{V}, \quad \text{или} \quad \hat{q} = \frac{\hat{V}}{L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C}};$$

последнее равенство запишем в виде

$$\hat{q} = \frac{\hat{V}}{L\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right)}, \tag{23.18}$$

где $\omega_0^2 = 1/LC$, а $\gamma = R/L$. Мы получили тот же знаменатель, что и в механической задаче, со всеми его резонансными свойствами! В табл. 23.1 приведен перечень аналогий между электрическими и механическими величинами.

Таблица 23.1 ● МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Общие характеристики	Величины	
	механические	электрические
Независимая переменная	Время (t)	Время (t)
Зависимая переменная	Положение (x)	Заряд (q)
Инерция	Масса (m)	Индуктивность (L)
Сопротивление	Коэффициент трения ($c = \gamma m$)	Сопротивление ($R = \gamma L$)
Жесткость	Жесткость (k)	(Емкость)$^{-1}$ ($1/C$)
Резонансная частота	$\omega_0^2 = k/m$	$\omega_0^2 = 1/LC$
Период	$t_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$	$t_0 = 2\pi\sqrt{LC}$
Добротность	$Q = \omega_0/\gamma$	$Q = \omega_0 L/R$

Еще одно чисто техническое замечание. В книгах по электричеству используют другие обозначения. (Очень часто в книгах на одну и ту же тему, написанных людьми разных специальностей, используются различные обозначения.) Во-первых, для обозначения $\sqrt{-1}$ используют букву j, а не i (через i должен обозначаться ток!). Во-вторых, инженеры предпочитают соотношение между $\hat{V}$ и $\hat{I}$, а не между $\hat{V}$ и $\hat{q}$. Они так больше привыкли. Поскольку $\hat{I} = d\hat{q}/dt = i\omega\hat{q}$, то вместо $\hat{q}$ можно подставить $\hat{I}/i\omega$, и тогда

$$\hat{V} = \left(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C}\right)\hat{I} = \hat{Z}\hat{I}. \qquad (23.19)$$

Можно слегка изменить исходное дифференциальное уравнение (23.17), чтобы оно выглядело более привычно. В книгах часто попадается такое соотношение:

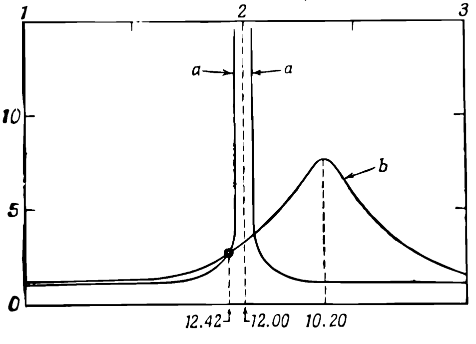
$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int^{t} I\,dt = V(t). \qquad (23.20)$$

Во всяком случае, мы находим, что соотношение (23.19) между напряжением $\hat{V}$ и током $\hat{I}$ то же самое, что и (23.18), и отличается только тем, что последнее делится на $i\omega$. Комплексное число $R + i\omega L + 1/i\omega C$ инженеры-электрики часто называют особым именем: *комплексный импеданс* $\hat{Z}$. Введение новой буквы позволяет просто записать соотношение между током и сопротивлением в виде $\hat{V} = \hat{Z}\hat{I}$. Объясняется это пристрастие инженеров тем, что в юности они изучали только цепи постоянного тока и знали только сопротивления и закон Ома: $V = RL$. Теперь они более образованы и имеют уже цепи переменного тока, но хотят, чтобы уравнения были те же самые. Вот они и пишут $\hat{V} = \hat{Z}\hat{I}$, и единственная разница в том, что теперь сопротивление заменено более сложной вещью: комплексным числом. Они настаивают на том, что они не могут использовать принятого во всем мире обозначения для мнимой единицы и пишут j; поистине удивительно, что они не требуют, чтобы вместо буквы Z писали букву R! (Много волнений доставляют им разговоры о плотности тока; ее они тоже обозначают буквой j. Сложности науки во многом связаны с трудностями в обозначениях, единицах и прочих выдумках человека, о чем сама природа и не подозревает.)

§ 4. *Резонанс в природе*

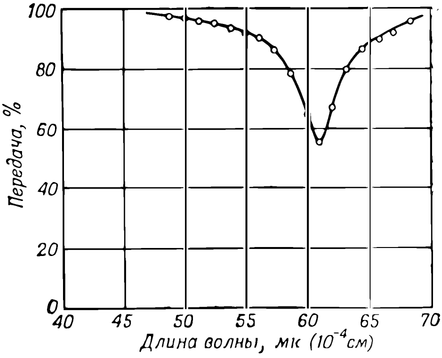
Хотя мы детально разобрали вопрос о резонансе в электрических цепях, можно приводить пример за примером из любых наук и отыскивать в них резонансные кривые. В природе очень часто что-нибудь «колеблется» и так же часто наступает резонанс. Об этом уже говорилось в одной из предыдущих глав; приведем теперь некоторые примеры. Зайдите в библиотеку, возьмите с полки несколько книг, полистайте их; вы обнаружите кривые, похожие на кривые фиг. 23.2, и уравнения, похожие на уравнения, приведенные в этой главе. Много ли найдется таких книг? Для убедительности возьмем всего пять-шесть книг, и они обеспечат вас полным набором примеров резонансов.

Первые два относятся к механике. Самый первый грандиозен—речь идет о колебаниях атмосферы. Если бы атмосфера, которая, по нашим представлениям, шарообразна и обволакивает нашу Землю равномерно со всех сторон, под влиянием Луны вытянулась бы в одну сторону, то атмосфера приняла бы форму вытянутой дыни. Если предоставить атмосферу, имеющую форму дыни, самой себе, то возникнут колебания. Так получается осциллятор. Этими колебаниями *управляет* Луна, которая вращается вокруг Земли. Чтобы понять, как это происходит, представим себе, что Луна стоит неподвижно на каком-то расстоянии от Земли, а Земля вращается вокруг

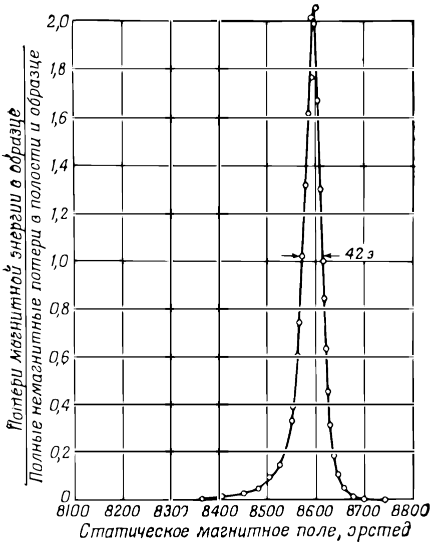


Фиг. 23.6. Влияние внешнего возбуждения на атмосферу.

Фиг. 23.7. Прохождение инфракрасного излучения через тонкую (0,17 мк) пленку поваренной соли.



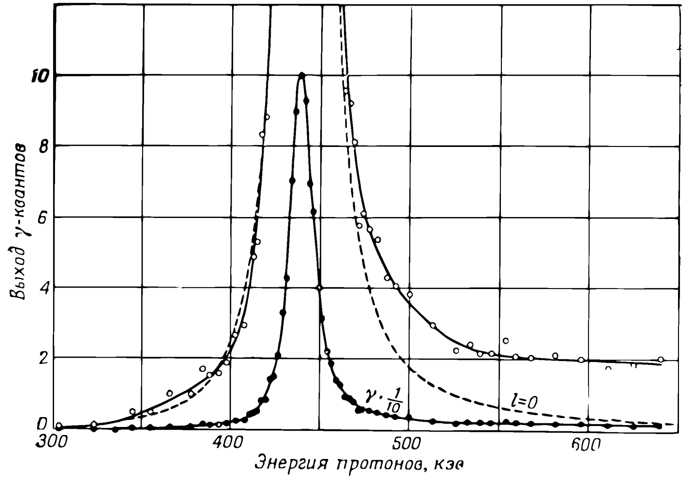
своей оси. Поэтому проекция силы, скажем, на ось x имеет периодическую составляющую. Отклик атмосферы на приливно-отливные толчки Луны будет обычным откликом осциллятора на периодическую силу. Кривая b на фиг. 23.6 изображает ожидаемый отклик атмосферы (кривая a приведена на заимствованном нами рисунке из книги Мунка и Мак-Дональда по другому поводу и нас не касается). Может показаться странным, что удалось начертить эту кривую: ведь Земля вращается с постоянной скоростью, и поэтому можно получить только одну точку на кривой—точку, приблизительно соответствующую периоду 12—12,7 *час* (приливы бывают дважды в сутки) плюс еще немного, потому что надо учесть движение Луны. Но, измеряя *величину* атмосферных приливов и время их задержки—*фазу*, можно найти обе характеристики отклика ρ и θ. По ним можно вычислить ω_0 и γ, а затем начертить уже всю кривую! Вот пример чистой науки. Из двух чисел получают два числа, по этим двум числам чертят очень красивую кривую, которая, конечно, проходит через ту же точку, по которой построена кривая! Кривая эта, конечно, бесполезна, *пока нельзя измерить еще чего-нибудь*, а в геофизике сделать это зачастую очень трудно. В нашем случае тем, что нужно было бы еще измерить, могут служить колебания атмосферы с собственной частотой ω_0; необходимо какое-то возмущение, которое бы заставило атмосферу колебаться с частотой ω_0. Такой случай однажды представился. В 1883 г. произошло извержение вулкана Кракатау, в результате которого в атмосферу взлетело пол-острова. Взрыв был такой, что удалось измерить период колебаний атмосферы. Он оказался равным $10^1/_2$ *час*. Собственная частота ω_0, полученная из кривой фиг. 23.6, была равна 10 *час* 20 *мин*; таким образом, было получено по крайней мере хоть одно подтверждение правильности наших представлений об атмосферных приливах.



Фиг. 23.8. Зависимость потери магнитной энергии в парамагнитном органическом соединении от напряженности приложенного поля.

Во втором примере речь пойдет о совсем малых колебаниях. Мы рассмотрим кристалл хлористого натрия, который состоит из расположенных друг возле друга ионов натрия и хлора (мы об этом говорили ранее). Ионы эти несут электрический заряд: первый — положительный, второй — отрицательный. Посмотрим, какие интересные колебания могут возникнуть в кристалле. Если отодвинуть все положительные заряды вправо, а отрицательные — влево и предоставить их самим себе, то они начнут колебаться взад и вперед: решетка ионов натрия против решетки ионов хлора. Но как растащить эти заряды? Очень просто: если внести кристалл в электрическое поле, оно отодвинет положительные заряды в одну сторону, а отрицательные— в другую! Значит, имея внешнее электрическое поле, можно, пожалуй, вызвать колебания кристалла. Но для этого частота электрического поля должна быть столь большой, что она соответствует *инфракрасному излучению!* Таким образом попытаемся построить резонансную кривую, измеряя поглощение инфракрасного света хлористым натрием. Такая кривая изображена на фиг. 23.7. По абсциссе отложена не частота, а длина волны, но это техническая деталь; между частотой и длиной волны существует строго определенное соотношение, так что мы все-таки имеем дело со шкалой частот, и одна из этих частот— резонансная частота.

Ну, а что можно сказать о ширине резонансной кривой? Чем эта ширина определяется? Очень часто кривая выглядит гораздо шире, чем ей предписывается теоретическим значением γ (эта ширина называется естественной шириной). Есть две причины уширения резонансной кривой. Мы наблюдаем колебания многих осцилляторов сразу, а их частоты могут немного отличаться. К этому приводят, например, натяжения



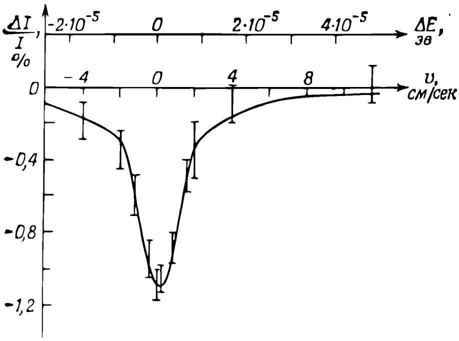
Фиг. 23.9. Зависимость интенсивности γ-излучения лития от энергии налетающих протонов.

Пунктирная кривая — теоретическая, вычисленная для протонов с моментом количества движения $l = 0$.

в отдельных частях кристалла. Поэтому мы видим сразу много резонансных кривых, проходящих рядом. Они сливаются в одну кривую с большей шириной. Вторая причина очень проста — не всегда можно точно измерить частоту. Сколько со спектрометром ни возись, он всегда зарегистрирует не одну частоту, а целый спектр частот $\Delta\omega$. Поэтому может оказаться, что разрешающая сила спектрометра недостаточна для определения точной формы кривой. Так или иначе, но, глядя на фиг. 23.7, трудно сказать, что там за ширина — естественная или та, что соответствует неоднородностям кристалла или разрешающей силе спектрометра.

Еще один пример — более хитрый. Посмотрим, как качается магнит. Если поместить магнит в постоянное магнитное поле, то северный полюс захочет повернуться в одну сторону, а южный — в другую, и если магнит может поворачиваться вокруг оси, он будет колебаться около положения равновесия, как это делает стрелка компаса. Однако магниты, о которых пойдет речь, — это *атомы*. Они обладают моментом количества движения, и вращение порождает не простое движение в направлении поля, а *прецессию*. Посмотрим со стороны на какую-нибудь составляющую «шатаний», а потом возмутим колебания или попробуем управлять ими, чтобы затем измерить поглощение.

На фиг. 23.8 изображена кривая поглощения — типично резонансная кривая. Только получена она немного не так, как

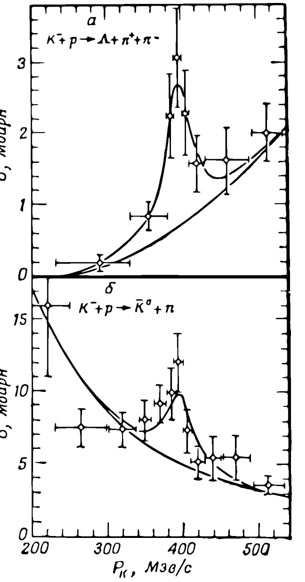


Фиг. 23.10. Кривая поглощения γ-излучения, полученная Р. Мёссбауэром.

предыдущая. Частота горизонтального поля, управляющего колебаниями, все время остается постоянной, хотя, казалось бы, экспериментатор, чтобы получить кривую, должен менять частоту. Можно поступить и так, но технически легче оставить ω неизменной, а менять напряженность постоянного поля, что соответствует изменению ω_0 в нашей формуле. Таким образом мы имеем дело с резонансной кривой для ω_0. Тем не менее мы получаем резонанс с определенными ω_0 и γ.

Пойдем дальше. Следующий наш пример связан с атомным ядром. Движение протонов и нейтронов в ядре — в некотором смысле колебательное движение. Убедиться в этом можно при помощи такого эксперимента: давайте обстреливать ядра лития протонами. Мы обнаружим, что в ядрах при этом будут происходить какие-то реакции, в результате которых возникает γ-излучение. Кривая, изображающая количество испущенного излучения, имеет очень острый, типично резонансный максимум. Это изображено на фиг. 23.9. Однако приглядитесь к рисунку повнимательнее: на горизонтальной шкале отложена не частота, как обычно, а *энергия*! Дело в том, что та величина, которую в классической физике мы привыкли считать энергией, в квантовой механике оказывается определенным образом связанной с частотой некоторой волны. Если в привычной нам крупномасштабной физике при анализе какого-нибудь явления приходится иметь дело с частотой, то в квантовомеханических явлениях, связанных с атомным веществом, аналогичные кривые будут зависеть от энергии. Кривая на фиг. 23.9 иллюстрирует эту связь. Размышляя над этой кривой, можно прийти к мысли, что частота и энергия имеют глубокую взаимосвязь; так оно и есть на самом деле.

Вот еще одна резонансная кривая, полученная в результате опытов с атомными ядрами; она очень узкая, у́же всех предыдущих. На фиг. 23.10 величина ω_0 соответствует энергии 10 000 *эв*, а ширина γ равна приблизительно 10^{-5} эв; иначе говоря, $Q = 10^{10}$! Построив такую кривую, экспериментатор измерил Q самого добротного из ныне известных осцилляторов. Это проделал Р. Мёссбауэр, получивший за свои работы



Фиг. 23.11. Зависимость эффективных сечений реакций от величины количества движения.

$$а - K^- + p \to \Lambda + \pi^+ + \pi^-;$$

$$б - K^- + p \to K^0 + n.$$

Нижняя кривая описывает нерезонансный фон; верхняя кривая показывает, что на этот фон наложено резонансное сечение.

Нобелевскую премию. На горизонтальной шкале отложена скорость, потому что для сдвига частоты использовался эффект Допплера, получающийся в результате относительного движения источника и поглотителя. Цифры дают некоторое представление о тонкости эксперимента — пришлось измерять скорости в несколько сантиметров в секунду! Если продолжить горизонтальную шкалу влево, то нулевую частоту мы найдем на расстоянии 10^{10} *см*! Страницы для этого, пожалуй, не хватит!

Наконец, возьмем какой-нибудь выпуск журнала Physical Review, скажем, за 1 января 1962 г. Найдется ли в нем резонансная кривая? Резонансные кривые имеются непременно в каждом выпуске этого журнала, и на фиг. 23.11 изображена одна из таких кривых. Это очень интересная кривая. Она соответствует резонансу в реакциях со странными частицами (K^--мезоны и протоны). Резонанс был обнаружен при измерении количества частиц разных сортов, получающихся в результате реакции. Разным продуктам реакции соответствуют разные кривые, но в каждой из них при одной и той же энергии есть пики примерно одинаковых очертаний. Значит, при определенной энергии K^--мезона существует резонанс. При столкновении K^--мезонов и протонов, наверное, создаются благоприятные для резонанса условия, а может быть, даже новая частица. Сегодня мы еще не можем сказать, что такое эти выбросы в кривых — «частица» или просто резонанс. Очень *узкий* резонанс соответствует очень *точно отмеренному количеству энергии*; это бывает тогда, когда мы имеем дело с частицей. Когда резонансная кривая уширяется, то становится трудно сказать, с чем мы имеем дело — с частицей, которая живет очень мало, или просто с резонансом в реакции. В гл. 2 мы отнесли эти резонансы к частицам, но когда писалась та глава, об этом резонансе еще не было известно, поэтому нашу таблицу элементарных частиц можно дополнить!

Глава 24

ПЕРЕХОДНЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 1. Энергия осциллятора

Хотя глава названа «Переходные решения», речь здесь все еще в основном идет об осцилляторе, на который действует внешняя сила. Мы еще ничего не говорили об *энергии* колебаний. Давайте займемся ею.

Чему равна кинетическая энергия осциллятора? Она пропорциональна квадрату скорости. Здесь мы затронули важный вопрос. Предположим, что мы изучаем свойства некоторой величины A; это может быть скорость или еще что-нибудь. Мы обратились к помощи комплексных чисел: $A = \hat{A}\exp(i\omega t)$, но в физике праведна и чтима только *действительная* часть комплексного числа. Поэтому если вам для чего-нибудь понадобится получить *квадрат* A, то не возводите в квадрат комплексное число, чтобы потом выделить его действительную часть.

Действительная часть квадрата комплексного числа не равна квадрату действительной части, она содержит еще и *мнимую* часть первоначального числа. Таким образом, если мы захотим найти энергию и посмотреть на ее превращения, нам придется на время забыть о комплексных числах.

Итак, истинно физическая величина A — это действительная часть $A_0 \exp[i(\omega t + \Delta)]$, т. е. $A = A_0 \cos(\omega t + \Delta)$, а комплексное число $\hat{A}$ — это $A_0 \exp(i\Delta)$. Квадрат этой физической величины равен $A_0^2 \cos^2(\omega t + \Delta)$. Он изменяется от нуля до максимума, как это предписывается квадратом косинуса. Максимальное значение квадрата косинуса равно 1, минимальное равно 0, а его среднее значение — это $^1/_2$.

Зачастую нас совсем не интересует энергия в каждый данный момент колебания; во многих случаях достаточно знать лишь среднюю величину A^2 (*среднее значение* квадрата A в течение времени, много большего, чем период колебаний). При этих условиях можно усреднить квадрат косинуса и доказать теорему: если A представляется комплексным числом, то среднее значение A^2 *равно* $^1/_2A_0^2$. Здесь A_0^2 — это квадрат модуля комплексного числа $\hat{A}$. (Квадрат модуля $\hat{A}$ записывают по-разному: $|\hat{A}|^2$ или $\hat{A}\hat{A}^*$ — в виде произведения числа $\hat{A}$ на комплексно сопряженное.) Эта теорема пригодится нам еще много раз.

Итак, речь идет об энергии осциллятора, на который действует внешняя сила. Движение такого осциллятора описывается уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\gamma\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=F(t). \qquad (24.1)$$

Мы, конечно, предполагаем, что $F(t)$ пропорциональна $\cos\omega t$. Выясним теперь, много ли приходится этой силе работать. Работа, произведенная силой в 1 *сек*, т. е. мощность, равна произведению силы на скорость. [Мы знаем, что работа, совершаемая за время dt, равна Fdx, а мощность равна $F(dx/dt)$.] Значит,

$$P=F\frac{dx}{dt}=m\left[\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\omega_0^2x\frac{dx}{dt}\right]+\gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \qquad (24.2)$$

Как легко проверить простым дифференцированием, первые два члена можно переписать в виде $(d/dt)\left[{}^1/_2m(dx/dt)^2+{}^1/_2m\omega_0^2x^2\right]$. Выражение в квадратных скобках — производная по времени суммы двух членов. Это понятно; ведь первый член суммы — кинетическая энергия движения, а второй — потенциальная энергия пружины. Назовем эту величину *запасенной энергией*, т. е. энергией, накопленной при колебаниях. Давайте усредним мощность по многим циклам, когда сила включена уже давно и осциллятор изрядно наколебался. Если пробег длится долго, запасенная энергия не изменяется; производная по времени дает эффект, в среднем равный нулю. Иными словами, если усреднить затраченную за долгое время мощность, то *вся энергия поглотится из-за сопротивления, описываемого членом* $\gamma m(dx/dt)^2$. Определенную часть энергии осциллятор, конечно, запасет, но если усреднять по многим циклам, то количество ее не будет меняться со временем. Таким образом, средняя мощность $\langle P\rangle$ равна

$$\langle P\rangle=\left\langle\gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\rangle. \qquad (24.3)$$

Применяя метод комплексных чисел и нашу теорему о том, что $\langle A^2 \rangle = {}^1/_2 A_0^2$, легко найти эту среднюю мощность. Так как $x = \hat{x}\exp(i\omega t)$, то $dx/dt = i\omega\hat{x}\exp(i\omega t)$. Следовательно, средняя мощность равна

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\gamma m\omega^2 x_0^2. \tag{24.4}$$

Если перейти к электрическим цепям, то dx/dt надо заменить на ток I (I — это dq/dt, где q соответствует x), а $m\gamma$ — на сопротивление R. Значит, скорость потери энергии (мощности силы) в электрической цепи равна произведению сопротивления на средний квадрат силы тока

$$\langle P \rangle = R\langle I^2 \rangle = R\frac{1}{2}I_0^2. \tag{24.5}$$

Энергия, естественно, переходит в тепло, выделяемое сопротивлением; это так называемые тепловые потери, или джоулево тепло.

Интересно разобраться также в том, много ли энергии может *накопить* осциллятор. Не путайте этого вопроса с вопросом о средней мощности, ибо хотя выделяемая силой мощность сначала действительно накапливается осциллятором, потом на его долю остается лишь то, что не поглотило трение. В каждый момент осциллятор обладает вполне определенной энергией, поэтому можно вычислить среднюю запасенную энергию $\langle E \rangle$. Мы уже вычислили среднее значение $(dx/dt)^2$, так что

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{1}{2}m\left\langle\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\rangle + \frac{1}{2}m\omega_0^2\langle x^2 \rangle,\\ &= \frac{1}{2}m\left(\omega^2 + \omega_0^2\right)\frac{1}{2}x_0^2.\end{aligned} \tag{24.6}$$

Если осциллятор достаточно добротен и частота ω близка к ω_0, то $|\hat{x}|$ — большая величина, запасенная энергия очень велика и можно накопить очень много энергии за счет небольшой силы. Сила производит большую работу, заставляя осциллятор раскачиваться, но после того, как установилось равновесие, вся сила уходит на борьбу с трением. Осциллятор располагает большой энергией, если трение очень мало, и потери энергии невелики даже при очень большом размахе колебаний. Добротность осциллятора можно измерять величиной запасенной энергии по сравнению с работой, совершенной силой за период колебания.

Что это за величина — накопленная энергия по сравнению с работой силы за цикл? Ее обозначили буквой Q. Величина Q — это умноженное на 2π отношение средней запасенной энергии к работе силы за один цикл (можно рассматривать работу не за цикл, а за *радиан*, тогда в определении Q исчезнет 2π)

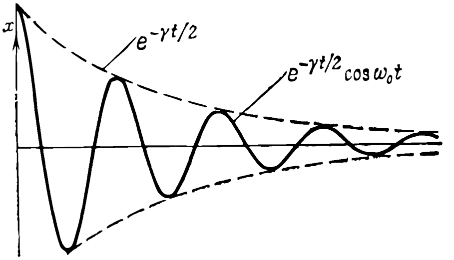
$$Q = 2\pi \frac{{}^1/_2 m\left(\omega^2+\omega_0^2\right)\langle x^2\rangle}{\gamma m \omega^2 \langle x^2\rangle \dfrac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega^2+\omega_0^2}{2\gamma\omega}. \tag{24.7}$$

Пока Q не слишком велика — это плохая характеристика системы, если же Q довольно большая величина, то можно сказать, что это мера добротности осциллятора. Многие пытались дать самое простое и полезное определение Q; разные определения немногим отличаются друг от друга, но если Q очень велика, то все они согласуются друг с другом. При самом общем определении по формуле (24.7) Q зависит от ω. Если мы имеем дело с хорошим осциллятором вблизи резонансной частоты, то (24.7) можно упростить, положив $\omega = \omega_0$, тогда $Q = \omega_0/\gamma$; такое определение Q было дано в предыдущей главе.

Что такое Q для электрической цепи? Чтобы найти эту величину, надо заменить m на L, $m\gamma$ на R и $m\omega_0^2$ на $1/C$ (см. табл. 23.1). Тогда Q в точке резонанса равна $L\omega/R$, где ω — резонансная частота. В цепи с большой Q запасенная цепью энергия велика по сравнению с работой за один цикл, производимой поддерживающей колебания в цепи машиной.

§ 2. Затухающие колебания

Вернемся к основной теме — переходным решениям. *Переходными решениями* называются решения дифференциального уравнения, соответствующие ситуации, когда внешняя сила не действует, но система тем не менее не находится в покое. (Конечно, лучше всего решать задачу, когда сила не действует, а система покоится, покоится — ну и пусть покоится!) Соответствующие переходным решениям колебания можно вызвать так: заставить силу поработать, а потом выключить ее. Что тогда случится с осциллятором? Сначала подумаем, как будет вести себя система с очень большой Q. Если сила действовала долго, то запасенная энергия была постоянной и работа тратилась лишь для того, чтобы поддержать ее. Предположим теперь, что мы выключили силу, тогда трению, которое раньше поглощало энергию поставщика, питаться больше нечем — кормильца-то *нет*. И трение начинает пожирать запасенную осциллятором энергию. Пусть добротность системы $Q/2\pi = 1000$. Это значит, что работа, произведенная за цикл, равна 1/1000 запасенной энергии. Пожалуй, разумно предположить, что при не поддерживаемых внешней силой колебаниях за каждый цикл будет теряться одна тысячная



Фиг. 24.1. Затухающие колебания.

часть имеющейся к началу цикла энергии. Будем считать, что при больших Q изменение энергии описывается угаданным нами приближенным уравнением (мы еще вернемся к этому уравнению и сделаем его совсем верным!)

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega E}{Q}. \tag{24.8}$$

Уравнение это приближенное, потому что оно справедливо только для больших Q. За каждый радиан система теряет $1/Q$ часть запасенной энергии E. Значит, за промежуток времени dt энергия уменьшится в $\omega dt/Q$ раз (частота появляется при переводе радианов в настоящие секунды). А какая это частота? Предположим, что система устроена очень жестко, поэтому даже при действии силы она сколько-нибудь заметно колеблется только со своей собственной частотой. Поэтому будем считать, что ω — это резонансная частота ω_0. Таким образом, из уравнения (24.8) следует, что запасенная энергия меняется следующим образом:

$$E = E_0 e^{-\omega_0 t/Q} = E_0 e^{-\gamma t}. \tag{24.9}$$

Теперь нам известно значение *энергии* в любой момент. Какой будет приближенная формула, определяющая амплитуду колебаний как функцию времени? Той же самой? Нет! Потенциальная энергия пружины изменяется как *квадрат смещения*, кинетическая энергия — как *квадрат скорости*; это приводит к тому, что полная энергия пропорциональна квадрату смещения. Таким образом, смещение (амплитуда колебаний) будет уменьшаться с половинной скоростью. Иначе говоря, мы ожидаем, что решение в случае затухающего переходного движения будет выглядеть как колебание с частотой, близкой к резонансной частоте ω_0; амплитуда этого колебания будет уменьшаться как $\exp(-\gamma t/2)$

$$x = A_0 e^{-\gamma t/2} \cos \omega_0 t. \tag{24.10}$$

Эта формула и фиг. 24.1 дают представление о том, чего следует ожидать, а теперь приступим к *точному* анализу движения, т. е. к решению дифференциального уравнения движения.

Как же решить уравнение (24.1), если выкинуть из него внешнюю силу? Будучи физиками, мы интересуемся не столько *методом*, сколько самим *решением*. Поскольку мы люди уже опытные, попытаемся представить решение в виде экспоненциальной кривой, $x = A\exp(i\alpha t)$. (Почему мы так поступили? Оттого, что экспоненту легче всего дифференцировать!) Подставим это выражение в (24.1), помня о том, что каждое дифференцирование x по времени сводится к умножению на $i\alpha$ [напомним, что $F(t) = 0$]. Сделать это очень легко, и наше уравнение примет вид

$$\left(-\alpha^2 + i\gamma\alpha + \omega_0^2\right) Ae^{i\alpha t} = 0. \tag{24.11}$$

Левая часть равенства должна быть равна нулю *все время*, но это возможно только в двух случаях: а) $A = 0$, однако это даже и не решение: ведь тогда все покоится, или б)

$$-\alpha^2 + i\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0. \tag{24.12}$$

Если мы сможем решить это уравнение и найти α, то мы найдем и решение, амплитуда которого A не обязательно равна нулю!

$$\alpha = \frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \tag{24.13}$$

Чтобы не думать о том, как извлечь квадратный корень, предположим, что $\gamma/2$ меньше ω_0, и поэтому $\omega_0^2 - \gamma^2/4$ — положительная величина. Беспокоит другое: почему мы получили *два* решения! Им соответствуют

$$\alpha_1 = \frac{i\gamma}{2} + \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{i\gamma}{2} + \omega_\gamma \tag{24.14}$$

и

$$\alpha_2 = \frac{i\gamma}{2} - \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{i\gamma}{2} - \omega_\gamma. \tag{24.15}$$

Займемся пока первым решением, предположив, что мы ничего не знаем о том, что квадратный корень принимает два значения. В этом случае смещение x равно $x_1 = A\exp(i\alpha_1 t)$, где A — произвольная постоянная. Чтобы сократить запись, введем специальное обозначение для входящего в α_1 квадратного корня: $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = \omega_\gamma$.

Так, $i\alpha_1 = -\gamma/2 + i\omega_\gamma$ и $x = A\exp[-(\gamma/2 - i\omega_\gamma)t]$, или, если воспользоваться замечательным свойством экспоненты,

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2}e^{i\omega_\gamma t}. \tag{24.16}$$

Итак, система осциллирует с частотой ω_γ, которая *в точности* не равна частоте ω_0, но практически близка к ней, если система достаточно добротна. Кроме того, амплитуда колебаний экспоненциально затухает! Если взять действительную часть (24.16), то мы получим

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2} \cos \omega_\gamma t. \tag{24.17}$$

Это решение очень напоминает угаданное нами решение (24.10), вот только частота немного другая, ω_γ. Но это лишь небольшая поправка, значит, первоначальная идея была правильной. И все-таки *не все* благополучно! А не благополучно то, что *существует второе решение.*

Этому решению соответствует α_2, и оно отличается от первого лишь знаком ω_γ:

$$x_2 = Be^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_\gamma t}. \tag{24.18}$$

Что все это значит? Скоро мы докажем, что если x_1 и x_2 — возможные решения (24.1) при $F(t) = 0$, то $x_1 + x_2$ — тоже решение этого уравнения! Таким образом, общее решение имеет вид

$$x = e^{-\gamma t/2} \left(Ae^{i\omega_\gamma t} + Be^{-i\omega_\gamma t}\right). \tag{24.19}$$

Теперь можно спросить: «А, собственно, зачем нам беспокоить себя еще одним решением, если нас вполне устраивало первое? К чему эти дополнительные решения, если мы все равно должны взять только действительную часть?» Мы знаем, что нужно взять действительную часть, но откуда *математика* знает, что мы хотим взять действительную часть? Когда у нас была внешняя сила $F(t)$, то мы ее дополнили *искусственной* силой, и она каким-то образом управляла *мнимой* частью уравнения. Но когда мы положили $F(t) \equiv 0$, то соглашение о том, что, каково бы ни было x, нужно взять только его действительную часть, стало нашим личным делом, и математическое уравнение об этом ничего не знало. В мире физики *есть* только действительные решения, но решение, которому мы так радовались, *комплексно.* Уравнению не известно, что мы делаем совершенно неожиданный шаг и отбираем только действительную часть, и оно предлагает нам еще, так сказать, комплексно сопряженное решение, чтобы, сложив оба решения, мы получили *настоящее действительное решение*; вот для чего мы взяли еще и α_2. Чтобы x было действительным, $B \exp(-i\omega_\gamma t)$ должно быть комплексно сопряженным к $A \exp(i\omega_\gamma t)$ числом, тогда мнимая часть исчезнет. Таким образом, B должно быть комплексно сопряжено с A, поэтому наше решение имеет вид

$$x = e^{-\gamma t/2} \left(Ae^{i\omega_\gamma t} + A^* e^{-i\omega_\gamma t}\right). \tag{24.20}$$

Значит, наши колебания — это колебания с *фазовым сдвигом* и, как полагается, с затуханием.

§ 3. Переходные колебания в электрических цепях

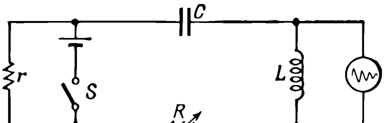
Посмотрим, как выглядят переходные колебания. Для этого соберем цепь, изображенную на фиг. 24.2. В этой цепи разность потенциалов между концами индуктивности L поступает в осциллоскоп. Неожиданное включение рубильника S включает дополнительное напряжение и вызывает в осцилляторной цепи переходные колебания. Эти колебания аналогичны колебаниям механического осциллятора, вызванными неожиданным ударом. Сама цепь представляет собой электрический аналог механического осциллятора с затуханием, и мы можем наблюдать колебания при помощи осциллоскопа. Он покажет нам кривые, анализом которых мы и займемся. На фиг. 24.3—24.6 представлены кривые затухающих колебаний, полученные на экране осциллоскопа. На фиг. 24.3 показаны затухающие колебания в цепи с большой Q, т. е. с малым значением γ. В такой цепи колебания затухают не очень быстро; мы видим довольно длинную синусоиду с медленно убывающим размахом.

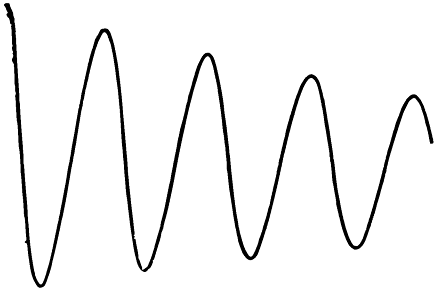
Теперь давайте посмотрим, что произойдет, если мы будем уменьшать Q, так что колебания должны затухать быстрее. Чтобы уменьшить Q, увеличим сопротивление цепи R. При повороте ручки сопротивления колебания действительно затухают скорее (фиг. 24.4). Если еще увеличить сопротивление, то колебания затухнут еще быстрее (фиг. 24.5). Но если сопротивление увеличить сверх некоторого предела, колебаний мы вообще не увидим. А может быть, нам просто отказывают глаза? Увеличим еще сопротивление и получим тогда кривую, представленную на фиг. 24.6; по ней можно лишь с натяжкой сказать, что в цепи произошли колебания, ну разве что одно. Можем ли мы математически объяснить это явление?

Сопротивление механического осциллятора, конечно, пропорционально γ. В нашем случае γ — это R/L. Теперь, если увеличивать γ, то в столь приятных нам решениях (24.14) и (24.15) наступает беспорядок; когда $\gamma/2$ становится больше ω_0, решения приходится записывать по-другому:

$$\frac{i\gamma}{2}+i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2} \quad \text{и} \quad \frac{i\gamma}{2}-i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}.$$

Фиг. 24.2. Электрическая цепь для демонстраций переходных колебаний.





Фиг. 24.3. Затухающие колебания.

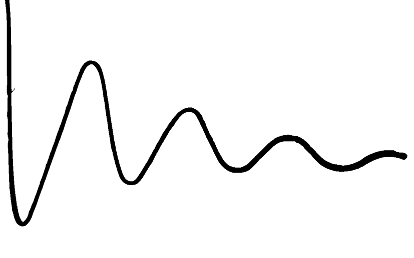
Это снова два решения, которые приводят нас к решениям $\exp(i\alpha_1 t)$ и $\exp(i\alpha_2 t)$. Подставив теперь α_1, получим

$$x = Ae^{-\left(\gamma/2+\sqrt{\gamma^2/4-\omega_0^2}\right)t}.$$

Никаких колебаний. Чисто экспоненциальное убывание. То же самое дает и второе решение

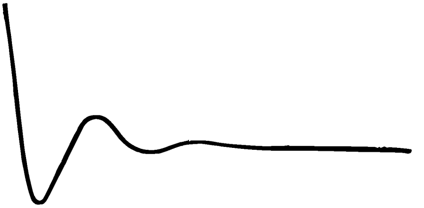
$$x = Be^{-\left(\gamma/2-\sqrt{\gamma^2/4-\omega_0^2}\right)t}.$$

Заметим, что квадратный корень не может превысить $\gamma/2$; даже если $\omega_0 = 0$, оба члена равны. Если же ω_0^2 отличается от $\gamma^2/4$, то квадратный корень меньше $\gamma/2$ и выражение в круглых скобках всегда положительно. Это очень хорошо! Почему? Да потому что если бы это выражение было отрицательным, то e пришлось бы возводить в *положительную* степень и мы получили бы возрастающее со временем решение. Но при увеличении в цепи сопротивления колебания не могут возрастать, значит, мы избегли противоречия. Итак, мы получили два решения; оба решения экспоненциально затухают, но одно из них стремится «умереть» гораздо скорее. Общее решение, конечно, представляет собой комбинацию обоих решений, а значения коэффициентов A и B зависят от того, как начинаются колебания, каковы начальные условия. В нашей цепи случилось так, что A — отрицательное число, а B — положительное,



Фиг. 24.4. Колебания затухают быстрее.

Фиг. 24.5. Колебания почти исчезли.



поэтому на экране осциллоскопа мы увидели разность двух экспонент.

Давайте обсудим, как найти коэффициенты A и B (или A и A^*), если известны начальные условия. Предположим, что в момент $t=0$ нам известны смещение $x=x_0$ и скорость $dx/dt=v_0$. Если в соотношения

$$x=e^{-\gamma t/2}\left(Ae^{i\omega_\gamma t}+A^*e^{-i\omega_\gamma t}\right),$$

$$\frac{dx}{dt}=\bar{e}^{\gamma t/2}\left[\left(-\frac{\gamma}{2}+i\omega_\gamma\right)Ae^{i\omega_\gamma t}+\left(-\frac{\gamma}{2}-i\omega_\gamma\right)A^*e^{-i\omega_\gamma t}\right]$$

подставить значения $t=0$, $x=x_0$, $dx/dt=v_0$ и воспользоваться тем, что $e^0=e^{i0}=1$, то мы получим

$$x_0=A+A^*=2A_R,$$

$$v_0=-\frac{\gamma}{2}(A+A^*)+i\omega_\gamma(A-A^*)=-\frac{\gamma x_0}{2}+i\omega_\gamma(2iA_I),$$

где $A=A_R+iA_I$, $A^*=A_R-iA_I$. Значит,

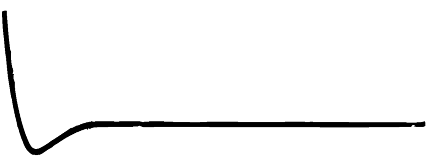
$$A_R=\frac{x_0}{2}\quad\text{и}\quad A_I=-\frac{v_0+\frac{\gamma x_0}{2}}{2\omega_\gamma}. \tag{24.21}$$

Таким образом, зная начальные условия, мы полностью определили A и A^*, а значит, и кривую переходного решения. Можно записать решение и по-другому. Вспомним, что

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta\quad\text{и}\quad e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta,$$

тогда

$$x=e^{-\gamma t/2}\left[x_0\cos\omega_\gamma t+\frac{v_0+\frac{\gamma x_0}{2}}{\omega_\gamma}\sin\omega_\gamma t\right], \tag{24.22}$$



Фиг. 24.6. Колебаний нет.

где $\omega_\gamma = +\sqrt{\omega_0^2 - (\gamma^2/4)}$. Мы получили формулу затухающих колебаний. Такая формула нам не понадобится, однако отметим ее особенности, справедливые и в более общих случаях.

Прежде всего поведение системы, на которую не действует внешняя сила, описывается суммой (суперпозицией) временны́х экспонент [мы записали их в виде $\exp(i\alpha t)$]. Такое решение хорошо передает истинное положение вещей. В общем случае α — это комплексное число, и его мнимая часть соответствует затуханию колебаний. Наконец, тесная математическая связь синусоидальных и экспоненциальных функций, о которой говорилось в гл. 22, физически часто проявляется в переходе от колебаний к чисто экспоненциальному затуханию при критических значениях некоторых параметров системы (в нашем случае это было сопротивление γ).

Глава **25**

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ И ОБЗОР

§ 1. *Линейные дифференциальные уравнения*

В этой главе мы снова вернемся к некоторым аспектам наших колебательных систем, только постараемся теперь увидеть нечто более общее, стоящее за спиной каждой частной системы. Изучение каждой колебательной системы сводилось к решению дифференциального уравнения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma m\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=F(t). \qquad (25.1)$$

Эта комбинация «операций» над переменной x обладает интересным свойством: если вместо x подставить $(x+y)$, получится сумма одинаковых операций над x и y, а умножение x на число a сводится к умножению на это число первоначальной комбинации. Это легко доказать. Чтобы не переутомиться, записывая все буквы, вошедшие в (25.1), давайте введем «скорописные» обозначения. Обозначим всю левую часть уравнения (25.1) символом $\underline{L}(x)$. Увидев такой символ, вы должны мысленно представить себе левую часть уравнения (25.1). Поэтому, согласно этой системе, символ $\underline{L}(x+y)$ будет означать следующее:

$$\underline{L}(x+y)=m\frac{d^2(x+y)}{dt^2}+\gamma m\frac{d(x+y)}{dt}+ \\ +m\omega_0^2(x+y). \qquad (25.2)$$

(Подчеркнем букву $\underline{L}$, чтобы не спутать этот символ с обычной функцией.) Иногда мы будем употреблять термин *операторная запись*, но совершенно безразлично, какими словами это называть, просто-напросто это «скоропись».

Наше первое утверждение, что

$$\underline{L}(x+y)=\underline{L}(x)+\underline{L}(y), \qquad (25.3)$$

следует из соотношений $a(x+y) = ax + ay$, $d(x+y)/dt = dx/dt + dy/dt$ и т. д.

Легко доказать, что для постоянного a

$$\underline{L}(ax) = a\underline{L}(x). \tag{25.4}$$

[Соотношения (25.3) и (25.4) тесно связаны одно с другим, потому что, подставив в (25.3) $x+x$, мы получим (25.4) для частного значения $a = 2$ и т. д.]

Решая более сложные задачи, можно получить $\underline{L}$, в котором содержится больше членов и более высокие производные. Обычно первым делом интересуются, справедливы ли соотношения (25.3) и (25.4). Если они выполняются, то задачу называют *линейной.* В этой главе мы изучим некоторые свойства систем, следующие только из того факта, что система линейная. Это поможет нам понять общность некоторых свойств изученных ранее частных систем.

Давайте изучим некоторые свойства линейных дифференциальных уравнений, причем полезно помнить о хорошо знакомом нам частном уравнении (25.1). Первое интересное свойство: предположим, что мы решаем дифференциальное уравнение для переходных движений: свободных колебаний без действия внешних сил. Нам предстоит решить уравнение

$$\underline{L}(x) = 0. \tag{25.5}$$

Предположим, что мы как-то исхитрились одолеть это уравнение и нашли его частное решение x_1. Это значит, что нам известна функция x_1, для которой $\underline{L}(x_1) = 0$. После этого можно заметить, что ax_1 — тоже решение нашего уравнения; можно умножить частное решение уравнения на любую постоянную и получить новое решение. Иначе говоря, если какое-либо решение позволяет частице продвинуться на определенное расстояние, то она может совершить и более длинный рейс. *Доказательство*: $\underline{L}(ax_1) = a\underline{L}(x_1) = a\cdot 0 = 0$.

Предположим теперь, что нам удалось все-таки найти не *одно* частное решение x_1, но и второе x_2 (напомним, что когда мы в поисках переходного решения подставляли $x = \exp(i\alpha t)$, то мы нашли *два* значения α, т. е. два решения: x_1 и x_2). Покажем теперь, что комбинация $x_1 + x_2$ — тоже решение. Иными словами, если положить $x = x_1 + x_2$, то x — это опять решение уравнения. Почему? Потому что если $\underline{L}(x_1) = 0$ и $\underline{L}(x_2) = 0$, то $\underline{L}(x_1 + x_2) = \underline{L}(x_1) + \underline{L}(x_2) = 0 + 0 = 0$. Таким образом, мы вправе складывать отдельные решения, описывающие движения линейной системы.

Продолжая в том же духе, мы можем сложить шесть первых и два вторых решения; ведь если x_1 есть решение, то αx_1 — тоже решение. Другими словами, любая сумма двух решений, например $\alpha x_1 + \beta x_2$, удовлетворяет уравнению. Если нам посчастливится найти три решения, то мы увидим, что любая комбинация трех решений снова удовлетворяет уравнению, и т. д. Поток таких решений можно ограничить *независимыми решениями**; в случае осциллятора мы получили только *два* таких решения. Число независимых решений в общем случае зависит от того, что называется *числом степеней свободы.* Мы не будем сейчас подробно обсуждать этот вопрос, но в случае дифференциального уравнения второго порядка имеются лишь два независимых решения. Если мы найдем оба эти решения, то можно построить общее решение уравнения.

Посмотрим, что будет, когда на систему действует внешняя сила. Предположим, что нам встретилось уравнение

$$\underline{L}(x) = F(t) \tag{25.6}$$

и мы нашли его частное решение. Назовем его решением Джо $x_Д$, т. е. $\underline{L}(x_Д) = F(t)$. Хотелось бы найти еще одно решение этого уравнения. Добавим к решению Джо какое-нибудь решение свободного уравнения (25.5), например x_1. Тогда, вспомнив о (25.3), получим

$$\underline{L}(x_Д + x_1) = \underline{L}(x_Д) + \underline{L}(x_1) = F(t) + 0 = F(t). \tag{25.7}$$

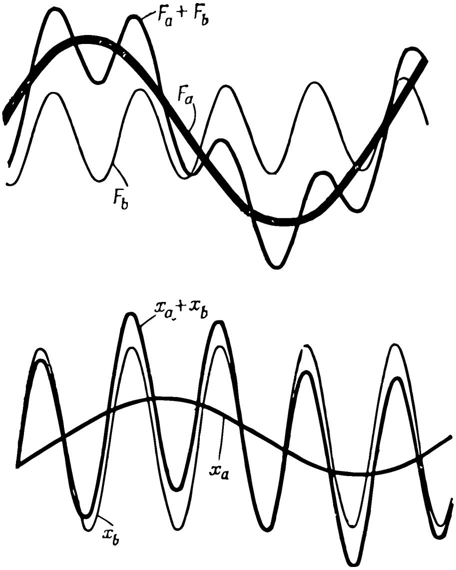
Следовательно, добавив к решению уравнения (25.6) любое «свободное» решение, мы получим новое решение. Свободное решение называют еще *переходным* решением.

Если неожиданно включить внешнюю силу, то движение осциллятора не сразу будет описываться равновесным (синусоидальным) решением: сначала к нему будут примешиваться переходные решения, которые, если подождать подольше, в конце концов «вымрут». Равновесное решение «выживет», потому что только оно соответствует внешней силе. В конце концов это будет единственным решением, но начальные движения системы зависят от того, какие обстоятельства сопутствуют включению силы.

§ 2. *Суперпозиция решений*

Перейдем теперь к другой интересной проблеме. Предположим, что нам задана какая-нибудь внешняя сила F_a (например, периодическая сила с частотой $\omega = \omega_a$, но наши выводы будут верны для любой зависимости силы от времени) и мы нашли движение, соответствующее этой силе (переход-

* Решения, которые нельзя выразить линейно одно через другое, называются независимыми решениями.



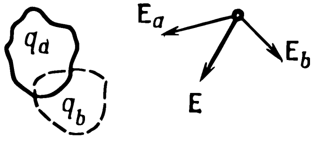
Фиг. 25.1. Пример принципа суперпозиции для линейных систем.

ные движения можно учитывать или не учитывать, это неважно). Предположим, что мы решили еще одну задачу — нашли движение в случае действия силы F_b. После этого предположим, что кто-то вбежал в комнату и сказал: «На контрольной задают задачу с силой F_a+F_b. Что нам делать?» Конечно, мы решим эту задачу — ведь мы сразу обнаружим одно замечательное свойство: сумма решений x_a и x_b, получаемых в том случае, если брать силы по отдельности, будет решением новой задачи. Для этого надо только вспомнить о (25.3):

$$\underline{L}\,(x_a + x_b) = \underline{L}\,(x_a) + \underline{L}\,(x_b) = F_a(t) + F_b(t). \qquad (25.8)$$

Это пример того, что называют *принципом суперпозиции* для линейных систем, и это очень важная вещь. Дело обстоит так: если мы сможем представить сложную силу в виде суммы нескольких более простых сил и сможем решить уравнение для каждой силы в отдельности, то мы сможем решить и первоначальное уравнение, потому что для этого надо просто объединить куски *решения* так же, как мы объединяли отдельные силы, чтобы получить *полную силу* (фиг. 25.1)

Еще один пример принципа суперпозиции. В гл. 12 (вып. 1) говорилось об одном из важнейших фактов, вытекающих из законов электричества. Если нам задано распределение зарядов q_a, можно найти электрическое поле $\mathbf{E}_a$, порождаемое этими зарядами в точке P. Другое распределение зарядов q_b порождает в этой же точке поле E_b. Оба эти распределения, действуя вместе, породят в точке P поле $\mathbf{E}$, которое представляет собой *сумму* полей $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{E}_b$. Иначе говоря, поле, соответствующее совокупности многих зарядов, — это векторная сумма полей, соответствующих отдельным зарядам. Аналогия с предыдущим примером бросается в глаза: ведь если мы знаем результат действия отдельных сил, то отклик на силу, *Фиг. 25.2. Принцип суперпозиции в электростатике.*

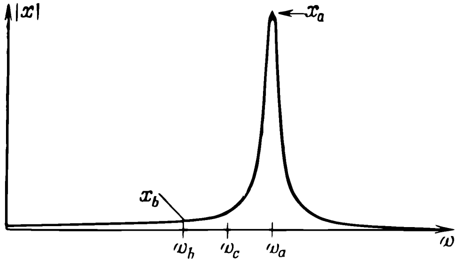


являющуюся суммой этих сил, будет суммой отдельных откликов.

Причина справедливости принципа суперпозиции в электричестве состоит в том, что основные законы электричества, определяющие электрическое поле (уравнения Максвелла) — это *линейные* дифференциальные уравнения, обладающие свойством (25.3). Силам в этих уравнениях соответствуют *заряды*, порождающие электрическое поле, а уравнения, определяющие электрическое поле по заданным зарядам, — линейные уравнения.

Чтобы придумать еще один пример принципа суперпозиции, спросите себя, как вам удается настроить свой радиоприемник на определенную радиостанцию, хотя одновременно работает очень много станций. Сигналы радиостанций — это колеблющиеся электрические поля очень высокой частоты, действующие на антенну радиоприемника. Амплитуда этих колебаний, правда, меняется, их модулирует голос диктора, но скорость этих изменений очень мала и об этом можно пока забыть. Когда вы слышите: «Станция работает на частоте 780 килогерц», это значит, что частота излучаемого антенной радиостанции электромагнитного поля равна 780 000 колебаний в секунду и это поле с точно такой же частотой раскачивает электроны в антенне вашего приемника. Но ведь в то же самое время поблизости может работать и другая радиостанция на другой частоте, скажем на частоте 550 *кгц*. Эта станция тоже раскачивает электроны вашей антенны. Как же отделяются сигналы, поступающие в приемник с частотой 780 *кгц*, от сигналов, имеющих частоту 550 *кгц*? Ведь вы же не слышали голоса обоих дикторов одновременно.

Первая часть электрической цепи радиоприемника — это линейная цепь. По принципу суперпозиции ее отклик на электрическое поле $F_a + F_b$ равен $x_a + x_b$. По всему выходит, что нам придется слушать обоих дикторов сразу. Но вспомним, что в *резонансной* цепи кривая отклика x на единичную силу F зависит от частоты примерно так, как это изображено на фиг. 25.3. В цепи с очень большим значением Q отклик имеет очень острый максимум. Предположим, что обе станции имеют примерно одинаковую амплитуду. *Отклик* равен сумме откликов x_a и x_b, но на фиг. 25.3 x_a громаден, а x_b очень мал. Таким образом, хотя оба сигнала одинаковы по силе, в приемнике они проходят через остро резонансную цепь,



Фиг. 25.3. Резонансная кривая с острым максимумом.

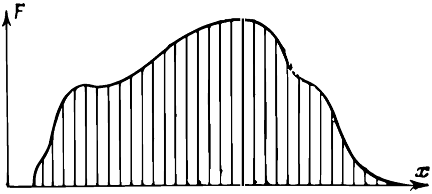
настроенную на частоту ω_a (частоту передач одной из станций), и отклик на эту частоту (станцию) значительно больше отклика на все остальные. Поэтому, несмотря на то что на антенну действуют оба сигнала, полный отклик почти целиком составлен из частоты ω_a, и мы можем выбрать ту станцию, какую пожелаем.

Несколько слов о механизме настройки. Как мы настраиваем радиоприемник? Мы изменяли частоту ω_0, меняя L или C цепи, потому что частота цепи зависит от комбинации L и C. Большинство радиоприемников устроено так, что в них меняется значение C. Поворачивая ручку настройки приемника, мы изменяем собственную частоту цепи. Пусть какому-то положению ручки соответствует частота ω_c; если нет радиостанций, работающих на этой частоте, приемник молчит. Вы продолжаете изменять емкость C цепи, пока не построите кривую отклика с резонансом при частоте ω_b, тогда вы услышите другую станцию. Вот так и настраивается радиоприемник; все дело в принципе суперпозиции, в сочетании с резонансным откликом *.

Чтоб закончить обсуждение, давайте подумаем, как поступить при анализе линейных задач с заданной силой, когда сила очень *сложно зависит от времени.* Можно поступать поразному, но есть два особенно удобных общих метода решения таких задач. Первый метод: предположим, что мы можем решить задачу в некоторых частных случаях, например в случае синусоидальных сил разных частот. Решать линейные уравнения в таких случаях — детская забава. Пусть нам и встретился этот «детский» случай. Теперь встает вопрос, нельзя ли представить любую силу в виде суммы двух или более «детских» сил? Мы уже показали на фиг. 25.1 довольно хитрую зависимость силы от времени; если туда добавить еще

* В новейших супергетеродинных приемниках дело, конечно, обстоит сложнее. Усилители приемника настроены на определенную промежуточную частоту; осциллятор с переменной настраивающейся частотой связан с входным сигналом нелинейной связью, порождая новую частоту (равную разности частот сигнала и осциллятора) — промежуточную частоту, которая и усиливается. Об этом мы поговорим в гл. 50.

Фиг. 25.4. *Сложную силу можно представить как последовательность коротких импульсов.*



несколько синусоид, то результирующая кривая будет выглядеть еще сложнее. Таким образом, простенькие «детские» силы могут породить очень сложную силу. Верно и обратное: практически каждая кривая может быть представлена в виде *бесконечной суммы* синусоидальных волн разной длины волн (или частоты). Таким образом, мы знаем, как представить заданную силу F в виде синусоидальных волн, поэтому решение x можно представить в виде суммы F синусоидальных волн, каждая из которых умножается на эффективное отношение x к F. Такой метод решения называют методом *преобразования Фурье*, или *анализом* (*разложением*) *Фурье*. Мы не будем сейчас делать такого разложения; пока достаточно только идеи.

Очень интересен другой способ решения сложных задач. Предположим, что кто-то после больших умственных усилий решил заданную нам задачу в случае одной частной силы — *импульсной*. Сила внезапно и быстро действует на систему, затем выключается и все опять спокойно. Нам теперь достаточно решить такую задачу лишь в случае единичной силы, потом умножением на подходящее число мы сможем получить любые силы. Мы знаем, что осциллятор откликается на импульсную силу затухающими колебаниями. А как быть в случае другой силы, например силы, изображенной на фиг. 25.4?

Такую силу можно представить в виде последовательных ударов молотком. Сначала всюду стоит тишина, потом кто-то берет в руки молоток и внезапно раздаются равномерные удары — удар, удар, удар, удар, ... и опять все тихо. Иначе говоря, непрерывно действующую силу можно представить в виде ряда последовательных импульсов, быстро следующих один за другим. Мы знаем последствия одного импульса, а последствием серии импульсов будет ряд затухающих колебаний; нарисуйте кривую колебаний для первого импульса, затем, немного отступя, такие же кривые для второго импульса, третьего и т. д. Потом сложите все кривые. Таким образом математически можно представить полное решение в случае произвольной силы, если можно решить задачу для импульса. Ответ для любой силы можно получить путем интегрирования. Это *метод функции Грина.* Функция Грина — это отклик системы на отдельный импульс, а метод функции Грина — это метод анализа действия силы суммирования откликов на импульсы.

Физические принципы, лежащие в основе обоих методов, очень просты; они просто напрашиваются, если понять смысл линейного уравнения, но *математические* методы содержат довольно сложные интегрирования и т. д.; мы мало подготовлены, чтобы прямо атаковать эти методы. К этому вы еще вернетесь, когда поднабьете руку в математике. Но сама *идея* методов, право, очень проста.

Наконец, скажем еще, почему *линейные* системы так важны. Ответ прост: потому что мы умеем решать линейные уравнения! Поэтому бóльшую часть времени мы будем решать линейные задачи. Вторая (и главная) причина заключается в том, что *основные законы физики часто линейны.* Например, уравнения Максвелла для законов электромагнетизма — линейные уравнения. Великие законы квантовой механики, насколько нам они известны, тоже сводятся к линейным уравнениям. Вот почему мы так много времени уделяем линейным уравнениям: если мы поняли линейные уравнения, мы готовы в принципе понимать очень многие вещи.

Упомянем еще другие ситуации, когда возникают линейные уравнения. Когда отклонения малы, многие функции можно *приближенно* заменить линейными. Например, точное уравнение движения маятника гласит

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta. \tag{25.9}$$

Это уравнение решается при помощи эллиптических функций, но легче его решить численно, как мы это делали в гл. 9 (вып. 1) при изучении ньютоновых законов движения. Большинство нелинейных уравнений вообще можно решить лишь *численно.* Для малых углов $\sin\theta$ практически равен θ, и в этом случае можно перейти к линейному уравнению. На этом примере можно сообразить, что есть много обстоятельств, при которых малые эффекты линейны (здесь это отклонения маятника на малые углы). Другой пример: если на пружине качается небольшой грузик, сила пропорциональна растяжению пружины. Если сильно потянуть за пружину, она может и порваться, значит, в этом случае сила совсем иначе зависит от расстояния! Линейные уравнения очень важны. Они *настолько* важны, что физики и инженеры, пожалуй, половину своего времени тратят на решение линейных уравнений.

§ 3. Колебания в линейных системах

Давайте вспомним, о чем мы говорили в нескольких последних главах. Физику колебательных движений очень легко затемнить математикой. На самом-то деле здесь физика очень проста, и если на минуту забыть математику, то мы увидим, что понимаем почти все, что происходит в колебательной системе. Во-первых, если мы имеем дело только с пружинкой и грузиком, то легко понять, почему система колеблется — это следствие инерции. Мы оттянули массу вниз, а сила тянет ее назад; наступает момент, когда сила равна нулю, но грузик не может остановиться мгновенно: у него есть импульс, который заставляет его двигаться. Теперь пружинка тянет грузик в другую сторону, грузик начинает двигаться взад и вперед. Итак, если бы не было трения, то, несомненно, получилось бы колебательное движение, и так оно и есть на самом деле. Но достаточно незначительного трения, чтобы размах следующих колебаний стал меньше, чем раньше.

Что случится потом, после многих циклов? Это зависит от характера и величины трения. Предположим, что мы придумали такое устройство, что при изменении амплитуды сила трения оказывается пропорциональной другим силам — инерции и натяжению. Иначе говоря, при малых колебаниях трение слабее, чем при колебаниях с большой амплитудой. Обычно сила трения таким свойством не обладает, так что можно предположить, что в нашем случае действуют силы трения особого рода — силы, пропорциональные скорости; тогда для больших колебаний эти силы будут больше, а для малых — меньше. Если у нас именно такой вид трения, то в конце каждого цикла система будет находиться в тех же условиях, что и в начале цикла, только всего будет меньше. Все силы будут меньше в тех же пропорциях: сила пружинки немного ослабнет, инерциальные эффекты будут меньше. Ведь теперь и ускорения грузика будут меньше, и сила трения ослабеет (об этом мы позаботились, создавая наше устройство). Если бы мы имели дело с такими силами трения, то увидели бы, что каждое колебание в точности повторяет первое, только амплитуда его стала меньше. Если после первого цикла амплитуда составляла, например, 90% первоначальной, то после первого цикла она будет равна 90% от 90% и т. д., т. е. *размах колебаний после каждого цикла уменьшается в одинаковое число раз*. Кривая, ведущая себя таким образом, — это экспоненциальная функция. Она изменяется в одинаковое число раз на любых интервалах одинаковой длины. Иначе говоря, если отношение амплитуды одного цикла к аплитуде предыдущего равна a, то такое же отношение для второго цикла равно a^2, затем a^3

и т. д. Таким образом, амплитуда колебаний после n циклов равна

$$A = A_0 a^n. \tag{25.10}$$

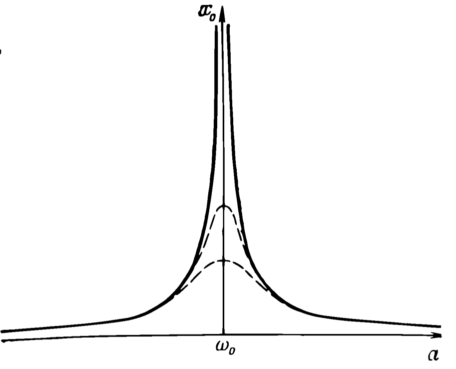
Но, конечно, $n \sim t$, поэтому общее решение будет произведением какой-нибудь периодической функции $\sin \omega t$ или $\cos \omega t$ на амплитуду, которая ведет себя примерно как b^t. Если b положительно и меньше единицы, то его можно записать в виде e^{-c}. Вот почему решение задачи о колебаниях при учете трения будет выглядеть примерно как $\exp(-ct)\cos \omega t$. Это очень просто.

Что случится, если трение не будет таким искусственным; например обычное трение о стол, когда сила трения постоянна по величине, не зависит от размаха колебаний и меняет свое направление каждые полпериода? Тогда уравнения движения станут нелинейными; решить их трудно, поэтому придется прибегнуть к описанному в гл. 2 численному решению или рассматривать по отдельности каждую половину периода. Самым мощным, конечно, является численный метод; с его помощью можно решить любое уравнение. Математический анализ используется лишь для решения простых задач.

Надо сказать, что математический анализ вообще не такое уж могучее средство исследования; с его помощью можно решить лишь простейшие возможные уравнения. Как только уравнение чуть усложняется, его уже нельзя решить аналитически. Численный же метод, с которым мы познакомились в начале курса, позволяет решить любое уравнение, представляющее физический интерес.

Пойдем дальше. Что можно сказать о резонансной кривой? Как объяснить резонанс? Представим сначала, что трения нет и мы имеем дело с чем-то, что может колебаться само по себе. Если подталкивать маятник каждый раз, когда он пройдет мимо нас, то очень скоро маятник начнет раскачиваться как сумасшедший. А что случится, если мы закроем глаза и, не следя за маятником, начнем толкать его с произвольной частотой, с какой захотим? Иногда наши толчки, попадая не в ритм, будут замедлять маятник. Но когда нам посчастливится найти верный темп, каждый толчок будет достигать маятника в нужный момент и он будет подниматься все выше, выше и выше. Таким образом, если не будет трения, то для зависимости амплитуды от частоты внешней силы мы получим кривую, которая выглядит, как сплошная линия на фиг. 25.5. Качественно мы поняли резонансную кривую; чтобы найти ее точные очертания, пожалуй, придется

Ф и г. 25.5. *Резонансная кривая, отражающая разнообразные виды трения.*



прибегнуть к помощи математики. Кривая стремится к бесконечности, если $\omega \to \omega_0$, где ω_0 — собственная частота осциллятора.

Предположите, что существует слабое трение. Тогда при незначительных отклонениях осциллятора влияние трения сказывается слабо и резонансная кривая вдали от максимума не изменяется. Однако около резонанса кривая уже не уходит в бесконечность, а просто поднимается выше, чем в остальных местах. Когда амплитуда колебаний достигает максимума, работа, совершенная нами в момент толчка, полностью компенсирует потери энергии на трение за период. Таким образом, вершина кривой закруглена, и она уже не уходит в бесконечность. Чем больше трение, тем больше сглажена вершина кривой. Кто-нибудь может сказать: «Я думал, что ширины резонансных кривых зависят от трения». Так можно подумать, потому что резонансные кривые рисуют, принимая за единицу масштаба вершину кривой. Однако если нарисовать все кривые в одном масштабе (это прояснит дело больше, чем изучение математических выражений), то окажется, что трение срезает вершину кривой! Если трение мало, мы можем подняться высоко по резонансной кривой; когда трение сгладит кривую, мы на том же интервале частот поднимаемся на меньшую высоту, и это создает ощущение ширины. Таким образом, чем выше пик кривой, тем ближе к максимуму точки, где высота кривой равна половине максимума.

Наконец, подумаем, что произойдет при очень большом трении. Ясно, что, если трение очень велико, система вообще не осциллирует. Энергии пружинки едва-едва хватит на борьбу с силами трения, и грузик будет медленно ползти к положению равновесия.

§ 4. Аналогии в физике

Продолжая обзор, заметим, что массы и пружинки — это не единственные линейные системы; есть и другие. В частности, существуют электрические системы (их называют линейными цепями), полностью аналогичные механическим системам. Мы не старались до конца выяснить, *почему* каждая часть электрической цепи работает так, а не иначе; это нам еще трудно понять. Можно просто поверить, что то или иное поведение каждого элемента цепи можно подтвердить экспериментально.

Возьмем для примера простейшее устройство. Приложим к куску проволоки (сопротивлению) разность потенциалов V. Это значит, что если от одного конца проволоки до другого проходит заряд q, то при этом совершается работа qV. Чем выше разность потенциалов, тем большая работа совершается при «падении» заряда с высокопотенциального конца проволоки на низкопотенциальный. Заряды, проходя с одного конца проволоки на другой, выделяют энергию. Но зарядам не так-то просто плыть вдоль проволоки: атомы проволоки оказывают сопротивление потоку, и это сопротивление подчиняется закону, справедливому почти для всех *обычных* материалов: ток I пропорционален приложенной к проволоке разности потенциалов. Иначе говоря, число зарядов, проходящих через проволоку за 1 *сек*, пропорционально силе, с которой их толкают:

$$V = IR = R\frac{dq}{dt}. \tag{25.11}$$

Коэффициент R называют *сопротивлением*, а само уравнение — *законом Ома*. Единица сопротивления — *ом*; он равен отношению одного вольта (1 *в*) к одному амперу (1 *а*). В механических устройствах очень трудно отыскать силу трения, пропорциональную скорости, а в электрических цепях — это дело обычное и закон Ома справедлив для большинства металлов с очень высокой точностью.

Нас интересует, много ли совершается работы за 1 *сек* при прохождении зарядов по проволоке (эту же величину можно назвать потерей мощности или выделяемой зарядами энергией)? Чтобы прогнать заряд q через разность потенциалов V, надо совершить работу qV; таким образом, работа за 1 *сек* равна $V(dq/dt)$, или VI. Это выражение можно записать иначе: $IR\cdot I = I^2R$. Эту величину называют *тепловыми потерями*; вследствие закона сохранения энергии такое количество теплоты производит в 1 *сек* сопротивление проволоки. Эта теплота накаляет проволоку электрической лампы.

У механических устройств есть, конечно, и другие интересные свойства, например такие, как масса (инерция). В электрических цепях, оказывается, тоже существуют аналоги инерции. Можно построить прибор, называемый *индуктором*, а свойство, которым он обладает, носит название *индуктивность*. Ток, попадающий в такой прибор, *не хочет останавливаться*. Чтобы изменить ток, к этому прибору нужно приложить разность потенциалов. Если по прибору течет постоянный ток, то падения потенциалов нет. Цепи с постоянным током ничего «не знают» об индуктивности; эффекты индуктивности обнаруживаются только при *изменениях* тока. Описывающее эти эффекты уравнение гласит:

$$V = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}, \qquad (25.12)$$

а индуктивность измеряется в единицах, которые называются *генри* (*гн*). Приложенная к прибору с индуктивностью в 1 *гн* разность потенциалов в 1 *в* изменяет ток на 1 *а/сек*. Уравнение (25.12), если хотите — электрический аналог закона Ньютона: V соответствует F, L соответствует m, а I — скорости!

Все последующие уравнения, описывающие обе системы, выводятся одинаково, потому что мы просто можем заменить буквы в уравнении для одной системы и получить уравнение для другой системы; любой вывод, сделанный при изучении одной системы, будет верен и для другой системы.

Какое электрическое устройство соответствует пружинке, в которой сила пропорциональна растяжению? Если начать с $F = kx$ и заменить F на V, а x на q, то получим $V = \alpha q$. Мы уже знаем, что такое устройство существует; более того, это единственный из трех элементов цепи, работу которого мы понимаем. Мы уже знакомились с парой параллельных пластинок и обнаружили, что если зарядить пластинки равными, но противоположными по знаку зарядами, то поле между пластинками будет пропорционально величине заряда. Работа, совершаемая при переносе единичного заряда через щель от одной пластинки к другой, прямо пропорциональна заряду пластинок. Эта работа служит *определением* разности потенциалов и равна линейному интегралу электрического поля от одной пластинки к другой. По исторически сложившимся причинам постоянную пропорциональности называют не C, а $1/C$, т. е.

$$V = \frac{q}{C}. \qquad (25.13)$$

Единица емкости называется *фарадой* (*ф*); заряд в 1 *кулон*, помещенный на каждой пластинке конденсатора емкостью в 1 *ф*, создает разность потенциалов в 1 *в*. Вот все нужные аналогии. Теперь можно, заменив m на L, q на x и т. д., написать урав ение для резонансной цепи

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma m\frac{dx}{dt}+kx=F, \tag{25.14}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V. \tag{25.15}$$

Все, что мы знаем об уравнении (25.14), можно применить и к уравнению (25.15). Переносится каждое *следствие*; аналогов так много, что с их помощью можно сделать замечательные вещи.

Предположим, что мы натолкнулись на очень сложную механическую систему: имеется не одна масса на пружинке, а много масс на многих пружинках, и все это перепутано. Что нам делать? Решать уравнения? Можно и так. Но попробуем собрать *электрическую* цепь, которая будет описываться теми же уравнениями, что и механическое устройство! Если мы собрались анализировать движение массы на пружинке, почему бы нам не собрать цепь, в которой индуктивность пропорциональна массе, сопротивление пропорционально γm, $1/C$ пропорционально k? Тогда электрическая цепь, конечно, будет точным аналогом механического устройства в том смысле, что любой отклик q на V (V соответствует действующей силе) в точности соответствует отклику x на силу! Перепутав в цепи великое множество сопротивлений, индуктивностей и емкостей, можно получить цепь, *имитирующую* сложнейшую механическую систему. Что в этом хорошего? Каждая задача, механическая или электрическая, столь же трудна (или легка), как и другая: ведь они в точности эквивалентны. Открытие электричества не помогло решить *математические уравнения*, но дело в том, что всегда легче *собрать* электрическую цепь и *изменять* ее параметры.

Предположим, что мы построили автомобиль и хотим узнать, сильно ли его будет трясти на ухабах. Соберем электрическую цепь, в которой индуктивности скажут нам об инерции колес, об упругости колес представление дадут емкости, сопротивления заменят амортизаторы и т. д. В конце концов мы заменим элементами цепи все части автомобиля. Теперь дело за ухабами. Хорошо, подадим на схему *напряжение* от генератора — он сможет изобразить любой ухаб; измеряя заряд на соответствующем конденсаторе, мы получаем представление о раскачке колеса. Измерив заряд (это сделать легко), мы решим, что автомобиль трясет слишком сильно. Надо что-то сделать. Го ли ослабить амортизаторы, то ли усилить их. Неужели придется переделывать автомобиль, снова проверять, как его трясет, а потом снова переделывать? Нет! Просто нужно повернуть ручку сопротивления: сопротивление номер 10 — это амортизатор номер 3; так можно усилить амортизацию. Трясет еще сильнее — не страшно, мы ослабим амортизаторы. Все равно трясет. Изменим упругость пружины (ручка номер 17). Так мы всю наладку произведем с помощью *электричества*, многократным поворотом ручек.

Вот вам *аналоговая вычислительная машина*. Так называют устройства, которые имитируют интересующие нас задачи, описываемые теми же уравнениями, но совсем другой природы. Эти устройства легко построить, на них легко провести измерения, отладить их, и... разобрать!

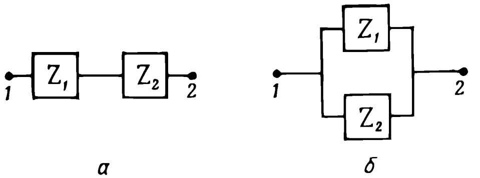
§ 5. *Последовательные и параллельные сопротивления*

Обсудим, наконец, еще один важный вопрос, хотя он не совсем подходит по теме. Что делать с электрической цепью, если в ней много элементов? Например, когда индуктивность, сопротивление и емкость соединены, как показано на фиг. 24.2 (стр. 148), то все заряды проходят через каждый из трех элементов так, что связывающий элементы ток во всех точках цепи одинаков. Поскольку ток всюду одинаков, падение напряжения на сопротивление равно IR, на индуктивности равно $L(dI/dt)$ и т. д. Полное падение напряжения получается суммированием частичных падений, и мы приходим к уравнению (25.15). Используя комплексные числа, мы решили это уравнение в случае равновесного отклика на синусоидальную силу. Мы нашли, что $\hat{V}=\hat{Z}\hat{I}$ ($\hat{Z}$ называется *импедансом* цепи). Зная импеданс, легко найти ток в цепи $\hat{I}$, если к цепи приложено синусоидальное напряжение $\hat{V}$.

Предположим, что нужно собрать более сложную цепь из двух кусков, импедансы которых равны $\hat{Z}_1$ и $\hat{Z}_2$; соединим их *последовательно* (фиг. 25.6, *а*) и приложим напряжение. Что случится? Задача немного сложнее предыдущей, но разобраться в ней нетрудно: если через $\hat{Z}_1$ течет ток $\hat{I}_1$, то падение напряжения на $\hat{Z}_1$ равно $\hat{V}_1=\hat{I}\hat{Z}_1$, а падение напряжения на $\hat{Z}_2$ будет $\hat{V}_2=\hat{I}\hat{Z}_2$. *Через оба элемента цепи течет одинаковый ток.* Полное падение напряжения вдоль такой цепи равно $\hat{V}=\hat{V}_1+\hat{V}_2=(\hat{Z}_1+\hat{Z}_2)\hat{I}$. Таким образом, падение напряжения в такой цепи можно записать в виде $\hat{V}=\hat{I}\hat{Z}_s$, а $\hat{Z}_s$ — импеданс системы, составленной из двух последовательно соединенных элементов, равен сумме импедансов отдельных элементов

$$\hat{Z}_s=\hat{Z}_1+\hat{Z}_2. \tag{25.16}$$

Но это не единственный способ решения вопроса. Можно соединить отдельные элементы *параллельно* (фиг. 25.6, *б*).



Фиг. 25.6. Импедансы, соединенные последовательно (а) и параллельно (б).

При таком соединении, если соединительные провода считать идеальными проводниками, к обоим элементам приложено одинаковое внешнее напряжение, а сила тока в каждом элементе не зависит от другого элемента. Ток через $\hat{Z}_1$ равен $\hat{I}_1 = \hat{V}/\hat{Z}_1$, ток в $\hat{Z}_2$ равен $\hat{I}_2 = \hat{V}/\hat{Z}_2$. Напряжение в обоих случаях *одинаково*. Полный ток через концы цепи равен сумме токов в отдельных частях цепи: $\hat{I} = V/\hat{Z}_1 + \hat{V}/\hat{Z}_2$. Это можно записать и так:

$$\hat{V} = \frac{\hat{I}}{(\hat{1}/\hat{Z}_1) + (\hat{1}/\hat{Z}_2)} = \hat{I}\hat{Z}_p,$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\hat{Z}_p} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}. \tag{25.17}$$

Многие сложные цепи иногда становятся более понятными, если расчленить их на куски, выяснить, чему равны импедансы отдельных частей, а затем шаг за шагом следить за соединением частей, помня о только что выведенных правилах. Если мы собрали цепь из большого числа произвольно соединенных элементов и создаем в этой цепи разности потенциалов при помощи небольших генераторов, импедансом которых можно пренебречь (когда заряд проходит через генератор, то потенциал возрастает на V), то при анализе цепи можно использовать такие правила:

1) сумма токов, протекающих через любое соединение, равна нулю; ведь притекший к любому соединению ток должен обязательно вытечь из него;
2) если заряд, двигаясь по замкнутой петле, вернулся в то место, откуда начал путешествие, полная работа должна быть равна нулю.

Эти правила называются *законами Кирхгофа*. Систематическое применение этих правил часто облегчает анализ работы сложных цепей. Мы к ним вернемся, когда будем говорить о законах электричества.

ПРИЛОЖЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Символ			Система единиц СИ	СГС
c	Скорость света	2,997925	$\cdot 10^8$ *м/сек*	$\cdot 10^{10}$ *см/сек*
G	Гравитационная постоянная	6,670	$\cdot 10^{-11}$ *ньютон* $м^2/кг^2$	$\cdot 10^8$ *дин*$\cdot см^2/г^2$
e	Элементарный заряд	1,60210	$\cdot 10^{-19}$ *кулон*	—
		4,80324		$\cdot 10^{-10}$ *эл.-ст. ед.*
N	Число Авогадро	6,0220	$\cdot 10^{26}$ 1/*кг*$\cdot$*моль*	$\cdot 10^{23}$ 1/*г*$\cdot$*моль*
u	Атомная единица массы	1,66043	$\cdot 10^{-27}$ *кг*	$\cdot 10^{-24}$ *г*
$\hbar$	Постоянная Планка	1,054494	$\cdot 10^{-34}$ *дж*$\cdot$*сек*	$\cdot 10^{-27}$ *эрг*$\cdot$*сек*

Примечание. За атомную единицу массы выбирается $^1/_{12}$ массы изотопа углерода C^{12}. Число Авогадро — это число атомов в 12 *кг* (в системе СИ) или 12 *г* (в системе СГС) этого изотопа.

	Символ	Масса, *Мэв*	Время жизни, *сек*
Фотон		0	Стабилен
ЛЕПТОНЫ			
Нейтрино и антинейтрино	ν_e, $\tilde{\nu}_e$	0	Стабильны
	ν_μ, $\tilde{\nu}_\mu$	0	Стабильны
Электрон	e^+, e^-	0,5110034 $\pm$0,0000014	Стабильны
Мюон	μ^+, μ^-	105,65948 $\pm$0,0035	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$
МЕЗОНЫ			
Пион	π^+, π^-	139,5688 $\pm$0,0064	$2{,}55 \cdot 10^{-8}$
	π^0	134,9645 $\pm$0,0074	$1{,}80 \cdot 10^{-16}$
Каон	K^+, K^-	493,707 $\pm$0,037	$1{,}88 \cdot 10^{-10}$
	K^0_S	497,70 $\pm$0,13	$0{,}886 \pm 0{,}007 \cdot 10^{-7}$
	K^0_L	497,70 $\pm$0,13	$5{,}179 \pm 0{,}040 \cdot 10^{-8}$

	Символ	Масса, *Мэв*	Время жизни, *сек*
БАРИОНЫ			
Нуклоны и антинуклоны	p, $\bar{p}$	938,2796 $\pm$0,0027	Стабильны
	n, $\bar{n}$	939,5731 $\pm$0,0027	$1{,}2 \cdot 10^{3}$
Гипероны и антигипероны	Λ, $\bar{\Lambda}$	1115,60 $\pm$0,05	$2{,}58 \cdot 10^{-10}$
	Σ^{+}, $\overline{\Sigma^{+}}$	1189,37 $\pm$0,06	$0{,}80 \cdot 10^{-10}$
	Σ^{0}, $\overline{\Sigma^{0}}$	1192,48 $\pm$0,08	$<10^{-14}$
	Σ^{-}, $\overline{\Sigma^{-}}$	1197,35 $\pm$0,06	$1{,}48 \cdot 10^{-10}$
	Ξ^{0}, $\overline{\Xi^{0}}$	1314,9 $\pm$0,6	$3{,}0 \cdot 10^{-10}$
	Ξ^{-}, $\overline{\Xi^{-}}$	1321,29 $\pm$0,14	$1{,}65 \cdot 10^{-10}$
	Ω^{-}, $\overline{\Omega^{-}}$	1672 $\pm$0,4	$1{,}3 \cdot 10^{-10}$

Оглавление

ВЫПУСК 2

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».

Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Редактор В. Самсонова
Художник И. Литвишко
Художественный редактор Е. Самойлов
Технический редактор Н. Панфилова

Сдано в набор 23/I 1976 г. Подписано к печати 27/V 1976 г.
Бумага № 3 $60\times90^1/_{16}$=13,75 бум. л. 27,5 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 25,08.
Изд. № 2/8920. Цена 1 р. 94 к. Зак. 55

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

1р. 54к.