

3.4

• ФЕЙНМАН  
• ЛЕЙТОН  
• СЭНДС

Р  
ЕЙНМАНОВСКИЕ

Л  
ЕКЦИИ

Р  
ПО ФИЗИКЕ

3

ИЗЛУЧЕНИЕ · ВОЛНЫ · КВАНТЫ

4

КИНЕТИКА · ТЕПЛОТА · ЗВУК

Ф  
Л  
Ф



**THE *F* EYMAN  
LECTURES  
ON PHYSICS**

**VOLUME 1**

**RICHARD P. FEYNMAN  
ROBERT B. LEIGHTON  
MATTHEW SANDS**

**ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC.  
READING, MASSACHUSETTS, PALO ALTO, LONDON  
1963**

**Р. ФЕЙНМАН  
Р. ЛЕЙТОН  
М. СЭНДС**

# **Ф**ЕЙНМАНОВСКИЕ **ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ**

**3**

**ИЗЛУЧЕНИЕ ● ВОЛНЫ ● КВАНТЫ**

**4**

**КИНЕТИКА ● ТЕПЛОТА ● ЗВУК**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
МОСКВА 1976**

Перевод с английского

А. В. Ефремова, Г. И. Копылова, Ю. А. Симонова, О. А. Хрусталева

Под редакцией  
Я. А. Смородинского

Издание третье

*Редакция литературы по физике*

Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Редактор В. Самсонова

Художник И. Литвишко. Художественный редактор Е. Самойлов

Технический редактор Н. Панфилова

Сдано в набор 11/III 1976 г. Подписано к печати 29/VII 1976 г. Бумага № 3 60 × 90/16 = 15,50 бум.л., 31 печ. л. Уч.-изд. л. 29,60. Изд. № 2/8921. Цена 2 р. 25 к. Зак. 107

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР», Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете  
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,  
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

## ОПТИКА. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ВРЕМЕНИ

### § 1. Свет

Эта глава — первая из посвященных *электромагнитному излучению*. Свет, с помощью которого мы видим, составляет только небольшую часть широкого спектра явлений одной природы, причем разные части спектра характеризуются разными значениями определенной физической величины. Эту величину называют «длиной волны». По мере того как она пробегает значения в пределах спектра видимого света, цвет световых лучей меняется от красного до фиолетового. Систематическое изучение спектра от длинных волн к коротким лучше всего начать с так называемых *радиоволн*. В технике радиоволны получают в широком диапазоне длин волн и даже более длинные, чем те, которые используются в обычном радиовещании. В радиовещании применяются волны длиной около 500 м, за ними идут так называемые *короткие волны*, далее радиолокационный диапазон, миллиметровый диапазон и т. д. На самом деле между разными диапазонами нет никаких границ, природа их не создала. Числа, которые соответствуют разным диапазонам, и, конечно, сами названия диапазонов весьма условны.

Далее, пройдя долгий путь через миллиметровый диапазон, мы придем к *инфракрасным* волнам, а оттуда к *спектру видимого света*. Спустившись за его границы, мы попадем в *ультрафиолетовую* область. За ультрафиолетовой областью начинаются *рентгеновские* лучи, но границу между ними точно определить мы не можем, она где-то около  $10^{-8}$  м, или  $10^{-2}$  мк. Это область *мягких* рентгеновских лучей, за нею идет обычное рентгеновское

- § 1. Свет
- § 2. Отражение и преломление
- § 3. Принцип наименьшего времени Ферма
- § 4. Применения принципа Ферма
- § 5. Более точная формулировка принципа Ферма
- § 6. Квантовый механизм

излучение, затем *жесткое* излучение, потом  $\gamma$ -излучение и так ко все меньшим значениям величины, которую мы назвали длиной волны.

В пределах обширного диапазона длин волн имеется не менее трех областей, где возможны весьма интересные приближения. Существует, например, область, где длина волны мала по сравнению с размерами приборов, с помощью которых изучают такие волны; более того, энергия фотонов, если говорить на языке квантовой механики, меньше порога чувствительности приборов. В этой области первое грубое приближение дает метод, называемый *геометрической оптикой*. С другой стороны, когда длина волны становится порядка размеров прибора (такие условия проще создать для радиоволн, чем для видимого света), а энергия фотонов по-прежнему ничтожна, применяется другое очень полезное приближение, в котором учтены волновые свойства света, но снова пренебрегается эффектами квантовой механики. Это приближение основано на *классической теории электромагнитного излучения*; оно будет обсуждаться в одной из последующих глав. Наконец, для еще более коротких длин волн, когда энергия фотонов велика по сравнению с чувствительностью приборов и от волнового характера излучения можно отвлечься, снова возникает простая картина. Такую *фотонную* картину мы рассмотрим только в общих чертах. Полную теорию, описывающую все на основе единой модели, вы узнаете гораздо позже.

В этой главе мы ограничимся той областью, для которой эффективна геометрическая оптика, и, как будет видно в дальнейшем, длина волны и фотонный характер света роли не играют. Мы даже не зададим вопроса, а *что такое свет*, и только опишем *его поведение* в масштабе длин и времен, много больших, чем некоторые характерные величины. Из сказанного ясно, что речь пойдет об очень грубом приближении, потом нам придется «отучаться» от изложенных здесь методов. Но отучимся мы легко, потому что почти сразу перейдем к более точному анализу.

Геометрическая оптика, хотя и является приближением, представляет огромный интерес с технической и исторической точек зрения. На истории этого вопроса мы намеренно остановимся подробнее, чтобы дать представление о развитии физической теории или физической идеи вообще.

Начнем с того, что свет знаком каждому и известен с незапамятных времен. Возникает первая проблема: каков механизм *видения* света? Теорий было много, но в конце концов они свелись к одной: существует нечто, попадающее в глаз при отражении от предметов. Эта идея существует уже давно и столь привычна, что теперь даже трудно себе представить

другие идеи, предложенные, однако, весьма умными людьми, например, что нечто выходит из глаза и чувствует окружающие предметы. Были и другие важные наблюдения: свет распространяется из одной точки в другую *по прямой линии*, если ничто ему не препятствует и лучи света не взаимодействуют друг с другом. Иными словами, свет распространяется в комнате во всевозможных направлениях, но тот луч, который перпендикулярен направлению нашего взгляда, не воздействует на лучи, идущие к нам от какого-либо предмета. В свое время это был сильнейший аргумент против корпускулярной теории света, и его использовал Гюйгенс. Но если представить себе свет в виде пучка летящих стрел, то как могли бы тогда другие стрелы легко пронизывать его? На самом деле ценность таких схоластических доказательств весьма сомнительна. Всегда можно сказать, что свет состоит именно из таких стрел, которые свободно проходят друг через друга!

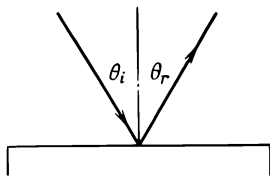
## § 2. Отражение и преломление

Все сказанное дает представление об основной *идее* геометрической оптики. Теперь перейдем к ее количественному описанию. До сих пор мы разбирали случай, когда свет распространяется между двумя точками по прямой линии. Посмотрим теперь, что происходит, когда свет на своем пути наталкивается на какой-то объект (фиг. 26.1). Простейший объект — это зеркало, и в этом случае мы знаем такой закон: свет, попадая на зеркало, не проходит через него, а отражается и снова уходит по прямой линии, причем направление прямой меняется при изменении наклона зеркала. Еще в древности люди были заняты вопросом: каково соотношение между этими двумя углами? Это очень простое соотношение, и найдено оно было давным-давно. Падающий на зеркало луч после отражения движется по такому пути, что углы между каждым лучом и зеркалом равны. По ряду соображений углы удобно отсчитывать от нормали к поверхности зеркала. Тогда так называемый закон отражения гласит:

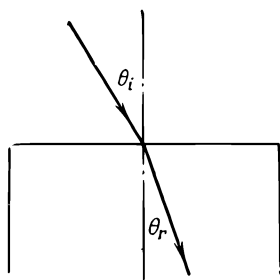
$$\theta_i = \theta_r. \quad (26.1)$$

В отличие от простого закона отражения более сложный закон возникает при переходе света из одной среды в другую,

Фиг. 26.1. Угол падения равен углу отражения.







Ф и г. 26.2. При переходе из одной среды в другую луч света преломляется.

например из воздуха в воду; здесь тоже свет движется не по прямой. Траектория луча в воде образует некоторый угол с траекторией в воздухе. Когда луч падает почти вертикально, угол отклонения  $\theta_i$  невелик; если же луч направить под большим углом, отклонение становится значительным (фиг. 26.2). Возникает вопрос: каково соотношение между двумя углами? В древности эта проблема долго ставила людей в тупик, но ответ тогда так и не был найден! Тем не менее именно по этому вопросу можно найти очень редкую в древнегреческой физике сводку экспериментальных данных!

Клавдий Птолемей составил таблицу углов отклонения света в воде для целого ряда углов падения из воздуха. В табл. 26.1 приведены углы в воздухе в градусах и соответствующие углы для воды. (Принято считать, что древние греки никогда не ставили опытов. Но, не зная закона, такую таблицу можно составить только на основании эксперимента.)

Таблица 26.1

● ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА  
ПО ПТОЛЕМЕЮ

Угол в воздухе, град	Угол в воде, град
10	8
20	15,5
30	22,5
40	28
50	35
60	40,5
70	45
80	50

Надо отметить, однако, что данные таблицы слишком хорошо ложатся на параболу, поэтому они не могли быть результатом независимых измерений; это лишь ряд чисел, интерполированных по немногим измеренным точкам.)

Это был очень важный шаг в становлении физического закона: сначала мы наблюдаем эффект, затем проводим измерения и сводим результаты в таблицу, после чего пытаемся найти закон, по которому одни величины сопоставляются с

другими. Приведенная таблица была составлена еще в 140 г. нашей эры, и вплоть до 1621 г. никто не смог найти такого закона, который связал бы эти два угла! Закон был установлен голландским математиком Виллебрордом Снеллом и читается так: пусть  $\theta_i$  есть угол в воздухе и  $\theta_r$  есть угол в воде, тогда синус  $\theta_i$  равен синусу  $\theta_r$ , умноженному на некоторую константу

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r. \quad (26.2)$$

Для воды число  $n$  равно примерно 1,33. Равенство (26.2) называется *законом Снелла*; он позволяет *предсказать* отклонение света при переходе из воздуха в воду. В табл. 26.2 указаны углы в воде и воздухе, полученные с помощью закона Снелла. Обратите внимание на удивительное согласие с таблицей Птолемея.

Таблица 26.2      ●      ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА  
ПО ЗАКОНУ СНЕЛЛА

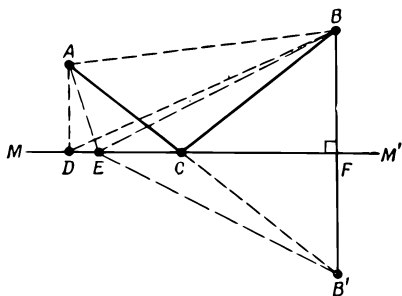
Угол в воздухе, град	Угол в воде, град
10	7,5
20	15
30	22
40	29
50	35
60	40
70	48
80	49,5

### § 3. Принцип наименьшего времени Ферма

По мере развития науки нам хочется получить нечто большее, чем просто формулу. Сначала мы наблюдаем явления, затем с помощью измерений получаем числа и наконец находим закон, связывающий эти числа. Но истинное величие науки состоит в том, что мы *можем найти такой способ рассуждения*, при котором закон становится *очевидным*.

Впервые общий принцип, наглядно объясняющий закон поведения света, был предложен Ферма примерно в 1650 г. и получил название *принципа наименьшего времени*, или *принципа Ферма*. Вот его идея: свет выбирает из всех возможных путей, соединяющих две точки, тот путь, который требует *наименьшего времени* для его прохождения.

Покажем сначала, что это верно для случая с зеркалом, что этот простой принцип объясняет и прямолинейность распространения света, и закон отражения света от зеркала. Мы явно делаем успехи!



Фиг. 26.3. Иллюстрация принципа наименьшего времени.

Попробуем решить следующую задачу. На фиг. 26.3 изображены две точки  $A$  и  $B$  и плоское зеркало  $MM'$ . Каким путем можно за кратчайшее время попасть из точки  $A$  в точку  $B$ ? *Ответ:* по прямой, проведенной из  $A$  в  $B$ ! Но если мы добавим дополнительное условие, что свет должен *попасть* на зеркало, отразиться от него и вернуться снова в точку  $B$  опять-таки за кратчайшее время, то ответить не так уж просто. Один путь — как можно скорее добраться до зеркала, а оттуда в точку  $B$ , т. е. по пути  $ADB$ . Путь  $DB$ , конечно, длинен. Если сдвинуться чуть-чуть вправо в точку  $E$ , то первый отрезок пути немного увеличится, но зато сильно *уменьшится* второй, и время прохождения поэтому станет меньше. Как найти точку  $C$ , для которой время прохождения наименьшее? Воспользуемся для этого хитрым геометрическим приемом.

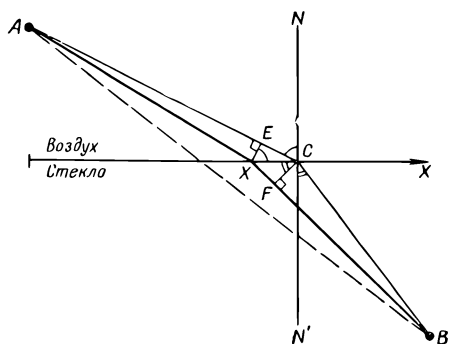
По другую сторону зеркала  $MM'$ , на таком же расстоянии от него, что и точка  $B$ , построим искусственную точку  $B'$ . Затем проведем линию  $EB'$ . Поскольку угол  $BFM$  прямой и  $BF = FB'$ , то  $EB$  равно  $EB'$ . Следовательно, сумма длин двух отрезков  $AE + EB$ , пропорциональная времени их прохождения (если свет проходит с постоянной скоростью), равна сумме длин  $AE + EB'$ . Теперь нужно выяснить, когда сумма длин будет наименьшей. *Ответ:* когда точка  $C$  будет лежать на *прямой*, соединяющей  $A$  и  $B'$ ! Другими словами, нужно идти к мнимой точке  $B'$  (мнимому изображению точки  $B$ ) и тогда мы найдем точку  $C$ . Далее, если  $ACB'$  — прямая линия, угол  $BCF$  равен углу  $B'CF$  и, следовательно, углу  $ACM$ . Таким образом, утверждение о равенстве углов падения и отражения равносильно утверждению, что свет при отражении от зеркала в точку  $B$  выбирает путь, требующий *наименьшего времени*. Еще Герон Александрийский высказал утверждение, что свет при отражении идет из одной точки в другую по *кратчайшему пути*, так что идея принципа, как видите, не нова. Именно это вдохновило Ферма, и он попробовал применить этот принцип к явлению преломления. Но свет, преломляясь, очевидным образом идет не по *кратчайшему пути*, и

тогда Ферма предложил другой принцип — свет выбирает путь, *время* прохождения по которому *наименьшее*.

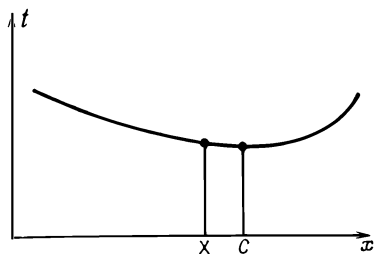
Прежде чем перейти к вопросу о преломлении света, сделаем еще одно замечание об отражении от зеркала. Если поместить источник света в точку  $B$  и направить луч на зеркало, свет, отражаясь от зеркала, пройдет из  $B$  в  $A$  так, как будто бы источник находится в  $B'$ , а зеркала *нет вообще*. Наш глаз видит только тот свет, который действительно входит в него; и хотя источник расположен в точке  $B$ , зеркало направляет свет в глаз точно так, как *будто* источник находится в  $B'$ , и система глаз — мозг интерпретирует именно так это явление. Поэтому иллюзия, что источник или предмет находится за зеркалом, вызывается только тем фактом, что свет попадает в глаз физически именно так, как если бы предмет действительно был *позади* зеркала (если не принимать во внимание пыль на зеркале и то, что нам известно, что зеркало реально существует, и другие сведения, которые учитывает наш мозг).

Покажем теперь, что из принципа наименьшего времени вытекает закон Снелла для преломления. Мы должны, конечно, что-то предположить относительно скорости света в воде. Будем считать, что скорость света в воде меньше скорости света в воздухе, и отношение второй скорости к первой обозначим через  $n$ .

Наша задача по-прежнему состоит в том, чтобы на фиг. 26.4 попасть из точки  $A$  в  $B$  за *наименьшее время*. Чтобы убедиться, что путь по прямой здесь не самый быстрый, представим себе следующую ситуацию: хорошенькая девушка падает из лодки в воду в точке  $B$  и кричит, просит спасти. Линия  $X$  — это берег. Вы находитесь на суше в точке  $A$  и видите, что произошло, вы умеете плавать и умеете бегать. Но бегаеы вы быстрее, чем плаваеы. Что вам делать? Бежать по прямой к берегу? (Конечно!) Но, немного поразмыслив, вы поймете, что выгоднее пробежать несколько дольше по



Фиг. 26.4. Иллюстрация принципа Ферма для случая преломления.



Фиг. 26.5. Наименьшее время получается при выборе точки  $C$ . Соседние точки приводят примерно к такому же времени прохождения.

берегу, чтобы уменьшить ваш путь в воде, потому что в воде вы будете двигаться гораздо медленнее. (Рассуждая таким образом, лучше всего было бы заранее тщательно *вычислить* путь!) Во всяком случае, давайте попытаемся показать, что окончательное решение задачи — это путь  $ACB$ , который занимает из всех возможных наименьшее время. Если этот путь кратчайший по времени, то любой другой окажется длиннее. Поэтому если отложить на графике зависимость времени от положения точки  $X$ , получится кривая, похожая на изображенную на фиг. 26.5, где точка  $C$  соответствует наименьшему времени. Это означает, что для точек  $X$  вблизи  $C$  в первом приближении время прохождения практически *одинаковое*, так как в точке  $C$  наклон кривой равен нулю. Итак, наш способ найти искомый путь сводится к требованию, чтобы при небольшом изменении положения точки время прохождения не менялось. (Конечно, возникнут бесконечно малые изменения времени *второго* порядка, и они должны быть положительными при смещении в обе стороны от точки  $C$ .) Возьмем близкую точку  $X$ , вычислим время прохождения на пути  $AXB$  и сравним его со старым путем  $ACB$ . Сделать это очень просто. Конечно, нужно еще, чтобы разность времен стремилась к нулю для малых расстояний  $XC$ . Обратимся сначала к пути по суше. Если мы опустим перпендикуляр  $EX$ , то легко увидим, что наш путь стал короче на длину  $EC$ . Можно сказать, что это расстояние мы выиграли. С другой стороны, опустив перпендикуляр  $CF$ , мы увидим, что в воде приходится проплыть дополнительное расстояние  $XF$ . В этом мы проиграли. С точки зрения экономии *времени* выигрывается время на отрезке  $EC$ , но теряется на отрезке  $XF$ . Эти два интервала времени должны быть равны, так как в первом приближении полное время прохождения не меняется. Предположив, что скорость в воде равна скорости в воздухе, умноженной на  $1/n$ , получим

$$EC = nXF. \quad (26.3)$$

Поэтому мы видим, что если нам удалось правильно выбрать точку  $C$  ( $XC \sin \angle EXC = nXC \sin \angle XCF$ ) или мы сократили на длину общей гипотенузы  $XC$  и заметили, что

$$\angle EXC = \angle ECN = \theta, \quad \text{и} \quad \angle XCF = \angle BCN' = \theta,$$

то мы получим

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r. \quad (26.4)$$

Отсюда видно, что при отношении скоростей, равном  $n$ , свет должен двигаться из одной точки в другую по такому пути, чтобы отношение синусов  $\theta_i$  и  $\theta_r$  было равно отношению скоростей в двух средах.

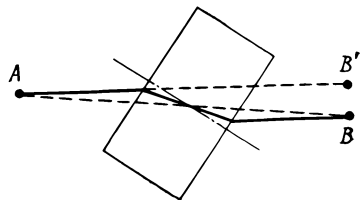
#### § 4. Применения принципа Ферма

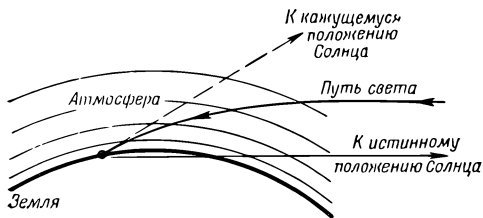
Рассмотрим теперь некоторые интересные следствия принципа наименьшего времени. Первое из них — принцип обратности. Мы уже нашли путь из  $A$  в  $B$ , требующий наименьшего времени; пойдем теперь в обратном направлении (считая, что скорость света не зависит от направления). Наименьшему времени отвечает та же траектория, и, следовательно, если свет распространяется по некоторому пути в одном направлении, он будет двигаться по этому пути и в обратном направлении.

Другой интересный пример! На пути света под некоторым углом поставлена четырехгранная стеклянная призма с параллельными гранями. Свет проходит из точки  $A$  в  $B$  и, встретив на своем пути призму (фиг. 26.6), отклоняется, причем длительность пути в призме уменьшается за счет изменения наклона траектории, а путь в воздухе немного удлиняется. Участки траектории вне призмы оказываются параллельными друг другу, потому что углы входа и выхода из призмы одинаковы.

Третье интересное явление состоит в том, что когда мы смотрим на заходящее солнце, то оно на самом деле находится уже ниже линии горизонта! Нам *кажется*, что солнце еще над горизонтом, а оно фактически уже зашло (фиг. 26.7). Дело здесь в следующем. Земная атмосфера сверху разрежена, а в нижних слоях более плотная. Свет распространяется в воздухе медленнее, чем в вакууме, и поэтому солнечные лучи достигнут какой-то точки за горизонтом быстрее, если будут двигаться не по прямой линии, а по траектории с более крутым наклоном в плотных слоях атмосферы, сокращая таким образом свой путь в этих слоях.

Фиг. 26.6. Луч света, выходящий из прозрачной пластины, параллелен падающему лучу.





Фиг. 26.7. У горизонта Солнце кажется на  $\frac{1}{2}$  градуса выше, чем на самом деле.

Еще пример того же рода — мираж, который часто наблюдают путешественники на раскаленных солнцем дорогах. Они видят на дороге «воду», а когда подъезжают туда, то кругом оказывается все сухо, как в пустыне! Сущность явления в следующем. То, что мы видим в этом случае, это «отраженный» дорогой свет. На фиг. 26.8 показано, как падающий на дорогу луч света попадает к нам в глаз. Почему? Воздух сильно раскален над самой дорогой, а в верхних слоях холоднее. Горячий воздух, расширяясь, становится более разреженным, а потому и скорость света в нем больше, чем в холодном. Другими словами, свет быстрее проходит в теплых слоях, чем в холодных. Поэтому свет проходит не по прямой, а идет по траектории с наименьшим временем, заворачивая для этого в теплые слои воздуха, чтобы сократить время. Таким образом, свет идет по кривой.

И еще один пример. Представим себе такую ситуацию, когда весь свет, испускаемый в точке  $P$ , собирается обратно в другую точку  $P'$  (фиг. 26.9). Это означает, конечно, что свет может попасть из точки  $P$  в  $P'$  по прямой линии. Это правильно. Но как устроить так, чтобы свет, идущий от  $P$  к  $Q$ , тоже попал в  $P'$ ? Мы хотим собрать весь свет снова в одной точке, которую называют *фокусом*. Как это сделать? Поскольку свет всегда выбирает путь с наименьшим временем, то наверняка он не пойдет по другим предложенным нами путям. Единственный способ сделать целый ряд близлежащих траекторий приемлемыми для света — это устроить так, чтобы для всех время прохождения было точно *одинаковым*! В противном случае свет пойдет по траектории, требующей минимального времени. Поэтому задача построения фокусирующей системы сводится просто к созданию устройства, в котором свет тратит на *всех* путях одинаковое время!

Такое устройство создать просто. Возьмем кусок стекла, в котором свет движется медленнее, чем в воздухе (фиг. 26.10).



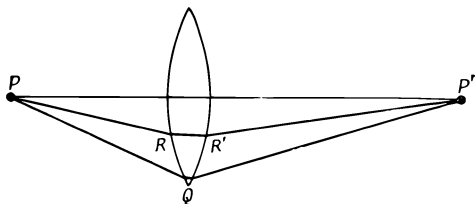
Фиг. 26.8. Мираж.

Ф и г. 26.9. Оптический «черный ящик».



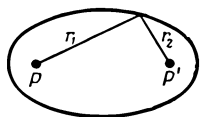
Проследим путь луча света, проходящего в воздухе по линии  $PQP'$ . Этот путь длиннее, чем прямо из  $P$  в  $P'$ , и наверняка занимает больше времени. Но если взять кусок стекла нужной толщины (позже мы вычислим, какой именно), то путь в нем скомпенсирует добавочное время, затрачиваемое при отклонении луча на траектории  $PQP'$ . При этих условиях можно устроить так, чтобы время, затрачиваемое светом на пути по прямой, совпадало со временем, затрачиваемым на пути  $PQP'$ . Точно так же, если взять частично отклоненный луч  $PRR'P'$  (более короткий, чем  $PQP'$ ), то придется скомпенсировать уже не так много времени, как для прямолинейной траектории, но некоторую долю времени все же скомпенсировать придется. В результате мы приходим к форме куска стекла, изображенной на фиг. 26.10. При такой форме весь свет из точки  $P$  попадет в  $P'$ . Все это нам известно уже давно, и называется такое устройство собирательной линзой. В следующей главе мы вычислим, какой должна быть форма линзы, чтобы получить идеальную фокусировку.

Наконец, последний пример. Предположим, что нам нужно так поставить зеркало, чтобы свет из точки  $P$  всегда приходил в  $P'$  (фиг. 26.11). На любом пути свет должен отразиться от зеркала, и время для всех путей должно быть одинаковым. В данном случае свет проходит только в воздухе, так что время прохождения пропорционально длине пути. Поэтому требование равенства времен сводится к требованию равенства полных длин путей. Следовательно, сумма расстояний  $r_1$  и  $r_2$  должна оставаться постоянной. Эллипс обладает как раз тем свойством, что сумма расстояний любой точки на его кривой от двух заданных точек постоянна; поэтому свет, отразившись от зеркала, имеющего такую форму, наверняка попадет из одного фокуса в другой.



Ф и г. 26.10. Фокусирующая оптическая система.

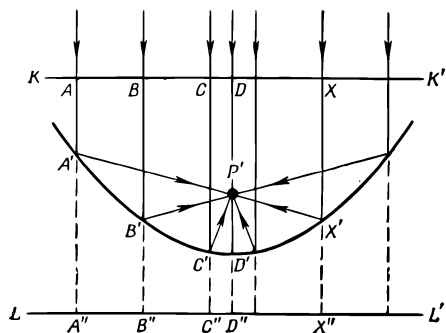




Фиг. 26.11. Эллиптическое зеркало.

Этот принцип фокусировки служит для наблюдения света звезд. При постройке большого 200-дюймового телескопа в обсерватории Паломар использовалась следующая идея. Вообразите себе звезду, удаленную от нас на миллиарды километров; мы хотим собрать весь испускаемый ею свет в фокус. Конечно, мы не можем начертить всю траекторию лучей до звезды, тем не менее мы должны проверить, насколько времена на различных траекториях равны. Мы, конечно, знаем, что если множество различных лучей достигло плоскости  $KK'$ , перпендикулярной направлению лучей, то времена для всех этих лучей будут равны (фиг. 26.12). Далее лучи должны отразиться от зеркала и за равные промежутки времени попасть в фокус  $P'$ . Это означает, что мы должны найти такую кривую, для которой сумма расстояний  $XX' + X'P'$  будет постоянна, независимо от выбора точки  $X$ . Легче всего это сделать, продолжив отрезок  $XX'$  до плоскости  $LL'$ . Потребуем теперь, чтобы выполнялись соотношения  $A'A'' = A'P'$ ,  $B'B'' = B'P'$ ,  $C'C''$  и т. д.; в этом случае мы получаем нужную нам кривую, потому что сумма длин  $A'A + A'P' = AA' + A'A''$  будет постоянной для всех точек кривой. Значит, наша кривая есть геометрическое место всех точек, равноудаленных от линии и некоторой заданной точки. Такая кривая называется *параболой*; вот зеркало телескопа и было изготовлено именно в форме параболы.

Приведенные примеры в общих чертах иллюстрируют принцип устройства оптических систем. Точные кривые можно рассчитать, используя правило равенства времен на всех путях, ведущих в точку фокуса, и требуя, чтобы время прохождения на всех соседних путях было большим.



Фиг. 26.12. Параболическое зеркало.

В следующей главе мы еще вернемся к фокусирующим оптическим системам, а теперь обсудим дальнейшее развитие теории. Когда предлагается новый физический принцип, такой, как принцип наименьшего времени, то нашей первой естественной реакцией могли бы быть слова: «Все это очень хорошо, восхитительно, но вопрос заключается в том, улучшает ли это вообще наше понимание физики?» На это можно ответить: «Да. Посмотрите, сколько новых фактов мы теперь поняли!» А кто-то возразит: «Ну, в зеркалах я и так разбираюсь. Мне нужна такая кривая, чтобы каждая касательная к ней плоскость образовывала равные углы с двумя лучами света. Я могу рассчитать и линзу, потому что каждый падающий на нее луч отклоняется на угол, даваемый законом Снелла». Здесь очевидным образом содержание принципа наименьшего действия совпадает с законом равенства углов при отражении и пропорциональности синусов углов при преломлении. Тогда, может быть, это философский вопрос, а может быть, вопрос просто в том, какой путь красивее? Можно привести аргументы в пользу обеих точек зрения.

Однако критерий важности всякого принципа состоит в том, что он *предсказывает нечто новое*.

Легко показать, что принцип Ферма предсказывает ряд новых фактов. Прежде всего предположим, что имеются *три* среды — стекло, вода и воздух — и мы наблюдаем явление преломления и измеряем показатель  $n$  для перехода из одной среды в другую. Обозначим через  $n_{12}$  показатель преломления для перехода из воздуха (1) в воду (2), а через  $n_{13}$  — для перехода из воздуха (1) в стекло (3). Измерив преломление в системе вода — стекло, найдем еще один показатель преломления и назовем его  $n_{23}$ . Здесь заранее нет оснований считать, что  $n_{12}$ ,  $n_{13}$  и  $n_{23}$  связаны между собой. Если же исходить из принципа наименьшего времени, то такую связь можно установить. Показатель  $n_{12}$  есть отношение двух величин — скорости света в воздухе к скорости света в воде; показатель  $n_{13}$  есть отношение скорости в воздухе к скорости в стекле, а  $n_{23}$  есть отношение скорости в воде к скорости в стекле. Поэтому, сокращая скорость света в воздухе, получаем

$$n_{23} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1/v_3}{v_1/v_2} = \frac{n_{13}}{n_{12}}. \quad (26.5)$$

Другими словами, мы *предсказываем*, что показатель преломления для перехода из одного материала в другой можно получить из показателей преломления каждого материала по отношению к некоторой среде, скажем воздуху или вакууму. Таким образом, измерив скорость света во всех средах, мы образуем одно число для каждой среды — показатель преломления для перехода из вакуума в среду — и называем его  $n_i$

(например,  $n_i$  для воздуха есть отношение скорости в воздухе к скорости в вакууме и т. д.), после чего легко написать нужную формулу. Показатель преломления для любых двух материалов  $i$  и  $j$  равен

$$n_{ij} = \frac{v_i}{v_j} = \frac{n_j}{n_i}. \quad (26.6)$$

Используя только закон Снелла, подобное соотношение предсказать невозможно\*. Но связь эта существует. Соотношение (26.5) известно давно и послужило сильным аргументом в пользу принципа наименьшего времени.

Еще одно предсказание принципа наименьшего времени состоит в том, что скорость света в воде *при измерении* должна оказаться меньше скорости света в воздухе. Это уже предсказание совсем другого рода. Оно гораздо глубже, потому что носит теоретический характер и никак не связано с наблюдениями, из которых Ферма вывел принцип наименьшего времени (до сих пор мы имели дело только с *углами*). Как оказалось, скорость света в воде *действительно* меньше скорости в воздухе, и ровно настолько, чтобы получился правильный показатель преломления.

### § 5. Более точная формулировка принципа Ферма

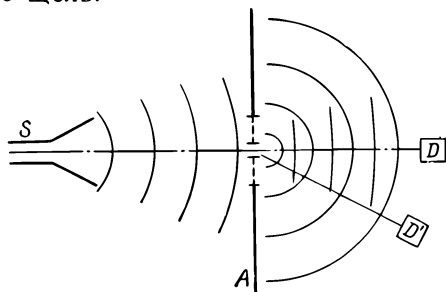
До сих пор мы фактически пользовались неправильной формулировкой принципа наименьшего времени. Здесь мы сформулируем его более точно. Мы *неправильно* называли его принципом наименьшего времени и для удобства по ходу дела применяли неправильную его трактовку. Но теперь мы выясним точное содержание принципа. Пусть имеется зеркало. Мы его показали на фиг. 26.3. Откуда свет *знает*, что он должен двинуться к зеркалу? Очевидно, путь, требующий *наименьшего* времени, — это линия  $AB$ . Кое-кто поэтому может сказать: «Иногда этот путь требует как раз наибольшего времени». Так это *неправильно!* Путь по кривой наверняка займет еще больше времени! Точная формулировка принципа следующая: луч, проходящий по траектории, обладает тем свойством, что любое малое изменение пути (скажем, на 1%), расположения точки падения луча на зеркало, или формы кривой, или какие-либо иные изменения *не приводят* в первом порядке к изменению времени прохождения; изменение времени происходит только *во втором* порядке. Другими словами, согласно этому принципу, свет выбирает один путь из

---

\* Его можно вывести, если дополнительно предположить, что при до-  
бавлении слоя одной среды к поверхности другой угол преломления на  
выходе из последней среды не меняется.

множества близлежащих, требующих почти *одинакового* времени для прохождения.

С принципом наименьшего времени связана еще одна трудность, которую многие, не любящие такого рода теории, никак не могут переварить. Теория Снелла помогает легко «понять» поведение света. Свет проходит, видит перед собой поверхность и отклоняется, потому что на поверхности с ним что-то происходит. Легко понять идею причинности, проявляющуюся в том, что свет идет из одной точки в другую, а затем в следующую. Но принцип наименьшего времени есть философский принцип, который совсем иначе объясняет причину явлений в природе. Вместо причинной обусловленности, когда из одного нашего действия вытекает другое и т. д., этот принцип говорит следующее: в данной ситуации *свет* выбирает путь с наименьшим, или экстремальным, временем. Но как удастся свету выбирать свой путь? *Вынюхивает* он что ли соседние пути и сравнивает их потом друг с другом? В некотором смысле так и происходит. Эту способность света нельзя понять в рамках геометрической оптики, поскольку она связана с понятием *длины волны*; длина волны, грубо говоря, есть тот отрезок впереди лежащего пути, который свет может «почувствовать» и сравнить с соседними путями. Этот факт трудно продемонстрировать на опыте со светом, так как длина волны света чрезвычайно мала. Но радиоволны с длиной волны, скажем,  $3\text{ см}$  «видят» намного дальше. Предположим, имеется источник радиоволн, детектор и экран со щелью, как показано на фиг. 26.13; при этих условиях лучи будут проходить из  $S$  в  $D$ , поскольку это прямолинейная траектория, и даже если сузить щель, лучи все равно пройдут. Но если теперь отодвинуть детектор в точку  $D'$ , то при широкой щели волны не пойдут из  $S$  в  $D'$ , потому что они сравнят близлежащие пути и скажут: «Нет, друг мой, все эти пути требуют другого времени». С другой стороны, если оставить только узенькую щелку и таким образом *помешать* волнам выбирать путь, то окажутся годными уже несколько путей и волны пойдут по ним! Если щель узкая, в точку  $D'$  попадет больше излучения, чем через широкую щель!



Фиг. 26.13. Прохождение радиоволн сквозь узкую щель.

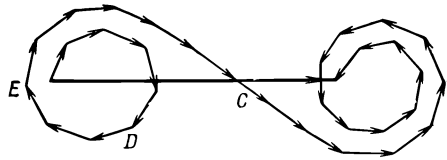
Такой же опыт возможен со светом, но в большом масштабе его проделать трудно. Этот эффект, однако, можно наблюдать в следующих простых условиях. Найдите маленький и яркий источник света, например уличный фонарь где-нибудь в конце улицы или отражение солнца от колеса автомобиля. Поставьте перед глазами два пальца, оставив для света узенькую щель, и постепенно сближайте пальцы, пока щель полностью не исчезнет. Вы увидите, что свет, который вначале казался крохотной точкой, начнет расплываться и даже вытянется в длинную линию. Происходит это потому, что между пальцами оставлена лишь очень маленькая щель и свет не идет, как обычно, по прямой, а расходится под некоторым углом и в глаз попадает с разных направлений. Если вы будете достаточно внимательны, то заметите еще боковые максимумы и своеобразную кайму по краям. Кроме того, само изображение будет окрашено. Все это будет в свое время объяснено, а сейчас этот опыт (а его очень легко проделать) просто демонстрирует, что свет не всегда распространяется по прямой.

## § 6. Квантовый механизм

В заключение дадим очень грубую картину того, что происходит на самом деле, как протекает весь процесс распространения света с квантовомеханической точки зрения, которую сейчас считают самой правильной (разумеется, наше описание будет носить лишь качественный характер). Исследуя свет на пути из  $A$  в  $B$  (см. фиг. 26.3), можно обнаружить, что он вовсе не представляет собой волны. Лучи света, оказываясь, состоят из фотонов, которые можно реально зарегистрировать с помощью фотонного счетчика; они заставляют его щелкать. Яркость света пропорциональна среднему числу фотонов, пролетающему в 1 сек, а нас интересует *вероятность* попадания фотона из  $A$  в  $B$  при отражении от зеркала. *Правило* вычисления этой вероятности весьма необычно. Выберем какой-нибудь путь и найдем время на этом пути; затем образуем комплексное число или нарисуем маленький комплексный вектор  $re^{i\theta}$ , где  $\theta$  пропорционален времени. Число оборотов вектора в секунду — это частота света. Возьмем теперь другой путь, и пусть он занимает другое время; тогда соответствующий ему вектор повернется на угол, отличный от первого (вспомним, что угол всегда пропорционален времени). Переберем *все* возможные пути и сложим векторы для каждого из них, тогда квадрат длины суммарного вектора определит вероятность прохождения фотона из начальной точки в конечную!

Покажем теперь, что отсюда следует принцип наименьшего времени для зеркала. Возьмем все возможные пути

Фиг. 26.14. Суммирование амплитуд вероятности на всех возможных соседних траекториях.



$ADB$ ,  $AEB$ ,  $ACB$  и т. д., изображенные на фиг. 26.3. Путь  $ADB$  вносит небольшой вклад, а соседний путь  $AEB$  занимает уже другое время, и его угол  $\theta$  поэтому другой. Пусть точка  $C$  соответствует пути с наименьшим временем, тогда при небольшом изменении пути время не меняется. Точнее, сначала время заметно менялось, но с приближением к точке  $C$  оно меняется все меньше и меньше (фиг. 26.14). Таким образом, векторы, которые мы складываем, проходят вблизи  $C$  почти под одним и тем же углом, а затем времена начинают постепенно расти, векторы поворачиваются и т. д. В результате получается тугой клубок векторов. Полная вероятность есть расстояние от одного конца до другого, возведенное в квадрат. Почти весь вклад в эту суммарную вероятность вносит область, где векторы идут в одном направлении (с одной и той же фазой). Вклады от путей с разными временами взаимно сокращаются, потому что векторы направлены в разные стороны. Вот почему, если закрыть края зеркала, оно будет отражать почти точно так же, как и раньше, поскольку в приведенной выше процедуре это соответствует отбрасыванию части векторов внутри спиральных концов диаграммы, а для света это мало что изменит. Таково соответствие между современной теорией фотонов с ее понятием вероятности прохождения, зависящей от суммирования векторов, и принципом наименьшего времени.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

### § 1. Введение

В этой главе мы рассмотрим некоторые применения изложенных ранее принципов к устройству простейших оптических систем, используя приближение *геометрической оптики*. При конструировании многих оптических приборов это приближение оказывается особенно полезным. Геометрическая оптика и очень проста, и очень сложна. Я хочу этим сказать, что уже поверхностное изучение геометрической оптики в школе позволяет с помощью очень простых правил составлять грубые схемы приборов; если же мы хотим при этом учитывать искажения в линзах и прочие тонкости, то задача становится слишком сложной даже для студентов старшего курса! Если кому-нибудь действительно понадобится точно спроектировать линзу, учитывая aberrацию, то лучше всего обратиться к специальным руководствам или просто проследить путь лучей через разные поверхности (как это сделать — сказано в книгах) и, пользуясь законом преломления, определить направление вышедших из линзы пучков и выяснить, насколько хорошее изображение они создают. Считалось, что это слишком длинная процедура, но сейчас, когда мы вооружены вычислительными машинами, этот способ вполне хорош. Сформулировав задачу математически, легко подсчитать пути всех лучей. Словом, дело это простое и не требует новых принципов. Кроме того, законы и элементарной, и специальной оптики фактически неприменимы в других областях, поэтому нам не было бы необходимости чересчур подробно изучать предмет, если бы не одно важное исключение.

§ 1. Введение

§ 2. Фокусное расстояние для сферической поверхности

§ 3. Фокусное расстояние линзы

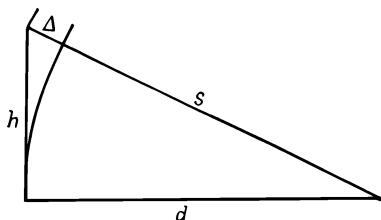
§ 4. Увеличение

§ 5. Сложные линзы

§ 6. Абберация

§ 7. Разрешающая способность

Фиг. 27.1. Треугольник, высота которого  $h$  меньше основания  $d$ , а гипотенуза  $s$  больше основания.



Оказалось, что наиболее современная и абстрактная теория геометрической оптики, разработанная Гамильтоном, имеет весьма важные приложения в механике, причем в механике она имеет даже большее значение, чем в оптике, поэтому пусть ею занимается курс аналитической механики. А пока, понимая, что геометрическая оптика интересна только сама по себе, мы перейдем к изучению элементарных свойств оптических систем на основе принципов, изложенных в предыдущей главе.

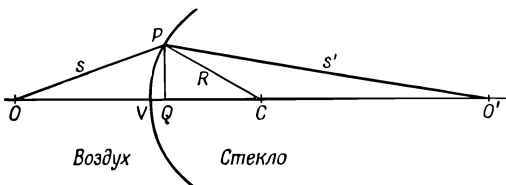
Для дальнейшего нам понадобится одна геометрическая формула: пусть дан треугольник, высота которого  $h$  мала, а основание  $d$  велико; тогда гипотенуза  $s$  (фиг. 27.1) больше основания (нам нужно это знать, чтобы вычислить разность времен на двух различных путях света). Насколько гипотенуза больше основания? Мы можем найти разность  $\Delta = s - d$  несколькими способами. Например,  $s^2 - d^2 = h^2$  или  $(s - d) \times (s + d) = h^2$ . Но  $s - d = \Delta$ , а  $s + d \sim 2s$ . Таким образом,

$$\Delta \sim \frac{h^2}{2s}. \quad (27.1)$$

Вот и все, что нам нужно знать из геометрии для изучения изображений, получаемых с помощью кривых поверхностей!

## § 2. Фокусное расстояние для сферической поверхности

Рассмотрим сначала простейший пример преломляющей поверхности, разделяющей две среды с разными показателями преломления (фиг. 27.2). Случай произвольных показате-



Фиг. 27.2. Фокусировка на преломляющей поверхности.



телей пусть разберет читатель самостоятельно; нам важно рассказать об *идее*, задача же достаточно проста, и ее можно решить в любом частном случае. Итак, пусть слева скорость света равна 1, а справа  $1/n$ , где  $n$  — показатель преломления. Свет в стекле идет медленнее в  $n$  раз.

Теперь представим себе точку  $O$  на расстоянии  $s$  от лицевой поверхности стекла и другую точку  $O'$  на расстоянии  $s'$  внутри стекла и попытаемся выбрать кривую поверхность так, чтобы каждый луч, вышедший из  $O$  и попавший на поверхность в  $P$ , приходил в точку  $O'$ . Для этого нужно придать поверхности такую форму, чтобы сумма времени прохождения света на пути от  $O$  к  $P$  (т. е. расстояние  $OP$ , деленное на скорость света, равную единице) плюс  $n \cdot O'P$ , т. е. время на пути от  $P$  к  $O'$ , была постоянной величиной, не зависящей от положения точки  $P$ . Это условие дает уравнение для определения поверхности. В результате получается весьма сложная поверхность четвертого порядка (читатель может вычислить ее для собственного удовольствия с помощью аналитической геометрии). Проще рассмотреть специальный случай  $s \rightarrow \infty$ , когда кривая получается второго порядка и ее легче определить. Интересно сравнить эту кривую с кривой для фокусирующего зеркала (когда свет приходил из бесконечности), которая, как вы помните, оказалась параболой.

Итак, нужную поверхность сделать нелегко; чтобы сфокусировать свет от одной точки в другую, нужна довольно сложная поверхность. Практически такие сложные поверхности даже не пытаются создать, а пользуются компромиссным решением. Мы не будем собирать *все* лучи в фокус, а соберем только лучи, достаточно близкие к оси  $OO'$ . Раз идеальная форма поверхности столь сложна, возьмем вместо нее сферическую поверхность, которая имеет нужную кривизну у самой оси, и пусть далекие лучи отклоняются от оси, если они того хотят. Сферу изготовить намного проще, чем другие поверхности, поэтому выберем сферу и рассмотрим поведение лучей, падающих на сферическую поверхность. Будем требовать точной фокусировки только для тех лучей, которые проходят вблизи от оси. Иногда эти лучи называют *параксиальными*, а наша задача — найти условия фокусировки параксиальных лучей. Позже мы обсудим ошибки, связанные с отклонением лучей от оси.

Итак, считая, что  $P$  близко к оси, опустим перпендикуляр  $PQ$  длиной  $h$ . Если бы наша поверхность была плоскостью, проходящей через  $P$ , то время, затрачиваемое на пути от  $O$  к  $P$ , превышало бы время на пути от  $O$  к  $Q$ , а время на пути от  $P$  к  $O'$  превышало бы время от  $Q$  к  $O'$ . Поверхность стекла должна быть кривой, потому что только в этом случае весь излишек времени компенсируется задержкой при прохожде-

нии пути от  $V$  к  $Q$ ! Далее, *излишек* времени на пути  $OP$  есть  $h^2/2s$ , а *излишек* времени на отрезке  $O'P$  есть  $nh^2/2s'$ . Это лишнее время, которое должно компенсироваться временем на пути  $VQ$ , накапливается на пути в среде, а не в вакууме. Другими словами, время на пути  $VQ$  в  $n$  раз больше соответствующего времени в вакууме, а поэтому лишнее время на этом отрезке есть  $(n - 1)VQ$ . Ну, а какова длина  $VQ$ ? Если  $C$  есть центр сферы с радиусом  $R$ , то с помощью уже знакомой нам формулы выводим, что длина  $VQ$  есть  $h^2/2R$ . В результате мы получаем закон, который связывает длины  $s$  и  $s'$  и определяет радиус кривизны  $R$  искомой поверхности:

$$\frac{h^2}{2s} + \frac{nh^2}{2s'} = (n - 1) \frac{h^2}{2R} \quad (27.2)$$

или

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{n - 1}{R}. \quad (27.3)$$

Если мы хотим сфокусировать свет из точки  $O$  в точку  $O'$ , то эта формула позволяет вычислить требуемый радиус кривизны поверхности.

Интересно, что та же линза с таким же радиусом кривизны  $R$  будет фокусировать и на других расстояниях, т. е. она является фокусирующей для любой пары расстояний, для которых сумма обратной величины одного расстояния и обратной величины другого, умноженного на  $n$ , есть постоянное число. Таким образом, данная линза (если учитывать только параксиальные лучи) является фокусирующей не только для точек  $O$  и  $O'$ , но и для бесконечного числа пар точек, если эти пары удовлетворяют соотношению  $1/s + n/s' = \text{постоянная}$ , характеризующая данную линзу.

Представляет интерес частный случай  $s \rightarrow \infty$ . Из формулы видно, что при увеличении  $s$  другое расстояние  $s'$  уменьшается. Другими словами, когда точка  $O$  удаляется, точка  $O'$  приближается, и наоборот. Когда точка  $O$  уходит на бесконечность, точка  $O'$  также движется внутри стекла вплоть до расстояния, называемого *фокусным расстоянием*  $f'$ . Если на линзу падает параллельный пучок лучей, он соберется в линзе на расстоянии  $f'$ . Можно задать вопрос и по-другому. (Вспомним правило обратимости: если свет переходит из  $O$  в  $O'$ , он, разумеется, может двигаться и в обратном направлении, из  $O'$  в  $O$ .) Таким образом, если источник света находится внутри стекла, то может возникнуть вопрос, где лучи соберутся в фокус? В частности, если источник внутри стекла находится на бесконечности (та же задача, что и раньше), то где будет фокус вне линзы? Это расстояние обозначают через  $f$ . Можно, конечно, сказать и иначе. Если источник расположен на расстоянии  $f$ , то лучи, проходя через поверхность

линзы, выйдут параллельным пучком. Легко определить  $f$  и  $f'$ :

$$\frac{n}{f'} = \frac{n-1}{R}, \quad \text{или} \quad f' = \frac{Rn}{n-1}, \quad (27.4)$$

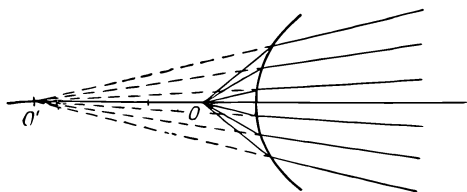
$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}, \quad \text{или} \quad f = \frac{R}{n-1}. \quad (27.5)$$

Отметим интересный факт: если мы разделим каждое фокусное расстояние на соответствующий показатель преломления, то получим один и тот же результат! На самом деле, это общая теорема. Она справедлива для любой сложной системы линз, поэтому ее стоит запомнить. Мы не доказали эту теорему в общем виде, а лишь отметили ее применимость для одной поверхности, однако оказывается, что вообще два фокусных расстояния некоторой системы связаны подобным образом. Иногда выражение (27.3) записывают в следующем виде:

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{1}{f}. \quad (27.6)$$

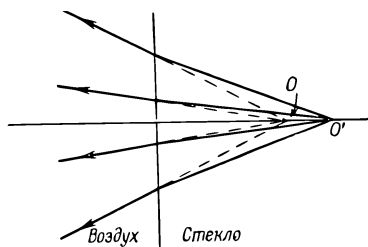
Такая форма более удобна, чем (27.3), потому что проще измерить  $f$ , чем кривизну и показатель преломления линзы. Если нам не нужно самим конструировать линзу или изучать в подробностях весь процесс, а достаточно достать линзу с полки, то нас будет интересовать только величина  $f$ , а не  $n$  или  $R$ !

Любопытная ситуация возникает, когда  $s$  становится меньше  $f$ . Что же тогда происходит? При  $s < f$  обратная величина  $(1/s)$  больше  $(1/f)$ , и поэтому  $s'$  отрицательна. Наша формула утверждает, что свет фокусируется только при отрицательном значении  $s'$ , — понимайте как хотите! Но означает это нечто весьма определенное и интересное. Формула эта остается полезной и для отрицательных значений. Что она означает, ясно из фиг. 27.3. Исходящие из точки  $O$  лучи преломляются на поверхности, но в фокус не собираются, так как точка  $O$  расположена слишком близко к поверхности, и лучи становятся «более чем параллельны». Однако они начинают расходиться так, как будто бы вышли из точки  $O'$  вне линзы. Эта точка есть кажущееся изображение, или, как иногда говорят, *мнимое изображение*.



Фиг. 27.3. Мнимое изображение.

Фиг. 27.4. Плоская поверхность раздела отображает точку  $O'$  в точку  $O$ .



Изображение  $O'$  на фиг. 27.2 называется *действительным изображением*. Действительное изображение возникает, когда свет действительно проходит через точку. Но если *кажется*, что свет исходит из некоторой фиктивной точки, не совпадающей с действительным источником, то эта точка и есть мнимое изображение. Следовательно, для отрицательных  $s'$  точка  $O'$  находится по другую сторону поверхности, и все встает на свои места.

Рассмотрим теперь интересный случай, когда  $R = \infty$ ; при этих условиях  $(1/s) + (n/s') = 0$ . Иными словами,  $s' = -ns$ , что означает, что если из плотной среды смотреть на некую точку в разреженной среде, то она будет казаться дальше в  $n$  раз. Мы можем прочесть наше уравнение и наоборот: при взгляде на объект, находящийся в плотной среде за плоской поверхностью раздела, нам будет казаться, что он расположен к нам ближе, чем на самом деле (фиг. 27.4). Когда мы смотрим сверху на дно плавательного бассейна, он кажется нам мельче в  $3/4$  раза, чем он есть на самом деле; эта цифра есть обратная величина показателя преломления воды.

Теперь мы могли бы перейти к сферическому зеркалу. Но если вникнуть в смысл сказанного нами ранее, то вполне можно разобрать этот вопрос самостоятельно. Поэтому пусть читатель сам выведет формулы для сферического зеркала, но для этого полезно принять следующие условия:

- 1) расстояние до объекта  $s$  положительно, если точка  $O$  расположена слева от поверхности;
- 2) расстояние до изображения  $s'$  положительно, если точка  $O'$  расположена справа от поверхности;
- 3) радиус кривизны поверхности положителен, если центр находится справа от поверхности.

Например, на фиг. 27.2  $s'$  и  $R$  положительны; на фиг. 27.3  $s$  и  $R$  положительны, а  $s'$  отрицательна. Для вогнутой поверхности наша формула (27.3) остается справедливой, если считать  $R$  отрицательной величиной.

Пользуясь приведенными условиями, можно вывести соответствующую формулу и для зеркала, положив в (27.3)

$n = -1$  (как если бы среда за зеркалом имела показатель преломления  $-1$ ), и тогда получится правильный результат!

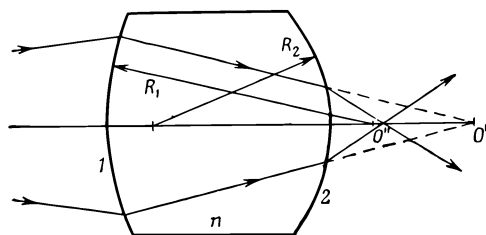
Мы вывели формулу (27.3) простым и элегантным способом, исходя из принципа наименьшего времени; ту же формулу можно, конечно, получить с помощью закона Снелла, если учесть, что углы малы, и заменить синусы самими углами.

### § 3. Фокусное расстояние линзы

Рассмотрим теперь другой случай, имеющий большое практическое значение. Большинство линз, которыми мы пользуемся, имеет не одну, а две поверхности раздела. К чему это приводит? Пусть имеется стеклянная линза, ограниченная поверхностями с разной кривизной (фиг. 27.5). Рассмотрим задачу о фокусировании пучка света из точки  $O$  в точку  $O'$ . Как это сделать? Сначала используем формулу (27.3) для первой поверхности, забыв о второй поверхности. Это позволит нам установить, что испускаемый в точке  $O$  свет будет казаться исходящим или расходящимся (в зависимости от знака фокусного расстояния) из некоторой другой точки, скажем  $O''$ . Решим теперь вторую часть задачи. Имеется другая поверхность между стеклом и воздухом, и лучи подходят к ней, сходясь к точке  $O'$ . Где они сойдутся на самом деле? Снова воспользуемся той же формулой! Находим, что они сойдутся к точке  $O''$ . Таким образом можно пройти, если необходимо, через 75 поверхностей, последовательно применяя одну и ту же формулу и переходя от одной поверхности к другой!

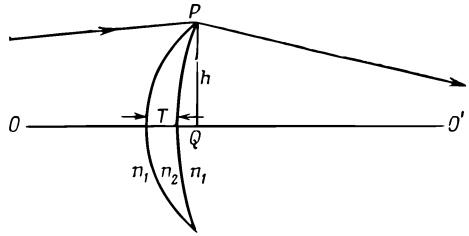
Имеются еще более сложные формулы, которые могут нам помочь в тех редких случаях нашей жизни, когда нам почему-то нужно проследить путь света через пять поверхностей. Однако если уж это необходимо, то лучше последовательно перебрать пять поверхностей, чем запоминать кучу формул, ведь может случиться, что нам вообще не придется возиться с поверхностями!

Во всяком случае, принцип расчета таков: при переходе через одну поверхность мы находим новое положение, новую точку фокуса и рассматриваем ее как источник для следую-



Фиг. 27.5. Построение изображения, даваемого двусторонней линзой.

Фиг. 27.6. Тонкая линза с двумя положительными радиусами кривизны.



щей поверхности и т. д. Часто в системах бывает несколько сортов стекла с разными показателями  $n_1, n_2, \dots$ ; поэтому для конкретного решения задачи нам нужно обобщить формулу (27.3) на случай двух разных показателей  $n_1$  и  $n_2$ . Нетрудно показать, что обобщенное уравнение (27.3) имеет вид

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (27.7)$$

Особенно прост случай, когда поверхности близки друг к другу и ошибками из-за конечной толщины можно пренебречь. Рассмотрим линзу, изображенную на фиг. 27.6, и поставим такой вопрос: каким условиям должна удовлетворять линза, чтобы пучок из  $O$  фокусировался в  $O'$ ? Пусть свет проходит точно через край линзы в точке  $P$ . Тогда (пренебрегая временно толщиной линзы  $T$  с показателем преломления  $n_2$ ) излишек времени на пути  $OPO'$  будет равен  $(n_1 h^2 / 2s) + (n_1 h^2 / 2s')$ . Чтобы уравнять время на пути  $OPO'$  и время на прямолинейном пути, линза должна обладать в центре такой толщиной  $T$ , чтобы она задерживала свет на нужное время. Поэтому толщина линзы  $T$  должна удовлетворять соотношению

$$n_1 \frac{h^2}{2s} + n_1 \frac{h^2}{2s'} = (n_2 - n_1) T. \quad (27.8)$$

Можно еще выразить  $T$  через радиусы обеих поверхностей  $R_1$  и  $R_2$ . Учитывая условие 3 (приведенное на стр. 27), мы находим для случая  $R_1 < R_2$  (выпуклая линза)

$$T = \frac{h^2}{2R_1} - \frac{h^2}{2R_2}. \quad (27.9)$$

Отсюда получаем окончательно

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_1}{s'} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (27.10)$$

Отметим, что, как и раньше, когда одна точка находится на бесконечности, другая будет расположена на расстоянии, которое мы называем фокусным расстоянием  $f$ . Величина  $f$  определяется равенством

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (27.11)$$

где  $n = n_2/n_1$ .

В противоположном случае, когда  $s$  стремится к бесконечности,  $s'$  оказывается на фокусном расстоянии  $f'$ . Для нашей линзы фокусные расстояния совпадают. (Здесь мы встречаемся еще с одним частным случаем общего правила, по которому отношение фокусных расстояний равно отношению показателей преломления тех двух сред, где лучи фокусируются. Для нашей оптической системы оба показателя одинаковы, а поэтому фокусные расстояния равны.)

Забудем на время формулу для фокусного расстояния. Если вы купили линзу с неизвестными радиусами кривизны и каким-то показателем преломления, то фокусное расстояние можно просто измерить, собирая в фокус лучи, идущие от удаленного источника. Зная  $f$ , удобнее переписать нашу формулу сразу в терминах фокусного расстояния:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}. \quad (27.12)$$

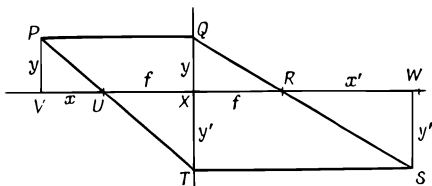
Давайте посмотрим теперь, как работает эта формула и что из нее получается в разных случаях. Во-первых, если одно из расстояний  $s$  и  $s'$  бесконечно, другое равно  $f$ . Это условие означает, что параллельный пучок света фокусируется на расстоянии  $f$  и может использоваться на практике для *определения  $f$* . Интересно также, что обе точки движутся в одну сторону. Если одна идет направо, то и вторая движется в ту же сторону. И наконец, если  $s$  и  $s'$  одинаковы, то каждое из них равно  $2f$ .

#### § 4. Увеличение

До сих пор мы рассматривали процесс фокусировки только для точек, лежащих на оси. Построим теперь изображение объектов, несколько смещенных в сторону от оси; это поможет нам понять явление *увеличения*. Если с помощью линзы сфокусировать свет от небольшой нити на экран, то мы увидим изображение той же нити, только несколько большего или меньшего размера по сравнению с настоящей. Отсюда мы заключаем, что свет попадает в фокус от *каждой точки* нити. Чтобы получше в этом разобраться, рассмотрим линзу, схематически изображенную на фиг. 27.7. Нам известно следующее:

- 1) каждый луч, параллельный оси, фокусируется по другую сторону линзы в точке, называемой фокусом и расположенной на расстоянии  $f$  от линзы;
- 2) каждый луч, проходящий из фокуса по одну сторону линзы, выходит с другой стороны параллельно оси.

Фиг. 27.7. Геометрическое построение изображения от тонкой линзы.



С помощью только этих фактов мы докажем формулу (27.12) геометрическим путем. Пусть объект находится на расстоянии  $x$  от фокуса и его высота есть  $y$ . Мы знаем, что луч  $PQ$  отклоняется и пройдет через фокус  $R$  по другую сторону линзы. Если свет от точки  $P$  фокусируется линзой, достаточно определить путь еще одного луча, и тогда фокус будет расположен в точке пересечения двух лучей. Нужно только умело выбрать направление *второго* луча. Вспомним, что параллельный луч проходит через фокус, и наоборот: луч, проходящий через фокус, выходит параллельно оси! Поэтому проведем луч  $PT$  через  $U$ . (Правда, фокусируемые лучи могут быть гораздо тоньше, чем начерченные нами, но их труднее изобразить, поэтому оставим нашу прежнюю схему.) Поскольку луч параллелен оси, проведем  $TS$  параллельно  $XW$ . Пересечение  $S$  и есть искомая точка. Отсюда мы получаем нужную высоту и правильное расстояние. Обозначим высоту через  $y'$ , а расстояние до фокуса через  $x'$ . Теперь можно вывести формулу для линзы. Из подобных треугольников  $PVU$  и  $T XU$  находим

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{x}. \quad (27.13)$$

Из треугольников  $SWR$  и  $QXR$  получаем

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f}. \quad (27.14)$$

Разрешая оба равенства относительно  $y'/y$ , находим

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f} = \frac{f}{x}. \quad (27.15)$$

Равенство (27.15) есть знаменитая формула для линзы; в ней содержится все, что нам нужно знать о линзах; увеличение  $y'/y$  выражено через расстояние и фокусную длину. Возникающее отсюда соотношение, связывающее  $x$  и  $x'$  с  $f$ , имеет вид

$$xx' = f^2. \quad (27.16)$$

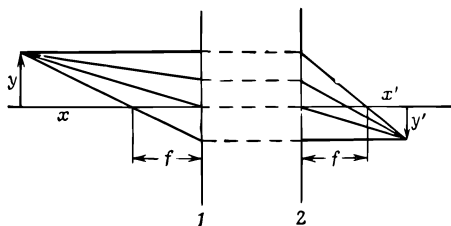
Оно гораздо изящнее формулы (27.12). Мы рекомендуем читателю доказать, что при  $s = x + f$  и  $s' = x' + f$  равенства (27.12) и (27.16) совпадают.



## § 5. Сложные линзы

Опишем кратко без вывода основные свойства системы линз. Как исследуют систему нескольких линз? Очень просто. Начнем с некоторого объекта и определим его изображение, даваемое первой линзой, пользуясь формулами (27.16), (27.12) или любой эквивалентной формулой или, наконец, изобразив все это графически. Итак, мы получим первое изображение. Затем мы будем рассматривать это изображение как источник для следующей линзы и, чтобы найти новое изображение, воспользуемся второй линзой с любой заданной фокусной длиной. Прделаем такую процедуру последовательно для всей системы линз. Вот и все. В принципе здесь нет ничего нового, поэтому мы не будем входить в подробности. Однако очень интересный результат получается, когда свет входит и выходит из системы линз в одну и ту же среду, например в воздух. Любое оптическое устройство — будь то телескоп или микроскоп с произвольным количеством линз и зеркал — обладает следующим интересным свойством. Имеются две плоскости, называемые *главными плоскостями* системы (часто они расположены поблизости от внешних поверхностей первой и последней линзы), которые обладают следующими свойствами: 1) свет, входящий параллельным пучком с одной стороны, собирается с другой стороны в фокус, отстоящий от *второй* главной плоскости на фокусное расстояние (как будто вместо системы имеется тонкая линза, совпадающая со второй главной плоскостью); 2) свет, входящий параллельным пучком с другой стороны, собирается в фокус на расстоянии  $f$  от *первой* главной плоскости, как будто там опять-таки находится тонкая линза (фиг. 27.8).

Само собой разумеется, если определить, как и раньше, расстояние  $x$ ,  $x'$  и  $y$ ,  $y'$ , то формула (27.16) для тонкой линзы будет применима и в этом общем случае, только фокусные расстояния нужно отсчитывать от главных плоскостей, а не от центра линзы. Для тонкой линзы главные плоскости совпадают. Получается так, как если бы мы взяли тонкую линзу, разрезали ее на дольки и разнесли их на некоторое расстояние, а в результате ничего не изменилось. Каждый входящий



Фиг. 27.8. Главные плоскости оптической системы.

луч немедленно выскакивает по другую сторону от второй плоскости! Главные плоскости и фокусные расстояния находят либо вычислением, либо опытным путем; этим исчерпывается описание свойств оптической системы. Весьма интересно, что результат для большой и сложной оптической системы оказался таким простым.

## § 6. Аберрация

Пока вы еще не успели прийти в восхищение от такой великолепной штуки, как линза, я должен успеть сказать об ее серьезных недостатках, которые мы не могли заметить раньше, поскольку ограничились рассмотрением параксиальных лучей. Реальная линза обладает конечной толщиной и, вообще говоря, обнаруживает свойства *абберации*. Например, луч, направленный вдоль оси, обязательно пройдет через фокус. Луч, близкий к оси, будет еще проходить через фокус, но более далекие лучи начнут от него отклоняться: близкие ненамного, а крайний луч уже на большое расстояние. В результате вместо точечного изображения получается расплывчатое пятно. Этот эффект называется *сферической абберацией*, потому что он возникает в результате использования сферических поверхностей вместо поверхностей правильной формы. Для каждого данного расстояния от объекта до линзы эффект абберации можно устранить, изменив форму линзы или взяв несколько линз с таким расчетом, чтобы абберации отдельных линз взаимно уничтожались.

Линзы страдают еще одним недостатком: свет разного цвета имеет разную скорость, т. е. разные показатели преломления в стекле, а поэтому фокусное расстояние для разных цветов разное. Изображение белого пятна получается цветным, так как, когда в фокусе красный цвет, синий оказывается вне фокуса, и наоборот. Это явление называется *хроматической абберацией*.

Бывают и другие искажения. Если объект находится не на оси, то добиться четкого фокуса невозможно. Легче всего это проверить, наклонив наведенную на фокус линзу так, чтобы в нее попадали лучи под большим углом к оси. Тогда изображение сильно расплывется и может случиться, что ни одного четко сфокусированного места не останется. Таким образом, линзы страдают рядом искажений, и обычно оптик-конструктор старается их выправить, соединяя по несколько линз, с тем чтобы скомпенсировать искажения отдельных линз.

До какого предела можно устранить абберации? Можно ли создать совершенную оптическую систему? Допустим, что мы сумели построить оптическую систему, фокусирующую

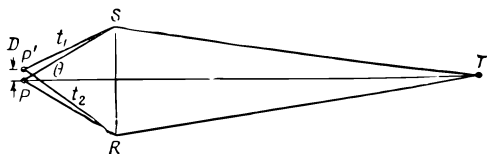
свет точно в одну точку. Можем ли мы теперь найти требования (с точки зрения принципа Ферма), которым должна удовлетворять наша система? Система всегда имеет отверстие конечных размеров, в которое входит свет. Для совершенной системы время прохождения любого, как угодно удаленного от оптической оси луча одинаково. Но абсолютного совершенства не бывает, поэтому поставим вопрос: каков разумный предел точности совпадения всех времен? Это зависит от того, насколько совершенное изображение мы хотим иметь. Предположим, что мы хотим, чтобы оно было настолько совершенным, насколько это вообще возможно. Тогда с первого взгляда кажется, что и времена прохождения всех лучей нужно уравнивать с максимальной точностью. На самом деле это не так; существует некий предел, за которым всякое уточнение бессмысленно, потому что приближение геометрической оптики перестает работать!

Вспомним, что принцип наименьшего времени, в отличие от закона сохранения энергии и импульса, не есть точный принцип, а лишь некоторое *приближение*. И поэтому интересно установить, какие ошибки допустимы в пределах точности этого приближения. *Ответ*: не имеет смысла требовать равенства времен прохождения лучей (скажем, в худшем случае луча вдоль оси и наиболее удаленного от оси) с точностью, превышающей период колебания света. Свет есть колебательный процесс с определенной частотой, которая связана с длиной волны, и если мы добились, что времена прохождения лучей отличаются на величину, меньшую или порядка периода колебаний, то дальше уравнивать времена бесполезно.

## § 7. Разрешающая способность

Еще один интересный вопрос, очень важный с технической точки зрения: какова *разрешающая способность* оптических приборов? Когда мы создаем микроскоп, мы хотим целиком видеть тот объект, который находится в поле нашего зрения. Это означает, например, что, глядя на бактерию, на боках которой имеются два пятнышка, мы хотим различить оба пятнышка на увеличенном изображении. Могут подумать, что для этого нужно только получить достаточное увеличение, ведь всегда можно добавить еще линзы и достичь большего увеличения, а если конструктор ловкий, то он устранил сферические и хроматические aberrации; вот вроде бы и нет причин, почему бы не увеличить желаемое изображение до любых размеров. Но предел возможностей микроскопа связан не с тем, что невозможно добиться увеличения более чем в 2000 раз. Можно построить систему линз, увеличиваю-

Фиг. 27.9. Разрешающая способность оптической системы.



шую в 10 000 раз, и все же не увидит те два пятнышка, расположенные так близко одно к другому, и не увидим мы их из-за ограниченности возможностей геометрической оптики и неточности принципа наименьшего времени.

Сравнивая время прохождения разных лучей, можно красивым способом вывести правило, определяющее расстояние между двумя точками, при котором эти точки еще различаются на изображении. Отвлечемся пока от аберраций, и пусть все лучи от некоторой точки  $P$  (фиг. 27.9) проходят до изображения  $T$  за одно и то же время (такого быть не может, поскольку система несовершенна, но это уже к данному вопросу не относится). Возьмем еще одну близлежащую точку  $P'$  и посмотрим, различаются ли их изображения. Другими словами, сможем ли мы различить оба изображения? Конечно, согласно геометрической оптике, должно быть два изображения, но то, что мы увидим, может оказаться весьма расплывчатым, и нам не удастся разобрать, что точек две. Требование, чтобы вторая точка давала изображение, отличное от первого, сводится к следующему условию: времена прохождения двух крайних лучей  $P'ST$  и  $P'RT$  от точки  $P'$  до изображения первой точки  $T$  должны быть *разными*. Почему? Потому что при равных временах свет от  $P'$  *сфокусировался бы* в  $T$ , т. е. изображения совпали бы. Итак, времена должны быть разными. Но насколько они должны отличаться, чтобы мы сказали, что они имеют *разные* фокусы и обе точки на изображении различимы? Разрешающая способность любого оптического устройства определяется следующим правилом: изображения двух точечных источников могут быть различимы, если только времена прохождения крайних лучей от одного источника к изображению второго отличаются от времени прохождения к собственному изображению более чем на один период. Для этого необходимо, чтобы разность времен прохождения верхнего и нижнего крайних лучей к *чужому* изображению была больше некоторой величины, примерно равной периоду колебания световой волны:

$$t_2 - t_1 > \frac{1}{\nu}, \quad (27.17)$$

где  $\nu$  — частота света (число колебаний в секунду, или скорость света, деленная на длину волны). Обозначим расстоя-

ние между точками через  $D$ , а половину угла, под которым видна линза из точки  $P$ , через  $\theta$ ; тогда (27.17) равносильно утверждению, что  $D$  больше  $(\lambda/n)\sin\theta$ , где  $n$  — показатель преломления в точке  $P$ , а  $\lambda$  — длина волны. Отсюда размеры самого малого объекта, который мы можем увидеть, оказываются порядка длины волны света. Для телескопов тоже имеется такая формула; она определяет наименьшую разность углов (угловое расстояние) между двумя звездами, при которой их еще можно отличить друг от друга\*.

---

\* Предельный угол имеет величину порядка  $\lambda/D$ , где  $D$  — диаметр линзы. Сможете ли вы показать, как это получается?

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

§ 1. Электромагнетизм

§ 2. Излучение

§ 3. Дипольный излучатель

§ 4. Интерференция

### § 1. Электромагнетизм

Решающие и наиболее поразительные периоды развития физики — это периоды великих обобщений, когда явления, казавшиеся разобщенными, неожиданно становятся всего лишь разными аспектами одного и того же процесса. История физики — это история таких обобщений, и в основе успеха физической науки лежит главным образом наша *способность к синтезу*.

По-видимому, самым знаменательным моментом в развитии физики XIX столетия следует считать тот день в 1860 г., когда Дж. К. Максвелл сопоставил законы электричества и магнетизма с законами поведения света. В результате были частично объяснены свойства света — этой старой и тонкой субстанции, настолько загадочной и важной, что в свое время при написании главы о сотворении мира сочли нужным отвести для него отдельный акт творения. Закончив свое исследование, Максвелл мог бы сказать: «Да будет электричество и магнетизм, и станет свет!»

Этот кульминационный момент долго подготавливался постепенным раскрытием законов электричества и магнетизма, о которых мы подробно расскажем в дальнейшем. Вкратце история сводится к следующему. По мере того как постепенно открывались все новые свойства электричества и магнетизма, электрических сил притяжения и отталкивания, а также магнитных сил, было обнаружено, что, хотя эти силы носят довольно сложный характер, все они спадают обратно пропорционально квадрату расстояния. Известно,

например, что именно таким образом меняются кулоновские силы между неподвижными зарядами. Отсюда вытекает, что на достаточно больших расстояниях системы зарядов мало влияют друг на друга. Связав между собой открытые до тех пор законы, Максвелл обнаружил, что они несовместны, и, чтобы сделать всю систему совместной, он добавил к уравнениям еще один член. Появление этого члена привело к замечательному предсказанию: часть электрического и магнитного поля спадает медленнее, чем обратный квадрат расстояния, а именно обратно пропорционально самому расстоянию! Отсюда Максвелл вывел, что электрические токи воздействуют на как угодно далекие системы зарядов, и предсказал все основные, хорошо нам теперь знакомые явления — передачу радиоволн, радиолокацию и т. д.

Кажется поистине чудом, что с помощью каких-то электрических воздействий человек, говорящий где-нибудь в Европе, может быть услышан за тысячи миль в Лос-Анджелесе. Почему это стало возможным? Потому, что поля спадают обратно пропорционально не квадрату, а первой степени расстояния. Наконец, было показано, что свет тоже представляет собой электрические и магнитные поля, распространяющиеся на большие расстояния, а генерируется он неправдоподобно быстрым колебанием электронов в атомах. Все эти явления мы будем называть *излучением*, или, более точно, *электромагнитным излучением*, потому что бывают и другие типы излучений. Но почти всегда излучение означает электромагнитное излучение.

И тут выступает единство явлений во Вселенной. Движение атомов далекой звезды даже на огромных расстояниях возбуждает электроны нашего глаза, и мы узнаем о звездах. Если бы закона воздействия полей не существовало, мы бы буквально ничего не знали о внешнем мире! А электрические бури в галактике, удаленной от нас на пять миллиардов световых лет (самой далекой из обнаруженных до сих пор), еще способны возбуждать токи в гигантской «чаше» радиотелескопа. Вот почему мы видим и звезды, и галактики.

Об этих замечательных явлениях и пойдет речь в настоящей главе. В самом начале нашего курса лекций мы обрисовали общую картину мира, но теперь мы более подготовлены к тому, чтобы понять ее глубже. Поэтому вернемся снова к общей картине явлений и поговорим о ней более подробно. Начнем мы с описания положения, которое физика занимала в конце XIX столетия. Все, что тогда было известно об основных закономерностях, можно сформулировать так.

Во-первых, была известна сила тяготения (мы ее записывали неоднократно). Сила, действующая на тело с мас-

сой  $m$  со стороны тела массы  $M$ , дается выражением

$$F = G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (28.1)$$

где  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор, направленный от  $m$  к  $M$ , а  $r$  — расстояние между телами.

Во-вторых, к концу XIX века был известен такой закон электричества и магнетизма: сила, действующая на заряд  $q$ , характеризуется двумя полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  и скоростью заряда  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (28.2)$$

К этому нужно добавить формулы для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Для совокупности заряженных частиц поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  представляются как суммы вкладов от каждой частицы в отдельности. Таким образом, определив  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  для одного заряда и сложив вклады от всех зарядов во Вселенной, мы получим полную величину  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ ! В этом и состоит принцип суперпозиции.

Как теперь получить формулу для электрического и магнитного поля одного заряда? Оказывается, это очень сложно; понадобится затратить много труда и использовать тонкие доказательства. Но не в этом дело. Мы написали законы, собственно, чтобы подчеркнуть красоту природы, показать, что все основные законы можно уместить на одной странице (с обозначениями читатель уже знаком). Точная и вполне строгая формула для поля, создаваемого отдельным зарядом, насколько мы знаем, имеет очень сложный вид (мы отвлекаемся от эффектов квантовой механики). Поэтому мы не будем выводить ее подробно, а запишем сразу, как она выглядит. На самом деле *правильнее* было бы записать законы электричества и магнетизма с помощью *уравнений поля*, о которых будет сказано позднее. Но там используются совсем иные понятия и обозначения, поэтому давайте сейчас напишем выражения для поля в уже знакомой нам форме, хотя она и не очень удобна для вычислений.

Электрическое поле  $\mathbf{E}$  дается выражением

$$\mathbf{E} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{e}_r}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{e}_r}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_r \right]. \quad (28.3)$$

Что означают отдельные члены в этом выражении? Возьмем первый из них,  $\mathbf{E} = -q\mathbf{e}_r/4\pi\epsilon_0 r'^2$ . Это уже знакомый нам закон Кулона; здесь  $q$  — заряд, создающий поле,  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор, направленный от точки  $P$ , где измеряется поле  $\mathbf{E}$ ,  $r$  — расстояние от  $P$  до  $q$ . Но закон Кулона неточен. Открытия, сделанные в XIX веке, показали, что любое воздействие не может распространяться быстрее некоторой фундаментальной скорости  $c$ , называемой теперь скоростью света. Поэтому определить положение заряда в *настоящий момент*



времени невозможно. Кроме того, на поле в данный момент времени может влиять только поведение заряда в *прошлом*. А как *давно* в прошлом? Задержка во времени, или так называемое *время запаздывания*, есть время, необходимое для прохождения расстояния от заряда до точки измерения поля  $P$  со скоростью света  $c$ . Время запаздывания равно  $r'/c$ . Таким образом, первый член в (28.3) представляет собой не обычный, а запаздывающий закон Кулона.

Чтобы учесть запаздывание, мы поставили штрих у  $r$ , понимая под  $r'$  то расстояние, на которое в начальный момент своего воздействия *был удален* заряд  $q$  от точки  $P$ . Представим на минуту, что заряд несет с собой световые сигналы, которые движутся к точке  $P$  со скоростью  $c$ . Тогда, глядя на заряд  $q$ , мы увидели бы его не в том месте, где он находится сейчас, а там, где он *был* некоторое время назад. В нашу формулу входит *кажущееся* направление  $\mathbf{e}_{r'}$ , так называемое *запаздывающее* направление, и *запаздывающее* расстояние  $r'$ . Это легко понять, но это еще не все. Дело, оказывается, гораздо сложнее.

В выражении (28.3) имеется и ряд других членов. Вторым членом природа как бы учитывает запаздывание в первом грубом приближении. Это поправка к запаздывающему кулоновскому члену; она представляет собой произведение скорости изменения кулоновского поля и времени запаздывания. Но и это не все. Есть еще третий член — вторая производная по  $t$  единичного вектора, направленного к заряду. Этим исчерпывается формула; мы учли все вклады в электрическое поле от произвольно движущегося заряда.

Магнитное поле выражается следующим образом:

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_{r'} \times \frac{\mathbf{E}}{c}. \quad (28.4)$$

Все предыдущее мы написали, чтобы показать красоту природы и, в некотором смысле, могущество математики. Говоря откровенно, мы даже не пытаемся понять, *почему* столь значительные по содержанию формулы занимают так мало места, ведь в них содержатся и принцип действия генераторов тока, и особенности поведения света — словом, все явления электричества и магнетизма. Конечно, для полноты картины нужно добавить еще кое-что о свойствах использованных материалов (свойствах вещества), которые пока не учтены в (28.3).

Заканчивая краткое описание представлений о мире в XIX веке, следует упомянуть еще об одном фундаментальном обобщении, к которому в большой степени причастен и Максвелл, а именно о единстве явлений механики и теплоты. Мы будем говорить об этом в ближайшем будущем.

В XX столетии обнаружили, что все законы динамики Ньютона неправильны, и чтобы уточнить их, воспользовались квантовой механикой. (Законы Ньютона справедливы для тел достаточно больших размеров.) Совсем недавно законы квантовой механики в совокупности с законами электромагнетизма послужили основой для открытия законов *квантовой электродинамики*. Кроме того, был открыт ряд новых явлений, и раньше других — явление радиоактивности, открытое Беккерелем в 1898 г. (он похитил его из-под самого носа у XX столетия). Явление радиоактивности послужило началом развития науки о ядрах, новых частицах и о взаимодействиях совсем другого рода — не гравитационных и не электрических. Все эти вопросы еще ждут своего разрешения.

Для уж очень строгих и образованных читателей (скажем, профессоров, которым случится читать эти строки) специально добавим: наше утверждение, что выражение (28.3) содержит все известное из электродинамики, не совсем точно. Существует вопрос, который так и не был разрешен к концу XIX столетия. Если попробовать вычислить поле, создаваемое всеми зарядами, *включая и тот заряд, на который в свою очередь действует поле*, то возникнут трудности при попытке определить, например, расстояние от заряда до него самого и последующей подстановке этой величины, равной нулю, в знаменатель. Как быть с той частью поля, которая создается зарядом и на него же действует, до сих пор не понятно. Оставим этот вопрос, загадка не разгадана до конца, и мы по возможности будем избегать говорить о ней.

## § 2. Излучение

Перейдем от общей картины мира к явлениям излучения. Прежде всего мы должны выбрать тот член в выражении (28.3), который спадает обратно пропорционально первой (а не второй!) степени расстояния. Оказывается, что этот член имеет столь простой вид, что если принять его в качестве закона поведения электрического поля, создаваемого движущимся зарядом на больших расстояниях, то можно излагать электродинамику и оптику на элементарном уровне. Мы временно примем этот закон без доказательства, а позже изучим его подробнее.

Первый член в правой части (28.3) явно обратно пропорционален второй степени расстояния; легко показать, что и второй член, дающий поправку на запаздывание для первого, меняется таким же образом. Весь интересующий нас эффект заключен в третьем члене, и в общем он не так уж сложен. Этот член говорит нам следующее: посмотрите на заряд и заметьте направление единичного вектора (конец вектора

скользит по поверхности единичной сферы). По мере движения заряда единичный вектор крутится, и *его ускорение есть именно то, что нам нужно*. Вот и все. Итак,

$$\mathbf{E} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_r'}{dt^2}. \quad (28.5)$$

Формула (28.5) выражает закон излучения, потому что единственный член, который она содержит, спадает обратно пропорционально расстоянию и, следовательно, доминирует на больших расстояниях от заряда. (Часть, меняющаяся обратно пропорционально квадрату расстояния, становится настолько малой, что не представляет интереса.)

Продвинемся несколько вперед и выясним смысл формулы (28.5). Пусть заряд движется произвольным образом и мы наблюдаем его на некотором расстоянии. Представим на минуту, что заряд «светится» (хотя именно явление света мы и должны объяснить); итак, пусть заряд есть светящаяся белая точка. Мы видим движение этой точки. Но мы не можем *точно* определить, как она движется в *данный* момент, из-за упоминавшегося уже ранее запаздывания. Имеет смысл говорить только о том, как она двигалась в *более ранний момент времени*. Единичный вектор  $\mathbf{e}_r'$  направлен к кажущемуся положению заряда. Конец вектора  $\mathbf{e}_r'$ , естественно, описывает некую кривую, так что ускорение имеет две составляющие. Одна из них — поперечная составляющая, возникающая из-за движения конца вектора вверх и вниз, а другая — радиальная, или продольная, возникающая из-за вращения конца вектора по сфере. Легко показать, что вторая составляющая много меньше первой и изменяется обратно пропорционально квадрату  $r$  для очень больших  $r$ . В самом деле, если отодвигать источник все дальше и дальше от точки наблюдения, колебания вектора  $\mathbf{e}_r'$  будут становиться все слабее (обратно пропорционально расстоянию), а продольная составляющая ускорения будет убывать еще быстрее. Поэтому для практических целей достаточно спроектировать движение заряда на плоскость, находящуюся на единичном расстоянии. В результате мы приходим к следующему правилу: пусть мы наблюдаем движущийся заряд и все, что мы видим, запаздывает во времени, т. е. мы находимся в положении художника, который рисует пейзаж на полотне, отстоящем от него на расстоянии единицы длины. Конечно, художник не учитывает тот факт, что скорость света конечна, а изображает мир таким, каким он его видит. Посмотрим, что он нарисует на этой картине. Мы увидим точку (изображение заряда), движущуюся по картине. Ускорение этой точки пропорционально электрическому полю. Вот и все, что нам нужно.

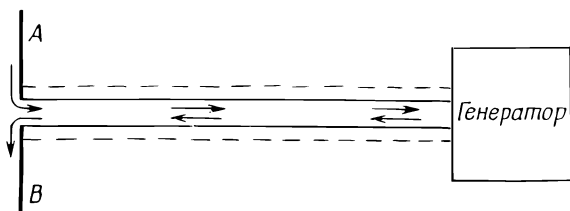
Таким образом, формула (28.5) дает полное и точное описание процесса излучения; в ней содержатся даже все релятивистские эффекты. Однако часто встречается более простая ситуация, когда заряды передвигаются с малой скоростью и на небольшие расстояния. Поскольку заряды движутся медленно, расстояния, которые они проходят с момента излучения, невелики, так что время запаздывания оказывается практически постоянным. В этом случае формула (28.5) упрощается. В самом деле, пусть заряд совершает малые смещения и находится примерно на одном и том же расстоянии от точки наблюдения. Время запаздывания на расстоянии  $r$  есть  $r/c$ . Тогда наше правило (определяющее поле излучения) будет выражаться так: если заряженное тело сдвигается на малые расстояния и боковое смещение есть  $x(t)$ , то единичный вектор  $e_{r'}$  поворачивается на угол  $x/r$ , и поскольку  $r$  практически постоянно, то составляющая  $d^2e_{r'}/dt^2$  в направлении  $x$  равна просто ускорению самой величины  $x$  в более ранний момент времени. В результате мы приходим к формуле

$$E_x(t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} a_x \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (28.6)$$

Сюда входит только составляющая  $a_x$ , перпендикулярная лучу зрения. Попробуем понять, почему это так. В самом деле, когда заряд движется прямо к нам или от нас, единичный вектор в направлении заряда не смещается и ускорение равно нулю. Поэтому для нас существенно только боковое движение, т. е. только та часть ускорения, которая проецируется на экран.

### § 3. Дипольный излучатель

Примем формулу (28.6) в качестве основного закона электромагнитного излучения, т. е. будем считать, что электрическое поле, создаваемое нерелятивистски движущимся зарядом на достаточно больших расстояниях  $r$ , имеет вид (28.6). Электрическое поле обратно пропорционально  $r$  и прямо пропорционально ускорению заряда, спроецированному на «плоскость зрения», причем ускорение берется не в данный момент времени, а в более ранний (время запаздывания равно  $r/c$ ). Вся оставшаяся часть главы будет посвящена приложению закона (28.6) к всевозможным явлениям распространения света и радиоволн, таким, как отражение, преломление, интерференция, дифракция и рассеяние. Закон (28.6) имеет фундаментальное значение и содержит всю необходимую для нас информацию. Остальная часть формулы (28.3) только декорация и нужна лишь для того, чтобы понять, как и почему возник закон (28.6).

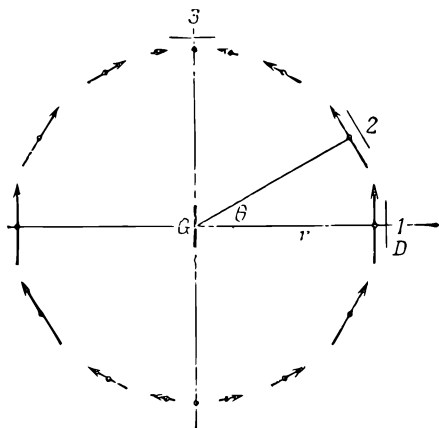


Ф и г. 28.1. Высокочастотный генератор раскачивает электроны в проволоках вверх и вниз.

В дальнейшем мы еще вернемся к формуле (28.3), а пока примем ее как нечто данное и отметим, что справедливость ее основывается не только на теоретических выводах. Можно придумать целый ряд опытов, в которых проявлялось бы действие закона (28.3). Для этого необходим ускоряющийся заряд. Строго говоря, заряд должен быть одиночным, но, если взять большое количество зарядов, движущихся одинаково, поле представится суммой вкладов отдельных зарядов. Для примера рассмотрим два отрезка проволоки, присоединенных к генератору, как показано на фиг. 28.1. Суть дела в том, что генератор создает разность потенциалов или поле, которое в один момент времени выталкивает электроны из участка *A* и втягивает их в участок *B*, а через ничтожно малый промежуток времени действие поля становится обратным и электроны из *B* перекачиваются обратно в *A*! Так что в этих двух проволочках заряды на участках *A* и *B* как бы ускоряются одновременно то вверх, то вниз. Две проволоки и генератор нужны только в этом устройстве. Окончательный же результат таков, что заряды ускоряются вверх и вниз так, как если бы *A* и *B* составляли один кусок проволоки. Отрезок проволоки, длина которого очень мала по сравнению с расстоянием, проходимым светом за один период колебаний, называется *электрическим дипольным осциллятором*.

Таким образом, у нас есть прибор для создания электрического поля; теперь нам нужен прибор для детектирования электрического поля, но для этого можно взять то же самое устройство — пару проволок *A* и *B*! Если к такому устройству приложить электрическое поле, возникнет сила, движущая электроны по обеим проволокам либо вверх, либо вниз. Это движение фиксируется с помощью выпрямителя, смонтированного между проволоками *A* и *B*, а информация передается по тонкой проволоке в усилитель, где сигнал усиливается и воспроизводится с звуковой частотой путем модуляции радиочастот. Когда детектор воспринимает электрическое поле, из громкоговорителя доносится громкий звук; если поля нет, звука не возникает.

Фиг. 28.2. Измерение электрического поля в точках окружности, центр которой совпадает с положением линейного осциллятора.



В помещении, где мы детектируем волны, обычно находятся и другие объекты, и электрическое поле тоже раскачивает в них электроны; они колеблются вверх и вниз и в свою очередь воздействуют на детектор. Поэтому для успешного эксперимента расстояние между источником волн и детектором не должно быть большим, чтобы снизить влияние волн, отраженных от стен и от нас самих. Таким образом, опыт может дать результаты, не вполне точно совпадающие с (28.6), но достаточные для грубой проверки нашего закона.

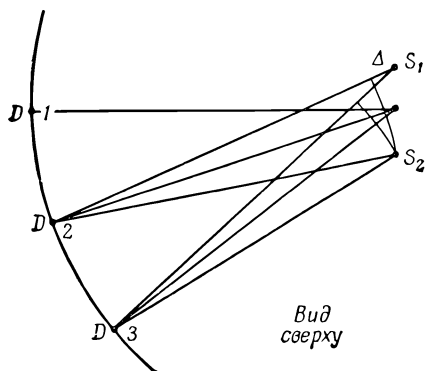
Включим теперь генератор и прислушаемся к звуковому сигналу. Когда детектор  $D$  находится в положении, параллельном генератору  $G$  в точке  $I$  (фиг. 28.2), мы услышим громкий сигнал (это характеризует большую величину поля). Ту же величину поля мы найдем и для любого положения детектора  $D$  при его вращении вокруг оси  $G$ , потому что в нашем опыте ни одно направление в горизонтальной плоскости не выделено. С другой стороны, когда детектор находится в точке  $3$ , поле оказывается равным нулю. Так и должно быть. Согласно нашей формуле, поле пропорционально ускорению заряда, *спроецированному на плоскость, перпендикулярную лучу зрения*. Когда детектор находится над генератором в точке  $3$ , заряды движутся к детектору и обратно и, следовательно, поле не должно возникнуть. Итак, опыт подтверждает первое высказанное нами правило, что заряды, движущиеся в направлении  $D$  и обратно, никакого действия не оказывают. Во-вторых, из формулы следует, что поле перпендикулярно  $r$  и лежит в плоскости, построенной на векторах  $G$  и  $r$ ; поэтому, переместив  $D$  из положения  $I$  в положение  $3$ , мы сигнала не услышим. Это как раз и означает, что электрическое поле направлено по вертикали. Если  $D$  смещено на некоторый промежуточный угол, наиболее громкий сигнал получается при ориентации  $I$  детектора, указанной на

рисунке. Дело в том, что, хотя генератор  $G$  и расположен вертикально, создаваемое им поле не будет везде параллельно направлению самого генератора; эффект определяется *составляющей ускорения, перпендикулярной лучу зрения*. В положении 2 сигнал оказывается слабее, чем в положении 1, именно из-за эффекта проецирования.

#### § 4. Интерференция

Возьмем теперь два источника, расположенных рядом, на расстоянии в несколько сантиметров один от другого (фиг. 28.3). Если оба источника присоединены к одному генератору и заряды в них движутся вверх и вниз одинаковым образом, то по принципу суперпозиции действия обоих источников складываются; электрическое поле равно сумме двух слагаемых и оказывается в два раза больше, чем в предыдущем случае.

Здесь появляется интересная возможность. Пусть заряды в  $S_1$  и  $S_2$  ускоряются вверх и вниз, но в  $S_2$  движение зарядов запаздывает и сдвинуто по фазе на  $18^\circ$ . Тогда в один и тот же момент времени поле, создаваемое  $S_1$ , будет иметь одно направление, а поле, создаваемое  $S_2$ , — противоположное, и, следовательно, в точке  $I$  никакого эффекта *не возникнет*. Относительную фазу колебаний легко создать с помощью трубки, передающей сигнал в  $S_2$ . При изменении длины трубки меняется и время прохождения сигнала до  $S_2$ , а следовательно, меняется разность фаз колебаний. Подобрать нужную длину трубки, мы можем добиться такого положения, что сигнал исчезнет, несмотря на движение зарядов в источниках  $S_1$  и  $S_2$ ! Излучение каждого источника в отдельности легко установить, выключая один из них; тогда действие второго обнаруживается сразу. Таким образом, если все сделать аккуратно, оба источника в совокупности могут дать *нулевой эффект*.



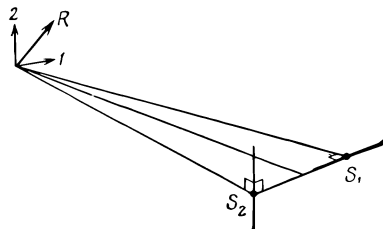
Вид  
сверху

Ф и г. 28.3. Интерференция полей от двух источников.

Теперь интересно убедиться, что сложение двух полей фактически есть *векторное* сложение. Мы только что рассмотрели случай движения зарядов вверх и вниз; обратимся теперь к примеру двух непараллельных движений. Прежде всего установим для  $S_1$  и  $S_2$  одинаковые фазы, т. е. пусть заряды движутся одинаково. Далее повернем  $S_1$  на угол  $90^\circ$ , как показано на фиг. 28.4. В точке  $I$  произойдет сложение двух полей, одного от горизонтального источника, а другого — от вертикального. Полное электрическое поле представится векторной суммой двух сигналов, находящихся в одной и той же фазе; оба сигнала одновременно проходят и через максимум, и через нуль. Суммарное поле должно быть равно сигналу  $R$ , повернутому на  $45^\circ$ . Максимальный звук будет получен, если повернуть детектор  $D$  на  $45^\circ$ , а не в вертикальном направлении. При повороте на прямой угол по отношению к указанному направлению звуковой сигнал, как легко проверить, должен быть равен нулю. И действительно, именно это и наблюдается!

А как быть с запаздыванием? Как показать, что сигнал действительно запаздывает? Конечно, прибегнув к большому числу сложных устройств, можно измерить время прибытия сигнала, но есть другой, очень простой способ. Обратимся снова к фиг. 28.3 и предположим, что  $S_1$  и  $S_2$  находятся в одной фазе. Оба источника колеблются одинаково и создают в точке  $I$  равные поля. Но вот мы перешли в точку  $2$ , которая находится ближе к  $S_2$ , чем к  $S_1$ . Тогда, поскольку запаздывание определяется величиной  $r/c$ , при разных запаздываниях сигналы будут приходиться с разными фазами. Следовательно, должна существовать такая точка, для которой расстояния от  $D$  до  $S_1$  и  $S_2$  различаются на такую величину  $\Delta$ , когда сигналы будут погашаться.

В этом случае  $\Delta$  должна быть равна расстоянию, проходимому светом за половину периода колебаний генератора. Сдвинемся еще дальше и найдем точку, где разность расстояний соответствует полному периоду колебаний, т. е. сигнал от первой антенны достигает точки  $3$  с запаздыванием по сравнению с сигналом от второй антенны, и это запаздывание в точности равно одному периоду колебаний. Тогда



Фиг. 28.4. Иллюстрация векторного характера сложения полей.



оба электрических поля снова находятся в одной фазе и сигнал в точке  $Z$  опять становится сильным.

На этом закончим описание экспериментальной проверки важнейших следствий формулы (28.6). Мы, конечно, не касались вопроса об электрических полях, спадающих по закону  $1/r$ , и не учитывали, что магнитное поле сопутствует электрическому при распространении сигнала. Для этого требуется довольно сложная техника вычислений, и вряд ли это что-либо добавит к нашему пониманию вопроса. Во всяком случае, мы установили свойства, наиболее важные для последующих приложений, а к другим свойствам электромагнитных волн мы еще вернемся.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

- § 1. Электромагнитные волны
- § 2. Энергия излучения
- § 3. Синусоидальные волны
- § 4. Два дипольных излучателя
- § 5. Математическое описание интерференции

§ 1. Электромагнитные волны

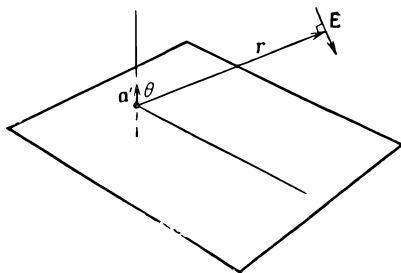
В этой главе мы будем обсуждать те же вопросы, что и в предыдущей, но с бóльшими математическими подробностями. Качественно мы уже показали, что поле излучения двух источников имеет максимумы и минимумы, и теперь наша задача — дать математическое, а не просто качественное описание поля.

Мы вполне удовлетворительно разобрали физический смысл формулы (28.6), рассмотрим теперь некоторые ее математические черты. Прежде всего поле заряда, движущегося вверх и вниз с малой амплитудой в направлении  $\theta$  от оси движения, перпендикулярно лучу зрения и лежит в плоскости ускорения и луча зрения (фиг. 29.1). Обозначим расстояние через  $r$ , тогда в момент времени  $t$  величина электрического поля равна

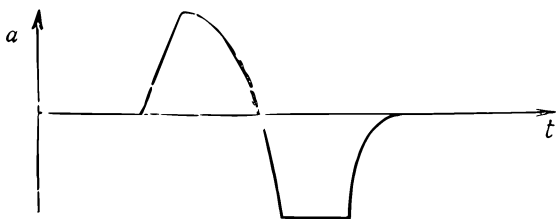
$$E(t) = - \frac{qa(t - r/c) \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad (29.1)$$

где  $a(t - r/c)$  — ускорение в момент времени  $(t - r/c)$ , или *запаздывающее* ускорение.

Интересно нарисовать картину распределения поля в разных случаях. Наиболее харак-

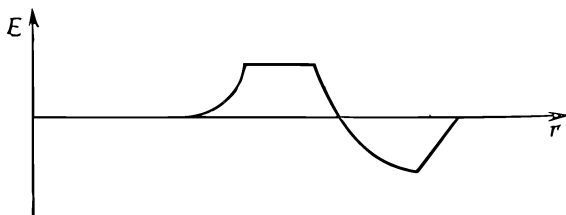


Фиг. 29.1. Напряженность поля  $E$ , создаваемая положительным зарядом с запаздывающим ускорением  $a'$ .



Фиг. 29.2. Ускорение некоторого заряда как функция времени.

терный множитель в формуле (29.1) — это  $a(t - r/c)$ ; чтобы его понять, возьмем простейший случай  $\theta = 90^\circ$  и изобразим поле на графике. Раньше мы были заняты вопросом, как ведет себя поле в данной фиксированной точке пространства с течением времени. Теперь посмотрим, как выглядит поле в разных точках пространства в один и тот же момент времени. Иначе говоря, нам нужен «моментальный снимок» поля, из которого будет ясно, каково оно в разных местах. Разумеется, картина распределения поля зависит от ускорения заряда. Зададим характер движения заряда: пусть сначала он покоится, затем внезапно начнет определенным образом ускоряться (как показано на фиг. 29.2) и, наконец, остановится. Затем, чуть позже, измерим поле в разных точках пространства. Мы можем утверждать, что поле будет иметь вид, приведенный на фиг. 29.3. В самом деле, поле в каждой точке определяется ускорением заряда в предыдущий момент времени, причем под словом «предыдущий» понимается  $r/c$  секунд назад. Чем дальше точка, тем более ранним моментом времени определяется для нее ускорение. Поэтому кривая на фиг. 29.3 в некотором смысле есть «обращенный» во времени график ускорения; время и расстояние отличаются постоянным множителем  $c$ , который часто выбирается равным единице. Этот факт легко заметить и в математической записи  $a(t - r/c)$ . Ясно, что добавка интервала времени  $\Delta t$  и



Фиг. 29.3. Электрическое поле как функция положения точки наблюдения спустя некоторый промежуток времени.

Множителем  $1/r$  пренебрегаем.

вычитание отрезка пути  $\Delta r = -c\Delta t$  дают одну и ту же величину  $a(t - r/c)$ .

Другими словами, увеличив время на  $\Delta t$ , можно восстановить значение  $a(t - r/c)$  добавлением отрезка  $\Delta r = c\Delta t$ , т. е. поле распространяется со временем как волна, уходящая от источника. Вот почему иногда говорят, что свет движется как волна. Можно также сказать, что поле запаздывает во времени, или, иначе, что поле распространяется вширь с течением времени.

Особый интерес представляет случай периодических колебаний заряда  $q$ . В опыте, рассмотренном в гл. 28, смещение зарядов  $x$  в момент  $t$  равнялось некоторой константе  $x_0$ , амплитуде колебаний, умноженной на  $\cos \omega t$ . Ускорение в этом случае равно

$$a = -\omega^2 x_0 \cos \omega t = a_0 \cos \omega t, \quad (29.2)$$

где  $a_0$ , равное  $-\omega^2 x_0$ , и есть амплитуда ускорения. Подставляя эту формулу в (29.1), находим

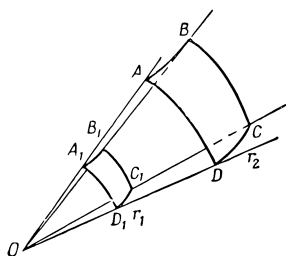
$$E = -q \sin \theta \frac{a_0 \cos \omega(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c^2}. \quad (29.3)$$

Отвлечемся пока от угла  $\theta$  и постоянных и посмотрим, как ведет себя  $E$  (29.3) в зависимости от времени или координат.

## § 2. Энергия излучения

Как мы уже говорили, в любой момент времени и в любой точке пространства напряженность поля меняется обратно пропорционально расстоянию  $r$ . Следует заметить, что энергия, несомая волной, и любые энергетические характеристики электрического поля пропорциональны квадрату поля. Пусть, например, заряд или осциллятор находится в электрическом поле и под влиянием поля начинает двигаться. Для линейного осциллятора смещение, ускорение и скорость, возникающие под действием поля, прямо пропорциональны величине поля. Поэтому кинетическая энергия заряда пропорциональна квадрату поля. Мы примем, что энергия, которую поле может передать какой-либо системе, пропорциональна квадрату поля.

Отсюда следует, что энергия, получаемая в данном месте от источника поля, уменьшается по мере удаления от источника, точнее, она падает обратно пропорционально квадрату расстояния. Существует очень простая интерпретация этого факта: соберем энергию волны, падающую в конус с вершиной в источнике, сначала на расстоянии  $r_1$  (фиг. 29.4), а затем на расстоянии  $r_2$ ; тогда количество энергии, падающее на единичную площадку, обратно пропорционально квадрату расстояния  $r$ , а площадь поверхности внутри конуса растет



Фиг. 29.4. Количество энергии, протекающей внутри конуса  $OABCD$ , не зависит от расстояния  $r$ , на котором оно измеряется.

прямо пропорционально квадрату расстояния  $r$  от поверхности до вершины конуса. Таким образом, на каком бы расстоянии от вершины конуса мы ни находились, энергия, проходящая внутри конуса, одна и та же! В частности, если окружить источник со всех сторон поглощающими осцилляторами, то полное количество энергии, поступающее в них от волны, будет постоянным, независимо от расстояния до источника. Закон спадания поля  $E$  как  $1/r$  эквивалентен утверждению, что имеется поток энергии, который нигде не теряется; при этом энергия распространяется на все большие и большие области пространства. Таким образом, заряд, колеблясь, безвозвратно теряет энергию, уходящую все дальше и дальше. Заряд не может вернуть излученную энергию с тех расстояний, где применимо наше рассмотрение; для достаточно больших расстояний от источника вся излученная энергия уходит прочь. Конечно, энергия не исчезает бесследно и ее можно поглотить с помощью других систем. Потери энергии на излучение мы будем изучать в гл. 32.

Рассмотрим теперь более подробно волны вида (29.3) как функции времени в данном месте и как функции расстояния в данный момент времени. Как и раньше, будем отвлекаться от постоянных множителей и множителя  $1/r$ .

### § 3. Синусоидальные волны

Зафиксируем вначале  $r$  и рассмотрим поле как функцию времени. Получается функция, которая осциллирует с угловой частотой  $\omega$ . Угловую частоту  $\omega$  можно определить как *скорость изменения фазы со временем* (радианы в секунду). Эта величина нам уже знакома. *Период* есть время одного колебания, одного полного цикла; он равен  $2\pi/\omega$ , так как произведение  $\omega$  и периода есть полный период косинуса.

Введем новую величину, которая очень часто используется в физике. Она возникает в другой ситуации, когда  $t$  фиксировано и волна рассматривается как функция расстояния  $r$ . Легко увидеть, что как функция  $r$  волна (29.3) тоже осциллирует. Если отвлечься от множителя  $1/r$ , то мы видим, что  $E$

тоже осциллирует, когда мы меняем положение. Тогда по аналогии с  $\omega$  введем так называемое *волновое число* и обозначим его через  $k$ . Оно определяется как *скорость изменения фазы с расстоянием* (радианы на метр). Время при таком изменении остается фиксированным.

Роль периода здесь играет другая величина, ее можно было бы назвать периодом в пространстве, однако ее обычное название — длина волны, а обозначается она буквой  $\lambda$ . Длина волны есть расстояние, на котором колебание поля совершает один полный цикл. Легко видеть, что длина волны равна  $2\pi/k$ , потому что  $k$ , умноженное на длину волны, равно полному периоду косинуса. Итак, соотношение  $k\lambda = 2\pi$  полностью аналогично  $\omega t_0 = 2\pi$ .

В нашем конкретном случае между частотой и длиной волны имеется определенная связь, однако приведенные выше определения  $k$  и  $\omega$  носят совершенно общий характер и применимы также в тех физических условиях, когда никакого соотношения между этими величинами нет. Для рассматриваемой нами волны скорость изменения фазы с расстоянием найти легко. В самом деле, запишем выражение для фазы  $\varphi = \omega(t - r/c)$  и возьмем частную производную по  $r$

$$\left| \frac{d\varphi}{dr} \right| = k = \frac{\omega}{c}. \quad (29.4)$$

Это соотношение можно записать разными способами:

$$\lambda = ct_0, \quad (29.5)$$

$$\omega = ck, \quad (29.6)$$

$$\lambda v = c, \quad (29.7)$$

$$\omega\lambda = 2\pi c \quad (29.8)$$

Почему длина волны оказывается равной периоду, умноженному на  $c$ ? Очень просто. Дело в том, что за время, равное одному периоду, волны, двигаясь со скоростью  $c$ , пройдут расстояние  $ct_0$ , а, с другой стороны, это расстояние должно быть равно длине волны.

В других физических явлениях, когда приходится иметь дело не со светом, такого простого соотношения между  $k$  и  $\omega$  может и не быть. Пусть волна движется вдоль оси  $x$ , тогда распространение синусоидальной волны с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  описывается общей формулой вида  $\sin(\omega t - kx)$ .

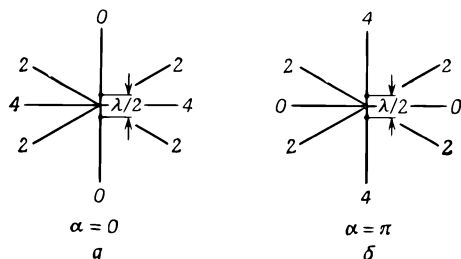
Введенное понятие длины волны позволяет уточнить пределы применимости формулы (29.1). Напомним, что поле складывается из нескольких частей: одна из них спадает как  $1/r$ , другая — как  $1/r^2$ , а остальные падают с расстоянием еще быстрее. Имеет смысл выяснить: когда часть, спадающая по

закону  $1/r$ , наиболее существенна, а остальными можно пренебречь? Естественно ответить: «Когда мы отойдем достаточно далеко от источника, потому что член  $1/r^2$  будет мал по сравнению с членом  $1/r$ ». Но что значит «достаточно далеко»? В общих чертах ответ таков: все остальные члены имеют порядок величины  $\lambda/r$  по сравнению с первым членом  $1/r$ . Так что когда мы находимся на расстоянии нескольких длин волн от источника, формула (29.1) описывает поле в хорошем приближении. Область, удаленную от источника на расстояние, превышающее несколько длин волн, иногда называют «волновой зоной».

#### § 4. Два дипольных излучателя

Рассмотрим теперь результирующее поле, которое возникает при одновременном действии двух осцилляторов. В предыдущей главе уже разбирались несколько наиболее простых случаев. Мы дадим сначала качественную картину явления, а затем опишем те же эффекты с количественной точки зрения. Возьмем простейший случай, когда осцилляторы и детектор расположены в одной горизонтальной плоскости, а колебания осцилляторов происходят в вертикальном направлении.

На фиг. 29.5, *a* показан вид обоих осцилляторов сверху; в данном случае расстояние между ними в направлении север—юг равно половине длины волны и колеблются они в одной фазе, т. е. разность фаз осцилляторов равна нулю. Нас интересует интенсивность излучения в разных направлениях. Под интенсивностью мы подразумеваем количество энергии, проходящей мимо нас в 1 сек; оно пропорционально квадрату напряженности поля, усредненному по времени. Так, для определения яркости света нужно взять квадрат напряженности электрического поля, а не саму напряженность. (Напряженность электрического поля характеризуется силой, с которой поле действует на неподвижный заряд, а количество энергии, проходящей через некоторую площадку, пропорционально квадрату напряженности поля и измеряется в ваттах на квадратный метр. Коэффициент пропорциональ-



Фиг. 29.5. Зависимость интенсивности излучения двух диполей, находящихся на расстоянии в половину длины волны, от направления излучения.

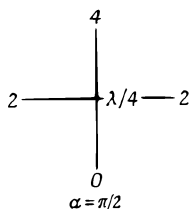
*a* — диполи в фазе ( $\alpha=0$ );  
*b* — диполи в противофазе ( $\alpha=\pi$ ).

ности будет выведен в следующей главе.) Если мы находимся к западу от системы осцилляторов, к нам от обоих осцилляторов приходят поля, одинаковые по величине и с одной фазой, так что суммарное электрическое поле в два раза больше поля отдельного осциллятора. Следовательно, *интенсивность будет в четыре раза больше интенсивности, возникающей от действия только одного осциллятора.* (Числа на фиг. 29.5 указывают интенсивность, причем за единицу измерения выбрана интенсивность излучения одного осциллятора, помещенного в начале координат.) Пусть теперь поле измеряется в северном или южном направлении, вдоль линии осцилляторов. Поскольку расстояние между осцилляторами равно половине длины волны, их поля излучения различаются по фазе ровно на полцикла, а, следовательно, суммарное поле равно нулю. Для промежуточного угла (равного  $30^\circ$ ) интенсивность равна 2, т. е., уменьшаясь, интенсивность последовательно принимает значения 4, 2, 0 и т. д. Нам нужно научиться находить интенсивность для разных углов. По существу, это сводится к задаче о сложении двух колебаний с разными фазами.

Давайте коротко рассмотрим еще несколько интересных случаев. Пусть расстояние между осцилляторами, как и раньше, равно половине длины волны, но колебания одного осциллятора отстают по фазе от колебаний другого на половину периода (см. фиг. 29.5, б). Интенсивность в горизонтальном направлении (западном или восточном) обращается в нуль, потому что один осциллятор «толкает» в одном направлении, а другой — в обратном. В северном направлении сигнал от ближайшего осциллятора приходит на полпериода раньше сигнала от дальнего осциллятора. Но последний запаздывает в своих колебаниях *как раз на полпериода*, так что оба сигнала приходят *одновременно*, и интенсивность в северном направлении равна 4. Интенсивность под углом  $30^\circ$ , как будет показано позже, снова равна 2.

Теперь мы подошли к одному интересному свойству, весьма полезному на практике. Заметим, что фазовые соотношения между осцилляторами используются при передаче радиоволн. Допустим, мы хотим направить радиосигнал на Гавайские острова. Используем для этого систему антенн, расположенную так, как показано на фиг. 29.5, а, и установим между ними нулевую разность фаз. Тогда максимальная интенсивность будет идти как раз в нужном направлении, поскольку Гавайские острова лежат на западе от США. На следующий день мы решим передавать сигналы уже в Канаду. А поскольку Канада находится на севере, нам надо только изменить знак одной из антенн, чтобы антенны находились в противофазе, как на фиг. 29.5, б, и передача пойдет на север.





Фиг. 29.6. Две дипольные антенны, дающие максимум излучения в одном направлении.

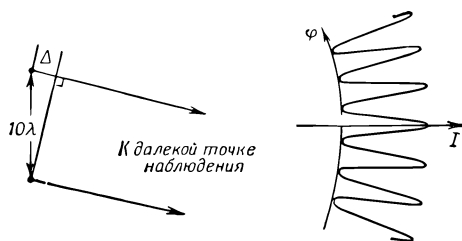
Можно придумать разные устройства системы антенн. Наш способ — один из самых простых; мы можем значительно усложнить систему и, выбрав нужные фазовые соотношения, послать пучок с максимальной интенсивностью в требуемом направлении, даже не сдвинув с места ни одну из антенн! Однако в обеих радиопередачах мы затрачивали много энергии зря, она уходила в прямо противоположном направлении; интересно знать, есть ли способ посылать сигналы только в *одном* направлении? На первый взгляд кажется, что пара антенн такого типа будет всегда излучать симметрично. На самом деле картина гораздо разнообразнее; рассмотрим для примера случай несимметричного излучения двух антенн.

Пусть расстояние между антеннами равно четверти длины волны и северная антенна отстает от южной по фазе на четверть периода. Что у нас тогда получится (фиг. 29.6)? Как мы дальше покажем, в западном направлении интенсивность равна 2. В южном направлении получится *нуль*, потому что сигнал от северного источника *N* приходит на  $90^\circ$  позже сигнала от южного источника *S* и, кроме того, он отстает по фазе еще на  $90^\circ$ ; в результате полная разность фаз есть  $180^\circ$  и суммарный эффект равен нулю. В северном направлении сигнал от источника *N* приходит на  $90^\circ$  раньше сигнала от *S*, поскольку источник *N* на четверть волны ближе. Но разность фаз равна  $90^\circ$  и *компенсирует* задержку во времени, поэтому оба сигнала приходят с *одной фазой*, что дает интенсивность, равную 4.

Таким образом, проявив некоторую изобретательность, в расположении антенн и выбрав нужные сдвиги фаз, можно направить энергию излучения в одном направлении. Правда, энергия будет все-таки испускаться в довольно большой интервал углов. А можно ли сфокусировать излучение в более узкий интервал углов? Обратимся снова к передаче волн на Гавайские острова; там радиоволны шли на запад и на восток в широком диапазоне углов и даже на угол  $30^\circ$  интенсивность была всего вдвое меньше максимальной, энергия расходовалась впустую.

Можно ли улучшить это положение? Рассмотрим случай, когда расстояние между источниками равно десяти длинам волн (фиг. 29.7), а разность фаз колебаний равна нулю. Это

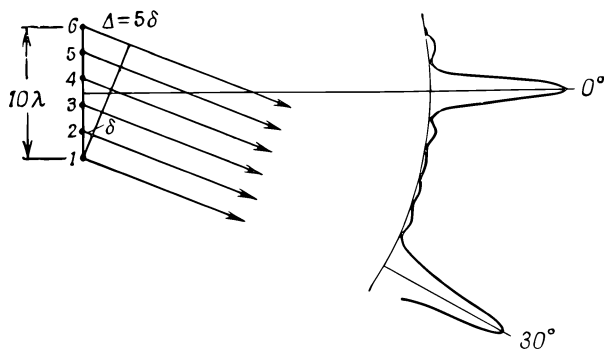
Фиг. 29.7. Распределение интенсивности двух диполей, находящихся на расстоянии  $10\lambda$  друг от друга.



ближе к ситуации, описанной ранее, когда мы экспериментировали с интервалами, равными нескольким длинам волн, а не малым долям длины волны. Здесь иная картина.

Если расстояние между источниками равно десяти длинам волн (мы выбираем более легкий случай, когда они находятся в фазе), то в западном и восточном направлениях интенсивность максимальна и равна 4. Если же сдвинуться на небольшой угол, разность фаз станет равной  $180^\circ$  и интенсивность обратится в нуль. Более строго: если мы проведем прямые от каждого осциллятора до точки наблюдения и вычислим разность расстояний до осцилляторов  $\Delta$ , причем  $\Delta$  окажется равным  $\lambda/2$ , то оба сигнала будут в противофазе и суммарный эффект равен нулю. Этому направлению отвечает первый нуль на фиг. 29.7 (масштаб на рисунке не выдержан, это, по существу, грубая схема). Это означает, что мы получаем узкий луч в нужном направлении; если же мы чуть сдвигаемся в сторону, интенсивность исчезает. Для практических целей, к сожалению, такие передающие системы имеют существенный недостаток: при некотором угле расстояние  $\Delta$  может стать равным  $\lambda$  и тогда оба сигнала снова окажутся в фазе! В результате получается картина с чередующимися максимумами и минимумами, точь-в-точь как в гл. 28 для расстояния между осцилляторами, равного  $2,5\lambda$ .

Как избавиться от всех лишних максимумов? Существует довольно интересный способ устранения нежелательных максимумов. Поместим между нашими двумя антеннами целый ряд других (фиг. 29.8). Пусть расстояние между крайними по-прежнему равно  $10\lambda$ , а через каждые  $2\lambda$  поставим по антенне и настроим все антенны на одну фазу. Всего у нас будет, таким образом, шесть антенн, и интенсивность в направлении запад — восток, конечно, сильно возрастет по сравнению с интенсивностью от одной антенны. Поле увеличится в шесть раз, а интенсивность, определяемая квадратом поля, — в тридцать шесть раз. Поблизости от направления запад — восток, как и раньше, возникнет направление с нулевой интенсивностью, а дальше, там, где мы ожидали увидеть высокий максимум, появится всего лишь небольшой «горб». Попробуем разобраться, почему так происходит.



Фиг. 29.8. Устройство из шести дипольных антенн и часть распределения интенсивности его излучения.

Причина появления максимума, казалось бы, по-прежнему существует, поскольку  $\Delta$  может равняться длине волны, и осцилляторы 1 и 6, находясь в фазе, взаимно усиливают свои сигналы. Но осцилляторы 3 и 4 оказываются не в фазе с осцилляторами 1 и 6, отличаясь от них по фазе приблизительно на половину длины волны, и вызывают обратный эффект по сравнению с этими осцилляторами. Поэтому интенсивность в данном направлении оказывается малой, хотя и не равной точно нулю. В результате возникает мощный луч в нужном направлении и ряд небольших побочных максимумов. Но в нашем частном примере есть одна добавочная неприятность: поскольку расстояние между соседними диполями равно  $2\lambda$ , можно найти угол, для которого разность хода  $\sigma$  лучей от соседних диполей в точности равна длине волны. Сигналы от соседних осцилляторов будут отличаться на  $360^\circ$ , т. е. снова окажутся в фазе, и в этом направлении мы получим еще один мощный пучок радиоволн! На практике этого эффекта легко избежать, если выбрать расстояние между осцилляторами меньше одной длины волны. Само же возникновение добавочных максимумов при расстоянии между осцилляторами более одной длины волны очень интересно и важно, но не для передачи радиоволн, а для дифракционных решеток.

## § 5. Математическое описание интерференции

Мы рассматривали излучение диполей с качественной точки зрения, теперь рассмотрим количественную картину. Найдем прежде всего суммарное поле от двух источников в самом общем случае, когда разность фаз  $\alpha$  и силы осцилляторов  $A_1$  и  $A_2$  произвольны; для этого необходимо сложить

два косинуса с одинаковой частотой, но разными фазами. Разность фаз находится весьма просто: она складывается из разности, возникающей за счет неодинакового удаления точки наблюдения от обоих источников, и внутренней, заданной разности фаз колебаний. Выражаясь математически, нам необходимо сложить две волны:  $R = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ . Как это сделать?

Каждый, вероятно, сумеет провести это сложение, но тем не менее проследим за ходом вычислений. Прежде всего, если мы разбираемся в математике и достаточно ловко управляемся с синусами и косинусами, эту задачу легко решить. Самый простой случай, когда амплитуда  $A_1$  равна  $A_2$ , и пусть обе они обозначаются через  $A$ . В этих условиях (назовем это тригонометрическим методом решения задачи) мы имеем

$$R = A[\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)]. \quad (29.9)$$

На уроках тригонометрии вы, вероятно, доказывали равенство

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B). \quad (29.10)$$

Если это нам известно, то мы немедленно получаем  $R$ :

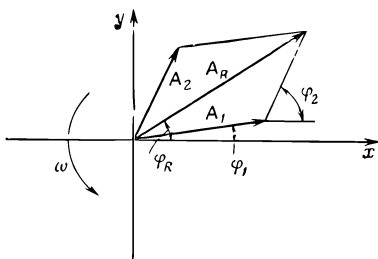
$$R = 2A \cos \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \left( \omega t + \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 \right). \quad (29.11)$$

Итак, мы снова получили синусоидальную волну, но с новой фазой и новой амплитудой. Вообще результат сложения двух синусоидальных волн *есть* синусоидальная волна с новой амплитудой  $A_R$ , называемой результирующей амплитудой, и новой фазой  $\varphi_R$ , называемой результирующей фазой. В нашем частном случае результирующая амплитуда равна

$$A_R = 2A \cos \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (29.12)$$

а результирующая фаза есть арифметическое среднее обеих фаз. Таким образом, поставленная задача полностью решена.

Предположим теперь, что мы забыли формулу сложения косинусов. Тогда можно применить другой метод решения — геометрический. Косинус, зависящий от  $\omega t$ , можно представить в виде горизонтальной проекции некоторого *вращающегося вектора*. Пусть имеется вектор  $A_1$ , вращающийся с течением времени; длина его равна  $A_1$ , а угол с осью абсцисс равен  $\omega t + \varphi_1$ . (Мы пока опустим слагаемое  $\omega t$ ; как мы увидим, при выводе это не играет роли.) Сделаем моментальный снимок векторов в момент времени  $t = 0$ , помня, что на самом деле вся схема вращается с угловой скоростью  $\omega$  (фиг. 29.9). Проекция  $A_1$  на ось абсцисс в точности равна



Фиг. 29.9. Геометрический способ сложения двух косинусоидальных волн.

Чертеж вращается со скоростью  $\omega$  против часовой стрелки.

$A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ . В момент времени  $t = 0$  вторая волна представляется вектором  $A_2$ , длина которого равна  $A_2$ , а его угол с осью абсцисс равен  $\varphi_2$ , причем он тоже вращается с течением времени. Оба вектора вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ , и их *относительное* расположение неизменно. Вся система вращается жестко, подобно твердому телу.

Горизонтальная проекция  $A_2$  равна  $A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ . Из векторного анализа известно, что при сложении двух векторов по правилу параллелограмма образуется новый, результирующий вектор  $A_R$ , причем  $x$ -компонента его есть сумма  $x$ -компонент слагающих векторов. Отсюда получаем решение нашей задачи. Легко проверить, что получается правильный ответ в нашем частном случае  $A_1 = A_2 = A$ . Действительно, из фиг. 29.9 очевидно, что  $A_R$  лежит посередине между  $A_1$  и  $A_2$  и составляет угол  $1/2 (\varphi_2 - \varphi_1)$  с каждым из них. Следовательно,  $A_R = 2A \cos 1/2 (\varphi_2 - \varphi_1)$ , что совпадает с прежним результатом. Кроме того, в случае  $A_1 = A_2$  фаза  $A_R$  есть среднее от фаз  $A_1$  и  $A_2$ . Для неравных  $A_1$  и  $A_2$  задача решается столь же просто. Мы можем назвать это *геометрическим* решением задачи.

Существует еще один метод решения задачи, его можно было бы назвать *аналитическим*. Вместо того чтобы рисовать схему, подобную приведенной на фиг. 29.9, напомним выражения, имеющие тот же смысл, что и чертеж, и сопоставим каждому вектору *комплексное число*. Действительные части этих комплексных чисел отвечают реальным физическим величинам. В нашем конкретном случае волны записываются следующим образом:  $A_1 \exp[i(\omega t + \varphi_1)]$  [действительная часть этого равна  $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ ] и  $A_2 \exp[i(\omega t + \varphi_2)]$ . Сложим обе волны:

$$R = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) e^{i\omega t}, \quad (29.13)$$

или

$$\hat{R} = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} = A_R e^{i\varphi_R}. \quad (29.14)$$

Задача, таким образом, решена, так как мы имеем окончательный результат в виде комплексного числа с модулем  $A_R$  и фазой  $\varphi_R$ .

Для иллюстрации аналитического метода найдем амплитуду  $A_R$ , т. е. «длину»  $R$ . «Длина» комплексного числа в квадрате есть само комплексное число, умноженное на сопряженное ему. Комплексное сопряжение состоит в изменении знака  $i$ . Отсюда получаем

$$A_R^2 = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})(A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}). \quad (29.15)$$

Перемножая, получаем  $A_1^2 + A_2^2$  и перекрестные члены

$$A_1 A_2 [e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}].$$

Далее

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta,$$

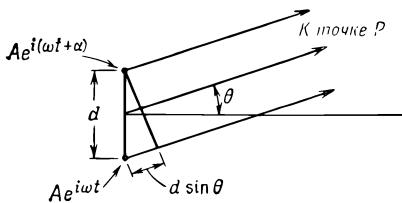
т. е.  $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ . Следовательно, окончательный результат есть

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (29.16)$$

(С помощью формул тригонометрии легко установить совпадение получаемого результата с длиной  $A_R$  на фиг. 29.9.)

Итак, суммарная интенсивность складывается из члена  $A_1^2$ , возникающего от действия только первого источника, интенсивности  $A_2^2$ , равной интенсивности второго источника, и еще дополнительного члена. Этот дополнительный член мы назовем *эффектом интерференции*. Он представляет собой разность между истинным результатом сложения и суммой интенсивностей. Интерференционный член может быть как положительным, так и отрицательным. Интерференция (interference) в английской разговорной речи означает возражение, помеху, но в физике слова часто теряют первоначальный смысл и употребляются совсем в другом значении!] Если интерференционный член положителен, мы будем говорить о *конструктивной* интерференции (буквальный смысл этого выражения покажется ужасным всем, кроме физиков!). В противном случае мы говорим о *деструктивной* интерференции.

Посмотрим теперь, как применить нашу общую формулу (29.16) для сложения полей излучения двух осцилляторов к тем частным случаям, которые мы уже качественно обсуждали. Для этого необходимо лишь вычислить разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  двух сигналов, приходящих в данную точку пространства. (Эффект, разумеется, связан с разностью фаз, а не с их абсолютными значениями.) Рассмотрим случай, когда два осциллятора с равными амплитудами и с относительной фазой колебаний  $\alpha$  (когда колебания одного имеют фазу нуль, фаза другого равна  $\alpha$ ) расположены на расстоянии  $d$  друг от друга. Будем искать интенсивность под углом  $\theta$  к линии запад — восток. [Заметьте, что этот угол не имеет *ничего общего* с углом  $\theta$  в формуле (29.1).] Разность расстояний от



Фиг. 29.10. Два осциллятора, обладающие одинаковой амплитудой и разностью фаз  $\alpha$ .

точки  $P$  до осцилляторов равна  $d \sin \theta$  (фиг. 29.10), поэтому разность фаз, возникающая по этой причине, равна числу длин волн, заключенных на отрезке  $d \sin \theta$ , умноженному на  $2\pi$ . (Более подготовленный читатель, вероятно, умножил бы волновое число  $k$ , т. е. скорость изменения фазы с расстоянием, на  $d \sin \theta$ , результат получится тот же самый.) Разность фаз, возникающая из-за разности хода лучей, есть, таким образом,  $(2\pi d \sin \theta)/\lambda$ , но из-за относительного запаздывания осцилляторов возникает дополнительная разность фаз  $\alpha$ . Отсюда полная разность фаз двух волн в точке наблюдения равна

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha + 2\pi d \frac{1}{\lambda} \sin \theta. \quad (29.17)$$

Это выражение охватывает все случаи. Теперь остается только подставить его в (29.16) и положить  $A_1 = A_2$ ; получится формула, с помощью которой можно вывести все результаты для двух антенн одинаковой интенсивности.

Рассмотрим частные случаи. Например, на фиг. 29.5 мы полагали, что интенсивность для угла  $30^\circ$  равна 2. Откуда это получается? Осцилляторы находятся на расстоянии  $\lambda/2$ , следовательно, для угла  $30^\circ$   $d \sin \theta = \lambda/4$ , отсюда  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\lambda/4\lambda = \pi/2$  и интерференционный член равен нулю. (Происходит сложение двух векторов, направленных под углом  $90^\circ$  друг к другу.) Сумма векторов есть гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника, она в  $\sqrt{2}$  раз больше каждой амплитуды. Следовательно, интенсивность в 2 раза больше интенсивности каждого источника в отдельности. Все остальные примеры исследуются точно таким же способом.

## ДИФРАКЦИЯ

### § 1. Результирующее поле $n$ одинаковых осцилляторов

Настоящая глава — непосредственное продолжение предыдущей, хотя название «Интерференция» здесь заменено словом «Дифракция». До сих пор никому не удалось удовлетворительным образом определить разницу между дифракцией и интерференцией. Дело здесь только в привычке, а существенного физического различия между этими явлениями нет. Единственное, что можно сказать по этому поводу, — это следующее: когда источников мало, например два, то результат их совместного действия обычно называют интерференцией, а если источников много, то чаще говорят о дифракции. Поэтому мы не будем утруждать себя вопросом — интерференция это или дифракция, а просто продолжим наше обсуждение с того места, где мы остановились в предыдущей главе.

Обсудим теперь случай, когда имеется  $n$  осцилляторов, расположенных на равных расстояниях один от другого и обладающих равными амплитудами, но разными фазами создаваемых ими полей. Разность фаз создается либо из-за выбора определенных фазовых сдвигов колебаний осцилляторов, либо потому, что мы находимся под углом к осцилляторам и возникает разность хода лучей. Независимо от причины возникновения разности фаз необходимо вычислить сумму такого вида:

$$R = A \{ \cos \omega t + \cos (\omega t + \varphi) + \cos (\omega t + 2\varphi) + \dots + \cos [\omega t + (n - 1)\varphi] \}, \quad (30.1)$$

где  $\varphi$  — разность фаз соседних осцилляторов для некоторого направления лучей. В данном частном случае  $\varphi = \alpha + 2\pi d \frac{1}{\lambda} \sin \theta$ . Вычис-

§ 1. Результирующее поле  $n$  одинаковых осцилляторов

§ 2. Дифракционная решетка

§ 3. Разрешающая способность дифракционной решетки

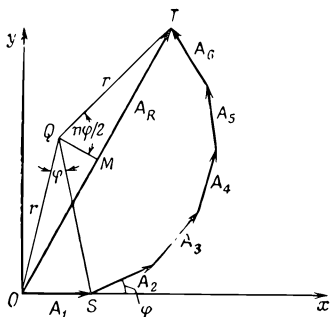
§ 4. Параболическая антенна

§ 5. Окрашенные пленки; кристаллы

§ 6. Дифракция на непрозрачном экране

§ 7. Поле системы осцилляторов, расположенных на плоскости





Фиг. 30.1. Результирующая амплитуда шести эквидистантных источников при разности фаз  $\varphi$  между каждыми двумя соседними источниками.

лим сумму  $R$ . Для этого воспользуемся геометрическим способом сложения. Длина первого слагаемого  $A$ , а его фаза равна нулю; длина второго также  $A$ , а фаза его равна  $\varphi$ . Следующее слагаемое имеет снова длину  $A$  и фазу, равную  $2\varphi$ , и т. д. В конце концов получается часть правильного многоугольника с  $n$  сторонами (фиг. 30.1).

Вершины многоугольника лежат, конечно, на окружности, и чтобы легче было определить результирующую амплитуду, найдем радиус этой окружности. Пусть  $Q$  есть ее центр. Тогда угол  $OQS$  равен как раз фазе  $\varphi$  (поскольку радиус  $QS$  образует с  $A_2$  такой же угол, как  $QO$  с  $A_1$ ). Следовательно, радиус  $r$  должен удовлетворять равенству  $A = 2r \sin \varphi/2$ , откуда мы и находим величину  $r$ . Далее, большой угол  $OQT$  равен  $n\varphi$ ; следовательно,  $A_R = 2r \sin n\varphi/2$ . Исключая из обоих равенств  $r$ , получаем

$$A_R = A \frac{\sin n\varphi/2}{\sin \varphi/2}. \quad (30.2)$$

Таким образом, суммарная интенсивность оказывается равной

$$I = I_0 \frac{\sin^2 n\varphi/2}{\sin^2 \varphi/2}. \quad (30.3)$$

Проанализируем это выражение и обсудим вытекающие из него следствия. Прежде всего, положив  $n = 1$ , получим, как и следовало ожидать,  $I = I_0$ . Проверим формулу для  $n = 2$ : с помощью соотношения  $\sin \varphi = 2 \sin \varphi/2 \cos \varphi/2$  сразу находим  $A_R = 2A \cos \varphi/2$ , что совпадает с (29.12).

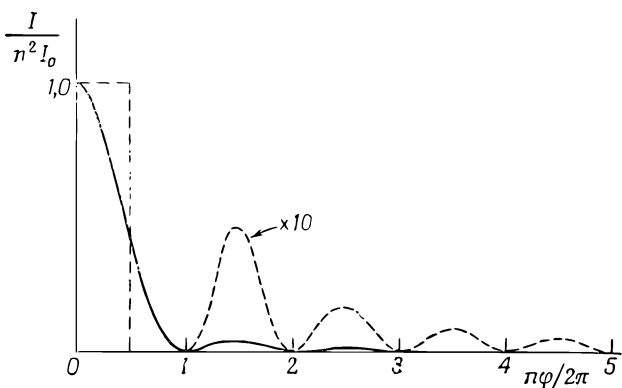
Мы вынуждены рассматривать сложение полей от многих источников потому, что в этом случае интенсивность в одном направлении получается много больше, чем в соседних, т. е. все побочные максимумы интенсивности оказываются гораздо меньше основного. Чтобы понять этот факт, начертим кривую, соответствующую выражению (30.3) для больших  $n$  и  $\varphi$ , близких к нулю. Прежде всего, когда  $\varphi$  точно равно нулю, мы получаем отношение  $0/0$ , но фактически для бесконечно малых  $\varphi$  отношение синусов равно  $n^2$ , так как синус можно за-

менить его аргументом. Таким образом, максимум кривой в  $n^2$  раз больше интенсивности одного осциллятора. Этот результат легко понять, поскольку при нулевой разности фаз все  $n$  маленьких векторов складываются в один вектор, в  $n$  раз больший исходного, а интенсивность увеличивается в  $n^2$  раз.

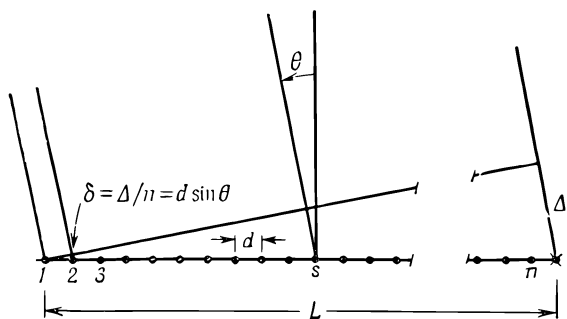
С ростом фазы  $\varphi$  отношение двух синусов падает и обращается в нуль в первый раз при  $n\varphi/2 = \pi$ , поскольку  $\sin \pi = 0$ . Другими словами, значение  $\varphi = 2\pi/n$  отвечает первому минимуму кривой (фиг. 30.2). С точки зрения векторов на фиг. 30.1 первый минимум возникает в том случае, когда стрелки векторов возвращаются в исходную точку, при этом полная разность фаз от первого до последнего осциллятора равна  $2\pi$ .

Перейдем к следующему максимуму и покажем, что он действительно, как мы и ждали, много меньше первого. Для точного определения положения максимума необходимо учитывать, что и числитель, и знаменатель в (30.3) оба меняются с изменением  $\varphi$ . Мы не станем этого делать, поскольку при большом  $n$   $\sin \varphi/2$  меняется медленнее  $\sin n\varphi/2$  и условие  $\sin n\varphi/2 = 1$  дает положение максимума с большой точностью. Максимум  $\sin^2 n\varphi/2$  достигается при  $n\varphi/2 = 3\pi/2$  или  $\varphi = 3\pi/n$ . Это означает, что стрелки векторов описывают полторы окружности.

Подставляя  $\varphi = 3\pi/n$ , получаем  $\sin^2 3\pi/2 = 1$  в числителе (30.3) (с этой целью и был выбран угол  $\varphi$ ) и  $\sin^2 3\pi/2n$  в знаменателе. Для достаточно большого  $n$  можно заменить синус его аргументом:  $\sin 3\pi/2n = 3\pi/2n$ . Отсюда интенсивность во втором максимуме оказывается равной  $I = I_0(4n^2/9\pi^2)$ . Но



Фиг. 30.2. Зависимость интенсивности от фазового угла для большого числа осцилляторов с одинаковыми амплитудами.



Фиг. 30.3. Устройство из  $n$  одинаковых осцилляторов, расположенных на линии.

Фаза колебания  $s$ -го осциллятора равна  $\alpha_s = \alpha$ .

$n^2 I_0$  — не что иное, как интенсивность в первом максимуме, т. е. интенсивность второго максимума получается равной  $4/9\pi^2$  от максимальной, что составляет 0,047, или меньше 5%! Остальные максимумы, очевидно, будут еще меньше. Таким образом, возникает очень узкий основной максимум и очень слабые дополнительные максимумы по обе стороны от основного.

Можно показать, что площадь под кривой интенсивности, включая все максимумы, равна  $2\pi n I_0$  и в два раза превышает площадь пунктирного прямоугольника на фиг. 30.2.

Посмотрим теперь, что дает формула (30.3) в приложениях к разным случаям. Пусть источники расположены на одной линии, как показано на фиг. 30.3. Всего имеется  $n$  источников на расстоянии  $d$  друг от друга, и сдвиг фазы между соседними источниками выбран равным  $\alpha$ . Тогда для лучей, распространяющихся в заданном направлении  $\theta$ , отсчитываемом от нормали, вследствие разности хода лучей от двух соседних источников возникает дополнительный сдвиг фазы  $2\pi d \frac{1}{\lambda} \sin \theta$ . Таким образом,

$$\varphi = \alpha + 2\pi d \frac{1}{\lambda} \sin \theta = \alpha + kd \sin \theta. \quad (30.4)$$

Рассмотрим сначала случай  $\alpha = 0$ . Все осцилляторы колеблются с одной фазой; требуется найти интенсивность их излучения как функцию угла  $\theta$ . Подставим с этой целью  $\varphi = kd \sin \theta$  в формулу (30.3) и посмотрим, что получится в результате. Прежде всего при  $\varphi = 0$  возникает максимум. Значит, осцилляторы, колеблющиеся с одной фазой, дают мощное излучение в направлении  $\theta = 0$ . Интересно узнать, где находится первый минимум.

Он возникает при  $\varphi = 2\pi/n$ ; другими словами, первый минимум кривой интенсивности определяется из соотношения  $(2\pi d/\lambda) \sin \theta = 2\pi/n$ . Сокращая на  $2\pi$ , получаем

$$nd \sin \theta = \lambda. \quad (30.5)$$

Теперь разберем с физической точки зрения, почему минимум возникает именно в этом месте. В этом выражении  $nd$  есть полная длина  $L$  нашей системы осцилляторов. Обращаясь к фиг. 30.3, мы видим, что  $nd \sin \theta = L \sin \theta = \Delta$ . Формула (30.5) подсказывает нам, что минимум возникает при  $\Delta$ , равном *одной длине волны*. Но почему минимум получается при  $\Delta = \lambda$ ? Дело в том, что поля от отдельных осцилляторов равномерно распределены по фазе от 0 до  $360^\circ$ . Стрелки (см. фиг. 30.1) описывают полную окружность; мы складываем равные векторы, имеющие произвольные направления, а в этом случае сумма равна нулю. Вот при таких значениях угла, когда  $\Delta = \lambda$ , возникает минимум. Это и есть первый минимум.

Формула (30.3) имеет еще одну важную особенность: при увеличении угла  $\varphi$  на число, кратное  $2\pi$ , значение интенсивности не меняется. Поэтому для  $\varphi = 2\pi, 4\pi, 6\pi$  и т. д. также возникают резкие и высокие максимумы. Вблизи этих максимумов интенсивность повторяет свой ход (см. фиг. 30.2). Зададимся вопросом: в силу каких геометрических соотношений возникают другие максимумы? Условие появления максимума записывается в виде  $\varphi = 2\pi m$ , где  $m$  — любое целое число. Отсюда получаем  $(2\pi d/\lambda) \sin \theta = 2\pi m$ . Сокращая на  $2\pi$ , получаем

$$d \sin \theta = m\lambda. \quad (30.6)$$

Это соотношение очень похоже на формулу (30.5). Однако там было  $nd \sin \theta = \lambda$ . Разница в том, что здесь нужно взять *каждый отдельный источник* и выяснить, что для него означает условие  $d \sin \theta = m\lambda$ ; угол  $\theta$  здесь таков, что разность хода  $\delta = m\lambda$ . Другими словами, волны, идущие от источников, различаются по фазе на величину, кратную  $360^\circ$ , и, следовательно, все находятся *в фазе*. Поэтому при сложении волн возникает столь же высокий максимум, как и в рассмотренном ранее случае  $m = 0$ . Побочные максимумы и весь ход интенсивности здесь такие же, как в случае  $\varphi = 0$ . Таким образом, наша система посылает пучки лучей в разных направлениях, причем каждый пучок имеет высокий центральный максимум и ряд слабых боковых. Главные (центральные) максимумы в зависимости от величины  $m$  называются максимумами нулевого, первого и т. д. порядков;  $m$  называют *порядком* максимума.

Обратите внимание на такой факт: если  $d$  меньше  $\lambda$ , то формула (30.6) имеет единственное решение при  $m = 0$ . По-

этому для малого расстояния между источниками возникает один-единственный пучок, сконцентрированный около  $\theta = 0$ . (Разумеется, есть еще пучок в обратном направлении.) Чтобы получить максимумы других порядков, расстояние  $d$  должно быть больше одной длины волны.

## § 2. Дифракционная решетка

На практике равенство фаз осцилляторов или антенн достигается с помощью проводов и всяких специальных устройств. Возникает вопрос, можно ли и как создать подобную систему для света. Сейчас мы еще не умеем делать маленькие радиостанции оптической частоты в буквальном смысле слова, соединять их крохотными проволочками и устанавливать для всех них одинаковые фазы. Однако есть другой очень простой способ, позволяющий добиться этой цели.

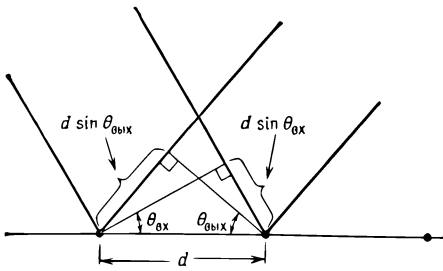
Предположим, у нас имеется большое количество параллельных проводов, отстоящих друг от друга на расстоянии  $d$ , и источник радиоволн, расположенный очень далеко, практически на бесконечности. Этот источник создает электрическое поле у каждой из проволочек с одной и той же фазой. (Можно взять и объемную систему проводов, но мы ограничимся плоской системой.) Тогда внешнее электрическое поле будет двигать электроны назад и вперед в каждой проволочке, в результате они становятся *новыми излучателями*. Такое явление называется *рассеянием*: свет от некоторого источника вызывает движение электронов в среде, а оно в свою очередь генерирует собственные волны. Поэтому достаточно взять ряд проволок на равном расстоянии друг от друга, подействовать на них радиоволнами от удаленного источника, и получается нужная нам система без всяких специальных контуров и т. п. Если лучи падают по нормали к плоскости проводов, фазы колебаний будут одинаковыми и возникнет та картина, о которой говорилось выше. Так, при расстоянии между проволочками, превышающем длину волны, максимальная интенсивность рассеяния получается в направлении нормали и в других направлениях, определяемых формулой (30.6).

*Точно такое же устройство годится и для света!* Только вместо проволок берут стеклянную пластинку и наносят на нее ряд штрихов так, чтобы каждый из них рассеивал свет иначе, чем остальная поверхность пластинки. Если затем направить на пластинку пучок света, то каждый штрих станет источником, а если расстояние между штрихами будет достаточно мало, но не меньше одной длины волны (практически таких малых расстояний все равно невозможно добиться), возникает удивительное явление: лучи идут через пластинку не только по прямой, но и под конечным углом к нормали,

зависящим от расстояния между штрихами! Устройства такого типа действительно существуют и широко используются, их называют *дифракционными решетками*.

Одна из разновидностей дифракционных решеток представляет собой обычную стеклянную пластинку, прозрачную и бесцветную, с нацарапанными на ней штрихами. Число штрихов на 1 мм зачастую достигает нескольких сотен, а расстояние между ними выдерживается с большой точностью. Действие такой решетки можно наблюдать, посылая сквозь нее с помощью проектора узкую вертикальную полоску света (изображение щели) на экран. Помещая решетку на пути света так, чтобы штрихи были расположены вертикально, мы увидим на экране ту же самую полоску света, но по сторонам от нее, кроме того, будут и *другие* полосы, *окрашенные* в разные цвета. Разумеется, мы получили не что иное, как уширенное изображение щели; угол  $\theta$  в (30.6) зависит от  $\lambda$ , и разная окраска света, как мы знаем, соответствует разным частотам и разным длинам волн. Самой большой видимой длины волны обладает красный свет; в силу условия  $d \sin \theta = \lambda$  ему соответствует наибольшее  $\theta$ . И мы действительно обнаруживаем, что на экране красная полоса лежит дальше всех от центра изображения! С другой стороны должна быть такая же полоса; и в самом деле, мы видим на экране вторую полосу. Выражение (30.6) имеет еще одно решение с  $m = 2$ . На соответствующем ему месте на экране видно какое-то расплывчатое слабое пятно, а дальше в сторону чуть заметен еще целый ряд слабых полосок.

Только что мы сказали, что максимумы всех порядков должны иметь одинаковую интенсивность, а у нас интенсивность получается разная, и, более того, правый и левый максимумы первого порядка отличаются по своей яркости! Причина здесь кроется в том, что решетки изготавливаются особым способом, чтобы как раз и получался подобный эффект. Как это делается? Если бы дифракционные решетки имели бесконечно тонкие штрихи, расположенные на строго равном расстоянии друг от друга, то интенсивности максимумов всех порядков были бы одинаковы. Но фактически, хотя мы пока разобрали только простейший случай, мы могли бы также взять систему, состоящую из *пар* антенн, причем в каждой паре установили бы определенную разность фаз и интенсивности. Тогда можно было бы получить разную интенсивность у максимумов разных порядков. На дифракционную решетку часто наносят не ровные, а пилообразные штрихи. Специально подбирая форму «зубцов», можно увеличить интенсивность спектра данного порядка по отношению к остальным. В практической работе с решетками желательно иметь максимальную яркость в одном из порядков. Мы отложим пока весьма



Фиг. 30.4. Разность хода двух лучей, отраженных соседними линиями решетки, равна  $d \sin \theta_{\text{вых}} - d \sin \theta_{\text{вх}}$ .

сложное объяснение этих фактов, скажем только, что такие решетки оказываются гораздо более полезными в приложениях.

До сих пор мы рассматривали случай, когда фазы всех источников равны. Однако полученная нами формула (30.3) годится также и тогда, когда сдвиг фаз  $\varphi$  каждого источника по сравнению с предыдущим постоянен и равен  $\alpha$ . Это означает, что антенны должны быть соединены по схеме, обеспечивающей небольшой сдвиг фазы между ними. Можно ли создать подобное устройство для света? Да, и очень просто. Пусть источник света находится на бесконечности и свет падает на решетку под некоторым углом, равным  $\theta_{\text{вх}}$  (фиг. 30.4); рассмотрим рассеянный пучок света, выходящий под углом  $\theta_{\text{вых}}$  ( $\theta_{\text{вых}}$  — это наш старый угол  $\theta$ , а  $\theta_{\text{вх}}$  нужен для создания разности фаз у источников). Пучок света от бесконечно удаленного источника падает сначала на первый штрих, затем на второй и т. д., сдвиг фазы света, попадающего на два соседних штриха, есть  $\alpha = -2\pi d \sin \theta_{\text{вх}}/\lambda$ . Отсюда получаем формулу для дифракции света, падающего на решетку под некоторым углом:

$$\varphi = 2\pi d \frac{\sin \theta_{\text{вых}}}{\lambda} - 2\pi d \frac{\sin \theta_{\text{вх}}}{\lambda}. \quad (30.7)$$

Попытаемся найти направление максимальной интенсивности в этом случае. Условие возникновения максимума по-прежнему состоит в том, что  $\varphi$  должно быть числом, кратным  $2\pi$ . Здесь следует отметить несколько интересных моментов.

Прежде всего рассмотрим весьма интересный случай, соответствующий  $m = 0$ ; когда  $d$  меньше  $\lambda$ , тогда  $m = 0$  и других решений не возникает. Тогда получаем  $\sin \theta_{\text{вх}} = \sin \theta_{\text{вых}}$ , т. е. рассеянный луч выходит в том же направлении, что и первоначальный луч, падающий на дифракционную решетку. Но не следует думать, что свет просто «проходит насквозь». Мы ведь говорим о других лучах. Свет, проходящий насквозь, идет от первоначального источника, а мы имеем в виду свет, возникающий при рассеянии. Получается так, что рассеянный пучок света идет в том же направлении, что и первоначаль-

ный; более того, оба пучка могут интерферировать друг с другом, о чем мы расскажем в последующих главах.

В нашем случае имеется еще одно возможное решение. При заданном  $\theta_{вх}$  угол  $\theta_{вых}$  может быть равен *дополнительному* к  $\theta_{вх}$  углу ( $\pi - \theta_{вх}$ ). Таким образом, кроме луча в направлении падающего пучка света, возникает еще один луч. Легко заметить, что его направление подчиняется правилу: *угол падения равен углу рассеяния*. Этот луч мы назовем *отраженным*.

Так мы подходим к пониманию основного механизма процесса отражения: падающий свет возбуждает движение атомов отражающего тела, а оно в свою очередь генерирует *новую волну*, и одно из направлений рассеянной волны (*единственное* для расстояния между рассеивателями, малого по сравнению с длиной волны) таково, что угол падения луча света равен углу, под которым выходит отраженный луч!

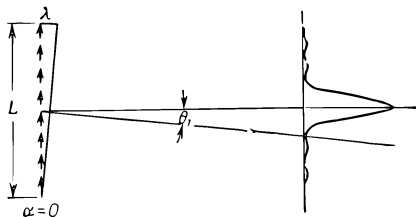
Перейдем теперь к особому случаю, когда  $d \rightarrow 0$ . Имеется, скажем, плотное тело конечных размеров. Потребуем еще, чтобы разность фаз между соседними рассеивателями стремилась к нулю. Иначе говоря, будем ставить все новые и новые антенны в промежутках между прежними, так что разности фаз будут становиться все меньше по мере уменьшения расстояния до соседних антенн, но общее число антенн пусть растет так, что полная разность фаз между первой и последней антеннами остается постоянной. Посмотрим, как видоизменится формула (30.3), если полная разность фаз  $n\varphi$  остается постоянной (пусть  $n\varphi = \Phi$ ), а число  $n$  и фаза  $\varphi$  стремятся соответственно к бесконечности и нулю. Теперь значение  $\varphi$  так мало, что  $\sin \varphi = \varphi$ , и если учесть также, что  $n^2 I_0$  есть интенсивность в центре максимума  $I_m$ , то мы получим

$$J = 4I_m \frac{\sin^2 \Phi/2}{\Phi^2}. \quad (30.8)$$

На фиг. 30.2 показан ход этой предельной зависимости.

В данном случае дифракционная картина в общих чертах получается такой же, как и для конечного промежутка  $d > \lambda$ , те же боковые максимумы, нет только максимумов высших порядков. Когда все рассеиватели находятся в фазе, возникает максимум в направлении  $\theta_{вых} = 0$  и минимум при  $\Delta = \lambda$ ,

ф и г. 30.5. Распределение интенсивности излучения непрерывной линии осцилляторов имеет высокий центральный максимум и многочисленные слабые боковые максимумы.





в точности как для конечных  $d$  и  $n$ . Таким образом, оказывается возможным рассмотреть *непрерывное* распределение рассеивателей или осцилляторов, используя интегралы вместо сумм.

Для примера возьмем длинную линию, составленную из осцилляторов, которые колеблются вдоль нее (фиг. 30.5). Такое устройство дает максимальную интенсивность в направлении, перпендикулярном нити. Кверху и книзу от экваториальной плоскости имеется небольшая интенсивность, но она очень мала. Пользуясь этим результатом, перейдем к более сложному устройству. Предположим, у нас имеется целый набор нитей, каждая из которых излучает в экваториальной плоскости. Если мы находимся в центральной плоскости, перпендикулярной всем проволокам, интенсивность излучения набора длинных линий в разных направлениях определяется так же, как и в случае бесконечно коротких линий, — нужно сложить вклады от всех длинных проволок. Вот почему вместо крошечных решеток — антенн, которые мы рассматривали, можно было бы использовать решетки с длинными и узкими щелями. Каждая из длинных щелей излучает в своем собственном направлении не вверх и не вниз, а только перпендикулярно щели, и, поставив их рядом друг с другом в горизонтальной плоскости, мы получим интерференцию.

Таким образом, можно создать еще более сложные устройства, размещая рассеиватели по линии, в плоскости или в пространстве. Сначала мы располагали рассеиватели на линии, а затем проанализировали случай, когда они заполняют полосу; для получения ответа каждый раз нужно было просуммировать вклады отдельных рассеивателей. Последний принцип справедлив во всех случаях.

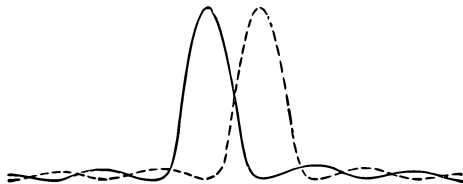
### § 3. Разрешающая способность дифракционной решетки

Теперь мы способны понять еще ряд интересных явлений. Например, попробуем использовать решетку для определения длины волны света. На экране изображение щели развертывается в целый спектр линий, поэтому с помощью дифракционной решетки можно разделить свет по составляющим его длинам волн.

Возникает интересный вопрос: предположим, что имеются два источника с несколько разными частотами излучения или несколько разными длинами волн; насколько близкими должны быть эти частоты, чтобы по дифракционной картине нельзя было отделить одну частоту от другой? Красные и синие линии четко различаются. А вот если один луч красный, а другой чуть-чуть покраснее, самую малость, насколько близки

Фиг. 30.6. Иллюстрация критерия Рэлея.

Максимум одного распределения совпадает с минимумом другого.



они должны быть? Ответ дается величиной, которая называется *разрешающей способностью* решетки. Ниже мы используем один из способов ее определения.

Предположим, что удалось найти дифракционный максимум для лучей определенного цвета, расположенный под некоторым углом. Если мы изменим длину волны, то и значение фазы  $(2\pi d \sin \theta) / \lambda$  будет иным и максимум, разумеется, возникнет при каком-то другом угле. Именно поэтому красные и синие полосы на экране разделяются. Насколько должны отличаться углы, чтобы мы смогли различить два разных максимума? Если верхушки максимумов совпадают, мы, конечно, не сможем различить их один от другого. Если же максимумы достаточно далеки друг от друга, то на картине распределения света возникают два горба. Чтобы заметить, когда начинает вырисовываться двойной горб, лучше всего воспользоваться простым правилом, называемым обычно *правилом* (или *критерием*) Рэлея (фиг. 30.6). По этому правилу первый минимум на дифракционной картине для одной длины волны должен совпадать с максимумом для другой длины волны. Теперь уже нетрудно вычислить разность длин волн, когда один минимум в точности «садится» на максимум другого пучка. Лучше всего для этого воспользоваться геометрическим способом.

Чтобы возник максимум при длине волны  $\lambda'$ , расстояние  $\Delta$  (см. фиг. 30.3) должно быть равно  $n\lambda'$ , а чтобы возник максимум порядка  $m$ , расстояние  $\Delta$  должно быть равно  $m n \lambda'$ . Другими словами,  $(2\pi d / \lambda') \sin \theta = 2\pi m$  и  $n d \sin \theta$ , равное  $\Delta$ , есть  $\lambda'$ , умноженная на  $m n$ , или соответственно  $m n \lambda'$ . Если мы хотим, чтобы под тем же углом для другого луча с длиной волны  $\lambda$  появился минимум, расстояние  $\Delta$  должно превышать  $m n \lambda$  ровно на одну длину волны  $\lambda$ , т. е.  $\Delta = m n \lambda + \lambda = m n \lambda'$ . Отсюда, полагая  $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ , получаем

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{m n}. \quad (30.9)$$

Отношение  $\lambda / \delta\lambda$  называется *разрешающей способностью* дифракционной решетки; она равна, как видно из формулы, полному числу линий в решетке, умноженному на порядок максимума луча. Легко убедиться, что эта формула эквивалентна следующему утверждению: разность частот должна

быть равна обратной величине разности времен прохождения для самых крайних интерферирующих лучей\*

$$\delta\nu = \frac{1}{T}.$$

Полезно запомнить именно эту общую формулу, потому что она применима не только для решеток, но и для любых устройств, тогда как вывод формулы (30.9) связан со свойствами дифракционных решеток.

#### § 4. Параболическая антенна

Рассмотрим теперь еще один вопрос, связанный с разрешающей способностью. Речь идет об антеннах радиотелескопов, использующихся для определения положения источников радиоволн на небе и их угловых размеров. Если бы мы взяли нашу старую антенну и с ее помощью приняли сигналы, то, конечно, не могли бы сказать, откуда они пришли. А знать, где находится источник, очень важно. Можно, конечно, покрыть всю Австралию проводами-диполями, расположенными на равном расстоянии друг от друга. Затем подсоединить все диполи к одному приемнику так, чтобы уравнять запаздывание сигналов в соединительных проводах. Тогда сигналы от всех диполей придут к приемнику с одной фазой. Что в результате получится? Если источник расположен достаточно далеко и прямо над нашей системой, то сигналы от всех антенн придут к приемнику в фазе.

Но предположим, что источник расположен под небольшим углом  $\theta$  к вертикали. Тогда сигналы, принятые различными антеннами, будут немного сдвинуты по фазе. В приемнике все эти сигналы с разными фазами складываются, и мы ничего не получим, если только угол  $\theta$  достаточно велик. Но как велик должен быть этот угол? *Ответ:* мы получим нуль, если угол  $\Delta/L = \theta$  (см. фиг. 30.3) соответствует сдвигу фаз в  $360^\circ$ , т. е. если  $\Delta$  равно длине волны  $\lambda$ .

Этот результат легко понять, если учесть, что векторы, соответствующие сигналам от разных антенн, образуют замкнутый многоугольник и их сумма тогда обращается в нуль. Наименьший угол, который антенное устройство длиной  $L$  еще может разрешить, есть  $\theta = \lambda/L$ . Заметим, что кривая чувствительности антенны при приеме имеет точно такой же вид, как и распределение интенсивности, даваемое антеннами-передатчиками. Здесь проявляется так называемый *принцип обратимости*. Согласно этому принципу, для любых антенных устройств, при любых углах и т. п. справедливо правило: от-

---

\* В нашем случае  $T = \Delta/c = mn\lambda/c$ , где  $c$  — скорость света. Частота  $\nu = c/\lambda$ , так что  $\delta\nu = c\delta\lambda/\lambda^2$ .

носительная чувствительность в разных направлениях совпадает с относительной интенсивностью для тех же направлений, если заменить приемник передатчиком.

Бывают антенные устройства и другого типа. Вместо того чтобы выстраивать целую систему диполей с кучей соединительных проводов между ними, можно расположить их по кривой, а приемник поставить в такую точку, где он мог бы фиксировать отраженные сигналы. Кривая выбирается с таким хитрым расчетом, чтобы все лучи от далекого источника после рассеяния доходили к приемнику за одно и то же время (см. фиг. 26.12). Значит, кривая должна быть *параболой*; тогда если источник находится на ее оси, то в фокусе возникает большая интенсивность рассеянного излучения. Легко найти разрешающую способность такого устройства. Расположение антенн по параболе здесь несущественно. Параболическая форма выбрана просто для удобства, она позволяет собирать все сигналы за одинаковое время и притом без проводов. Минимальный угол разрешения такого устройства по-прежнему равен  $\theta = \lambda/L$ , где  $L$  — расстояние между крайними антеннами. Этот угол не зависит от промежутка между соседними антеннами, они могут быть размещены очень близко одна от другой, фактически вместо системы антенн можно даже взять сплошной кусок металла. В принципе это то же самое, что и зеркало телескопа. Итак, мы нашли разрешающую способность телескопа! (Иногда разрешающую способность пишут в виде  $\theta = 1,22 \lambda/L$ , где  $L$  — диаметр телескопа. Множитель 1,22 появляется по следующей причине: при выводе формулы  $\theta = \lambda/L$  интенсивность всех диполей считалась одинаковой независимо от их положения, но, поскольку телескопы обычно делают круглыми, а не квадратными, интенсивность сигналов от краев меньше, чем от середины; в отличие от случая квадратного сечения края дают относительно малый вклад. Следовательно, эффективный диаметр короче истинного, что и учитывается множителем 1,22. На самом же деле такая точность в формуле для разрешающей способности кажется слишком педантичной\*.)

## § 5. Окрашенные пленки; кристаллы

Выше были рассмотрены некоторые эффекты, возникающие при интерференции нескольких волн. Но можно привести ряд других примеров, основной механизм которых слишком

---

\* Прежде всего потому, что сам критерий Рэдея приближенный. Он только указывает область углов, где трудно разобрать, сколько звезд на изображении — одна или две. А в действительности, если точно измерить распределение интенсивности, можно различить два источника при углах  $\theta$ , даже меньших  $\lambda/L$ .

сложен, чтобы говорить о нем в данный момент (мы обсудим его впоследствии), а пока разберем возникающие в этих примерах интерференционные явления.

Например, когда свет падает на поверхность среды с показателем преломления  $n$  по нормали к поверхности, то часть света отражается. *Причину* отражения сейчас нам было бы трудно понять; мы поговорим о ней позже. Сейчас же предположим, что факт отражения света при входе и выходе света из преломляющей среды нам уже известен. Тогда при отражении света от тонкой пленки возникнет совокупность двух волн, отраженных от передней и задней поверхностей пленки; при достаточно малой толщине пленки эти волны будут интерферировать, усиливая или ослабляя друг друга в зависимости от знака разности фаз. Например, может случиться, что красный свет будет отражаться с усилением, а синий свет, который имеет другую длину волны, — с ослаблением, так что отраженный луч будет иметь яркую красную окраску. Если мы изменим толщину пленки и будем наблюдать отражение, скажем, в тех местах, где пленка потолще, то сможем увидеть обратную картину, т. е. красные волны будут ослабляться, а синие нет, и пленка будет казаться синей, или зеленой, или желтой, в общем любого цвета. Таким образом, мы видим тонкую пленку *окрашенной*, а если будем смотреть на нее под другим углом, то расцветка будет иной, так как время прохождения света через пленку меняется с изменением угла зрения. Так становится понятной причина возникновения сложной цветовой гаммы на пленках нефти, мыльных пузырях и во многих других подобных случаях. Сущность явления всюду одна — сложение волн с разными фазами.

Отметим еще одно важное применение дифракции. Возьмем дифракционную решетку и спроецируем ее изображение на экран. Для монохроматического света в определенных местах экрана возникнут максимумы — основные и более высоких порядков. По расположению максимумов и длине волны можно найти расстояние между линиями решетки. А по отношению интенсивностей различных максимумов можно найти форму штрихов решетки и различить пиловидную, прямоугольную и разные другие формы, *даже не глядя на решетку*. Этот принцип служит для определения положения атомов в кристалле. Единственная сложность состоит в том, что кристалл трехмерен; он представляет собой периодическую трехмерную решетку, составленную из атомов. Мы не можем использовать здесь видимый свет, потому что длина волны источника должна быть меньше расстояния между атомами, иначе никакого эффекта не будет; следовательно, нужно взять излучение с очень малыми длинами волн, т. е. рентгеновские лучи. Итак, освещая кристалл рентгеновскими лу-

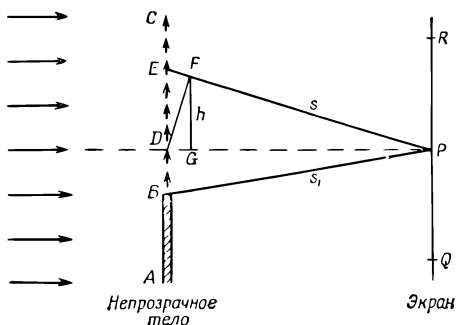
чами и найдя интенсивности максимумов разного порядка, можно определить расположение атомов в кристалле, даже не имея возможности увидеть все это собственными глазами! Именно таким путем было найдено расположение атомов в разных веществах. В гл. 1 мы привели несколько схем, показывающих размещение атомов в кристалле соли и ряде других веществ. Мы еще вернемся к этому вопросу в дальнейшем и обсудим его подробно, а пока не будем заниматься этой интереснейшей проблемой.

## § 6. Дифракция на непрозрачном экране

Рассмотрим сейчас весьма интересное явление. Пусть имеется непрозрачный лист с отверстиями, и по одну сторону от него расположен источник света. Нас интересует, какое изображение возникнет на экране по другую сторону листа. Каждый скажет, что свет пройдет через отверстия и создаст на экране какое-то изображение. Оказывается, что это изображение можно получить с хорошей степенью точности, если предположить, что источники света равномерно распределены по ширине отверстий, а фазы источников точно такие, как если бы непрозрачного листа вовсе не было. Источников в отверстиях на самом деле, конечно, *нет*; во всяком случае, это как раз то место, где их *наверняка* не может быть. Тем не менее правильная дифракционная картина получается, если считать, что источники расположены именно в отверстиях; факт довольно странный. Позже мы объясним, почему такое предположение правильно, а пока примем его на веру.

В теории дифракции есть один род дифракционных явлений, который стоит кратко обсудить. Речь идет о дифракции на непрозрачных экранах. Обычно в элементарных курсах о них говорят гораздо позже, так как для их объяснения нужно использовать довольно сложные формулы суммирования малых векторов. В остальном эти явления не отличаются от уже рассмотренных нами. Все интерференционные явления по существу одинаковы; в них не входят сколько-нибудь сложные понятия, только условия возникновения могут быть более сложными, и тогда векторы поля труднее складывать, вот и все.

Предположим, что свет приходит из бесконечности, попадает на предмет и отбрасывает от него тень. На фиг. 30.7 изображен экран, на который свет отбрасывает тень от предмета *AB*, причем источник света удален на расстоянии, много большее длины волны. Казалось бы, вне тени интенсивность света максимальна, а внутри должна быть полная темнота. На самом же деле, если откладывать интенсивность как функцию расстояния до края тени, интенсивность будет сначала



Фиг. 30.7. Далекий источник отбрасывает тень от непрозрачного предмета на экран.

расти, а затем начнет спадать, колеблясь самым прихотливым образом вблизи края тени (фиг. 30.9). Посмотрим, отчего это происходит. Для объяснения воспользуемся недоказанной нами теоремой, что вместо истинной картины опыта можно ввести эффективные источники, равномерно распределенные вне объекта.

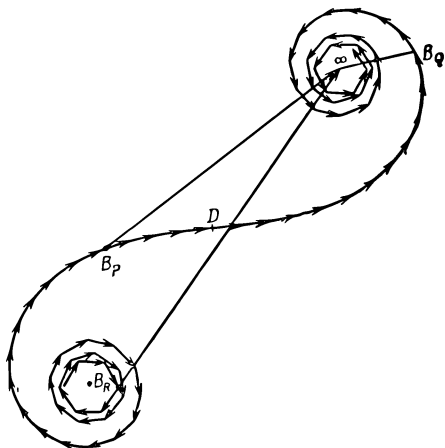
Представим себе эти эффективные источники в виде большого количества близко расположенных антенн и найдем интенсивность в некоторой точке  $P$ . Это очень похоже на то, чем мы занимались до сих пор. Но не вполне, поскольку наш экран теперь находится не на бесконечности. В данном случае нас интересует интенсивность интерферирующих лучей на конечном расстоянии, а не на бесконечности. Интенсивность в некоторой точке дается суммой вкладов от каждой антенны. Сначала возьмем антенну в точке  $D$ , прямо напротив  $P$ . Если слегка изменить угол, скажем, подняться на высоту  $h$ , лучу потребуется больше времени, чтобы попасть в точку  $P$  (амплитуда тоже изменится, так как расстояние до источника увеличилось, но разница эта очень мала, поскольку расстояния все равно велико, и гораздо менее важна, чем изменение фазы излучения). Далее, разность  $EP - DP$  равна  $h^2/2s$ , т. е. разность фаз пропорциональна *квадрату* удаления от точки  $D$ , тогда как раньше у нас  $s$  было бесконечно и разность фаз была *линейно* связана с  $h$ . Когда фазы зависят от  $h$  линейно, каждый вектор повернут относительно предыдущего на постоянный угол. Теперь же мы должны построить кривую, складывая бесконечно малые векторы при условии, что образуемый ими угол с осью абсцисс растет с увеличением длины кривой не линейным, а *квадратичным* образом. Явный вид кривой находится с помощью довольно сложных математических методов, но мы всегда можем построить эту кривую, просто откладывая векторы под требуемым углом. В конечном счете мы получаем замечательную кривую (называемую спиралью Корню), изображенную на фиг. 30.8. Как ею поль-

зоваться? Пусть требуется определить интенсивность, скажем, в точке  $P$ .

Сложим волны с разными фазами от точки  $D$  вверх до бесконечности и вниз от  $D$  до точки  $B_p$ . Таким образом, нужно отложить ряд стрелок под постоянно растущим углом, начиная с точки  $B_p$  на фиг. 30.8. Весь вклад от области над  $B_p$  дается спиральной кривой. Если бы суммирование заканчивалось в некоторой точке, то полная амплитуда представилась бы вектором от  $B_p$  до этой точки; в нашем случае суммирование ведется до бесконечности, так что искомая амплитуда есть вектор  $\mathbf{V}_{p\infty}$ . Точка на кривой, соответствующая точке  $B_p$  на предмете, зависит от положения точки  $P$ , потому что точка  $D$  кривой (точка перегиба) всегда относится к выбранной точке  $P$ . Следовательно, в зависимости от положения  $P$  над  $B$  начальная точка, откуда проводится вектор, попадает в разные места нижней спирали, и результирующий вектор  $\mathbf{V}_{p\infty}$  имеет многочисленные максимумы и минимумы (фиг. 30.9).

Но если мы находимся в точке  $Q$ , по другую сторону от  $P$ , то нам понадобится только верхний конец спиральной кривой. Другими словами, начальной точкой результирующего вектора будет не  $D$ , а  $B_Q$ , и, следовательно, книзу от  $P$  интенсивность должна непрерывно падать при удалении  $Q$  в область тени.

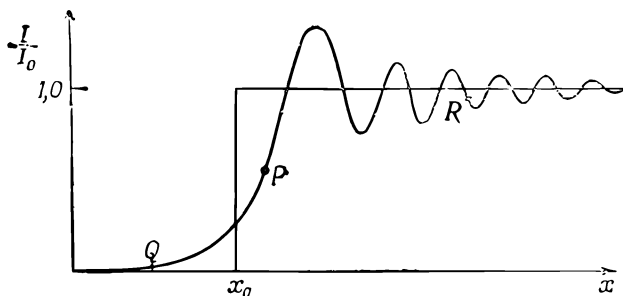
Есть одна величина, которую можно легко вычислить сразу и таким образом убедиться, что мы здесь что-то понимаем, — это интенсивность в точке, лежащей прямо против края. Эта интенсивность равна  $1/4$  от интенсивности падающего света. Причина: для точки, лежащей против края предмета (когда  $B_p$  совпадает с  $D$  на фиг. 30.8), получается половина кривой



Фиг. 30.8. Сложение амплитуд большого числа осцилляторов, излучающих с одной фазой.

Разность фаз за счет запаздывания пропорциональна квадрату расстояния от точки  $D$  на фиг. 30.7.





Фиг. 30.9. Ход интенсивности вблизи края тени.  
Геометрический край тени находится в точке  $x_0$ .

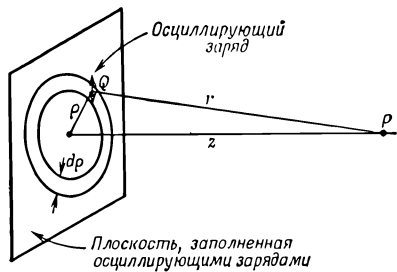
в отличие от целой кривой, которая была бы получена, если бы точки лежали достаточно далеко в освещенной области. Если точка  $R$  расположена достаточно высоко, результирующий вектор проводится от центра одной спирали до центра другой, а для точки на краю тени амплитуда равна половине этого вектора; следовательно, отношение интенсивностей получается равным  $1/4$ .

В этой главе мы вычисляли интенсивность в разных направлениях при различном расположении источников. В заключение выведем формулу, которая нам понадобится в следующей главе, посвященной показателю преломления. До сих пор мы обходились только относительными интенсивностями, а на этот раз мы получим формулу для полной величины поля при условиях, о которых будет рассказано ниже.

### § 7. Поле системы осцилляторов, расположенных на плоскости

Предположим, что имеется некоторая плоскость, которую заполняют осцилляторы, причем все они колеблются в плоскости одновременно, с одной амплитудой и фазой. Чему равно поле на конечном, но достаточно большом расстоянии от плоскости? (Мы не можем выбрать точку наблюдения очень близко от плоскости, потому что у нас нет точных формул для поля вблизи источников.) Пусть плоскость зарядов совпадает с плоскостью  $XU$  и нас интересует поле в точке  $P$ , лежащей на оси  $z$ , достаточно далеко от плоскости (фиг. 30.10). Предположим, что число зарядов на единичной площадке равно  $\eta$ , а величина каждого заряда  $q$ . Все заряды совершают одинаковые гармонические колебания в одном и том же направлении, с той же амплитудой и фазой. Смещение заряда из его среднего положения описывается функцией  $x_0 \cos \omega t$ . Вводя комплексную амплитуду, действительная

Фиг. 30.10. Поле излучения осциллирующих зарядов, заполняющих плоскость.



часть которой дает реальное движение, будем описывать колебание заряда функцией  $x_0 e^{i\omega t}$ .

Чтобы найти поле, создаваемое всеми зарядами в точке  $P$ , нужно вычислить сначала поле отдельного заряда  $q$ , а затем сложить поля всех зарядов. Как известно, поле излучения пропорционально ускорению заряда, т. е.  $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$  (и одинаково для всех зарядов). Электрическое поле в точке  $P$ , создаваемое зарядом в точке  $Q$ , пропорционально ускорению заряда  $q$ , нужно только помнить, что поле в точке  $P$  в момент времени  $t$  определяется ускорением заряда в более ранний момент времени  $t' = t - r/c$ , где  $r/c$  — время, за которое волна проходит расстояние от  $Q$  до  $P$ . Поэтому поле в точке  $P$  пропорционально

$$-\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}. \quad (30.10)$$

Подставляя это значение ускорения в формулу для поля, создаваемого зарядом на большом расстоянии, получаем

$$\left( \begin{array}{l} \text{Электрическое поле в } P, \\ \text{создаваемое зарядом в } Q \end{array} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (\text{приближенно}). \quad (30.11)$$

Однако эта формула не совсем правильна, поскольку нужно брать не все ускорение целиком, а его компоненту, перпендикулярную линии  $QP$ . Мы предположим, однако, что точка  $P$  находится от плоскости намного дальше, чем точка  $Q$  от оси  $z$  (расстояние  $\rho$  на фиг. 30.10), так что для эффектов, которые мы хотим учесть, косинус можно заменить единицей (косинус и так довольно близок к единице).

Полное поле в точке  $P$  получается суммированием вкладов от всех зарядов в плоскости. Разумеется, мы должны взять векторную сумму полей. Но поскольку направление поля примерно одинаково для всех зарядов, в рамках сделанного приближения достаточно сложить величины всех полей. Кроме того, в нашем приближении поле в точке  $P$  зависит только от  $r$ , следовательно, все заряды с одинаковым  $r$  создают равные поля. Поэтому прежде всего сложим поля всех

зарядов в кольце шириной  $d\rho$  и радиусом  $\rho$ . Интегрируя затем по всем  $\rho$ , получаем полное поле всех зарядов.

Число зарядов в кольце равно произведению площади кольца,  $2\pi\rho d\rho$ , на  $\eta$  — плотность зарядов на единицу площади. Отсюда

$$\text{Полное поле в точке } P = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \eta 2\pi\rho d\rho. \quad (30.12)$$

Интеграл берется в пределах  $\rho = 0$  и  $\rho = \infty$ . Время  $t$ , конечно, зафиксировано, так что единственными меняющимися величинами являются  $\rho$  и  $r$ . Отвлечемся пока от постоянных множителей, включая и  $e^{i\omega t}$ , и вычислим интеграл

$$\int_{\rho=0}^{\rho=\infty} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \rho d\rho. \quad (30.13)$$

Для этого учтем соотношение между  $\rho$  и  $r$ :

$$r^2 = \rho^2 + z^2. \quad (30.14)$$

При дифференцировании формулы (30.14)  $z$  нужно считать независимым от  $\rho$ , тогда

$$2r dr = 2\rho d\rho,$$

что очень кстати, поскольку при замене в интеграле  $\rho d\rho$  на  $r dr$  знаменатель  $r$  сокращается. Интеграл приобретает более простой вид

$$\int_{r=0}^{r=\infty} e^{-i\omega r/c} dr. \quad (30.15)$$

Экспонента интегрируется очень просто. Нужно поставить в знаменатель коэффициент при  $r$  в показателе экспоненты и взять саму экспоненту в точках, соответствующих пределам. Но пределы по  $r$  отличаются от пределов по  $\rho$ . Когда  $\rho = 0$ , нижний предел  $r = z$ , т. е. пределы по  $r$  равны  $z$  и бесконечности. Интеграл (30.15) равен

$$-\frac{c}{i\omega} [e^{-i\infty} - e^{-i(\omega/c)z}]. \quad (30.16)$$

Вместо  $(\omega/c)\infty$  мы здесь написали  $\infty$ , поскольку и то и другое означает просто сколь угодно большую величину!

А вот  $e^{-i\infty}$  — величина загадочная. Ее действительная часть, равная  $\cos(-\infty)$ , с математической точки зрения величина совершенно неопределенная. [Хотя можно допустить что она находится где-то — а может быть и всюду (?) — между

+1 и -1!] Но в *физической* ситуации эта величина может означать нечто вполне разумное и обычно оказывается равной нулю. Чтобы убедиться, что это так в нашем случае, вернемся к первоначальному интегралу (30.15).

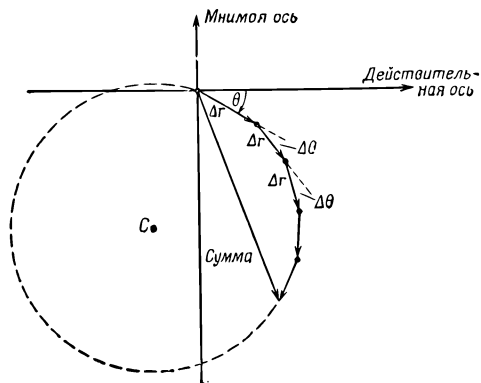
Выражение (30.15) можно понимать как сумму большого числа маленьких комплексных чисел, модуль которых  $\Delta r$ , а угол в комплексной плоскости  $\theta = -\omega r/c$ . Попробуем оценить эту сумму графически. На фиг. 30.11 отложены первые пять членов суммы. Каждый отрезок кривой имеет длину  $\Delta r$  и расположен под углом  $\Delta\theta = -\omega(\Delta r/c)$  к предыдущему отрезку. Сумма первых пяти слагаемых обозначена стрелкой из начальной точки к концу пятого отрезка. Продолжая прибавлять отрезки, мы опишем многоугольник, вернемся примерно к начальной точке и начнем описывать новый многоугольник. Чем большее число отрезков мы будем прибавлять, тем большее число раз мы обернемся, двигаясь почти по окружности с радиусом  $c/\omega$ . Теперь понятно, почему интеграл дает при вычислении неопределенный ответ!

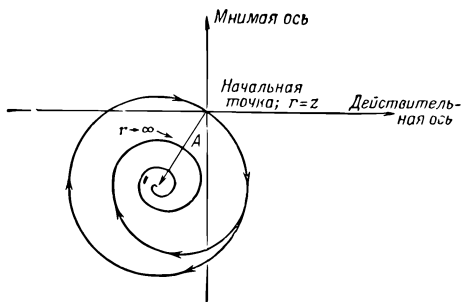
Здесь мы должны обратиться к *физическому* смыслу нашего примера. В любой реальной ситуации плоскость зарядов *не может быть* бесконечной, а должна где-то оборваться. Если плоскость резко обрывается и ее граница имеет точно форму окружности, то наш интеграл будет равен некоторому значению на этой окружности (см. фиг. 30.11). Если же плотность зарядов постепенно уменьшается по мере удаления от центра (или обращается в нуль вне некоторой границы неправильной формы, так что, для достаточно больших  $\rho$  вклад всего кольца шириной  $dr$  равен нулю), то коэффициент  $\eta$  в точном интеграле убывает, стремясь к нулю. Поскольку длина добавляемых отрезков в этом случае уменьшается, а угол  $\Delta\theta$  остается тем же самым, график кривой, соответствующей интегралу, будет иметь вид спирали. Спираль

Фиг. 30.11. Вычисление

интеграла  $\int_z^\infty e^{-i\omega r/c} dr$  графическим способом;  $\theta = -\frac{\omega r}{c}$ ;

$$\Delta\theta = -\frac{\omega \Delta r}{c}.$$





Фиг. 30.12. Вычисление интеграла  $\int_z^\infty \eta e^{-i\omega r/c} dr$  графическим способом.

оканчивается в центре первоначальной окружности, как изображено на фиг. 30.12. Физически правильное значение интеграла дается величиной  $A$ , которой на схеме соответствует расстояние от начальной точки до центра окружности, равное, как нетрудно убедиться,

$$\frac{c}{i\omega} e^{-i\omega z/c}. \quad (30.17)$$

Точно такой же результат мы получили бы из (30.16), положив  $e^{-i\infty} = 0$ .

(Есть еще одна причина, почему вклад в интеграл от больших значений  $r$  стремится к нулю, — это опущенный нами множитель, учитывающий проекцию ускорения на плоскость, перпендикулярную линии  $PQ$ .)

Нас, конечно, интересует именно случай, имеющий физический смысл, поэтому мы положим  $e^{-i\infty}$  равным нулю. Возвращаясь к формуле (30.12) для поля и вводя все опущенные ранее множители, мы получаем

$$\text{Полное поле в точке } P = -\frac{\eta q}{2\epsilon_0 c} i\omega x_0 e^{i\omega(t-z/c)} \quad (30.18)$$

(помня, что  $1/i = -i$ ).

Интересно отметить, что  $i\omega x_0 e^{i\omega t}$  в точности равно скорости зарядов, так что выражения для поля можно переписать в виде

$$\text{Полное поле в точке } P = -\frac{\eta q}{2\epsilon_0 c} \cdot [\text{Скорость зарядов}]_{t-z/c}. \quad (30.19)$$

Этот результат немного странен, потому что запаздывание отвечает расстоянию  $z$ , которое есть кратчайшее расстояние от  $P$  до плоскости. Но таков ответ, и, к счастью, формула довольно проста. [Добавим кстати, что, хотя формулы (30.18) и (30.19) были получены только для достаточно большого расстояния от плоскости, обе они оказываются правильными для любых  $z$ , даже для  $z < \lambda$ .]

## КАК ВОЗНИКАЕТ ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

§ 1. Показатель преломления

§ 2. Поле, излучаемое средой

§ 3. Дисперсия

§ 4. Поглощение

§ 5. Энергия световой волны

§ 6. Дифракция света на непрозрачном экране

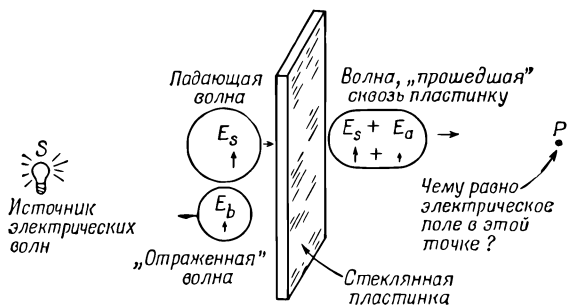
### § 1. Показатель преломления

Мы уже говорили, что свет в воде движется медленнее, чем в воздухе, а в воздухе чуть медленнее, чем в вакууме. Этот факт учитывается введением показателя преломления  $n$ . Попробуем теперь понять, как возникает уменьшение скорости света. В частности, особенно важно проследить связь этого факта с некоторыми физическими предположениями или законами, которые были ранее высказаны и сводятся к следующему:

- а) полное электрическое поле при любых физических условиях может быть представлено в виде суммы полей от всех зарядов во Вселенной;
- б) поле излучения каждого отдельного заряда определяется его ускорением; ускорение берется с учетом запаздывания, возникающего из-за конечной скорости распространения, *всегда* равной  $c$ .

Но вы, наверное, приведете сразу в качестве примера кусок стекла и воскликнете: «Ерунда, это положение здесь не годится. Нужно говорить, что запаздывание отвечает скорости  $c/n$ ». Однако это неправильно; попробуем разобраться, почему это неправильно.

Наблюдателю *кажется*, что свет или любая другая электрическая волна распространяется сквозь вещество с показателем преломления  $n$  со скоростью  $c/n$ . И это с некоторой точностью *так и есть*. Но на самом деле поле создается движением *всех* зарядов, включая и заряды, движущиеся в среде, а все составные части поля, все его слагаемые распространяются с максимальной скоростью  $c$ . Задача наша состоит в том, чтобы понять, как возникает *кажущаяся* меньшая скорость.



Фиг. 31.1. Прохождение электрических волн сквозь слой прозрачного вещества.

Попробуем понять это явление на очень простом примере. Пусть источник (назовем его «внешним источником») помещен на большом расстоянии от тонкой прозрачной пластинки, скажем стеклянной. Нас интересует поле по другую сторону пластинки и достаточно далеко от нее. Все это схематично представлено на фиг. 31.1; точки  $S$  и  $P$  здесь предполагаются удаленными на большое расстояние от плоскости. Согласно сформулированным нами принципам, электрическое поле вдали от пластинки представляется (векторной) суммой полей внешнего источника (в точке  $S$ ) и полей *всех* зарядов в стеклянной пластинке, причем *каждое* поле берется с запаздыванием *при скорости  $c$* . Напомним, что поле каждого заряда не меняется от присутствия других зарядов. Это наши основные принципы. Таким образом, поле в точке  $P$  может быть записано в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{\text{по всем зарядам}} \mathbf{E}_{\text{отд. заряда}} \quad (31.1)$$

или

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \sum_{\text{все остальные заряды}} \mathbf{E}_{\text{отд. заряда}}, \quad (31.2)$$

где  $\mathbf{E}_s$  — поле внешнего источника; оно совпадало бы с искомым полем в точке  $P$ , если бы не было пластинки. Мы ожидаем, что в присутствии любых движущихся зарядов поле в точке  $P$  будет отлично от  $\mathbf{E}_s$ .

Откуда берутся движущиеся заряды в стекле? Известно, что любой предмет состоит из атомов, содержащих электроны. Электрическое поле внешнего источника действует на эти атомы и раскачивает электроны взад и вперед. Электроны в свою очередь создают поле; их можно рассматривать как новые излучатели. Новые излучатели связаны с источником  $S$ , поскольку именно поле источника заставляет их колебаться. Полное поле содержит вклад не только от источника  $S$ , но и

дополнительные вклады от излучения всех движущихся зарядов. Это значит, что поле в присутствии стекла изменяется, причем таким образом, что внутри стекла его скорость распространения кажется иной. Именно эту идею мы используем при количественном рассмотрении.

Однако точный расчет очень сложен, потому что наше утверждение, что заряды испытывают только действие источника, не совсем правильно. Каждый данный заряд «чувствует» не только источник, но, подобно любому объекту во Вселенной, он чувствует и *все* остальные движущиеся заряды, в частности и заряды, колеблющиеся в стекле. Поэтому полное поле, действующее на *данный заряд*, представляет собой совокупность полей от *всех остальных зарядов*, движение которых в свою очередь зависит от движения данного заряда! Вы видите, что вывод точной формулы требует решения сложной системы уравнений. Эта система очень сложна, и вы будете изучать ее значительно позднее.

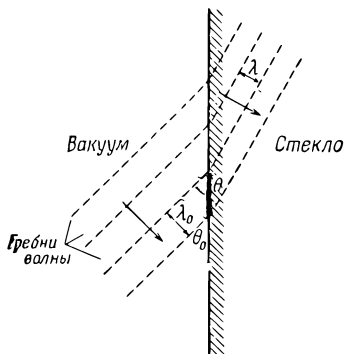
А сейчас обратимся к совсем простому примеру, чтобы отчетливо понять проявление всех физических принципов. Предположим, что действие всех остальных атомов на данный атом мало по сравнению с действием источника. Иными словами, мы изучаем такую среду, в которой полное поле мало меняется из-за движения находящихся в ней зарядов. Такая ситуация характерна для материалов с показателем преломления, очень близким к единице, например для разреженных сред. Наши формулы будут справедливы для всех материалов с показателем преломления, близким к единице. Таким путем мы сможем избежать трудностей, связанных с решением полной системы уравнений.

Вы могли по ходу дела заметить, что движение зарядов в пластинке вызывает еще один эффект. Это движение создает волну, распространяющуюся назад в направлении источника *S*. Такая обратно движущаяся волна есть не что иное, как луч света, отраженный прозрачным материалом. Приходит он не только с поверхности. Отраженное излучение генерируется во всех точках внутри материала, но суммарный эффект эквивалентен отражению с поверхности. Учет отражения лежит за границами применимости настоящего приближения, в котором показатель преломления считается настолько близким к единице, что отраженным излучением можно пренебречь.



Прежде чем перейти к изучению показателя преломления, следует подчеркнуть, что в основе явления преломления лежит тот факт, что кажущаяся *скорость* распространения вол-





Ф и г. 31.2. Связь между преломлением и изменением скорости.

ны различна в разных материалах. Отклонение луча света есть следствие изменения эффективной скорости в разных материалах.

Чтобы пояснить этот факт, мы отметили на фиг. 31.2 ряд последовательных максимумов в амплитуде волн, падающей из вакуума на стекло. Стрелка, перпендикулярная указанным максимумам, отмечает направление распространения волны. Всюду в волне колебания происходят с одной и той же частотой. (Мы видели, что вынужденные колебания имеют ту же частоту, что и колебания источника.) Отсюда следует, что расстояния между максимумами волн по обе стороны поверхности совпадают вдоль самой поверхности, поскольку волны здесь должны быть согласованы и заряд на поверхности колеблется с одной частотой. Наименьшее расстояние между гребнями волн есть длина волны, равная скорости, деленной на частоту. В вакууме длина волны равна  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ , а в стекле  $\lambda = 2\pi v/\omega$  или  $2\pi c/\omega n$ , где  $v = c/n$  — скорость волны. Как видно из фиг. 31.2, единственный способ «сшить» волны на границе состоит в изменении направления движения волны в материале. Простое геометрическое рассуждение показывает, что условие «сшивания» сводится к равенству  $\lambda_0/\sin \theta_0 = \lambda/\sin \theta$ , или  $\sin \theta_0/\sin \theta = n$ , а это и есть закон Снелла. Пусть сейчас вас больше не волнует само отклонение света; нужно только выяснить, почему же в самом деле эффективная скорость света в материале с показателем преломления  $n$  равна  $c/n$ ?



Вернемся снова к фиг. 31.1. Из сказанного ясно, что нужно вычислить поле в точке  $P$  от осциллирующих зарядов стеклянной пластинки. Обозначим эту часть поля, которая представляется вторым членом в равенстве (31.2), через  $E_a$ . До-

бавляя к ней поле источника  $E_s$ , получаем полное поле в точке  $P$ .

Стоящая перед нами здесь задача, пожалуй, самая сложная из тех, которыми мы будем заниматься в этом году, но сложность ее заключается только в большом количестве складываемых членов; каждый член сам по себе очень прост. В отличие от других случаев, когда мы обычно говорили: «Забудь вывод и смотри только на результат!», теперь для нас вывод гораздо важнее результата. Другими словами, нужно понять всю физическую «кухню», с помощью которой вычисляется показатель преломления.

Чтобы понять, с чем мы имеем дело, найдем, каким должно быть «поправочное поле»  $E_a$ , чтобы полное поле в точке  $P$  выглядело как поле источника, замедлившееся при прохождении через стеклянную пластинку. Если бы пластинка никак не влияла на поле, волна распространялась бы направо (по оси  $z$ ) по закону

$$E_s = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right), \quad (31.3)$$

или, используя экспоненциальную запись,

$$E_s = E_0 e^{i\omega(t - z/c)}. \quad (31.4)$$

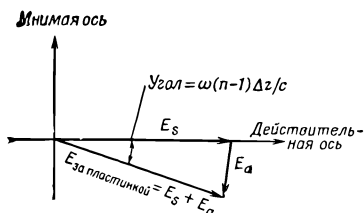
А что произошло бы, если бы волна проходила через пластинку с меньшей скоростью? Пусть толщина пластинки есть  $\Delta z$ . Если бы пластинки не было, то волна прошла бы расстояние  $\Delta z$  за время  $\Delta z/c$ . А поскольку кажущаяся скорость распространения есть  $c/n$ , то потребуется время  $n\Delta z/c$ , т. е. больше на некоторое *добавочное* время, равное  $\Delta t = (n - 1)\Delta z/c$ . За пластинкой волна снова движется со скоростью  $c$ . Учтем добавочное время на прохождение через пластинку, заменив  $t$  в уравнении (31.4) на  $(t - \Delta t)$ , т. е.  $[t - (n - 1)\Delta z/c]$ . Таким образом, если поставить пластинку, то формула для волны должна приобрести вид

$$E_{\text{за пластинкой}} = E_0 e^{i\omega[t - (n-1)\Delta z/c - z/c]}. \quad (31.5)$$

Эту формулу можно переписать еще и по-другому:

$$E_{\text{за пластинкой}} = e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} E_0 e^{i\omega(t - z/c)}, \quad (31.6)$$

откуда заключаем, что поле за пластинкой получается умножением поля, которое было бы при отсутствии пластинки (т. е.  $E_s$ ), на  $\exp[-i\omega(n - 1)\Delta z/c]$ . Как мы знаем, умножение осциллирующей функции типа  $e^{i\omega t}$  на  $e^{i\theta}$  означает изменение фазы колебаний на угол  $\theta$ , возникающее из-за задержки при прохождении пластинки. Фаза запаздывает на величину  $\omega(n - 1)\Delta z/c$  (именно запаздывает, поскольку в экспоненте стоит знак минус).



Фиг. 31.3. Построение вектора поля прошедшей через материал волны при некоторых значениях  $t$  и  $z$ .

Мы говорили раньше, что пластинка добавляет поле  $E_a$  к первоначальному полю  $E_s = E_0 \exp[i\omega(t - z/c)]$ , а вместо этого нашли, что действие пластинки сводится к умножению поля на фактор, сдвигающий фазу колебаний. Однако здесь нет противоречия, поскольку тот же результат можно получить, прибавив подходящее комплексное число. Это число особенно просто найти для малых  $\Delta z$ , так как  $e^x$  при малых  $x$  с большой точностью равно  $(1 + x)$ . Тогда можно записать

$$e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} = 1 - i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c}. \quad (31.7)$$

Подставляя это равенство в (31.6), получаем

$$E_{\text{за пластинкой}} = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_s} - \underbrace{\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_a}. \quad (31.8)$$

Первый член в этом выражении есть просто поле источника, а второй следует приравнять  $E_a$  — полю, создаваемому осциллирующими зарядами пластинки справа от нее. Поле  $E_a$  выражено здесь через показатель преломления  $n$ ; оно, разумеется, зависит от напряженности поля источника.

• • •

Смысл сделанных преобразований легче всего понять с помощью диаграммы комплексных чисел (см. фиг. 31.3). Отложим сперва  $E_s$  ( $z$  и  $t$  выбраны на рисунке такими, что  $E_s$  лежит на действительной оси, но это не обязательно). Задержка при прохождении пластинки приводит к запаздыванию фазы  $E_s$ , т. е. поворачивает  $E_s$  на отрицательный угол. Это все равно, что добавить малый вектор  $E_a$ , направленный почти под прямым углом к  $E_s$ . Именно такой смысл имеет множитель  $(-i)$  во втором члене (31.8). Он означает, что при действительном  $E_s$  величина  $E_a$  отрицательная и мнимая, а в общем случае  $E_s$  и  $E_a$  образуют прямой угол.

## § 2. Поле, излучаемое средой

Мы должны теперь выяснить, имеет ли поле осциллирующих зарядов в пластинке тот же вид, что и поле  $E_a$  во втором члене (31.8). Если это так, то тем самым мы найдем и

показатель преломления  $n$  [поскольку  $n$  — единственный фактор в (31.8), не выражающийся через фундаментальные величины]. Вернемся теперь к вычислению поля  $E_a$ , создаваемого зарядами пластинки. (Для удобства мы выписали в табл. 31.1 обозначения, которыми мы уже пользовались, и те, которые нам понадобятся в дальнейшем.)

Таблица 31.1

● ОБОЗНАЧЕНИЯ, КОТОРЫМИ МЫ  
ПОЛЬЗУЕМСЯ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ

---

$E_s$	поле, создаваемое источником
$E_a$	поле, создаваемое зарядами пластинки
$\Delta z$	толщина пластинки
$z$	расстояние по нормали к пластинке
$n$	показатель преломления
$\omega$	частота (угловая) излучения
$N$	число зарядов в единице объема пластинки
$\eta$	число зарядов на единицу площади пластинки
$q_e$	заряд электрона
$m$	масса электрона
$\omega_0$	резонансная частота электрона, связанного в атоме

Если источник  $S$  (на фиг. 31.1) находится слева на достаточно большом расстоянии, то поле  $E_s$  имеет одинаковую фазу по всей длине пластинки, и вблизи пластинки его можно записать в виде

$$E_s = E_0 e^{i(\omega t - z/c)}. \quad (31.9)$$

На самой пластинке в точке  $z = 0$  мы имеем

$$E_s = E_0 e^{i\omega t} \quad (\text{у пластинки}). \quad (31.10)$$

Это электрическое поле воздействует на каждый электрон в атоме, и они под действием электрической силы  $qE$  будут колебаться вверх и вниз (если  $E_0$  направлено вертикально). Чтобы найти характер движения электронов, представим атомы в виде маленьких осцилляторов, т. е. пусть электроны упруго соединены с атомом; это значит, что смещение электронов из нормального положения под действием силы пропорционально величине силы.

Если вы слышали о модели атома, в которой электроны вращаются по орбите вокруг ядра, то эта модель атома вам покажется просто смешной. Но это лишь упрощенная модель. Точная теория атома, основанная на квантовой механике, утверждает, что в процессах с участием света электроны ведут себя так, как будто они закреплены на пружинах. Итак, предположим, что на электроны действует линейная возвращающая сила, и поэтому они ведут себя как осцилляторы с массой  $m$  и резонансной частотой  $\omega_0$ . Мы уже занимались

изучением таких осцилляторов и знаем уравнение движения, которому они подчиняются:

$$m \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = F \quad (31.11)$$

(здесь  $F$  — внешняя сила).

В нашем случае внешняя сила создается электрическим полем волны источника, поэтому можно написать

$$F = q_e E_s = q_e E_0 e^{i\omega t}, \quad (31.12)$$

где  $q_e$  — заряд электрона, а в качестве  $E_s$  мы взяли значение  $E_s = E_0 e^{i\omega t}$  из уравнения (31.10). Уравнение движения электрона приобретает вид

$$m \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = q_e E_0 e^{i\omega t}. \quad (31.13)$$

Решение этого уравнения, найденное нами раньше, выглядит следующим образом:

$$x = x_0 e^{i\omega t}; \quad (31.14)$$

подставляя его в (31.13), получаем

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (31.15)$$

откуда

$$x = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}. \quad (31.16)$$

Мы нашли то, что хотели, — движение электронов в пластинке. Оно одинаково для всех электронов, и только среднее положение («нуль» движения) у каждого электрона свое.

Теперь мы в состоянии определить поле  $E_a$ , создаваемое атомами в точке  $P$ , поскольку поле заряженной плоскости было найдено еще раньше (в конце гл. 30). Обращаясь к уравнению (30.19), мы видим, что поле  $E_a$  в точке  $P$  есть скорость заряда, запаздывающая по времени на величину  $z/c$ , умноженная на отрицательную константу. Дифференцируя  $x$  из (31.16), получаем скорость и, введя запаздывание [или же просто подставляя  $x_0$  из (31.15) в (30.18)], приходим к формуле

$$E_a = - \frac{\eta q_e}{2\epsilon_0 c} \left[ i\omega \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t - z/c)} \right]. \quad (31.17)$$

Как и следовало ожидать, вынужденное колебание электронов привело к новой волне, распространяющейся вправо (на это указывает множитель  $\exp[i\omega(t - z/c)]$ ); амплитуда волны пропорциональна числу атомов на единице площади пластинки (множитель  $\eta$ ), а также амплитуде поля источника

$E_0$ ). Кроме того, возникают и другие величины, зависящие от свойств атомов ( $q_e, m, \omega_0$ ).

Самый важный момент, однако, заключается в том, что формула (31.17) для  $E_a$  очень похожа на выражение  $E_a$  в (31.8), полученное нами с помощью введения запаздывания в среде с показателем преломления  $n$ . Оба выражения совпадают, если положить

$$(n - 1) \Delta z = \frac{\eta q_e^2}{2\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (31.18)$$

Заметьте, что обе стороны этого равенства пропорциональны  $\Delta z$ , поскольку  $\eta$  — число атомов на единицу площади — равно  $N\Delta z$ , где  $N$  — число атомов на единицу объема пластинки. Подставляя  $N\Delta z$  вместо  $\eta$  и сокращая на  $\Delta z$ , получаем наш основной результат — формулу для показателя преломления, выраженную через константы, зависящие от свойств атомов, и частоту света:

$$n = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (31.19)$$

Эта формула «объясняет» показатель преломления, к чему мы и стремились.

### § 3. Дисперсия

Полученный нами результат очень интересен. Он дает не только показатель преломления, выраженный через атомные постоянные, но указывает, как меняется показатель преломления с частотой света  $\omega$ . С помощью простого утверждения «свет движется с меньшей скоростью в прозрачной среде» мы никогда бы не смогли прийти к этому важному свойству. Нужно, конечно, еще знать число атомов в единице объема и собственную частоту атомов  $\omega_0$ . Мы еще не умеем определять эти величины, поскольку они разные для разных материалов, а общую теорию по данному вопросу мы сейчас изложить не можем. Общая теория свойств различных веществ — их собственных частот и т. п. — формулируется на основе квантовой механики. Кроме того, свойства различных материалов и величина показателя преломления сильно меняются от материала к материалу, и поэтому вряд ли можно надеяться, что вообще удастся получить общую формулу, пригодную для всех веществ.

Тем не менее попробуем применить нашу формулу к разным средам. Прежде всего для большинства газов (например, для воздуха, большей части бесцветных газов, водорода, гелия и т. д.) собственные частоты колебаний электронов соответствуют ультрафиолетовому свету. Эти частоты много

больше частот видимого света, т. е.  $\omega_0$  много больше  $\omega$ , и в первом приближении можно пренебречь  $\omega^2$  по сравнению с  $\omega_0^2$ . Тогда показатель преломления получается почти постоянным. Итак, для газов показатель преломления можно считать константой. Этот вывод справедлив также и для большинства других прозрачных сред, например для стекла. Взглянув более внимательно на наше выражение, можно заметить, что при увеличении  $\omega$  знаменатель уменьшается, а, следовательно, показатель преломления растет. Таким образом,  $n$  медленно увеличивается с ростом частоты. Для синего света показатель преломления больше, чем для красного. Именно поэтому синие лучи сильнее отклоняются призмой, чем красные.

Сам факт зависимости показателя преломления от частоты называется *дисперсией*, так как именно из-за дисперсии свет «диспергирует», раскладывается призмой в спектр. Формула, выражающая показатель преломления как функцию частоты, называется *формулой дисперсии*. Итак, мы нашли *дисперсионную формулу*. (За последние несколько лет «дисперсионные формулы» стали использоваться в теории элементарных частиц.)

Наша дисперсионная формула предсказывает ряд новых интересных эффектов. Если частота  $\omega_0$  лежит в области видимого света или если измерять показатель преломления вещества, например стекла, для ультрафиолетовых лучей (где  $\omega$  близко к  $\omega_0$ ), то знаменатель стремится к нулю, а показатель преломления становится очень большим. Пусть, далее,  $\omega$  больше  $\omega_0$ . Такой случай возникает, например, если облучать вещества типа стекла рентгеновскими лучами. Кроме того, многие вещества, непрозрачные для обычного света (скажем, уголь), прозрачны для рентгеновских лучей, поэтому можно говорить о показателе преломления этих веществ для рентгеновских лучей. Собственные частоты атомов углерода гораздо меньше частоты рентгеновских лучей. Показатель преломления в этом случае дается нашей дисперсионной формулой, если положить  $\omega_0 = 0$  (т. е. мы пренебрегаем  $\omega_0^2$  по сравнению с  $\omega^2$ ).

Аналогичный результат получается при облучении газа свободных электронов радиоволнами (или светом). В верхних слоях атмосферы ультрафиолетовое излучение Солнца выбивает электроны из атомов, в результате чего образуется газ свободных электронов. Для свободных электронов  $\omega_0 = 0$  (упругой возвращающей силы нет). Полагая в нашей дисперсионной формуле  $\omega_0 = 0$ , получаем разумную формулу для показателя преломления радиоволн в стратосфере, где  $N$  теперь означает плотность свободных электронов (число на единицу объема) в стратосфере. Но, как видно из формулы, при

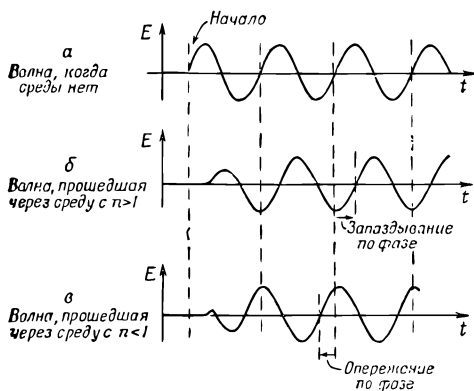
облучении вещества рентгеновскими лучами или электронного газа радиоволнами член  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  становится *отрицательным*, откуда следует, что  $n$  *меньше единицы*. Это значит, что эффективная скорость электромагнитных волн в веществе *больше  $c$ !* Может ли так быть?

Может. Хотя мы и говорили, что сигналы не могут распространяться быстрее скорости света, тем не менее показатель преломления при некоторой частоте может быть как больше, так и меньше единицы. Это просто означает, что *сдвиг фазы* за счет рассеяния света либо положителен, либо отрицателен. Кроме того, можно показать, что скорость *сигнала* определяется показателем преломления не при одном значении частоты, а при *многих* частотах. Показатель преломления указывает на скорость движения *гребня* волны. Но *гребень* волны не составляет еще сигнала. Чистая волна без всяких модуляций, т. е. состоящая из бесконечно повторяющихся правильных осцилляций, не имеет «начала», и ее нельзя использовать для посылки сигналов времени. Чтобы послать *сигнал*, волну нужно видоизменить, сделать на ней отметку, т. е. сделать ее кое-где потолще или потоньше. Тогда волна будет содержать не одну частоту, а целый ряд частот, и можно показать, что скорость распространения *сигнала* зависит не от одного значения показателя преломления, а от характера изменения показателя с частотой. Мы пока отложим этот вопрос. В гл. 48 (вып. 4) мы вычислим скорость распространения *сигналов* в стекле и убедимся, что она не превышает скорости света, хотя гребни волны (понятия чисто математические) движутся быстрее скорости света.

Несколько слов по поводу механизма этого явления. Главная трудность здесь связана с тем фактом, что вынужденное движение зарядов противоположно по знаку направлению поля. Действительно, в выражении (31.16) для смещения заряда  $x$  множитель  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  отрицателен для малых  $\omega_0$  и смещение имеет обратный знак по отношению к внешнему полю. Получается, что, когда поле действует с некоторой силой в одном направлении, заряд движется в противоположном направлении.

Как случилось, что заряд стал двигаться в сторону, противоположную силе? В самом деле, при включении поля заряд движется не противоположно силе. Сразу после включения поля возникает переходный режим, затем колебания устанавливаются и только *после этого* колебания заряда направлены противоположно внешнему полю. Одновременно результирующее поле начинает *опережать по фазе* поле источника. Когда мы говорим, что «фазовая скорость», или скорость гребной волны, больше  $c$ , то мы имеем в виду именно *опережение по фазе*,





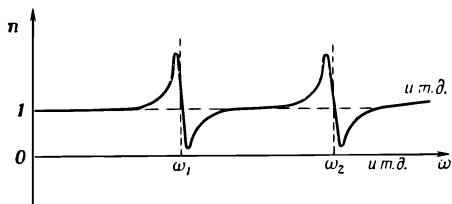
Ф и г. 31.4. Волновые «сигналы».

На фиг. 31.4 показан примерный вид волн, возникающих при резком включении волны источника (т. е. при посылке сигнала). Из рисунка видно, что для волны, проходящей в среде с опережением по фазе, сигнал (т. е. начало волны) не опережает по времени сигнал источника.

Обратимся теперь снова к дисперсионной формуле. Следует помнить, что полученный нами результат несколько упрощает истинную картину явления. Чтобы быть точными, в формулу необходимо внести некоторые поправки. Прежде всего в нашу модель атомного осциллятора следует ввести затухание (иначе осциллятор, раз начав, будет колебаться до бесконечности, что неправдоподобно). Движение затухающего осциллятора мы уже изучали в одной из прошлых глав [см. уравнение (23.8)]. Учет затухания приводит к тому, что в формулах (31.16), а поэтому и в (31.19) вместо  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  появляется  $(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$ , где  $\gamma$  — коэффициент затухания.

Вторая поправка к нашей формуле возникает потому, что каждый атом обычно имеет несколько резонансных частот. Тогда вместо одного вида осцилляторов нужно учесть действие нескольких осцилляторов с разными резонансными частотами, колебания которых происходят независимо друг от друга, и сложить вклады от всех осцилляторов.

Пусть в единице объема содержится  $N_k$  электронов с собственной частотой  $\omega_k$  и коэффициентом затухания  $\gamma_k$ . Наша



Ф и г. 31.5. Показатель преломления как функция частоты.

дисперсионная формула примет в результате вид

$$n = 1 + \frac{q_z^2}{2\epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}. \quad (31.20)$$

Это окончательное выражение для показателя преломления справедливо для большого числа веществ\*. Примерный ход показателя преломления с частотой, даваемый формулой (31.20), приведен на фиг. 31.5.

Вы видите, что всюду, за исключением области, где  $\omega$  очень близко к одной из резонансных частот, наклон кривой положителен. Такая зависимость носит название «нормальной» дисперсии (потому что этот случай встречается наиболее часто). Вблизи резонансных частот кривая имеет отрицательный наклон, и в этом случае говорят об «аномальной» дисперсии (имея в виду «ненормальную» дисперсию), потому что она наблюдалась задолго до того, как узнали об электронах, и казалась в то время необычной. С нашей точки зрения, оба наклона вполне «нормальны»!

#### § 4. Поглощение

Вы уже, наверное, заметили нечто странное в последней форме (31.20) нашей дисперсионной формулы. Из-за члена  $i\gamma$ , учитывающего затухание, показатель преломления стал комплексной величиной! Что это означает? Выразим  $n$  через действительную и мнимую части:

$$n = n' - in'', \quad (31.21)$$

причем  $n'$  и  $n''$  вещественны. (Перед  $in''$  стоит знак минус, а само  $n''$ , как легко убедиться, положительно.)

Смысл комплексного показателя преломления легче всего понять, вернувшись к уравнению (31.6) для волны, проходящей сквозь пластинку с показателем преломления  $n$ . Подставив сюда комплексное  $n$  и произведя перегруппировку членов, получаем

$$E_{\text{за пластинкой}} = \underbrace{e^{-\omega n'' \Delta z/c}}_A \underbrace{e^{-i\omega(n'-1)\Delta z/c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_B. \quad (31.22)$$

Множители, обозначенные буквой  $B$ , имеют прежний вид и, как и раньше, описывают волну, фаза которой после прохо-

\* Такая же формула получается и с помощью квантовой механики, однако интерпретация ее в этом случае иная. В квантовой механике даже одноэлектронный атом, например водород, имеет несколько резонансных частот. Поэтому вместо числа электронов  $N_k$  с частотой  $\omega_k$  появляется множитель  $Nf_k$ , где  $N$  — число атомов в единице объема, а число  $f_k$  (называемое силой осциллятора) указывает, с каким весом входит данная резонансная частота  $\omega_k$ .

ждения пластинки запаздывает на угол  $\omega(n' - 1)\Delta z/c$ . Множитель  $A$  (экспонента с действительным показателем) представляет нечто новое. Показатель экспоненты отрицателен, следовательно,  $A$  вещественно и меньше единицы. Множитель  $A$  уменьшает амплитуду поля; с ростом  $\Delta z$  величина  $A$ , а следовательно, и вся амплитуда, падает. При прохождении через среду электромагнитная волна затухает. Среда «поглощает» часть волны. Волна выходит из среды, потеряв часть своей энергии. Этому не следует удивляться, потому что введенное нами затухание осцилляторов обусловлено силой трения и непременно приводит к потере энергии. Мы видим, что мнимая часть комплексного показателя преломления  $n''$  описывает поглощение (или «ослабление») электромагнитной волны. Иногда  $n''$  называют еще «коэффициентом поглощения».

Заметим также, что появление мнимой части  $n$  отклоняет стрелку, изображающую  $E_a$  на фиг. 31.3, к началу координат. Отсюда ясно, почему поле ослабевает при прохождении через среду.

Обычно (как, например, у стекла) поглощение света очень мало. Именно так и получается по нашей формуле (31.20), потому что мнимая часть знаменателя  $i\gamma_k\omega$  много меньше действительной части  $(\omega_k^2 - \omega^2)$ . Однако, когда частота  $\omega$  близка к  $\omega_k$ , резонансный член  $(\omega_k^2 - \omega^2)$  оказывается мал по сравнению с  $i\gamma_k\omega$  и показатель преломления становится почти чисто мнимым. Поглощение в этом случае определяет основной эффект. Именно поглощение дает в солнечном спектре темные линии. Свет, излучаемый поверхностью Солнца, проходит сквозь солнечную атмосферу (а также через атмосферу Земли), и частоты, равные резонансным частотам атомов в атмосфере Солнца, сильно поглощаются.

Наблюдение подобных спектральных линий солнечного света позволяет установить резонансные частоты атомов, а следовательно, и химический состав солнечной атмосферы. Точно так же по спектру звезд узнают состав звездного вещества. С помощью этих методов обнаружили, что химические элементы на Солнце и звездах не отличаются от земных.

## § 5. Энергия световой волны

Как мы видели, мнимая часть показателя преломления характеризует поглощение. Попробуем теперь вычислить энергию, переносимую световой волной. Мы высказали соображения в пользу того, что энергия световой волны пропорциональна  $\vec{E}^2$ , среднему по времени от квадрата электрического поля волны. Ослабление электрического поля за счет поглощения волны должно приводить к потере энергии, пере-

ходящей в какое-то трение электронов и в конечном счете, как нетрудно догадаться, в тепло.

Взяв часть световой волны, падающую на единичную площадку, например на квадратный сантиметр поверхности нашей пластинки на фиг. 31.1, можно записать энергетический баланс в следующей форме (мы предполагаем, что энергия сохраняется!):

$$\begin{aligned} \text{Падающая энергия в } 1 \text{ сек} = & \text{Выходящая энергия в } 1 \text{ сек} + \\ & + \text{Работа, совершаемая в } 1 \text{ сек.} \quad (31.23) \end{aligned}$$

Вместо первого члена можно написать  $\alpha \overline{E_s^2}$ , где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности, связывающий среднее значение  $E^2$  с энергией, переносимой волной. Во втором члене необходимо включить поле излучения атомов среды, т. е. мы должны записать  $\alpha (\overline{E_s + E_a})^2$  или (раскладывая квадрат суммы)  $\alpha (\overline{E_s^2} + 2\overline{E_s E_a} + \overline{E_a^2})$ .

Все наши вычисления проводились в предположении, что толщина слоя материала мала и показатель преломления его незначительно отличается от единицы, тогда  $E_a$  оказывается много меньше  $E_s$  (это было сделано с единственной целью — упростить вычисления). В рамках нашего приближения член  $\overline{E_a^2}$  следует опустить, пренебрегая им по сравнению с  $\overline{E_s E_a}$ . Вы можете на это возразить: «Тогда нужно отбросить и  $\overline{E_s E_a}$ , потому что этот член много меньше  $\overline{E_s^2}$ ». Действительно,  $\overline{E_s E_a}$  много меньше  $\overline{E_s^2}$ , но если мы выбросим этот член, то получим приближение, в котором эффекты среды не учитываются совсем! Правильность наших вычислений в рамках сделанного приближения проверится тем, что мы всюду оставляли члены, пропорциональные  $-N\Delta z$  (плотности атомов в среде), но выбрасывали члены порядка  $(N\Delta z)^2$  и более высоких степеней по  $N\Delta z$ . Наше приближение можно было бы назвать «приближением малой плотности».

Заметим, кстати, что наше уравнение баланса энергии не содержит энергии отраженной волны. Но так и должно быть, потому что амплитуда отраженной волны пропорциональна  $N\Delta z$ , а энергия пропорциональна  $(N\Delta z)^2$ .

Чтобы найти последний член в (31.23), нужно вычислить работу, совершаемую падающей волной над электронами за 1 сек. Работа, как известно, равна силе, умноженной на расстояние; отсюда работа в единицу времени (называемая также мощностью) дается произведением силы на скорость. Точнее, она равна  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ , но в нашем случае сила и скорость имеют одинаковое направление, поэтому произведение векторов сводится к обычному (с точностью до знака). Итак, работа, совершаемая в 1 сек над каждым атомом, равна  $q_e \overline{E_s v}$ . По-

сколько на единичную площадку приходится  $N\Delta z$  атомов, последний член в уравнении (31.23) оказывается равным  $N\Delta z q_e \overline{E_s v}$ . Уравнение баланса энергии принимает вид

$$\alpha \overline{E_s^2} = \alpha \overline{E_s^2} + 2\alpha \overline{E_s E_a} + N \Delta z q_e \overline{E_s v}. \quad (31.24)$$

Члены  $\alpha \overline{E_s^2}$  сокращаются, и мы получаем

$$-2\alpha \overline{E_s E_a} = N \Delta z q_e \overline{E_s v}. \quad (31.25)$$

Возвращаясь к уравнению (30.19), находим  $E_a$  для больших  $z$ :

$$E_a = -\frac{N \Delta z q_e}{2\epsilon_0 c} v \left( \text{запазд. на } \frac{z}{c} \right) \quad (31.26)$$

(напомним, что  $\eta = N\Delta z$ ). Подставляя (31.26) в левую часть равенства (31.25), получаем

$$2\alpha \frac{N \Delta z q_e}{2\epsilon_0 c} \overline{E_s \left( \text{в точке } z \right) \cdot v \left( \text{запазд. на } \frac{z}{c} \right)}.$$

Но  $E_s$  (в точке  $z$ ) равно  $E_s$  (в точке атома) с запаздыванием на  $z/c$ . Поскольку среднее значение не зависит от времени, оно не изменится, если временной аргумент запаздывает на  $z/c$ , т. е. оно равно  $\overline{E_s \left( \text{в точке атома} \right) \cdot v}$ , но точно такое же среднее значение стоит и в правой части (31.25). Обе части (31.25) будут равны, если выполняется соотношение

$$\frac{\alpha}{\epsilon_0 c} = 1, \quad \text{или} \quad \alpha = \epsilon_0 c. \quad (31.27)$$

Таким образом, если справедлив закон сохранения энергии, то количество энергии электрической волны, приходящееся на единичную площадку в единицу времени (то, что мы называем *интенсивностью*), должно быть равно  $\epsilon_0 c \overline{E^2}$ . Обозначив интенсивность через  $\overline{S}$ , получим

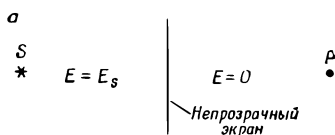
$$\overline{S} = \left\{ \begin{array}{c} \text{интенсивность} \\ \text{или} \\ \text{энергия/площадь} \cdot \text{время} \end{array} \right\} = \epsilon_0 c \overline{E^2}, \quad (31.28)$$

где черта означает *среднее по времени*. Из нашей теории показателя преломления получился замечательный результат!

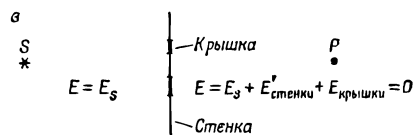
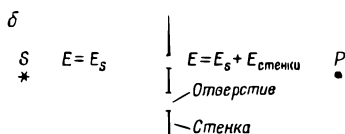
## § 6. Дифракция света на непрозрачном экране

Теперь наступил удобный момент, чтобы применить методы настоящей главы к решению задачи другого рода. В гл. 30 мы говорили, что распределение интенсивности света — дифракционную картину, возникающую при прохождении света через отверстия в непрозрачном экране, — можно найти, равномерно распределив источники (осцилляторы) по

Фиг. 31.6. Дифракция на непрозрачном экране.



площади отверстий. Другими словами, дифрагированная волна выглядит так, как будто источником служит дырка в экране. Мы должны выяснить причину этого явления, ведь на самом деле именно в дырке *нет* источников, *нет* никаких зарядов, движущихся с ускорением.



Ответим сначала на вопрос: что *такое* непрозрачный экран? Пусть между источником  $S$  и наблюдателем  $P$  находится совершенно непрозрачный экран, как показано на фиг. 31.6, а. Раз экран «непрозрачный», поле в точке  $P$  отсутствует. Почему? Согласно общим принципам, поле в точке  $P$  равно полю  $E_s$ , взятому с некоторым запаздыванием, плюс поле всех остальных зарядов. Но, как было показано, поле  $E_s$  приводит заряды экрана в движение, а они в свою очередь создают новое поле, и, если экран непрозрачный, это поле зарядов должно *в точности погасить* поле  $E_s$  с задней стенки экрана. Тут вы можете возразить: «Каким чудом они *в точности* погасятся! А что, если погашение неполное?» Если бы поля гасились не полностью (напомним, что экран имеет некоторую толщину), поле в экране вблизи от задней стенки было бы отлично от нуля. Но тогда оно приводило бы в движение другие электроны экрана, создавая тем самым новое поле, стремящееся компенсировать первоначальное поле. Если экран толстый, в нем имеется достаточно много возможностей, чтобы свести остаточное поле к нулю. Пользуясь нашей терминологией, можно сказать, что непрозрачный экран обладает большим и чисто мнимым показателем преломления и поэтому волна в нем экспоненциально затухает. Вам, наверное, известно, что тонкие слои большинства непрозрачных материалов, даже золота, прозрачны.

Посмотрим теперь, какая возникает картина, если взять такой непрозрачный экран с отверстием, какой изображен на фиг. 31.6, б. Каким будет поле в точке  $P$ ? Поле в точке  $P$  складывается из двух частей — поля источника  $S$  и поля экрана, т. е. поля от движения зарядов в экране. Движение зарядов

в экране, по-видимому, очень сложное, но *создаваемое ими поле* находится довольно просто.

Возьмем тот же самый экран, но закроем отверстия крышками, как показано на фиг. 31.6, в. Пусть крышки сделаны из того же материала, что и экран. Заметьте, что крышки поставлены в тех местах, где на фиг. 31.6, б показаны отверстия. Давайте вычислим теперь поле в точке  $P$ . Поле в точке  $P$  в случае, показанном на фиг. 31.6, в, разумеется, равно нулю, но, с другой стороны, оно также равно полю источника плюс поле электронов экрана и крышек. Мы можем написать следующее равенство:

$$\text{Случай б: } E_{\text{в точке } P} = E_s + E_{\text{стенки}};$$

$$\text{Случай в: } E'_{\text{в точке } P} = 0 = E_s + E'_{\text{стенки}} + E'_{\text{крышки}}.$$

Штрихи относятся к случаю, когда отверстия закрыты крышками; значение  $E_s$  в обоих случаях, конечно, одно и то же. Вычитая одно равенство из другого, получаем

$$E_{\text{в точке } P} = (E_{\text{стенки}} - E'_{\text{стенки}}) - E'_{\text{крышки}}.$$

Если отверстия не слишком малы (например, шириной во много длин волн), то присутствие крышек не должно повлиять на поле у экрана, исключая, быть может, узкую область вблизи краев отверстий. Пренебрегая этим малым эффектом, можно написать  $E_{\text{стенки}} = E'_{\text{стенки}}$  и, следовательно,

$$E_{\text{в точке } P} = -E'_{\text{крышки}}.$$

Мы приходим к выводу, что поле в точке  $P$  *при открытых отверстиях* (случай б) равно (с точностью до знака) полю, создаваемому *той частью* сплошного экрана, которая *находится на месте отверстий!* (Знак нас не интересует, поскольку обычно имеют дело с интенсивностью, пропорциональной квадрату поля.) Этот результат не только справедлив (в приближении не очень малых отверстий), но и важен; кроме всего прочего, он подтверждает справедливость обычной теории дифракции.

Поле  $E'_{\text{крышки}}$  вычисляется при условии, что движение зарядов всюду в экране создает именно такое поле, которое гасит поле  $E_s$  на задней поверхности экрана. Определив движение зарядов, мы складываем поля излучения зарядов в крышках и находим поле в точке  $P$ .

Напомним еще раз, что наша теория дифракции приближенная и справедлива в случае не слишком малых отверстий. Если размер отверстий мал, член  $E'_{\text{крышки}}$  также мал и разность  $E'_{\text{стенки}} - E_{\text{стенки}}$  (которую мы считали равной нулю) может быть сравнима с  $E'_{\text{крышки}}$  и даже много больше. Поэтому наше приближение оказывается негодным.

## Глава 32

### РАДИАЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ. РАССЕЯНИЕ СВЕТА

§ 1. Радиационное сопротивление

§ 2. Интенсивность излучения

§ 3. Радиационное затухание

§ 4. Независимые источники

§ 5. Рассеяние света

#### § 1. Радиационное сопротивление

В предыдущей главе мы показали, что система осциллирующих зарядов излучает энергию, и нашли формулу для энергии излучения. Количество энергии, проходящее в 1 сек через квадратный метр поверхности площадки, перпендикулярной направлению излучения, определяется средней величиной квадрата электрического поля системы, умноженной на  $\epsilon_0 c$ :

$$P = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle. \quad (32.1)$$

Каждый заряд, колеблясь, излучает энергию; излучает, например, и антенна, в которой внешний источник вызывает движение зарядов. При излучении энергия уходит в пространство, и в силу закона сохранения энергии по проводам, присоединенным к антенне, должна подаваться некоторая мощность. Это означает, что антенна, присоединенная к цепи источника тока, играет роль *сопротивления*, т. е. такого элемента цепи, где происходит «потеря» энергии (на самом деле энергия не теряется, а излучается, но по отношению к данному контуру энергия уходит безвозвратно). В обычном сопротивлении «теряемая» энергия переходит в тепло; в данном случае энергия уходит в пространство. С точки зрения теории электрических цепей неважно, куда уходит энергия, результат один и тот же — происходит «утечка» энергии из цепи. Поэтому, если антенна сделана даже из чистой меди, все равно для генератора она представляет собой сопротивление. Желательно, чтобы антенны излучали максимально возможное количество энергии, поэтому стараются



ся уменьшить их емкость и индуктивность; самые лучшие антенны имеют очень малую емкость и индуктивность. Сопротивление, которое имеют антенны в цепи, называют *радиационным сопротивлением*.

Пусть через антенну проходит ток  $I$ , тогда средняя мощность, теряемая в антенне, равна квадрату тока, умноженному на сопротивление. *Излучаемая* антенной мощность также пропорциональна квадрату тока, потому что напряженность поля пропорциональна току, а излучаемая энергия пропорциональна квадрату поля. Коэффициент пропорциональности, связывающий излучаемую мощность и  $\langle I^2 \rangle$ , и есть радиационное сопротивление.

Интересно узнать, из-за чего возникает радиационное сопротивление. Возьмем простой пример: пусть ток по антенне течет попеременно вверх и вниз. Если сообщить заряженному телу ускоренное движение вверх и вниз, то оно начнет излучать (незаряженное тело при этом энергию не излучает). Раз антенна излучает энергию, мы должны совершать над ней работу. Но одно дело показать с помощью закона сохранения энергии, что энергия теряется, и совсем другое — ответить на вопрос: *против какой силы* мы совершаем работу? Это очень интересный и трудный вопрос, на который применительно к электронам так и не удалось дать полного и удовлетворительного ответа. Однако в случае антенн ответ был найден. Вот что происходит в антеннах: поля, создаваемые движущимися электронами в одной части антенны, воздействуют на электроны в другой части. Можно вычислить действующие силы и найти производимую ими работу, а отсюда получить формулу для радиационного сопротивления. Было бы неправильно утверждать: «Мы можем вычислить», потому что *мы* еще не изучили законы электричества на малых расстояниях и знаем, каково электрическое поле только на больших расстояниях. Хотя мы привели формулу (28.3), мы еще не можем ею воспользоваться для вычисления поля внутри волновой зоны, потому что эта формула для нас слишком сложна. Правда, с помощью закона сохранения энергии мы можем получить результат, и не зная вида поля на малых расстояниях. (Обращая ход рассуждений, можно найти взаимодействие на малых расстояниях, если известен вид поля на больших расстояниях и если затем воспользоваться законом сохранения энергии; мы, однако, не будем сейчас заниматься этим вопросом.)

Пусть теперь имеется один-единственный электрон; к чему приложена возникающая в нем сила сопротивления? Старая классическая теория представляла электрон в виде маленького шарика, различные части которого взаимодействуют друг с другом. В результате запаздывания при распростра-

нении взаимодействия внутри этого шарика сила оказывается несколько смещенной по фазе относительно скорости движения. Мы знаем, что, когда электрон покоится, «действие равно противодействию». Поэтому внутренние силы уравниваются и результирующая сила равна нулю. Но в ускоренном электроде сила, действующая на переднюю половинку со стороны задней, из-за запаздывания не равна силе, действующей в обратном направлении. Запаздывание взаимодействия во времени нарушает баланс сил, и в результате вся система как бы «наступает сама себе на шнурки». Такое объяснение возникновения радиационного сопротивления у движущегося электрона встретилось со многими трудностями и прежде всего потому, что по современным представлениям электрон вовсе *не* «маленький шарик»; проблема так и осталась нерешенной по сей день. Тем не менее, даже не зная механизма действия сил, мы можем точно вычислить силу сопротивления излучения, т. е. затраты энергии на ускорение заряда.

## § 2. Интенсивность излучения

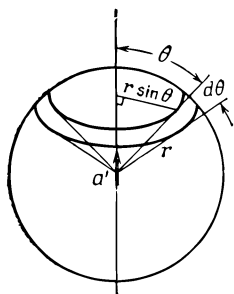
Вычислим теперь полную энергию, излучаемую зарядом при ускорении. Для общности возьмем случай произвольного ускорения, считая, однако, движение нерелятивистским. Когда ускорение направлено, скажем, по вертикали, электрическое поле излучения равно произведению заряда на проекцию запаздывающего ускорения, деленному на расстояние. Таким образом, нам известно электрическое поле в любой точке, а отсюда мы знаем энергию  $\epsilon_0 c E^2$ , проходящую через единичную площадку за 1 сек.

Величина  $\epsilon_0 c$  часто встречается в формулах распространения радиоволн. Обратную ей величину можно назвать *импедансом вакуума* (или сопротивлением вакуума); она равна  $1/\epsilon_0 c = 377 \text{ ом}$ . Отсюда мощность (в ваттах на квадратный метр) есть средний квадрат поля, деленный на 377.

С помощью формулы (29.1) для электрического поля мы получаем

$$S = \frac{q^2 a'^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3}, \quad (32.2)$$

где  $S$  — мощность на  $1 \text{ м}^2$ , излучаемая под углом  $\theta$ . Как уже отмечалось,  $S$  обратно пропорционально расстоянию. Интегрируя, получаем отсюда полную мощность, излучаемую во всех направлениях. Для этого сначала умножим  $S$  на площадь полоски сферы, тогда мы получим поток энергии в интервале угла  $d\theta$  (фиг. 32.1). Площадь полоски вычисляется следующим образом: если радиус равен  $r$ , то толщина по-



Фиг. 32.1. Площадь кольца на сфере, равная  $2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ .

лоски равна  $r d\theta$ , а длина  $2\pi r \sin \theta$ , поскольку радиус кольцевой полоски есть  $r \sin \theta$ . Таким образом, площадь полоски равна

$$dA = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta. \quad (32.3)$$

Умножая поток [мощность на  $1 \text{ м}^2$ , согласно формуле (32.2)] на площадь полоски, найдем энергию, излучаемую в интервале углов  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ ; далее нужно проинтегрировать по всем углам  $\theta$  от 0 до  $180^\circ$ :

$$P = S dA = \frac{q^2 a'^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta. \quad (32.4)$$

При вычислении  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$  воспользуемся равенством  $\sin^3 \theta = (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta$  и в результате получим  $\frac{4}{3}$ . Отсюда окончательно

$$P = \frac{q^2 a'^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}. \quad (32.5)$$

Необходимо сделать несколько замечаний по поводу этого выражения. Прежде всего, поскольку  $\mathbf{a}'$  есть вектор, то  $a'^2$  в формуле (32.5) означает  $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'$ , т. е. квадрат длины вектора. Во-вторых, в формулу (32.2) для потока входит ускорение, взятое с учетом запаздывания, т. е. ускорение в тот момент времени, когда была излучена энергия, проходящая сейчас через поверхность сферы. Может возникнуть мысль, что энергия действительно была излучена точно в указанный момент времени. Но это не совсем правильно. Момент излучения нельзя определить точно. Можно вычислить результат только такого движения, например колебания и т. п., где ускорение в конце концов исчезает. Следовательно, мы можем найти только полный поток энергии за весь период колебаний, пропорциональный среднему за период квадрату ускорения. Поэтому  $a'^2$  в (32.5) должно означать среднее по времени от квадрата ускорения. Для такого движения, когда ускорение

вначале и в конце обращается в нуль, полная излученная энергия равна интегралу по времени от выражения (32.5).

Посмотрим, что дает формула (32.5) для осциллирующей системы, для которой ускорение  $a'$  имеет вид  $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$ . Среднее за период от квадрата ускорения равно (при возведении в квадрат надо помнить, что на самом деле вместо экспоненты должна входить ее действительная часть — косинус, а среднее от  $\cos^2 \omega t$  дает  $1/2$ ):

$$\langle a'^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega^4 x_0^2.$$

Следовательно,

$$P = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (32.6)$$

Эти формулы были получены сравнительно недавно — в начале XX века. Это замечательные формулы, они имели огромное историческое значение, и о них стоило бы почитать в старых книгах по физике. Правда, там использовалась другая система единиц, а не система СИ. Однако в конечных результатах, относящихся к электронам, эти осложнения можно исключить с помощью следующего правила соответствия: величина  $q_e^2/4\pi\epsilon_0$ , где  $q_e$  — заряд электрона (в кулонах), раньше записывалась как  $e^2$ . Легко убедиться, что в системе СИ значение  $e$  численно равно  $1,5188 \cdot 10^{-14}$ , поскольку мы знаем, что  $q_e = 1,60206 \cdot 10^{-19}$  и  $1/4\pi\epsilon_0 = 8,98748 \cdot 10^9$ . В дальнейшем мы будем часто пользоваться удобным обозначением

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (32.7)$$

Если это численное значение  $e$  подставить в старые формулы, то все остальные величины в них можно считать определенными в системе СИ. Например, формула (32.5) прежде имела вид  $P = \frac{2}{3} e^2 a^2 / c^3$ . А потенциальная энергия протона и электрона на расстоянии  $r$  есть  $q_e^2 / 4\pi\epsilon_0 r$  или  $e^2 / r$ , где  $e = 1,5188 \cdot 10^{-14}$  ед. СИ.

### § 3. Радиационное затухание

Заряд, закрепленный на пружине с собственной частотой  $\omega_0$  (или электрон в атоме), даже в абсолютно пустом пространстве не сможет колебаться бесконечно долго, поскольку, колеблясь, он теряет энергию на излучение. Никаких сил сопротивления в обычном смысле этого слова, никакой вязкости здесь нет. Но колебания не будут происходить «вечно», вследствие излучения они будут медленно замирать.

А насколько медленно? Определим для осциллятора величину  $Q$ , вызванную так называемым радиационным сопротивлением или радиационным затуханием. Для любой колеблющейся системы величина  $Q$  равна энергии системы в данный момент времени, деленной на потери энергии, отнесенные к 1 рад:

$$Q = \frac{W}{dW/d\varphi}.$$

Запишем  $Q$  по-другому, пользуясь для этого равенством  $dW/d\varphi = (dW/dt)/(d\varphi/dt) = -(dW/dt)/\omega$ :

$$Q = -\frac{\omega W}{dW/dt}. \quad (32.8)$$

Если  $Q$  задано, то легко получить закон спадания энергии колебаний:  $dW/dt = (-\omega/Q)W$ , откуда следует  $W = W_0 e^{-\omega t/Q}$ ; здесь  $W_0$  — начальная энергия (при  $t = 0$ ).

Чтобы найти  $Q$  для излучающего осциллятора, вернемся к формуле (32.8) и подставим вместо  $dW/dt$  выражение (32.6).

А что нужно взять в качестве энергии  $W$  осциллятора? Кинетическая энергия осциллятора равна  $1/2 mv^2$ , а средняя кинетическая энергия равна  $m\omega^2 x_0^2/4$ . Но мы помним, что полная энергия осциллятора равна средней кинетической плюс средняя потенциальная, причем обе они для осциллятора равны; поэтому полная энергия равна

$$W = \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2. \quad (32.9)$$

Какую частоту следует подставить в наши формулы? Мы возьмем собственную частоту  $\omega_0$ , потому что практически это и есть частота излучения атома, а вместо  $m$  подставим  $m_e$ . После ряда сокращений эта формула приводится к виду

$$\frac{1}{Q} = \frac{4\pi e^2}{3\lambda m_e c^2}. \quad (32.10)$$

(Для большей ясности и из соображений близости к исторически принятой форме мы ввели величину  $e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$  и записали  $2\pi/\lambda$  вместо  $\omega_0/c$ .) Поскольку величина  $Q$  безразмерна, множитель  $e^2/m_e c^2$ , зависящий только от массы и заряда электрона и выражающий его внутренние свойства, обязан иметь размерность длины. Он был назван *классическим радиусом электрона*, потому что в старых моделях электрона радиационное сопротивление пытались объяснить действием одной части электрона на другие его части, для чего размеры электрона приходилось выбирать порядка  $e^2/m_e c^2$ . Но эта величина потеряла свой прежний смысл, и никто теперь не

считает, что электрон *имеет* такой радиус. Численное значение классического радиуса электрона следующее:

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ м.} \quad (32.11)$$

Вычислим теперь значение  $Q$  для атома, излучающего видимый свет, например для атома натрия. Длина волны излучения натрия равна примерно 6000 Å и находится в желтой части спектра; эта величина довольно типична. Отсюда

$$Q = \frac{3\lambda}{4\pi r_0} \approx 5 \cdot 10^7, \quad (32.12)$$

т. е. для атомов  $Q$  порядка  $10^8$ . Это значит, что атомный осциллятор колеблется  $10^8$  рад, или примерно  $10^7$  периодов, прежде чем его энергия уменьшится в  $1/e$  раз. Частота колебаний света  $\nu = c/\lambda$  при длине волны 6000 Å составляет  $10^{15}$  гц, а следовательно, время жизни, т. е. время, за которое энергия уменьшится в  $1/e$  раз, есть величина порядка  $10^{-8}$  сек.

Примерно за такое же время высвечиваются свободные атомы в обычных условиях. Проведенная оценка справедлива только для атомов в пустом пространстве, не подверженных никаким внешним воздействиям. Если электрон находится в твердом теле, он сталкивается с другими атомами и электронами, и тогда возникает добавочное сопротивление и затухание будет другим.

Величина эффективного сопротивления  $\gamma$ , определяющая сопротивление осциллятора, может быть найдена из соотношения  $1/Q = \gamma/\omega_0$ ; вспомним, что именно  $\gamma$  определяет ширину резонансной кривой (см. фиг. 23.2)\*. Итак, мы вычислили *ширины спектральных линий* для свободно излучающих атомов! Из равенства  $\lambda = 2\pi c/\omega$  получаем

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c \Delta\omega}{\omega^2} = \frac{2\pi c \gamma}{\omega_0^2} = \frac{2\pi c}{Q\omega_0} = \frac{\lambda}{Q} = \frac{4\pi r_0}{3} = 1,18 \cdot 10^{-14} \text{ м.} \quad (32.13)$$

#### § 4. Независимые источники

Прежде чем перейти ко второй теме этой главы — расхождению света, обсудим частный случай явления интерференции, который мы до сих пор не рассматривали. Речь пойдет о таком случае, когда интерференция *не возникает*. Пусть имеются два источника  $S_1$  и  $S_2$  с амплитудами поля  $A_1$  и  $A_2$ . Излучение регистрируется в некоторой точке, в которую оба луча приходят с фазами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (фазы зависят от истинного момента излучения и времени запаздывания, являющегося функцией точки наблюдения).

\* Выпуск 2, стр. 129.

Наблюдаемая интенсивность излучения получается сложением двух комплексных векторов с модулями  $A_1$  и  $A_2$  и фазами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (как в гл. 30) и возведением в квадрат; таким образом, энергия пропорциональна

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (32.14)$$

Если бы не было перекрестного члена  $2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ , полная энергия в данном направлении была бы равна сумме энергий  $A_1^2 + A_2^2$ , излучаемых по отдельности каждым источником, что соответствует нашим обычным представлениям. Иначе говоря, интенсивность света, падающего на предмет от двух источников, совпала бы с суммой интенсивностей обоих источников. С другой стороны, если оставить перекрестный член, суммы интенсивностей не получится, потому что возникнет интерференция. В тех случаях, когда перекрестный член роли не играет, интерференция, казалось бы, отсутствует. Фактически же она возникает всегда, но подчас ее не удается наблюдать.

Приведем несколько примеров. Пусть два источника находятся друг от друга на расстоянии 7 000 000 000 длин волн, что в общем вполне осуществимо. Тогда в некотором фиксированном направлении разность фаз принимает вполне определенное значение. Но если сдвинуться от этого направления хоть на волосок, скажем на несколько длин волн (совсем пустячное расстояние: зрачок нашего глаза настолько велик, что действие лучей можно усреднять на расстояниях, много больших длины волны), то разность фаз станет другой и значение косинуса резко изменится. При вычислении *средней* интенсивности в маленькой области пространства косинус в точках этой области будет все время колебаться — плюс, минус, плюс, минус — и при усреднении даст нуль.

Итак, усреднение по области, в которой фаза быстро меняется от точки к точке, обращает интерференционный член в нуль.

Другой пример. Предположим, что два источника колеблются и излучают радиоволны независимо друг от друга, т. е. они представляют собой не один осциллятор, питающийся от двух проводов (благодаря чему разность фаз остается постоянной), а именно два независимых источника. И пусть источники не настроены *точно* на одну и ту же частоту (равенства частот очень трудно достигнуть, если не соединять источники в одной цепи). Именно при этих условиях мы и будем называть источники *независимыми*. Естественно, что из-за сдвига по частоте фазы источников будут различаться, даже если вначале они и совпадали: одна из фаз начнет опережать другую и очень скоро источники окажутся в противофазе, а при дальнейшем опережении фазы снова

сравняются и т. д. Разность фаз источников будет, таким образом, дрейфовать со временем, но при измерениях в течение больших промежутков времени приборы не смогут уследить за ними, так как подъемы и спады интенсивности, похожие на «биения» звука, происходят слишком быстро. Мы должны усреднить по промежутку времени наблюдения, но при этом интерференционный член снова выпадает.

Другими словами, при усреднении по разности фаз интерференционный член обращается в нуль!

Имеется много книг по физике, в которых утверждается, что два различных источника света никогда не интерферируют. Это утверждение не отражает физического закона, а просто характеризует ту чувствительность экспериментальной техники, которая существовала к моменту написания книги. В источнике же света происходит следующее: сначала излучает один атом, затем другой и т. д. Как мы показали выше, атомы излучают последовательность волн за время около  $10^{-8}$  сек; через  $10^{-8}$  сек какой-то атом высвечивается, его место занимает другой, затем третий и т. д. Поэтому фаза может оставаться постоянной примерно только в течение  $10^{-8}$  сек. При усреднении за промежутки времени, много большие  $10^{-8}$  сек, интерференционный член от двух источников выпадает, так как фазы источников за это время много раз изменятся. Световые ячейки Керра позволяют регистрировать свет с очень большой скоростью, и с их помощью удалось показать, что интерференционный член меняется за время порядка  $10^{-8}$  сек. Но большинство приборов не может регистрировать свет в столь малые интервалы времени и, естественно, не обнаруживает интерференции. Для глаза время усреднения — порядка  $1/10$  сек, поэтому увидеть интерференцию обычных источников совершенно невозможно.

Недавно удалось создать источники света, в которых атомы излучают *одновременно*, и поэтому можно обойти эффект усреднения. Принцип устройства подобных источников весьма сложен, его можно понять, только зная законы квантовой механики. Называются эти источники *лазерами*. Частота интерференции испущенного лазером света, т. е. время, в течение которого фаза остается постоянной, много больше  $10^{-8}$  сек. Оно может быть равно сотой, десятой доле секунды и даже целой секунде; с помощью обычных световых ячеек можно определить частоту интерференции между двумя лазерами. Легко также заметить биения при сложении света от двух лазеров. Вне всякого сомнения, скоро станет возможно получать столь медленные биения, что, направив на стенку свет от двух лазеров, можно будет увидеть их невооруженным глазом в виде периодических ослаблений и увеличений яркости пятна!



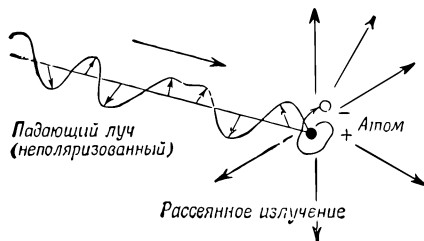
Еще один пример погашения интерференции представляет собой сложение света не *двух*, а *многих* источников. В этом случае  $A_R^2$  равно квадрату суммы большого числа амплитуд (комплексных чисел), т. е. сумме квадратов плюс перекрестные члены от каждой пары. При определенных условиях перекрестные члены могут погаситься и интерференция исчезнет. Например, когда источники распределены в пространстве случайным образом, тогда разность фаз  $A_2$  и  $A_3$  хотя и постоянна, но значительно отличается от разности фаз  $A_1$  и  $A_2$  и т. д. В результате получается много косинусов — одни из них положительные, другие отрицательны, а в сумме они почти целиком сокращаются.

Вот почему во многих случаях мы не замечаем эффекта интерференции, а полная интенсивность оказывается равной сумме интенсивностей всех источников.

## § 5. Рассеяние света

Приведенные выше примеры помогут нам понять одно явление, которое возникает в воздухе в результате неупорядоченного расположения атомов. В главе о показателе преломления мы говорили, что падающий свет вызывает излучение атомов. Электрическое поле падающего пучка раскачивает электроны вверх и вниз, и они, двигаясь с ускорением, начинают излучать. Это рассеянное излучение образует пучок света, движущийся от него по фазе, благодаря чему и возникает показатель преломления.

Но что можно сказать об интенсивности рассеянного света в других направлениях? Если атомы очень правильно чередуются, образуя красивый геометрический узор, интенсивность во всех остальных направлениях равна нулю, потому что результат сложения множества векторов с меняющимися фазами сводится к нулю. Но если расположение атомов *беспорядочное*, интенсивность в любом направлении, как мы уже говорили, равна *сумме* интенсивностей от каждого атома в отдельности. Более того, атомы газа постоянно движутся, и разность фаз двух атомов, принимающая определенное значение в некоторый момент времени, в следующий момент



Фиг. 22.2. Луч, падающий на атом, заставляет заряды (электроны) атома колебаться. Движущиеся электроны в свою очередь излучают во все стороны.

уже изменится, поэтому при усреднении по времени исчезает *каждый* перекрестный член в отдельности. Следовательно, для определения интенсивности света, рассеянного газом, можно взять рассеяние на *одном атоме* и умножить интенсивность на число атомов.

Как уже отмечалось, голубой цвет неба объясняется именно рассеянием света в воздухе. Солнечный свет проходит сквозь воздух, и, когда мы смотрим в сторону от Солнца, например перпендикулярно падающему лучу, мы видим свет голубой окраски; попробуем теперь подсчитать *интенсивность* рассеянного света и понять, *почему он голубой*.

Падающий луч света с напряженностью электрического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$  в точке расположения атома, как известно, заставляет электрон колебаться вверх и вниз (фиг. 32.2). С помощью уравнения (23.8) находим амплитуду колебаний

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{q_e \mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}. \quad (32.15)$$

В принципе можно учесть затухание и ввести сумму по частотам, считая, что атом действует как совокупность осцилляторов с разными частотами. Однако для простоты ограничимся случаем одного осциллятора и пренебрежем затуханием. Тогда выражение для амплитуды принимает вид, которым мы уже пользовались при вычислении показателя преломления:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{q_e \hat{\mathbf{E}}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (32.16)$$

Из этой формулы для  $\hat{\mathbf{x}}$  и равенства (32.2) легко получить интенсивность рассеяния в заданном направлении.

Однако, чтобы сэкономить время, вычислим сначала *полную интенсивность* рассеяния *во всех* направлениях. Полную энергию, рассеиваемую атомом за 1 сек во всех направлениях, можно получить из формулы (32.6). После перегруппировки членов выражение для энергии принимает вид

$$\begin{aligned} P &= \left[ \left( \frac{q_e^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \right) \frac{q_e^2 E_0^2}{m_e^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right] = \\ &= \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \right) \frac{8\pi}{3} \left( \frac{q_e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 c^4} \right) \left[ \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right] = \\ &= \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \right) \left( \frac{8}{3} \pi r_0^2 \right) \left[ \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (32.17)$$

Мы приводим результат в такой форме потому, что она удобна для запоминания: прежде всего, рассеиваемая энергия пропорциональна квадрату падающего поля. Что это

означает? Очевидно, квадрат поля пропорционален энергии падающего пучка, проходящей за 1 сек. (В самом деле, энергия, падающая на  $1 \text{ м}^2$  за 1 сек, равна произведению  $\epsilon_0 c$  и среднего квадрата электрического поля  $\langle E^2 \rangle$ ; если максимальное значение  $E$  есть  $E_0$ , то  $\langle E^2 \rangle = 1/2 E_0^2$ .) Другими словами, рассеиваемая энергия пропорциональна плотности падающей энергии; чем сильнее солнечный свет, тем ярче кажется небо.

А какая доля падающего света рассеивается электроном? Вообразим мишень с площадью  $\sigma$ , помещенную на пути луча (не настоящую мишень, сделанную из какого-то вещества, потому что она приведет к дифракции света и т. п., а воображаемую мишень, нарисованную в пространстве). Количество энергии, проходящее через поверхность  $\sigma$ , пропорционально падающей интенсивности и площади мишени:

$$P = \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \right) \sigma. \quad (32.18)$$

А теперь давайте условимся: полное количество энергии, рассеиваемое атомом, мы приравняем энергии падающего пучка, проходящей через некоторую площадь; указав величину площади, мы тем самым определим рассеиваемую энергию. В такой форме ответ не зависит от интенсивности падающего пучка; он выражает отношение рассеиваемой энергии к энергии, падающей на  $1 \text{ м}^2$ . Другими словами,

$$\frac{\text{Полная энергия, рассеиваемая в 1 сек}}{\text{Энергия, падающая на } 1 \text{ м}^2 \text{ за 1 сек}} = \text{Площадь.}$$

Смысл этой площади заключается в том, что, если бы вся попадающая на нее энергия отбрасывалась в сторону, она рассеивала бы столько энергии, сколько рассеивает атом.

Эта площадь называется *эффективным сечением рассеяния*. Понятие эффективного сечения используется всегда, когда эффект пропорционален интенсивности падающего пучка. В таких случаях количественный выход эффекта задается площадью эффективной области, выхватывающей из пучка такую часть, чтобы она равнялась выходу. Это ни в коем случае не означает, что наш осциллятор на самом деле *занимает* подобную площадь. Если бы свободный электрон просто качался взад и вперед, ему бы не соответствовала никакая площадь. Это лишь способ выражения результата через определенную величину; мы указываем площадь, на которую должен упасть пучок, чтобы получилась известная энергия рассеяния. Итак, в нашем случае

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (32.19)$$

( $s$  — рассеяние).

Рассмотрим несколько примеров. Прежде всего, когда собственная частота очень мала или электрон вообще свободен, что соответствует  $\omega_0 = 0$ , частота  $\omega$  выпадает и сечение  $\sigma$  становится константой. В этом пределе сечение носит название *томпсоновского сечения рассеяния*. Оно равно площади квадрата со стороной около  $10^{-15}$  м, т. е. площади  $10^{-30}$  м<sup>2</sup>, а это очень мало!

С другой стороны, при рассеянии света в воздухе собственные частоты осцилляторов, как мы уже говорили, больше частот обычного света. Отсюда следует, что величиной  $\omega^2$  в знаменателе можно пренебречь и сечение оказывается пропорциональным *четвертой степени* частоты. Значит, свет с частотой, в два раза большей, рассеивается в *шестнадцать раз* интенсивнее, а это уже вполне ощутимая разница. Таким образом, голубой свет, частота которого примерно вдвое выше частоты света у красного конца спектра, рассеивается значительно интенсивнее, чем красный свет. И, взглянув на небо, мы видим только изумительную синеву!

Стоит сказать еще несколько слов по поводу полученных результатов. Ответьте, во-первых, почему мы видим *облака*? Откуда они берутся? Всем известно, что возникают они за счет конденсации водяных паров. Но водяные пары, конечно, находились в атмосфере еще *до* конденсации. Почему же мы их не видели? А вот после конденсации их прекрасно видно. Не были видны — и вдруг *появились*. Как видите, тайна происхождения облаков — это совсем не детский вопрос, вроде «Папа, откуда взялась вода?», и ее нужно объяснить.

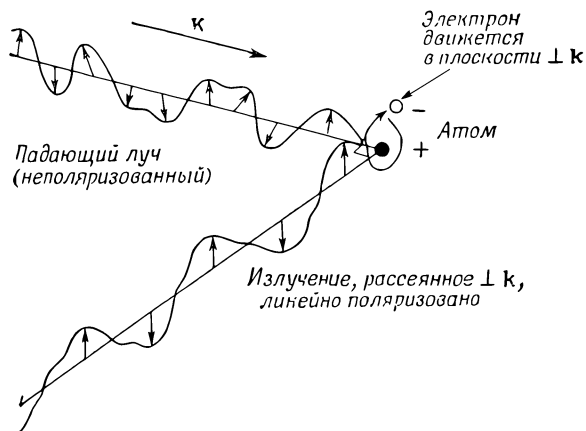
Мы только что говорили, что каждый атом рассеивает свет, и, естественно, водяной пар тоже должен рассеивать свет. Загадка состоит в том, почему вода, конденсированная в облаках, рассеивает свет *сильнее в такое огромное число раз?*

Давайте посмотрим, что получится, если вместо одного атома взять скопление атомов, скажем два атома, расположенных очень близко друг к другу по сравнению с длиной волны. Вспомним, что размеры атомов порядка 1 А, а длина волны света порядка 5000 А, так что несколько атомов вполне могут образовать сгусток, где расстояние между ними будет много меньше длины волны. Под действием электрического поля *оба атома будут колебаться совместно, как целое*. Рассеиваемое электрическое поле окажется равным сумме двух полей с одинаковой фазой, т. е. удвоенной амплитуде одного атома, а *энергия увеличится в четыре*, а не в два раза по сравнению с энергией излучения от отдельного атома! Таким образом, сгустки атомов излучают или рассеивают больше энергии, чем столько же атомов по отдельности. Наше старое утверждение, что фазы двух атомов никак не связаны, основывалось на предположении о большой разности фаз двух

атомов, что справедливо только, когда расстояние между ними порядка нескольких длин волн или когда они движутся. Если же атомы находятся совсем рядом, они излучают обязательно с одной фазой, и возникает усиливающая интерференция, что приводит к увеличению рассеяния.

Пусть в сгустке, крошечной капельке воды, содержится  $N$  атомов; тогда под действием электрического поля они будут двигаться, как и раньше, все вместе (влияние атомов друг на друга для нас несущественно, мы хотим только выяснить суть дела). Амплитуда рассеяния каждого атома одна и та же; следовательно, поле рассеянной волны оказывается в  $N$  раз больше. *Интенсивность* рассеиваемого света увеличивается в  $N^2$  раз. Если бы атомы находились далеко друг от друга, мы получили бы увеличение в  $N$  раз по сравнению со случаем отдельного атома, а здесь возникает  $N^2$  раз! Иначе говоря, рассеяние каплями воды (по  $N$  молекул в каждой) в  $N$  раз больше рассеяния тех же атомов по отдельности. Таким образом, чем больше вода конденсируется, тем больше рассеяние. Может ли рассеяние расти *до бесконечности*? Нет, конечно! На каком же этапе наши рассуждения станут неверными? *Ответ*: когда водяная капля увеличится настолько, что размеры ее окажутся порядка длины волны, колебания атомов будут происходить с разными фазами, потому что расстояние между ними станет слишком большим. Таким образом, с увеличением размера каплей рассеяние растёт до тех пор, пока капли не станут порядка длины волны, а затем с ростом каплей рассеяние увеличивается гораздо медленнее. Кроме того, голубой свет в рассеянной волне начинает исчезать, потому что для коротких волн предел роста рассеяния наступает раньше (у менее крупных капель), чем для длинных волн. Хотя каждый атом рассеивает короткие волны сильнее, чем длинные, капли с размерами больше длины волны интенсивнее рассеивают свет вблизи красного конца спектра, и с ростом каплей цвет рассеянного излучения меняется с голубого на красный (становится более красным).

Это явление можно наглядно продемонстрировать. Нужно взять очень маленькие частички вещества, которые затем постепенно будут расти. Для этого воспользуемся раствором гипосульфата натрия в серной кислоте, в котором осаждаются крохотные зернышки серы. Когда сера начинает осаждаться, зернышки еще очень малы и рассеянный свет имеет синеватый оттенок. С ростом числа и величины частиц в осадке свет сначала становится более интенсивным, а затем приобретает беловатый оттенок. Кроме того, проходящие лучи теряют синюю составляющую. Именно поэтому закат бывает красным; солнечные лучи, прошедшие к нам через толщу атмосферы, успели рассеять голубой свет и приобрели оранжевую окраску.



Ф и г. 32.3. Возникновение поляризации у рассеянного луча, направленного под прямым углом к падающему лучу.

Наконец, при рассеянии возникает еще одно важное явление, которое, по существу, относится к поляризации — теме следующей главы. Однако оно так интересно, что имеет смысл сказать о нем сейчас. Оказывается, что электрическое поле рассеянного света колеблется преимущественно в одном определенном направлении. Пусть электрическое поле в падающей волне колеблется в каком-то направлении, тогда осциллятор будет совершать свои вынужденные колебания в том же направлении. Если теперь мы будем смотреть под прямым углом к падающему лучу, то увидим *поляризованный* свет, т. е. свет, в котором электрическое поле колеблется только в одном направлении. Вообще говоря, атомы могут осциллировать в любом направлении, лежащем в плоскости, перпендикулярной падающему лучу, но, когда они движутся прямо к нам или от нас, мы их не видим. Таким образом, хотя электрическое поле в падающем луче осциллирует во всевозможных направлениях (в этом случае говорят о неполяризованном свете), свет, рассеивающийся под углом  $90^\circ$ , содержит колебания только в одном направлении (фиг. 32.3)!

Есть такое вещество, называемое *поляроидом*, через которое проходит только волна с электрическим полем, параллельным некоторой оси. С помощью поляроида можно заметить поляризацию и, в частности, показать, что свет, рассеянный нашим раствором гипосульфата, действительно сильно поляризован.

## ПОЛЯРИЗАЦИЯ

### § 1. Вектор электрического поля световой волны

В этой главе мы рассмотрим круг явлений, связанных с векторным характером электрического поля световой волны. В предыдущих главах направление колебаний электрического поля нас не интересовало, правда, мы отметили, что вектор электрического поля лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения света. Но нам не нужно было знать направление вектора более точно. Теперь мы перейдем к изучению явлений, в которых главную роль играет определенное направление колебаний электрического вектора.

В идеально монохроматической световой волне электрическое поле колеблется с определенной частотой, а так как  $x$ - и  $y$ -компоненты поля могут колебаться независимо с одной и той же частотой, то сначала мы рассмотрим сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний. Какое электрическое поле возникает при сложении колебаний  $x$ - и  $y$ -компонент поля с одинаковой частотой? Складывая колебание в направлении  $x$  и колебание с той же фазой в направлении  $y$ , получаем в плоскости  $xy$  колебание в новом направлении.

На фиг. 33.1 показано, как происходит сложение колебаний с разными амплитудами в направлениях  $x$  и  $y$ . Но примеры, представленные на этом рисунке, не исчерпывают всех возможностей: до сих пор предполагалось, что колебания вдоль осей  $x$  и  $y$  находятся в *одной фазе*, но это совсем не обязательно. Может случиться, что  $x$ - и  $y$ -колебания происходят с разными фазами.

В этом последнем случае вектор электрического поля описывает эллипс, что можно про-

§ 1. Вектор электрического поля световой волны

§ 2. Поляризация рассеянного света

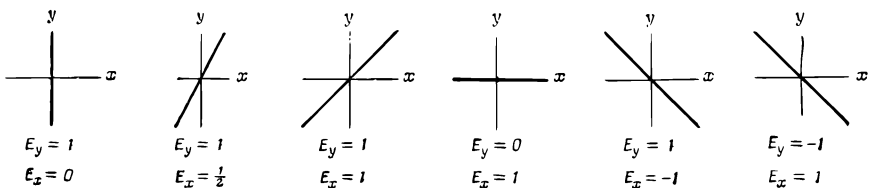
§ 3. Двойное лучепреломление

§ 4. Поляризаторы

§ 5. Оптическая активность

§ 6. Интенсивность отраженного света

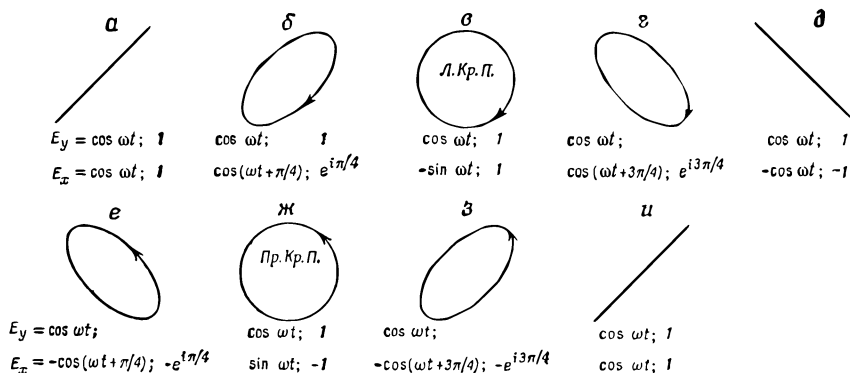
§ 7. Аномальное преломление



Фиг. 33.1. Сложение колебаний в направлениях  $x$  и  $y$ , когда разность фаз между ними равна нулю.

иллюстрировать на следующем простом примере. Подвесим на длинной веревке мяч, чтобы он мог свободно колебаться в горизонтальной плоскости; колебания будут носить синусоидальный характер. Представим себе мысленно оси  $x$  и  $y$  в горизонтальной плоскости колебаний мяча с началом координат в точке покоя мяча. Выбирая соответствующее начальное смещение и начальную скорость мяча, можно заставить мяч колебаться по оси  $x$ , по оси  $y$  или по любому другому направлению в плоскости  $xy$  с одной и той же частотой, равной частоте маятника. Эти колебания мяча аналогичны колебаниям электрического вектора, приведенным на фиг. 33.1. В каждом случае колебания в направлениях  $x$  и  $y$  достигают максимума одновременно и, следовательно, оба колебания находятся в фазе. Но известно, что самый общий тип движения мяча — движение по эллипсу — возникает, когда колебания в направлениях  $x$  и  $y$  происходят с *разными* фазами.

На фиг. 33.2 показано сложение колебаний по осям  $x$  и  $y$  для разных значений сдвига фаз между ними. Во всех примерах электрический вектор описывает эллипс. Колебание по



Фиг. 33.2. Сложение колебаний в направлениях  $x$  и  $y$  с разными фазами.

Компоненты  $E_x$  и  $E_y$  записаны и в действительных и в комплексных обозначениях.



прямой есть тоже частный случай эллиптического, когда сдвиг фаз равен нулю (или целому кратному  $\pi$ ); при равных амплитудах и сдвиге фаз  $90^\circ$  (или нечетном числе  $\pi/2$ ) происходит движение по окружности.

На фиг. 33.2 компоненты электрического поля в направлениях  $x$  и  $y$  записаны в виде комплексных чисел, что оказывается очень удобным для явного выделения разности фаз. В этих обозначениях не следует только путать действительную и мнимую части с  $x$ - и  $y$ -компонентами поля. Изображенные на фиг. 33.2 компоненты поля по осям  $x$  и  $y$  есть реальные физические поля, которые можно измерить. Действительная и мнимая части вектора электрического поля введены только для математического удобства, и физического смысла такое разделение не имеет.

Сделаем несколько замечаний о терминологии. Свет называется *линейно поляризованным* (иногда плоско поляризованным), если электрическое поле колеблется по прямой линии; на фиг. 33.1 показан случай линейной поляризации. Когда вектор электрического поля описывает эллипс, говорят об *эллиптической поляризации*. Если же электрический вектор описывает окружность, мы имеем *круговую поляризацию*. Если электрический вектор при своем движении в световой волне крутится как правосторонний винт, говорят о правой круговой поляризации. На фиг. 33.2, *ж* приведен пример правой круговой поляризации, а на фиг. 33.2, *в* — пример левой круговой поляризации. В обоих случаях свет движется от плоскости страницы к читателю. Наше определение левой и правой круговых поляризаций согласуется с подобными определениями для всех других частиц в современной физике, для которых можно ввести понятие поляризации (например, для электронов). Однако в курсах оптики иногда используются прямо противоположные определения, поэтому читателю следует с осторожностью относиться к терминам *левая* и *правая поляризация*.

Мы описали линейную, круговую и эллиптическую поляризации света и охватили, таким образом, все возможные случаи состояния света, кроме одного, — случая *неполяризованного* света. Ну, а как же может получиться неполяризованный свет, если известно, что колебания непременно происходят по тому или иному эллипсу?

Возьмем не вполне монохроматический свет, когда сдвиг фаз  $x$ - и  $y$ -колебаний непостоянен и электрический вектор колеблется произвольным образом; тогда поляризация света будет все время меняться. Вспомним, что один атом излучает свет за  $10^{-8}$  сек, и, если все атомы будут излучать свет с разной поляризацией, поляризация полного пучка света будет меняться через каждые  $10^{-8}$  сек. Когда поляризация света

изменяется столь быстро, что ее невозможно измерить, говорят о неполяризованном свете, потому что все эффекты поляризации усредняются и сводятся к нулю. Ни один из интерференционных эффектов при сложении поляризаций не проявляется для неполяризованного света. В то же время само определение неполяризованного света подразумевает, что экспериментально невозможно установить, поляризован свет или нет.

## § 2. Поляризация рассеянного света

Первый пример поляризационных явлений, который мы уже ранее обсуждали, есть рассеяние света. Рассмотрим проходящий в воздухе пучок света, например солнечного света. Электрическое поле возбуждает колебания зарядов в воздухе, и в результате этих колебаний излучается свет, интенсивность которого максимальна в плоскости, перпендикулярной движению зарядов. Пучок солнечного света неполяризован, т. е. направление поляризации постоянно меняется, а следовательно, изменяется и направление колебаний зарядов в воздухе. Возьмем пучок света, рассеянный под углом  $90^\circ$ ; он возникает от излучения только тех частиц воздуха, которые колеблются перпендикулярно линии зрения наблюдателя, и, следовательно, пучок рассеянного света будет поляризован в направлении этих колебаний. Таким образом, рассеяние дает нам пример получения поляризованного света.

## § 3. Двойное лучепреломление

Есть еще один интересный факт из области поляризационных явлений. Встречаются среды, показатель преломления которых различен для света, линейно поляризованного в том или другом направлении. Допустим, например, что имеется некий материал, состоящий из вытянутых несферических молекул, длина которых больше их ширины; предположим, что молекулы в веществе выстроены так, чтобы их большие оси оказались параллельными. Что произойдет, когда на тело подействует осциллирующее электрическое поле? Предположим, что такая структура молекул способствует тому, что электроны в материале легче поддаются колебаниям вдоль оси молекулы, чем поперек нее. При таких условиях следует ожидать, что поляризация в одном направлении будет вызывать один эффект, а поляризация, направленная под прямым углом к первой, — совсем другой. Назовем направление осей молекул *оптической осью*. Показатель преломления принимает разные значения в зависимости от того, направлена ли поляризация вдоль оптической оси или перпендикулярно ей.

Среда с такими свойствами называется *двойкопреломляющей*. Она обладает двумя разными способами преломления, т. е. двумя показателями преломления в зависимости от поляризации света в среде. Какие материалы обладают этим свойством? Из разных соображений вытекает, что двойкопреломляющая среда должна иметь некоторое количество ориентированных несферических молекул. Ясно, что кубический кристалл, имеющий симметрию куба, не может быть двойкопреломляющим. А вот длинные игловидные кристаллы, безусловно, содержат несимметричные молекулы, и в них легко наблюдать эффект двойного лучепреломления.

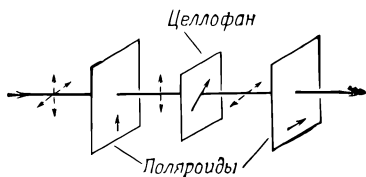
Попробуем сообразить, что получится, если направить поляризованный луч на пластинку двойкопреломляющего материала. Если поляризация параллельна оптической оси, свет пройдет через пластинку с одной скоростью, а если поляризация перпендикулярна — с другой скоростью. Интересная ситуация возникает, если луч света поляризован, например, под углом в  $45^\circ$  к направлению оптической оси. Тогда поляризация, как известно, представляется в виде суммы поляризации в направлении  $x$  и  $y$  с равными амплитудами и фазами, что показано на фиг. 33.2, *а*. Поскольку лучи с поляризациями вдоль осей  $x$  и  $y$  движутся в среде с разной скоростью, фазы обеих компонент поля будут расти по-разному.

Таким образом, несмотря на совпадение фаз  $x$ - и  $y$ -компонент вначале, внутри среды между ними появится разность фаз, пропорциональная глубине проникновения света в среду. Изменение поляризации света в процессе прохождения через среду показано в серии рисунков на фиг. 33.2. Если пластинка имеет такую толщину, что разность фаз на выходе между поляризациями по осям  $x$  и  $y$  равна  $90^\circ$  (фиг. 33.2, *в*), то свет выйдет из пластинки поляризованным по кругу. Пластинки такой толщины называются пластинками в четверть волны, поскольку они приводят к разности фаз в одну четвертую цикла. Пропуская линейно поляризованный свет через две пластинки в четверть волны, снова получаем линейно поляризованный свет, но направление поляризации повернется на прямой угол (это легко понять из фиг. 33.2, *в*).

Явление двойного лучепреломления легко продемонстрировать с помощью листка целлофана. Целлофан состоит из длинных молекул — волокон, и его структура неизотропна, поскольку волокна по большей части вытянуты в одном направлении. Для наблюдения явления двойного лучепреломления необходим пучок линейно поляризованного света, который трудно получить, пропуская неполяризованный свет через пластинку поляроида. О поляроиде мы еще будем говорить более подробно, а пока отметим одно его важное свойство: свет, поляризованный вдоль оси поляроида, проходит через

Фиг. 33.3. Схема эксперимента по двойному лучепреломлению в целлофане.

Векторы электрического поля световой волны изображены пунктирными стрелками. Направления поляризации, пропускаемые поляроидами, и оптические оси целлофана изображены сплошными стрелками. Падающий луч света неполяризован.



него почти свободно, а свет, поляризованный перпендикулярно оси, сильно поглощается поляридом. Когда неполяризованный свет пропускается через пластинку поляроида, то проходит только та часть света, колебания которой параллельны оси поляроида, поэтому прошедший через пластинку луч окажется линейно поляризованным. Это свойство поляроида используют также для определения направления поляризации линейно поляризованного света; кроме того, с помощью поляроида можно определить, есть ли у света вообще линейная поляризация или нет. Для этого достаточно пропустить свет через пластинку поляроида и поворачивать ее в плоскости, перпендикулярной лучу. Линейно поляризованный свет не может пройти через поляриод, когда ось поляроида перпендикулярна направлению поляризации луча. Повернув пластинку на  $90^\circ$ , мы увидим прошедший через нее луч лишь чуть-чуть менее ярким, чем падающий пучок света. Если яркость луча, пропущенного поляридом, не зависит от ориентации поляроида, падающий пучок света не имеет линейной поляризации.

Для демонстрации двойного лучепреломления в целлофане возьмем два поляроида и расположим их, как показано на фиг. 33.3. Из первого поляроида выходит линейно поляризованный пучок света; мы пропускаем его через целлофан, а затем через другой поляриод, чтобы учесть действие целлофана на линейно поляризованный свет. Сначала расположим оси поляридов перпендикулярно друг другу и уберем листок целлофана. Через второй поляриод свет не проходит совсем. Теперь поставим листок целлофана между поляридами и будем поворачивать его вокруг оси пучка света. При этом, вообще говоря, некоторая часть света будет все время проходить через второй поляриод. Имеются, однако, две ориентации листка целлофана, перпендикулярные друг другу, при которых свет через второй поляриод не проходит. Ясно, что эти ориентации целлофана не влияют на линейную поляризацию проходящего через него света и должны поэтому совпадать с направлением оптической оси целлофана и перпендикулярным к нему направлением.

Здесь мы предполагаем, что скорость света, проходящего через целлофан, различна для указанных двух направлений поляризации, но само направление поляризации при прохож-

дении света не меняется. Если выбрать промежуточную ориентацию целлофана где-то между двумя главными направлениями, как на фиг. 33.3, то через второй поляроид пройдет яркий пучок света.

Оказывается, толщина обычного целлофана, используемого в магазинах для упаковки, равна почти точно половине длины волны для большинства цветов в спектральном разложении белого света. Целлофан такой толщины поворачивает направление поляризации линейно поляризованного света на  $90^\circ$ , если это направление в падающем пучке образует угол  $45^\circ$  с оптической осью целлофана. Таким образом, выходящий из целлофана луч обладает как раз такой поляризацией, что может пройти второй поляроид.

Если в нашем опыте использовать пучок белого света, то только для одной компоненты его спектрального разложения толщина целлофана совпадет с половиной длины волны, и пучок, пропущенный вторым поляроидом, будет иметь цвет именно этой компоненты. Цвет пучка, прошедшего через наше устройство, будет зависеть от толщины листа целлофана, а эффективную толщину целлофана мы можем менять, наклоняя листок под некоторым углом и таким образом заставляя свет проходить больший путь внутри целлофана. При наклоне листка целлофана цвет пропущенного пучка меняется. Используя целлофан разной толщины, можно сконструировать фильтры, пропускающие лучи вполне определенного цвета. Эти фильтры обладают тем замечательным свойством, что они пропускают один цвет, когда оси двух поляроидов перпендикулярны, и дополнительный к нему цвет, когда оси поляроидов параллельны.

Системы ориентированных молекул имеют еще одно, на этот раз вполне практическое применение. Некоторые пластики состоят из очень длинных и сложных молекул, скрученных между собой. При очень тщательном проведении процесса затвердевания пластика молекулы, скручиваясь, образуют сплошную массу и ориентируются равномерно в самых разных направлениях, так что пластик обычно не проявляет свойства двойного лучепреломления. Но при затвердевании часто образуются дефекты и напряжения, которые приводят к некоторой неоднородности материала. Напряжения, возникающие в пластике, как бы вытягивают целую связку молекул, и молекулярные нити ориентируются преимущественно вдоль направления натяжения. Благодаря внутренним напряжениям пластик становится двоякопреломляющим, и эффект двойного лучепреломления можно наблюдать, пропуская через него поляризованный свет. Анализируя пропущенный пластиком пучок с помощью поляроида, мы заметим темные и светлые полосы (окрашенные в разные цвета, если берется пучок бе-

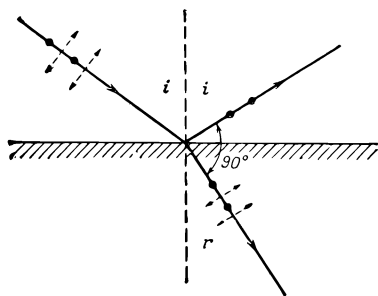
лого света). Если образец подвергнуть растяжению, вся совокупность полос начинает сдвигаться, а подсчитав полосы и определив место их наибольшего скопления, можно найти внутренние напряжения, возникающие в образце. Инженеры обычно используют это явление как способ определения напряжений в деталях, форма которых трудно поддается расчету.

Еще один интересный пример — двойное лучепреломление в жидкостях. Рассмотрим жидкость, состоящую из длинных асимметричных молекул, которые несут вблизи своих концов распределенный положительный или отрицательный заряд, т. е. молекулы являются электрическими диполями. Сталкиваясь, молекулы в жидкости принимают любую ориентацию, причем какого-либо преимущественного направления ориентации не существует. Но если приложить электрическое поле, молекулы начнут выстраиваться вдоль поля и в этот самый момент жидкость становится двоякопреломляющей средой. Взяв два поляроида и прозрачную ячейку с жидкостью такого сорта, можно создать устройство, которое пропускает свет только при включении электрического поля. В результате мы получаем электрический переключатель для света, который называют *ячейкой Керра*. А сам эффект, когда в жидкости возникает двойное лучепреломление под действием электрического поля, называется *эффектом Керра*.

#### § 4. Поляризаторы

До сих пор мы говорили о средах, показатель преломления которых различен для разных направлений поляризации падающего светового пучка. Большое значение для практических применений имеют и другие среды, у которых в зависимости от поляризации света меняется не только показатель преломления, но и коэффициент поглощения. Как и в случае двойного лучепреломления, легко понять, что поглощение может зависеть от направления вынужденных колебаний зарядов только в анизотропных средах. Первый, старый, ставший уже знаменитым пример — это турмалин, а другой — поляроид. Поляроид состоит из тонкого слоя маленьких кристаллов герпатита (соль йода и хинина), выстроенных своими осями параллельно друг другу. Эти кристаллы поглощают свет, когда колебания происходят в одном каком-то направлении, и почти не поглощают света, когда колебания совершаются в другом направлении.

Направим на поляроид пучок света, поляризованный под углом  $\theta$  к его оси. Какая интенсивность будет у пучка, прошедшего через поляроид? Разложим наш пучок света на две компоненты: одну с поляризацией, перпендикулярной той, которая проходит без ослабления (она пропорциональна  $\sin \theta$ ),



Ф и г. 33.4. Отражение линейно поляризованного света под углом Брюстера.

Направление поляризации дается пунктирными стрелками: круглые точки изображают поляризацию, перпендикулярную плоскости страницы.

и вторую — продольную компоненту, пропорциональную  $\cos \theta$ . Через поляризатор пройдет только часть, пропорциональная  $\cos \theta$ ; компонента, пропорциональная  $\sin \theta$ , поглотится. Амплитуда света, прошедшего через поляризатор, меньше амплитуды падающего света и получается из нее умножением на  $\cos \theta$ . Интенсивность света пропорциональна квадрату  $\cos \theta$ . Таким образом, если падающий свет поляризован под углом  $\theta$  к оси поляризатора, пропускаемая поляризатором доля интенсивности составляет  $\cos^2 \theta$  от полной. Доля интенсивности, поглощаемая в поляризаторе, есть, разумеется,  $\sin^2 \theta$ .

Интересный парадокс возникает в следующем опыте. Известно, что два поляризатора с осями, расположенными перпендикулярно друг другу, не пропускают света. Но если между такими поляризаторами поместить третий, ось которого направлена под углом  $45^\circ$  к осям двух других, часть света пройдет через нашу систему. Как мы знаем, поляризатор только поглощает свет, создать свет он не может. Тем не менее, поставив третий поляризатор под углом  $45^\circ$ , мы увеличиваем количество прошедшего света. Вы можете сами проанализировать это явление в качестве упражнения.

Одно из интереснейших поляризационных явлений, возникающее не в сложных кристаллах и всяких специальных материалах, а в простом и очень хорошо знакомом случае, — это отражение от поверхности. Кажется невероятным, но при отражении от стекла свет может поляризоваться, и объяснить физически такой факт весьма просто. На опыте Брюстер показал, что отраженный от поверхности свет полностью поляризован, если отраженный и преломленный в среде лучи образуют прямой угол. Этот случай показан на фиг. 33.4.

Если падающий луч поляризован в плоскости падения, отраженного луча не будет совсем. Отраженный луч возникает только при условии, что падающий луч поляризован перпендикулярно плоскости падения. Причину этого явления легко понять. В отражающей среде свет поляризован перпендикулярно направлению движения луча, а мы знаем, что именно движение зарядов в отражающей среде генерирует исходя-

щий из нее луч, который называют отраженным. Появление этого так называемого отраженного луча объясняется не просто тем, что падающий луч отражается; мы теперь уже знаем, что падающий луч возбуждает движение зарядов в среде, а оно в свою очередь генерирует отраженный луч.

Из фиг. 33.4 ясно, что только колебания, перпендикулярные плоскости страницы, дают излучение в направлении отраженного луча, а следовательно, отраженный луч поляризован перпендикулярно плоскости падения. Если же падающий луч поляризован в плоскости падения, отраженного луча не будет совсем.

Это явление легко продемонстрировать при отражении линейно поляризованного луча от плоской стеклянной пластинки. Поворачивая пластинку под разными углами к направлению падающего поляризованного луча, можно заметить резкий спад интенсивности при значении угла, равном углу Брюстера. Это падение интенсивности наблюдается только в том случае, когда плоскость поляризации совпадает с плоскостью падения. Если же плоскость поляризации перпендикулярна плоскости падения, заметного спада интенсивности отраженного света не наблюдается.

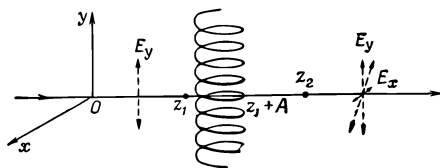
## § 5. Оптическая активность

Интереснейший поляризационный эффект был обнаружен в материалах, молекулы которых не обладают зеркальной симметрией; это молекулы в виде штопора, перчатки с одной руки или вообще какой-то формы, которая при отражении в зеркале переходит в другую форму, подобно тому как перчатка с левой руки в этом случае принимает вид перчатки с правой. Предположим, что все вещество состоит из молекул одной формы, т. е. в веществе нет молекул, которые являлись бы зеркальными отражениями других. Тогда в этом веществе возникает замечательное явление, называемое *оптической активностью*, — направление поляризации линейно поляризованного света при прохождении через вещество поворачивается вокруг оси пучка.

Чтобы разобраться в явлении оптической активности, надо вывести ряд формул, но суть дела можно понять и качественно, без всяких вычислений. Возьмем асимметричную мо-

Фиг. 33.5. Молекула, форма которой не обладает зеркальной симметрией.

На молекулу падает пучок света, линейно поляризованный в направлении оси  $y$ .





лекулу в форме спирали, показанную на фиг. 33.5. Оптическая активность появляется не обязательно для молекул именно такой формы, но пример спирали наиболее прост и типичен для случая, когда нет зеркальной симметрии.

Пусть на молекулу падает луч света, линейно поляризованный вдоль оси  $y$ , тогда электрическое поле вызывает движение зарядов вверх и вниз по спирали, так что в направлении  $y$  возникает ток и происходит излучение электрического поля  $E_y$ , поляризованного опять-таки вдоль оси  $y$ . Если, однако, электроны могут двигаться только вдоль спирали, появится составляющая тока вдоль оси  $x$ . Когда ток течет вверх по спирали, в точке  $z_1$  он движется к плоскости рисунка, а в точке  $z_1 + A$  — от плоскости (здесь  $A$  — диаметр молекулярной спирали). Казалось бы,  $x$ -составляющая тока не дает никакого излучения, потому что на противоположных сторонах витка спирали ток течет в прямо противоположном направлении. Однако если взять  $x$ -составляющую электрического поля, приходящего в точку  $z = z_2$ , мы увидим, что ток в точке  $z = z_1 + A$  и ток в точке  $z = z_1$  создают поля в точке  $z_2$  с интервалом времени  $A/c$  и, следовательно, с разностью фаз  $\pi + \omega A/c$ . Поскольку разность фаз в точности не равна  $\pi$ , поля не могут взаимно погаситься и остается небольшая  $x$ -компонента электрического поля, вызванная движением электронов в молекуле, хотя первоначальное падающее поле имело только  $y$ -компоненту. Складывая малую компоненту по оси  $x$  и большую компоненту по оси  $y$ , получаем результирующее поле под небольшим углом к оси  $y$  (первоначальному направлению поляризации). При движении луча света через среду направление поляризации поворачивается вокруг оси луча. Нарисовав молекулы в разных положениях и определив токи, индуцированные падающим электрическим полем, можно убедиться, что появление оптической активности и направление вращения не зависят от ориентации молекул.

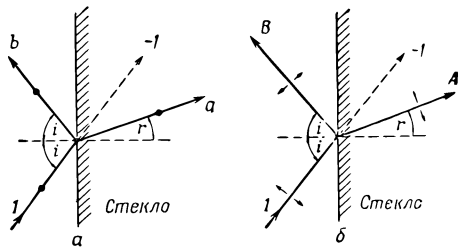
Примером среды, обладающей оптической активностью, является обычная патока. Для демонстрации явления берут поляроид, дающий на выходе линейно поляризованный луч, прозрачный сосуд с патокой и второй поляроид, служащий для определения вращения плоскости поляризации.

## § 6. Интенсивность отраженного света

Рассмотрим здесь количественную зависимость коэффициента отражения от угла падения. На фиг. 33.6, *a* показан пучок света, падающий на поверхность стеклянной пластинки, от которой он частично отражается, а остальная его часть преломляется и уходит в глубь стекла. Пусть падающий луч имеет единичную амплитуду и линейно поляризован перпен-

Фиг. 33.6. Падающая волна единичной амплитуды отражается и преломляется на поверхности стекла.

*a* — падающая волна поляризована по нормали к плоскости границы; *b* — падающая волна поляризована в направлении, указанном пунктирной стрелкой.



дикулярно плоскости рисунка. Обозначим амплитуду отраженной волны буквой *b*, а амплитуду преломленной — буквой *a*. Отраженная и преломленная волны будут, разумеется, линейно поляризованы, а направления электрического поля в падающей, отраженной и преломленной волнах параллельны друг другу. На фиг. 33.6, *б* показана подобная же ситуация, но в предположении, что падающий луч поляризован в плоскости рисунка. Здесь через *B* и *A* обозначены соответственно амплитуды отраженной и преломленной волн.

Мы хотим вычислить интенсивности отраженного луча в обоих случаях, приведенных на фиг. 33.6. Как мы уже знаем, в случае, показанном на фиг. 33.6, *б*, отраженной волны не возникает, если угол между отраженным и преломленным лучами прямой, но нам хотелось бы получить количественный результат — точную формулу для амплитуд *B* и *b* как функций угла падения *i*. Полезно усвоить следующий принцип. Индуцированные в стекле токи генерируют две волны. Прежде всего они создают волну отражения. Далее, если бы в стекле токов не было, падающая волна прошла бы его насквозь, не меняя направления. Вспомним, что все заряды во Вселенной создают некое результирующее поле. Источник, создавший падающий пучок, дает поле единичной амплитуды, которое само по себе должно было бы проходить внутрь стекла по пунктирной линии (см. фиг. 33.6). Но это поле внутри стекла не наблюдается, а, следовательно, токи, возбуждаемые в стекле, должны излучать поле с амплитудой  $-1$  вдоль той же пунктирной линии. Это позволяет вычислить амплитуды преломленных волн *a* и *A*.

Из фиг. 33.6, *а* видно, что поле с амплитудой *b* создается движением зарядов стекла, а внутри стекла это же движение дает поле с амплитудой *a*; следовательно, амплитуда *b* пропорциональна амплитуде *a*. Далее, если отвлечься от направления поляризации, можно было бы предположить, что отношение  $B/A$  равно отношению  $b/a$ , так как обе схемы на фиг. 33.6 можно считать одинаковыми. На самом деле это не совсем правильно, потому что на фиг. 33.6, *б* в отличие от ситуации, изображенной на фиг. 33.6, *а*, направления поляриза-

ций не параллельны друг другу. В создании амплитуды  $B$  эффективно участвует только компонента  $A$ , параллельная  $B$ , т. е.  $A \cos(i+r)$ . Правильное соотношение пропорциональности выглядит поэтому так:

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A \cos(i+r)}. \quad (33.1)$$

Теперь немного схитрим. Как мы знаем, на обоих рисунках фиг. 33.6 электрическое поле в стекле вызывает движение зарядов, которое генерирует поле с амплитудой, равной  $-1$ , поляризованное точно так же, как и в падающем луче, и распространяющееся вдоль пунктирной линии. Но из фиг. 33.6, б видно, что только перпендикулярная пунктирной линии компонента  $A$  дает полю необходимую поляризацию, тогда как на фиг. 33.6, а в создании поля на пунктирной линии эффективно участвует вся амплитуда  $a$ , поскольку ее поляризация параллельна поляризации поля с амплитудой  $-1$ . Следовательно, справедливо соотношение

$$\frac{A \cos(i-r)}{a} = \frac{-1}{-1}, \quad (33.2)$$

так как обе амплитуды в левой части (33.2) создают волны с амплитудой  $-1$ .

Разделив (33.1) на (33.2), получаем

$$\frac{B}{b} = \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}. \quad (33.3)$$

Проверим правильность этого результата на уже известном нам факте. Положив  $(i+r) = 90^\circ$ , из (33.3) получим  $B = 0$ , что и было найдено в свое время Брюстером; таким образом, наш результат по крайней мере не содержит очевидной ошибки.

По предположению падающая волна имеет единичную амплитуду; тогда  $|B|^2/1^2$  есть коэффициент отражения лучей, поляризованных в плоскости падения, а  $|b|^2/1^2$  — коэффициент отражения лучей, поляризованных перпендикулярно плоскости падения. Отношение этих двух коэффициентов определяется с помощью формулы (33.3).

А теперь соговорим чудо и вычислим не только отношение, но и каждый коэффициент  $|B|^2$  и  $|b|^2$  в отдельности! Из закона сохранения энергии вытекает, что энергия преломленной волны должна быть равна энергии падающей волны минус энергия отраженной волны, т. е.  $1 - |B|^2$  в одном случае и  $1 - |b|^2$  — в другом. Более того, энергия света, прошедшего внутрь стекла в случае, показанном на фиг. 33.6, а, и такая же энергия в случае фиг. 33.6, б относятся как квадраты амплитуд преломленных волн:  $|A|^2/|a|^2$ . Возникает вопрос, воз-

можно ли вычислить энергию волны в стекле, если кроме энергии электрического поля, вообще говоря, имеется и энергия движения атомов. Однако ясно, что любой вклад в полную энергию должен быть пропорционален квадрату амплитуды электрического поля. Следовательно,

$$\frac{1 - |B|^2}{1 - |b|^2} = \frac{|A|^2}{|a|^2}. \quad (33.4)$$

Подставим сюда соотношение (33.2) и исключим  $A/a$  в написанном выражении, а величину  $B$  выразим через  $b$  с помощью формулы (33.3):

$$\frac{1 - |b|^2 \frac{\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}}{1 - |b|^2} = \frac{1}{\cos^2(i-r)}. \quad (33.5)$$

Здесь неизвестной величиной остается только  $b$ . Разрешая уравнение относительно  $|b|^2$ , получаем

$$|b|^2 = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} \quad (33.6)$$

и, воспользовавшись (33.3), находим

$$|B|^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}. \quad (33.7)$$

Таким образом, мы нашли коэффициент отражения  $|b|^2$  для падающей волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения, и коэффициент отражения  $|B|^2$  для волны, поляризованной в плоскости падения!

Используя подобные приемы доказательства, можно пойти дальше и вывести, что  $b$  действительно. Для доказательства рассмотрим случай, когда свет приходит одновременно с обеих сторон поверхности стекла (ситуация, трудно осуществимая на опыте, но забавная в теоретическом отношении). Анализируя этот общий случай, можно убедиться в действительности величины  $b$ , откуда следует, что  $b = \pm \sin(i-r)/\sin(i+r)$ . Если взять очень тонкий слой, в котором отражение происходит от обеих поверхностей, и вычислить интенсивность отраженного света, то можно установить даже знак  $b$ . Доля света, отраженного тонким слоем, нам известна, поскольку мы знаем ток, генерируемый в таком слое, и даже получили формулу для поля, создаваемого током. Эти аргументы приводят к соотношениям

$$b = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \quad B = -\frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}. \quad (33.8)$$

Формулы (33.8) для коэффициентов отражения как функций углов падения и преломления называются *формулами Френеля*.

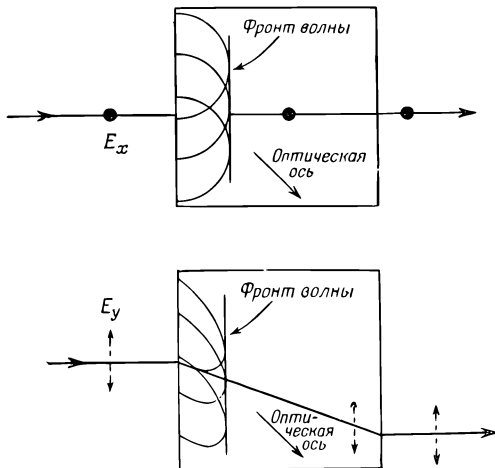
В пределе, когда углы  $i$  и  $r$  стремятся к нулю, т. е. в случае падения по нормали, мы получаем  $B^2 \approx b^2 \approx (i - r)^2 / (i + r)^2$  для обеих поляризаций, поскольку и синусы, и тангенсы в этих условиях практически равны углам. Но, как мы уже знаем,  $\sin i / \sin r = n$ , а для малых углов  $i/r \approx n$ . Отсюда совсем просто вывести, что коэффициент отражения в случае падения по нормали равен

$$B^2 = b^2 = \frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2}.$$

Интересно вычислить, например, коэффициент отражения для воды. В этом случае  $n = 4/3$  и коэффициент отражения равен  $(1/7)^2 \approx 2\%$ . При падении лучей по нормали к поверхности от воды отражается только 2% всей энергии.

### § 7. Аномальное преломление

Последним рассмотрим поляризационное явление, которое исторически было обнаружено самым первым, — аномальное преломление света. Моряки, побывавшие в Исландии, приводили в Европу кристаллы исландского шпата ( $\text{CaCO}_3$ ), которые обладали тем забавным свойством, что рассматриваемые сквозь них предметы как бы двоились, т. е. получалось два изображения предмета. Это явление привлекло внимание Гюйгенса и сыграло важную роль в открытии поляризации света. Как часто бывает, найденные раньше других явления оказываются в конечном счете наиболее трудными для объяснения. Обычно лишь после того, как физическая идея становится понятной в мельчайших подробностях, можно подо-



Фиг. 33.7. Путь обыкновенного луча (вверху) и путь необыкновенного луча (внизу) в двоякопреломляющем кристалле.

Оптическая ось лежит в плоскости страницы.

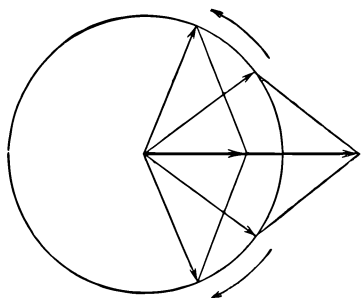
брать явления, иллюстрирующие эту идею наиболее просто и наглядно.

Аномальное преломление представляет собой частный случай уже изученного нами явления двойного лучепреломления. Аномальное преломление возникает тогда, когда оптическая ось, т. е. большая ось асимметричных молекул, *не параллельна* поверхности кристалла.

На фиг. 33.7 изображены два двоякопреломляющих кристалла и показано направление оптической оси. На верхнем рисунке падающий луч линейно поляризован в направлении, перпендикулярном оптической оси кристалла. Когда луч попадает на поверхность кристалла, каждая точка поверхности служит источником новой волны, распространяющейся внутри кристалла со скоростью  $v_{\perp}$  (скоростью света в кристалле, поляризация которого перпендикулярна направлению оптической оси). Волновой фронт представляется просто огибающей всех этих маленьких сферических волн, он движется прямо сквозь кристалл. Такое поведение света считается обычным, а соответствующий луч называется *обыкновенным лучом*.

На нижнем рисунке фиг. 33.7 поляризация падающего луча повернута на  $90^{\circ}$ , так что оптическая ось лежит в плоскости поляризации. Рассмотрим теперь маленькие волны, идущие от поверхности кристалла; они уже не сферические, как в предыдущем случае. Свет вдоль оптической оси движется со скоростью  $v_{\perp}$ , потому что поляризация перпендикулярна оптической оси, а свет, движущийся перпендикулярно оси, распространяется со скоростью  $v_{\parallel}$ , поскольку поляризация и оптическая ось параллельны. В двоякопреломляющем материале  $v_{\parallel} \neq v_{\perp}$ , и на нашем рисунке выбран случай  $v_{\parallel} < v_{\perp}$ . Более подробный анализ показывает, что волны у поверхности кристалла имеют форму эллипсоидов, большая ось которых совпадает с оптической осью кристалла. Огибающая этих эллиптических волн — волновой фронт — движется через кристалл, как показано на нижнем рисунке фиг. 33.7. У задней поверхности кристалла луч отклоняется на тот же угол, что и у передней, и выходит параллельно падающему лучу, сместившись на некоторое расстояние. Совершенно очевидно, что этот луч не подчиняется закону Снелла и движется довольно необычно. Поэтому его называют *необыкновенным лучом*.

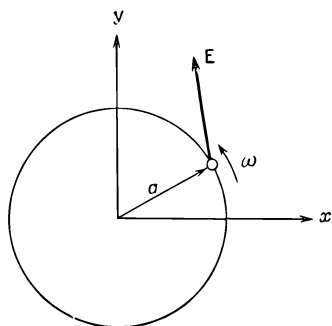
Если на аномально преломляющий кристалл направить неполяризованный пучок света, он разделится на два луча: обыкновенный, движущийся прямо через кристалл по обычным законам, и необыкновенный, который, пройдя через кристалл, смещается относительно падающего луча. Оба прошедших через кристалл луча линейно поляризованы перпендикулярно друг другу. Этот факт легко установить опытным пу-



Фиг. 33.8. Два вектора одной длины, вращающиеся в противоположные стороны, дают при сложении вектор, направление которого не меняется, а амплитуда осциллирует.

тем, используя полироид для определения поляризации вышедших из кристалла лучей света. Можно также подтвердить правильность нашей интерпретации, посылая на кристалл линейно поляризованный луч. Выбирая нужную ориентацию поляризации падающего пучка, мы в одном случае увидим луч, прошедший прямо сквозь кристалл, а в другом — единственный сместившийся луч.

На фиг. 33.1 и 33.2 были представлены самые разные поляризации в виде суперпозиции двух основных, а именно поляризаций по осям  $x$  и  $y$  с разными амплитудами и фазами. Вместо них можно выбрать и другие пары основных поляризаций. Один из возможных примеров представляют собой поляризации по двум перпендикулярным осям  $x'$  и  $y'$ , повернутым относительно  $x$  и  $y$  (можно также любую поляризацию представить как суперпозицию случаев  $a$  и  $d$  на фиг. 33.2). Оказывается, эту мысль можно еще продолжить. Например, любую *линейную* поляризацию можно представить в виде суперпозиции *правой* и *левой круговой* поляризации с соответствующими амплитудами и фазами (случаи  $v$  и  $ж$  на фиг. 33.2), поскольку два равных вектора, вращающихся в разные стороны, при сложении дают вектор, осциллирующий вдоль прямой линии (фиг. 33.8).



Фиг. 33.9. Действие света с круговой поляризацией на вращающийся заряд.

Если фазы вращающихся векторов разные, прямая будет наклонена. Таким образом, все графики фиг. 33.1 можно назвать «суперпозициями равного количества право- и левополяризованного света при разных сдвигах фаз». Когда левополяризованный свет отстает по фазе от правополяризованного, направление линейной поляризации меняется. Поэтому оптически активные среды можно в некотором смысле назвать двоякопреломляющими. Свойство оптической активности можно характеризовать и по-другому, говоря, что такие среды имеют разные показатели преломления для света правой и левой круговой поляризации. Суперпозиция право- и левополяризованного света с разными амплитудами дает эллиптически поляризованный свет.

Свет с круговой поляризацией обладает интересным свойством — он переносит *момент количества движения* (взятый относительно направления луча). Чтобы пояснить это утверждение, предположим, что поляризованный по кругу свет падает на атом, который представляет собой гармонический осциллятор, способный колебаться в любом направлении в плоскости  $xу$ . Тогда смещение электрона по оси  $x$  отвечает компоненте поля  $E_x$ , а смещение по оси  $y$  отвечает компоненте  $E_y$ , равной по величине, но отстающей по фазе на  $90^\circ$ . Это означает, что электрон под действием вращающегося электрического поля световой волны (фиг. 33.9) будет двигаться по окружности с угловой скоростью  $\omega$ .

Направление вектора смещения электрона  $\mathbf{a}$  в зависимости от восприимчивости осциллятора к действующей на него силе не обязательно совпадает с направлением силы  $q_e\mathbf{E}$ , но тем не менее оба вектора вращаются одновременно друг с другом. Напряженность поля  $\mathbf{E}$ , вообще говоря, имеет компоненту, перпендикулярную смещению электрона  $\mathbf{a}$ , так что над системой совершается работа, а кроме того, на нее действует крутящий момент  $\tau$ . Работа, которую он совершает в 1 сек, равна  $\tau\omega$ . За период  $T$  системе передается энергия  $\tau\omega T$ , причем  $\tau T$  есть момент количества движения, поглощаемый вместе с энергией излучения. Мы видим, таким образом, что *луч света правой круговой поляризации, энергия которого равна  $\mathcal{E}$ , переносит момент количества движения (вектор которого лежит вдоль направления распространения луча), равный по величине  $\mathcal{E}/\omega$* . Действительно, если луч правополяризованного света поглощается веществом, поглотителю передается порция момента количества движения, равная  $\mathcal{E}/\omega$ . Левополяризованный свет несет момент противоположного знака, т. е. —  $\mathcal{E}/\omega$ .



**РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ИЗЛУЧЕНИИ**

- § 1. Движущиеся источники
- § 2. Определение «кажущегося» движения
- § 3. Синхротронное излучение
- § 4. Космическое синхротронное излучение
- § 5. Тормозное излучение
- § 6. Эффект Допплера
- § 7. Четырех-вектор  $(\omega, k)$
- § 8. Аберрация
- § 9. Импульс световой волны

**§ 1. Движущиеся источники**

В этой главе мы расскажем еще о ряде эффектов, связанных с излучением, и на этом закончим изложение классической теории света. Проведенный нами в предыдущих главах анализ световых явлений был достаточно полным и подробным. Однако мы не коснулись одного важного в приложениях процесса электромагнитного излучения — мы не исследовали поведения радиоволн в ящике с отражающими стенками размером порядка длины волны или радиоволн, пропускаемых через длинную трубу. Явления, возникающие в так называемых *полых резонаторах и волноводах*, мы обсудим позднее, причем прежде мы их проиллюстрируем на другом физическом примере — на примере звука. А в остальном изучение классической теории света заканчивается этой главой.

Для всех эффектов, о которых здесь пойдет речь, характерно то, что они связаны с *движением источника*. Мы не будем больше предполагать, что смещение источника незначительно и его движение происходит с относительно малой скоростью возле фиксированной точки.

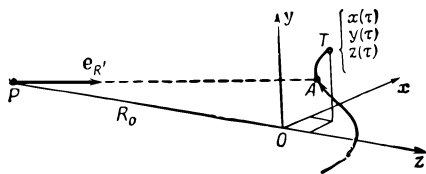
Вспомним, что, согласно основным законам электродинамики, электрическое поле на больших расстояниях от движущегося заряда дается формулой

$$\mathbf{E} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q^2 \mathbf{e}_{R'}}{dt^2}. \quad (34.1)$$

Определяющей величиной здесь является вторая производная единичного вектора  $\mathbf{e}_{R'}$ , направленного к кажущемуся положению заряда. Единичный вектор характеризует поло-

Фиг. 34.1. Траектория движущегося заряда.

Истинное положение в момент времени  $\tau$  есть  $T$ , положение при учете запаздывания есть  $A$ .



жение заряда, конечно, не в тот же момент времени, а то место, где находился бы заряд, если учесть конечную скорость передачи информации от заряда к наблюдателю.

Вместе с электрическим полем возникает магнитное поле, направленное всегда перпендикулярно электрическому и кажущемуся положению заряда. Оно дается формулой

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_{R'} \times \frac{\mathbf{E}}{c}. \quad (34.2)$$

Мы рассматривали до сих пор случай нерелятивистских скоростей, когда движением в направлении источника можно было пренебречь. Обратимся теперь к общему случаю произвольных скоростей и посмотрим, какие эффекты возникают в этих условиях. Итак, пусть движение происходит с любой скоростью, но расстояние от детектора до источника по-прежнему велико.

В гл. 28 мы уже говорили, что в производную  $d^2\mathbf{e}_{R'}/dt$  входит только изменение направления  $\mathbf{e}_{R'}$ . Пусть заряд находится в точке с координатами  $(x, y, z)$  и ось  $z$  лежит вдоль линии наблюдения (фиг. 34.1). В данный момент времени  $\tau$  координаты заряда есть  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$ , и  $z(\tau)$ . Расстояние  $R$  с большой точностью равно  $R(\tau) = R_0 + z(\tau)$ . Направление вектора  $\mathbf{e}_{R'}$  зависит главным образом от  $x$  и  $y$  и почти совсем не зависит от  $z$ . Поперечные компоненты единичного вектора равны  $x/R$  и  $y/R$ ; дифференцируя их, мы получаем члены, содержащие  $R^2$  в знаменателе:

$$\frac{d(x/R)}{dt} = \frac{dx/dt}{R} - \frac{dz}{dt} \frac{x}{R^2}.$$

Таким образом, на достаточно больших расстояниях существенны только члены с производными  $x$  и  $y$ . Отсюда

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 x'}{dt'^2}, \\ E_y &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 y'}{dt'^2}, \end{aligned} \quad (34.3)$$

где  $R_0$  примерно равно расстоянию до заряда  $q$ ; определим его как расстояние  $OP$  до начала координат  $(x, y, z)$ . Итак, электрическое поле равно константе, умноженной на очень простую величину — производную координат  $x$  и  $y$  по  $t$ . (Математически можно назвать их поперечными компонентами

вектора положения заряда  $\mathbf{r}$ , но ясности от этого не прибавится.)

Конечно, нужно всегда помнить, что координаты берутся не в момент наблюдения, а с учетом запаздывания. В данном случае запаздывание *зависит* и от  $z(\tau)$ . Чему равно время запаздывания? Обозначим время наблюдения через  $t$  (это время в точке наблюдения  $P$ ), тогда время  $\tau$ , которое в точке  $A$  соответствует времени  $t$ , не будет совпадать с  $t$ , а отстает от него на промежуток времени, необходимый свету, чтобы пройти все расстояние от заряда до точки наблюдения. В первом приближении время запаздывания равно  $R_0/c$ , т. е. постоянной (что неинтересно), а в следующем приближении должно зависеть от  $z$ -координаты положения заряда в момент  $\tau$ , потому что для заряда  $q$ , сдвинутого немного назад, запаздывание увеличивается. Этим эффектом мы раньше пренебрегали; если теперь учесть его, то мы получим формулу, пригодную для любых скоростей.

Нам остается выбрать определенное значение  $t$ , вычислить с его помощью  $\tau$  и найти  $x$  и  $y$  в момент времени  $\tau$ . Запаздывающие значения  $x$  и  $y$  обозначим через  $x'$  и  $y'$ , вторые производные от них определяют поле. Итак,  $\tau$  определяется из уравнений

$$t = \tau + \frac{R_0}{c} + \frac{z(\tau)}{c}$$

и

$$x'(t) = x(\tau), \quad y'(t) = y(\tau). \quad (34.4)$$

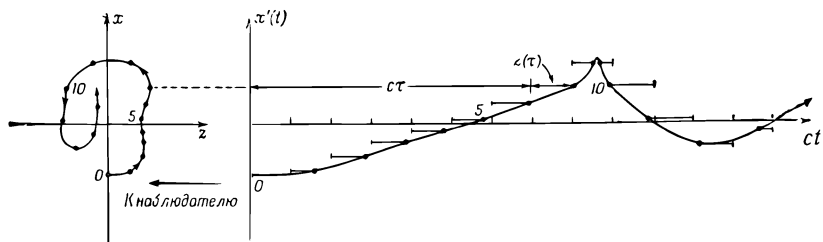
Эти уравнения довольно сложны, но их решение легко получить геометрическим путем. Чертеж даст вам возможность качественно почувствовать, как возникают соотношения, хотя для вывода точных результатов понадобится преодолеть еще немало математических сложностей.

## § 2. Определение «кажущегося» движения

Написанное выше уравнение можно упростить довольно интересным способом. Опустим неинтересный для нас постоянный член  $R_0/c$  (это означает только, что мы изменяем начало отсчета времени  $t$  на постоянный отрезок) и запишем

$$ct = c\tau + z(\tau), \quad x' = x(\tau), \quad y' = y(\tau). \quad (34.5)$$

Нам нужно найти  $x'$  и  $y'$  как функции  $t$ , а не  $\tau$ , и это достигается следующим образом: как подсказывает уравнение (34.5), нужно взять истинное движение заряда и добавить время  $\tau$ , умноженное на константу (скорость света). На фиг. 34.2 показано, что это означает. Возьмем истинную траекторию заряда (показанную слева) и представим себе, что по

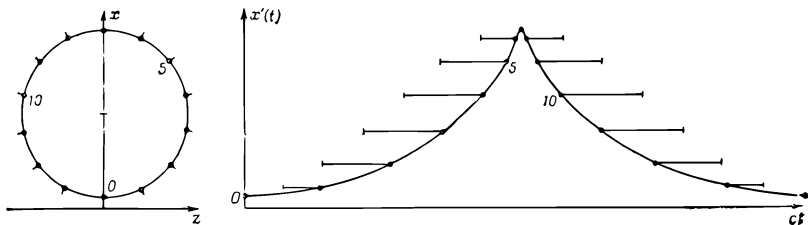


Фиг. 34.2. Геометрический способ определения  $x'(t)$  из уравнения (34.5).

мере движения заряд удаляется от точки  $P$  со скоростью  $c$  (здесь нет каких-либо релятивистских сокращений и подобных вещей; это просто математическое добавление  $c\tau$ ). Таким путем получится новая траектория, где по оси абсцисс отложено  $ct$ , как показано на рисунке справа. (На рисунке изображена траектория довольно сложного движения в плоскости, но движение может происходить не только в плоскости.) Смысл приведенной процедуры состоит в том, что горизонтальное расстояние в правой части фиг. 34.2 в отличие от левой оказывается равным не  $z$ , а  $z + c\tau$ , т. е.  $ct$ . Мы нашли, таким образом, график изменения  $x'$  (и  $y'$ ) в зависимости от  $t$ ! Осталось только определить ускорение на кривой, т. е. продифференцировать ее дважды. Отсюда окончательно заключаем: чтобы найти электрическое поле движущегося заряда, нужно взять траекторию движения и заставить двигаться каждую ее точку от точки наблюдения со скоростью  $c$ ; полученная кривая дает положения  $x'$  и  $y'$  как функцию  $t$ . Ускорение на этой кривой определит электрическое поле в зависимости от  $t$ . Можно, если угодно, представить себе, что вся эта «твердая» кривая движется вперед со скоростью  $c$  сквозь плоскость зрения, так что точка пересечения с плоскостью зрения имеет координаты  $x'$  и  $y'$ . Ускорение этой точки и определит электрическое поле! Полученное решение будет не менее точно, чем формула, из которой мы исходили, — это просто ее геометрическое представление.

Если источник совершает относительно медленное движение, как, например, медленно колеблющийся вверх и вниз осциллятор, то при растягивании этого движения со скоростью света получится простая синусоидальная кривая. Отсюда можно получить формулу для поля, создаваемого осциллирующим зарядом, которую мы видели неоднократно.

Более интересный пример — это электрон, движущийся по окружности со скоростью, близкой к скорости света. Если наблюдатель находится в плоскости движения электрона, запаздывающее движение  $x'(t)$  имеет для него вид, изображен-



Фиг. 34.3. Кривая зависимости  $x'(t)$  для частицы, вращающейся по окружности с постоянной скоростью  $v = 0,94 c$ .

ный на фиг. 34.3. Что это за кривая? Если мы представим себе радиус-вектор, проведенный из центра окружности к заряду, и если мы продолжим эти радиальные линии чуть-чуть за заряд (совсем капельку, если заряд движется быстро), то мы приходим к точке, которая движется со скоростью света  $c$ . Поэтому результирующее движение есть движение заряда, прикрепленного к колесу, которое катится назад (без скольжения) со скоростью  $c$ ; это дает нам кривую, очень похожую на циклоиду, называется она *гипоциклоидой*.

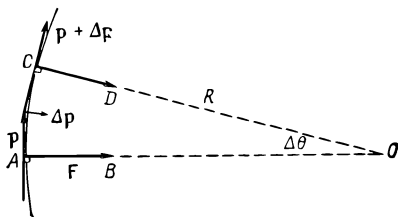
Когда заряд движется по окружности со скоростью, близкой к скорости света, пики на кривой становятся очень острыми, а при скорости, равной скорости света, они были бы бесконечно острыми. «Бесконечно острые» пики! Очень интересно; это значит, что вблизи такого пика вторая производная очень велика. Один раз в течение каждого периода возникает мощный и резкий импульс электрического поля. Ничего похожего в случае нерелятивистского движения не бывает, там электрическое поле в течение всего периода принимает значения примерно одного и того же порядка. Вместо этого в случае больших скоростей там возникают резкие импульсы электрического поля с интервалом времени  $T_0$ , где  $T_0$  — период обращения. Это сильное электрическое поле излучается в узком конусе около направления движения заряда. Когда же заряд удаляется от точки наблюдения  $P$ , производная кривой мала и излучение в направлении  $P$  очень слабое.

### § 3. Синхротронное излучение

В синхротроне электроны движутся по окружности с большими скоростями, близкими к скорости света, и описанное излучение можно увидеть как настоящий свет! Обсудим это явление более подробно.

Электроны в синхротроне движутся по окружности в однородном магнитном поле. Давайте установим прежде всего,

Фиг. 34.4. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле по окружности (или по спирали).



почему они движутся по окружности. Согласно уравнению (12.11), сила, действующая на частицу в магнитном поле, равна

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (34.6)$$

и направлена перпендикулярно полю и скорости. Как обычно, сила равна скорости изменения импульса со временем. Если поле направлено вверх от плоскости страницы, импульс и сила располагаются так, как показано на фиг. 34.4. Поскольку сила перпендикулярна скорости, кинетическая энергия, а значит, и абсолютная величина скорости остаются *постоянными*. Действие магнитного поля сводится только к изменению *направления движения*. За малый промежуток времени  $\Delta t$  вектор импульса изменится на величину  $\Delta p = \mathbf{F} \cdot \Delta t$ , направленную перпендикулярно импульсу, т. е. вектор импульса  $\mathbf{p}$  повернется на угол  $\Delta\theta = \Delta p/p = qvB\Delta t/p$ , так как  $|\mathbf{F}| = qv \times |\mathbf{B}|$ . Но за то же время электрон пройдет расстояние  $\Delta s = v\Delta t$ . Две прямые,  $AB$  и  $CD$ , очевидно, пересекутся в точке  $O$ , для которой  $OA = OC = R$ , причем  $\Delta s = R\Delta\theta$ . Комбинируя написанные формулы, мы получаем  $R\Delta\theta/\Delta t = R\omega = v = qvBR/p$ , откуда

$$p = qBR \quad (34.7)$$

и

$$\omega = \frac{qvB}{p}. \quad (34.8)$$

Мы можем повторить это рассуждение в любой последующий промежуток времени и придем, таким образом, к заключению, что частица в магнитном поле должна двигаться по *окружности*, имеющей радиус  $R$ , с угловой скоростью  $\omega$ .

Равенство (34.7), выражающее импульс через произведение заряда, радиуса и магнитного поля, представляет собой очень важный закон, находящий весьма широкое применение. Он имеет большое практическое значение, потому что при наблюдении движения частиц с одинаковыми зарядами в магнитном поле позволяет измерить радиусы кривизны тра-

екторий; зная, кроме того, величину магнитного поля, можно определить, таким образом, импульсы частиц. Умножив обе части (34.7) на  $c$  и выразив заряд  $q$  через заряд электрона, мы получаем формулу для импульса в единицах *электрон-вольт (эв)*:

$$pc \text{ (эв)} = 3 \cdot 10^8 \left( \frac{q}{q_e} \right) BR. \quad (34.9)$$

Здесь  $B$ ,  $R$  и скорость света определены в системе единиц СИ, скорость света в этой системе равна численно  $3 \cdot 10^8$ .

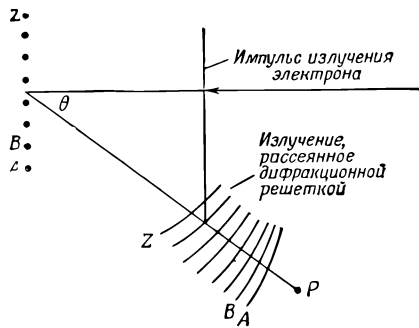
Единица измерения магнитного поля в системе СИ называется *вебер на метр квадратный*. Часто употребляют более старую единицу — *гаусс (гс)*. Один *вебер/м<sup>2</sup>* равен  $10^4$  *гс*. Чтобы дать представление о величине магнитных полей, приведем некоторые цифры. Самое сильное магнитное поле, которое можно создать в железе, порядка  $1,5 \cdot 10^4$  *гс*; при больших полях использовать железо становится невыгодным. В настоящее время электромагниты с обмоткой из сверхпроводящей проволоки позволяют получать постоянное поле напряженностью свыше  $10^5$  *гс*, т. е. 10 ед. СИ. Напряженность магнитного поля Земли у экватора составляет несколько десятых гауса.

Обратимся снова к формуле (34.9) и возьмем для примера синхротрон, который разгоняет частицы до миллиарда электронвольт, т. е. дает частицы с  $pc$ , равным  $10^9$  *эв* (ниже мы определим и энергию частиц). Пусть  $B = 10^4$  *гс*, или 1 ед. СИ, т. е. поле достаточно сильное, тогда  $R$  оказывается равным 3,3 *м*. Синхротрон КАЛТЕХа имеет радиус 3,7 *м*, поле чуть больше взятого нами, а энергию 1,5 млрд. *эв* (или *Гэв*), т. е. порядок всех величин тот же самый. Теперь становится понятным, почему синхротроны имеют такие размеры.

Выше мы брали импульс частиц; полная же энергия, включающая энергию покоя, дается формулой  $W = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ . Энергия покоя электрона  $mc^2$  равна  $0,511 \cdot 10^6$  *эв*, поэтому при импульсе  $pc = 10^9$  *эв* можно пренебречь величиной  $m^2c^4$  и для всех практических целей пользоваться формулой  $W = pc$ , справедливой в случае релятивистских скоростей. Фактически нет никакой разницы, когда мы говорим, что энергия электрона равна 1 *Гэв* или что импульс электрона, умноженный на  $c$ , равен 1 *Гэв*. Когда  $W = 10^9$  *эв*, то, как легко показать, скорость частицы равна скорости света с точностью до одной восьмимиллионной!

Теперь вернемся к излучению, испускаемому такой частицей. Двигаясь по окружности с радиусом 3,3 *м* и длиной 20 *м*, частица делает один оборот примерно за то же время, за которое свет проходит 20 *м*. Поэтому длина волны испускае-

Ф и г. 34.5. Падающий на решетку импульс света в форме острого пика после отражения дает в разных направлениях лучи различной окраски.

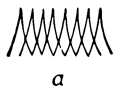


мого излучения, казалось бы, равна  $20 \text{ м}$ , т. е. лежит в области коротких радиоволн. Но, как мы уже говорили, возникают пики излучения (см. фиг. 34.3), и из-за того, что скорость электрона отличается от скорости света  $c$  на одну восьмимиллионную, ширина пиков пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием между ними. Ускорение, определяемое второй производной по времени, приводит к появлению «фактора сокращения»  $8 \cdot 10^6$  в квадрате, потому что масштаб времени уменьшается в  $8 \cdot 10^6$  раз в области пика и входит он дважды. Поэтому эффективная длина волны должна быть в  $64 \cdot 10^{12}$  раз меньше  $20 \text{ м}$ , что соответствует уже области рентгеновских лучей. (На самом деле эффект определяется значением не в самом пике, а некоторой областью около пика. Это дает вместо квадрата степень  $3/2$ , но все равно приводит к длинам волн, несколько меньшим, чем в видимом свете.) Итак, если даже медленно движущийся электрон излучает радиоволны длиной порядка  $20 \text{ м}$ , то релятивистские эффекты сокращают длину волны настолько, что мы можем увидеть излучение! Очевидно, свет должен быть поляризован перпендикулярно однородному магнитному полю.

Предположим далее, что мы направили подобный пучок света (импульсы излучения возникают через большие промежутки времени, так что для простоты возьмем один такой импульс) на дифракционную решетку, состоящую из множества рассеивающих линий. Какая картина возникнет после прохождения излучения через решетку? (Казалось бы, мы должны увидеть красные, синие полосы света и т. д., если вообще мы будем видеть свет.) А что мы увидим на самом деле?

Импульс излучения попадает прямо на решетку, и все осцилляторы на линиях решетки начинают одновременно бешено колебаться туда и обратно. При этом они излучают в разных направлениях, как показано на фиг. 34.5. Но точка  $P$  расположена ближе к одному концу решетки, и поэтому





а



б

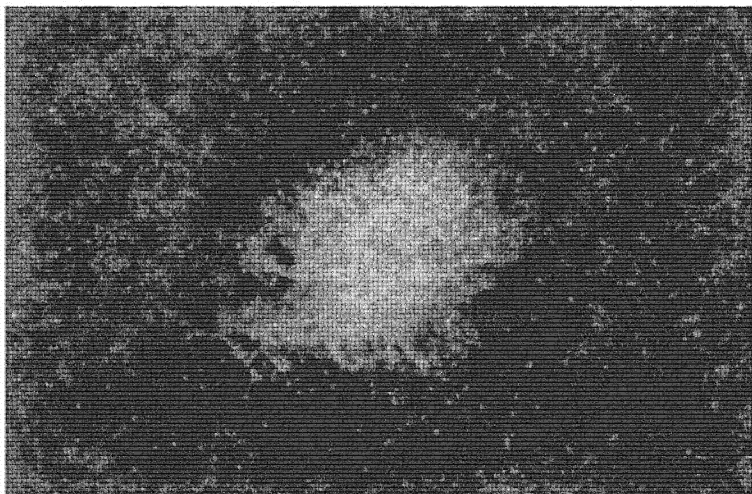
Фиг. 34.6. Суммарное электрическое поле от совокупности острых импульсов (а) и импульсов гладкой формы (б).

излучение попадает в нее сначала от *A*, потом от *B* и т. д., наконец, последним приходит импульс от самой крайней линии. В итоге совокупность всех отраженных волн принимает такой вид, как показано на фиг. 34.6, а. Это электрическое поле, состоящее из целого ряда импульсов, очень походит на синусоидальную волну, причем длина волны есть расстояние между соседними импульсами, точь-в-точь как у монохроматической волны, падающей на дифракционную решетку! Таким образом, мы действительно увидим свет окрашенным. Но те же аргументы, казалось бы, позволяют думать, что «импульсы» любой формы создадут видимый свет. Нет, это не так. Предположим, что пики гораздо более гладкие; давайте снова сложим все рассеянные волны, разделенные небольшими временными интервалами (фиг. 34.6, б). Тогда мы увидим, что поле почти не испытывает колебаний и представляет собой весьма гладкую кривую, потому что каждый импульс мало меняется за промежуток времени между приходом двух соседних рассеянных волн.

Электромагнитное излучение, испускаемое релятивистской заряженной частицей, которая вращается в магнитном поле, называется *синхротронным излучением*. Происхождение этого названия очевидно, хотя такое излучение возникает не только в синхротронах и даже не только в условиях Земли. Весьма интересно и увлекательно то, что оно возникает и во Вселенной!

#### § 4. Космическое синхротронное излучение

К 1054 г. нашей эры китайская и японская цивилизации были одними из самых передовых в мире: китайцы и японцы уже тогда следили за явлениями во Вселенной, и в этот самый год они зафиксировали замечательное событие — внезапное появление яркой звезды. (Любопытно, что ни один из европейских монахов, которые написали в средние века столько книг, и не подумал отметить это событие.) Как выглядит родившаяся звезда в настоящее время, показано на фиг. 34.7. Снаружи видно большое количество красных нитей, которые создаются атомами тонкой газовой оболочки, излучающими при своих собственных частотах; спектр излучения состоит из ярких отдельных линий. Красный цвет обязан своим появлением азоту. А вот в центре светится странное размазанное пятно, излучающее в *непрерывном* спектре частот, т. е. частоты, свойственные разным атомам, никак не выделены.



Ф и г. 34.7. Крабовидная туманность  
Снято без фильтра.

Пятно это — вовсе не облако пыли, отражающее свет от соседних звезд, что могло бы тоже привести к непрерывному спектру излучения. Сквозь это образование можно увидеть звезды, значит, оно прозрачное и само *излучает* свет.

На фиг. 34.8 показан тот же объект, но теперь снятый в лучах участка спектра, где нет ярких линий, т. е. фактически видна только центральная часть. Кроме того, снимки делались через поляризатор, и два представленных снимка соответствуют двум взаимно перпендикулярным ориентациям поляризатора. Легко заметить, что снимки разные! Таким образом, приходящий к нам свет поляризован. Причина этого эффекта предположительно состоит в том, что в туманности имеется местное магнитное поле, где крутится множество очень быстрых электронов.

Мы только что объяснили, каким образом электроны движутся в поле по окружности. Если к этому движению добавить любое равномерное движение в направлении поля, излучение поля не изменится, поскольку сила  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  не имеет компоненты вдоль поля, а синхротронное излучение (как мы уже отмечали) всегда поляризовано под прямым углом к направлению проекции магнитного поля на плоскость зрения.

Сопоставляя оба эти факта, мы видим, что на участке, где один снимок светлый, а другой темный, электрическое поле света должно быть полностью поляризовано в одном направлении. Это значит, что перпендикулярно указанному направлению имеется магнитное поле, а в тех участках, где второй



Фиг. 34.8. Крабовидная тиманность.

Снято через синий фильтр и поляририд, а—электрический вектор направлен вертикально; б—электрический вектор направлен по горизонтали.

снимок имеет светлое пятно, магнитное поле направлено по-другому. При внимательном изучении фиг. 34.8 можно заметить, что здесь имеется, грубо говоря, ряд «линий», идущих в одном направлении на первом снимке и в перпендикулярном к нему направлении на втором снимке. Изображения имеют как бы волокнистую структуру. Можно думать, что магнитные силовые линии продолжают довольно далеко в одном и том же направлении и поэтому, вероятно, возникают вытянутые участки магнитного поля,

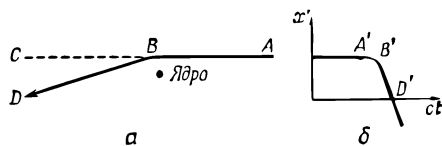
где электроны закручиваются в одном направлении, а в областях с другими направлениями поля электроны закручиваются по-иному.

Почему энергия электронов остается большой столь долгое время? Ведь с момента взрыва прошло уже 900 лет; как же получилось, что электроны крутятся все так же быстро? Причина такой продолжительности всего процесса в целом и сохранения электронами их большой энергии, в частности, до сих пор еще не совсем понятна.

### § 5. Тормозное излучение

Мы кратко расскажем еще об одном интересном эффекте, связанном с излучением быстродвижущейся частицы. По существу, этот процесс очень похож на только что описанное излучение. Предположим, что имеется материал, содержащий заряженные частицы, и мимо пролетает очень быстрый электрон (фиг. 34.9). Тогда под действием электрического поля ядра электрон будет притягиваться и ускоряться, и на траектории появится изгиб. Чему будет равно излучение электрического поля в направлении  $S$ , если скорость электрона близка к скорости света? Вспомним наше правило: мы должны взять истинное движение, перенести его назад со скоростью  $c$ , и тогда мы получим кривую, производная которой определяет

Фиг. 34.9. Быстрый электрон, пролетающий вблизи от ядра, излучает в направлении своего движения.



электрическое поле. Электрон примчался к нам со скоростью  $v$ , следовательно, при переносе получается обратное движение и вся траектория сожмется во столько раз, во сколько  $c - v$  меньше  $c$ . Таким образом, при  $1 - v/c \ll 1$  кривизна кажущейся траектории в точке  $B'$  очень велика, и, взяв вторую производную, мы получаем мощное излучение в направлении движения. Следовательно, при прохождении через среду электроны большой энергии излучают вперед. Это явление называется *тормозным излучением*. На практике синхротроны используются не столько для получения электронов большой энергии (возможно, если бы их лучше умели выводить из синхротрона, мы бы этого не стали говорить), сколько для рождения энергичных фотонов, или  $\gamma$ -квантов, в процессе прохождения электронов через плотные мишени, где они испускают тормозное излучение.

## § 6. Эффект Доплера

Рассмотрим теперь ряд других эффектов, связанных с движением источника. Пусть источник представляет собой покоящийся атом, колеблющийся со своей обычной частотой  $\omega_0$ . Частота наблюдаемого света тогда будет равна  $\omega_0$ . Но возьмем другой пример: пусть такой же атом колеблется с частотой  $\omega_1$  и в то же время весь атом, весь осциллятор как целое движется со скоростью  $v$  по направлению к наблюдателю. Тогда истинное движение в пространстве будет таким, как изображено на фиг. 34.10, а. Используем наш обычный прием и добавим  $ct$ , т. е. сместим всю кривую назад и получим колебания, представленные на фиг. 34.10, б. За промежуток времени  $t$  осциллятор проходит расстояние  $vt$ , а на графике с осями  $x'$  и  $y'$  соответствующее расстояние, равное  $(c - v)t$ . Таким образом, число колебаний с частотой  $\omega_1$ , которое укладывалось в интервал  $\Delta t$ , на новом чертеже укладывается теперь уже в интервал  $\Delta t' = (1 - v/c)\Delta t$ ; осцилляции сжимаются, и, когда новая кривая будет двигаться мимо нас со скоростью  $c$ , мы увидим свет *более высокой частоты*, увеличенной за счет фактора сокращения  $(1 - v/c)$ . Итак, наблюдаемая частота равна

$$\omega = \frac{\omega_1}{1 - v/c}. \quad (34.10)$$

Можно, конечно, объяснить этот эффект и другими способами. Пусть, например, тот же атом испускает не синусоидальную волну, а короткие импульсы (пип, пип, пип, пип) с некоторой частотой  $\omega_1$ . С какой частотой мы будем их воспринимать? Первый импульс к нам придет спустя определенное время, а второй импульс придет уже через более короткое время, потому что атом за это время успел к нам приблизиться. Следовательно, промежуток времени между сигналами «пип» сократился за счет движения атома. Анализируя эту картину с геометрической точки зрения, мы приходим к выводу, что частота импульсов увеличивается в  $1/(1 - v/c)$  раз.

Будет ли наблюдаться частота  $\omega = \omega_0/(1 - v/c)$ , если атом с собственной частотой  $\omega_0$  движется со скоростью  $v$  к наблюдателю? Нет. Нам хорошо известно, что собственная частота движущегося атома  $\omega_1$  и частота покоящегося атома  $\omega_0$  — не одно и то же из-за релятивистского замедления хода времени. Так что если  $\omega_0$  — собственная частота покоящегося атома, то частота движущегося атома будет равна

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (34.11)$$

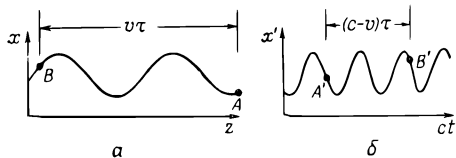
Поэтому наблюдаемая частота  $\omega$  окончательно равна

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}. \quad (34.12)$$

Изменение частоты, возникающее в таком случае, называется *эффектом Доплера*: если излучающий объект движется на нас, излучаемый им свет кажется более синим, а если он движется от нас, свет становится более красным.

Приведем еще два других вывода этого интересного и важного результата. Пусть теперь покоящийся источник излучает с частотой  $\omega_0$ , а наблюдатель движется со скоростью  $v$  к источнику. За время  $t$  наблюдатель сдвинется на новое расстояние  $vt$  от того места, где он был при  $t = 0$ . Сколько радиан фазы пройдет перед наблюдателем? Прежде всего, как и мимо любой фиксированной точки, пройдет  $\omega_0 t$ , а также некоторая добавка за счет движения источника, и именно  $vtk_0$  (это есть число радиан на метр, умноженное на расстояние).

Отсюда число радиан за единицу времени, или наблюдаемая частота, равно  $\omega_1 = \omega_0 + k_0 v$ . Весь этот вывод был сделан с точки зрения покоящегося наблюдателя; посмотрим, что



Фиг. 34.10. Движение осциллятора в плоскости  $x-z$  и в плоскости  $x'-t$ .

увидит движущийся наблюдатель. Здесь мы снова должны учесть разницу в течении времени для наблюдателя в покое и движении, а это значит, что мы должны разделить результат на  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Итак, пусть  $k_0$  есть волновое число (количество радиан на метр в направлении движения), а  $\omega_0$  — частота; тогда частота, регистрируемая движущимся наблюдателем, равна

$$\omega = \frac{\omega_0 + k_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (34.13)$$

Для света мы знаем, что  $k_0 = \omega_0/c$ . Следовательно, в рассматриваемом примере искомое соотношение имеет вид

$$\omega = \frac{\omega_0 (1 + v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (34.14)$$

и, казалось бы, не похоже на (34.12)!

Отличается ли частота, наблюдаемая при нашем движении к источнику, от частоты, наблюдаемой при движении источника к нам? Конечно, нет! Теория относительности утверждает, что обе частоты должны быть в *точности равны*. Если бы мы были достаточно математически подготовлены, то могли бы убедиться, что оба математических выражения в точности равны! В действительности *требование равенства* обоих выражений часто используется для вывода релятивистского замедления времени, потому что без квадратных корней равенство сразу нарушается.

Раз уж мы начали говорить о теории относительности, приведем еще и третий способ доказательства, который покажется, пожалуй, более общим. (Суть дела остается прежней, ибо не играет роли, *каким способом* получен результат!) В теории относительности имеется связь между положением в пространстве и временем, определяемым одним наблюдателем, и положением и временем, определяемым другим наблюдателем, движущимся относительно первого. Мы уже выписывали эти соотношения (гл. 16). Они представляют собой *преобразования Лоренца*, прямые и обратные:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & x &= \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ t' &= \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & t &= \frac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (34.15)$$

Для неподвижного наблюдателя волна имеет вид  $\cos(\omega t - kx)$ ; все гребни, впадины и нули описываются этой формой. А как будет выглядеть та же самая физическая волна для движущегося наблюдателя? Там, где поле равно *нулю*, *любой* на-

блюдатель при измерении получит нуль; это есть релятивистский инвариант. Следовательно, форма волны не меняется, нужно только написать ее в системе отсчета движущегося наблюдателя:

$$\cos(\omega t - kx) = \cos \left[ \omega \frac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - k \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right].$$

Произведя перегруппировку членов, получим

$$\begin{aligned} \cos(\omega t - kx) &= \cos \left[ \underbrace{\frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{\omega'} t' - \underbrace{\frac{k + v\omega/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{k'} x' \right] = \\ &= \cos [\omega' t' - k' x']. \end{aligned} \quad (34.16)$$

Мы снова получим волну в виде косинуса с частотой  $\omega'$  в качестве коэффициента при  $t'$  и некоторой другой константой  $k'$  — коэффициентом при  $x'$ . Назовем  $k'$  (или число колебаний на 1 м) волновым числом для второго наблюдателя. Таким образом, движущийся наблюдатель отметит другую частоту и другое волновое число, определяемые формулами

$$\omega' = \frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (34.17)$$

и

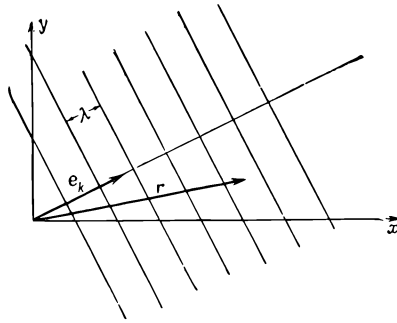
$$k' = \frac{k + v\omega/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (34.18)$$

Легко видеть, что (34.17) совпадает с формулой (34.13), полученной нами на основании чисто физических рассуждений.

## § 7. Четырехвектор $(\omega, k)$

Соотношения (34.17) и (34.18) обладают весьма интересным свойством: новая частота  $\omega'$  линейно связана со старой частотой  $\omega$  и старым волновым числом  $k$ , а новое волновое число представляется в виде комбинации старого волнового числа и частоты. Далее, волновое число есть скорость изменения фазы с расстоянием, а частота — скорость изменения фазы со временем, и сами соотношения обнаруживают глубокую аналогию с преобразованиями Лоренца для координаты и времени: если  $\omega$  сопоставить с  $t$ , а  $k$  с  $x/c^2$ , то новое  $\omega'$  сопоставляется с  $t'$ , а  $k'$  — с координатой  $x'/c^2$ . Иначе говоря, при преобразовании Лоренца  $\omega$  и  $k$  изменяются также, как  $t$  и  $x$ . Эти величины  $\omega$  и  $k$  составляют так называемый *четырёхвектор*. Четырёхкомпонентная величина, преобразующаяся как время и координаты, и есть четырёхвектор. Здесь все правильно, за исключением одного — четырёхвектор имеет *четыре компоненты*, а у нас фигурируют только две! Как уже говорилось,  $\omega$  и  $k$  подобны времени и одной координате про-

Ф и г. 34.11. Плоская волна, движущаяся под углом.



странства; для введения двух остальных координат надо изучить распространение света в трехмерном пространстве.

Пусть задана система координат  $x, y, z$  и волна движется в пространстве с волновым фронтом (фиг. 34.11). Длина волны есть  $\lambda$ , а направление распространения волны не совпадает ни с одной осью координат. Какой вид имеет формула движения для такой волны? Ответ очевиден: это  $\cos(\omega t - ks)$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $s$  (расстояние вдоль направления движения волны) — проекция вектора положения на направление движения. Запишем это следующим образом: пусть  $\mathbf{r}$  есть вектор точки в пространстве, тогда  $s$  есть  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k$ , где  $\mathbf{e}_k$  — единичный вектор в направлении движения волны. Иначе говоря,  $s$  равно  $r \cos(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k)$ , проекция расстояния на направление движения. Следовательно, наша волна описывается формулой  $\cos(\omega t - k\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{r})$ .

Оказывается очень удобным ввести вектор  $\mathbf{k}$ , называемый *волновым вектором*; величина его равна волновому числу  $2\pi/\lambda$ , а направление совпадает с направлением распространения волны

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi\mathbf{e}_k}{\lambda} = k\mathbf{e}_k. \quad (34.19)$$

Благодаря введению этого вектора волна приобретает вид  $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , или  $\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$ . Выясним смысл проекций  $k$ , например  $k_x$ . Очевидно,  $k_x$  есть скорость изменения фазы в зависимости от координаты  $x$ . Фиг. 34. 11 подсказывает нам, что фаза меняется с ростом  $x$  так, как если бы вдоль  $x$  бежала волна, но соответствующая ей длина волны оказывается *больше по величине*. «Длина волны в направлении  $x$ » больше истинной на множитель, равный секансу угла  $\alpha$  между осью  $x$  и направлением движения истинной волны:

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \alpha}. \quad (34.20)$$



Следовательно, скорость изменения фазы, *обратно* пропорциональная  $\lambda_x$ , в направлении  $x$  оказывается *меньше* на множитель  $\cos \alpha$ ; но этот же множитель содержит и  $k_x$ , равный модулю  $\mathbf{k}$ , умноженному на косинус угла между  $\mathbf{k}$  и осью  $x$ !

Итак, мы выяснили смысл волнового вектора, описывающего распространение волны в трехмерном пространстве. Четыре величины  $\omega$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  преобразуются в теории относительности как четырехвектор, причем  $\omega$  соответствует времени, а  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  соответствуют  $x$ ,  $y$  и  $z$  и компонентам четырехвектора.

Еще раньше, когда мы занимались теорией относительности (гл. 17), мы выяснили, что из четырехвекторов можно составить релятивистское штрихованное произведение. Взяв вектор положения  $x_\mu$  (где  $\mu$  нумерует четыре компоненты — время и три пространственные) и волновой вектор  $k_\mu$  (где  $\mu$  снова пробегает четыре значения), образуем штрихованное произведение  $x_\mu$  и  $k_\mu$ , записываемое в виде  $\sum' k_\mu x_\mu$ . Это произведение есть инвариант, не зависящий от выбора системы координат. Согласно определению штрихованного произведения, можно записать  $\sum' k_\mu x_\mu$  в следующем виде:

$$\sum' k_\mu x_\mu = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z. \quad (34.21)$$

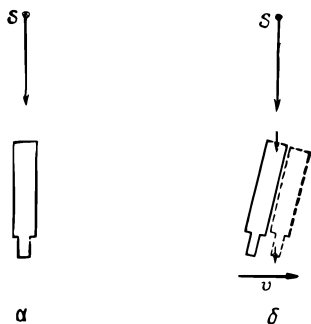
Поскольку  $k_\mu$  есть четырехвектор, то, как мы уже знаем,  $\sum' k_\mu x_\mu$  есть инвариант по отношению к преобразованиям Лоренца. Под знак косинуса в нашей формуле для плоской волны входит именно это произведение, и оно *обязано* быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. У нас не может появиться формула, у которой под знаком косинуса стоит неинвариантная величина, потому что мы знаем, что значение фазы не зависит от выбора системы координат.

## § 8. Аберрация

При выводе формул (34.17) и (34.18) мы взяли простой пример, когда  $\mathbf{k}$  лежит в направлении движения системы координат; но мы можем обобщить теперь эти формулы на другие возможные случаи. Пусть источник посылает луч света в определенном направлении; это направление фиксируется неподвижным наблюдателем, а мы движемся, скажем, по поверхности Земли в горизонтальном направлении (фиг. 34.12, а). В каком направлении падает луч света с нашей точки зрения? Можно получить ответ, записав четыре компоненты  $k_\mu$  и совершив преобразования Лоренца. Но можно воспользоваться и следующим рассуждением: чтобы увидеть луч, следует наш телескоп повернуть на некоторый угол (фиг. 34.12, б). По-

Фиг. 34.12. Удаленный источник света  $S$ .

$a$  — наблюдаемый через неподвижный телескоп;  $b$  — наблюдаемый через телескоп, движущийся в боковом направлении.



чему? Потому что свет падает сверху со скоростью  $c$ , а мы движемся горизонтально со скоростью  $v$ , и свет пройдет «прямо» через телескоп, если последний наклонить на некоторый угол. Легко понять, что расстояние по горизонтали равно  $vt$ , а по вертикали  $ct$ , и, обозначив угол наклона через  $\theta'$ , мы получим  $\operatorname{tg} \theta' = v/c$ . Замечательно! В самом деле, замечательно, если бы не одна маленькая деталь:  $\theta'$  не есть тот угол, под которым надо установить телескоп по отношению к поверхности Земли, потому что наш анализ проводился с точки зрения неподвижного наблюдателя. Горизонтальное расстояние, которое мы считали равным  $vt$ , неподвижный по отношению к Земле наблюдатель найдет равным совсем другой величине, так как он пользуется, с нашей точки зрения, «сжатой» линейной. Из-за эффекта сокращения возникает совсем другое соотношение:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (34.22)$$

что эквивалентно

$$\sin \theta = \frac{v}{c}. \quad (34.23)$$

Полезно вам самим получить это соотношение с помощью преобразования Лоренца.

Описанный выше эффект кажущегося изменения направления луча называется *абберацией* и обнаружен на опыте. Кажалось бы, как он может проявиться? Ведь никто не знает, где на самом деле расположена звезда. Пусть мы действительно смотрим на звезду в неправильном, кажущемся направлении, откуда нам известно, что оно неправильное? Известно; потому, что Земля обращается вокруг Солнца. Сегодня мы устанавливаем телескоп под одним углом, а через шесть месяцев мы должны его уже повернуть. Вот откуда мы знаем о существовании этого эффекта.

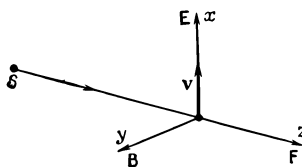
## § 9. Импульс световой волны

Займемся теперь другим вопросом. В прошлых главах мы ни разу не говорили о магнитном поле световой волны. Обычно эффекты, связанные с магнитным полем, очень малы, однако есть один интересный и важный эффект, возникающий под влиянием магнитного поля. Пусть имеется луч света, посылаемый каким-то источником, который действует на заряд и заставляет его колебаться вверх и вниз. Предположим, что электрическое поле направлено вдоль оси  $x$ ; тогда колебания заряда будут происходить тоже вдоль оси  $x$ : положение заряда дается значением  $x$ , а скорость заряда есть  $v$  (фиг. 34.13).

Магнитное поле направлено перпендикулярно электрическому. Электрическое поле, воздействуя на заряд, заставляет его раскачиваться вверх и вниз, а как действует магнитное поле? Магнитное поле действует только на движущийся заряд (пусть это будет, например, электрон); но электрон действительно движется, ведь он разгоняется электрическим полем, следовательно, оба поля действуют совместно. Двигаясь вверх и вниз с некоторой скоростью, электрон испытывает действительные силы, равной по величине произведению  $Bvq$ , а каково направление этой силы? *Направление силы совпадает с направлением распространения света.* Следовательно, падающий на заряд луч света заставляет его колебаться и, кроме того, тянет его с некоторой силой в направлении движения световой волны. Это явление носит название давления электромагнитных волн, или *светового давления*.

Определим величину светового давления. Она, очевидно, равна  $F = qvB$  или, поскольку заряд и поле осциллируют, равна *среднему по времени* от  $F$ , т. е.  $\langle F \rangle$ . Согласно (34.2), напряженность магнитного поля равна напряженности электрического поля, деленной на  $c$ , так что мы должны найти среднее от произведения электрического поля, скорости и заряда, деленного на  $c$ :  $\langle F \rangle = q\langle vE \rangle/c$ . С другой стороны, произведение заряда  $q$  на поле  $E$  есть сила, действующая на заряд со стороны электрического поля, а произведение силы на скорость есть работа в единицу времени  $dW/dt$ , совершаемая над зарядом!

Следовательно, сила («толкающий импульс»), сообщаемая заряду за 1 сек, равна *поглощаемой энергии* света за 1 сек,



Фиг. 34.13. Движущийся под действием электрического поля заряд, на который со стороны магнитного поля действует сила, направленная по световому лучу.

деленной на  $c$ ! Этот закон носит общий характер, поскольку нам не надо было знать силу осциллятора, а также взаимное уничтожение действия разных зарядов. В *каждом случае, когда происходит поглощение света, возникает давление*. Импульс, сообщаемый светом, всегда равен поглощаемой энергии, деленной на  $c$ :

$$\langle F \rangle = \frac{dW/dt}{c}. \quad (34.24)$$

Мы уже знаем, что свет переносит с собой энергию. Теперь мы приходим к выводу, что свет несет также и *импульс* и, кроме того, импульс световой волны всегда равен энергии, деленной на  $c$ .

И наоборот, при испускании света источник испытывает отдачу. Если атом излучает энергию  $W$  в некотором направлении, возникает импульс отдачи  $p = W/c$ . Пучок света, падающий по нормали к зеркалу, при *отражении* сообщает зеркалу в два раза большую силу.

Все сказанное находится в рамках классической теории света. Мы, конечно, знаем, что существует квантовая теория и что свет во многих отношениях ведет себя как частица. Энергия света — частицы — равна частоте, умноженной на постоянную

$$W = h\nu = \hbar\omega. \quad (34.25)$$

Раз свет переносит импульс, равный энергии, деленной на  $c$ , то эффективные частицы, *фотоны*, несут импульс

$$p = \frac{W}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k. \quad (34.26)$$

*Направление* импульса совпадает, разумеется, с направлением распространения света. Следовательно, можно записать это в векторной форме

$$W = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (34.27)$$

Мы знаем также, что энергия и импульс частицы образуют четырехвектор. Мы уже выяснили, что  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  тоже составляют четырехвектор. И очень хорошо, что в оба равенства (34.27) входит одна и та же константа; это означает, что квантовая теория и теория относительности согласуются друг с другом.

Уравнению (34.27) можно придать более элегантный вид:  $p_\mu = \hbar k_\mu$  (релятивистское уравнение для частицы, которая сопоставляется волне). Хотя это соотношение написано нами для фотонов, у которых  $k$  (модуль  $\mathbf{k}$ ) равно  $\omega/c$ , а  $p = W/c$ , на самом деле оно имеет гораздо более общий характер. В квантовой механике *все* частицы, а не только фотоны проявляют волновые свойства, причем частота и волновое число соответствующих волн связаны с энергией и импульсом ча-

стицы соотношениями (34.27) (они называются *соотношениями де-Бройля*), даже в случае  $p$ , не равного  $W/c$ .

В предыдущей главе мы видели, что свет с правой и левой круговой поляризацией также переносит *момент количества движения*, по величине пропорциональный энергии  $\mathcal{E}$  волны. С квантовой точки зрения пучок света с круговой поляризацией представляется в виде потока фотонов, каждый из которых несет момент количества движения  $\pm \hbar$ , направленный *по* или *против* движения. Вы видите, во что превращается поляризация с корпускулярной точки зрения — фотоны обладают моментом количества движения, как вращающиеся пули винтовки. Но картина с «пулями» столь же не полна, как и «волновая» картина, и нам предстоит обсудить эти представления более подробно в последующих главах, посвященных квантовым явлениям.

# Глава 35

## ЦВЕТОВОЕ ЗРЕНИЕ

§ 1. Человеческий глаз

§ 2. Цвет зависит от интенсивности

§ 3. Измерение восприятия цвета

§ 4. Диаграмма цветности

§ 5. Механизм цветового зрения

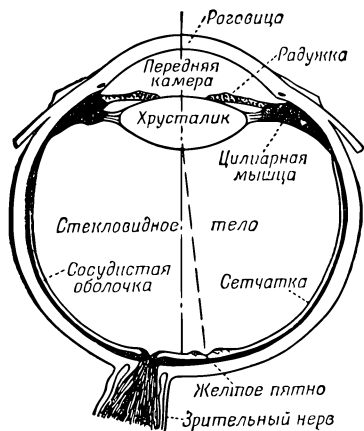
§ 6. Физико-химические свойства цветового зрения

### § 1. Человеческий глаз

Явление цвета отчасти обусловлено физическими процессами. Мы уже говорили о цветовой гамме мыльных пленок, вызванной интерференцией. Но цвет, кроме того, связан еще с функцией глаза и с тем, что происходит позади него, т. е. с деятельностью мозга. Физика изучает поведение света, пока он находится вне человеческого глаза, а наши ощущения, после того как свет попал в глаз, возникают в результате фотохимических и нервных процессов, а также психологических рефлексов.

С восприятием света связано множество интересных явлений, в которых тесно переплетаются и физические, и физиологические процессы, так что познание явлений природы, воспринимаемых через *зрение*, выходит за рамки физики как таковой. Мы не станем извиняться за то, что собираемся несколько вторгнуться в другие области науки, потому что, как мы уже подчеркивали, науки разделены не естественным путем, а лишь из соображений удобства. Природа вовсе не заинтересована в подобном разделении, и многие интересные явления лежат именно на стыке разных областей науки.

В гл. 3 мы в общих чертах говорили о связях физики с другими науками; теперь мы хотим более подробно исследовать ту область явлений, где физика и другие науки исключительно тесно связаны между собой. Эта область — восприятие света, *зрение*. Особое внимание мы уделим *цветовому зрению*. В этой главе мы в основном будем говорить о явлениях, связанных со зрением человека; следую-



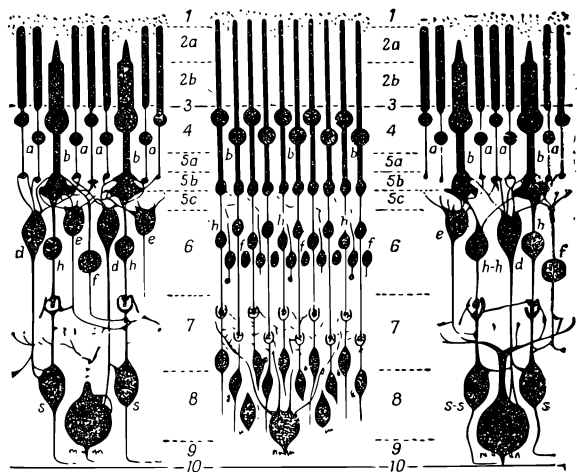
Фиг. 35.1. Строение глаза.

шая глава будет посвящена физиологическим аспектам зрения как у человека, так и у животных.

Зрение начинается с глаза; чтобы понять, как мы видим, нужно разобраться в устройстве самого глаза. В следующей главе мы довольно подробно будем говорить о функции отдельных частей глаза и их связи с нервной системой. А пока кратко опишем, как функционирует глаз.

Свет попадает в глаз через *роговицу* (фиг. 35.1); мы уже рассказывали раньше, как свет преломляется и отображается на задней поверхности глаза, на слое, который называется *сетчаткой*; разные части сетчатки воспринимают лучи от различных областей поля зрения вне глаза. Сетчатка не вполне однородна: в ее центре есть участок — пятно, который мы используем, когда нам необходимо видеть предметы особенно четко; в этом участке острота зрения особенно велика, называется он — *желтое пятно*, или центральная ямка. Легко убедиться непосредственно на опыте, что боковые участки глаза различают детали рассматриваемого предмета не столь эффективно, как центральный участок. В сетчатке имеется еще один участок, где зрительные нервы, несущие всю информацию, собираются вместе и выходят из глаза; этот участок называется *слепым пятном*. Сетчатка там не имеет чувствительности, и если, например, закрыть левый глаз и посмотреть перед собой, а затем медленно отодвигать палец (или другой небольшой предмет) из поля зрения, то в каком-то месте поля зрения этот предмет неожиданно исчезнет. Известен пока лишь один случай, когда из этого эффекта была извлечена реальная польза. Один физиолог, показавший действие слепого пятна, стал любимцем при дворе французского короля; на утомительных заседаниях со своими придворными король развлекался, отрубая им головы»: он смотрел на одного из них и следил, как в это время «исчезала» голова другого.

На фиг. 35.2 в увеличенном масштабе показана структура сетчатки. Различные части сетчатки имеют разную структуру.



Ф и г. 35.2. Структура сетчатки (свеи влодит снизу).

На периферических частях сетчатки наиболее часто встречаются удлинненные объекты, называемые палочками. Ближе к желтому пятну, кроме палочек, попадают еще колбочки. Позже мы опишем структуру этих элементов. Чем ближе к желтому пятну, тем больше становится колбочек, а в самом желтом пятне фактически имеются одни только колбочки, лежащие столь тесно, что здесь они много мельче, или уже, чем в других местах сетчатки. Следовательно, в центре поля зрения мы видим с помощью колбочек, а на периферии в восприятии света участвуют палочки. Интересно, что любая чувствительная к свету клетка в сетчатке не связана со зрительным нервом непосредственно, а соединена с другими клетками, которые в свою очередь соединены между собой. Существует несколько типов клеток: одни несут информацию к зрительному нерву, а другие связаны между собой в основном в «горизонтальном» направлении. Всего имеется четыре типа клеток, но мы сейчас не будем об этом говорить подробно, а только подчеркнем основную идею: что световой сигнал уже на этом этапе «продумывается». Иначе говоря, информация, полученная от различных клеток, не сразу поступает в мозг от каждой точки в отдельности, а частично осмысливается в сетчатке путем комбинирования информации от нескольких зрительных рецептов. Важно понять, что сам глаз выполняет часть функций осмысливания, свойственных головному мозгу.



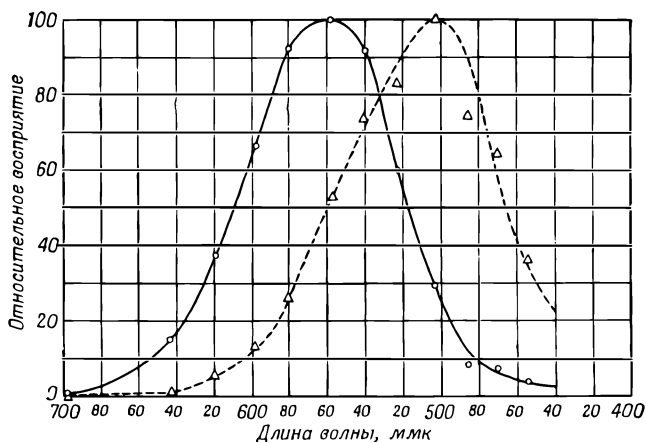
## § 2. Цвет зависит от интенсивности

Одним из самых примечательных свойств зрения является способность глаза привыкать (адаптироваться) к темноте. Когда из ярко освещенной комнаты мы входим в темную, то некоторое время мы ничего не видим, и лишь постепенно окружающие предметы начинают вырисовываться все явственнее, и в конце концов мы начинаем замечать то, чего раньше совсем не видели. При очень слабом свете предметы кажутся *лишенными окраски*. Было установлено, что зрение в условиях темновой адаптации осуществляется почти исключительно с помощью палочек, а в условиях яркого света — с помощью колбочек. В результате мы распознаем целый ряд явлений, связанных с передачей функции зрения от палочек и колбочек, действующих совместно, к одним только палочкам.

Во многих случаях объекты, которые считаются одноцветными, при увеличении интенсивности света могут приобрести окраску и стать изумительно красивыми. Например, изображение какой-нибудь слабой туманности в телескопе обычно кажется «черно-белым», однако астроному Миллеру из обсерваторий Маунт Вильсон и Паломар удалось благодаря своему терпению получить *цветные* снимки нескольких туманностей. Никто никогда не видел окраски туманностей своими глазами, но это не значит, что цвета созданы искусственным путем, просто интенсивность света была слишком мала, чтобы колбочки наших глаз могли определить цвет. Особенно красивы Кольцевидная и Крабовидная туманности. На снимке Кольцевидной туманности центральная часть окрашена в прекрасный синий цвет и окружена она ярким красным ореолом, а на снимке Крабовидной туманности на фоне голубоватой дымки перемежаются яркие красно-оранжевые нити.

При ярком свете чувствительность палочек, по-видимому, очень мала, но в темноте с течением времени они приобретают способность видеть. Относительные изменения интенсивности, к которым глаз может приспосабливаться, превышают один миллион раз. Природа придумала для этой цели два рода клеток: одни видят при ярком свете и различают цвета — это колбочки, другие приспособлены видеть в темноте — это палочки.

Отсюда возникают интересные следствия: первое — это обесцвечивание предметов (в слабом свете), а второе — различие в относительной яркости двух предметов, окрашенных в разные цвета. Оказывается, палочки видят синий конец спектра лучше, чем колбочки, но зато колбочки видят, например, темно-красный цвет, тогда как палочки его совершенно не могут увидеть. Поэтому для палочек красный цвет — все равно что черный. Если взять два листка бумаги, скажем



Ф и г. 35.3. Спектральная чувствительность глаза.  
Сплошная кривая — на свету; пунктирная — в темноте.

красный и синий, то в полутьме синий будет казаться ярче красного, хотя при хорошем освещении красный листок гораздо ярче синего. Это совершенно поразительное явление. Если мы в темноте рассматриваем ярко раскрашенную обложку журнала и представляем себе ее расцветку, то на свету все становится совершенно неузнаваемым. Описанное выше явление называется *эффектом Пуркинье*.

На фиг. 35.3 пунктирная кривая характеризует чувствительность глаза в темноте, т. е. чувствительность за счет палочек, а сплошная кривая относится к зрению на свету. Видно, что максимальная чувствительность палочек лежит в области зеленого цвета, а колбочек — в области желтого цвета. Поэтому красный листок (красный цвет имеет длину волн около 650 ммк), хорошо видный при ярком свете, почти совсем не виден в темноте.

Тот факт, что зрение в темноте осуществляется с помощью палочек, а в окрестности желтого пятна палочек нет, проявляется еще и в том, что мы видим в темноте предметы, находящиеся прямо перед нами, не столь отчетливо, как предметы, расположенные сбоку. Слабые звезды и туманности иногда бывает легче заметить, если смотреть на них несколько вбок, потому что в центре сетчатки палочек почти совсем нет.

Уменьшение числа колбочек к периферии глаза в свою очередь приводит еще к одному интересному эффекту — на краю поля зрения даже яркие предметы теряют свою окраску. Этот эффект легко проверить. Зафиксируйте свой взгляд в каком-то определенном направлении и попросите приятеля, чтобы он подошел к вам сбоку, держа в руке ярко раскрашен-

ные листки. Попробуйте определить цвет листков, прежде чем они окажутся прямо перед вами. Вы обнаружите, что сами листки увидели задолго до того, как смогли определить, какого они цвета. Лучше, если ваш приятель будет входить в поле зрения со стороны, противоположной слепому пятну, иначе возникнет путаница: вы начнете уже различать цвета, и вдруг все исчезнет, а затем листки снова появятся и вы ясно различите их цвет.

Интересно также, что периферия сетчатки исключительно чувствительна к движению объектов зрения. Хотя мы плохо видим, когда смотрим искоса, одним уголком глаза, тем не менее сразу замечаем летящего сбоку жука или мошку, даже если вовсе не ожидали увидеть что-либо на этом месте. Нас так и «тянет» посмотреть, что это там мелькает на краю поля зрения.

### § 3. Измерение восприятия цвета

Теперь мы займемся зрением, осуществляемым с помощью колбочек, т. е. зрением при ярком освещении. Самое главное и самое характерное свойство такого зрения — это цвет. Мы уже знаем, что белый свет с помощью призмы можно разложить на целый спектр лучей с разными длинами волн, которые кажутся нам окрашенными в разные цвета; цвета именно *кажутся* — это определенные ощущения. Свет от любого источника можно проанализировать с помощью дифракционной решетки или призмы и найти его спектральное распределение, т. е. «количество» света той или иной длины волны. Один луч света может содержать большое количество синего, немного красного и совсем мало желтого, другой содержит цвета в иной пропорции и т. д. Для физики такой характеристики будет вполне достаточно, но здесь нам надо ответить на вопрос: какого *цвета* будет луч, каким он нам покажется? Очевидно, что окраска как-то связана со спектральным распределением света, но наша задача состоит в том, чтобы найти, от какой именно характеристики спектрального распределения зависит восприятие того или иного цвета. Например, как получить зеленый цвет? Нам хорошо известно, что можно просто выбрать соответствующий участок спектра. А нет ли *другого* способа получить зеленый, оранжевый и вообще любой цвет?

Может ли быть несколько спектральных распределений, вызывающих один и тот же зрительный эффект? Ответ совершенно определенный — *да, может*. Число различных зрительных восприятий довольно ограничено; как мы вскоре увидим, это число охватывает всего лишь трехмерное множество восприятий, а число кривых — спектральных распределений для разных источников — бесконечно. Возникает вопрос,

который мы и обсудим в первую очередь: при каких условиях различные распределения выглядят как один и тот же цвет?

Самый действенный психофизический способ оценки цветовой чувствительности состоит в использовании глаза как *нулевого прибора*. При этом не нужно исследовать, как складывается ощущение зеленого цвета, или измерять факторы, которые вызывают ощущение зеленого цвета, это было бы слишком сложно. Вместо этого мы изучим условия, при которых два раздражения (два воздействия) становятся *неразличимыми*. При этом нам нет необходимости знать, могут ли два человека получить в разных условиях одинаковое зрительное ощущение, а нужно лишь установить, что два раздражения, вызывающие одинаковые ощущения у одного человека, приводят к одинаковым ощущениям и у другого. Совершенно излишне сравнивать зрительные ощущения двух разных людей, смотрящих на один и тот же, скажем, зеленый предмет. Об этом мы ничего не знаем.

Для иллюстрации возможностей этого метода возьмем набор из четырех проекционных фонарей, снабженных фильтрами. Их яркость может непрерывно меняться в широких пределах: первый фонарь имеет красный фильтр и отбрасывает на экран красное пятно, второй — зеленый фильтр и дает зеленое пятно, третий — синий фильтр, и, наконец, четвертый образует на экране белый круг с черным пятном посередине. Включим красный и зеленый фонари так, чтобы пятна света на экране частично перекрывались, тогда область перекрывающихся пятен вызовет у нас ощущение нового цвета, не красновато-зеленого, а желтого. Изменяя пропорцию красного и зеленого, можно пройти через всевозможные оттенки оранжевого и т. д. Установив на экране определенный желтый цвет, можно получить точно такой же цвет, смешивая другие компоненты, например используя желтый фильтр и смешав затем желтый свет с лучом белого цвета. Другими словами, одни и те же цвета можно создавать несколькими способами, смешивая свет от разных фильтров.

Открытое нами явление аналитически можно записать следующим образом. Обозначим данный желтый цвет символом  $Y$ ; он представляет собой сумму некоторых количеств света от красного фильтра ( $R$ ) и от зеленого ( $G$ ). С помощью двух чисел, скажем  $r$  и  $q$ , определяющих яркости ( $R$ ) и ( $G$ ), формула для желтого цвета записывается в виде

$$Y = rR + qG. \quad (35.1)$$

Вопрос теперь заключается в том, можно ли *каждый* цвет получить сложением двух или трех различных фиксированных цветов? Попробуем ответить на этот вопрос. Конечно, нельзя получить любой цвет, смешивая только зеленый и красный,

потому что синий цвет в такой комбинации никогда не получится. Однако если добавить к ним синий, то в месте пересечения всех трех цветовых пятен можно добиться появления чистого белого цвета. Смешивая три разных цвета в разных пропорциях, в области пересечения можно получить цвета в очень широком диапазоне, поэтому не исключено, что смешение трех таких цветов может в принципе дать *любой* цвет. Мы потом рассмотрим, в какой мере это утверждение правильно: по существу оно верно, а вскоре мы сформулируем его более точно.

Совместим цветовые пятна от всех трех фонарей в одном месте и попытаемся подобрать такой же цвет, какой появляется во внешнем кольце от четвертого фонаря, опоясывающем пятно смешанного цвета. Свет от четвертого фонаря, который мы сначала считали «белым», теперь кажется бледно-желтым. Попытаемся подобрать этот цвет, смешивая красный, зеленый и синий; оказывается, методом проб и ошибок можно создать «кремовый» цвет, оттенок которого очень близок к нужному нам цвету. Поэтому легко поверить, что и любой цвет можно подобрать сочетанием красного, зеленого и синего цвета. Мы попробуем позже получить желтый цвет, но сначала хотелось бы создать один цвет, который получить очень трудно. Когда читают лекции о цвете, обычно демонстрируют «яркие» цвета и никогда не показывают *коричневого*; пожалуй, даже невозможно вспомнить, чтобы кто-либо видел коричневый свет. И действительно, этот свет никогда не используют, скажем, в сценических эффектах, и прожекторов с коричневым светом никто не видел; все как будто указывает на то, что получить коричневый свет невозможно. По этому поводу стоит, однако, заметить, что мы просто не привыкли видеть коричневый свет сам по себе, без всякого фона. Практически его можно создать, смешивая в некоторой пропорции красный и желтый. Чтобы убедиться, что на экране действительно получился коричневый цвет, достаточно увеличить яркость окружающего фона, на котором расположено цветовое пятно, и вы увидите пятно того самого цвета, который мы называем коричневым! Коричневый цвет всегда выглядит темным на фоне более светлого окружения. Легко получить коричневый цвет самых разных оттенков. Например, если уменьшить долю желтого света, возникнет красновато-коричневый цвет с шоколадным оттенком, а если добавить зеленый, получится ужасный цвет военного обмундирования, принятый в армии. Но сам по себе свет, создающий этот цвет, не так уж страшен — он просто желтовато-зеленый цвет, который рассматривается на светлом фоне.

Поставим теперь желтый фильтр на четвертый фонарь и попробуем путем смешивания подобрать такой же желтый

цвет. (Яркость четвертого фонаря должна находиться в пределах яркости первых трех, иначе мы не сумеем создать смешанный цвет точно такой же яркости.) Оказывается, мы *можем* получить желтый цвет; достаточно только смешать зеленый и красный, а для оттенка добавить немного синего. После этого уже нетрудно поверить, что при соответствующих условиях можно в точности подобрать любой заданный цвет.

Давайте обсудим теперь законы смешивания цветов. Прежде всего, как мы уже говорили, один и тот же цвет может быть создан различными спектральными распределениями; далее, мы заметили, что «каждый» цвет может быть получен смешиванием трех основных цветов: красного, синего и зеленого. Наиболее интересное свойство смеси цветов состоит в следующем: пусть задан свет определенного состава, назовем его  $X$ , который на глаз неотличим от другого света  $Y$  (они могут иметь разные спектральные распределения, но зрительно *кажутся* одинаковыми); назовем эти цвета «одинаковыми» в том смысле, что глаз видит их как одинаковые, и запишем

$$X = Y. \quad (35.2)$$

Прибавим к *каждому* цвету новый, скажем  $Z$  (запись  $X + Z$  означает, что два световых пучка падают на одно и то же место экрана), и точно такой же пучок света добавим к  $Y$ . Тогда один из основных законов цвета выражается так: если два спектральных распределения неразличимы на глаз по цвету, то после добавления к ним одинакового количества нового цвета *смеси будут по-прежнему неразличимы*:

$$X + Z = Y + Z. \quad (35.3)$$

Мы только что смогли подобрать два одинаковых желтых цвета; если оба цвета осветить розовым светом, то они останутся одинаковыми. Итак, добавив любой цвет к одинаковым цветам, получим одинаковый цвет. Обобщая все цветовые явления этого рода, можно сказать и по-другому: если цвета двух расположенных рядом друг с другом лучей света в одних условиях выглядят одинаковыми, то при любых смешениях они останутся одинаковыми и один луч может быть заменен другим при любом смешении цветов. Важным и интересным оказывается также то обстоятельство, что совпадение цветов не зависит от свойств зрения в момент наблюдения; известно, что если долго смотреть на яркую красную поверхность или яркий красный свет, а затем взглянуть на белый лист бумаги, то он покажется зеленоватым и другие цвета также будут восприниматься с искажениями (из-за того, что мы долго перед этим смотрели на ярко-красный цвет). Пусть мы добились совпадения двух желтых цветов, а затем долго смотрели на яркий красный цвет; повернувшись снова к жел-

тым пятнам, мы обнаружим, что они уже не кажутся нам больше желтыми (какими именно они будут казаться — я не знаю, но только не желтыми).

Однако в любом случае *оба цвета по-прежнему будут казаться одинаковыми*, т. е. способность глаза приравнивать два цвета сохраняется, несмотря на адаптацию в условиях разной интенсивности. Очевидным исключением является только случай очень малой интенсивности, когда функция зрения переходит от колбочек к палочкам; здесь уже нельзя говорить о сравнении цветов, так как система зрения совсем другая.

Второй закон смешения цветов состоит в следующем: *любой цвет может быть получен смешением трех разных цветов* (в нашем случае зеленого, красного и синего). Мы уже продемонстрировали на двух примерах, что смешение трех цветов может дать самые разные цвета. Описанные выше законы, кроме того, очень интересны с математической точки зрения. Для тех, кого интересует математическая сторона проблемы, мы расскажем о ней более подробно. Возьмем три наших цвета — зеленый, красный и синий, обозначим их буквами  $A$ ,  $B$  и  $C$  и назовем их *основными*. Тогда любой цвет может быть получен смешением определенных количеств каждого из данных трех цветов: например, цвет  $X$  создается смесью количества  $a$  цвета  $A$ , количества  $b$  цвета  $B$  и количества  $c$  цвета  $C$ :

$$X = aA + bB + cC. \quad (35.4)$$

Составим теперь из тех же трех цветов новый цвет  $Y$ :

$$Y = a'A + b'B + c'C. \quad (35.5)$$

Тогда смесь цветов  $X$  и  $Y$  определяется суммами их компонент в основных цветах (как следствие двух главных законов цвета, приведенных выше):

$$Z = X + Y = (a + a')A + (b + b')B + (c + c')C. \quad (35.6)$$

Это правило очень напоминает суммирование векторов, причем  $(a, b, c)$  играют роль компонент одного вектора, а  $(a', b', c')$  — компонент второго, и новый свет  $Z$  определяется «суммой» векторов. Такое соответствие постоянно привлекало к себе внимание физиков и математиков. В частности, Шредингер написал замечательную работу о цветовом зрении, в которой он развил теорию «векторного анализа» в применении к смеси цветов.

Возникает вопрос: как нужно выбрать основные цвета? В самом деле, никакого единственно правильного выбора нет. С практической точки зрения иногда оказывается более полезным выбрать определенные три цвета, потому что они дают в смеси большее число оттенков, но мы не будем сейчас на этом останавливаться.

Любые три по-разному окрашенных пучка света могут образовать какой угодно другой цвет, если их смешать в нужной пропорции. Возможно ли показать на опыте действие этого удивительного, фантастического правила? Возьмем вместо красного, зеленого и синего света фонари с красным, синим, желтым фильтром и посмотрим, образует ли смесь этих цветов, скажем, зеленый цвет.

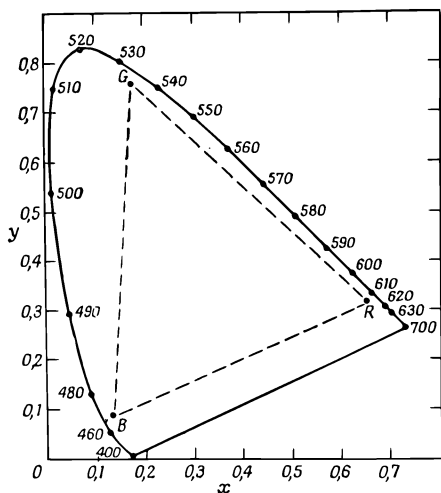
Смешивая эти три новых цвета в разных пропорциях, мы получаем целый спектр разных цветов. Но после целого ряда проб и ошибок мы убеждаемся, что ничего похожего на зеленый цвет получить не удастся. А можем ли мы вообще образовать зеленый цвет? Да, можем. Но каким образом? Проецируя красный свет на зеленое пятно, мы можем затем подобрать точно такой же цвет путем смешения желтого и синего! Таким путем мы составляем две комбинации одного цвета, правда, немного сжульничав, так как поместили красный в другую комбинацию. Но поскольку мы уже умеем разбираться в математических ухищрениях, то прекрасно понимаем, что вместо доказательства возможности составления цвета  $X$  из трех других цветов, например желтого, красного и голубого, мы установили, что красный плюс цвет  $X$  могут быть сделаны из желтого и голубого. Перенесем теперь красный цвет в другую часть равенства и будем интерпретировать его как отрицательную величину. Следовательно, в уравнениях типа (35.4) возможны как положительные, так и отрицательные значения коэффициентов, причем отрицательным величинам придается такой смысл, что их следует перенести в другую часть равенства со знаком плюс, тогда каждый цвет может быть действительно составлен из любых трех, и говорить о каком-то «правильном» выборе основных цветов бессмысленно.

Возникает вопрос, всегда ли при составлении смеси любого цвета входят три основных цвета с положительными коэффициентами? Нет, не всегда. Для каждой тройки основных цветов имеются цвета, для которых в смеси появляется отрицательный коэффициент, и поэтому однозначного способа выбора основной тройки не существует. В популярных книжках красный, зеленый и синий обычно называют основными цветами, но это объясняется только тем, что с их помощью можно создать более широкий набор цветов при положительных значениях коэффициентов в комбинации основных.

#### § 4. Диаграмма цветности

Рассмотрим теперь смешивание цветов с математической точки зрения как некое геометрическое построение. Цвет, описываемый уравнением (35.4), можно представить вектором





Фиг. 35.4. Стандартная диаграмма цветности.

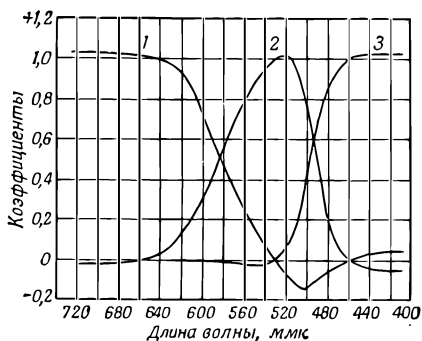
в трехмерном пространстве, где по трем осям отложены величины  $a$ ,  $b$  и  $c$ , т. е. данному цвету соответствует точка в пространстве. Точка, соответствующая другому цвету, у которого компоненты равны  $a'$ ,  $b'$  и  $c'$ , расположена в другом месте. Как мы уже знаем, сумма двух цветов есть новый цвет, который получается векторным суммированием первых двух. Диаграмму можно упростить и изобразить все на плоскости, если воспользоваться следующим наблюдением: возьмем свет определенной окраски и просто удвоим коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$ , т. е. все компоненты увеличим, а соотношение между ними оставим неизменным; тогда получится свет той же самой окраски, но более яркий. Поэтому можно привести любой свет к *одной и той же интенсивности* и затем спроектировать все построение в трехмерном пространстве на плоскость, как это сделано на фиг. 35.4.

Отсюда следует, что любой цвет, полученный смешением двух заданных цветов, изображается точкой, лежащей на линии, которая соединяет оба выбранных цвета. Например, смесь, составленная из равных частей обоих цветов, лежит на середине соединяющего их отрезка; смесь из  $1/4$  одного цвета и  $3/4$  другого лежит на расстоянии  $1/4$  длины отрезка и т. д.

Если в качестве основных цветов выбрать красный, зеленый и синий, то все цвета, получаемые из них с положительными коэффициентами, лежат внутри треугольника, изображенного на рисунке пунктиром. По существу, треугольник содержит почти все цвета, которые мы видим, поскольку вообще все цвета, доступные нашему зрению, заключены внутри кривой довольно странной формы, немного выступающей за треугольник. Откуда взялась эта кривая? Кто-то когда-то

Ф и г. 35.5. Цветовые коэффициенты чистых спектральных тонов для некоторого выбора основных цветов.

1 — красный; 2 — зеленый; 3 — синий.



весьма тщательно составил смеси всех видимых цветов из трех выбранных. Но мы не будем проверять *все* цвета; достаточно исследовать лишь чистые спектральные тона, линии спектра. Любой цвет можно рассматривать как сумму чистых спектральных тонов с различными, но положительными коэффициентами (чистых с физической точки зрения). Любой цвет состоит из некоторых количеств красного, желтого, синего и т. д. по всем цветам спектра. Зная, как составлены спектральные тона из трех основных цветов, можно вычислить необходимую пропорцию основных цветов и для какого угодно цвета. Поэтому, определив *цветовые коэффициенты* всех спектральных тонов по отношению к трем основным цветам, легко составить полную таблицу смешения цветов.

В качестве примера на фиг. 35.5 приведены опытные данные по смешению трех цветов. Кривые показывают количество каждого из трех основных цветов (красного, зеленого, синего), образующих при смешении любой из цветов спектра. Красный цвет расположен на левом конце спектра, следом идет желтый цвет и т. д. до синего цвета, расположенного на правом краю. Заметьте, что в некоторых случаях необходимо брать отрицательные коэффициенты. Именно из таких данных и были определены положения точек для всех цветов на диаграмме, причем координаты  $x$  и  $y$  связаны с относительными количествами основных цветов, использованных для получения различных цветов. Отсюда же была найдена и граничная кривая диаграммы. Она представляет собой геометрическое место всех чистых спектральных тонов. Но каждый цвет может быть получен смешением спектральных тонов, поэтому любой цвет на линии, соединяющей две произвольные точки кривой, существует в природе. На диаграмме прямая соединяет крайний фиолетовый и далекий красный концы спектра. На ней расположены пурпурные цвета. Внутри кривой находятся те цвета, которые могут быть получены с помощью света, а цвета вне кривой вообще не могут быть созданы светом, и никто их никогда не видел (разве только во сне!).

## § 5. Механизм цветового зрения

Первый вопрос, который возникает по поводу изложенных закономерностей: *почему* цвета ведут себя таким образом?

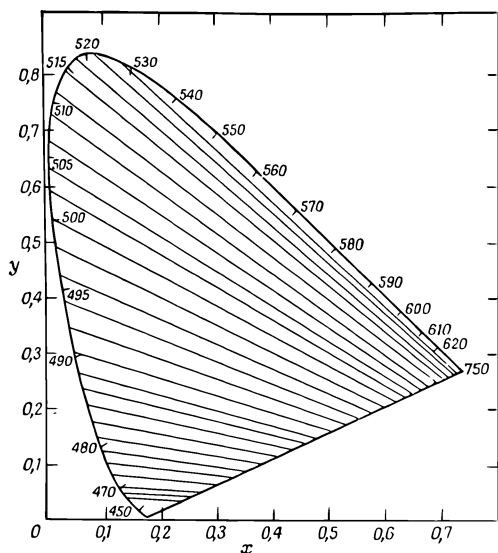
Простейшая теория, предложенная Юнгом и Гельмгольцем, предполагала, что глаз обладает тремя сортами пигментов, восприимчивых к свету, и что спектры поглощения этих пигментов разные, скажем, один сильно поглощает красный свет, другой — синий, а третий — зеленый. Поэтому когда свет попадает в глаз, поглощение в каждой из трех областей происходит по-разному, а, исследуя разную поступающую информацию, наш мозг, или глаз, или еще что-то решает, какой цвет попал в глаз. Легко показать, что из предположения о трех сортах пигментов вытекают все правила смешения цветов.

Дальше казалось бы, оставалось определить кривые поглощения всех трех пигментов, но по этому поводу возникли серьезные разногласия. К несчастью, оказалось, что можно найти только всевозможные линейные комбинации кривых поглощения, а не сами кривые для каждого пигмента в отдельности, потому что координаты на диаграмме могут быть повернуты любым образом. Пробовали использовать самые разные пути для получения кривых, характеризующих отдельные физические свойства глаза. Одна из таких кривых, называемая *кривой яркости*, представлена на фиг. 35.3.

На рисунке показаны две кривые: одна для глаза, адаптированного к темноте, а другая для зрения на свету (последняя характеризует зрение с помощью колбочек). Кривая указывает наименьшую яркость света данной окраски, которую еще способен воспринять глаз, т. е. характеризует чувствительность глаза в разных областях спектра.

Существует другой, очень интересный способ измерения этой же величины. Возьмем два цвета и будем попеременно показывать их на экране. Тогда, если частота их появления достаточно мала, мы увидим на экране мелькание. С увеличением частоты мелькание в конце концов исчезнет. Это произойдет при некоторой частоте, зависящей от яркости света и равной, скажем, 16 повторениям в секунду. Теперь можно так подобрать яркости, или интенсивности, двух цветов относительно друг друга, чтобы мелькание цвета при 16 циклах исчезало. При установленной яркости мелькание цветов возникает, только если перейти к меньшей частоте. Следовательно, при большей частоте мы получаем так называемое мелькание яркости, а при меньших частотах — мелькание цвета. Таким способом удается подобрать два цвета с «одинаковой яркостью». Получающиеся отсюда результаты почти, но не совсем аналогичны данным по пороговой чувствительности глаза к

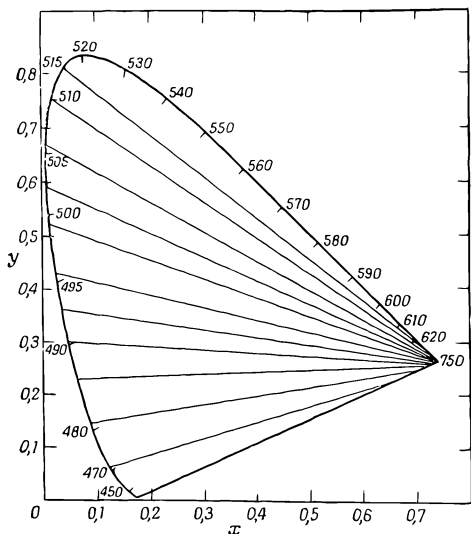
Ф и г. 35.6. Смещение цветов у дейтеранопов.



слабым потокам света, наблюдаемым с помощью колбочек. Большинство специалистов при определении кривой яркости пользуются данными опыта с мельканием цвета.

Итак, если глаз содержит три рода цветочувствительного пигмента, то задача заключается в определении формы спектра поглощения для каждого из них. Как это сделать? Известно, что встречаются люди не различающие цветов; среди мужчин их насчитывается 8%, а среди женщин — 0,5%. Большинство людей, имеющих какие-либо отклонения в цветовом зрении или вообще им не обладающих, чувствительны к изменению цвета в разной степени, но для всех них характерно восприятие трех основных цветов. Есть, однако, и такие люди (их называют *дихроматами*), для которых любой цвет составлен из *двух* основных цветов. Естественно предположить, что у них отсутствует один из трех пигментов. Если бы существовало три типа дихроматов, для которых правила смещения были бы различны, то у одних должна была бы отсутствовать *красная* пигментация, у других — *зеленая*, а у третьих — *синяя*. По измерению восприятия цвета у этих трех типов людей можно определить три искомые кривые поглощения! И действительно, обнаружено три типа дихроматов: два из них встречаются довольно часто, а третий — крайне редко; измерения дали возможность установить спектры поглощения пигмента.

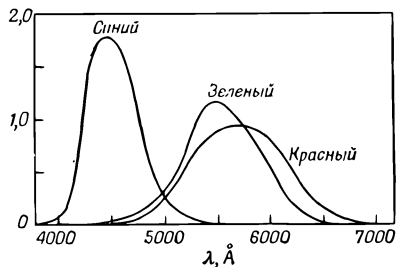
На фиг. 35. 6 показан механизм смещения цветов у одного типа людей, страдающих неправильным цветовым восприятием, — так называемых дейтеранопов. У них определенному



Фиг. 35.7. Дефект цвета  
вого зрения, свойственны  
протанопам.

цвету отвечает на диаграмме линия, а не точка, т. е. все цвета линии кажутся им одинаковыми. Если правильно предположение об отсутствии у такого типа людей одной из трех составных частей цветовой информации, то все линии постоянного цвета должны пересечься в одной точке. Тщательное измерение на графике показывает, что линии действительно пересекаются в одной точке. Но эти линии были, очевидно, вычислены математиками и вовсе не являются истинными опытными данными! В самом деле, если взять последние опытные данные, то окажется, что точка пересечения на фиг. 35.6 находится не там, где она должна быть. Указанное на рисунке положение линий приводит к физически неправильному спектру поглощения: в ряде областей возникает и положительное, и отрицательное поглощение. Но из последних данных Юстовой получается, что кривые поглощения всюду положительны.

Фиг. 35.7 иллюстрирует другой дефект цветового зрения, свойственный протанопам; линии на рисунке сходятся к точке



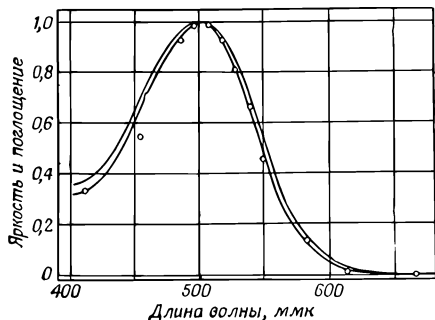
Фиг. 35.8. Кривые спектральной чувствительности для рецепторов, воспринимающих три основных цвета.

вблизи красного конца граничной кривой. Примерно такое же положение точки пересечения получается и из данных Юстовой. Измерения восприятия цвета у людей, страдающих тремя разными дефектами цветового зрения, окончательно установили кривые поглощения для трех пигментов, они приведены на фиг. 35.8. Окончательно ли? Может быть. Остается выяснить еще следующие вопросы: справедлива ли на самом деле теория трех пигментов, проистекают ли дефекты восприятия цвета из-за недостатка пигмента, и, кроме того, непонятно, насколько правильны данные по смешению цвета в случае дефектов зрения. Ряд исследователей получили разные результаты. И вопросы эти пока находятся в стадии изучения.

### § 6. Физико-химические свойства цветового зрения

Что можно сказать о сравнении полученных кривых со свойствами настоящего глазного пигмента? Пигменты, извлекаемые из сетчатки, главным образом состоят из одного вида, называемого *зрительным пурпуром*. Его самые примечательные свойства заключаются в том, что он присутствует в глазах почти всех позвоночных животных и его кривая поглощения почти точно совпадает с кривой чувствительности глаза.

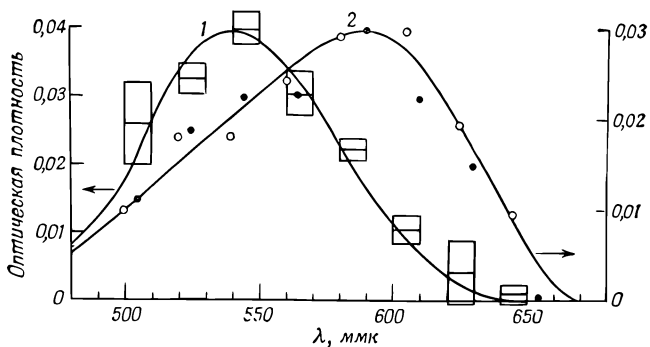
На фиг. 35.9 в одном масштабе изображены кривая поглощения зрительного пурпура и кривая чувствительности глаза; адаптированного к темноте. Очевидно, именно с помощью пурпура мы получаем возможность видеть в темноте. Зрительный пурпур представляет собой пигмент палочек и никакого отношения к цветовому зрению не имеет. Этот факт был установлен в 1877 г. Но и сейчас мы должны сказать, что цветовые пигменты колбочек ни разу не были выделены в пробирках. В 1958 г. еще можно было утверждать, что их никто никогда не видел. Но с тех пор два из них были обнаружены Раштоном, который применил очень простой и красивый метод.



Фиг. 35.9. Кривая чувствительности глаза при сумеречном зрении и кривая поглощения зрительного пурпура.

Трудность, по-видимому, заключается в том, что глаз гораздо менее чувствителен к яркому свету, чем к свету малой интенсивности и, следовательно, для зрения требуется много пурпура, но относительно мало пигмента, восприимчивого к цвету. Замысел Раштона состоял в том, чтобы *пигмент оставить в глазе* и там как-то определить его свойства. Конкретно он сделал следующее. Есть такой прибор — офтальмоскоп, который позволяет послать луч света в глаз через хрусталик и сфокусировать отраженный глазом свет. С помощью этого прибора можно измерить количество отраженного света. В результате получают коэффициент отражения для света, *дважды* прошедшего через пигмент (свет отражается задними слоями глазного яблока и снова проходит через пигмент колбочек). В природе не часто бывает так здорово устроено. Колбочки устроены так хитро, что попадающий в них свет многократно отражается и постепенно доходит до маленьких чувствительных точек в вершинах колбочек. Попав прямо в чувствительную точку, свет отражается и выходит обратно, проделав значительный участок пути в светочувствительном пигменте. Кроме того, если направить луч в желтое пятно, где нет палочек, можно избежать побочного действия зрительного пурпура. Цвет сетчатки наблюдали уже давно, он имеет оранжево-розоватый оттенок; но сюда примешивается также цвет кровеносных сосудов и цвет задней стенки глаза и т. д. Как узнать, когда в офтальмоскопе виден сам пигмент? *Ответ:* сначала нужно найти человека с дефектом цветового зрения, у которого пигментов меньше и, следовательно, на котором легче провести анализ. Во-вторых, многие пигменты, в частности зрительный пурпур, обесцвечиваются на свету и теряют свою интенсивность; при освещении их концентрация меняется. Поэтому при измерении спектра поглощения глаза Раштон освещал весь глаз *другим* пучком, меняющим концентрацию пигмента, и измерял *изменение* спектра, на котором уже не сказывается отражение от сосудов, задней стенки глаза и т. д. Таким путем Раштону удалось получить кривую поглощения для чистого пигмента в глазе протанопа, показанную на фиг. 35.10.

Вторая кривая на фиг. 35.10 получена при исследовании нормального глаза следующим методом: после предварительного изучения нормального глаза и определения, к каким лучам чувствителен данный пигмент, другой пигмент обесцвечивался красным светом, к которому первый пигмент нечувствителен. Красный свет не воздействует на глаз протанопа, а нормальный глаз к этому свету чувствителен: таким способом можно получить кривую для отсутствующего пигмента. Форма одной кривой прекрасно согласуется с кривой Юстовой для зеленого пигмента, но другая кривая, красная,



Ф и г. 35.10. Спектр поглощения цветового пигмента про-  
 танапа (квадратики) и нормального глаза (точки).  
 В опыте луч проходил сквозь слой пигмента дважды.

несколько смещена. Можно думать поэтому, что мы находимся на правильном пути. А может быть, и нет. Последние данные, полученные при исследовании дейтеранопов, не указывают на отсутствие какого-то определенного пигмента.

Явление цвета не относится к физике света как таковой. Цвет есть *ощущение*, а ощущение разных цветов в различных условиях различно. Если, например, взять розовый свет, полученный при сложении пучков белого и красного света (из красного и белого может, очевидно, получиться только розовый цвет), то в сравнении с ним белый свет может показаться голубым. Предмет, поставленный на пути лучей, отбрасывает две тени — одна из них освещается только белым, а другая — только красным светом. Для большинства людей «белая» тень кажется голубой, но, если увеличить область тени, пока она не закроет весь экран, мы неожиданно увидим белый, а не голубой цвет! Подобные эффекты можно получить и при смешивании красного, белого и желтого света. Эта смесь может дать только оранжево-желтый цвет с разными оттенками. Смешав эти цвета в равных количествах, мы получим только оранжевый цвет. Тем не менее, рассматривая тени, на которые накладываются лучи в разных комбинациях, можно увидеть набор очень красивых цветов, отсутствующих в самом свете (поскольку в нем есть только оранжевые лучи), но возникающих в *наших ощущениях*. Мы ясно *видим* разнообразные цвета, совсем непохожие на «физические» цвета, присутствующие в самих лучах света. Важно помнить, что сетчатка сама «осмысливает» свет; она, хотя и бессознательно, сравнивает то, что видит в одной области, с тем, что видит в другой. А что нам известно о том, как это происходит, будет рассказано в следующей главе.



## МЕХАНИЗМ ЗРЕНИЯ

## § 1. Ощущение цвета

Обсуждая механизм зрения, прежде всего необходимо понять, что мы обычно видим не беспорядочный набор цветных или световых пятен (разумеется, если не находимся на выставке некоторых современных художников!). Когда мы смотрим на что-то, то видим *человека* или *вещь*; другими словами, мозг интерпретирует то, что мы видим, как человека или вещь. Как он это делает — никому неизвестно, но делает он это, надо сказать, великолепно. Хотя мы на опыте учимся узнавать, как выглядит человек, однако есть некоторые более элементарные свойства зрения, которые тем не менее тоже включают сопоставление информации от различных частей того, что мы видим. Чтобы понять, как происходит интерпретация изображения в целом, следует изучить первые стадии сопоставления информации от различных клеток сетчатки. В настоящей главе мы сконцентрируем наше внимание главным образом именно на этих сторонах зрения, хотя попутно упомянем и о некоторых других смежных вопросах.

Примером такого сопоставления информации (хотя и на элементарном уровне), поступающей одновременно от нескольких частей глаза и происходящей помимо нашей воли, контроля и сознания, может служить голубая тень от белого света, когда одновременно экран освещается еще и красным светом. При этом по меньшей мере предполагается, что нам известно, что основа экрана красная, и хотя в глаз попадают только «белые» лучи, однако где-то эти кусочки информации складываются вместе и мы видим голубую тень.

§ 1. Ощущение цвета

§ 2. Физиология зрения

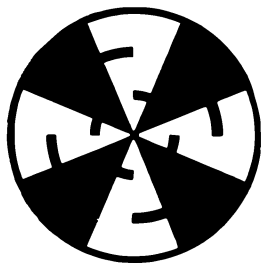
§ 3. Палочки

§ 4. Сложные глаза насекомых

§ 5. Другие типы глаз

§ 6. Нервные механизмы зрения

*Фиг. 36.1. При вращении этого диска одно из колец кажется цветным; при изменении направления вращения окрашенным кажется второе кольцо.*



Чем полнее и привычнее картина, тем большую поправку делает глаз. Действительно, Ланд показал следующее: если мы возьмем два диапозитива, поместим перед ними два фильтра, поглощающие красный и белый свет в различных отношениях, мы будем смешивать разные интенсивности кажущегося голубого и красного света и сможем получить довольно правдивое изображение реальной сцены с натуральными предметами. Кроме красного и белого, мы в этом случае получим множество промежуточных цветов. Аналогичные результаты можно получить, смешивая красный и зелено-голубой цвета; оказывается, что мы получаем почти полный набор цветов. Впрочем, если внимательно приглядеться к ним, то мы увидим, что они не столь уж хороши. Но даже и при этих условиях просто удивительно, как много можно получить только из красного и белого цвета. Чем больше изображение напоминает реальную картину, тем больше мы способны компенсировать то обстоятельство, что цвет-то фактически только розовый!

Другим примером может служить появление «цвета» на черно-белом вращающемся диске, изображенном на фиг. 36.1. При вращении диска смена черного и белого цвета для каждого радиуса в точности одинакова; это составляет фон, на котором видны два «кольца». Первое кольцо кажется окрашенным в один цвет, а второе — в другой\*. До сих пор никто не понимает причины появления здесь окраски, однако ясно, что наиболее правдоподобное объяснение состоит в том, что на каком-то элементарном уровне, по-видимому, в самом глазе происходит сложение информации.

Почти все современные теории цветового зрения сходятся на том, что опыты по смешиванию цветов указывают на существование в глазе только трех сортов пигментов и что ощущение цвета создают именно спектры поглощения этих трех пигментов. Однако полная чувствительность, связанная с характеристиками поглощения этих пигментов, функционирую-

\* Эти цвета зависят от скорости вращения, яркости освещения и в какой-то степени от того, кто смотрит на диск и насколько пристально.

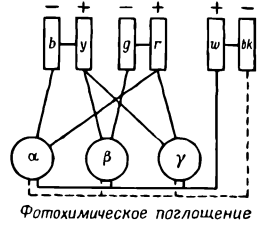
щих одновременно, не обязательно равна сумме их чувствительностей. Каждый знает, что желтый цвет *не кажется* нам красновато-зеленым, и многих, вероятно, несказанно удивит тот факт, что каждый видимый ими цвет есть по сути дела смесь разных цветов, ибо им кажется, что чувство цвета вызывается каким-то другим механизмом, а не просто смешиванием, наподобие сочетания звуков в аккорды в музыке, когда одновременно звучат, скажем, три ноты. Ведь в аккорде, если внимательно прислушаться, можно различить отдельные ноты, а в желтом цвете, сколько бы мы ни приглядывались, увидеть красный и зеленый цвет отдельно невозможно.

Уже первые теории зрения утверждали, что имеются три сорта пигментов и соответственно три сорта колбочек, каждая из которых содержит один пигмент; что от каждой колбочки в мозг идут нервы, так что в мозг переносятся три сорта информации и там что-то происходит. Конечно, это очень несовершенная теория, ибо она не позволяет обнаружить, что за информация переносится по зрительным нервам в мозг; она даже не приступала к решению этой проблемы. Мы должны задать более фундаментальный вопрос: не все ли равно, где происходит сложение информации? Насколько необходимо, чтобы эта информация передавалась по зрительным нервам прямо в мозг, и не может ли какой-то первоначальный анализ выполняться самой сетчаткой? Мы знаем, что сетчатка невероятно сложна и обладает множеством внутренних связей (см. фиг. 35.2); какой-то анализ она способна выполнить.

Дело в том, что ученые, занимающиеся анатомией и развитием глаза, показали, что сетчатка, в сущности, не что иное, как часть самого мозга; при развитии зародыша часть мозга выносится вперед, из нее назад вырастают длинные волокна, которые связывают ее с остальным мозгом. По своей организации сетчатка весьма похожа на мозг. По этому поводу кто-то прекрасно сказал, что это «мозг выдумал, как ему взглянуть на мир». Глаза — это кусочек мозга, которым он, так сказать, «касается света», внешнего мира. Таким образом, нет ничего необычного в том, что какой-то анализ цвета происходит уже в самой сетчатке.

Это предоставляет нам весьма интересную возможность. Ведь никакой другой орган чувств не делает столько, если так можно выразиться, предварительных вычислений, как глаз, прежде чем сигнал попадет в нерв, где его можно измерить. Вычисления для всех остальных органов чувств обычно производит сам мозг, а из-за огромного количества внутренних связей в мозге добраться до этого специфического места и произвести какие-то измерения очень трудно. В глазе вы-

Фиг. 36.2. Нервные связи, согласно теории цветового зрения. *b* — голубой; *y* — желтый; *g* — зеленый; *r* — красный; *w* — белый; *bk* — черный.



$$y-b = k_1 (\beta + \gamma - 2\alpha)$$

$$r-g = k_2 (\alpha + \gamma - 2\beta)$$

$$w-bk = k_3 (\alpha + \gamma + \beta) - k_4 (\alpha + \beta + \gamma)$$

числения производятся в трех слоях клеток, затем результат вычисления передается по зрительному нерву в мозг. Так что здесь мы, по-видимому, впервые получаем возможность физиологически наблюдать, как работает первый слой мозга, быть может, на начальной стадии. Это вдвойне интересно не только для понимания зрения, но и для всех проблем физиологии.

Тот факт, что существует три сорта пигментов, вовсе не означает, что должно быть также три сорта ощущений. Существует теория цветового зрения, основанная на совершенно противоположной цветовой схеме (фиг. 36.2). Согласно этой схеме, какое-то из нервных волокон несет много импульсов, если мы видим желтый цвет, и меньше, чем обычно, если мы видим голубой. Другое нервное волокно точно таким же образом переносит информацию о зеленом и красном цвете, а третье — о белом и черном. Другими словами, в этой теории уже начинают делаться догадки о системе связи и методе анализа.

Вопросы, которые мы пытаемся решить с помощью догадок об этом первоначальном анализе, следующие: проблема кажущихся цветов на розовом фоне; что происходит, когда глаз привыкает к различным цветам; и вопрос о так называемых психологических явлениях. Под этим термином мы понимаем, например, что белый цвет не «ощущается» нами как смесь красного, желтого и синего, и такая теория возникла потому, что, как утверждают психологи, существуют *четыре* кажущихся чистых цвета: «Существуют четыре мощных возбудителя, вызывающие соответственно простые голубой, желтый, зеленый и красный оттенки. В отличие от таких красок, как сиена, пурпур, фуксин или другие различные цвета, эти простые оттенки являются несмешанными в том смысле, что ни один из них не принимает участия в образовании других, в частности голубой цвет нельзя назвать желтоватым, красноватым, зеленоватым и т. д.; психологически они представляют первичные оттенки».

В этом состоит так называемый психологический факт. Чтобы выяснить, откуда взялся этот факт, нужно очень ста-

рательно просмотреть всю литературу. Все, что мы находим в современной литературе по этому вопросу, повторяет те же утверждения или утверждения одного из немецких психологов, авторитетом которого является Леонардо да Винчи, хорошо всем известный великий художник. Этот психолог говорит: «Леонардо считал, что существует пять цветов». Дальнейшие поиски приводят к еще более древним книгам. В этих книгах говорится примерно следующее: «Фиолетовый цвет — это красновато-голубой, оранжевый — это красновато-желтый, но можно ли красный рассматривать как фиолетово-оранжевый? Не будут ли красный и желтый более основными цветами, чем фиолетовый и оранжевый? На вопрос, какие цвета они считают основными, большинство людей назовут красный, желтый и синий, а некоторые добавят к этим трем еще и четвертый — зеленый. Психологи привыкли принимать эти четыре цвета за основные».

Итак, с точки зрения психологов, раз все говорят, что есть три цвета, а кое-кто утверждает, что четыре, и хотя, чтобы было четыре, ну пусть будет четыре. Это иллюстрирует трудности, сопровождающие психологические исследования. Ясно, что мы таким чувством обладаем, но узнать о нем немного больше очень трудно.

Можно идти по другому пути — физиологическому — и экспериментально выяснить, что на самом деле происходит в мозге, в глазе, в сетчатке или другом каком-то месте, и, может быть, удастся обнаружить, что некоторые комбинации импульсов от различных клеток передаются по определенным нервным волокнам. К сожалению, первичные пигменты не сосредоточены каждый в отдельной клетке: могут быть клетки, в которых содержится смесь различных пигментов, клетки с красным и зеленым пигментами или со всеми тремя сразу (информация об этих трех пигментах будет «белой» информацией) и т. д. Есть много способов связать всю эту систему, и мы должны выяснить, какой из них предпочла природа. В то же время хочется надеяться, что, поняв физиологические связи, мы хоть немного продвинемся вперед в понимании некоторых психологических аспектов. Итак, вперед по этому пути!

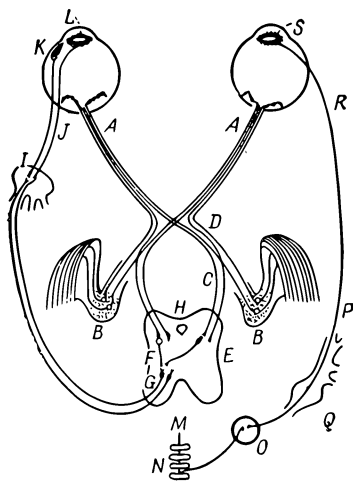
## **§ 2. Физиология зрения**

Мы начали говорить не только о цветовом зрении, но о зрении вообще только для того, чтобы напомнить о внутренних связях в сетчатке, показанных на фиг. 35.2. Сетчатка по истине напоминает поверхность мозга. Хотя настоящая картина под микроскопом выглядит несколько более сложно, чем этот схематический рисунок, но тем не менее при тщательном

анализе можно увидеть все эти внутренние связи. Дело не в том, что одна часть сетчатки связана с другими частями и что информация, переданная по длинным аксонам, образующим зрительный нерв, представляет собой комбинированную информацию от многих клеток. Дело в том, что существуют три слоя клеток, функции которых следующие: во-первых, это фоторецепторы, на которые непосредственно действует свет, затем промежуточные клетки, которые принимают информацию от одного или нескольких фоторецепторов и снова отдают ее нескольким клеткам третьего слоя, а затем в мозг. Между клетками различных слоев существуют разнообразно перекрещивающиеся связи.

Вернемся к некоторым аспектам строения и функции глаза (см. фиг. 35.1). Свет фокусируется главным образом роговицей, благодаря тому что поверхность ее искривлена и она «загибает» лучи света. Вот почему под водой мы видим не так хорошо, ибо показатели преломления роговицы (1,37) и воды (1,33) разнятся недостаточно сильно. Позади роговицы находится практически водная среда с показателем преломления 1,33, а дальше — хрусталик, строение которого очень интересно: он состоит из целого ряда слоев, как луковица, с той только разницей, что эти слои прозрачные и показатель преломления их меняется от 1,40 в середине до 1,38 по краям. (Неплохо было бы изготовить линзу с необходимым показателем преломления в любом месте; тогда нам незачем было бы так искривлять ее, как это делается с линзой с постоянным показателем преломления.) Более того, форма роговицы вовсе не сферическая. Сферическая линза обладает известной сферической аберрацией. Наружная часть роговицы более «плоская», чем у сферы, причем как раз настолько, чтобы сферическая аберрация ее оказалась меньше аберрации той сферической линзы, которую мы поставили бы вместо нее! Посредством этой оптической системы роговица — хрусталик свет фокусируется на сетчатку. Если мы смотрим на близко расположенные или удаленные предметы, то хрусталик искривляется или выпрямляется, изменяя тем самым фокусное расстояние и настраиваясь на различную удаленность. Для регулирования общего количества света в глазу имеется радужная оболочка, или радужка, которая определяет «цвет» глаз — у кого карие, у кого голубые. При увеличении количества света оболочка сжимается и зрачок уменьшается, при уменьшении — оболочка расходится и зрачок увеличивается.

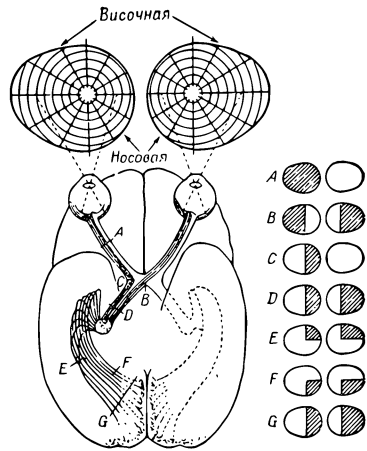
Рассмотрим теперь изображенный на фиг. 36.3 нервный механизм, регулирующий аккомодацию хрусталика, движение глаза (способность глаза поворачивать глазное яблоко в глазнице) и диаметр зрачка. Основная часть всей информа-



Ф и г. 36.3. Нервные связи, управляющие механическими движениями глаза.

ци попадает в зрительный нерв *A*, который разделяется на два пучка (о них мы еще будем говорить), и по ним идет в мозг. Однако имеется несколько волокон (именно они сейчас нам и интересны), которые не идут прямо в зрительную кору, где мы «видим» изображение, а вместо этого отправляются в средний мозг *H*. Это как раз те волокна, по которым передается информация о средней освещенности и приказы о необходимом диаметре зрачка или, если изображение кажется расплывчатым, о кривизне хрусталика. Если же изображение раздвоено, то по этим волокнам посылается приказ подрегулировать глаза для бинокулярного зрения. Во всяком случае, они проходят через центр мозга и возвращаются назад в глаз. Буквой *K* обозначены мышцы, которые управляют хрусталиком при аккомодации, а буквой *L* — ресничные мышцы. Радужка имеет две мышечные системы: 1) мышца, суживающая зрачок (циркулярная мышца) *L*; она работает очень быстро и связана непосредственно с мозгом коротким аксоном; 2) мышца, расширяющая зрачок (радиальная мышца), которая действует тогда, когда освещение предмета уменьшается и циркулярная мышца расслабляется. Как и во многих других частях тела, здесь тоже пара мышц работает в противоположных направлениях; почти в каждом таком случае управляющая ими нервная система «настроена» настолько точно, что, когда одной из них посылается приказ сжаться, другой автоматически посылается приказ расслабиться. Однако радужка представляет любопытное исключение: нервы, которые заставляют оболочку сжиматься, мы только что описали, но до сих пор никому точно не известно, откуда выходят нервы, заставляющие ее *разжиматься*. Они идут куда-то вниз, в спинной мозг в области грудной клетки, из спинного мозга вверх через шейный нервный узел, потом опять назад в голову и к другому концу радужки. Сигнал фактически проходит через совершенно другую нервную си-

Фиг. 36.4. Нервная связь глаза со зрительной корой.



стему, не через центральную, а через симпатическую. Очень странно, для чего все это нужно.

В глазе, как мы подчеркивали, имеется еще одна странность: светочувствительные клетки расположены в сетчатке в глубине, так что, прежде чем попасть в рецепторы, свет должен пройти через несколько слоев других клеток: сетчатка как бы вывернута наизнанку! В общем некоторые вещи в устройстве глаза кажутся нам великолепными, а некоторые — просто глупыми.

На фиг. 36.4 показана связь глаза с частью мозга, наиболее непосредственно принимающей участие в процессе зрения.

Зрительные нервные волокна идут в некоторую область, лежащую сразу же за участком *D*, называемым *латеральным коленчатым телом*, а затем в участок мозга, называемый *зрительной корой*. Следует помнить, что от каждого глаза некоторые волокна направляются в другую половину мозга, так что представленная картина не полна. Зрительные нервы от левой части правого глаза проходят через зрительный перекрест *B*, тогда как нервы от левой части левого глаза обходят его сбоку. Таким образом, левая часть мозга получает всю информацию, идущую от левых сторон обоих глаз, т. е. правой стороны поля зрения, тогда как правая сторона мозга «видит» левую часть поля зрения. Вот каким способом происходит сложение информации от обоих глаз и определяется удаленность предмета. Такова система бинокулярного зрения.

Очень интересны связи между сетчаткой и зрительной корой. Если мы в сетчатке каким-то образом возбудим или разрушим некоторую область, то умирает все волокно, поэтому мы можем узнать, куда оно идет, с чем оно связано. Самое интересное то, что между сетчаткой и зрительной корой, оказывается, существует однозначное соответствие: каждому пятну на сетчатке соответствует пятно в зрительной коре, и два рядом расположенных пятна на сетчатке окажутся рядом и в зрительной коре. Так что зрительная кора, кроме всего



прочего, отражает и пространственное расположение палочек и колбочек, хотя и очень искаженно. Предметы, находящиеся в центре поля зрения и занимающие очень мало места на сетчатке, в зрительной коре распространяются на очень много клеток. Ясно, что очень важно, чтобы первоначально расположенные близко предметы оказались так же близко расположенными и в зрительной коре. Однако самое интересное здесь вот что. Участок, который, казалось бы, наиболее важен для близко расположенных предметов, находится как раз в середине поля зрения. Поистине невероятно, но прямая вертикальная линия в середине поля зрения обладает тем свойством, что информация, полученная от всех точек, расположенных справа от нее, поступает в левое полушарие мозга, а информация от точек, расположенных слева, — в правое полушарие. Но прямо посередине проходит граница, так что предметы, которые очень близки и расположены в середине по разные стороны от границы, в мозге оказываются очень далекими! Информация через какие-то другие каналы все же как-то проходит из одной стороны мозга в другую, и это очень странно.

Очень интересно, как все это связывается вместе. Вопрос о том, что уже связано и что еще нужно научиться связывать, довольно стар. Прежде думали, что, по-видимому, никаких врожденных связей вообще нет; имеются только какие-то грубые наметки, и лишь потом на опыте еще в детстве постигают, что когда предмет находится «вон там», то это дает такое-то ощущение. (Врачи постоянно уверенно заявляют о том, что чувствуют маленькие дети, но откуда *сами* они знают, что чувствует годовалый ребенок?) Может быть, годовалый ребенок, видя предметы «вон там», испытывает какое-то чувство и учится протягивать руку именно «туда», потому что когда он протягивает ее «сюда», то схватить предмет не удастся. Но, по-видимому, этот подход все же неверен, ибо, как мы уже видели, во многих случаях такие специфические промежуточные связи существуют уже с рождения.

Более показательны в этом отношении замечательные опыты над саламандрами. (К счастью, у саламандры имеется прямая перекрестная связь без зрительного перекреста, поскольку у нее глаза расположены по бокам головы и поля зрения обоих глаз не перекрываются. Саламандрам поэтому бинокулярное зрение ни к чему.) Опыты эти состоят в следующем. Мы можем перерезать зрительный нерв у саламандры, но он, однако, снова начнет расти из глаз. Так будут восстанавливаться сами собой тысячи и тысячи клеток. И хотя волокна зрительных нервов не будут лежать рядом (они теперь напоминают большой небрежно изготовленный телефонный кабель, все волокна которого перекручены и перепу-

таны), однако, достигнув мозга, они снова расположатся в надлежащем порядке. Когда перерезают зрительный нерв саламандры, то возникает вопрос: восстанавливается ли он снова? Да, восстанавливается. Таков замечательный ответ. Если саламандре перерезать зрительный нерв, то он снова вырастает, и она будет видеть ничуть не хуже, чем раньше. Однако если мы перережем зрительный нерв и *перевернем глаз*, а потом оставим его в покое, то нервы снова вырастут и саламандра прозреет, но теперь она будет совершать ужасные ошибки: увидев муху вверху, саламандра прыгнет вниз, и она уже никогда не сможет «выучиться» действовать правильно. Так что каким-то непостижимым образом тысячи и тысячи клеток нервных волокон находят в мозге свое истинное место.

Проблема связей в мозге, т. е. в какой степени все там связано и в какой нет, — важнейшая проблема в теории развития живых существ. Ответ еще неизвестен, но его интенсивно ищут.

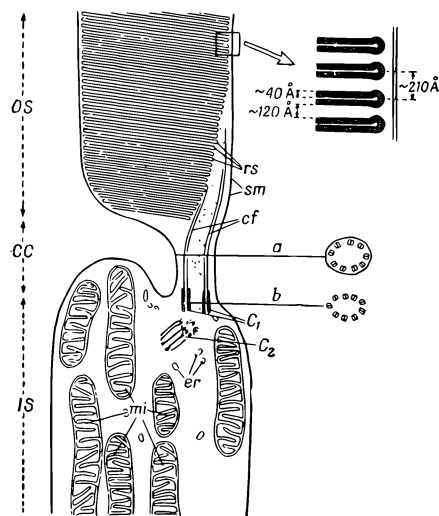
Аналогичный опыт с золотой рыбкой приводит к тому же результату: в том месте, где мы перережем нерв, образуется страшный узел, подобно большому шраму или опухоли, и, несмотря на все это, волокна снова «прорастут» в мозг к своему истинному месту. Для того чтобы это произошло, волокна, поскольку они растут по старому каналу зрительного нерва, «должны решать», в каком направлении расти. Но как им удается это делать? Возможно, что здесь работает какой-то химический механизм, который по-разному действует на разные волокна. Подумать только, сколь огромно число растущих волокон и каждое из них как-то по-своему отличается от соседних; реагируя на какой-то химический механизм, оно делает это достаточно однозначно, чтобы отыскать свое истинное место среди окончательных связей в мозге! Это поразительно, фантастично! Это одно из величайших явлений, открытых биологами за последнее время, и оно, несомненно, связано со многими старыми нерешенными проблемами роста, организации и развития организма, особенно зародыша.

Другое интересное явление связано с движением глаза. Чтобы добиться совпадения двух изображений, глаз должен обладать способностью двигаться. Эти движения могут быть разного рода: когда мы следим за чем-то, оба глаза должны поворачиваться одновременно в одном направлении — вправо или влево; когда мы следим за удаляющимся или приближающимся предметом, глаза должны двигаться в противоположных направлениях. Нервы, подходящие к мышцам глаза, как раз приспособлены для этих целей. Одни нервы заставляют наружные мышцы, например левого глаза и внутренние мышцы правого, сокращаться, а противоположные мышцы —

расслабляться, так что оба глаза движутся в одну сторону. Но есть и другие центры, возбуждение которых заставляет глаза двигаться навстречу друг другу. Любой глаз может быть скошен в уголок, если второй при этом движется к носу, но совершенно *невозможно* сознательно или несознательно одновременно повернуть оба глаза в *разные стороны*, и вовсе не потому, что нет мышц, способных сделать это, а потому, что нет способа послать такие сигналы, чтобы оба глаза отвернулись в разные стороны. (Разумеется, если не произошло никакого нарушения, например не перерезан нерв.) И хотя мышцы одного глаза вполне могут поворачивать его как угодно, даже йоги никаким усилием воли не могут повернуть *оба* глаза в разные стороны. Просто потому, что нет никакой возможности сделать это. В какой-то мере мы уже скованы от рождения. Это очень важный пункт, ибо большинство прежних книг по анатомии и психологии не признавало или не замечало того факта, что мы в такой степени скованы с самого рождения; они утверждали, что можно всему научиться.

### § 3. Палочки

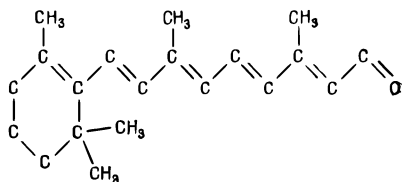
Посмотрим теперь подробнее, что происходит в палочках сетчатки. На фиг. 36.5 показана микрофотография середины палочки (конец ее выходит вверх за пределы снимка). Справа в увеличенном виде слои за слоем видны плоские структуры, содержащие родопсин (зрительный пурпур) — красящее вещество, или пигмент, который, собственно, и обуславливает функцию палочек.



Родопсин представляет собой большие молекулы белка, содержащего специальную группу, называемую ретиненом, которая может быть отщеплена от белка, что, несомненно, и является главной причиной погло-

Фиг. 36.5. Электронная микрофотография палочки.

Фиг. 36.6. Структура ретинена.



щения света. Нам пока не понятно, почему эти структуры плоские, но весьма возможно, что это сделано для того, чтобы молекулы родопсина лежали параллельно друг другу. Химия этого явления известна сейчас довольно хорошо, но, кроме того, возможно, что здесь принимает участие и физика. Может оказаться, что все молекулы располагаются в своего рода ряд, и когда одна из них возбуждается, то вылетевший при этом электрон (или просто волна возбуждения) доходит до некоторого места в конце структуры и порождает сигнал или что-нибудь аналогичное. Это очень важная область, и она еще совсем не разработана. Это поле деятельности для биохимии и физики твердого тела или чего-то в этом духе.

Те же самые слоистые структуры найдены и в других местах, где тоже важен свет, например в хлоропласте растений, где под действием света происходит фотосинтез. При большом увеличении мы обнаруживаем те же самые слои, но, конечно, вместо ретинена мы находим хлорофилл. Химическая форма ретинена показана на фиг. 36.6. Его боковая ветвь содержит серию альтернирующих двойных связей, характерную почти для всех сильно поглощающих органических веществ, подобных хлорофиллу, гемоглобину и т. д. Эти вещества человек не может изготовить в своих собственных клетках и должен получать их с пищей в виде специального вещества, в точности похожего на ретинен, за исключением водородной связи на правом конце. Называется это вещество витамином А. Если в пище его недостаточно, то запас ретинена в организме не пополняется и развивается то, что мы называем *куриной слепотой*, т. е. количества пигмента будет недостаточно для того, чтобы можно было видеть в сумерках.

Известно также, почему такая серия двойных связей очень сильно поглощает свет. Я немного расскажу вам об этом. Альтернирующая серия двойных связей называется *сопряженной* двойной связью. Двойная связь означает, что там есть дополнительный электрон, который легко сдвинуть вправо или влево. Когда свет ударяет по этой молекуле, то электрон каждой двойной связи на один шаг сдвигается. В результате сдвинутся электроны во всей цепи, подобно тому, как упадут при толчке поставленные друг за другом костяшки

домино, и хотя каждый из них проходит очень небольшое расстояние (мы считаем, что в отдельном атоме электрон может проходить только очень маленькое расстояние), в целом получается такой же эффект, как будто электрон с одного конца перескочил на другой! Это то же самое, как если бы один электрон пр шел все расстояние взад и вперед, а в таком случае происходит значительно более сильное поглощение под действием электрического поля, чем если бы мы передвинули электрон только на расстояние, связанное с одним атомом. А поскольку двигать электрон взад и вперед не так уже трудно, то ретинен очень сильно поглощает свет; таков механизм, в основе которого лежит физика и химия.

#### § 4. Сложные глаза насекомых

Вернемся теперь к биологии. Человеческий глаз — отнюдь не единственный тип глаза. Хотя глаза почти всех позвоночных похожи на человеческие, однако у низших животных мы встречаем множество других типов глаз. Обсуждать их у нас нет времени. Но среди беспозвоночных (например, у насекомых) встречаются и высокоразвитые типы глаз; это *сложные*, или *фасеточные*, глаза. (У большинства насекомых, кроме больших фасеточных глаз, есть еще простые глаза, или глазки.) Наиболее тщательно изучалось зрение пчелы. Изучать особенности зрения пчел легко, ибо их, как известно, привлекает мед и мы можем ставить опыты, смазывая медом, например, голубую или красную бумагу и наблюдая, какая из них привлечет пчелу. Этим методом были обнаружены очень интересные особенности зрения пчелы.

Прежде всего, пытаюсь определить, насколько отчетливо пчела видит разницу между двумя кусочками «белой» бумаги, некоторые исследователи нашли, что она видит ее не очень хорошо, а другие, наоборот, что она делает это чертовски здорово. Даже если брались два почти в точности одинаковых кусочка бумаги, пчела все же различала их. Один кусок бумаги, например, отбеливался цинковыми белилами, а другой — свинцовыми, и, хотя оба они выглядели в точности одинаково, пчела различала их, ибо они по-разному отражают ультрафиолетовый свет. Таким образом, было обнаружено, что глаз пчелы чувствителен к более коротким длинам волн, чем глаз человека. Наши глаза видят в диапазоне от 7000 до 4000 Å, от красного до фиолетового, а пчелы могут видеть вплоть до 3000 Å, т. е. в ультрафиолетовой области! Это порождает целый ряд очень интересных эффектов. Прежде всего пчелы различают многие цветы, которые нам кажутся абсолютно одинаковыми. В этом нет ничего удивительного; ведь цветы цветут вовсе не для того, чтобы радо-

вать наш взор. Они служат приманкой для пчел, своеобразным сигналом о том, что здесь есть мед. Всем известно, что есть очень много «белых» цветов. Цвет, который нам *кажется* белым, по-видимому, пчелы не видят, ибо выяснилось, что разные белые цветы не отражают *ультрафиолетовые* лучи столь полно, как это делают *истинно* белые цветы. От белого предмета отражается не весь падающий на него свет, ультрафиолетовые лучи теряются, а это в точности то же, что для нас потеря голубого цвета, т. е. получение желтого цвета. Итак, все белые цветы кажутся пчелам цветными. Однако нам известно также, что пчелы не видят красного цвета. Выходит, можно считать, что красные цветы кажутся пчелам черными? Ничего подобного! Тщательное изучение красных цветов показывает, что, во-первых, даже наши глаза способны различать у огромного большинства красных цветов легкий синеватый оттенок, вызванный дополнительным отражением большинством из них синего цвета, который находится в видимой пчелами области. Кроме того, опыты также показывают, что цветы отличаются по своей способности отражать ультрафиолет от различных частей лепестка и т. д. Итак, если бы мы могли видеть цветы такими, как их видят пчелы, то нашли бы их еще прекраснее и разнообразнее!

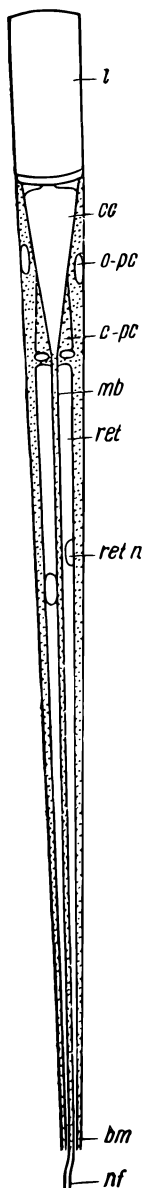
Впрочем, было обнаружено, что имеются такие красные цветы, которые *не отражают* голубых или ультрафиолетовых лучей, поэтому они должны *казаться* пчелам черными! Это в какой-то степени объясняет недоумение тех людей, которых очень волнует этот вопрос: ведь черный цвет не кажется привлекательным, да и трудно его отличить от грязной густой тени. Так оно и получается на самом деле: пчелы *не прилетают* на эти цветы. Но зато как раз они нравятся крохотным *колибри*; оказывается, эти птички отлично видят красный цвет!

Еще одна интересная сторона зрения пчелы. Взглянув на кусочек голубого неба и не видя самого солнца, пчела, по-видимому, может все-таки определить, где находится солнце. Для нас это не так-то просто. Посмотрите из окна на небо. Вы видите, что оно голубое. А в каком направлении находится сейчас солнце? Пчела может это определить, ибо она очень чувствительна к направлению *поляризации* света, а отраженный от неба свет поляризован\*. До сих пор спорят о

---

\* Человеческий глаз тоже слегка чувствителен к направлению поляризации света, и научиться угадывать направление солнца в общем *можно*! Здесь используется явление, называемое хайдингеровской гребенкой (Haidinger's brush). Это бледное желтоватое пятно в центре поля зрения, напоминающее по форме песочные часы; видно оно через поляризационные очки на фоне безграничного бесцветного пространства. Впрочем, его можно видеть и без поляризационных очков на голубом небе, если поворачивать голову то туда, то сюда.

Фиг. 36.7. Строение омматидия.



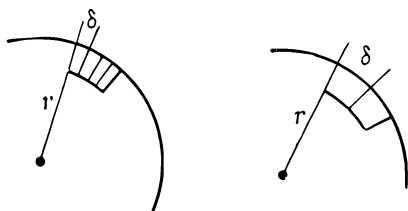
том, как это ей удастся, то ли потому, что рассеяние света различно при разных обстоятельствах, то ли глаза пчелы непосредственно чувствительны к направлению поляризации света. В самое недавнее время получены данные о непосредственной чувствительности глаза пчелы.

Говорят также, что пчела способна различать отдельные вспышки света с частотой 200 раз в 1 сек, тогда как мы различаем только 20 вспышек. В улье пчелы движутся очень быстро; они шевелят лапками, машут крылышками, но наши глаза с трудом успевают уследить за всеми этими движениями. Вот если бы мы могли различать более быстрые мелькания, тогда другое дело. Видимо, для пчелы очень важно, чтобы ее глаза имели столь быструю реакцию.

Теперь поговорим о том, какова, собственно, острота зрения у пчелы? Глаз пчелы сложный; состоит он из огромного числа особых глазков, называемых *омматидиями*, которые расположены на почти сферической поверхности по бокам головы насекомого. На фиг. 36.7 показан омматидий. В его вершине находится прозрачная область, своего рода «хрусталик», но в действительности это больше напоминает фильтр, заставляющий свет идти вдоль узкого волокна, где, по-видимому, и происходит его поглощение. От другого его конца отходит нервное волокно. Центральное нервное волокно имеет по бокам шесть клеток, от которых по сути дела оно и отходит. Для наших целей этого описания вполне достаточно; главное то, что клетка имеет коническую форму, и множество таких клеток, примыкая друг к другу, образует поверхность глаза пчелы.

Посмотрим теперь, каково разрешение такого глаза. Проведем линию (фиг. 36.8), схематически представляющую омматидий, на поверхности глаза, который мы будем считать сферой радиусом  $r$ . Мы сейчас попытаемся *вычислить* ширину каждого омматидия, для чего нарисуем немного нашу сообразительность и предположим, что природа столь же сообразительна, как и мы! Если омма-

Ф и г. 36.8. Схема распределения омматидиев на поверхности глаза пчелы.



тидий очень велик, то разрешение не может быть большим. Иначе говоря, один омматидий получает информацию об одном направлении, соседний — о другом и т. д., а предметы, попавшие в промежуток, пчела не сможет видеть достаточно хорошо. Таким образом, неопределенность остроты зрения глаза, несомненно, связана с угловым размером конца омматидия относительно центра кривизны глаза. (На самом деле глаза расположены только на поверхности головы.) Но угол от одного омматидия до следующего равен, конечно, диаметру омматидия, деленному на радиус кривизны поверхности глаза:

$$\Delta\theta_g = \frac{\delta}{r}. \quad (36.1)$$

Итак, можно сказать: «Чем меньше будет значение  $\delta$ , тем больше окажется острота зрения. Но почему же тогда природа не дала пчеле очень-очень мелкие омматидии?» В ответ можно сказать следующее: мы уже достаточно хорошо знаем физику, чтобы понять, что при попытке пропустить свет через узкую щелку из-за дифракции невозможно достаточно хорошо видеть в данном направлении, ибо туда будет попадать свет от различных направлений, т. е. от всех направлений, находящихся внутри угла  $\Delta\theta_d$ , такого, что

$$\Delta\theta_d = \frac{\lambda}{\delta}. \quad (36.2)$$

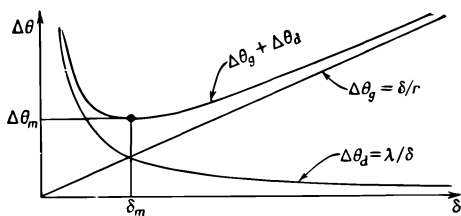
Теперь ясно, что, если взять  $\delta$  слишком маленьким, каждый омматидий вследствие дифракции будет видеть не только в одном направлении! Но если сделать значение  $\delta$  слишком большим, то, хотя каждый будет смотреть в одном направлении, их окажется слишком мало, чтобы получить достаточно подробную картину. Таким образом, мы должны подобрать такое расстояние  $d$ , чтобы полный эффект этих двух механизмов был минимальным. Если мы сложим два выражения и найдем место, где сумма имеет минимум, то получим

$$\frac{d(\Delta\theta_g + \Delta\theta_d)}{d\delta} = 0 = \frac{1}{r} - \frac{\lambda}{\delta^2}, \quad (36.3)$$

что дает расстояние

$$\delta = \sqrt{\lambda r}. \quad (36.4)$$





Фиг. 36.9. Оптимальный размер оматидия, равный  $\delta_m$ .

Если мы для оценки будем считать, что  $r$  приблизительно равно 3 мм, а длину волны света, который пчела видит, примем равной 4000 Å, то после умножения и извлечения корня найдем

$$\delta = (3 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-7})^{1/2} \text{ м} = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 35 \text{ мк}. \quad (36.5)$$

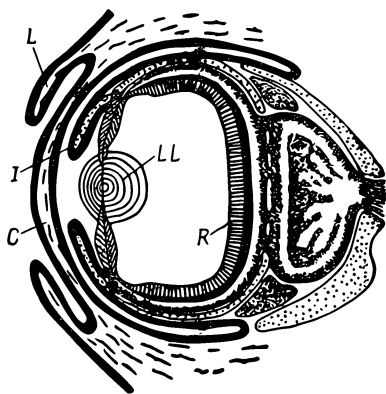
В книгах указывается диаметр, равный 30 мк. Как видите, согласие оказывается довольно хорошим! Ясно, что именно этот механизм определяет размер глаза пчелы и он вполне доступен нашему пониманию. Подставив теперь полученное число (в 36.1), легко определить, каково угловое разрешение глаза пчелы. Оно оказывается очень плохим по сравнению с глазом человека. Мы способны видеть вещи, кажущийся размер которых в тридцать раз меньше, чем видит пчела. Так что по сравнению с человеком изображение у пчелы получается довольно расплывчатое, несфокусированное. Тем не менее так оно и есть, и на большее она просто не может рассчитывать. Естественно возникает вопрос: а почему бы пчеле не завести себе такой же глаз, как у нас, с хрусталиком и со всем прочим? Этому мешает несколько довольно интересных причин. Прежде всего пчела слишком мала; если бы у нее был глаз, похожий на наш, но соответственно уменьшенный, то размер зрачка оказался бы порядка 30 мк, а поэтому дифракция была бы так велика, что пчела все равно не видела бы лучше. Слишком маленький глаз — это не очень хорошо. Потом, если сделать глаз большим, как голова пчелы, то он занял бы всю голову. Ведь ценность сложного глаза в том и состоит, что он практически не занимает места — просто тоненький слой на поверхности головы пчелы. Так что, прежде чем давать советы пчеле, не забывайте, что у нее есть свои собственные проблемы!

## § 5. Другие типы глаз

Кроме пчел, многие другие животные могут различать цвета. Рыбы, бабочки, птицы и пресмыкающиеся тоже могут различать цвета. А вот большинство млекопитающих, как полагают, не могут. Приматы, однако, различают. Птицы, несомненно, различают цвета, об этом говорит их окраска.

Какой был бы смысл самцам так блистательно ярко наряжаться, если бы самки не могли это видеть! Иначе говоря, привлекающее оперение, которым обладают птицы, и есть результат того, что самки способны различать цвета. Так что в следующий раз, когда вы увидите павлина и будете удивляться этой сверкающей выставке ярких красок, восхищаться утонченно подобранными цветами и замирать перед удивительным чувством эстетики птицы, не забудьте, что ваш восторг относится собственно к самке павлина, к ее наблюдательности и тонкому вкусу: только это ведь и породило столь удивительное зрелище!

Большинство беспозвоночных имеют либо недоразвитые, либо сложные глаза, а глаза всех позвоночных животных похожи на глаз человека. Однако есть одно исключение. Рассматривая высшие формы животных, мы обычно восклицаем: «Ну конечно, так и есть!», но если встать на менее предвзятую точку зрения и ограничиться только беспозвоночными, чтобы исключить нас самих, и спросить зоологов, какое из беспозвоночных животных они считают наиболее развитым, то большинство из них в один голос ответят — осьминог! Весьма интересно, что, помимо развитого мозга, его реакций и прочего, которые слишком хороши для беспозвоночного, осьминог имеет высокоразвитый глаз, совершенно непохожий на глаза кого-либо другого. Это не сложный глаз и не светочувствительное пятно, в нем есть и роговица, и веко, есть и радужка, и две полости, заполненные жидкостью, и хрусталик, и сетчатка (фиг. 36.10). В точности то же, что и у позвоночных! Это замечательный пример совпадения в эволюции, когда природа дважды пришла к одному и тому же решению проблемы, но с одним небольшим улучшением. Сетчатка у осьминога, как оказалось, представляет собой тоже часть мозга, и образовалась она при эмбриональном развитии, как



Фиг. 36.10. Глаз осьминога.

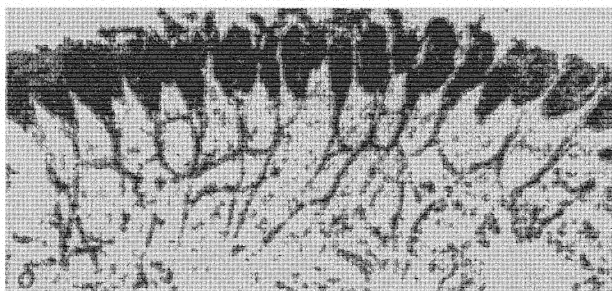
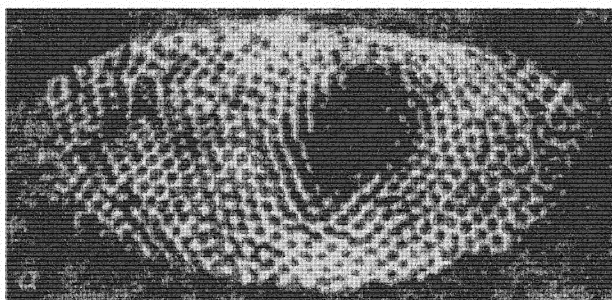
у позвоночных животных, но имеется одно очень интересное и поразительное отличие: чувствительные к свету клетки расположены не позади слоев других клеток, как у нас, а непосредственно на *внутренней* поверхности глазного яблока, а клетки, занимающиеся вычислением, — позади них. Теперь мы по крайней мере видим, что в расположении клеток в нашем глазе глубокого смысла нет. В другой раз природе пришлось исправить свою ошибку! Самыми большими глазами наделен громадный спрут: диаметр их 38 см!

## § 6. Нервные механизмы зрения

Одной из основных тем этой главы является взаимосвязь и взаимоинформация отдельных частей глаза. Давайте рассмотрим сложный глаз краба-мечехвоста, над которым было проделано довольно много опытов. Прежде всего нужно понять, какого сорта информация может передаваться по нервам. По нерву передается нечто вроде возмущения электрической природы, которое может быть легко зарегистрировано. Это некое волнообразное возмущение, которое бежит по нерву и вызывает на другом его конце какой-то эффект. Информацию переносит длинный отросток нервной клетки, называемый *аксоном*, и если один конец аксона возбужден, то по нему бежит «импульс». Далее, если по нерву уже проходит один импульс, то за ним не может немедленно последовать второй. Все импульсы имеют одну и ту же величину, так что, когда нерв сильно возбужден, это вовсе не означает, что по нему бежит *большой* импульс, а просто *увеличивается число импульсов в 1 сек.* Величина же импульса определяется нервным волокном. Это важно усвоить, чтобы понять, что произойдет дальше.

На фиг. 36.11, *а* показан сложный глаз краба-мечехвоста; в нем всего лишь около тысячи омматидиев. Фиг. 36.11, *б* представляет собой поперечный разрез этой системы. Видны отдельные омматидии и нервные волокна, соединяющие их с мозгом. Но обратите внимание, что даже у этого краба имеются внутренние связи. Они, конечно, гораздо менее сложные, чем в глазе человека, но именно это-то и дает нам возможность изучить подобные связи на простом примере.

Давайте рассмотрим такой опыт: наложим на зрительный нерв нашего краба небольшие электроды и осветим только один омматидий; это легко можно сделать с помощью линз. Если мы в какой-то момент времени  $t_0$  включим свет и будем измерять возникающие электрические импульсы, то увидим, что после небольшой задержки последует быстрая серия разрядов, частота которых постепенно будет уменьшаться, пока не достигнет какой-то равномерности (фиг. 36.12, *а*). После



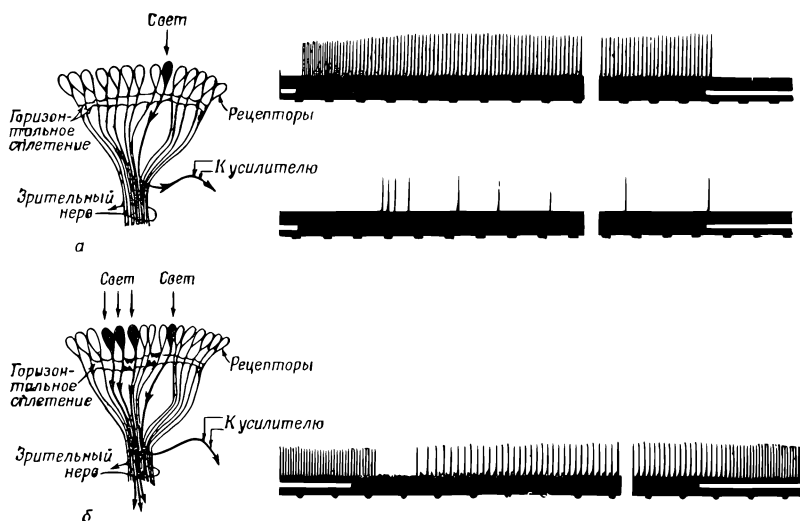
Ф и г. 36.11. Сложный глаз краба-мечехвоста.  
а—общий вид; б—в разрезе.

выключения света разряды прекращаются. Интересно, что если усилитель остается связанным с тем же нервом, а мы направим свет на *другой* омматидий, то ничего не произойдет, сигналов не будет.

Проделаем теперь другой опыт: осветим первый омматидий и получим те же импульсы, но если теперь мы направим свет еще на другой соседний омматидий, то на короткое время импульсы прекращаются, после чего импульсы «побегут» снова, но с гораздо меньшей частотой (фиг. 36.12, б). Оказывается, что импульсы, возникающие во втором омматидии, затормаживают импульсы первого! Другими словами, хотя каждый нерв и несет информацию о своем омматидии, количество этой информации подавляется сигналами от другого омматидия. Например, когда более или менее равномерно освещен весь глаз, то сигнал, пришедший от любого отдельного омматидия, будет относительно слабым, ибо он подавлен множеством других сигналов. Торможение аддитивно, т. е. если мы осветим несколько соседних омматидиев, торможение будет очень сильным. Торможение оказывается большим, если омматидии расположены ближе, но если они достаточно удалены друг от друга, то торможение практически сводится

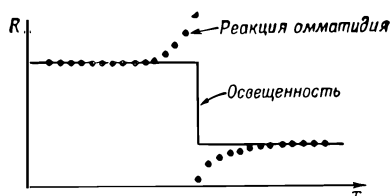
к нулю. Таким образом, торможение аддитивно и зависит от расстояния. Это первый пример, когда информация от различных частей глаза перерабатывается в нем самом. Если подумать немного, то можно понять, что этот механизм предназначен для *усиления контраста* на краях объекта, ибо если часть предмета освещена, а часть нет, то омматидии, направленные на освещенную область, дают импульсы, которые затормаживаются всеми соседними омматидиями, видящими освещенную область, так что они относительно слабы. С другой стороны, омматидии, видящие границу световой области и дающие «белый» сигнал, хотя и подавлены своими соседями, но тех не столь уж много, ибо некоторые из них совсем темные (не видят света), в результате чего сигнал оказывается более сильным. В итоге получается кривая, подобная изображенной на фиг. 36.13. Краб как бы видит «усиленный» контур.

Однако тот факт, что существует такое «усиление» контура, известен уже давно. Это действительно замечательная вещь, которая неоднократно обсуждалась психологами. Чтобы изобразить предмет, нам достаточно нарисовать лишь его контур. Ведь мы привыкли видеть картины, на которых изображены одни только контуры! Но что же такое контур? Ведь это просто граница между темным и светлым или между одним цветом и другим. В самом деле, это вовсе не что-то определенное. Можно думать, что угодно, но никакой линии вокруг предмета нет! Нет, все это только наша вы-



Фиг. 36.12. Ответная реакция на свет нервных волокон глаза краба-мечехвоста.

Фиг. 36.13. Ответная реакция омматидия краба-мечехвоста на резкий освещенный край.



думка. Теперь мы начинаем понимать, почему нам достаточно контура, чтобы представить себе весь предмет. По-видимому, наши глаза тоже работают, подобно глазам мечехвоста, разумеется гораздо более сложно, но все же аналогично.

Наконец, я вкратце опишу более сложные опыты, очень красивые и трудные, которые были проделаны над лягушкой. При выполнении их в зрительный нерв лягушки вводились миниатюрные искусно сделанные нитеобразные зонды и измерялись сигналы, идущие вдоль одного определенного аксона; точно так же как в случае с крабом-мечехвостом, было обнаружено, что информация зависит не просто от одной точки глаза, а является суммой информации, полученных от нескольких частей.

Наиболее современная картина операций на глазе лягушки выглядит следующим образом. Можно найти четыре типа различных зрительных нервных волокон, в том смысле, что существуют четыре различных сорта ответных реакций. В этих экспериментах не было вспышек света: лягушка не замечает таких вещей. Она просто сидит, и глаза ее неподвижны до тех пор, пока листок лилии не начнет двигаться. Тогда глаза лягушки движутся как раз так, чтобы изображение оставалось в поле зрения. Однако сама по себе лягушка глазами не вороочает и не ищет, куда девался объект. Если в поле ее зрения движется что-то, напоминающее небольшое насекомое (нужно, чтобы она могла видеть нечто маленькое, движущееся на неподвижном фоне), то обнаруживаются четыре различных сорта нервных волокон, отвечающих на это раздражение. Их свойства приведены в табл. 36.1. Длительное (нестираемое) обнаружение края означает, что если мы внесем предмет с резким краем в поле зрения лягушки, то в тех фоторецепторах, мимо которых он движется, возникает множество импульсов, которые переходят затем в редкие импульсы, продолжающиеся до тех пор, пока край находится в поле зрения, даже если он стоит на месте. После выключения света импульсы прекращаются. Если снова включить свет и край предмета по-прежнему находится в поле зрения, то импульсы возникают снова. Они не исчезают. Другой сорт волокон очень похож на первый, но с тем исключением, что

Реакция	Скорость проведения импульсов, м/сек	Угловое поле, град
1. Длительное (нестираемое) обнаружение края	0,2—0,5	1
2. Обнаружение (стираемое) изогнутой поверхности	0,5	2—3
3. Регистрация изменения контраста	1—2	7—10
4. Регистрация тусклости	До 1/2	До 15
5. Регистрация темноты	?	Очень велико

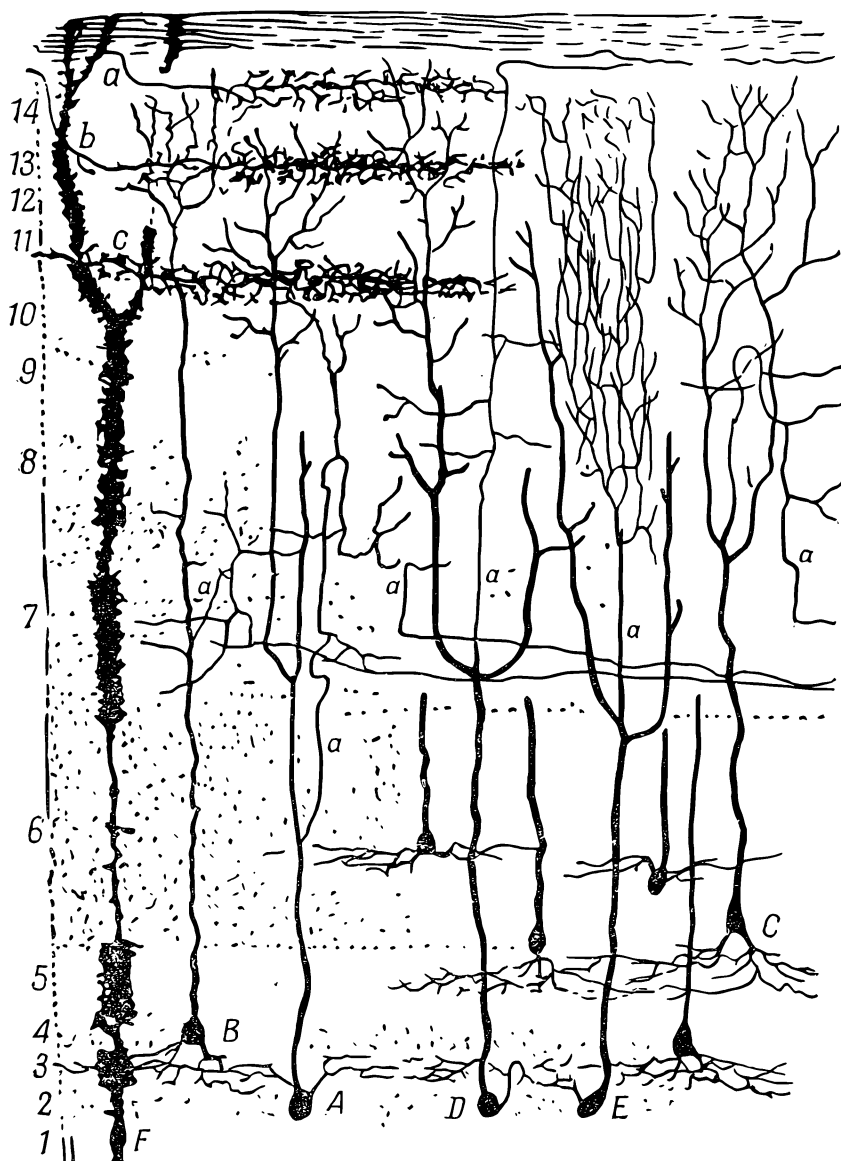
они не работают, если край прямой. Нужно, чтобы край был изогнутым! Насколько сложной должна быть система взаимных связей сетчатки глаза лягушки, чтобы видеть движение изогнутой поверхности! Более того, если эти волокна чем-то возбуждены, то возбуждение не может держаться так же долго, как в первом случае, и если мы выключим свет и включим его снова, то импульсы *не* возобновятся. Впрочем, это зависит от движения выпуклой поверхности. Глаз видит ее движение и помнит, где она находится, но если мы на момент выключим свет, то глаз просто забывает о ней и больше на нее не реагирует.

Следующим типом является регистрация изменения контраста. Если край надвигается или отодвигается, то сигналы есть. Но если предмет стоит, то никаких сигналов вообще нет.

Затем есть «регистратор тусклости». Если интенсивность света уменьшается, то возникают импульсы, если она неизменна — импульсы прекращаются: регистратор работает, только когда свет тускнеет.

И наконец, есть несколько волокон, которые служат регистраторами темноты. Самое удивительное, что они беспрестанно «стреляют»! Если свет усиливается, «выстрелы» становятся более редкими, а если ослабевает, то, наоборот, «огонь» становится более частым, но он не прекращается ни на секунду. В темноте же они «строчат», как сумасшедшие, напоминая постоянно: «Тьма! Тьма! Тьма!»

Все эти реакции кажутся слишком сложными, чтобы их можно было как-то классифицировать. Подозрительно даже, правильно ли истолкованы эксперименты. Но самое интересное, что эти же классы очень отчетливо выделяются самой анатомией лягушки! После того как волокна были расклассифицированы (очень важно, что это было сделано *после*), другие измерения обнаружили, что *скорости* импульсов, бегущих по различным волокнам, не одинаковы. Так что был найден другой независимый способ определения сорта волокон!



Фиг. 36.14. Покрышка мозга лягушки.



Еще один интересный вопрос: насколько велика анализирующая область, связанная с каким-то одним волокном? Ответ оказался различным для разных классов волокон.

На фиг. 36.14 показана поверхность так называемой покрывки мозга лягушки. Сюда приходят волокна из зрительного нерва. Все эти нервные волокна связаны с различными слоями покрывки. Слоистое строение ее напоминает строение сетчатки (это один из фактов, говорящих нам о том, что сетчатка и мозг весьма похожи друг на друга). Если теперь взять электрод и постепенно перемещать его вниз по слоям, то можно определить, где оканчиваются разные типы зрительных волокон. Опыт дает очень красивый и удивительный результат: оказывается, что различные сорта волокон оканчиваются в различных слоях! В первом слое оканчивается первый тип волокон, во втором — второй; третий и пятый оканчиваются в одном и том же слое, а глубже всех проникает четвертый тип. (Вас не должно удивлять, что номера их почти совпали с номерами слоев! Именно поэтому они и пронумерованы таким образом, в ранних работах они нумеровались иначе!)

Все, что мы узнали, можно кратко сформулировать так: по-видимому, имеются три сорта пигментов. Может быть множество различных сортов рецепторов, в которые эти пигменты входят в различных пропорциях, однако множество внутренних связей позволяет складывать и вычитать эффекты отдельных нервных клеток. Таким образом, прежде чем мы действительно поймем цветное зрение, необходимо понять конечный этап — ощущение зрения вообще. Это все еще открытый вопрос, но исследования с микроэлектродами, возможно, дадут нам в конце концов дополнительные сведения о том, как же мы видим цвета.

## КВАНТОВОЕ ПОВЕДЕНИЕ

### § 1. Атомная механика

В последних нескольких главах мы с вами рассмотрели многие существенные понятия, без которых невозможно разобраться ни в явлении света, ни вообще в электромагнитном излучении. (Некоторые специальные вопросы — теорию показателя преломления плотного вещества и полное внутреннее отражение — мы отложим до будущих времен.) Мы имели дело с так называемой «классической теорией» электромагнитных волн, и для множества явлений она давала достаточно точное описание природы. И нас не очень заботило при этом, что световая энергия всегда доставляется порциями — «фотонами».

Очередной темой, которой мы собираемся заняться (в главах, начиная с 39), является проблема поведения сравнительно крупных массивов вещества — их механических или, скажем, их тепловых свойств. Знакомясь с этими свойствами, мы увидим, что старая классическая теория здесь немедленно терпит неудачу, терпит по той причине, что вещество на самом деле состоит из частиц атомных размеров. И если все же мы намерены пользоваться старой теорией, то только потому, что это единственное, в чем мы можем разобраться с помощью изученной нами классической механики. Но наши успехи не будут велики. Мы обнаружим, что в отличие от теории света теория вещества на этом пути довольно быстро наталкивается на затруднения. Можно было бы, конечно, обойти все атомные эффекты стороной. Но вместо этого мы решили здесь вклинить небольшой экскурс в основные идеи учения о квантовых свойствах вещества, в кван-

§ 1. Атомная механика

§ 2. Опыт с пулеметной стрельбой

§ 3. Опыт с волнами

§ 4. Опыт с электронами

§ 5. Интерференция электронных волн

§ 6. Как проследить за электроном?

§ 7. Исходные принципы квантовой механики

§ 8. Принцип неопределенности

товые представления атомной физики. Надо же, чтоб вы хоть примерно представляли, как выглядит то, что мы обходим. Все равно атомные эффекты до того важны, что нам не миновать познакомиться с ними вплотную.

Стало бытъ, сейчас мы перейдем к *введению* в предмет квантовой механики. Но по-настоящему проникнуть в суть предмета вы сможете лишь намного позже.

Квантовая механика — это описание поведения мельчайших долек вещества, в частности всего происходящего в атомных масштабах. Поведение тела очень малого размера не похоже ни на что, с чем вы повседневно сталкиваетесь. Эти тела не ведут себя ни как волны, ни как частицы, ни как облака, или биллиардные шары, или грузы, подвешенные на пружинах, — словом, они не похожи ни на что из того, что вам хоть когда-нибудь приходилось видеть.

Ньютон считал, что свет состоит из частиц. А потом оказалось, как мы уже убедились, что свет ведет себя подобно волнам. Позже, однако (в начале XX века), обнаружили, что, действительно, поведение света временами напоминает частицу. Об электроны же, наоборот, сначала думали, что он похож на частицу, а потом было выяснено, что во многих отношениях он ведет себя как волна. Значит, на самом деле его поведение ни на что не похоже. И мы сдались. Мы так и говорим: «Он *ни на что* не похож».

Однако, к счастью, есть еще одна лазейка: дело в том, что электроны ведут себя в точности подобно свету. Квантовое поведение всех атомных объектов (электронов, протонов, нейтронов, фотонов и т. д.) одинаково: всех их можно назвать «частицами-волнами» (годится, впрочем, и любое другое название). Значит, все, что вы узнаете про свойства электронов (а именно они будут служить нам примером), все это будет применимо к любым «частицам», включая фотоны света.

В течение первой четверти нашего века постепенно накапливалась информация о поведении атомов и других мельчайших частиц, и знакомство с этим поведением вело ко все большему замешательству среди физиков. В 1926—1927 гг. оно было устранено работами Шредингера, Гейзенберга и Борна. Им удалось в конце концов получить непротиворечивое описание поведения вещества атомных размеров. Основные характерные черты этого описания мы и разберем в данной главе.

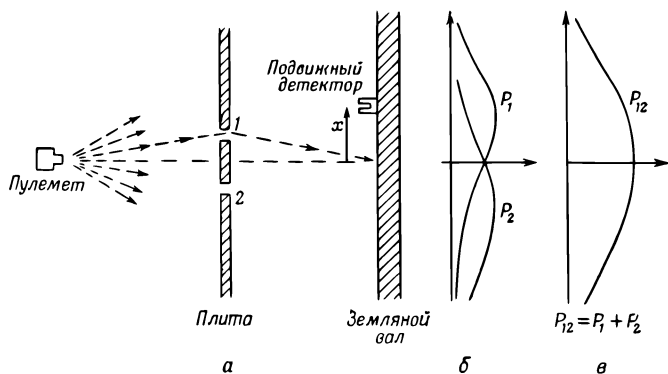
Раз поведение атомов так не похоже на наш обыденный опыт, то к нему очень трудно привыкнуть. И новичку в науке, и опытному физику — всем оно кажется своеобразным и туманным. Даже большие ученые не понимают его настолько, как им хотелось бы, и совершенно естественно, потому что

весь непосредственный опыт человека вся его интуиция — все это обращено к крупным телам. Мы знаем, что будет с большим предметом; но именно так мельчайшие тельца и не поступают. Поэтому, изучая их, приходится прибегать к различного рода абстракциям, напрягать воображение и не пытаться связывать их с нашим непосредственным опытом.

В этой главе мы сразу же попробуем ухватить самый основной элемент таинственного поведения в самой странной его форме. Мы выбрали для анализа такое явление, которое невозможно, *совершенно, абсолютно* невозможно объяснить классическим образом. В этом явлении таится самая суть квантовой механики. На самом деле в ней имеется только *одна* тайна. Мы не можем раскрыть ее в том смысле, что не можем «объяснить», как она работает. Мы просто *расскажем* вам, как она работает. Рассказывая об этом, мы познакомим вас с основными особенностями всей квантовой механики.

## § 2. Опыт с пулеметной стрельбой

Пытаясь понять квантовое поведение электронов, мы сопоставим его с привычными нам движениями обычных частиц, похожих на пулю, и обычных волн, похожих на волны на воде. Сперва мы займемся стрельбой из устройства, схематически показанного на фиг. 37.1. Это пулемет, выпускающий целый сноп пуль. Он не очень хорош, этот пулемет. При стрельбе его пули рассеиваются на довольно широкий угол, как это изображено на рисунке. Перед пулеметом стоит плита (броневая), а в ней есть две дыры, через которые пуля свободно проходит. За плитой расположен земляной вал, который «поглощает попавшие в него пули. Перед валом стоит предмет, который мы назовем «детектором». Им может служить, скажем, ящик с песком. Любая пуля, попав в детектор, застревает в нем. Если нужно, ящик открывают и все попавшие внутрь пули пересчитывают. Детектор можно передвигать взад и вперед (в направлении  $x$ ). Этот прибор позволяет экспериментально ответить на вопрос: «Какова вероятность того, что пуля, проникшая сквозь плиту, попадет в вал на расстоянии  $x$  от середины»? Заметьте, что мы говорим только о вероятности, потому что невозможно сказать определенно, куда попадет очередная пуля. Пуля, даже попав в дыру, может срикошетить от ее края и уйти вообще неизвестно куда. Под «вероятностью» мы понимаем шанс попасть пульей в детектор, который установлен в  $x$  метрах от середины. Этот шанс можно измерить, подсчитать, сколько пуль попало в детектор за определенное время, а затем разделив это число на *полное* число пуль, попавших в вал за то же время. Или, полагая, что скорость стрельбы была одинакова, можно считать



Фиг. 37.1. Опыт со стрельбой из пулемета.

вероятность пропорциональной числу пуль, попавших в детектор за условленное время.

Для наших целей надо вообразить немного идеализированный опыт, когда пули не дают осколков и остаются целыми. Тогда мы обнаружим, что пули всегда попадают в детектор порциями; если уж мы что-то нащупали в детекторе, то это всегда целая пуля, а не половина и не четвертушка. Даже когда скорость стрельбы становится очень малой, всё равно в детекторе за определенное время либо ничего не накапливается, либо обнаруживается целое — непременно целое — число пуль. Стало быть, размер порции не зависит от скорости стрельбы. Мы говорим поэтому: «Пули *всегда* приходят равными порциями». С помощью нашего детектора мы измеряем как раз вероятность прихода очередных порций как функцию  $x$ . Результат таких измерений (мы, правда, пока еще не провели такого эксперимента и сейчас просто воображаем, каким будет результат) изображен на графике фиг. 37.1, в. Вероятность в нем отложена вправо, а  $x$  — по вертикали, согласуясь с движением детектора. Вероятность обозначена  $P_{12}$ , чтобы подчеркнуть, что пули могли проходить и сквозь отверстие 1, и сквозь отверстие 2. Вы, конечно, не удивитесь, что вероятность  $P_{12}$  близ середины графика велика, а по краям мала. Вас может, однако, смутить, почему наибольшее значение  $P_{12}$  оказалось при  $x = 0$ . Это легко понять, если один раз проделать опыт, заткнув дырку 2, а в другой раз — дырку 1. В первом случае пули смогут проникать лишь сквозь дырку 1 и получится кривая  $P_1$  (см. фиг. 37.1, б). Здесь, как и следовало ожидать, максимум  $P_1$  приходится на то  $x$ , которое лежит по прямой от пулемета через дырку 1. А если заткнуть дырку 1, то получится симметричная кривая  $P_2$  — распределение вероятностей для пуль,

проскочивших сквозь отверстие 2. Сравнив части *б* и *в* на фиг. 37.1, мы получаем важный результат

$$P_{12} = P_1 + P_2, \quad (37.1)$$

т. е. вероятности просто складываются. Действие двух дырок складывается из действий каждой дырки в отдельности. Этот результат наблюдений мы назовем *отсутствием интерференции* по причине, о которой вы узнаете после. На этом мы покончим с пулями.

*Они приходят порциями, и вероятность их попадания складывается без интерференции.*

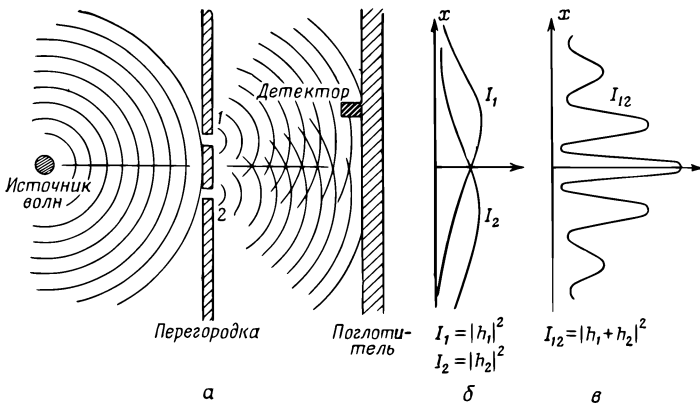
### § 3. Опыт с волнами

Теперь проведем опыт с волнами на воде. Прибор показан схематически на фиг. 37.2. Это мелкое корытце, полное воды. Предмет, обозначенный как «источник волн», колеблясь при помощи моторчика вверх и вниз, вызывает круговые волны. Справа от источника опять стоит перегородка с двумя отверстиями, а дальше — вторая стенка, которая для простоты сделана поглощающей (чтобы волны не отражались): насыпана песчаная отмель. Перед отмелью помещается детектор; его опять, как и раньше, можно передвигать по оси *x*. Теперь детектор — это устройство, измеряющее «интенсивность» волнового движения. Представьте себе приспособление, измеряющее высоту волн. Если его шкалу откалибровать пропорционально *квадрату* высоты, то отсчеты шкалы смогут давать интенсивность волны. Детектор, таким образом, будет определять *энергию*, переносимую волной, или, точнее, долю энергии, доставляемую детектору.

Первое, в чем можно убедиться при помощи такого волнового аппарата, — это что интенсивность может быть *любой величины*. Когда источник движется еле-еле, то и детектор показывает тоже чуть заметное движение. Если же движение возрастет, то и в детекторе интенсивность подскочит. Интенсивность волны может быть какой угодно. Мы уже *не скажем*, что в интенсивности есть какая-то «порционность».

Заставим теперь волновой источник работать стабильно, а сами начнем измерять интенсивность волн при различных значениях *x*. Мы получим интересную кривую (кривая  $I_{12}$  на фиг. 37.2, *в*).

Но мы уже видели, откуда могут возникать такие картинки, — это было тогда, когда мы изучали интерференцию электромагнитных волн. И здесь мы могли бы увидеть, как первоначальная волна дифрагирует на отверстиях, как от каждой щели расходятся круги волн. Если на время одну щель прикрыть и измерить распределение интенсивности у



Ф и г. 37.2. Опыт с волнами на воде.

поглотителя, то кривые выйдут довольно простыми (см. фиг. 37.2, б).

Кривая  $I_1$  — это интенсивность волн от щели 1 (когда ее измеряли, щель 2 была закрыта), а кривая  $I_2$  — интенсивность волн от щели 2 (при закрытой щели 1).

Мы видим со всей определенностью, что интенсивность  $I_{12}$ , наблюдаемая, когда оба отверстия открыты, *не равна* сумме интенсивностей  $I_1$  и  $I_2$ . Мы говорим, что здесь происходит «интерференция», наложение двух волн. В некоторых местах (где на кривой  $I_{12}$  наблюдается максимум) волны оказываются «в фазе», пики волн складываются вместе, давая большую амплитуду и тем самым большую интенсивность. В этих местах говорят о «конструктивной интерференции». Она наблюдается в тех местах, расстояние которых от одной из щелей на целое число длин волн больше (или меньше) расстояния от другой.

А в тех местах, куда две волны приходят со сдвигом фаз  $\pi$  (т. е. находятся «в противофазе»), движение волны представляет собой разность двух амплитуд. Волны «интерferируют деструктивно», интенсивность получается маленькой. Это бывает там, где расстояние от щели 1 до детектора отличается от расстояния между детектором и щелью 2 на нечетное число полуволн. Малые значения  $I_{12}$  на фиг. 37.2 отвечают местам, где две волны интерferируют деструктивно.

Вспомните теперь, что количественную связь между  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_{12}$  можно выразить следующим образом: мгновенная высота волны в детекторе от щели 1 может быть представлена в виде (действительной части)  $\hat{h}_1 e^{i\omega t}$ , где «амплитуда»  $\hat{h}_1$ , вообще говоря, комплексное число. Интенсивность пропорцио-

нальна среднему квадрату высоты, или, пользуясь комплексными числами,  $|\hat{h}_1|^2$ . Высота волн от щели 2 тоже равна  $\hat{h}_2 e^{i\omega t}$ , а интенсивность пропорциональна  $|\hat{h}_2|^2$ . Когда обе щели открыты, высоты волн складываются, давая высоту  $(\hat{h}_1 + \hat{h}_2) e^{i\omega t}$  и интенсивность  $|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2$ . Множитель пропорциональности нас сейчас не интересует, так что формулу для *интерферирующих* волн можно записать в виде

$$I_1 = |\hat{h}_1|^2, \quad I_2 = |\hat{h}_2|^2, \quad I_{12} = |\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2. \quad (37.2)$$

Вы видите, что ничего похожего на то, что было с пулями, не получается. Раскрыв  $|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2$ , мы напишем

$$|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2 = |\hat{h}_1|^2 + |\hat{h}_2|^2 + 2|\hat{h}_1||\hat{h}_2|\cos\delta, \quad (37.3)$$

где  $\delta$  — разность фаз между  $\hat{h}_1$  и  $\hat{h}_2$ . Вводя интенсивности из (37.2), можем написать

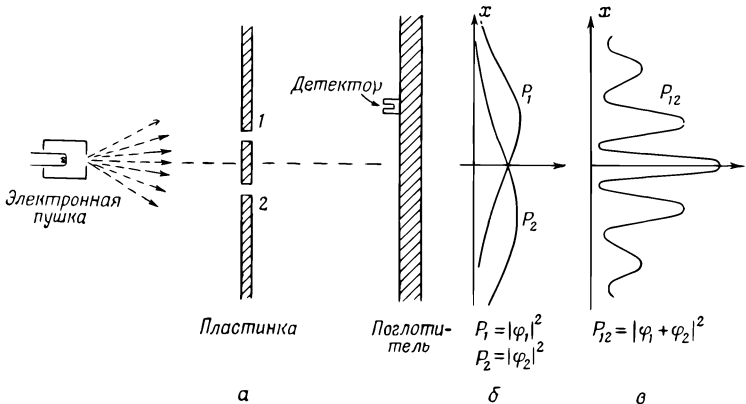
$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\delta. \quad (37.4)$$

Последний член и есть «интерференционный член».

На этом мы покончим с волнами. *Интенсивность их может быть любой, между ними возникает интерференция.*

#### § 4. Опыт с электронами

Представим себе теперь такой же опыт с электронами. Схема его изображена на фиг. 37.3. Мы поставим электронную пушку, которая состоит из вольфрамовой проволоочки, нагреваемой током и помещенной в металлическую коробку с отверстием. Если на проволочку подано отрицательное напряжение, а на коробку — положительное, то электроны, испущенные проволокой, будут разгоняться стенками и неко-



Ф и г. 37.3. Опыт с электронами.



торые из них проскочат сквозь отверстие. Все электроны, которые выскочат из пушки, будут обладать (примерно) одинаковой энергией. А перед пушкой мы поставим снова стенку (на этот раз тонкую металлическую пластинку) с двумя дырочками. За стенкой стоит другая пластинка, она служит «земляным валом», поглотителем. Перед нею — подвижный детектор, скажем счетчик Гейгера, а еще лучше — электронный умножитель, к которому подсоединен динамик.

Заранее предупреждаем вас: не пытайтесь проделать этот опыт (в отличие от первых двух, которые вы, быть может, уже проделали). Этот опыт никогда никто так не ставил. Все дело в том, что для получения интересующих нас эффектов прибор должен быть чересчур миниатюрным. Мы с вами ставим сейчас «мысленный эксперимент», отличающийся от других тем, что его легко обдумать. Что *должно* в нем получиться, известно заранее, потому что уже проделано множество опытов на приборах, размеры и пропорции которых были подобраны так, чтобы стал заметен тот эффект, который мы сейчас опишем.

Первое, что мы замечаем в нашем опыте с электронами, это резкие «щелк», «щелк», доносящиеся из детектора (вернее, из динамика). Все «щелк» одинаковы. *Никаких* «полущелков».

Мы замечаем также, что они следуют совершенно не регулярно. Скажем, так: щелк... щелк-щелк... щелк..... щелк.... щелк-щелк... ... щелк... и т. д. Кому случилось видеть счетчик Гейгера, знает, как он щелкает. Если подсчитать, сколько раз динамик щелкнул за достаточно длительное время (скажем, за несколько минут), а потом снова подсчитать, сколько он отщелкал за другой такой же промежуток времени, то оба числа будут почти одинаковыми. Можно поэтому говорить о *средней частоте*, с которой слышатся щелчки (столько-то «щелк» в минуту в среднем).

Когда мы переставляем детектор, *частота* щелчков то растет, то падает, но величина (громкость) каждого «щелк» всегда остается одной и той же. Если мы охладим проволоку в пушке; частота щелчков спадет, но каждый «щелк» будет звучать, как прежде. Поставим у поглотителя два отдельных детектора, тогда мы сразу заметим, что щелкает то один из них, то другой, но никогда оба вместе. (Разве что иногда наше ухо не разделит двух щелчков, последовавших очень быстро один за другим.) Мы заключаем поэтому, что все, что попадает в детектор, приходит туда «порциями». Все «порции» одной величины, в детектор (или поглотитель) попадает только целая порция; в каждый момент в поглотитель попадает только одна порция. Мы говорим: «Электроны всегда приходят одинаковыми порциями».

Как и в опыте со стрельбой из пулемета, мы попытаемся теперь поискать в новом опыте ответ на вопрос: «Какова относительная вероятность того, что электронная «порция» попадет в поглотитель на разных расстояниях  $x$  от середины?» Как и в том опыте, мы получим относительную вероятность, подсчитывая частоту щелчков при стабильно работающей пушке. Вероятность, что порции окажутся на определенном расстоянии  $x$ , пропорциональна средней частоте щелчков при этом  $x$ .

В результате нашего опыта получена интереснейшая кривая  $P_{12}$ , изображенная на фиг. 37.3, в. Да! Именно так и ведут себя электроны!

### § 5. Интерференция электронных волн

Попытаемся проанализировать кривую на фиг. 37.3 и посмотрим, сможем ли мы понять поведение электронов. Первое, что хочется отметить, это что раз они приходят порциями, то каждая из порций (ее тоже естественно именовать электроном) проходит либо сквозь отверстие 1, либо сквозь отверстие 2. Мы зафиксируем это в виде «Утверждения».

*Утверждение А:* Каждый электрон проходит *либо* сквозь отверстие 1, *либо* сквозь отверстие 2.

Если это предположить, то все электроны, достигшие поглотителя, можно разбить на два класса: 1) проникшие сквозь отверстие 1; 2) проникшие сквозь отверстие 2. Значит, полученная кривая — это сумма эффектов от электронов, прошедших сквозь отверстие 1, и электронов, прошедших сквозь отверстие 2. Давайте проверим это соображение экспериментально. Сначала проведем измерения с электронами, которые пройдут сквозь отверстие 1. Закроем отверстие 2 и подсчитаем щелчки в детекторе. Из частоты щелчков мы получим значение  $P_1$ . Результат измерений показан на кривой  $P_1$  фиг. 37.3, б. Выглядит это вполне разумно. Точно таким же образом измерим  $P_2$  — распределение вероятностей для электронов, прошедших сквозь отверстие 2. Оно тоже показано на рисунке.

Кривая  $P_{12}$ , полученная, когда *оба* отверстия открыты, явным образом не совпадает с суммой  $P_1 + P_2$  (суммой вероятностей при только одном работающем отверстии). По аналогии с нашим опытом с волнами на воде мы скажем: «Здесь есть интерференция»:

$$\text{Для электронов: } P_{12} \neq P_1 + P_2. \quad (37.5)$$

Откуда же могла появиться интерференция? Может, надо сказать так: «То, что порции проходят *либо* сквозь отверстие 1, *либо* сквозь отверстие 2, — это, по-видимому, *неверно*, ведь

если бы это было так, то складывались бы вероятности. Должно быть, их движение сложнее. Они разбиваются порциями и...» Да нет же! Это не так, они всегда приходят целыми порциями... «Ну ладно, тогда, может, кое-кто из них, пройдя сквозь отверстие 1, заворачивает в 2, а после опять в 1, и так несколько раз, или еще как-то бродит по обоим отверстиям. Тогда, закрыв отверстие 2, мыотрежем им путь и изменим вероятность того, что электрон, *выйдя* из отверстия 1, попадет в конце концов в поглотитель...» Но посмотрите-ка! Есть такие точки на кривой, в которые при *обоих* открытых отверстиях попадает очень мало электронов, а при *одном закрытом* отверстии их попадает гораздо *больше*. Выходит, закрытие одного отверстия увеличивает число электронов, проходящих через другое. И наоборот, середина кривой  $P_{12}$  более чем вдвое превышает сумму  $P_1 + P_2$ . Здесь, закрыв одно отверстие, вы тем самым *уменьшаете* число электронов, проходящих сквозь другое. Объяснить *оба* эффекта, предполагая, что электроны блуждают по сложным траекториям, пожалуй, довольно трудно.

Все это выглядит весьма таинственно. И тем таинственней, чем больше об этом думаешь. Идей, объясняющих кривую  $P_{12}$  как результат сложного движения отдельных электронов через оба отверстия, было сфабриковано немало. Но ни одна из этих попыток не была успешной. Ни одна не смогла выразить  $P_{12}$  через  $P_1$  и  $P_2$ .

При этом, как ни странно, *математика*, связывающая  $P_1$  и  $P_2$  с  $P_{12}$ , проста до чрезвычайности. Кривая  $P_{12}$  ничем не отличается от кривой  $I_{12}$  на фиг. 37.2, а *последнюю-то* получить очень просто. То, что приближается к поглотителю, может быть описано двумя комплексными числами  $\hat{\varphi}_1$  и  $\hat{\varphi}_2$  (это функции от  $x$ ). Квадрат абсолютной величины  $\hat{\varphi}_1$  дает эффект от одного отверстия 1:  $P_1 = |\varphi_1|^2$ . Эффект, полученный при открытом отверстии 2, точно таким же образом получается из  $\hat{\varphi}_2$ , т. е.  $P_2 = |\hat{\varphi}_2|^2$ . А общее действие *обоих* отверстий выразится в виде  $P_{12} = |\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2|^2$ . *Выкладки* абсолютно те же, что и для волн на воде! (А попробуйте-ка, кстати, получить такой простой результат, считая, что электроны шныряют взад и вперед сквозь пластинку по необычным траекториям.)

В конце концов мы приходим к следующему заключению: электроны приходят порциями, подобно частицам, а вероятность прибытия этих порций распределена так же, как и интенсивность волн. Именно в этом смысле электрон и ведет себя «отчасти как частица, отчасти как волна».

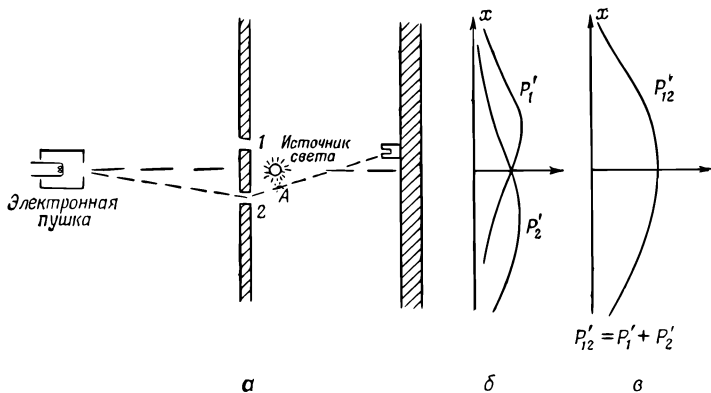
Заметим, кстати, что, имея дело с классическими волнами, мы определили интенсивность как среднее по времени от квадрата амплитуды волны и применили комплексные числа как математический прием, облегчающий расчеты. Но в кван-

товой механике амплитуды *обязаны* представляться комплексными числами. Одной только действительной части амплитуд недостаточно. Пока, впрочем, это выглядит лишь как техническая подробность, потому что формулы с виду одни и те же.

А поскольку вероятность прохода сквозь оба отверстия выражается столь просто (хотя и не равна сумме  $P_1 + P_2$ ), то больше по этому поводу сказать нечего. Но имеется еще множество тонкостей, связанных с таким поведением природы. Хотелось бы рассказать о некоторых из них. Во-первых, раз число частиц, достигающих определенной точки, не равно числу прохождений сквозь отверстие 1 плюс число прохождений через отверстие 2 (как этого можно было ожидать, основываясь на «Утверждении А»), то, несомненно, «Утверждение А» *неверно*. *Неверно*, что электроны проходят *либо* сквозь отверстие 1, *либо* сквозь отверстие 2. Но этот вывод можно проверить и иначе.

### § 6. Как проследить за электроном?

Попытаемся проделать такой опыт. В наш электронный прибор как раз за стенкой между двумя отверстиями поместим сильный источник света (фиг. 37.4). Известно, что электрические заряды рассеивают свет. Поэтому, каким бы путем электрон ни прошел к детектору, он обязательно рассеет немного света в наш глаз, и мы *увидим*, где он проскочил. Скажем, если он проскользнет сквозь отверстие 2, как это показано на рисунке, то мы увидим, как где-то около точки А что-то блеснуло. Если же он проскочит сквозь верхнее отверстие, то блеснет где-то поблизости от отверстия 1. А если бы случилось так, что свет блеснул бы сразу в двух местах,



Фиг. 37.4. Другой опыт с электронами

потому что электрон разделится пополам, то ... Но лучше приступим к опыту!

Вот что мы увидим: *всякий раз*, когда мы слышим из детектора «щелк», мы *также видим* вспышку света *или* у отверстия 1, *или* у отверстия 2, но *никогда* у обоих отверстий сразу! Так происходит при любом положении детектора. Отсюда мы делаем вывод, что когда мы смотрим на электрон, то обнаруживаем, что он проходит *или* через одно отверстие, *или* через другое. «Утверждение А», как показывает эксперимент, выполняется с необходимостью.

Что же в таком случае неверно в наших доводах *против* правильности «Утверждения А»? Почему же все-таки  $P_{12}$  не равно  $P_1 + P_2$ ? Продолжим наш опыт! Давайте проследим за электронами и посмотрим, что они поделявают. Для каждого положения детектора (для каждого фиксированного  $x$ ) мы подсчитаем, сколько электронов в него попало, и *одновременно* проследим (наблюдая вспышки), через какие отверстия они прошли. Следить мы будем так: услышав «щелк», мы поставим палочку в первом столбце, если заметим вспышку у первого отверстия; если же вспышка блеснет у отверстия 2, то мы отметим это палочкой во второй колонке. Каждый попадающий в детектор электрон будет отнесен к одному из двух классов: либо к классу электронов, проникших сквозь отверстие 1, либо к классу электронов, проникших сквозь отверстие 2. Количество палочек, накопившихся в первой колонке, даст нам  $P'_1$  — вероятность того, что электрон пройдет к детектору сквозь отверстие 1; точно так же вторая колонка даст  $P'_2$  — вероятность того, что электрон воспользовался отверстием 2. Повторив эти измерения для многих значений  $x$ , мы получим кривые  $P'_1$  и  $P'_2$ , показанные на фиг. 37.4, б.

Ну что ж, ничего неожиданного в них нет! Кривая  $P'_1$  вышла похожей на кривую  $P_1$ , которая получалась, когда отверстие 2 закрывали, а кривая  $P'_2$  похожа на то, что мы получали, когда закрывали отверстие 1. Итак, никаких блужданий от дырки к дырке *не существует*. Когда мы следим за электронами, то оказывается, что они проникают сквозь стенку со щелями в точности так, как мы ожидали. Закрыты ли отверстия или открыты, все равно те электроны, которые мы видели проникающими сквозь отверстие 1, распределены одинаково.

Но погодите! Какова же *теперь* полная вероятность — вероятность того, что электрон попал в детектор любым путем? У нас уже есть сведения об этом. Сделаем вид, что мы не замечали световых вспышек, т. е. сложим палочки, стоящие в обеих колонках. Нам нужно только *сложить числа*. Для вероятности того, что электрон попал в поглотитель, пройдя через

любое из отверстий, мы действительно получим  $P'_{12} = P_1 + P_2$ . Выходит, что, хоть нам и удалось проследить, через какое отверстие проходят электроны, никакой прежней интерференционной кривой  $P_{12}$  не вышло, получилась новая кривая  $P'_{12}$  — кривая без интерференции! А выключите свет — и снова возникнет  $P_{12}$ .

Мы приходим к заключению, что, когда мы смотрим на электроны, распределение их на экране совсем не такое, как тогда, когда на них не смотрят. Уж не от включения ли света меняется ход событий? Должно быть, электроны — вещь очень деликатная; свет, рассеиваясь на электронах, толкает их и меняет их движение. Мы ведь знаем, что электрическое поле, действуя на заряд, прилагает к нему силу. От этого, по-видимому, и следует ожидать изменения движения. Во всяком случае, свет оказывает на электроны большое влияние. Пытаясь «проследить» за электронами, мы изменили их движение. Толчки, испытываемые электронами при рассеянии фотонов, очевидно, таковы, что движение электронов сильно изменяется: электрон, который прежде мог попасть в максимум  $P_{12}$ , теперь приземляется в минимуме  $P_{12}$ ; вот поэтому никакой интерференции и не заметно.

«Но к чему же такой яркий источник света? — можете вы подумать. — Сбавьте яркость! Световые волны ослабнут и не смогут так сильно возмущать электроны; ослабляя свет все больше и больше, можно в принципе добиться того, что воздействием света на электрон можно будет вообще пренебречь». Будь по-вашему. Давайте попробуем.

Первое, что мы замечаем, это что блеск света, рассеянного на электронах, не слабеет. Сила вспышек остается прежней. От того, что свет стал тускнеть, изменилось лишь одно: временами, услышав щелчок детектора, мы никакой вспышки не замечаем; электрон прошел незамеченным. Мы просто обнаруживаем, что свет ведет себя так же, как электроны: мы знаем, что он «волнист», а теперь убеждаемся, что он к тому же распространяется «порциями». Он доставляется — или рассеивается — порциями, которые мы называем «фотонами». Понижая интенсивность источника света, мы не меняем величины фотонов, а меняем только темп, с каким они испускаются. Этим и объясняется, почему при притушенном свете некоторые электроны проскальзывают к детектору незаметно. Просто как раз в тот момент, когда электрон двигался к детектору, фотона в нужном месте не оказалось.

Все это немного нас обескураживает. Если правильно, что всякий раз, когда мы «видим» электрон, получаются одинаковые вспышки, то все увиденные нами до сего времени электроны были возмущенными электронами. Давайте тогда опыт с тусклым светом проведем иначе. Теперь, услышав

щелчок в детекторе, мы будем ставить палочку в одну из трех колонок: в первую, если электрон замечен у отверстия 1, во вторую, если его видели у отверстия 2, и в третью, если его вообще не видели. Обработав данные (рассчитав вероятности), мы получим следующие результаты: «виденные у отверстия 1» будут распределены по закону  $P'_1$ , «виденные у отверстия 2» — по закону  $P'_2$  (так что «виденные либо у отверстия 1, либо у отверстия 2» распределяются по закону  $P'_{12}$ , а «незамеченные» распределены «волноподобно», как  $P_{12}$  на фиг. 37.3! Если электроны не видимы, возникает интерференция!

Это уже можно понять. Когда мы не видим электрон, значит, фотон не возмущил его; а если уж мы его заметили, значит, он возмущен фотоном. Степень возмущения всегда одна и та же, потому что все фотоны света производят эффекты одинаковой величины, достаточной для того, чтобы смазать любые интерференционные эффекты.

Но нет ли *хоть какого-нибудь* способа увидеть электрон, не возмущая его? Мы уже говорили о том, что импульс, уносимый фотоном, обратно пропорционален его длине волны ( $p = h/\lambda$ ). Чем больше импульс у фотона, тем сильнее он толкает электрон, когда рассеивается на нем. Ага! Раз мы хотим как можно слабее возмущать электроны, то не стоит снижать *интенсивность* света, лучше снизить его *частоту* (или, что то же самое, увеличить длину волны). Нужно осветить электроны красным светом. Можно воспользоваться даже инфракрасным светом или радиоволнами (как в радаре). При помощи оборудования, приспособленного для восприятия длинноволнового света, можно тоже разглядеть, куда направился электрон. Может быть, более «мягкий» свет поможет нам избежать сильного возмущения электронов.

Ну что ж, примемся экспериментировать с длинными волнами. Будем повторять наш опыт, увеличивая все больше и больше длину волны. На первых порах ничего не изменится, все результаты будут прежними. А потом произойдет ужасно неприятная вещь. Вы помните, что, изучая микроскоп, мы заметили, что вследствие *волновой природы* света появляются ограничения на расстояния, на которых два пятна еще не сливаются в одно. Это расстояния порядка длины волны света. И вот теперь это ограничение опять всплывает. Как только длина волны сравняется с промежутком между отверстиями, вспышки станут такими размытыми, что невозможно будет разобрать, возле какого отверстия произошла вспышка! Мы не сможем больше угадывать, какой дыркой воспользовался электрон! Известно, что где-то проскочил, а где — неясно! И это как раз при таком цвете, когда толчки становятся еле заметными, а кривая  $P'_{12}$  начинает походить на  $P_{12}$ , т. е. начи-

нает чувствоваться интерференция. И только при длинах волн, намного превышающих расстояние между отверстиями (когда уже нет никакой возможности разобрать, куда прошел электрон), возмущение, причиняемое светом, становится таким слабым, что снова появляется кривая  $P_{12}$  (см. фиг. 37.3).

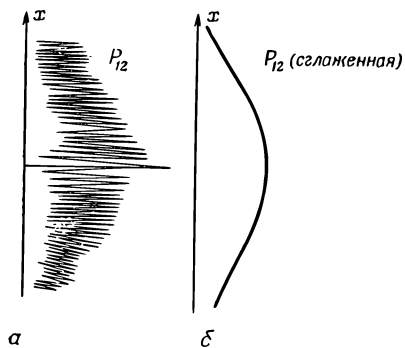
В нашем опыте мы обнаружили, что невозможно приспособить свет для того, чтобы узнавать, через какое отверстие проник электрон, и в то же время не исказить картины. Гейзенберг предположил, что новые законы природы были бы совместимы друг с другом только в том случае, если бы существовали некоторые фундаментальные ограничения на наши экспериментальные возможности, ограничения, которых прежде не замечали. Он предложил в качестве общего принципа свой *принцип неопределенности*. В терминах нашего эксперимента он звучит следующим образом: «Невозможно соорудить аппарат для определения того, через какое отверстие проходит электрон, не возмущая электрон до такой степени, что интерференционная картина пропадает». Если аппарат способен определять, через какую щель проходит электрон, он *не способен* оказаться столь деликатным, чтобы не исказить картину самым существенным образом. Никому никогда не удалось изобрести или просто указать способ, как обойти принцип неопределенности. Значит, мы обязаны допустить, что он описывает одну из основных характеристик природы.

Полная теория квантовой механики, которой мы в настоящее время пользуемся для описания атомов, а значит, и всего вещества, зависит от правильности принципа неопределенности. Квантовая механика весьма успешно справляется со своими задачами; это укрепляет нашу веру в принцип. Но если когда-нибудь удастся «разгромить» принцип неопределенности, то квантовая механика начнет давать несогласованные результаты и ее придется исключить из рядов правильных теорий явлений природы.

«Ну, хорошо, — скажете вы, — а как же быть с «Утверждением А?» Значит, верно все-таки, что электрон проходит либо сквозь отверстие 1, либо сквозь 2? Или же это *неверно*?» Единственный ответ, который может быть дан, таков: мы нашли из опыта, что существует некоторый определенный способ, которым мы должны рассуждать, чтобы не прийти к противоречиям.

Вот как мы обязаны рассуждать, чтобы не делать ошибочных предсказаний. Если вы следите за отверстиями, а точнее, если у вас есть прибор, способный узнавать, сквозь какое отверстие из двух проник электрон, то вы *можете* говорить, что он прошел сквозь отверстие 1 (или 2). Но если вы *не* пытались узнать, где прошел электрон, если в опыте не было ничего возмущавшего электроны, то вы *не смеете* думать, что





Фиг. 37.5. Интерференционная картина при рассеянии пуль  
 а — истинная (схематично); б — наблюдаемая

электрон прошел либо сквозь отверстие 1, либо сквозь отверстие 2. Если вы все же начнете так думать и затем делать из этой мысли различные выводы, то, несомненно, натворите ошибок в своем анализе. Вы вынуждены балансировать на этом логическом канате, если хотите успешно описывать природу.



Если движение всего вещества, подобно электронам, нужно описывать, пользуясь волновыми понятиями, то как быть с пулями в нашем первом опыте? Почему мы не увидели там интерференционной картины? Дело оказывается в том, что у пуль длина волны столь незначительна, что интерференционные полосы становятся очень тонкими. Столь тонкими, что никакой детектор разумных размеров не разделит их на отдельные максимумы и минимумы. Мы с вами видели только нечто усредненное — это и есть классическая кривая. На фиг. 37.5 мы попытались схематически изобразить, что происходит с крупными телами. На фиг. 37.5, а показано распределение вероятностей для пуль, предсказываемое квантовой механикой. Предполагается, что резкие колебания должны дать представление об интерференционной картине от очень коротких волн. Но любой физический детектор неизбежно вынужден будет накрыть сразу множество зигзагов этой кривой, так что измерения, проведенные с его помощью, дадут плавную кривую, показанную на фиг. 37.5, б.

## § 7. Исходные принципы квантовой механики

Теперь подытожим основные выводы из наших опытов. Сделаем мы это в такой форме, чтобы они оказались справедливыми для всего класса подобных опытов. Сводку итогов можно записать проще, если сперва определить «идеальный

опыт», т. е. опыт, в котором отсутствуют неопределенные внешние влияния и нет никаких не поддающихся учету изменений, колебаний и т. д. Точная формулировка будет такова: «Идеальным опытом называется такой, в котором все начальные и конечные условия опыта полностью определены». Такую совокупность начальных и конечных условий мы будем называть «событием». (Например: «электрон вылетает из пушки, попадает в детектор, и больше ничего не происходит».) А сейчас дадим нашу сводку выводов.

### СВОДКА ВЫВОДОВ

- 1) Вероятность события в идеальном опыте дается квадратом абсолютной величины комплексного числа  $\Phi$ , называемого амплитудой вероятности.

$$\begin{aligned} P & \text{ — вероятность,} \\ \Phi & \text{ — амплитуда вероятности,} \\ P & = |\Phi|^2. \end{aligned} \quad (37.6)$$

- 2) Если событие может произойти несколькими взаимно исключаящими способами, то амплитуда вероятности события — это сумма амплитуд вероятностей каждого отдельного способа. Возникает интерференция.

$$\begin{aligned} \Phi & = \Phi_1 + \Phi_2, \\ P & = |\Phi_1 + \Phi_2|^2. \end{aligned} \quad (37.7)$$

- 3) Если ставится опыт, позволяющий узнать, какой из этих взаимно исключаящих способов на самом деле осуществляется, то вероятность события — это сумма вероятностей каждого отдельного способа. Интерференция отсутствует.

$$P = P_1 + P_2. \quad (37.8)$$



Быть может, вам все еще хочется выяснить: «А почему это? Какой механизм прячется за этим законом?» Так вот: никому никакого механизма отыскать не удалось. Никто в мире не сможет вам «объяснить» ни на капельку больше того, что «объяснили» мы. Никто не даст вам никакого более глубокого представления о положении вещей. У нас их нет, нет представлений о более фундаментальной механике, из которой можно вывести эти результаты.

*Мы хотели бы подчеркнуть очень важное различие между классической и квантовой механикой.* Мы уже говорили о вероятности того, что электрон попадает туда-то и туда-то в данных обстоятельствах. Мы подразумевали, что с нашим (да и с самым лучшим) экспериментальным устройством невозможно будет предсказывать точно, что произойдет. Мы способны только определять шансы! Это означало бы, если это утвер-

ждение правильно, что физика отказалась от попыток предсказывать точно, что́ произойдет в определенных условиях. Да! Физика и *впрямь* сдалась. Мы не умеем предсказывать, что́ должно было бы случиться в данных обстоятельствах. Мало того, мы уверены, что это немисливо: единственное, что поддается предвычислению, — это вероятность различных событий. Приходится признать, что мы изменили нашим прежним идеалам понимания природы. Может быть, это шаг назад, но никто не научил нас, как избежать его!

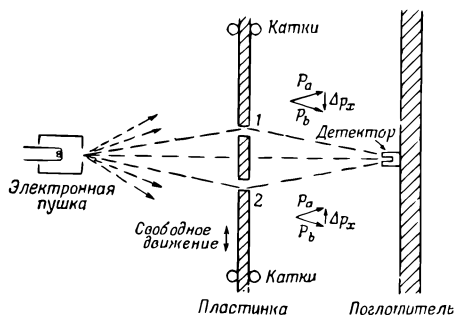
Сделаем теперь несколько замечаний об одном утверждении, которое иногда делали те, кто не хотел пользоваться приведенным описанием. Они говорили: «Может быть, в электроде происходят какие-то внутренние процессы, имеются какие-то внутренние переменные, о чем мы пока ничего не знаем. Может быть, именно поэтому мы не умеем предугадывать, что́ случится. А если бы мы могли попристальней взглядеться в электрон, то смогли бы сказать, куда он придет». Насколько нам известно, такой возможности нет. Трудности все равно остаются. Предположим, что внутри электрона есть механизм какого-то рода, определяющий, куда электрон собирается попасть. Тогда эта машина должна определить *также*, через какое отверстие он намерен проследовать. Но не забывайте, что вся эта внутриэлектронная механика не должна зависеть от того, что делаем *мы*, и, в частности, от того, открыли мы данное отверстие или нет. Значит, если электрон, отправляясь в путь, уже прикинул, сквозь какую дырку он протиснется и где он приземлится, то для электронов, облюбовавших отверстие 1, мы получим распределение  $P_1$ , а для остальных — распределение  $P_2$ . А тогда для тех электронов, которые прошли через оба отверстия, с *необходимостью* распределение окажется суммой  $P_1 + P_2$ . Не видно способа обойти этот вывод. Но мы экспериментально доказали, что он неверен. Никто еще не нашел отгадки этой головоломки. Стало быть, в настоящее время приходится ограничиваться расчетом вероятностей. Мы говорим «в настоящее время», но мы очень серьезно подозреваем, что все это — уже навсегда, и разгрызть этот орешек человеку не по зубам, ибо *такова природа вещей*.

## § 8. Принцип неопределенности

Вот как сам Гейзенберг сформулировал свой принцип неопределенности: если вы изучаете какое-то тело и вы в состоянии определить  $x$ -компоненту импульса тела с неопределенностью  $\Delta p_x$ , то вы не можете одновременно определить координату  $x$  тела с точностью, большей чем  $\Delta x = \hbar/\Delta p_x$ .

Произведение неопределенностей в положении тела и в его импульсе в любой момент должно быть больше постоянной

Фиг. 37.6. Опыт, в котором измеряется отдача стенки.



Планка. Это частный случай принципа неопределенности. Более общая формулировка была высказана в предыдущем параграфе: нельзя никаким образом устроить прибор, определяющий, какое из двух взаимно исключающих событий осуществилось, без того, чтобы в то же время не разрушилась интерференционная картина.

Сейчас на одном частном случае мы покажем, что, если не иметь в своем распоряжении какого-нибудь принципа, наподобие принципа Гейзенберга, трудностей избежать никак нельзя. Представим себе такое видоизменение опыта, показанного на фиг. 37.3, в котором стенкой с отверстиями служит пластинка на катках, способная откатываться вверх и вниз (в  $x$ -направлении), как показано на фиг. 37.6. Внимательно следя за движением пластинки, можно попытаться узнать, сквозь какое отверстие прошел электрон. Представьте, что случится, когда детектор поставят в точку  $x = 0$ . Когда электрон проходит через отверстие 1, он должен отклониться вниз от пластинки, чтобы попасть в детектор. Так как изменилась вертикальная компонента импульса, то к пластинке приложится сила отдачи — тот же импульс, но в противоположном направлении. Пластинка испытает толчок вверх. А когда электрон пройдет сквозь нижнее отверстие, пластинка почувствует толчок вниз. При любом другом положении детектора импульс, получаемый пластинкой, будет тоже неодинаков: когда электрон проскакивает через верхнюю дырку — один, когда сквозь нижнюю — другой. И, значит, не трогая электрон, ни капельки не возмущая его, а лишь следя за *пластинкой*, можно узнать, каким путем воспользовался электрон.

Чтобы определить это, нам нужно только знать, каков был импульс экрана до прихода электрона. Тогда, измерив импульс экрана после пролета электрона, мы сразу увидим, насколько он переменялся. Но вспомните, что, согласно принципу неопределенности, при этом уже невозможно будет знать положение пластинки с произвольной точностью. Однако если мы не знаем точно, где она находится, как же мы узнаем, где

эти два отверстия? Для каждого нового электрона, проникающего сквозь пластинку, отверстия окажутся на новом месте. А это значит, что центр нашей интерференционной картины для каждого электрона тоже будет на новом месте. Интерференционные полосы (колебания вероятности) смажутся. В следующей главе мы докажем численно, что при измерении импульса пластинки (достаточно точном для того, чтобы из измерений отдачи узнать номер отверстия) неопределенности в координате  $x$  пластинки как раз хватит на то, чтобы сдвинуть возникающую в детекторе картину вверх и вниз на расстояние от максимума до ближайшего минимума. От этих случайных сдвигов картина интерференции размажется и от нее в конце концов не останется и следа.

Принцип неопределенности «спасает» квантовую механику. Гейзенберг понимал, что если бы можно было с большей точностью измерять и положение, и импульс одновременно, то квантовая механика рухнула бы. Вот он и допустил, что это невозможно. Тогда люди принялись придумывать способы, как все-таки это сделать. Но никому не удалось представить себе способ, как измерять положение и импульс чего угодно — экрана, электрона, бильярдного шара, любого предмета — с большей точностью. И квантовая механика продолжает вести свой рискованный, впрочем, вполне четко очерченный образ жизни.

## СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ВОЛНОВОЙ И КОРПУСКУЛЯРНОЙ ТОЧКАМИ ЗРЕНИЯ

### § 1. Волны амплитуды вероятности

В этой главе мы с вами обсудим соотношение между волновой и корпускулярной точками зрения. Из предыдущей главы мы уже знаем, что ни та, ни другая неверны. Обычно мы всегда старались формулировать понятия аккуратно или по крайней мере достаточно точно, чтобы при дальнейшем изучении их не пришлось бы менять. Разрешалось их расширять, обобщать, но уже никак не менять! Но как только мы пытаемся говорить об электро-не как волне или об электро-не как частице, то любая из этих точек зрения рано или поздно меняется, ведь обе они приблизительны. Поэтому все, что мы изучим в этой главе, в каком-то смысле неправильно; будут высказаны некие полуинтуитивные соображения, которыми со временем предстоит уточняться, и кое-что придется слегка изменить, когда мы их уточним с помощью квантовой механики. Причина в том, что, не собираясь сейчас штудировать квантовую механику по всем правилам, мы хотим получить по крайней мере представление о характере эффектов, которые мы там обнаружим. Да и к тому же весь наш опыт относится либо к волнам, либо к частицам, и поэтому весьма удобно использовать то те, то другие представления, чтобы добиться некоторого понимания того, что произойдет в определенных обстоятельствах, пока мы еще не знаем всей математики квантовомеханических амплитуд. По мере нашего продвижения вперед мы будем стараться прояснить самые слабые места. Впрочем, многие из этих мест почти верны, все дело просто в толковании.

§ 1. Волны амплитуды вероятности

§ 2. Измерение положения и импульса

§ 3. Дифракция на кристалле

§ 4. Размер атома

§ 5. Уровни энергии

§ 6. Немного философии

Прежде всего мы уже знаем, что новый, выдвигаемый квантовой механикой способ изображать мир — новая система мира — состоит в том, чтобы задавать амплитуду любого события, которое может случиться. Если событие состоит в регистрации частицы, то можно задать амплитуду обнаружения этой частицы в тех или иных местах и в то или иное время. Вероятность обнаружить частицу тогда будет пропорциональна квадрату абсолютной величины амплитуды. Вообще говоря, вероятность обнаружить частицу в каком-то месте и в какое-то время меняется в зависимости от места и от времени.

В частном случае амплитуда может изменяться синусоидально в пространстве и времени по закону  $\exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$  (не забывайте, что амплитуда — число комплексное, а не действительное); тогда в нее входит определенная частота  $\omega$  и определенный волновой вектор  $\mathbf{k}$  (величина  $k = |\mathbf{k}|$  называется *волновым числом*). Это отвечает той предельной классической ситуации, когда можно считать, что имеется частица с известной энергией  $E$ , которая связана с частотой соотношением

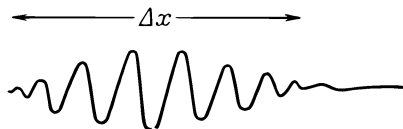
$$E = \hbar\omega, \quad (38.1)$$

и с известным импульсом  $\mathbf{p}$ , связанным с волновым вектором формулой

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (38.2)$$

Это означает, что понятие частицы ограничено. Само понятие частицы, понятие ее положения, ее импульса и т. д., которым мы так часто пользуемся, в некотором смысле не является удовлетворительным. Например, когда амплитуда, относящаяся к событию обнаружения частицы в том или ином месте, дается функцией  $\exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ , равной по абсолютной величине единице, то это значит, что вероятность обнаружить частицу одинакова для любой точки. Получается, что тогда мы просто не знаем, где она находится. Она может оказаться где угодно, ее положение в высшей степени неопределенно.

Когда же положение частицы более или менее известно, когда оно может быть предсказано довольно точно, то вероятность того или иного ее местоположения должна быть отлична от нуля в определенной области, имеющей, скажем, длину  $\Delta x$ . Вне этой области вероятность равна нулю. Вероятность — это квадрат абсолютной величины амплитуды. Когда квадрат абсолютной величины равен нулю, то и амплитуда равна



Фиг. 38.1. Волновой пакет длиной  $\Delta x$ .

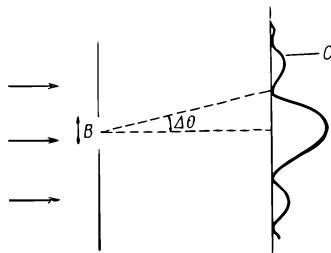
нулю. Выходит, что амплитуда описывает цуг волн протяженностью  $\Delta x$  (фиг. 38.1), а длине волны (расстоянию между горбами волн) в цуге волн соответствует некоторое значение импульса частицы.

Здесь мы сталкиваемся со странным и в то же время очень простым явлением, никак непосредственно с квантовой механикой не связанным. Оно известно всем, кто занимался волнами, даже не зная квантовой механики, а именно: *нельзя однозначно определить длину волны для короткого цуга волн. У такого цуга нет определенной длины волн; в волновом числе имеется неопределенность, связанная с конечной длиной цуга, а значит, и неопределенность в импульсе.*

## § 2. Измерение положения и импульса

Чтобы понять, почему в квантовой механике появляется неопределенность в положении и (или) в импульсе, рассмотрим два примера. Мы уже видели раньше, что если бы этого не было, если бы можно было параллельно измерять и местонахождение, и импульс какого-то тела, то возник бы парадокс. К счастью, парадокса не возникает, а то обстоятельство, что неопределенность естественным образом вытекает из волновой картины, свидетельствует, что все здесь взаимосвязано.

Вот первый пример, показывающий связь импульса и координаты в условиях, которые легко себе представить. Пусть сквозь единственную щель в экране проникают частицы, пришедшие издалека и обладающие определенной энергией. Двигутся все они горизонтально (фиг. 38.2). Сосредоточим наше внимание на вертикальной составляющей импульса. У каждой из этих частиц имеется (в обычном классическом смысле) горизонтальная составляющая импульса определенной величины  $p_0$ . Вертикальная составляющая импульса  $p_y$  (до того, как частица пройдет сквозь прорезь) также в классическом смысле хорошо известна: частицы не движутся ни вверх, ни вниз, потому что их источник очень удален, значит, вертикальная составляющая импульса частицы в точности равна нулю. А теперь предположим, что ширина щели равна  $B$ . Когда частица пройдет через щель, то ее вертикальная координата  $y$



Фиг. 38.2. Диффракция частиц, проходящих сквозь щель.

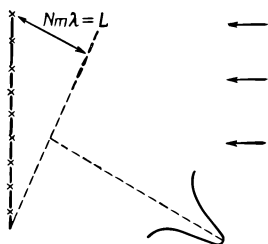


определился с хорошей точностью  $\pm B$ . Это значит, что неопределенность в положении частицы  $\Delta y$  будет порядка  $B$ . Может, вы захотите сказать, что  $\Delta p_y = 0$ , потому что импульс частиц, мол, точно горизонтален? Но это не так. Это *прежде* мы знали, что импульс имеет только горизонтальную составляющую, а теперь мы этого уже не знаем. Перед тем как частица проникла сквозь щель, мы не знали ее вертикальной координаты. После того как частица проникла сквозь щель, мы узнали ее вертикальную координату, но потеряли информацию об ее вертикальной составляющей импульса! Почему? Да потому, что, согласно волновой теории, происходит отклонение, или дифракция, волн, проникших сквозь щель, подобно тому как это бывает со светом. Поэтому есть конечная вероятность того, что частицы, пройдя сквозь щель, не пойдут прямо вперед. Вся картина распространения расплывается за счет дифракции, и угол этого расширения (угол, под которым виден первый минимум) есть мера неопределенности направления частицы.

Каким образом происходит расплывание изображения в ширину? Расплывание означает, что существует некая вероятность того, что частица отправится вверх или вниз, т. е. приобретет компоненту импульса, направленную вверх или вниз. (Мы говорим и о *вероятности* и о *частице*, потому что дифракционную картину можно обнаружить с помощью счетчика частиц, а когда счетчик регистрирует частицу, скажем, в точке  $C$  на фиг. 38.2, то он регистрирует частицу целиком. А это значит на классическом языке, что частица имеет вертикальный импульс, направляющий ее из щели прямо в точку  $C$ .)

Чтобы примерно представить себе степень расплывания импульса, напишем, что вертикальный импульс  $p_y$  размазан на  $p_0 \Delta \theta$ , где  $p_0$  — горизонтальный импульс. Чему же равно  $\Delta \theta$  в размазанной картине? Известно, что первый минимум наблюдается при угле  $\Delta \theta$  таком, что в этом направлении волна от дальнего края щели должна отстать на одну свою длину от волны от ближнего края (мы об этом уже говорили в гл. 30). Стало быть,  $\Delta \theta$  равно  $\lambda/B$ , и тем самым  $\Delta p_y$  в этом эксперименте равно  $p_0 \lambda/B$ . Чем меньше будет  $B$ , чем точнее будет определяться положение частицы, тем шире будет дифракционная картина. Вспомните, что когда мы закрывали щели в эксперименте с электронными волнами, то интенсивность в стороне от щели возрастала. Значит, чем уже щель, тем шире становится картина дифракции, тем правдоподобнее, что мы обнаружим у частицы импульс, направленный в сторону. И неопределенность в вертикальном импульсе, действительно, обратно пропорциональна неопределенности в  $y$ , потому что их произведение равно  $p_0 \lambda$ .

Фиг. 38.3. Определение импульса с помощью дифракционной решетки.



Но  $\lambda$  — это длина волны, а  $p_0$  — импульс, и в соответствии с квантовой механикой их произведение — это постоянная Планка  $h$ . Получается, что произведение неопределенностей в вертикальном импульсе и в вертикальной координате есть величина порядка  $h$ :

$$\Delta y \Delta p_y \approx h. \quad (38.3)$$

Мы не можем приготовить систему, в которой положение частицы по вертикали было бы известно, и в то же время предсказывать с определенностью, превышающей  $h/\Delta y$ , насколько ее движение отклонится от вертикали. Неопределенность в вертикальном импульсе всегда больше  $h/\Delta y$ , если  $\Delta y$  — неопределенность, с которой мы знаем положение частицы.

Некоторые люди утверждают, что в квантовой механике все неправильно. Когда, говорят они, частица приближалась слева, ее вертикальный импульс был равен нулю. А когда она прошла через щель, стало известно ее положение. И то, и другое может быть определено с любой точностью.

Совершенно верно. Мы можем зарегистрировать частицу и определить, каково ее положение и каким должен был быть ее импульс, чтобы она попала туда, куда она попала. Это все верно. Но соотношение неопределенностей (38.3) ничего общего с этим не имеет. Уравнение (38.3) относится к возможности *предсказания*, а не к замечаниям о том, что *произошло* в прошлом. Какая польза в том, что мы скажем: «Я знал, каков был импульс до прохода частицы сквозь щель, а теперь узнал к тому же и координату»? Ведь теперь-то знание об импульсе частицы уже утеряно. Раз она прошла сквозь щель, то мы уже не можем больше предсказывать ее вертикальный импульс. Речь идет о теории, способной к предсказаниям, а не об измерениях после того, как все завершилось. Мы и обсуждаем вопрос о том, что можно предвидеть.

Попробуем теперь по-иному подойти к этим вещам. Приведем другой пример того же явления, на этот раз с более подробными количественными оценками. Прежде мы измеряли импульс классическим способом: мы рассматривали

направление, скорость, углы, и тому подобное; в этом заключался способ получения импульса путем классического анализа. Но раз импульс связан с волновым числом, то в природе существует и другой, совершенно иной путь измерения импульса частиц (все равно, фотона или любой другой), не имеющий классического аналога. В нем используется уравнение (38.2) и просто измеряется *длина волны*. Давайте попробуем таким способом измерить импульс.

Пусть имеется решетка со множеством линий (фиг. 38.3), на которую направлен пучок частиц. Мы неоднократно рассматривали эту задачу: когда у частиц есть определенный импульс, то вследствие интерференции в некотором направлении возникает очень резкий максимум. Мы также говорили о том, насколько точно можно определить этот импульс, т. е. какова разрешающая сила решетки. Мы не будем заново это все выводить, а сошлемся на гл. 30; там мы выяснили, что относительная неопределенность в длине волны, связанная с данной решеткой, равна  $1/Nm$ , где  $N$  — количество линий решетки, а  $m$  — порядок дифракционного максимума. Иначе говоря,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nm}. \quad (38.4)$$

Перепишем эту формулу в виде

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{Nm\lambda} = \frac{1}{L}, \quad (38.5)$$

где расстояние  $L$  показано на фиг. 38.3. Это — разность двух расстояний: расстояния, которое должна пройти волна (или частица), отразившись от нижней части решетки, и расстояния, которое ей нужно пройти при отражении от верха решетки.

Другими словами, волны, образующие дифракционный максимум, — это волны, приходящие от разных частей решетки. Первыми прибывают волны, вышедшие снизу — это начало цуга волн, а потом следуют дальнейшие части цуга, от средних частей решетки, пока не придет волны от верха: точка цуга, удаленная от его начала на расстояние  $L$ . Значит, чтобы получить в спектре резкую линию, отвечающую определенному импульсу [с неопределенностью, даваемой формулой (38.4)], для этого нужен цуг волн длиной  $L$ . Если цуг чересчур короток (короче  $L$ ), то не вся решетка будет действовать. Волны, образующие спектр, будут отражаться при этом только от небольшого куска решетки, и решетка не будет хорошо работать — получится сильное размытие по углу. Чтобы его сузить, надо использовать всю ширину решетки так, чтобы хотя бы на одно мгновение весь цуг волн улегся одновременно на решетке и рассеялся ото всех ее

частей. Потому-то длина цуга должна быть равна  $L$ ; тогда только неопределенность в длине волны окажется меньше, чем указано формулой (38.5). Заметим, что

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta^2} = \Delta \left( \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\Delta k}{2\pi}, \quad (38.6)$$

поэтому

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}, \quad (38.7)$$

где  $L$  — длина цуга волн.

Это означает, что когда цуг волн короче  $L$ , то неопределенность в волновом числе превосходит  $2\pi/L$ . Иначе говоря, неопределенность в волновом числе, умноженная на длину волнового цуга (назовем ее на минутку  $\Delta x$ ), больше  $2\pi$ . Мы назвали ее  $\Delta x$  потому, что это как раз неопределенность в положении частицы. Если цуг волн тянется только на конечном промежутке, то лишь там мы и можем обнаружить частицу с неопределенностью  $\Delta x$ . Это свойство волн (тот факт, что произведение длины цуга волн на неопределенность в волновом числе, связанном с этим цугом, не меньше  $2\pi$ ) опять-таки хорошо знакомо всем, кто занимался волнами. И никакого отношения к волновой механике оно не имеет. Просто нельзя очень точно подсчитать число волн в конечной их веренице.

Объяснить это можно и по-другому. Пусть длина цуга волн  $L$ . Так как на концах цуга волны спадают (как на фиг. 38.1), то количество волн на длине  $L$  известно с точностью порядка  $\pm 1$ . Но число волн на длине  $L$  равно  $kL/2\pi$ . Значит, неопределенность в  $k$  равна  $2\pi/L$ . Опять получилась формула (38.7) как простое свойство всяких волн. Это остается верным всегда: и для волн в пространстве, когда  $k$  есть количество радиан на 1 см, а  $L$  — длина цуга, и для волн во времени, когда  $\omega$  есть число колебаний в 1 сек, а  $T$  — «длина» во времени того же цуга. Иначе говоря, если цуг волн длится только конечное время  $T$ , то неопределенность в частоте дается формулой

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (38.8)$$

Мы все время старались подчеркнуть, что это свойство самих волн, что все это хорошо известно, например в теории звука. А квантовомеханические применения этих свойств опираются на толкование волнового числа как меры импульса частицы по правилу  $p = \hbar k$ , так что (38.7) уже утверждает, что  $\Delta p \approx \hbar/\Delta x$ . Это устанавливает предел классическому представлению об импульсе. (Естественно, оно и должно быть как-то подвергнуто ограничению, если мы собираемся

изображать частицы как волны!) И очень хорошо, что мы нашли правило, которое каким-то образом берется указать, где нарушаются классические представления.

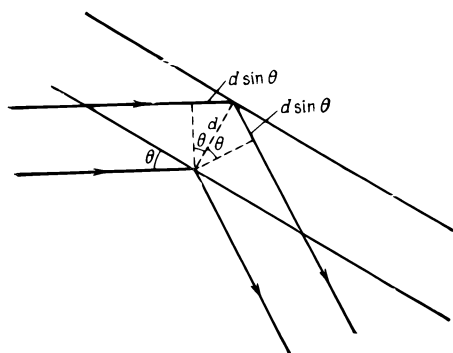
### § 3. Дифракция на кристалле

Теперь рассмотрим отражение волн вещества от кристалла. Кристалл — это твердое тело, состоящее из множества одинаковых атомов, расположенных стройными рядами. Как можно расположить этот строй атомов, чтобы, отражая в данном направлении данный пучок света (рентгеновских лучей), электронов, нейтронов, чего угодно, получить сильный максимум? Чтобы испытать сильное отражение, лучи, рассеянные от всех атомов, должны быть в фазе друг с другом. Не может быть так, чтобы точно половина волн была в фазе, а половина — в противофазе, тогда все волны исчезнут. Нужно, стало быть, найти поверхности постоянной фазы; это, как мы уже объясняли раньше, плоскости, образующие равный угол с начальным и конечным направлениями (фиг. 38.4).

Если мы рассмотрим две параллельные плоскости, как показано на фиг. 38.4, то волны, рассеянные на них, окажутся в фазе только тогда, когда разность расстояний, пройденных фронтом волны, будет равна целому числу длин волн. Эта разность, как легко видеть, равна  $2d \sin \theta$ , где  $d$  — расстояние между плоскостями. Итак, условие когерентного отражения имеет вид

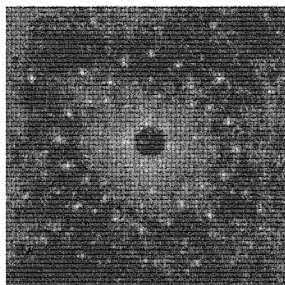
$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (38.9)$$

Если, скажем, кристалл таков, что атомы в нем укладываются на плоскостях, удовлетворяющих условию (38.9) с  $n = 1$ , то будет наблюдаться сильное отражение. Если, с другой стороны, существуют другие атомы той же природы (и расположенные с той же плотностью) как раз посередине между слоями, то на этих промежуточных плоскостях про-



Фиг. 38.4. Рассеяние волн плоскостями кристалла.

Фиг. 38.5. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах каменной соли.



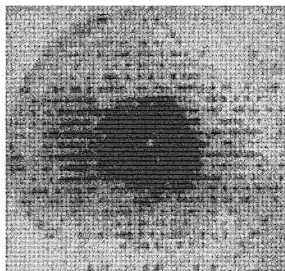
изоидет рассеяние равной силы; оно интерферирует с первым и погасит его. Поэтому  $d$  в выражении (38.9) должно означать расстояние между *примыкающими* плоскостями; нельзя взять две плоскости, разделенные пятью слоями, и применить к ним эту формулу!

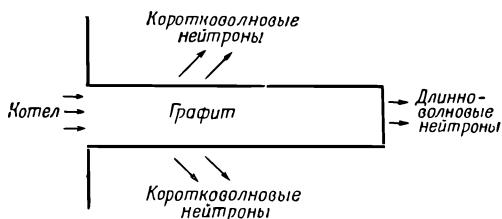
Интересно, что настоящие кристаллы обычно не столь просты, — это не одинаковые атомы, повторяющиеся по определенному закону. Они скорее похожи, если прибегнуть к двумерной аналогии, на обои, на которых повторяется один и тот же сложный узор. Для атомов «узор» — это некоторая их расстановка, куда может входить довольно большое число атомов; скажем, для углекислого кальция — атомов кальция, углерода и трех атомов, кислорода. Важно не то, каков рисунок, а то, что он повторяется.

Этот основной рисунок называется *ячейкой*, а способ повторения определяет *тип решетки*; тип решетки можно сразу определить, взглянув на отражения и рассмотрев их симметрию. Другими словами, от типа решетки зависит, *где не будет* отражения (лучей от кристалла), но чтобы узнать, что стоит в каждой ячейке, надо учесть и *интенсивность* рассеяния по тем или иным направлениям. *Направления* рассеяния зависят от типа решетки, а *сила* рассеяния определяется тем, что находится внутри каждой ячейки; этим способом и было изучено строение кристаллов.

Две фотографии дифракции рентгеновских лучей даны на фиг. 38.5 и 38.6.

Фиг. 38.6. Дифракция рентгеновских лучей на миоглобине.

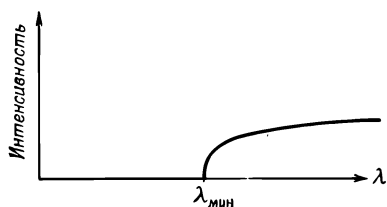




Ф и г. 38.7. Диффузия нейтронов из котла сквозь графитовый блок.

Занятная вещь получается с рассеянием, когда промежуток между ближайшими плоскостями меньше  $\lambda/2$ . В этом случае уравнение (38.9) вообще не имеет решений ни для одного  $n$ . Выходит, когда  $\lambda$  больше двойного промежутка между примыкающими плоскостями, то никаких боковых дифракционных пятнышек нет и свет (и не только свет, а все, что хотите) прямо проходит через вещество. Проходит, не отражаясь, не рассеиваясь, не теряясь. В частности, свет (у него  $\lambda$  много больше этих промежутков) проходит, не давая никакой картины отражений от кристаллических плоскостей.

Интересные следствия этого явления наблюдаются в урановых реакторах — источниках нейтронов (нейтроны — это, уж бесспорно, частицы, спросите у кого угодно!). Если пустить эти самые частицы-нейтроны через длинный блок графита, то они начнут рассеиваться и с трудом будут протискиваться в глубь блока (фиг. 38.7). Рассеиваются они из-за того, что отскакивают от атомов. Но строго говоря, согласно волновой теории, все обстоит как раз наоборот — они отскакивают от атомов из-за дифракции на плоскостях кристалла. Оказывается, что если взять длинный стержень графита, то у всех нейтронов, выходящих из его дальнего конца, окажется большая длина волны! Если нанести на график интенсивность нейтронов как функцию длины волны, то на нем изобразятся только длины волн выше некоторого минимума (фиг. 38.8). Значит, таким путем можно получить очень медленные нейтроны. Проникают сквозь графит только самые медленные нейтроны, они не дифрагируют, не рассеиваются на кристаллических плоскостях графита, а спокойно проходят, как свет



Ф и г. 38.8. Интенсивность нейтронов, выходящих из стержня графита, как функция длины волны.

через стекло. И нет никакого рассеяния по сторонам. Существует и множество других доказательств реальности нейтронных волн и волн других частиц.

#### § 4. Размер атома

Рассмотрим еще одно применение принципа неопределенности (38.3), но только, пожалуйста, не воспринимайте этот расчет чересчур буквально; общая мысль правильна, но анализ проделан не очень аккуратно. Мысль эта касается определения размера атомов; ведь по классическим воззрениям электроны должны были бы излучать свет и, крутясь по спирали, упасть на поверхность ядра. Но, согласно квантовой механике, это невозможно, ибо в противном случае мы бы знали, где очутился электрон и насколько быстро он вертится.

Допустим, имеется атом водорода и мы измеряем положение электрона; мы не должны быть в состоянии предвидеть точно, где он окажется, иначе расплывание импульса станет бесконечным. Всякий раз, как мы смотрим на электрон, он где-нибудь оказывается; у него есть амплитуда вероятности оказаться в различных местах, так что есть вероятность найти его где угодно. Однако не все эти места должны быть возле самого ядра; положим, что существует разброс в расстояниях порядка  $a$ , т. е. расстояние от ядра до электрона примерно в среднем равно  $a$ . Определим  $a$ , потребовав, чтобы полная энергия атома оказалась минимальной.

Разброс в импульсах, в согласии с соотношением неопределенностей, должен быть равен примерно  $h/a$ ; поэтому, стремясь измерить как-нибудь импульс электрона (например, рассеивая на нем фотоны и наблюдая эффект Допплера от движущегося рассеивателя), мы не будем получать все время нуль (электрон не стоит на месте), а будем получать импульсы порядка  $p \approx h/a$ . Кинетическая энергия электронов примерно будет равна  $\frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m = h^2/2ma^2$ . (То, что мы сейчас делаем, в каком-то смысле есть анализ размерностей: мы прикидываем, как кинетическая энергия может зависеть от постоянной Планка  $h$ , массы  $m$  и размера атома  $a$ . Ответ получается с точностью до численных множителей типа 2,  $\pi$  и т. д. Мы даже не определили как следует  $a$ .) Далее, потенциальная энергия равна частному от деления минус  $e^2$  на расстоянии от центра, скажем,  $-e^2/a$  (как мы помним,  $e^2$  — это квадрат заряда электрона, деленный на  $4\pi\epsilon_0$ ). Теперь смотрите: когда  $a$  уменьшается, то потенциальная энергия тоже уменьшается, но чем меньше  $a$ , тем больше требуемый принцип неопределенности импульс и тем больше кинетическая энергия. Полная энергия равна

$$E = \frac{h^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}. \quad (38.10)$$



Мы не знаем, чему равно  $a$ , но зато мы знаем, что атом, обеспечивая свое существование, вынужден идти на компромисс, с тем чтобы полная энергия его была как можно меньше. Чтобы найти минимум  $E$ , продифференцируем его по  $a$ , потребуем равенства производной нулю и найдем  $a$ . Производная  $E$  равна

$$\frac{dE}{da} = -\frac{h^2}{ma^3} + \frac{e^2}{a^2}. \quad (38.11)$$

Уравнение  $dE/da = 0$  дает для  $a$  величину

$$a_0 = \frac{h^2}{me^2} = 0,528\text{Å} = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (38.12)$$

Это расстояние называется *боровским радиусом*, и мы видим, что размеры атома — порядка ангстрема. Получилась правильная цифра. Это очень хорошо, это даже удивительно хорошо, ведь до сих пор никаких теоретических соображений о размере атома у нас не было. С классической точки зрения атомы попросту невозможны: электроны должны упасть на ядра.

Подставив формулу (38.12) для  $a_0$  в (38.10), мы найдем энергию. Она оказывается равной

$$E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{me^4}{2h^2} = -13,6 \text{ эв}. \quad (38.13)$$

Что означает отрицательная энергия? А то, что, когда электрон находится в атоме, у него энергии меньше, чем когда он свободен. Иначе говоря, в атоме он связан. И нужна энергия, чтобы вырвать его из атома; для ионизации атома водорода требуется энергия 13,6 эв. Не исключено, конечно, что требуется вдвое или втрое больше энергии, или в  $\pi$  раз меньше, так как расчет наш был очень неряшлив. Однако мы схитрили и выбрали все константы так, чтобы итог получился абсолютно правильным! Эта величина — 13,6 эв — называется *ридбергом* энергии; это энергия ионизации водорода.

Только теперь становится понятным, отчего мы не проваливаемся сквозь пол. При ходьбе вся масса атомов наших ботинок отталкивается от пола, от всей массы *его* атомов. Атомы сминаются, электроны вынуждены тесниться в меньшем объеме, и по принципу неопределенности их импульсы в среднем увеличиваются, а увеличение импульсов означает рост энергии. Сопротивление атомов сжатию — это не классический, а квантовомеханический эффект. По классическим понятиям следовало ожидать, что при сближении электронов с протонами энергия уменьшится; наимыгоднейшее расположение положительных и отрицательных зарядов в классической физике — это когда они сидят верхом друг на друге. Классической физике это было хорошо известно и представляло загадку: атомы-то все же существовали! Конечно, ученые и

тогда придумывали разные способы выхода из тупика, но *правильный* (будем надеяться!) способ стал известен только нам!

Кстати, когда вокруг ядра бывает много электронов, то они тоже стараются держаться подалеже друг от друга. Причина этого пока вам непонятна, но это факт, что если какой-то электрон занял какое-то место, то другой этого места уже не займет. Точнее, из-за существования двух направлений спина эти электроны могут усесться друг на друга и вертеться: один — в одну сторону, другой — в другую. Но уже никакого третьего на это место вам не поместить. Вы должны их помещать на новые места, и в этом-то истинная причина того, что вещество обладает упругостью. Если бы можно было помещать все электроны в одно место, вещество было бы даже плотней, чем обычно. И именно благодаря тому, что электроны не могут сидеть друг на друге, существуют и столы, и другие твердые предметы.

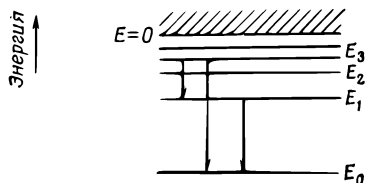
Естественно поэтому, что, желая понять свойства вещества, нужно пользоваться квантовой механикой; классической для этого явно недостаточно.

## § 5. Уровни энергии

Мы говорили уже об атоме в наинижем возможном энергетическом состоянии. Но оказывается, что электрон способен поступать и иначе. Он может вращаться и колебаться гораздо энергичней, возможности его движений в атоме довольно многообразны. Согласно квантовой механике, при установившихся условиях движения атом может обладать только вполне определенными энергиями. На диаграмме фиг. 38.9 мы будем откладывать энергии по вертикали, а горизонтальными линиями отмечать разрешенные значения энергии. Когда электрон свободен, т. е. когда его энергия положительна, она может быть любой; скорость электрона тоже может быть какой угодно. Но энергии связанных состояний не произвольны. Атом может иметь только ту или иную энергию из дозволенной совокупности значений, скажем, таких, как на фиг. 38.9.

Обозначим эти разрешенные значения через  $E_0, E_1, E_2, E_3$ . Если первоначально атом находится в одном из этих «возбужденных» состояний  $E_1, E_2$  и т. д., он не останется в нем

Фиг. 38.9. Схема энергий атома. Показано несколько возможных переходов.



навсегда. Раньше или позже он упадет в низшее состояние и излучит при этом энергию в виде света. Частота испущенного света определяется требованием сохранения энергии плюс квантово-механическим пониманием того, что частота света связана с энергией света условием (38.1). Поэтому, например, частота света, освобожденного в переходе от энергии  $E_3$  к энергии  $E_1$ , равна

$$\omega_{31} = \frac{E_3 - E_1}{\hbar}. \quad (38.14)$$

Эта частота характерна для данного сорта атомов и определяет линию в спектре испускания. Возможен и другой переход — от  $E_3$  к  $E_0$ . У него своя частота:

$$\omega_{30} = \frac{E_3 - E_0}{\hbar}. \quad (38.15)$$

Еще одна возможность заключается в том, что если атом возбужден до состояния  $E_1$ , то он может упасть в основное состояние  $E_0$ , излучая фотон с частотой

$$\omega_{10} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}. \quad (38.16)$$

Мы привели здесь эти три перехода для того, чтобы подчеркнуть интересную связь между ними. Из трех формул (38.14), (38.15), (38.16) легко получить

$$\omega_{30} = \omega_{31} + \omega_{10}. \quad (38.17)$$

Вообще, обнаружив две линии в спектре, можно ожидать, что найдется и линия с частотой, равной сумме (или разности) частот. Все линии можно объяснить отыскав серию уровней, таких, что каждая линия соответствует разности энергий между какими-то двумя уровнями. Это замечательное совпадение между частотами линий в спектре было замечено еще до открытия квантовой механики. Его называют *комбинационным принципом Ритца*. С точки зрения классической механики он опять выглядит таинственно. Впрочем, не будем больше напоминать о том, что классическая механика обанкротилась в мире атомов; мне кажется, мы это уже хорошо показали.

Мы говорили уже о том, что в квантовой механике все события представляются в виде амплитуд, которые ведут себя как волны, имеют определенную частоту и волновое число. Посмотрим теперь, как при помощи амплитуд объяснить, что у атома бывают только определенные энергетические состояния. Из всего, что было сказано до сих пор, это вывести и понять невозможно. Но зато мы все знаем, что волны в ограниченном объеме обладают определенными частотами. Скажем, если звуковая волна ограничена пределами органной трубы или как-либо иначе, то звуковые колебания могут быть

разными, но их частоты не могут быть любимы. И так всегда: у тела, внутри которого держатся волны, всегда бывают определенные резонансные частоты. Волны, заключенные в ограниченный объем, всегда обладают лишь определенным набором частот. (В дальнейшем мы еще будем изучать это явление и выпишем все нужные формулы.) Ну, а поскольку существует общее соотношение между частотой колебаний амплитуды и энергией, то нет ничего удивительного в том, что электроны, связанные в атомах, обладают только вполне определенными энергиями.

## § 6. Немного философии

Поговорим еще немного о философии квантовой механики. Как и всегда, здесь есть две стороны: философское содержание физики и его экстраполяция на другие области знаний. Когда философские идеи, связанные с наукой, переносятся на другие области, они обычно при этом искажаются до неузнаваемости. Поэтому мы ограничим свои замечания, насколько это возможно, только физикой.

Прежде всего начнем с самого интересного предмета — с идеи принципа неопределенности: наблюдение воздействует на явление. Хотя и всегда было известно, что, наблюдая явление, мы воздействуем на него, но здесь суть-то в том, что этим воздействием нельзя пренебречь, нельзя его свести до нуля, нельзя переделкой прибора произвольно уменьшить его влияние. Наблюдая явление, нельзя хотя бы слегка не нарушить его ход, и *без учета этого нарушения теория не может стать последовательной*. И в доквантовой физике наблюдатель иногда был важен, но лишь в довольно тривиальном смысле. Рассматривался, скажем, такой вопрос: дерево падает в лесу, в котором нет никого, кто мог бы услышать это; вызовет ли падение шум? И следовал ответ: *настоящее* дерево, падая в *настоящем* лесу, бесспорно, шум вызовет, даже если никого поблизости нет. Пусть никто падения слышать не мог, все равно останутся другие следы — кое-где осыплются листья, а на некоторых листочках останутся едва заметные царапинки от колючек, которые можно будет объяснить лишь тем, что листва дрожала. Так что следует допустить, что в некотором смысле звук и впрямь существовал. «Но было ли *ощущение* звука?» — можем мы спросить. Нет, для ощущения, видимо, нужно и сознание. А есть ли сознание у муравьев, да и водятся ли они в этом лесу и сознают ли что-либо деревья — вопрос темный. Поэтому бросим эту задачу.

С тех пор как родилась квантовая механика, стали подчеркивать и другое положение: не надо говорить о вещах, которые невозможно измерить. (Кстати, и теория относительности

говорила об этом же.) Пока не определено, как измерять величину, ей нет места в теории. А поскольку точное значение импульса локализованной (находящейся в каком-то месте) частицы не может быть определено при помощи измерения, значит, такому импульсу нечего делать в теории.

Так вот, если вы думаете, что классическая теория потому и погибла, вы *ошибаетесь*. Было бы легкомысленно сделать такой вывод. Невозможность точного измерения координаты и одновременно импульса не означает априори, что *нельзя* о них говорить, а означает только, что говорить о них *нет необходимости*. На самом деле в науках бывает иначе: идея или понятие, которые невозможно прямо связать с опытом или замерить, могут быть полезными, а могут быть бесполезными. О них можно только сказать, что они *не обязаны* присутствовать в теории. Пусть, например, мы сравниваем классическую теорию мира с квантовой теорией, а из эксперимента следует, что координата и импульс могут измеряться лишь неточно. Мы спрашиваем себя, имеет ли смысл понятие точного положения частицы или точного ее импульса. Классическая теория отвечает «да», а квантовая — «нет». Но это само по себе не означает, что классическая физика ошибается.

Когда была открыта новая, квантовая, механика, приверженцы классической теории, т. е. все физики, кроме Гейзенберга, Шредингера и Борна, говорили: «Что же хорошего в ней, в вашей теории, раз она не может ответить на простейшие вопросы: Каково точное положение частицы? Через какую щель она проскочит? и другие». Ответ Гейзенберга гласил: «Я не обязан отвечать на такие вопросы, ибо вы не можете их задать экспериментально». Иначе говоря, отвечать — означало бы делать то, что делать *необязательно*. Рассмотрим две теории, (А) и (Б). Теория (А) содержит в себе идею, которую нельзя проверить непосредственно, но которая используется в анализе; теория (Б) этой идеи не содержит. Если их предсказания расходятся, то нельзя утверждать, что теория (Б) ошибочна на том основании, что она не может объяснить идею из теории (А); ведь эта идея как раз из тех вещей, которые нельзя непосредственно проверить.

Ну что ж! Хорошо, конечно, знать, какие из идей экспериментальной проверке не поддаются, но нет необходимости отбрасывать их все. Неверно, что науку можно создавать только из тех понятий, которые прямо связаны с опытом. Ведь в самой квантовой механике есть и амплитуда волновой функции, и потенциал, и многие другие умственные построения, не поддающиеся прямому измерению. Основа науки — в ее способности *предвидеть*. Предвидеть — это значит сообщать, что случится в опыте, который никогда прежде не ставился. Как этого можно добиться? Предполагая, что мы независимо от

эксперимента знаем, что произойдет, мы экстраполируем опыт, выводим его в область, в которой он не ставился. Мы расширяем свои представления до пределов, в которых они никогда не проверялись. Если этого не сделано — никакого предсказания нет. Поэтому вполне разумно было когда-то физику-классику в счастливом неведении предполагать, что понятие положения, бесспорно имеющее смысл в футболе, имеет какой-то смысл и для электрона. Это была не глупость. Это была разумная процедура. А теперь *мы*, например, говорим, что закон относительности верен при любых энергиях, а ведь в один прекрасный день явится кто-нибудь и объяснит, насколько мы глупы. Мы не догадаемся, в каком месте мы совершаем «глупость», покуда не «вырастем над собой»; вся проблема сводится к тому, как и когда нам это удастся. Единственный же способ обнаружить, в чем мы ошибаемся, это понять, *в чем состоят* наши предсказания. Так что без умственных построений не обойтись.

Мы уже делали ряд замечаний о недетерминированности квантовой механики, т. е. о том, что она не способна предсказывать, что произойдет в данных физических условиях, как бы аккуратно они ни были на опыте осуществлены. Если атом находится в возбужденном состоянии, собираясь излучить фотон, мы не можем сказать, *когда* это случится; существует конечная амплитуда вероятности испустить фотон в любой момент, и только эту вероятность мы и можем предвидеть. Мы не можем точно предсказывать будущее. На этой основе и высказываются разного рода глупости о неопределенности всех явлений в мире, возникают вопросы о свободе воли частиц и т. д.

Следует, конечно, подчеркнуть, что и классическая физика была в каком-то смысле недетерминированной. Обычно думают, что недетерминированность, невозможность предсказать будущее — это особенность квантовой механики, и именно с ней связывают возникновение представлений о свободе воли и т. д. Но если бы даже наш мир *был классическим*, т. е. если бы законы механики были классическими, все равно из этого не следует, что те же или какие-то аналогичные представления не возникли бы. Да, конечно, с точки зрения классики, узнав местоположение и скорость всех частиц в мире (или в сосуде с газом), можно точно предсказать, что будет дальше. В этом смысле классический мир детерминирован. Но представьте теперь, что наша точность ограничена и что мы не знаем точно положение только одного из атомов; знаем, скажем, его с ошибкой в одну миллиардную. Тогда если он столкнется с другим атомом, неопределенность в знании его координат после столкновения возрастет. А следующее столкновение еще сильнее увеличит ошибку. Так что если сначала

ошибка и была еле заметной, то все равно вскоре она вырастет до огромнейшей неопределенности. Вот вам пример: вода, падая с плотины, брызжет во все стороны. Подойдите поближе, и на ваш нос тоже упадет несколько брызг. Это кажется совершеннейшей случайностью, хотя поведение воды может быть предсказано на основе чисто классических законов. Точное положение всех капель зависит от мельчайших колебаний потока воды перед плотиной. Но как оно зависит? Еле заметные нерегулярности в падении воды усиливаются и приводят к полной случайности движений. Ясно, что мы не можем по-настоящему предвидеть положение капель, если не знаем движения воды *абсолютно точно*.

Правильнее будет сказать, что для данной точности (сколь угодно большой, но конечной) можно всегда указать такой большой промежуток времени, что для него становится невозможным сделать предсказания. И этот промежуток (в этом вся соль) не так уж велик. Он не равен миллиону лет при точности в одну миллиардную! Время с уменьшением ошибки растет только логарифмически, и оказывается, что за очень и очень малое время вся наша информация теряется. Если точность равна даже одной миллиард-миллиард-миллиардной (ставьте сколько угодно миллиардов, но только когда-нибудь остановитесь!), все равно можно указать промежуток времени, меньший чем время, нужное для того, чтобы произвести измерения с такой огромной точностью, после которого уже невозможно будет предугадывать, что случится! Поэтому нечестно говорить, что уже в видимой свободе и недетерминированности человеческого мышления мы видим доказательства невозможности его изучения в рамках классической «детерминистской» физики и приветствовать квантовую механику как избавительницу нашего духа от «абсолютно механистической» Вселенной. С практической точки зрения «детерминизм» отсутствовал и в классической механике.

## КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

§ 1. Свойства вещества

§ 2. Давление газа

§ 3. Сжимаемость излучения

§ 4. Температура и кинетическая энергия

§ 5. Закон идеального газа

### § 1. Свойства вещества

С этой главы мы начнем изучение новой темы, которая займет у нас довольно много времени. Мы начнем анализ свойств вещества с физической точки зрения. Зная, что вещество построено из большого числа атомов или каких-то других элементарных частей, взаимодействующих электрически и подчиняющихся законам механики, мы постараемся понять, почему скопления атомов ведут себя именно так, а не иначе.

Нечего и говорить, что это трудная задача. И будет лучше, если мы с самого начала подчеркнем, что это *чрезвычайно* трудная задача и что решать ее нам придется совсем иными способами, чем раньше. Когда мы изучали механику и оптику, то могли начинать с точных формулировок некоторых законов, например законов Ньютона или формулы для поля, порождаемого ускоренным зарядом. Узнав их, мы сразу же могли объяснить бездну всяких явлений, а потом эти законы становились для нас прочной основой, опираясь на которую, мы совершенствовались и в механике, и в оптике. Мы можем продолжать изучение и дальше, но мы не обнаружим при этом какую-то новую физику, мы просто будем решать старые задачи более точными математическими методами.

Такой способ непригоден для изучения свойств вещества. Мы можем сказать о свойствах вещества лишь самые простые вещи. Предмет этот слишком сложен, чтобы можно было начать с самых основных законов. Мы по-прежнему будем пользоваться законами механики и электричества. Но законы эти



слишком далеки от тех свойств, которые мы собираемся изучать. От законов Ньютона до свойств вещества очень много шагов и каждый шаг очень труден. Сейчас мы сделаем несколько таких шагов, но мне хочется предупредить вас, что если в предыдущих главах мы анализировали явления более или менее строго, то теперь с каждым шагом мы все больше будем терять строгость. Свойства вещества мы сможем понять лишь весьма приближенно.

Происходит это по нескольким причинам. Во-первых, наш анализ не может быть полным потому, что для этого нужно глубокое знание теории вероятностей; мы ведь не собираемся следить за движением каждого атома, а хотим узнать о среднем числе атомов, движущихся в том или ином направлении, и прикинуть, к чему приведет разница в этих средних. Таким образом, теория вероятностей органически входит в нашу тему, а в математике мы еще не очень сильны и многого от нас не потребуешь.

Вторая и более серьезная причина — чисто физическая. Поведение атомов подчиняется законам не классической, а квантовой механики, и пока мы не изучим квантовую механику, нельзя серьезно говорить об изучении свойств вещества. Речь идет не просто о переходе от больших предметов к маленьким, например от автомобилей к бильярдным шарам, разница между законами классической и квантовой механики гораздо глубже и существенней, и многие объяснения, если исходить из классической механики, будут просто неверными. Так что многих вещей мы пока никак не в состоянии понять, однако мы будем подчеркивать каждый раз, когда объяснения приведут нас в тупик, чтобы по крайней мере хоть предупредить, где он находится. Для этого и говорилось о квантовой механике в предыдущих главах: надо было понять, в каких случаях отказывает механика классическая.

Почему же мы вообще изучаем свойства вещества? Не лучше ли было бы подождать с полгода или год, пока мы не подучим теорию вероятностей и квантовую механику, а потом уж и взяты за свойства вещества поосновательней? На это следует ответить, что трудные вещи лучше изучать не спеша! Сначала мы — плохо ли, хорошо ли — познакомимся с общими идеями, подумаем, что может произойти в тех или иных обстоятельствах, а потом, когда лучше узнаем основные законы, сформулируем все это поточнее.

Каждый, кто хочет всерьез анализировать свойства вещества, должен сначала написать основные уравнения и попытаться решить их. Но каждого, кто начал с этого, ждала неудача. Успех приходил лишь к тем, кто подходил к делу как *физик*: у этих людей сначала не было ничего, кроме грубой идеи, а затем они находили верное приближение, сообра-

жая, что в этой трудной ситуации можно считать большим, а что малым. Задачи в этой области столь сложны, что даже не очень четкая и половинчатая идея оправдывает затраченное на нее время, и можно то и дело возвращаться к одной и той же задаче, приближаясь понемногу к ее точному решению. Так мы и поступаем в нашем курсе.

И еще одна причина, по которой мы приступаем сейчас к изучению свойств веществ: нам уже приходилось встречать похожие идеи, например, в химии. Некоторые из них известны нам со школы. Было бы интересно понять их с точки зрения физика.

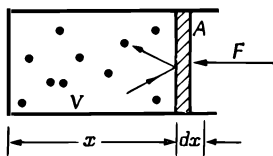
Вот один из самых увлекательных примеров: известно, что равные объемы газов содержат при одинаковом давлении и температуре равное число молекул. Авогадро первым понял закон кратных отношений: из того, что в химической реакции между двумя газами объемы реагирующих газов относятся как целые числа, следует, что равные объемы содержат равное число атомов. Но почему в равных объемах содержится равное число атомов? Можно ли объяснить это, исходя из законов Ньютона? Для этого вам придется изучить эту главу. Мы еще будем впоследствии много говорить о давлениях, объемах, температуре и теплоте.

Мы обнаружим при этом, что многие соотношения между свойствами вещества можно понять, ни слова не говоря об атомах. Например, если какое-нибудь тело сжать, оно нагреется; если тело нагревать, оно начнет расширяться. Связь между этими явлениями можно понять, не изучая строения тела. Занимающаяся такими вещами наука называется *термодинамикой*. Конечно, глубокое понимание термодинамики возможно лишь после подробного изучения механизма, лежащего в основе того или иного процесса. Вот этим мы и займемся: мы примем с самого начала тот факт, что все вещества состоят из атомов, и постараемся понять свойства вещества и законы термодинамики.

Итак, начнем изучение свойств газов, исходя из законов Ньютона.

## § 2. Давление газа

Каждый знает, что газ оказывает давление. Но отчего? В этом надо разобраться как следует. Если бы наши уши были намного чувствительнее, чем они есть на самом деле, мы бы все время слышали страшный шум. Но природа позаботилась, чтобы наши уши не были столь восприимчивы, ведь они оказались бы для нас совершенно бесполезными — в них постоянно стоял бы дикий гул, похожий на шум от стартовой ракеты. Дело в том, что барабанные перепонки наших ушей соприкасаются с воздухом, а воздух состоит из великого множества беспорядочно движущихся молекул, которые, уда-



Фиг. 39.1. Атомы газа в ящике, в котором движется поршень без трения.

ряясь о барабанные перепонки, создают такой шум, как будто сразу очень много барабанщиков отбивают беспорядочную дробь — бум, бум, бум... Однако мы не слышим этих звуков, потому что атомы очень малы, а уши наши недостаточно чувствительны. Беспорядочные удары молекул должны были бы собственно продавить барабанную перепонку, но ее непрерывно бомбардируют и с внутренней стороны, и в результате полная сила, действующая на перепонку, оказывается равной нулю. Если бы откачать воздух с одной стороны или хотя бы сделать разным его относительное количество с обеих сторон, то перепонка продавилась бы в ту или иную сторону, потому что бомбардировка с одной стороны оказалась бы гораздо сильнее. Мы иногда испытываем это неприятное ощущение, когда очень быстро поднимаемся в лифте или на самолете, а хуже всего, если мы еще при этом простужены (в этом случае распухшая слизистая оболочка закрывает каналы, соединяющие через носоглотку внутреннюю полость уха с внешним пространством, и таким образом оба давления не могут быстро уравниваться).

Чтобы проанализировать это явление количественно, предположим, что газ находится в ящике, одна стенка которого представляет собой поршень, способный перемещаться (фиг. 39.1). Найдем силу, с которой действуют на поршень находящиеся внутри ящика атомы. О поршень ударяются атомы, движущиеся внутри объема  $V$  со всевозможными скоростями. Предположим, что вне ящика ничего нет — сплошной вакуум. Что же произойдет? Если предоставить поршень самому себе и не придерживать его, то с каждым ударом молекулы он будет приобретать небольшой импульс и постепенно будет вытолкнут совсем из ящика. Чтобы удержать его в ящике, придется приложить силу  $F$ . Какова должна быть эта сила? Говоря о силе, мы будем относить ее к единице площади: если площадь поршня равна  $A$ , то действующая на него сила будет пропорциональна площади. Определим давление как величину, равную отношению приложенной к поршню силы к площади поршня:

$$P = \frac{F}{A}. \quad (39.1)$$

Чтобы лучше понять, для чего это делается, подсчитаем бесконечно малую работу  $dW$ , которую надо затратить, чтобы

протолкнуть поршень на бесконечно малое расстояние —  $dx$  (позднее это понадобится нам и для других целей); эта работа равна произведению силы на расстояние или, согласно (39.1), произведению давления, площади поршня и расстояния. Все это равно произведению давления на изменение объема, взятого с обратным знаком:

$$dW = F(-dx) = -PA dx = -P dV. \quad (39.2)$$

(Произведение площади  $A$  на изменение высоты  $dx$  равно изменению объема.) Знак минус в этом выражении возникает из-за того, что при сжатии объем *уменьшается*; если принять это во внимание, то мы получим правильный результат: чтобы сжать газ, надо *затратить* работу.

Итак, с какой силой надо давить на поршень, чтобы уравновесить удары молекул? При каждом ударе поршню сообщается некий импульс. В каждую секунду поршень получает определенный импульс и начинает двигаться. Чтобы предотвратить это, приложенная нами сила за секунду должна сообщить поршню точно такой же импульс. Таким образом, сила равна импульсу, сообщенному поршню за 1 *сек*. Можно об этом сказать и иначе: если предоставить поршень самому себе, то он за счет бомбардировки наберет скорость и с каждым ударом будет подталкиваться и двигаться с ускорением. Быстрота изменения скорости поршня, или ускорение, пропорциональна действующей силе. Таким образом, сила, которую мы определили как произведение давления на площадь, равна импульсу, сообщенному поршню за 1 *сек* всеми молекулами внутри ящика.

Подсчитать импульс, передаваемый поршню за 1 *сек*, легко; мы сделаем это в два этапа: сначала определим импульс, переданный одним атомом при столкновении с поршнем, а потом умножим эту величину на число соударений атомов с поршнем за 1 *сек*. Сила и будет произведением этих двух величин.

Займемся теперь этими величинами: предположим сначала, что поршень — это идеальный «отражатель» атомов. Если это не так, то вся наша теория рухнет — поршень начнет нагреваться и произойдет много всяких событий, предсказать которые мы не в состоянии. Однако, когда снова установится равновесие, в результате окажется, что каждое столкновение будет эффективно упругим. В среднем энергия входящих и уходящих частиц не изменяется. Таким образом, предположим, что газ находится в равновесии и поршень, будучи неподвижным, энергии не поглощает. В этом случае частица, подлетевшая к поршню с определенной скоростью, улетит от него с той же скоростью, причем масса частицы не изменится.

Если  $v$  есть скорость атома, а  $v_x$  — составляющая скорости вдоль оси  $x$ , то импульс «к поршню» равен  $mv_x$ , но раз частица «отражается», то импульс «от поршня» равен той же величине; значит, за одно соударение поршню сообщается импульс  $2mv_x$ .

Нужно теперь подсчитать число соударений атома за 1 сек; для этого можно взять любой промежуток времени  $dt$ , а потом разделить число соударений на  $dt$ . Много ли атомов попадает за это время в цель? Предположим, что в объеме  $V$  заключено  $N$  атомов, т. е. в каждом единичном объеме имеется  $n = N/V$  атомов. Теперь заметим, что за время  $t$  достигнут поршня не все частицы, движущиеся к поршню с заданной скоростью, а только те, которые оказались достаточно близко от него. Если частицы были очень далеко, то, хотя они и стремятся к поршню, к сроку они не успеют. Таким образом, за время  $t$  о поршень ударятся лишь те частицы, которые в начальный момент были не дальше чем на расстоянии  $v_x t$  от него. Следовательно, число соударений за время  $t$  равно числу атомов, находящихся на расстоянии, не превышающем  $v_x t$ , а поскольку площадь поршня равна  $A$ , то атомы, которые со временем попадут в цель, занимают объем  $Av_x t$ . А число атомов, попавших в цель, равно произведению объема на число атомов в единичном объеме  $nv_x At$ . Но нас, конечно, интересует не число соударений за время  $t$ , а мы хотим знать число соударений за 1 сек, поэтому мы делим на  $t$  и получаем  $nv_x A$ . (Время  $t$  может быть взято очень малым, для красоты можно писать  $dt$  и затем дифференцировать, но это одно и то же.)

Итак, мы нашли, что сила равна

$$F = nv_x A \cdot 2mv_x. \quad (39.3)$$

Обратите внимание, что если фиксировать плотность частиц, то сила оказывается пропорциональной площади! После этого давление найти очень просто:

$$P = 2nmv_x^2. \quad (39.4)$$

Теперь надо исправить кое-какие неточности: прежде всего, не все молекулы имеют одну и ту же скорость и не все они движутся в одном направлении, так что нам приходится иметь дело с разными  $v_x^2$ ! Каждая молекула, ударяясь о поршень, вносит свой вклад, поэтому надо взять среднее по всем молекулам. Сделав это, мы получим

$$P = nm \langle v_x^2 \rangle. \quad (39.5)$$

А не забыли ли мы множитель 2? Нет, потому что лишь половина атомов движется к поршню. Другие летят в противоположную сторону, а усредняя по  $v_x^2$ , мы усредняем как по

положительным, так и по отрицательным составляющим  $v_x$ . Если просто усреднить по  $v_x^2$ , получится вдвое больший результат. Среднее  $v_x^2$  для положительных  $v_x$  равно половине среднего  $v_x^2$  для всех  $v_x$ .

Но атомы прыгают в ящике как хотят, и поэтому ясно, что « $x$ -направление» для них ничем не отличается от любого другого; они движутся куда угодно: вправо — влево, вверх — вниз, взад — вперед. Поэтому  $\langle v_x^2 \rangle$  (средний квадрат скорости движения в одном направлении) равен среднему квадрату скорости в любом другом направлении

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle. \quad (39.6)$$

Используем это обстоятельство для небольшого математического трюка и обнаружим, что каждый из членов в (39.6) равен их сумме, деленной на три, а сумма — это квадрат величины скорости:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}. \quad (39.7)$$

Это очень хорошо, потому что теперь уже не надо заботиться о координатных осях, и формулу для давления можно записать в виде

$$P = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle. \quad (39.8)$$

Мы выделили множитель  $\langle mv^2/2 \rangle$ , потому что это *кинетическая энергия* движения молекулы как целого. Итак, мы нашли

$$PV = N \frac{2}{3} \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle. \quad (39.9)$$

Если мы будем знать скорость молекул, то очень быстро подсчитаем давление.

В качестве простого примера можно описать такие газы, как гелий, пары ртути или калия при достаточно высокой температуре или аргон; это одноатомные газы, для которых можно считать, что их атомы не имеют внутренних степеней свободы. Если нам попадетс я сложная молекула, то в ней могут быть всевозможные внутренние движения, всякого рода колебания и т. д. Мы предполагаем, что можно не принимать их в расчет; но можно ли это делать — вопрос сложный и мы к нему вернемся; в действительности для нашего случая это окажется допустимым. Итак, предположим, что внутреннее движение атомов можно не рассматривать, и поэтому кинетическая энергия движения молекулы как целого восполняет всю энергию. Для одноатомного газа кинетическая энергия — действительно полная энергия. Будем обозначать полную энергию буквой  $U$  (иногда ее называют полной *внутренней*

энергией, как будто у газа может быть какая-то *внешняя* энергия), т. е. всю энергию всех молекул газа или любого другого объекта.

В случае одноатомного газа мы предположим, что полная энергия  $U$  равна произведению числа атомов на среднюю кинетическую энергию каждого из них, потому что мы пренебрегли возможным возбуждением атомов или какими-то внутриатомными движениями. Тогда

$$PV = \frac{2}{3} U. \quad (39.10)$$

Немного задержимся и ответим на такой вопрос: предположим, что мы медленно сжимаем газ; каким должно быть давление, чтобы сжать газ до заданного объема? Определить это легко, так как давление есть энергия, деленная на объем. Но когда газ сжимается, производится работа и поэтому энергия газа  $U$  возрастает. Процесс сжатия описывается неким дифференциальным уравнением. В начальный момент газ занимает определенный объем и обладает определенной энергией, поэтому нам известно и давление. Как только мы начинаем сжимать газ, энергия  $U$  возрастает, объем  $V$  уменьшается, а как изменяется давление, нам еще предстоит узнать.

Итак, нам предстоит решить дифференциальное уравнение. Сейчас мы это сделаем. Однако подчеркнем сначала, что, сжимая газ, мы предполагаем, что вся работа уходит на увеличение энергии атомов газа. Вы спросите: «А необходимо ли на этом останавливаться? Куда же еще она может уйти?» Но оказывается, что затраченная работа может уйти и в другое место. Энергия может «вытечь» из ящика сквозь стенки: горячие (т. е. очень быстрые) атомы при бомбардировке будут нагревать стенки ящика и энергия выйдет наружу. Но мы предполагаем, что в нашем случае этого не происходит.

Сделаем небольшое обобщение, хотя и в этом случае мы будем рассматривать лишь очень частный случай: запишем вместо  $PV = \frac{2}{3} U$

$$PV = (\gamma - 1) U. \quad (39.11)$$

Энергия  $U$  умножается на  $(\gamma - 1)$  для удобства, потому что в дальнейшем нам придется иметь дело с газами, для которых множитель перед  $U$  равен не  $\frac{2}{3}$ , а какому-то другому числу. Чтобы можно было описывать и такие случаи, запишем этот множитель так, как его обозначают почти сто лет. Тогда в нашем случае одноатомного газа, такого, как гелий,  $\gamma = \frac{5}{3}$ , потому что  $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ .

Мы уже говорили, что совершаемая при сжатии газа работа равна  $-PdV$ . Сжатие, при котором тепло не поглощается и не выделяется, называется *адиабатическим* сжатием; это

слово образовано из трех греческих слов:  $a(\mu\epsilon) + \delta ia(\sigma\kappa\omega\omicron\upsilon\zeta) + \nu ai-\nu\epsilon in$  (проходить). (Слово адиабатический употребляется в физике в разных смыслах, так что не всегда можно понять, что между ними общего.) При адиабатическом сжатии вся затраченная работа уходит на изменение внутренней энергии. Вот в этом и смысл, что нет потерь энергии и, значит,  $PdV = -dU$ . Но поскольку  $U = PV/(\gamma - 1)$ , то можно записать

$$dU = \frac{P dV + V dP}{\gamma - 1}. \quad (39.12)$$

Итак,  $PdV = -(PdV + VdP)/(\gamma - 1)$  или, приводя подобные члены, получаем  $\gamma PdV = -VdP$ , или

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0. \quad (39.13)$$

Если мы примем, что  $\gamma$  постоянна, а это так в случае одноатомных газов, то уравнение интегрируется и мы получаем  $\gamma \ln V + \ln P = \ln C$ , где  $C$  — постоянная интегрирования. Переходя к степеням, мы получаем такой закон:

$$PV^\gamma = C \text{ (постоянная)}. \quad (39.14)$$

Иначе говоря, если выполнены условия адиабатичности, т. е. потеря энергии нет и газ при сжатии нагревается, то в случае одноатомного газа произведение давления на объем в степени  $5/3$  есть величина постоянная! Этот результат мы получили чисто теоретически, но опыт показывает, что и в действительности все происходит именно так.

### § 3. Сжимаемость излучения

Приведем еще один пример из кинетической теории газов; он не особенно интересует химиков, но очень важен для астрономов. Внутри нагретого до высокой температуры ящика имеется огромное число фотонов. (В качестве такого ящика надо взять очень горячую звезду. Солнце недостаточно горячо для этих целей. В звезде, правда, слишком много атомов, но если ее температура очень высока, то атомами можно пренебречь и считать, что внутренность звезды целиком заполнена фотонами.) Вспомним теперь, что фотон обладает импульсом  $p$ . (При изучении кинетической теории газов мы всегда будем испытывать страшные неудобства:  $P$  — это давление, но  $p$  — еще и импульс;  $V$  — это объем, но это и скорость одновременно, а  $T$  — это и температура, и кинетическая энергия, и время, и момент силы; тут нужен глаз да глаз.) Сейчас буква  $p$  — это импульс, вектор. Поступим так же, как и в предыдущем параграфе, за удары фотонов о стенку ответственна  $x$ -составляющая импульса, а удвоенная



$x$ -составляющая импульса — это импульс, полученный стенкой после каждого удара. Итак, вместо  $2mv_x$  пишем  $2p_x$ , а при вычислении числа столкновений нужно по-прежнему подставлять  $v_x$ ; проделав все это, формулу (39.4) для давления мы уже записываем в виде

$$P = 2np_x v_x. \quad (39.15)$$

После усреднения мы получим произведение  $n$  на среднее значение  $p_x v_x$  (вспомните, что мы говорили о множителе 2), а после того как на помощь будут призваны два других измерения, мы найдем

$$PV = N \frac{\langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \rangle}{3}. \quad (39.16)$$

Эта формула почти совпадает с (39.9), потому что импульс равен  $m\mathbf{v}$ , просто это более общая формула, вот и все. Произведение давления на объем равно произведению полного числа атомов на среднее значение  $\frac{1}{3}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})$ .

Чему равно  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$  для фотонов? Импульс и скорость направлены одинаково, а скорость равна скорости света, поэтому интересующее нас произведение — это импульс фотона, умноженный на скорость света. Произведение импульса фотона на скорость света — это энергия фотона:  $E = pc$ . Мы имеем дело с *энергией* каждого фотона и должны умножить среднюю энергию фотона на число фотонов. Получается одна треть полной энергии:

$$PV = \frac{U}{3} \quad (\text{в случае фотонного газа}). \quad (39.17)$$

Для фотонов, следовательно, поскольку впереди стоит  $\frac{1}{3}$ , множитель  $(\gamma - 1)$  в (39.11) равен  $\frac{1}{3}$ , т. е.  $\gamma = \frac{4}{3}$ , значит, излучение в ящике подчиняется закону

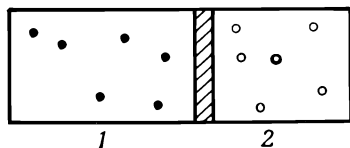
$$PV^{\frac{4}{3}} = C. \quad (39.18)$$

Таким образом, мы знаем сжимаемость излучения! Можно использовать эту формулу при анализе вклада излучения в давление внутри звезды, подсчитать давление и оценить, как оно изменяется при сжатии звезды. Просто удивительно, как много мы уже умеем!

#### § 4. Температура и кинетическая энергия

До сих пор мы не имели дела с *температурой*; мы сознательно избегали разговоров на эту тему. Мы знаем, что если сжимать газ, энергия молекул возрастает, и мы обычно говорим, что газ при этом нагревается. Теперь надо понять, какое это имеет отношение к температуре. Нам известно, что такое адиабатическое сжатие, а как поставить опыт, чтобы

Фиг. 39.2. Атомы двух разных одноатомных газов, разделенных подвижным поршнем.



можно было сказать, что он был проведен при *постоянной температуре*? Если взять два одинаковых ящика с газом, приставить их один к другому и подержать так довольно долго, то даже если вначале эти ящики обладали тем, что мы назвали различной температурой, то в конце концов температуры их станут одинаковыми. Что это означает? Только то, что ящики достигли того состояния, которого они в конце концов достигли бы, если бы их надолго предоставили самим себе! Состояние, в котором температуры двух тел равны, — это как раз то окончательное состояние, которого достигают после длительного соприкосновения друг с другом.

Давайте посмотрим, что случится, если ящик разделен на две части движущимся поршнем и каждое отделение заполнено разным газом, как это показано на фиг. 39.2 (для простоты предположим, что имеются два одноатомных газа, скажем, гелий и неон). В отделении 1 атомы массы  $m_1$  движутся со скоростью  $v_1$ , а в единице объема их насчитывается  $n_1$  штук, в отделении 2 эти числа соответственно равны  $m_2$ ,  $v_2$  и  $n_2$ . При каких же условиях достигается равновесие?

Разумеется, бомбардировка слева заставляет поршень двигаться вправо и сжимает газ во втором отделении, затем то же самое происходит справа и поршень ходит так взад и вперед, пока давление с обеих сторон не сравняется, и тогда поршень остановится. Мы можем устроить так, чтобы давление с обеих сторон было одинаковым; для этого нужно, чтобы внутренние энергии, приходящиеся на единичный объем, были одинаковыми или чтобы произведение числа частиц  $n$  в единице объема на среднюю кинетическую энергию было одинаковым в обоих отделениях. Сейчас мы попытаемся доказать, что при равновесии должны быть одинаковы и *отдельные сомножители*. Пока мы знаем только, что равны между собой произведения чисел частиц в единичных объемах на средние кинетические энергии

$$n_1 \left\langle \frac{m_1 v_1^2}{2} \right\rangle = n_2 \left\langle \frac{m_2 v_2^2}{2} \right\rangle;$$

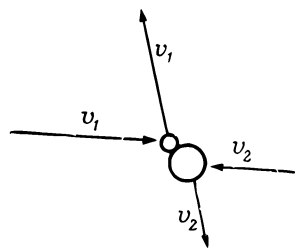
это следует из условия равенства давлений и из (39.8). Нам предстоит установить, что по мере постепенного приближения к равновесию, когда температуры газов сравниваются, выполняется не только это условие, а происходит и еще кое-что.

Чтобы было яснее, предположим, что нужное давление справа в ящике достигается за счет очень большой плотности, но малых скоростей. При больших  $n$  и малых  $v$  можно получить то же самое давление, что и при малых  $n$  и больших  $v$ . Атомы, если они плотно упакованы, могут двигаться медленно, или атомов может быть совсем немного, но ударяют они о поршень с большей силой. Установится ли равновесие навсегда? Сначала кажется, что поршень никуда не сдвинется и так будет всегда, но если продумать все еще раз, то станет ясно, что мы упустили одну очень важную вещь. Дело в том, что давление на поршень вовсе не равномерное, поршень-то раскачивается точно так же, как барабанная перепонка, о которой мы говорили в начале главы, ведь каждый новый удар не похож на предыдущий. Получается не постоянное равномерное давление, а скорее нечто вроде барабанной дробы — давление непрерывно меняется, и наш поршень как бы постоянно дрожит. Предположим, что атомы левого отделения ударяют о поршень более или менее равномерно, а справа атомов меньше, и удары их редки, но очень энергичны. Тогда поршень то и дело будет получать очень сильный импульс слева и отходить вправо, в сторону более медленных атомов, причем скорость этих атомов будет возрастать. (При столкновении с поршнем каждый атом приобретает или теряет энергию в зависимости от того, в какую сторону движется поршень в момент столкновения.) После нескольких столкновений поршень качнется, потом еще, еще и еще ..., газ в правом отделении будет время от времени встряхиваться, а это приведет к увеличению энергии его атомов, и движение их ускорится. Так будет продолжаться до тех пор, пока не уравновесятся качания поршня. А равновесие установится тогда, когда скорость поршня станет такой, что он будет отбирать у атомов энергию так же быстро, как и отдавать. Итак, поршень движется с какой-то средней скоростью, и нам предстоит найти ее. Если нам это удастся, мы подойдем к решению задачи поближе, потому что атомы должны подогнать свои скорости так, чтобы каждый газ получал через поршень ровно столько энергии, сколько теряет.

Очень трудно рассчитать движение поршня во всех деталях; хотя все это очень легко понять, оказывается, что проанализировать это несколько труднее. Прежде чем приступить к такому анализу, решим другую задачу: пусть ящик заполнен молекулами двух сортов с массами  $m_1$  и  $m_2$ , скоростями  $v_1$  и  $v_2$  и т. д.; теперь молекулы смогут познакомиться поближе. Если сначала все молекулы № 2 покоятся, то долго это продолжаться не может, потому что о них будут ударять молекулы № 1 и сообщать им какую-то скорость. Если молекулы № 2 могут двигаться значительно быстрее, чем моле-

кулы № 1, то все равно рано или поздно им придется отдать часть своей энергии более медленным молекулам. Таким образом, если ящик заполнен смесью двух газов, то проблема состоит в определении относительной скорости молекул обоих сортов.

Это тоже очень трудная задача, но мы все-таки решим ее. Сначала нам придется решить «подзадачу» (опять это один из тех случаев, когда, независимо от того, как решается задача, окончательный результат запоминается легко, а вывод требует большого искусства). Предположим, что перед нами две сталкивающиеся молекулы, обладающие разными массами; во избежание осложнений мы наблюдаем за столкновением из системы их центра масс (ц. м.), откуда легче уследить за ударом молекул. По законам столкновений, выведенным из законов сохранения импульса и энергии, после столкновения молекулы могут двигаться только так, что каждая сохраняет величину своей первоначальной скорости, и изменить они могут только *направление* движения. Типичное столкновение выглядит так, как его изобразили на фиг. 39.3. Предположим на минутку, что мы наблюдаем столкновения, системы центра масс которых покоятся. Кроме того, надо предположить, что все молекулы движутся горизонтально. Конечно, после первого же столкновения часть молекул будет двигаться уже под каким-то углом к исходному направлению. Иначе говоря, если вначале все молекулы двигались горизонтально, то спустя некоторое время мы обнаружим уже вертикально движущиеся молекулы. После ряда других столкновений они снова изменят направление и повернутся еще на какой-то угол. Таким образом, если кому-нибудь и удастся сначала навести порядок среди молекул, то все равно они очень скоро разбредутся по разным направлениям и с каждым разом будут все больше и больше расплываться. К чему же это в конце концов приведет? *Ответ: Любая пара молекул будет двигаться в произвольно выбранном направлении столь же охотно, как и в любом другом.* После этого дальнейшие столкновения уже не смогут изменить распределения молекул.



Фиг. 39.3. Столкновение двух неодинаковых молекул, если смотреть из системы центра масс.

Что имеется в виду, когда говорят о равновероятном движении в любом направлении? Конечно, нельзя говорить о вероятности движения вдоль заданной прямой — прямая слишком тонка, чтобы к ней можно было относить вероятность, а следует взять единицу «чего-нибудь». Идея заключается в том, что через заданный участок сферы с центром в точке столкновения проходит столько же молекул, сколько через любой другой участок сферы. В результате столкновений молекулы распределяются по направлениям так, что любым двум равным по площади участкам сферы будут соответствовать равные вероятности (т. е. одинаковое число прошедших через эти участки молекул).

Между прочим, если мы будем сравнивать первоначальное направление и направление, образующее с ним какой-то угол  $\theta$ , то интересно, что элементарная площадь на сфере единичного радиуса равна произведению  $2\pi$  на  $\sin \theta d\theta$ , или, что то же самое, на дифференциал  $\cos \theta$ . Это означает, что косинус угла  $\theta$  между двумя направлениями с равной вероятностью принимает любое значение между  $-1$  и  $+1$ .

Теперь нам надо вспомнить о том, что имеется на самом деле; ведь у нас нет столкновений в системе центра масс, а сталкиваются два атома с произвольными векторными скоростями  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ . Что происходит с ними? Мы поступим так: снова перейдем к системе центра масс, только теперь она движется с «усредненной по массам» скоростью  $\mathbf{v}_{ц.м.} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2$ . Если следить за столкновением из системы центра масс, то оно будет выглядеть так, как это изображено на фиг. 39.3, только надо подумать об относительной скорости столкновения  $\mathbf{w}$ . Относительная скорость равна  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ . Дело, следовательно, обстоит так: движется система центра масс, а в системе центра масс молекулы сближаются с относительной скоростью  $\mathbf{w}$ ; столкнувшись, они движутся по новым направлениям. Пока все это происходит, центр масс все время движется с одной и той же скоростью без изменений.

Ну и что же получится в конце концов? Из предыдущих рассуждений делаем следующий вывод: при равновесии *все направления  $\mathbf{w}$  равновероятны относительно направления движения центра масс\**. Это означает, что в конце концов не будет никакой корреляции между направлением относительной скорости и движением центра масс. Если бы даже

---

\* Этот аргумент, который приводил еще Максвелл, несколько коварен. Хотя окончательный вывод и справедлив, но он *не следует* непосредственно из соображений симметрии, которыми мы пользовались раньше. Ведь перейдя к движущейся через газ системе отсчета, мы можем обнаружить искаженное распределение скоростей. Мы не смогли найти простого доказательства этого результата.

такая корреляция существовала вначале, то столкновения ее разрушили бы и она в конце концов исчезла бы полностью. Поэтому среднее значение косинуса угла между  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{v}_{ц.м.}$  равно нулю. Это значит, что

$$\langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{ц.м.} \rangle = 0. \quad (39.19)$$

Скалярное произведение  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{ц.м.}$  легко выразить через  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{ц.м.} &= \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{(m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2) + (m_2 - m_1) (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (39.20)$$

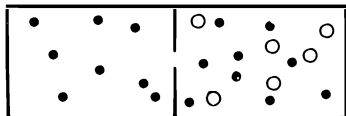
Займемся сначала  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ ; чему равно среднее  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ ? Иначе говоря, чему равно среднее проекции скорости одной молекулы на направление скорости другой молекулы? Ясно, что вероятности движения молекулы как в одну сторону, так и в противоположную одинаковы. Среднее значение скорости  $\mathbf{v}_2$  в любом направлении равно нулю. Поэтому и в направлении  $\mathbf{v}_1$  среднее значение  $\mathbf{v}_2$  тоже равно нулю. Итак, среднее значение  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$  равно нулю! Следовательно, мы пришли к выводу, что среднее  $m_1 v_1^2$  должно быть равно  $m_2 v_2^2$ . Это значит, что средние кинетические энергии обеих молекул должны быть равны:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (39.21)$$

Если газ состоит из атомов двух сортов, то можно показать (и мы даже считаем, что нам удалось это сделать), что средние кинетические энергии атомов каждого сорта равны, когда газ находится в состоянии равновесия. Это означает, что тяжелые атомы движутся медленнее, чем легкие; это легко проверить, поставив эксперимент с «атомами» различных масс в воздушном желобе.

Теперь сделаем следующий шаг и покажем, что если в ящике имеются два газа, разделенные перегородкой, то по мере достижения равновесия средние кинетические энергии атомов разных газов будут одинаковы, хотя атомы и заключены в разные ящики. Рассуждение можно построить по-разному. Например, можно представить, что в перегородке проделана маленькая дырочка (фиг. 39.4), так что молекулы

Фиг. 39.4. Два газа в ящике, разделенном полупроницаемой перегородкой.



одного газа проходят сквозь нее, а молекулы второго слишком велики и не пролезают. Когда установится равновесие, то в том отделении, где находится смесь газов, средние кинетические энергии молекул каждого сорта сравниваются. Но ведь в числе проникших сквозь дырочку молекул есть и такие, которые не потеряли при этом энергии, поэтому средняя кинетическая энергия молекул чистого газа должна быть равна средней кинетической энергии молекул смеси. Это не очень удовлетворительное доказательство, потому что ведь могло и не быть такой дырочки, сквозь которую пройдут молекулы одного газа и не смогут пройти молекулы другого.

Давайте вернемся к задаче о поршне. Можно показать, что кинетическая энергия поршня тоже должна быть равна  $\frac{1}{2}m_2v_2^2$ . Фактически кинетическая энергия поршня связана только с его горизонтальным движением. Пренебрегая возможным движением поршня вверх и вниз, мы найдем, что горизонтальному движению соответствует кинетическая энергия  $\frac{1}{2}m_2v_{2x}^2$ . Но точно так же, исходя из равновесия на другой стороне, можно показать, что кинетическая энергия поршня должна быть равна  $\frac{1}{2}m_1v_{1x}^2$ . Хотя мы повторяем предыдущее рассуждение, возникают некоторые дополнительные трудности в связи с тем, что в результате столкновений средние кинетические энергии поршня и молекулы газа сравниваются, потому что поршень находится не внутри газа, а смещен в одну сторону.

Если вас не удовлетворит и это доказательство, то можно придумать искусственный пример, когда равновесие обеспечивается устройством, по которому молекулы каждого газа бьют с обеих сторон. Предположим, что сквозь поршень проходит короткий стержень, на концах которого насажено по шару. Стержень может двигаться сквозь поршень без трения. По каждому из шаров со всех сторон бьют молекулы одного сорта. Пусть масса нашего устройства равна  $m$ , а массы молекул газа, как и раньше, равны  $m_1$  и  $m_2$ . В результате столкновений с молекулами первого сорта кинетическая энергия тела массы  $m$  равна среднему значению  $\frac{1}{2}m_1v_1^2$  (мы уже доказали это). Точно так же, столкновения с молекулами второго сорта заставляют тело иметь кинетическую энергию, равную среднему значению  $\frac{1}{2}m_2v_2^2$ . Если газы находятся в тепловом равновесии, то кинетические энергии обоих шаров должны быть равны. Таким образом, результат, доказанный для случая смеси газов, можно немедленно обобщить на случай двух разных газов при одинаковой температуре.

Итак, если два газа имеют одинаковую температуру, то средние кинетические энергии молекул этих газов в системе центра масс равны.

Средняя кинетическая энергия молекул — это свойство только «температуры». А будучи свойством «температуры», а не газа, она может служить *определением* температуры. Средняя кинетическая энергия молекулы, таким образом, есть некоторая функция температуры. Но кто нам подскажет, по какой шкале отсчитывать температуру? Мы можем сами *определить* шкалу температуры так, что средняя энергия будет пропорциональна температуре. Лучше всего для этого назвать «температурой» саму среднюю энергию. Это была бы самая простая функция, но, к несчастью, эту шкалу уже выбрали иначе и вместо того, чтобы назвать энергию молекулы просто «температурой», используют постоянный множитель, связывающий среднюю энергию молекулы и градус абсолютной температуры, или градус Кельвина. Этот множитель:  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  дж на каждый градус Кельвина\*. Таким образом, если абсолютная температура газа равна  $T$ , то средняя кинетическая энергия молекулы равна  $\frac{3}{2} kT$  (множитель  $\frac{3}{2}$  введен только для удобства, благодаря чему исчезнут множители в других формулах).

Заметим, что кинетическая энергия, связанная с составляющей движения в любом направлении, равна только  $\frac{1}{2} kT$ . Три независимых направления движения доводят ее до  $\frac{3}{2} kT$ .

### § 5. Закон идеального газа

Теперь можно подставить наше определение температуры в уравнение (39.9) и найти закон зависимости давления газа от температуры: произведение давления на объем равно произведению полного числа атомов на универсальную постоянную  $k$  и температуру:

$$PV = NkT. \quad (39.22)$$

Следовательно, при одинаковых температуре, давлении и объеме *число атомов* строго определено — это тоже универсальная постоянная! Таким образом, из законов Ньютона следует, что в равных объемах любых газов при одинаковых температуре и давлении содержится равное число молекул. Вот какой неожиданный вывод!

На практике, когда имеешь дело с молекулами, приходится оперировать большими числами, поэтому химики произвольно выбрали число, очень большое число, и придумали ему специальное название. Они назвали его *моль*. Моль — это очень искусственное число. Почему химики не приняли за единицу  $10^{24}$ , чтобы вышло круглое число, — это вопрос исторический.

---

\* Стоградусная шкала — это шкала Кельвина, в которой за нуль принята температура  $273,16^\circ$ , так что  $T = 273,16 +$  стоградусная температура.



Случилось так, что они для удобства выбрали стандартное число  $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$  объектов и назвали это число моле объектов. После этого, вместо того чтобы измерять число молекул в штуках, они измеряют их в молях\*. Можно написать число молей (выражая их через  $N_0$ ) и умножить его на число атомов в моле, потом умножить на  $kT$ , а затем, если захотим, выделить произведение числа атомов в моле на  $k$ , тогда получится молярное значение  $k$ ; для этой величины выделим особую букву  $R$ . Молярное значение  $k$  равно  $8,317$  дж:  $R = N_0 k = 8,317$  дж/моль  $\cdot$   $^{\circ}\text{K}^{-1}$ . Таким образом мы нашли газовый закон, выраженный в виде произведения числа молей (его обозначают буквой  $N$ ) на  $RT$ , или в виде произведения числа атомов на  $kT$ :

$$PV = NRT. \quad (39.23)$$

Смысл тот же самый, только единицы измерения разные. В качестве единицы мы используем 1, а химики используют  $6 \cdot 10^{23}$ !

Сделаем еще одно замечание по поводу газового закона; оно касается вещей более сложных, чем одноатомные молекулы. Пока мы имели дело только с движением одноатомного газа в центре масс. А что если при этом учесть действие сил? Рассмотрим сначала случай, когда поршень удерживается горизонтально расположенной пружинкой, на которую действует сила. Взаимная встряска атомов и поршня в каждый данный момент, конечно, не зависит от положения поршня. Условия равновесия остаются прежними. Независимо от того, где находится поршень, от него требуется только, чтобы скорость его движения была такой, чтобы он получал от молекул столько же энергии, сколько отдавал им. Наличие пружинки не меняет дела. *Скорость*, с которой движется поршень, в среднем та же. Таким образом, наша теорема о том, что средняя кинетическая энергия в одном направлении равна  $\frac{1}{2} kT$ , справедлива независимо от того, есть силы или их нет.

Рассмотрим, например, двухатомную молекулу, составленную из атомов с массами  $m_A$  и  $m_B$ . Нам удалось доказать, что движение в центре масс части  $A$  и части  $B$  таково, что  $\langle \frac{1}{2} m_A v_A^2 \rangle = \langle \frac{1}{2} m_B v_B^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$ . Но как это может быть, если отдельные части связаны друг с другом? Хотя они и связаны между собой, но обмен энергией при взаимных вращениях, изменении расстояния и соударениях с другими молекулами *зависит только от того, как быстро они движутся*. Только этим определяется обмен энергией при соударениях. Сила

---

\* То, что химики называют молекулярным весом, есть не что иное, как масса моля молекул в граммах. Моль определяется так, что масса моля атомов изотопа углерода 12 (ядра которого состоят из 6 протонов и 6 нейтронов) равна в точности 12 г.

в каждый отдельный момент не имеет никакого значения. Следовательно, даже если между отдельными частями молекулы действуют силы, верен тот же принцип.

Докажем, наконец, что газовый закон справедлив и в том случае, когда внутреннее движение не учитывается. До сих пор нам не надо было включать внутреннее движение. Мы просто рассматривали одноатомный газ. Но теперь мы покажем, что скорость центра масс любого объекта, который можно рассматривать как тело массы  $M$ , равна

$$\frac{1}{2} M v_{ц. м.}^2 = \frac{3}{2} kT. \quad (39.24)$$

Иначе говоря, можно рассматривать как отдельные части, так и всю молекулу в целом! Посмотрим, почему это можно делать: масса двухатомной молекулы равна  $M = m_A + m_B$ , а скорость центра масс равна  $v_{ц. м.} = (m_A v_A + m_B v_B) / M$ . Нам нужно теперь определить  $\langle v_{ц. м.}^2 \rangle$ . Если возвести в квадрат  $v_{ц. м.}$ , то получится

$$v_{ц. м.}^2 = \frac{m_A^2 v_A^2 + 2m_A m_B v_A \cdot v_B + m_B^2 v_B^2}{M^2}.$$

Умножив это на  $1/2 M$  и усреднив, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M v_{ц. м.}^2 &= \frac{m_A^3 / 2 kT + 2m_A m_B \langle v_A \cdot v_B \rangle + m_B^3 / 2 kT}{M} = \\ &= \frac{3}{2} kT + \frac{2m_A m_B \langle v_A \cdot v_B \rangle}{M}. \end{aligned}$$

[Мы воспользовались тем, что  $(m_A + m_B) / M = 1$ .] А чему равно  $\langle v_A \cdot v_B \rangle$ ? (Хорошо бы, чтобы это было равно нулю!) Чтобы найти это среднее, используем наше предположение, что относительная скорость  $w = v_A - v_B$  не предпочитает какое-то одно определенное направление остальным, т. е. средняя составляющая вдоль любого направления равна нулю. Мы предполагаем, следовательно, что

$$\langle w \cdot v_{ц. м.} \rangle = 0.$$

Но что такое  $w \cdot v_{ц. м.}$ ? Это скалярное произведение, равное

$$\begin{aligned} w \cdot v_{ц. м.} &= \frac{(v_A - v_B) (m_A v_A + m_B v_B)}{M} = \\ &= \frac{m_A v_A^2 + (m_B - m_A) (v_A \cdot v_B) - m_B v_B^2}{M}. \end{aligned}$$

Далее, поскольку  $\langle m_A v_A^2 \rangle = \langle m_B v_B^2 \rangle$ , то первый и последний члены взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$(m_B - m_A) \langle v_A \cdot v_B \rangle = 0.$$

Итак, если  $m_A \neq m_B$ , то  $\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle = 0$ , а это означает, что жесткому движению всей молекулы, рассматриваемой как одна частица массы  $M$ , соответствует средняя кинетическая энергия, равная  $\frac{3}{2}kT$ .

Одновременно мы доказали, что средняя кинетическая энергия *внутреннего* движения двухатомной молекулы, если не учитывать движения центра масс, равна  $\frac{3}{2}kT$ ! Ведь полная кинетическая энергия отдельных частей молекулы равна  $\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2$ , а среднее ее значение — это  $\frac{3}{2}kT + \frac{3}{2}kT$ , или  $3kT$ . Кинетическая энергия движения центра масс равна  $\frac{3}{2}kT$ , так что средняя кинетическая энергия вращательного и колебательного движений двух атомов внутри молекулы — это разность этих величин,  $\frac{3}{2}kT$ .

Теорема о средней энергии центра масс — это весьма общая теорема: для каждого объекта, рассматриваемого как единое целое, независимо от того, действуют на этот объект силы или нет, средняя кинетическая энергия каждого независимого движения равна  $\frac{1}{2}kT$ . Эти «независимые направления движения» иногда называют *степенями свободы* системы. Число степеней свободы молекулы, составленной из  $r$  атомов, равно  $3r$ , потому что для определения положения каждого атома нужны три координаты. Полную кинетическую энергию молекулы можно представить либо как сумму кинетических энергий отдельных атомов, либо как сумму кинетической энергии движения центра масс и кинетической энергии внутренних движений. Последнюю иногда можно представить как сумму кинетической энергии вращений и кинетической энергии колебаний, но это можно сделать только приближенно. Наша теорема, если применить ее к  $r$ -атомной молекуле, гласит, что средняя кинетическая энергия молекулы равна  $\frac{3}{2}rkT$  Дж, из которых  $\frac{3}{2}kT$  — кинетическая энергия движения молекулы как целого, а остаток  $\frac{3}{2}(r-1)kT$  — это внутренняя кинетическая энергия вращений и колебаний.

**ПРИНЦИПЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ  
МЕХАНИКИ**

**§ 1. Экспоненциальная атмосфера**

Мы уже изучали некоторые свойства большого числа сталкивающихся атомов. Наука, которая занимается этим, называется кинетической теорией, и она описывает свойства вещества, рассматривая, как сталкиваются атомы. Мы утверждаем, что все свойства вещества в целом можно объяснить, рассматривая движение отдельных его частей.

Пока мы ограничимся случаем теплового равновесия, т. е. всего лишь подклассом всех явлений природы. Законы механики, применяемые в условиях теплового равновесия, получили название *статистической механики*, и в этой главе вы немного познакомитесь с некоторыми основными теоремами этой науки.

Одна теорема статистической механики вам уже известна. Согласно этой теореме, для любого движения при абсолютной температуре  $T$  средняя кинетическая энергия каждого независимого движения (каждой степени свободы) равна  $\frac{1}{2}kT$ . После этого нам становится кое-что известно о среднем квадрате скорости атомов. Теперь нам необходимо узнать чуть побольше о координатах атомов, чтобы выяснить, много ли их находится при тепловом равновесии в той или иной точке пространства, а также немного подробнее изучить распределение атомов по скоростям. Хотя мы знаем, чему равен средний квадрат скорости, мы все же не можем ответить на вопрос, сколько атомов обладает скоростью, в три раза большей, чем корень из среднего квадрата скорости, или скоростью, равной одной четверти корня из среднего квадрата скорости. А вдруг все атомы имеют одинаковую скорость?

§ 1. Экспоненциальная атмосфера

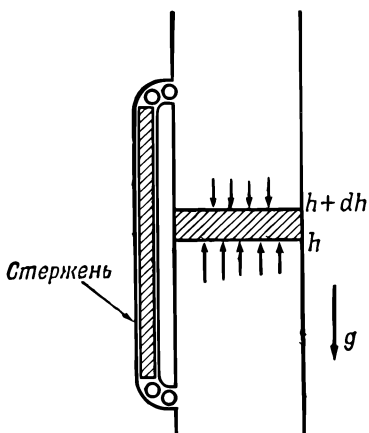
§ 2. Закон Больцмана

§ 3. Испарение жидкости

§ 4. Распределение молекул по скоростям

§ 5. Удельные теплоемкости газов

§ 6. Поражение классической физики



Фиг. 40.1. Равновесие в атмосфере с постоянной температурой. Давление на высоте  $h$  должно превосходить давление на высоте  $h + dh$  на вес заключенного между этими уровнями газа. Стержень и шарики выравнивают температуру.

Итак, вот два вопроса, на которые мы попытаемся дать ответ: 1) Как атомы располагаются в пространстве, когда на них действуют силы? 2) Каково распределение атомов по скоростям?

Заметим, что это два совершенно независимых вопроса и что распределение по скоростям всегда одинаково. Этого можно было ожидать после того, как мы выяснили, что средняя кинетическая энергия степени свободы всегда равна  $\frac{1}{2}kT$ , независимо от того, какие силы действуют на молекулы. Распределение по скоростям молекул не зависит от сил, потому что силы не влияют на частоту столкновений.

Давайте начнем с примера распределения молекул в атмосфере, подобной той, в которой мы живем, но без ветра или других каких-либо возмущений.

Предположим, что мы имеем дело с довольно высоким столбом газа, находящегося в тепловом равновесии (не так, как в настоящей атмосфере; в ней, как известно, по мере подъема вверх становится холоднее). Укажем здесь, что нарушение равновесия в случае разницы температур на разных высотах можно продемонстрировать, поместив в столб газа металлический стержень так, что его концы соприкасаются с маленькими шариками (фиг. 40.1). Нижние шарики, получая от молекул газа энергию  $\frac{1}{2}kT$ , передают ее через стержень верхним шарикам и встряхивают их; верхние шарики в свою очередь будут встряхивать соприкасающиеся с ними наверху молекулы. В конце концов, конечно, температура на разных высотах гравитационного поля станет одинаковой.

Нам предстоит найти закон, по которому происходит разрежение атмосферы по мере подъема вверх, когда температура на всех высотах одинакова. Если  $N$  — полное число

молекул в объеме  $V$  газа с давлением  $P$ , то  $PV = NkT$ , или  $T = nkT$ , где  $n$  — число молекул в единичном объеме. Иначе говоря, если известно число молекул в единичном объеме, то известно и давление, и наоборот: давление и плотность пропорциональны друг другу, ведь температура в нашем случае постоянна. Но давление не может быть постоянным: с уменьшением высоты оно должно возрастать, потому что нижнему слою приходится, так сказать, выдерживать вес всех расположенных сверху атомов. Теперь можно определить, как давление меняется с высотой. Если на высоте  $h$  выделить площадку единичной площади, то на эту площадку снизу будет действовать сила, равная давлению  $P$ . Если бы не было силы тяжести, то на площадку на высоте  $h + dh$  действовала бы сверху вниз точно такая же сила. Но в нашем случае это не так: действующая снизу сила должна превосходить силу, действующую сверху, на величину, равную весу газа, заключенного между слоями  $h$  и  $h + dh$ . На каждую молекулу действует сила тяжести  $mg$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести. В интересующем нас слое находится  $ndh$  молекул.

Это приводит к такому дифференциальному уравнению:  $P_{h+dh} - P_h = dP = -mgndh$ . Поскольку  $P = nkT$ , а  $T$  — постоянная, то можно избавиться или от  $P$ , или от  $n$ . Исключим из уравнений  $P$ ; тогда получим

$$\frac{dn}{dh} = -\frac{mg}{kT} n.$$

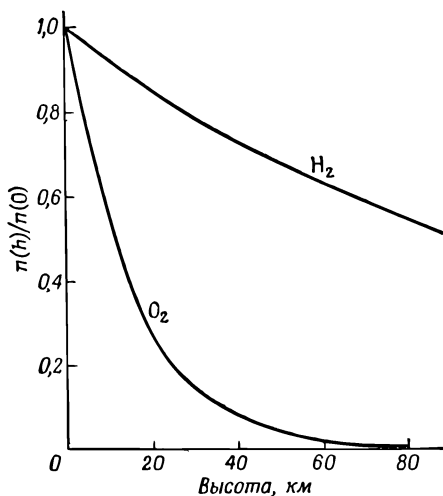
Это дифференциальное уравнение говорит нам, как убывает плотность по мере увеличения высоты.

Мы располагаем теперь дифференциальным уравнением для плотности частиц  $n$ , которая меняется с высотой, но меняется так, что производная плотности пропорциональна себе самой. Функция, производная которой пропорциональна себе самой, — это экспоненциальная функция и, значит, решение дифференциального уравнения имеет вид

$$n = n_0 e^{-mgh/kT}. \quad (40.1)$$

Здесь постоянная интегрирования  $n_0$  — плотность на высоте  $h = 0$  (которую можно задать произвольно); с высотой плотность экспоненциально убывает.

Заметим, что если имеется несколько сортов молекул с разными массами, то число их убывает по разным экспонентам. Число более тяжелых молекул убывает с высотой быстрее, чем число легких молекул. Поэтому можно ожидать, что раз кислород тяжелее азота, то по мере подъема вверх относительное содержание азота в атмосфере (смеси азота и кислорода) будет возрастать. В нашей атмосфере, во всяком случае на доступных высотах, этого фактически не происходит,



Фиг. 40.2. Нормированная плотность как функция высоты в гравитационном поле Земли для кислорода и водорода при постоянной температуре.

ибо вследствие воздушных возмущений газы вновь перемешиваются. Ведь это же не изотермическая атмосфера. Тем не менее на больших высотах преобладают очень легкие газы, например водород, так как молекулы легких газов способны забраться на такую высоту, где все остальные экспоненты уже вымрут (фиг. 40.2).

## § 2. Закон Больцмана

Отметим здесь тот факт, что числитель показателя экспоненты в равенстве (40.1) — это *потенциальная* энергия молекулы. Поэтому можно в нашем случае сформулировать закон следующим образом: плотность в каждой точке пропорциональна

$$e^{-п. \varepsilon / kT},$$

где п. э. — потенциальная энергия отдельного атома.

Возможно, что это случайность и этот закон справедлив только в частном случае однородного гравитационного поля. Однако можно показать, что это весьма общее утверждение. Предположим, что на молекулы газа действуют какие-то иные, не гравитационные, силы. Например, молекулы обладают электрическим зарядом, а тогда они реагируют на электрическое поле или на другой заряд, притягивающий их. А может быть, в результате взаимного притяжения атомов друг к другу или к стенкам, или к какому-нибудь твердому телу, или еще к чему-то существуют какие-то силы притяжения, которые зависят от взаимного расположения молекул и действуют на все молекулы. Предположим теперь для простоты,

что все молекулы одинаковы и что сила действует на каждую отдельную молекулу, так что полная сила, действующая на произвольно выделяемую часть газа, равна просто произведению числа молекул на силу, действующую на одну молекулу. Дело совсем упростится, если выбрать систему координат так, что сила  $\mathbf{F}$  будет действовать вдоль оси  $x$ .

Так же, как и раньше, рассечем газ двумя параллельными плоскостями, промежуток между которыми равен  $dx$ . Тогда сила, действующая на каждый атом, умноженная на число атомов в  $1 \text{ см}^3$  (обобщение прежнего  $nmg$ ) и умноженная на  $dx$ , должна сбалансировать изменение давления:  $Fndx = dP = = kTdn$ . Или, придав этому закону другую форму, которая пригодится позднее, запишем:

$$F = kT \frac{d}{dx} (\ln n). \quad (40.2)$$

Теперь заметим, что  $-Fdx$  — это работа, которую надо совершить для переноса молекулы из  $x$  в  $x + dx$ , и если сила  $F$  произошла из потенциала, т. е. работу можно описывать с помощью потенциальной энергии, то нужную нам величину можно считать изменением потенциальной энергии (п. э.). Отрицательное изменение потенциальной энергии — это произведенная работа  $Fdx$ , так что  $d(\ln n) = -d(\text{п. э.})/kT$ , или после интегрирования

$$n = (\text{постоянная}) e^{-\text{п. э.}/kT}. \quad (40.3)$$

Таким образом, то, что нам удалось заметить в частном случае, справедливо вообще. (А что если  $F$  не происходит из потенциала? Тогда (40.2) просто-напросто не имеет решения. В этом случае, после того как какой-нибудь атом опишет замкнутый путь, вдоль которого полная работа не равна нулю, энергия либо прибавится, либо убавится и равновесие никогда не установится. Температурное равновесие невозможно, если внешние силы, действующие на газ, не консервативны.) Уравнение (40.3) известно под названием *закона Больцмана*. Это еще один из принципов статистической механики: вероятность найти молекулу в заданной точке заданной пространственной конфигурации изменяется экспоненциально, причем показатель экспоненты состоит из потенциальной энергии в заданной пространственной конфигурации, взятой с обратным знаком и деленной на  $kT$ .

Таким образом, мы знаем кое-что о распределении молекул. Предположим, что в нашем распоряжении имеется плавающий в жидкости положительный ион; он притягивает окружающие его отрицательные ионы. Много ли их окажется на разных расстояниях от положительного иона? Если нам известно, как зависит от расстояния потенциальная энергия,



то отношение чисел ионов на разных расстояниях определяется полученным нами законом. Этому закону можно найти еще много других применений.

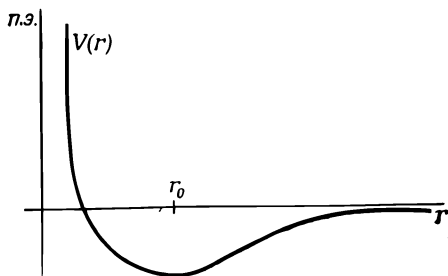
### § 3. Испарение жидкости

В менее элементарной статистической механике пытаются решить следующую важную задачу. Предположим, что имеется совокупность притягивающихся друг к другу молекул и сила между любыми двумя молекулами, скажем  $i$ -й и  $j$ -й, зависит только от расстояния между ними  $r_{ij}$  и может быть представлена в виде производной от потенциальной энергии  $V(r_{ij})$ . На фиг. 40.3 показан возможный вид такой функции. Если  $r > r_0$ , то при сближении молекул энергия уменьшается, поэтому молекулы притягиваются; но если расстояние между молекулами станет совсем маленьким, то энергия очень резко возрастет; значит, на малых расстояниях молекулы сильно отталкиваются. Таково в общих чертах поведение молекул.

Предположим теперь, что мы заполнили этими молекулами какой-то ящик и хотим знать, как они там уместятся в среднем. На это даст ответ выражение  $\exp(-\text{п. э.}/kT)$ . В этом случае полная потенциальная энергия, если предположить, что молекулы взаимодействуют только попарно, равна сумме всех парных энергий (в более сложных случаях могут встретиться и тройные силы, но электрические силы, например, парные). Поэтому вероятность того, что молекулы образуют конфигурацию, характеризуемую заданными комбинациями расстояний  $r_{ij}$ , пропорциональна

$$\exp \left[ -\frac{1}{kT} \sum_{i,j} V(r_{ij}) \right].$$

Если температура очень высока, так что  $kT \gg |V(r_0)|$ , то экспонента почти всюду мала, и вероятность найти молекулу в том или ином месте почти не зависит от расстояния до других молекул. Рассмотрим случай двух молекул; в этом случае  $\exp(-\text{п. э.}/kT)$  будет вероятностью найти молекулы на рас-



Фиг. 40.3. Кривая потенциальной энергии для двух молекул. Потенциальная энергия зависит только от расстояния.

стоянии  $r$  друг от друга. Ясно, что вероятность максимальна тогда, когда потенциал наиболее отрицателен, а когда потенциал стремится к бесконечности, вероятность почти равна нулю (это происходит на очень малых расстояниях). Это означает, что у атомов газа нет шансов столкнуться друг с другом, уже очень сильно они отталкиваются. Но очень велики шансы найти эти молекулы (если отнести вероятность к *единичному объему*) вблизи точки  $r_0$ . Здесь вероятность больше, чем в других точках, но насколько больше — это зависит от температуры. Если температура очень велика по сравнению с разностью энергий в точках  $r = r_0$  и  $r = \infty$ , то экспонента всегда почти равна единице. Это случай, когда средняя кинетическая энергия (она порядка  $kT$ ) значительно превосходит потенциальную энергию. Силы тогда мало что значат. Но с падением температуры вероятность найти молекулы на расстоянии, близком к  $r_0$ , резко возрастает по сравнению с вероятностью найти молекулы в любом другом месте; и в самом деле, если  $kT$  много меньше  $|V(r_0)|$ , то около  $r_0$  экспонента имеет довольно большой положительный показатель. Другими словами, при заданном объеме молекулы предпочитают быть на расстоянии минимальной энергии, а не очень далеко друг от друга. По мере падения температуры атомы сближаются, сбиваются в кучу, объединяются в жидкости, в твердые тела и молекулы, а если их подогреть, то они испаряются.

Если бывает необходимо точно описать, как происходит испарение, или вообще уточнить, как молекулы ведут себя в данных обстоятельствах, то поступать следует так. Прежде всего нужно как можно точнее узнать закон взаимодействия молекул  $V(r)$ . Как это сделать — безразлично: можно вычислить потенциал с помощью квантовой механики или установить закон взаимодействия экспериментально. Но если даже закон взаимодействия молекул известен, нужно все же учесть, что дело идет о миллионах молекул и нам еще придется хватить горя при изучении функции  $\exp(-\sum V_{ij}/kT)$ . Все же удивительно, что функция так проста и все как будто ясно, поскольку известен точный потенциал взаимодействия, а дело это оказывается *невероятно сложным*: трудность заключается в ужасающе большом числе переменных.

Но вопрос захватывающе интересен. Это один из примеров того, что называют «задачей многих тел», и он содержит много поистине увлекательных вещей. Она-единственная формула, которую мы получим, решив задачу, должна содержать все детали, например переход газа в твердое состояние или возможные кристаллические строения твердого тела. Многие пытались ее сосчитать, но математические трудности уж очень велики, и дело не в трудности вывода общего закона, а просто в том, чтобы справиться с огромным числом переменных.

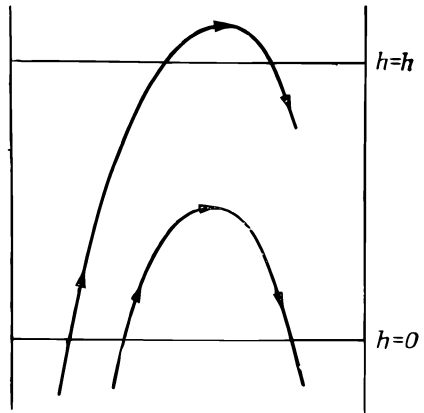
Вот и все, что касается распределения частиц в пространстве. На этом, собственно, и кончается классическая статистическая механика, ибо если нам известны силы, то в принципе мы можем найти пространственное распределение, а распределение скоростей находится сразу на все случаи жизни, оно не будет меняться от случая к случаю. Основная задача состоит в получении более конкретной информации из нашего формального решения: это и является основным занятием классической статистической механики.

#### § 4. Распределение молекул по скоростям

Обсудим теперь распределение молекул по скоростям, потому что интересно, а иногда и полезно знать, какая часть молекул движется с той или иной скоростью. Чтобы выяснить это, можно использовать те знания, которые мы приобрели, когда изучали распределение газа в атмосфере. Мы считаем газ идеальным; мы предполагали это, пренебрегая взаимным притяжением атомов при расчете потенциальной энергии. В наш первый пример мы включили лишь потенциальную энергию силы тяжести. Если бы между атомами существовали взаимные силы, то нам, конечно, пришлось бы написать что-нибудь более сложное. Но мы по-прежнему будем предполагать, что между атомами никаких сил нет, и на момент даже забудем о столкновениях; потом мы попытаемся найти этому оправдание. Мы видим, что на высоте  $h$  находится гораздо меньше молекул, чем на высоте 0 (фиг. 40.4); согласно формуле (40.1), число их экспоненциально убывает с высотой. Но почему же на большей высоте меньше молекул? Разве не все молекулы, живущие на высоте 0, появляются на высоте  $h$ ? Нет! Потому что на высоте 0 есть молекулы, движущиеся слишком медленно, и они не способны взобраться на потенциальную гору до высоты  $h$ . Вот и ключ к решению задачи о распределении молекул по скоростям; ведь, зная равенство (40.1), мы знаем число молекул, скорость которых слишком мала для достижения высоты  $h$ . Их ровно столько, чтобы создать нужное падение плотности при увеличении  $h$ .

Давайте сформулируем все поточнее: подсчитаем, сколько молекул проходит снизу вверх через плоскость  $h = 0$  (называя заданный уровень нулевой высотой, мы вовсе не считаем, что здесь пол, просто это удобнее нам для начала отсчета, и на отрицательной высоте может находиться газ). Эти молекулы газа движутся во всех направлениях, и некоторые из них проходят через нашу плоскость; таким образом, в любой момент сквозь плоскость снизу вверх проходит известное число молекул в секунду с заданной скоростью. Затем отметим следующее: если через  $u$  обозначить скорость, необходи-

Фиг. 40.4. Высоты  $h$  достигают только те молекулы, скорость которых на высоте  $h=0$  достаточно велика.



мую для того, чтобы подняться на высоту  $h$  (кинетическая энергия  $mu^2/2 = mgh$ ), то число молекул в секунду, поднимающихся с нижней плоскости строго вверх и имеющих составляющую скорости, большую чем  $u$ , в точности равно числу молекул, пересекающих верхнюю плоскость с *любой* вертикальной составляющей скорости. Те молекулы, вертикальная скорость которых не превышает  $u$ , не достигают верхней плоскости. Таким образом,

$$\text{Число молекул, пересекающих } h=0 \text{ с } v_z > u = \text{Число молекул, пересекающих } h=h \text{ с } v_z > 0.$$

Но число молекул, пересекающих  $h$  с любой скоростью, большей нуля, меньше числа молекул, пересекающих нижний уровень с любой скоростью, большей нуля, хотя бы потому, что внизу больше атомов. Вот и все, что нам нужно. Мы уже знаем, что распределение молекул по скоростям на всех высотах одинаково, ведь мы уже выяснили, что температура во всей атмосфере одинакова. Но поскольку распределение скоростей всюду одинаково и число атомов, пересекающих нижний уровень, больше, то ясно, что отношение  $n_{>0}(h)$  (числа атомов, пересекающих высоту  $h$  с положительной скоростью) и  $n_{>0}(0)$  (числа атомов, пересекающих с положительной скоростью высоту 0) равно отношению плотностей на этих высотах, т. е.  $\exp(-mgh/kT)$ . Но  $n_{>0}(h) = n_{>u}(0)$ , потому

$$\frac{n_{>u}(0)}{n_{>0}(0)} = e^{-mgh/kT} = e^{-mu^2/2kT},$$

поскольку  $1/2mu^2 = mgh$ . Теперь скажем это своими словами: число молекул, пересекающих за 1 сек единичную площадь на высоте 0 с вертикальной составляющей скорости, превышающей  $u$ , равно произведению числа молекул,

пересекающих эту площадку со скоростью, большей нуля, на  $\exp(-mu^2/2kT)$ .

Это верно не только для произвольной высоты 0, но и для любой другой высоты, поэтому распределение по скоростям *одинаково повсюду!* (Окончательный результат не включает высоты  $h$ , она появляется только в промежуточных рассуждениях.) Это общая теорема о распределении по скоростям. В ней утверждается, что если в столбе газа просверлить крохотную дырочку, ну совсем малюсенькую, так что столкновения там будут редки и длина пробега молекул между столкновениями будет много больше диаметра дырочки, то молекулы будут вылетать из нее с разными скоростями, но доля частиц, вылетающих со скоростью, превышающей  $u$ , равна  $\exp(-mu^2/2kT)$ .

Теперь вернемся к вопросу о том, можно ли пренебрегать столкновениями. Почему это не имеет значения? Мы могли бы повторить все наши доводы, используя не конечную высоту  $h$ , а бесконечно малую высоту  $h$ , столь малую, что для столкновений между высотами 0 и  $h$  было бы слишком мало места. Но это не обязательно: наши доводы, очевидно, основаны лишь на анализе значений энергий и на сохранении энергии; при столкновениях же происходит обмен энергиями среди молекул. Но нам довольно безразлично, следим ли мы за одной и той же молекулой, раз происходит лишь обмен энергиями с другой молекулой. И получается, что если мы даже сделаем это достаточно тщательно (а такую работу тщательно проделать, конечно, труднее), то результат будет тот же.

Интересно, что найденное нами распределение по скоростям имеет вид

$$n_{>u} \sim e^{-\kappa \cdot \varepsilon_u/kT}. \quad (40.4)$$

Этот способ описания распределения по скоростям — когда подсчитывается число молекул, проходящих через выделенную площадку с заданной минимальной  $z$ -составляющей скорости, — отнюдь не самый удобный. Например, чаще хотят знать, сколько молекул в заданном объеме газа движется, имея  $z$ -составляющую скорости между двумя заданными значениями; а это, конечно, из (40.4) сразу не получишь. Поэтому придадим нашей формуле удобную форму, хотя то, что мы получили, — это весьма общий результат. Заметим, что *невозможно утверждать, что любая молекула в точности обладает той или иной наперед заданной скоростью*; ни одна из них не движется со скоростью, в точности равной 1,7962899173 м/сек. Итак, чтобы придать нашему утверждению какой-то смысл, мы должны спросить, сколько молекул можно найти в заданном *интервале* скоростей. Нам придется говорить о том, как

часто встречаются скорости в интервале между 1,796 и 1,797 и т. п. Выражаясь математически, пусть  $f(u)du$  будет долей всех молекул, чьи скорости заключены в промежутке  $u$  и  $u+du$ , или, что то же самое (если  $du$  бесконечно мало), долей всех молекул, имеющих скорость  $u$  с точностью до  $du$ . На фиг. 40.5 представлена возможная форма функции  $f(u)$ , а заштрихованная часть ширины  $du$  и средней высоты  $f(u)$  — это доля молекул  $f(u)du$ .

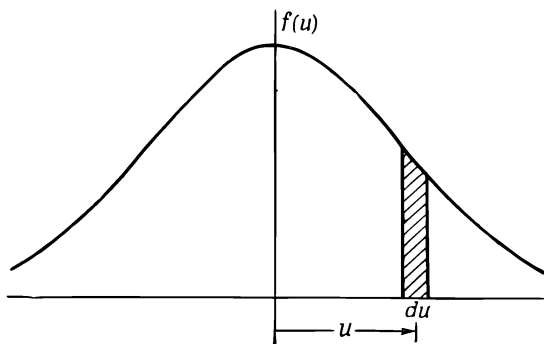
Таким образом, отношение площади заштрихованного участка ко всей площади под кривой равно относительному числу молекул со скоростью  $u$  внутри отрезка  $du$ . Если определить  $f(u)$  так, что относительное число молекул будет просто равно площади заштрихованного участка, то полная площадь под кривой — это все 100% молекул, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1. \quad (40.5)$$

Теперь остается только найти это распределение, сравнив его с результатом доказанной ранее теоремы. Сначала надо выяснить, как выразить через  $f(u)$  число молекул, проходящих за 1 сек через заданную площадку со скоростью, превышающей  $u$ ?

Это число не равно интегралу  $\int_u^{\infty} f(u)du$  (хотя это первое, что приходит в голову), ведь нас интересует число молекул, проходящих через площадку за секунду. Более быстрые молекулы будут пересекать площадку, так сказать, чаще, чем более медленные, поэтому, чтобы найти число проходящих молекул, надо умножить плотность молекул на скорость. (Мы уже обсуждали это в предыдущей главе когда подсчитывали число столкновений.)

Полное число молекул, проходящих через поверхность за время  $t$ , равно числу молекул, способных достигнуть



Фиг. 40.5. Функция распределения скоростей.

Заштрихованная площадь равна  $f(u)du$  — это относительное число частиц, скорости которых заключены внутри отрезка  $du$  около точки  $u$ .

поверхности, а это молекулы, проходящие к поверхности с расстояния  $ut$ . Таким образом, число молекул, достигающих площадки, определяется не просто числом молекул, движущихся с данной скоростью, а равно этому числу, отнесенному к единице объема, и умноженному на расстояние, которое они пройдут, прежде чем достигнут площадки, сквозь которую они, по-видимому, должны пройти, а это расстояние пропорционально  $u$ . Значит, нам предстоит вычислить интеграл от произведения  $u$  на  $f(u) du$ , взятый от  $u$  до бесконечности, причем мы уже знаем, что этот интеграл обязательно должен быть пропорционален  $\exp(-mu^2/2kT)$ , а постоянную пропорциональности еще надо определить:

$$\int_u^{\infty} u f(u) du = \text{const} \cdot e^{-mu^2/2kT}. \quad (40.6)$$

Если теперь продифференцировать интеграл по  $u$ , то мы получим подынтегральное выражение (со знаком минус, потому что  $u$  — это нижний предел интегрирования), а дифференцируя правую часть равенства, мы получим произведение  $u$  на экспоненту (и на некоторую постоянную). Сократим в обеих частях  $u$ , и тогда

$$f(u) du = C e^{-mu^2/2kT} du. \quad (40.7)$$

Мы оставили в обеих частях равенства  $du$ , чтобы помнить, что это *распределение*; оно говорит нам об относительном числе молекул, имеющих скорость между  $u$  и  $u + du$ .

Постоянная  $C$  должна определиться из условия равенства интеграла единице в согласии с уравнением (40.5). Можно доказать\*, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Используя это обстоятельство, легко найти  $C = \sqrt{m/2\pi kT}$ .

\* Чтобы вычислить этот интеграл, положим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Тогда

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

а это двойной интеграл в  $xy$ -плоскости. Но его можно вычислить и в полярных координатах:

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-r^2} 2\pi r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi.$$

Поскольку скорость и импульс пропорциональны, можно утверждать, что распределение молекул по импульсам, отнесенное к единице импульсной шкалы, также пропорционально  $\exp(-\text{к.э.}/kT)$ . Оказывается, что эта теорема верна также в теории относительности, если только формулировать ее в терминах импульсов, тогда как в терминах скоростей это уже не так; поэтому сформулируем все в терминах импульсов:

$$f(p) dp = ce^{-\text{к.э.}/kT} dp. \quad (40.8)$$

Это значит, что мы установили, что вероятности, определяемые энергиями разного происхождения (и кинетической и потенциальной), в обоих случаях выражаются одинаково:  $\exp(-\text{энергия}/kT)$ ; таким образом, наша замечательная теорема приобрела форму, весьма удобную для запоминания.

Однако пока мы говорили только о «вертикальном» распределении скоростей. Но мы можем спросить, какова вероятность того, что молекула движется в другую сторону? Конечно, эти распределения связаны друг с другом и можно получить полное распределение, исходя из какого-то одного, ведь полное распределение зависит только от квадрата величины скорости, а не от ее  $z$ -составляющей. Распределение по скоростям не должно зависеть от направления и определяться только функцией  $u^2$  — вероятностью величины скорости. Нам известно распределение  $z$ -составляющей, и мы хотим получить отсюда распределение других составляющих. В результате полное распределение по-прежнему пропорционально  $\exp(-\text{к.э.}/kT)$ , только теперь кинетическая энергия состоит из трех частей:  $mv_x^2/2$ ,  $mv_y^2/2$  и  $mv_z^2/2$ , суммируемых в показателе экспоненты. А можно записать это и в виде произведения:

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \sim \\ \sim e^{-mv_x^2/2kT} e^{-mv_y^2/2kT} e^{-mv_z^2/2kT} dv_x dv_y dv_z. \quad (40.9)$$

Вы можете убедиться в том, что эта формула верна, ибо, во-первых, распределение зависит только от  $v^2$  и, во-вторых, вероятности данных  $v_z$  получаются после интегрирования по всем  $v_x$  и  $v_y$  и это должно привести к (40.7). Но обоим этим требованиям удовлетворяет только функция (40.9).

## § 5. Удельные теплоемкости газов

Посмотрим теперь, как можно проверить теорию и оценить, насколько хороша классическая теория газов. Мы уже говорили, что если  $U$  — внутренняя энергия  $N$  молекул, то формула  $pV = NkT = (\gamma - 1)U$  иногда и для некоторых газов может оказаться правильной. Мы знаем, что для одноатом-



ного газа правая часть равна  $\frac{2}{3}$  кинетической энергии движения центров масс атомов. В случае одноатомного газа кинетическая энергия равна внутренней энергии, поэтому  $\gamma - 1 = \frac{2}{3}$ .

Но предположим, что мы столкнулись с более сложной молекулой, которая может вращаться и колебаться, и предположим (в классической механике это так), что энергии внутренних движений также пропорциональны  $kT$ . Поэтому при заданной температуре молекула, кроме кинетической энергии  $kT$ , имеет внутреннюю энергию колебания и вращения. Тогда полная энергия  $U$  включает не только кинетическую, но и вращательную энергию и мы получаем другие значения  $\gamma$ . Наилучший способ измерения  $\gamma$  — это измерение удельной теплоемкости, характеризующей изменение энергии при изменении температуры. К этому способу мы еще вернемся, а пока предположим, что нам удалось экспериментально определить  $\gamma$  с помощью кривой  $PV^\gamma$ , соответствующей адиабатическому сжатию.

Попробуем вычислить  $\gamma$  для ряда частных случаев. Прежде всего для одноатомных газов полная энергия  $U$  есть не что иное, как кинетическая энергия, и в этом случае, как мы уже знаем,  $\gamma$  равно  $\frac{5}{3}$ . В качестве примера двухатомных газов рассмотрим кислород, водород, пары иода и т. д. и предположим, что двухатомный газ можно представить как собрание пар атомов, между которыми действуют силы, похожие на те, что изображены на фиг. 40.3. Можно также предположить, и оказывается, что это вполне законно, что при температурах, обычных для диатомных газов, пары атомов стремятся удалиться друг от друга на расстояние  $r_0$  (расстояние минимума потенциальной энергии). Если бы это было не так, и вероятность не очень сильно зависела от удаления от равновесной конфигурации, то мы обнаружили бы, что кислород есть смесь сравнимых количеств  $O_2$  и одиночных атомов кислорода. А мы знаем, что в кислороде присутствует очень мало одиночных атомов кислорода, а это означает, что глубина потенциальной ямы значительно больше  $kT$ , и это как раз мы и предполагали. Но раз атомы, составляющие молекулу, прочно закреплены на расстоянии  $r_0$ , то нам понадобится лишь часть потенциальной кривой вблизи минимума, которую в этом случае можно приближенно заменить параболой. Параболический потенциал соответствует гармоническому осциллятору, и, в самом деле, отличной моделью молекулы кислорода могут служить два соединенных пружинкой атома.

Но чему же равна полная энергия молекулы при температуре  $T$ ? Мы знаем, что кинетическая энергия каждого из атомов равна  $\frac{3}{2}kT$ , так что кинетическая энергия обоих атомов равна  $\frac{3}{2}kT + \frac{3}{2}kT$ . Можно распределить эту энергию иначе:

тогда те же самые  $\frac{3}{2}$  плюс  $\frac{3}{2}$  будут выглядеть как кинетическая энергия центра масс ( $\frac{3}{2}$ ), кинетическая энергия вращения ( $\frac{2}{2}$ ) и кинетическая энергия колебаний ( $\frac{1}{2}$ ). Известно, что на долю кинетической энергии колебаний приходится  $\frac{1}{2}$ , потому что это одномерное движение, а каждой степени свободы соответствует  $\frac{1}{2}kT$ . Обращаясь к вращениям, мы можем выделить две оси вращения, что соответствует двум независимым движениям. Мы представляем себе атомы в виде точек, которые не могут вращаться вокруг соединяющей их линии. Но на всякий случай напомним о таком предположении, потому что если мы упрямся где-то в тупик, то, может быть, здесь обнаружится корень зла. Нас должен интересовать еще и другой вопрос: чему равна потенциальная энергия колебаний, велика ли она? Средняя потенциальная энергия гармонического осциллятора равна средней кинетической энергии, т. е. также  $\frac{1}{2}kT$ . Полная энергия молекулы  $U = \frac{7}{2}kT$ , или  $kT = \frac{2}{7}U$  на атом. Это означает, что  $\gamma$  равно  $\frac{9}{7}$ , а не  $\frac{5}{3}$ , т. е.  $\gamma = 1,286$ .

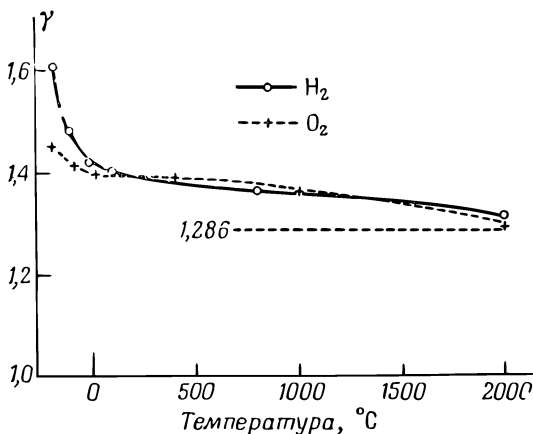
Можно сравнить эти числа с действительно измеренными значениями  $\gamma$ , приведенными в табл. 40.1. Взгляните сначала на гелий; это одноатомный газ, и значение  $\gamma$  очень близко к  $\frac{5}{3}$ ; отклонение от этого значения, вероятно, есть просто следствие экспериментальных неточностей, хотя при столь низких температурах между атомами могут появиться силы взаимодействия. Криптон и аргон — еще два одноатомных газа — также дают согласующиеся значения в пределах ошибки эксперимента.

Таблица 40.1

● ИЗМЕРЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  $\gamma$   
ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ГАЗОВ

Газ	T, °C	$\gamma$	Газ	T, °C	$\gamma$
He	-180	1,660	HI	100	1,40
Kr	19	1,68	Br <sub>2</sub>	300	1,32
Ar	15	1,668	I <sub>2</sub>	185	1,30
H <sub>2</sub>	100	1,404	NH <sub>3</sub>	15	1,310
O <sub>2</sub>	100	1,399	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	15	1,22

Перейдем к двухатомным газам. Тут же обнаружится, что значение  $\gamma$  для водорода, равное 1,404, не согласуется с теоретическим значением 1,286. Очень близкое значение дает и кислород, 1,399, но с теоретическим это снова не согласуется. Для иодистого водорода  $\gamma$  равно просто 1,40. Начинает казаться, что мы нашли общий закон: для двухатомных молекул  $\gamma$  равно 1,40. Но нет, поглядите дальше. Для брома мы получаем 1,32, а для иода 1,30. Поскольку 1,30 довольно близ-



Фиг. 40.б. Экспериментальные значения  $\gamma$  как функция температуры для водорода и кислорода. Классическая теория предсказывает не зависящее от температуры значение  $\gamma = 1,286$ .

ко к 1,286, то можно считать, что экспериментальное значение  $\gamma$  для иода согласуется с теоретическим, а кислород представляет собой исключение. Это уже неприятно. То, что верно для одной молекулы, неверно для другой, и нам, по-видимому, надо проявить хитроумие, чтобы объяснить это.

Давайте рассмотрим еще более сложные молекулы, состоящие из большого числа частей, например  $C_2H_6$  — этан. Молекула атома состоит из восьми разных атомов, и все они качаются и вращаются в самых разных комбинациях, так что полная величина внутренней энергии должна складываться из огромного числа  $kT$ , по крайней мере  $12 kT$  только для одной кинетической энергии, поэтому  $\gamma - 1$  должно быть очень близко к нулю, а  $\gamma$  почти в точности равно единице. И действительно, значение  $\gamma$  для этана *меньше*, чем в предыдущих случаях, но 1,22 — не так уж мало, во всяком случае, больше  $1 \frac{1}{12}$ , чему должно быть равно  $\gamma$ , если учесть только кинетическую энергию. Этого вообще нельзя понять!

Ну а дальше совсем плохо, ибо двухатомную молекулу нельзя рассматривать как абсолютно жесткую, даже в пределе. Даже если связь между атомами так сильна, что они не могут и пошевелиться, все равно нужно считать, что они колеблются. Колебательная энергия всегда равна  $kT$ , поскольку она не зависит от силы связи. Но если представить себе двухатомную молекулу *абсолютно* жесткой, остановить колебания и выбросить эту степень свободы, то мы получим  $U = \frac{5}{2}kT$  и  $\gamma = 1,40$  для двухатомных газов. Казалось бы, это подходит и для  $H_2$ , и для  $O_2$ . Но вопрос по-прежнему остается открытым, потому что  $\gamma$  и для кислорода, и для водорода зависит от температуры! На фиг. 40.б показаны результаты нескольких измерений. Для  $H_2$  значение  $\gamma$  изме-

няется от 1,6 при  $-185^{\circ}\text{C}$  до 1,3 при  $2000^{\circ}\text{C}$ . В случае водорода изменения  $\gamma$  еще больше, но и в случае кислорода  $\gamma$  явно стремится возрасти при падении температуры.

## § 6. Поражение классической физики

Итак, приходится сказать, что мы натолкнулись на трудности. Можно соединить атомы не пружинкой, а чем-нибудь другим, но оказывается, что это только увеличит значение  $\gamma$ . Если пустить в ход другие виды энергии, то вопреки фактам  $\gamma$  очень приблизится к единице. Все известное нам из классической теоретической физики только ухудшает положение. Нам известно, например, что каждый атом содержит электроны, и атомные спектры обязаны своим существованием внутренним движениям электронов; каждый электрон должен иметь по крайней мере  $\frac{1}{2}kT$  кинетической энергии и еще кое-что из потенциальной, а когда все это складывается, то  $\gamma$  становится еще меньше. Просто смешно. И явно что-то не так.

Первая замечательная работа по динамической теории газов была сделана Максвеллом в 1859 г. Исходя из идей, с которыми мы только что познакомились, он сумел точно объяснить очень много известных явлений, таких, как закон Бойля, теорию диффузии, вязкость газов и другие вещи, о которых мы еще будем говорить в следующей главе. Подводя итог всем этим великим достижениям, он писал: «Наконец, установив необходимое соотношение между поступательным и вращательным движением несферических частиц (он имел в виду теорему о  $\frac{1}{2}kT$ ), мы доказали, что в системе из таких частиц не может выполняться известное соотношение между двумя теплоемкостями». Он говорит здесь о  $\gamma$  (позднее мы увидим, что эта величина связана с двумя разными способами измерения удельной теплоемкости) и замечает, что никто не в состоянии дать верного ответа.

В прочитанной десять лет спустя лекции он сказал: «Я должен изложить Вам то, что я считаю наибольшей трудностью, стоящей перед молекулярной теорией». Это было первое указание на ложность законов классической физики, первое предчувствие того, что существует нечто, не объясненное с самого начала, ибо опыту противоречила строго доказанная теорема.

Примерно в 1890 г. Джинс заговорил вновь об этой загадке. Часто приходится слышать, что физики конца девятнадцатого столетия были уверены в том, что им известны все существенные законы природы и дело стоит лишь за тем, чтобы получить нужные числа с максимальным числом десятичных знаков. Кто-то это сказал, а остальные повторяют. Но если покопаться в физических журналах тех лет, то станет

ясно, что почти каждый из них в чем-нибудь да сомневался. Джинс говорил об этой проблеме как о загадочном явлении, из которого как будто бы следует, что по мере падения температуры некоторые виды движения «замерзают».

Если бы мы могли предположить, что колебаний при низких температурах нет и возникают они только при высоких температурах, то можно было бы представить существование такого газа, у которого при очень низкой температуре колебательного движения нет совсем, так что  $\gamma = 1,40$ , а при высоких температурах возникают колебания и, следовательно,  $\gamma$  убывает. То же самое можно предположить и о вращениях. Если бы можно было избавиться от вращений, скажем, «заморозить» их, понизив достаточно температуру, то стало бы понятно, почему при низких температурах для водорода  $\gamma$  приближается к 1,66. Но как же понять все это? Конечно, оставаясь в рамках классической механики, «замерзающих» движений нельзя объяснить. Все стало на свои места лишь после открытия квантовой механики.

Мы сформулируем без доказательства основные результаты статистической механики, построенной на основе квантовой механики. Напомним, что, согласно квантовой механике, связанная потенциалом система, например осциллятор, имеет дискретный набор уровней энергии, т. е. состояний с различной энергией. Возникает вопрос: как модифицировать статистическую механику, чтобы привести ее в согласие с квантовой механикой? Обратите внимание на интересную деталь: хотя большинство задач квантовой механики сложнее соответствующих задач классической физики, проблемы статистической механики решаются с помощью квантовой теории много проще!

Простенький результат классической механики, что  $n = n_0 \exp(-\text{энергия}/kT)$ , становится в квантовой теории весьма важной теоремой: если набор молекулярных состояний характеризуется энергиями  $E_0, E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ , то в случае теплового равновесия вероятность найти молекулу в состоянии с энергией  $E_i$  пропорциональна  $\exp(-E_i/kT)$ . Так определяется вероятность пребывания в различных состояниях. Иначе говоря, относительный шанс — вероятность нахождения в состоянии  $E_1$  по сравнению с вероятностью нахождения в состоянии  $E_0$  равен

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_0/kT}}; \quad (40.10)$$

это, конечно, то же самое, что и

$$n_1 = n_0 e^{-(E_1 - E_0)/kT}, \quad (40.11)$$

потому что  $P_1 = n_1/N$ , а  $P_0 = n_0/N$ . Таким образом, состояния с большей энергией менее вероятны, чем состояние

с меньшей энергией. Отношение числа атомов в верхнем состоянии к числу атомов в нижнем состоянии равно  $e$  в степени (разность энергий, деленная на  $kT$ , с обратным знаком) — очень простая теорема.

Обратим внимание на то, что уровни энергии гармонического осциллятора отстоят друг от друга на равных расстояниях. Припишем низшему уровню энергию  $E_0 = 0$  (на самом деле эта энергия немного отличается от нуля, но сдвиг всех уровней на одну и ту же величину не имеет значения), тогда энергия следующего уровня  $E_1 = \hbar\omega$ , затем следует  $2\hbar\omega$ ,  $3\hbar\omega$  и т. д.

А теперь посмотрим, что из этого получится. Предположим, что мы изучаем колебания двухатомной молекулы, которую можно сейчас считать гармоническим осциллятором. Каковы относительные шансы найти молекулу в состоянии  $E_1$ , а не в состоянии  $E_0$ ? *Ответ:* Отношение шанса найти молекулу в состоянии  $E_1$  к шансу найти эту молекулу в состоянии  $E_0$  равно  $\exp(-\hbar\omega/kT)$ . Предположим, что  $kT$  много меньше  $\hbar\omega$ , т. е. мы находимся в области низких температур. Тогда вероятность обнаружить состояние  $E_1$  чрезвычайно мала. Практически все молекулы находятся в состоянии  $E_0$ . Если изменить температуру, но по-прежнему поддерживать ее очень малой, то шанс найти молекулу в состоянии  $E_1 = \hbar\omega$  по-прежнему бесконечно мал — энергия осциллятора все еще почти равна нулю; она не изменяется с температурой, пока температура остается много меньше  $\hbar\omega$ . Все осцилляторы находятся в низшем состоянии, их движение эффе́ктивно «заморожено», и они *не дают вклада в теплоемкость*. С помощью данных табл. 40.1 можно установить, что при  $100^\circ\text{C}$ , а это равно  $373^\circ\text{K}$  (абсолютной температуры),  $kT$  много меньше колебательной энергии молекул кислорода и водорода, но сравнимо с колебательной энергией иода. Причина такой разницы в том, что атомы иода гораздо тяжелее атомов водорода и, хотя силы, действующие между атомами иода и водорода, сравнимы, молекула иода столь тяжела, что собственная частота ее колебаний чрезвычайно мала по сравнению с собственной частотой водорода. При комнатной температуре  $kT$  таково, что  $\hbar\omega$  водорода больше  $kT$ , а  $\hbar\omega$  иода — меньше. Поэтому классическую колебательную энергию можно обнаружить только у иода.

Если увеличивать температуру газа, начав с очень малых значений  $T$ , когда почти все молекулы находятся в их низшем состоянии, то появляется ощутимая вероятность найти молекулу во втором состоянии, затем в следующем за ним и т. д. Когда много состояний получают заметную вероятность, газ ведет себя более или менее так, как того требует классическая физика, ведь в этом случае систему квантовых состояний труд-

но отличить от непрерывного распределения энергии, и система может обладать почти любой энергией. Таким образом, при повышении температуры мы снова попадаем в область классической физики, как это видно из фиг. 40.6. Аналогично можно показать, что точно так же квантуются и вращательные состояния атомов, но эти состояния размещены так тесно, что обычно  $kT$  больше расстояния между уровнями. В этом случае возбуждено сразу много уровней и вращательная кинетическая энергия системы ведет себя классически. Лишь водород при комнатных температурах ведет себя иначе.

Это первый случай, когда из сравнения с экспериментом обнаружилось, что с классической физикой что-то неблагополучно; мы искали способы уладить все трудности в квантовой механике тем самым путем, каким это происходило на самом деле. Прошло примерно лет 30 или 40, пока не была обнаружена еще одна трудность, и снова в статистической механике, но на этот раз в механике фотонного газа. Новая задача была решена Планком в первые годы нашего столетия.

## БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

### § 1. Равнораспределение энергии

Броуновское движение открыл в 1827 г. ботаник Роберт Броун. Изучая жизнь под микроскопом, он заметил, что мельчайшие частицы цветочной пыльцы пляшут в его поле зрения; в то же время он был достаточно сведущ, чтобы понимать, что перед ним не живые существа, а просто плавающие в воде соринки. Чтобы окончательно доказать, что это не живые существа, Броун разыскал обломок кварца, внутри которого была заполненная водой полость. Вода попала туда много миллионов лет назад, но и в такой воде соринки все продолжали свою пляску. Казалось, что очень мелкие частицы пляшут непрерывно. Позднее было доказано, что это один из эффектов *молекулярного движения* и понять его качественно можно, представив себе, что мы откуда-то издалека следим за игрой в пушбол. Мы знаем, что под большим мячом движется толпа людей и каждый толкает мяч, куда хочет. Мы не видим отдельных игроков, потому что поле очень далеко от нас, но мяч мы видим и замечаем, что перемещается он очень беспорядочно. Мы уже знаем из разобранных в предыдущих главах теорем, что средняя кинетическая энергия взвешенной в газе или жидкости маленькой частицы равна  $\frac{3}{2} kT$ , даже если эта частица гораздо тяжелее молекул газа. Если она очень тяжела, то и движется она сравнительно медленно, но на самом деле оказывается, что скорость частицы не так уж мала. Конечно, заметить движение частицы не очень легко, потому что средняя кинетическая энергия  $\frac{3}{2}kT$  соответствует скорости около 1 мм/сек, если диаметр частицы

§ 1. Равнораспределение энергии

§ 2. Тепловое равновесие излучения

§ 3. Равномерное распределение и квантовый осциллятор

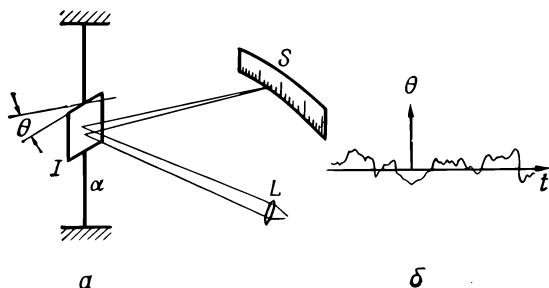
§ 4. Случайные блуждания



равен 1—2 мк. Такое движение трудно заметить даже под микроскопом, потому что частица постоянно меняет направление своего движения и пойти в какую-нибудь определенную сторону не желает. В конце главы мы посмотрим, далеко ли она может уйти. Этот вопрос впервые был разрешен Эйнштейном в начале нашего столетия.

Между прочим, когда говорят, что средняя кинетическая энергия частицы равна  $\frac{3}{2}kT$ , то требуют, чтобы этот результат был выведен из кинетической теории, т. е. из законов Ньютона. Мы уже можем получать разные удивительные вещи с помощью кинетической теории, самое интересное — что удастся получить так много из столь малого. Конечно, мы не хотим сказать, что законы Ньютона — это «малое», они на самом деле дают все необходимое для решения задачи, просто нам пришлось потрудиться совсем немного. Как же нам удалось так много получить? Просто мы постоянно исходили из очень важного предположения, что если заданная система находится при некоторой температуре в тепловом равновесии, то при той же температуре она будет в равновесии с *чем угодно*. Скажем, нам хочется посмотреть, как движется частица, если она сталкивается с водой.

Для этого представим, что, кроме воды и частицы, есть еще и газ, состоящий из частиц еще одного сорта — маленьких дробинок, которые, как мы предполагаем, с водой не взаимодействуют и только сильно ударяют по нашей частице. Предположим, что частица оцетинилась острыми шипами и все дробины наталкиваются на них. Об этом воображаем газе из дробинок при температуре  $T$  нам известно все — это идеальный газ. Вода — дело сложное, а идеальный газ — он проще. И вот *наша частица находится в равновесии с газом из дробинок*. Следовательно, среднее движение частицы должно быть таким, каким ему следует быть вследствие столкновений с атомами, потому что если бы частица двигалась относительно воды с большей скоростью, чем положено, то дробины, отняв у частицы часть ее энергии, нагрелись бы больше, чем вода. Но ведь мы начали с равных температур и предпола-



Фиг. 41.1. Чувствительный зеркальный гальванометр и образец записи шкалы как функция времени.

Пучок света из источника  $L$  отражается от маленького зеркальца на шкале.

гаем, что если равновесие однажды наступило, то оно таким и останется; не может вдруг одна часть системы нагреться, а другая остыть.

Это предположение справедливо, и его можно доказать, используя законы механики, но доказательство очень сложно и понять его можно, только хорошо зная механику. С помощью квантовой механики доказать это гораздо легче, чем с помощью классической. Впервые эту теорему доказал Больцман, а мы, приняв, что она верна, можем утверждать, что если частица сталкивается с воображаемыми дробинками, то ее энергия равна  $\frac{3}{2}kT$ . Но этой же самой энергией она должна обладать, если мы удалим дробинки и оставим частицу наедине с водой при такой же температуре. Это странная, но правильная цепь рассуждений.

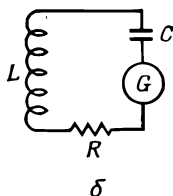
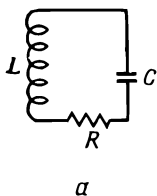
Кроме движения коллоидных частиц, на которых и было впервые открыто броуновское движение, имеется еще целый ряд других явлений, и не только в лабораторных, но и в других условиях, позволяющих обнаружить броуновское движение. Если бы мы смогли соорудить чрезвычайно тонкое измерительное устройство, скажем, крохотное зеркальце, прикрепленное к тонкой кварцевой нити очень чувствительного баллистического гальванометра (фиг. 41.1), то зеркальце не стояло бы на месте, а *непрерывно* плясало бы, поэтому если бы мы осветили это зеркальце лучом света и проследили за отраженным пятном, то потеряли бы надежду создать совершенный измерительный инструмент, так как зеркальце все время пляшет. Почему? Потому что средняя кинетическая энергия вращения зеркальца равна  $\frac{1}{2}kT$ .

Чему равен средний квадратичный угол качаний зеркальца? Предположим, что мы определили период собственных колебаний зеркальца, стукнув слегка по одной его стороне и наблюдая, как долго будет оно качаться взад и вперед, и пусть нам также известен момент инерции  $I$ . Формулу для кинетической энергии вращения мы знаем, это равенство (19.8):  $T = \frac{1}{2}I\omega^2$ . А потенциальная энергия пропорциональна квадрату угла отклонения, т. е.  $V = \frac{1}{2}\alpha\theta^2$ . Но если мы знаем период колебаний  $t_0$  и можем вычислить собственную частоту  $\omega_0 = 2\pi/t_0$ , то можно и потенциальную энергию записать в виде  $V = \frac{1}{2}I\omega_0^2\theta^2$ . Мы знаем, что средняя кинетическая энергия равна  $\frac{1}{2}kT$ , но поскольку перед нами гармонический осциллятор, то средняя потенциальная энергия также равна  $\frac{1}{2}kT$ . Следовательно,

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 \langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

или

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{kT}{I\omega_0^2}. \quad (41.1)$$



Фиг. 41.2. Резонансная цепь с большим  $Q$ .  
 а — реальная цепь при температуре  $T$ ;  
 б — искусственная цепь с идеальным (бесшумным) сопротивлением и «генератором шума».

Таким образом мы можем рассчитать колебания зеркальца гальванометра и тем самым найти предел точности нашего инструмента. Если нам нужно уменьшить колебания, то следует охладить зеркальце. Но здесь возникает интересный вопрос — в каком месте его охладить? Все зависит от того, откуда оно получает больше «пинков». Если в колебаниях повинна кварцевая нить, то охлаждать нужно ее верхний конец, если же зеркальце находится в газовой среде и раскачивается в основном за счет соударений с молекулами газа, то лучше охладить газ. Итак, практически, если известно, почему происходит *затухание* колебаний, то оказывается, что имеется всегда какой-то источник флуктуаций; к этому вопросу мы еще вернемся.

Те же флуктуации работают, и довольно удивительным образом, в *электрических цепях*. Предположим, что мы построили очень чувствительный, точный усилитель для какой-нибудь определенной частоты и к его входу подключили резонансную цепь (фиг. 41.2), настроенную на эту же частоту, наподобие радиоприемника, только получше. Предположим, что мы захотели как можно точнее изучить флуктуации, для этого мы сняли напряжение, скажем, с индуктивности и подали его на усилитель. Конечно, во всякой цепи такого рода имеются некоторые потери. Это не идеальная резонансная цепь, но все же очень хорошая цепь, и обладает она малым сопротивлением (на схеме сопротивление показано, надо только помнить, что оно очень мало). А теперь мы хотим узнать, как велики флуктуации падения напряжения на индуктивности? *Ответ:* Нам известно, что «кинетическая энергия», запасенная катушкой резонансной цепи, равна  $\frac{1}{2}LI^2$  (см. гл. 25). Поэтому среднее значение  $\frac{1}{2}LI^2$  равно  $\frac{1}{2}kT$ , это дает нам среднее квадратичное значение тока, а отсюда можно определить и среднее квадратичное значение напряжения. Если мы хотим знать падение напряжения на индуктивности, нам пригодится формула  $V_L = i\omega LI$ , тогда средний квадрат модуля падения напряжения на индуктивности равен  $\langle V_L^2 \rangle = L^2\omega_0^2 \langle I^2 \rangle$ , а полагая  $\frac{1}{2}L \langle I^2 \rangle = \frac{1}{2}kT$ , получаем

$$\langle V_L^2 \rangle = L\omega_0^2 kT. \quad (41.2)$$

Итак, теперь мы можем рассчитать контур и предсказать, каким в нем будет так называемый шум Джонсона, т. е. шум, связанный с тепловыми флуктуациями!

Но откуда же эти флуктуации берутся? А все из-за *сопротивления*, точнее говоря, в результате пляски электронов в сопротивлении. Ведь они находятся в тепловом равновесии с остальным материалом сопротивления, а это приводит к флуктуациям плотности электронов. Таким образом они порождают крошечные электрические поля, управляющие резонансной цепью.

Инженеры-электрики объясняют все это иначе. Физически источником шумов служит сопротивление. Однако можно заменить реальную цепь с обычным сопротивлением, вызывающим шумы, фиктивной цепью, содержащей маленький генератор, который якобы порождает шумы, а сопротивление теперь будет идеальным — оно уже не шумит. Все шумы теперь исходят от фиктивного генератора. Итак, если нам известны характеристики шума, порождаемого сопротивлением, и у нас для этого имеется подходящая формула, то можно рассчитать, как цепь реагирует на этот шум. Следовательно, нам нужна формула для шумовых флуктуаций. Сопротивление одинаково хорошо порождает шумы всех частот, поскольку оно само отнюдь не резонатор. Резонансная цепь, конечно, «слышит» лишь часть этого шума вблизи определенной частоты, а в сопротивлении заключено много и других частот. Силу генератора можно описать таким образом: выделяемая на сопротивлении средняя мощность, если оно непосредственно соединено с генератором шума, равна  $\langle E^2 \rangle / R$ , где  $E$  — снимаемое с генератора напряжение. Но теперь мы хотим знать подробнее о распределении мощности по частотам. Каждой определенной частоте соответствует очень малая мощность. Пусть  $P(\omega) d\omega$  — мощность, которую генератор посылает сопротивлению в интервале частот  $d\omega$ . Тогда можно доказать (мы докажем это для другого случая, но математика и там и тут одинакова), что выделяемая мощность равна

$$P(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} kT d\omega \quad (41.3)$$

и, таким образом, *не зависит от сопротивления*.

## § 2. Тепловое равновесие излучения

Мы приступаем к обсуждению более сложной и интересной теоремы, суть которой состоит в следующем. Предположим, что у нас имеется заряженный осциллятор, вроде того, о котором мы говорили, когда речь шла о свете. Пусть это будет электрон, колеблющийся в атоме вверх и вниз. А раз он колеблется, то излучает свет. Предположим теперь, что этот

осциллятор попал в сильно разреженный газ, состоящий из других атомов, и время от времени эти атомы с ним сталкиваются. Когда в конце концов наступит равновесие, осциллятор приобретает такую энергию, что кинетическая энергия колебаний будет равна  $\frac{1}{2}kT$ , а поскольку это гармонический осциллятор, то полная энергия движения станет равной  $kT$ .

Это, конечно, неверно, потому что осциллятор несет *электрический заряд*, а поскольку он обладает энергией  $kT$ , то, качаясь вверх и вниз, он *излучает свет*. Поэтому невозможно получить равновесие только самого вещества без того, чтобы заряды не излучали свет, а когда свет излучается, утекает энергия, осциллятор со временем растрчивает энергию  $kT$ , а окружающий газ, сталкивающийся с осциллятором, постепенно остывает. Именно таким образом остывает за ночь натопленная с вечера печка, выпуская все тепло в воздух. Прыгающие в ее кирпичах атомы заряжены и непрерывно излучают, а в результате этого излучения танец атомов постепенно замедляется.

Но если заключить все атомы и осцилляторы в ящик, так чтобы свет не смог уйти в бесконечность, тепловое равновесие *может* наступить. Мы можем поместить газ в ящик, в стенках которого есть и другие излучатели, испускающие свет внутрь ящика, а еще лучше соорудить ящик с зеркальными стенками. Этот пример поможет лучше понять, что произойдет. Итак, мы предполагаем, что все излучение от осциллятора остается внутри ящика. Осциллятор и в этом случае начинает излучать, но довольно скоро он все же соберет свое значение  $kT$  кинетической энергии. Происходит это потому, что сам осциллятор будет освещаться, так сказать, собственным светом, отраженным от стенок ящика. Вскоре в ящике будет много света и, хотя осциллятор продолжает излучать, часть света будет возвращаться и возмещать осциллятору потерянную им энергию.

А теперь подсчитаем, насколько должен быть освещен ящик при температуре  $T$ , чтобы рассеяние света на осцилляторе обеспечивало его как раз такой энергией, какая нужна для поддержания излучения. Пусть атомов в ящике совсем немного и находятся они далеко друг от друга, так что наш осциллятор идеальный, не имеющий иного трения, кроме радиационного. Теперь заметим, что при тепловом равновесии осциллятор делает сразу два дела. Во-первых, он излучает, и мы можем подсчитать энергию излучения. Во-вторых, он в возмещение получает точно такое же количество энергии в результате рассеяния на нем света. Поскольку энергия ниоткуда больше притечь не может, то эффективное излучение — это как раз та часть «общего света», которая рассеялась на осцилляторе.

Таким образом, прежде всего мы вычисляем энергию, излучаемую в 1 сек осциллятором с заданной энергией. (Мы позаимствуем для этого в гл. 32, посвященной радиационному трению, несколько равенств и не будем здесь приводить их выводы.) Отношение энергии, излученной за радиан, к энергии осциллятора называется  $1/Q$  [см. уравнение (32.8)]:  $1/Q = (dW/dt)/\omega_0 W$ . Используя величину  $\gamma$  (постоянную затухания), можно записать это в виде  $1/Q = \gamma/\omega_0$ , где  $\omega_0$  — собственная частота осциллятора, если  $\gamma$  очень мало, а  $Q$  очень велико. Излученная за 1 сек энергия равна

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\omega_0 W}{Q} = \frac{\omega_0 W \gamma}{\omega_0} = \gamma W. \quad (41.4)$$

Излученная за 1 сек энергия просто равна произведению  $\gamma$  на энергию осциллятора. Средняя энергия нашего осциллятора равна  $kT$ , поэтому произведение  $\gamma$  на  $kT$  — это среднее значение излученной за 1 сек энергии:

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \gamma kT. \quad (41.5)$$

Теперь нам нужно только узнать, что такое  $\gamma$ . Эту величину легко найти из уравнения (32.12):

$$\gamma = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2}{c}, \quad (41.6)$$

где  $r_0 = e^2/mc^2$  — классический радиус электрона, и мы положили  $\lambda = 2\pi c/\omega_0$ .

Окончательный результат для средней скорости излучения света вблизи частоты  $\omega_0$  таков:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2}{c} kT. \quad (41.7)$$

Теперь надо выяснить, сильно ли должен быть освещен осциллятор. Освещение должно быть таким, чтобы поглощенная осциллятором энергия (и впоследствии рассеянная) была в точности равна предыдущей величине. Иначе говоря, излученный свет — это свет, *рассеянный* при освещении осциллятором в полости. Итак, нам остается рассчитать, сколько света рассеивается осциллятором, если на него падает какая-то — неизвестная — доза излучения. Пусть  $I(\omega)d\omega$  — энергия света частоты  $\omega$  в интервале частот  $d\omega$  (ведь у нас нет света *точно* заданной частоты; излучение распределено по спектру). Таким образом,  $I(\omega)$  — это *спектральное распределение*, которое нам надо найти. Это тот цвет огня, который мы увидим внутри печи при температуре  $T$ , если откроем дверцу и заглянем

внутри. Сколько же все-таки света поглотится? Мы уже определяли количество излучения, поглощаемого из заданного падающего пучка света, и выразили его через *эффективное сечение*. Это соответствует тому, как если бы мы предполагали, что весь свет, падающий на площадку определенной площади, поглощается. Таким образом, полная переизлученная (рассеянная) интенсивность равна произведению интенсивности падающего света  $I(\omega)d\omega$  на эффективное сечение  $\sigma$ .

Мы вывели формулу для эффективного сечения [см. уравнение (32.19), вып. 3], не включающую затухания. Нетрудно повторить этот вывод снова и учесть трение, которым мы тогда пренебрегли. Если это сделать, то, вычисляя эффективное сечение по прежнему образцу, мы получим

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3} \left( \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right). \quad (41.8)$$

Пойдем дальше;  $\sigma_s$  как функция частоты имеет более или менее заметную величину только для  $\omega$  около собственной частоты  $\omega_0$ . (Вспомним, что для излучающего осциллятора  $Q$  — порядка  $10^8$ .) Когда  $\omega$  равна  $\omega_0$ , осциллятор рассеивает очень сильно, а при других значениях  $\omega$  он почти не рассеивает совсем. Поэтому можно заменить  $\omega$  на  $\omega_0$ , а  $\omega^2 - \omega_0^2$  на  $2\omega_0(\omega - \omega_0)$ ; тогда

$$\sigma_s = \frac{2\pi r_0^2 \omega_0^2}{3 [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (41.9)$$

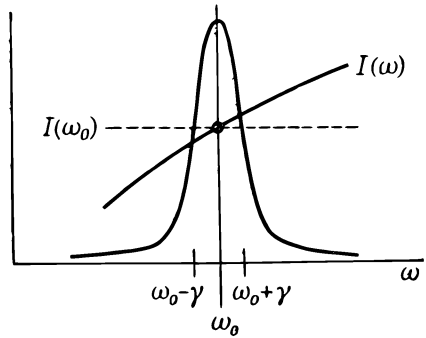
Теперь почти вся кривая загнана в область около  $\omega = \omega_0$ . (Фактически мы не должны делать никаких приближений, но легче иметь дело с интегралом, в котором подынтегральное выражение несколько проще.) Если умножить интенсивность в данном интервале частот на эффективное сечение рассеяния, то получится энергия, рассеянная в интервале  $d\omega$ . *Полная* рассеянная энергия — это интеграл по всем  $\omega$ . Таким образом,

$$\frac{dW_s}{dt} = \int_0^\infty I(\omega) \sigma_s(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{2\pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega) d\omega}{3 [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (41.10)$$

Теперь мы положим  $dW_s/dt = 3\gamma kT$ . Но почему здесь стоит 3? Потому что в гл. 32 мы предполагали, что свет поляризован так, что может раскачивать осциллятор. Если бы мы использовали осциллятор, способный раскачиваться только в одном направлении, а свет был бы, скажем, поляризован неверно, то он не рассеивался бы совсем. Поэтому мы должны либо усреднить эффективное сечение рассеяния на осцилляторе, способном раскачиваться только в одном направлении, по всем на-

Фиг. 41.3. Множители подынтегрального выражения (41.10).

Пик — это резонансная кривая  $I/((\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4)$ . Множитель  $I(\omega)$  можно с хорошим приближением заменить на  $I(\omega_0)$ .



правлениям падающих пучков и поляризации света в пучке, либо, что легче сделать, представить себе, что наш осциллятор послушно следует за полем, каким бы оно ни было там, где он находится. Такой осциллятор, который одинаково легко раскачивается в любом из трех направлений, имеет среднюю энергию  $3kT$ , потому что у него 3 степени свободы. А раз 3 степени свободы, то надо писать  $3\gamma kT$ .

Займемся теперь интегралом. Предположим, что неизвестное спектральное распределение света  $I(\omega)$  — это плавная кривая, которая в той узкой области частот, где  $\sigma_s$  имеет острый максимум, меняется не слишком сильно (фиг. 41.3). Тогда сколько-нибудь существенный вклад в интеграл дают только частоты, близкие к  $\omega_0$  и отстоящие от нее на очень малую величину  $\gamma$ . Поэтому, хотя  $I(\omega)$  неизвестна и, может быть, сложная функция, важно только ее поведение около  $\omega = \omega_0$  и можно заменить плавную кривую еще более ровной — «постоянной» — всюду одной высоты. Иначе говоря, мы просто вынесем  $I(\omega)$  из-под знака интеграла и назовем это  $I(\omega_0)$ . Вынесем за интеграл и остальные постоянные и тогда получим

$$\frac{2}{3} \pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega_0) \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} = 3\gamma kT. \quad (41.11)$$

Интеграл берется от 0 до  $\infty$ , но 0 отстоит так далеко от  $\omega_0$ , что кривая за это время идет почти вдоль оси абсцисс, поэтому заменим 0 на  $-\infty$ , разница небольшая, а интеграл взять легче. Интеграл вида  $\int dx/(x^2 + a^2)$  приводит к арктангенсу. Если взглянуть в справочник, то мы увидим, что он равен  $\pi/a$ . Итак, для нашего случая это  $2\pi/\gamma$ . После небольших манипуляций мы получаем

$$I(\omega_0) = \frac{9\gamma^2 kT}{4\pi^2 r_0^2 \omega_0^2}. \quad (41.12)$$



Затем мы подставим сюда формулу (41.6) для  $\gamma$  (мы уже не будем стараться писать  $\omega_0$ ; раз это верно для любой  $\omega_0$ , то можно назвать ее просто  $\omega$ ), и формула для  $I(\omega)$  примет вид

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 k T}{\pi^2 c^2}. \quad (41.13)$$

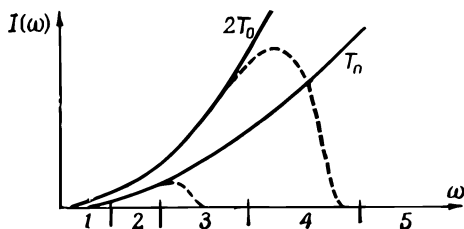
Она и определяет распределение света в горячей печи. Это так называемое излучение *абсолютно черного тела*. Черного потому, что, если заглянуть в топку печи при абсолютном нуле, она будет черной.

Формула (41.13) задает распределение энергии излучения внутри ящика при температуре  $T$  согласно классической теории. Отметим сначала замечательную особенность этого выражения. Заряд осциллятора, масса осциллятора, все частные его свойства *выпали* из формулы; ведь если мы достигли равновесия с одним осциллятором, мы должны позаботиться о равновесии и с любым другим осциллятором другой массы, иначе будут неприятности. Таким образом, это важный способ проверки нашей теоремы о том, что равновесие зависит *только от температуры*, а не от того, что приводит к равновесию. Теперь можно начертить кривую  $I(\omega)$  (фиг. 41.4). Она покажет нам, какова освещенность при разных частотах.

В выражение для интенсивности в ящике на единицу частоты входит, как видно, квадрат частоты; это значит, что если взять ящик при любой температуре, то в нем обнаружится бездна рентгеновских лучей!

Мы знаем, конечно, что это неверно. Когда мы открываем печку и заглядываем в нее, мы не портим глаз рентгеновскими лучами. Дальше — хуже, *полная энергия* ящика, полная интенсивность, просуммированная по всем частотам, должна быть площадью под этой уходящей в бесконечность кривой. Итак, здесь что-то совсем неверно в самой основе.

Это значит, что классическая теория *совершенно непригодна* для правильного описания распределения излучения черного тела, так же как и для описания теплоемкостей газов. Физики ходили вокруг этого вывода, рассматривали его с различных точек зрения и не нашли выхода. Это *предска-*



Фиг. 41.4. Распределение интенсивности излучения черного тела при двух температурах.

Сплошные кривые — согласно классической теории; пунктирные — настоящее распределение. 1 — радио; 2 — инфракрасное; 3 — видимое; 4 — ультрафиолетовое; 5 — рентгеновские лучи.

зание классической физики. Уравнение (41.13) называется *законом Рэлея*, предсказано оно классической физикой и до очевидности абсурдно.

### § 3. *Равномерное распределение и квантовый осциллятор*

Только что отмеченная трудность — это еще одна сторона проблемы непрерывности в классической физике, она началась с непорядка в теплоемкостях газов, а потом эта проблема сконцентрировалась на распределении света в черном теле. Конечно, пока теоретики обсуждали эти вещи, производились еще и *измерения* настоящих кривых. И было установлено, что правильная кривая выглядит так, как пунктирные кривые на фиг. 41.4. Никаких рентгеновских лучей там нет. Если понижать температуру, то кривые приближаются к оси абсцисс примерно так, как того требует классическая теория, но и при низкой температуре опытные кривые тоже в конце обрываются.

Таким образом, начало кривой распределения правильно описывает опыт, а ее высокочастотный конец сбивается с верного пути. Почему же так? Когда Джеймс Джинс размышлял о теплоемкостях газов, он заметил, что движение, совершаемое с большой частотой, «замерзает» при понижении температуры. Значит, осциллятор *не может* обладать средней энергией  $kT$ , если температура слишком мала или если частота колебаний слишком велика. А теперь вспомним, как мы выводили (41.13). Все зависело от энергии осциллятора при тепловом равновесии. Когда мы подставляли  $kT$  в (41.5), это было то же  $kT$ , что и в (41.13), т. е. средняя энергия гармонического осциллятора частоты  $\omega$  при температуре  $T$ . Классическая физика говорит, что она равна  $kT$ , а эксперимент отвечает: Нет! При очень низких температурах или при очень высоких частотах это не так. Таким образом, кривая падает по той же причине, что и теплоемкости газов. Кривую черного тела изучать легче, чем теплоемкости газов, где много сложностей, и мы сконцентрируем внимание на определении правильной кривой излучения черного тела, потому что эта кривая будет той кривой, которая расскажет нам, как средняя энергия гармонического осциллятора при любой его частоте зависит от температуры.

За изучение этой кривой взялся Планк. Сначала он нашел чисто эмпирический ответ, сравнивая опытную кривую с известными функциями, которые лучше всего эту кривую подгоняли. Таким образом, он получил эмпирическую формулу для средней энергии гармонического осциллятора как функцию температуры. Иначе говоря, он заменил  $kT$  *правильной*

$$\begin{array}{l}
 \frac{N_4}{\text{---}} \quad E_4 = 4\hbar\omega \quad P_4 = A \exp(-4\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_3}{\text{---}} \quad E_3 = 3\hbar\omega \quad P_3 = A \exp(-3\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_2}{\text{---}} \quad E_2 = 2\hbar\omega \quad P_2 = A \exp(-2\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_1}{\text{---}} \quad E_1 = \hbar\omega \quad P_1 = A \exp(-\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_0}{\text{---}} \quad E_0 = 0 \quad P_0 = A
 \end{array}$$

Фиг. 41.5. Уровни энергии гармонического осциллятора  
Отстоят друг от друга на равных расстояниях  $E_n = n\hbar\omega$ .

формулой, а потом нашел простой вывод этой формулы, правда, при очень странном предположении. Это предположение состоит в том, что гармонический осциллятор может поглотить за один прием только энергию  $\hbar\omega$ . После этого нельзя и подумать, что осциллятор может обладать любой энергией. Конечно, это было началом конца классической физики.

Сейчас мы выведем первую правильную формулу квантовой механики. Предположим, что дозволенные уровни энергии гармонического осциллятора лежат на равном расстоянии  $\hbar\omega_0$  друг от друга, поэтому осциллятор может обладать только одной из этих энергий (фиг. 41.5). Аргументы Планка выглядят немного сложнее наших, ведь это было самым началом квантовой механики, и ему приходилось кое-что доказывать. Ну, а мы просто примем как факт (который Планк и установил), что вероятность того, что занят уровень энергии  $E$ , равна  $P(E) = \alpha \exp(-E/kT)$ . Исходя из этого, мы получим правильный результат.

Предположим, что у нас есть много осцилляторов и каждый колеблется с частотой  $\omega_0$ . Некоторые из них находятся в низшем квантовом состоянии, другие забрались на уровень выше и т. д. Нам нужно знать среднюю энергию этих осцилляторов. Чтобы найти ее, давайте вычислим полную энергию всех осцилляторов и поделим результат на их число. Тогда мы получим среднюю энергию на осциллятор при тепловом равновесии, а это то же самое, что и энергия при равновесии с излучением черного тела, и ее надо подставить в уравнение (41.13) вместо  $kT$ .

Пусть  $N_0$  — число осцилляторов в основном состоянии (состоянии с наименьшей энергией),  $N_1$  — число осцилляторов в состоянии  $E_1$ ,  $N_2$  — число осцилляторов в состоянии  $E_2$  и т. д. Согласно гипотезе (которую мы не доказали), классические выражения для вероятности  $\exp(-n \cdot \text{э.}/kT)$  или  $\exp(-k \cdot \text{э.}/kT)$  заменяются в квантовой механике на  $\exp(-\Delta E/kT)$ , где  $\Delta E$  — разность энергий. Можно утверждать, что число осцилляторов в первом состоянии  $N_1$  равно произведению числа молекул в основном состоянии  $N_0$  на

$\exp(-\hbar\omega/kT)$ . Аналогично,  $N_2$  (число молекул во втором состоянии) равно  $N_2 = N_0 \exp(-2\hbar\omega/kT)$ . Чтобы упростить алгебру, введем  $x = \exp(-\hbar\omega/kT)$ . Тогда все выглядит очень просто:

$$N_1 = N_0 x, \quad N_2 = N_0 x^2, \quad \dots, \quad N_n = N_0 x^n.$$

Сначала найдем полную энергию всех осцилляторов. Если осциллятор находится в основном состоянии, его энергия нуль. Если он находится в первом состоянии, то его энергия равна  $\hbar\omega_0$ , а таких осцилляторов  $N_1$ . Значит, в этом состоянии запасена энергия  $N_1 \hbar\omega$ , или  $\hbar\omega N_0 x$ . Энергия осциллятора во втором состоянии  $2\hbar\omega_0$ , а осцилляторов  $N_2$ , поэтому мы получаем такую энергию:  $N_2 2\hbar\omega = 2\hbar\omega_0 N_0 x^2$  и т. д. Сложив все это, найдем полную энергию  $E_{\text{полн}} = N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)$ .

А сколько всего осцилляторов? В основном состоянии, конечно,  $N_0$ , в первом состоянии  $N_1$  и т. д.; снова все сложим и получим  $N_{\text{все}} = N_0 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$ . Поэтому средняя энергия равна

$$\langle E \rangle = \frac{E_{\text{полн}}}{N_{\text{все}}} = \frac{N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}{N_0 (1 + x + x^2 + \dots)}. \quad (41.14)$$

Читателям представляется возможность позабавиться этими суммами и получить от этого удовольствие. Когда вы покончите с суммированием и подставите в окончательный результат значение  $x$ , то получите, если не ошиблись,

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (41.15)$$

Эта формула была не только самой первой формулой, но и самой первой мыслью квантовой механики, и она явилась великолепным ответом на все недоумения предшествующих десятилетий. Максвелл уже понимал, что что-то неверно, но вопрос был в том, что же *правильно*? Здесь содержится количественный ответ — что же надо взять вместо  $kT$ . Выражение для энергии, конечно, стремится к  $kT$  при  $\omega \rightarrow 0$  или при  $T \rightarrow \infty$ . Попробуйте это доказать — здесь надо поступить так, как этому учит математика.

Выражение для средней энергии содержит знаменитый обрезаящий множитель, который предвидел Джинс, и если использовать его вместо  $kT$  в (41.13), то мы получим распределение света в черном ящике:

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}. \quad (41.16)$$

Итак, мы видим, что при больших  $\omega$  кривая резко идет вниз; хотя в числителе стоит  $\omega^3$ , знаменатель содержит  $e$  в чрезвычайно высокой степени; на кривой нет никакого намека на

подъем, и там, где мы того не ждем, не появляется ни ультрафиолетовых, ни рентгеновских лучей!

Может возникнуть недовольство в связи с тем, что при выводе (41.16) мы пользовались квантовой теорией для уровней энергии гармонического осциллятора, а при определении эффективного сечения  $\sigma_e$  мы оставались верны классической теории. Но квантовая теория взаимодействия света с гармоническим осциллятором приводит точно к тем же результатам, что и классическая. Это обстоятельство оправдывает то время, которое мы затратили на изучение показателя преломления и рассеяние света, основанное на представлении об атоме как о маленьком осцилляторе, — квантовые формулы получаются точно такими же.

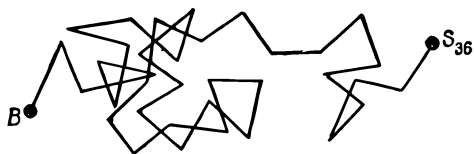
Теперь вернемся к шумам Джонсона в сопротивлении. Мы уже отмечали, что теория мощности шума, по существу, — та же самая классическая теория излучения черного тела. На самом деле, как мы уже говорили, сопротивление в цепи — это не настоящее сопротивление, а похоже скорее на антенну (антенна ведь тоже похожа на сопротивление, она излучает энергию). Это радиационное сопротивление, и легко подсчитать излучаемую им мощность. Эта мощность равна той мощности, которую антенна получает от окружающего ее света, и мы должны прийти к тому же самому распределению с точностью до одного-двух множителей. Мы можем предположить, что сопротивление — это генератор с неизвестным спектром мощности  $P(\omega)$ . Найти распределение поможет то обстоятельство, что этот генератор, включенный в резонансную цепь произвольной частоты (как на фиг. 41.2, б), порождает на индуктивности падение напряжения, определяемое равенством (41.2). Это приведет нас к тому же интегралу, что и (41.10), а продолжая работать тем же методом, мы получим уравнение (41.3). Для низких температур  $kT$  в (41.3), конечно, надо заменить выражением (41.15). Две теории (излучения черного тела и шумов Джонсона) физически тесно связаны, так как мы можем связать резонансную цепь с антенной, тогда сопротивление  $R$  будет радиационным сопротивлением в чистом виде. Поскольку (41.2) не зависит от физических свойств сопротивления, генератор  $G$  для настоящего сопротивления и для радиационного сопротивления будет одинаковым. А что же будет источником генерируемой мощности  $P(\omega)$ , если сопротивление  $R$  — теперь просто-напросто идеальная антенна, находящаяся в равновесии с ее окружением при температуре  $T$ ? Это излучение в пространстве при температуре  $T$ , которое обрушивается на антенну в качестве «принятого сигнала» и служит эффективным генератором. Следовательно, двигаясь от (41.13) к (41.3), можно найти прямое соответствие между  $P(\omega)$  и  $I(\omega)$ .

Объяснение явлений, о которых мы сейчас говорим (так называемый шум Джонсона, распределение Планка и теория броуновского движения, о которой мы собираемся говорить, — это достижения первого десятилетия нашего века. Узнав об этом и заглянув в историю, вернемся к броуновскому движению.

#### § 4. Случайные блуждания

Попробуем понять, насколько меняется положение танцующей частицы за время, во много раз большее, чем промежуток между двумя ударами. Посмотрим на маленькую частицу, которая вовлеклась в броуновское движение и пляшет под непрерывно и беспорядочно сыплющимися на нее ударами молекул воды. *Вопрос:* Далеко ли отойдет частица от первоначального положения, когда истечет заданное время? Эту задачу решили Эйнштейн и Смолуховский. Представим себе, что мы разделили выделенное нам время на малые промежутки, скажем, по одной сотой доле секунды, так что после первой сотой доли секунды частица оказалась в одном месте, в течение второй сотой доли секунды она продвинулась еще, в конце следующей сотой секунды — еще и т. д. При той скорости бомбардировки, которой подвергается частица, одна сотая секунды — огромное время.

Читатель легко может проверить, что число столкновений, которые испытывает одна плавающая в воде молекула, порядка  $10^{14}$  в секунду, так что на одну сотую долю секунды приходится примерно  $10^{12}$  столкновений, а это очень много! Естественно, что по прошествии одной сотой доли секунды частица не «помнит», что с ней было до этого. Иначе говоря, все столкновения *случайны*, так что каждый последующий «шаг» частицы совершенно не зависит от предыдущего. Это напоминает знаменитую задачу о пьяном моряке, который выходит из бара и делает несколько шагов, но плохо держится на ногах, и каждый шаг делает куда-то в сторону, случайно (фиг. 41.6). Так где же окажется наш матрос спустя некоторое время? Конечно, мы этого не знаем! И предсказать это невозможно. Все, что можно сказать, — это то, что он где-то наверняка находится, но это совершенно неопределенно. Ну хорошо, а далеко ли он все-таки уйдет? *Каково будет то среднее расстояние от бара, на котором окажется матрос?* На этот вопрос мы уже ответили, потому что мы однажды уже обсуждали суперпозицию света от огромного числа различных источников с различными фазами, а это значит, что мы складывали огромное число стрелок, направленных по произвольным направлениям (см. гл. 32). Тогда мы обнаружили, что средний квадрат расстояния от одного конца цепи



Фиг. 41.6. Зигзагообразный путь из 36 случайных шагов длиной  $L$ . Как далеко расположена точка  $S_{36}$  от  $B$ ? В среднем на  $6L$ .

беспорядочных шагов до другого (т. е. интенсивность света) равен сумме интенсивностей отдельных источников. Совершенно аналогично, используя ту же математику, можно немедленно показать, что если  $\mathbf{R}_N$  — векторное расстояние от начала через  $N$  шагов, то средний квадрат расстояния от начала пропорционален числу шагов  $N$ . Это значит, что  $\langle R_N^2 \rangle = NL^2$ , где  $L$  — длина каждого шага. Поскольку число шагов пропорционально выделенному нам условиями задачи времени, то *средний квадрат расстояния пропорционален времени*:

$$\langle R^2 \rangle = at. \quad (41.17)$$

Это не означает, что *среднее расстояние* пропорционально времени. Если бы среднее расстояние было пропорционально времени, то частица двигалась бы с вполне определенной постоянной скоростью. Матрос, несомненно, идет вперед, но движение его таково, что *квадрат* среднего расстояния пропорционален времени. Это и есть характерная особенность случайных блужданий.

Мы легко докажем, что каждый шаг увеличивает квадрат расстояния в среднем на  $L^2$ . Если записать  $\mathbf{R}_N = \mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}$ , то окажется, что  $\mathbf{R}_N \cdot \mathbf{R}_N$  равно

$$\mathbf{R}_N \cdot \mathbf{R}_N = R_N^2 = R_{N-1}^2 + 2\mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} + L^2,$$

а усредняя по многим попыткам, получим  $\langle R_N^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + L^2$ , потому что  $\langle \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} \rangle = 0$ . Таким образом, по индукции

$$R_N^2 = NL^2. \quad (41.18)$$

Теперь хорошо бы вычислить коэффициент  $\alpha$  в уравнении (41.17); для этого нужно еще кое-что добавить. Предположим, что если к частице приложена сила (она не имеет никакого отношения к броуновскому движению, просто мы подыскиваем выражение для импульса), то частица будет противодействовать силе следующим образом. Прежде всего должна проявиться инерция. Пусть  $m$  — коэффициент инерции, эффективная масса частицы (не обязательно настоящая масса настоящей частицы, потому что если протаскивать частицу сквозь воду, то движется и вода). Поэтому если мы рассматриваем движение в одном направлении, то нужно об-

завестись с одной стороны слагаемым  $m(d^2x/dt^2)$ . Далее подчеркнем, что, если мы толкаем частицу равномерно, она должна тормозиться жидкостью с силой, пропорциональной скорости. Кроме инерции жидкости, существует еще сопротивление течению, вызванное вязкостью и сложным строением жидкости. Для возникновения флуктуаций абсолютно необходимо существование необратимых потерь, нечто вроде сопротивления. Пока таких потерь нет, нет способа получить  $kT$ . Причина флуктуаций тесно связана с такими потерями. Мы еще обсудим, каков механизм такого трения, мы поговорим о силах, пропорциональных скорости, и выясним, откуда они берутся. А пока давайте просто предположим, что такое сопротивление существует. Тогда формула для движения под действием внешней силы, если она толкает частицу самым обычным способом, выглядит так:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{\text{вн}}. \quad (41.19)$$

Величину  $\mu$  можно определить экспериментально. Например, мы можем изучить падение капли под действием силы тяжести. Тогда известно, что сила равна  $mg$ , а  $\mu$  — это  $mg$ , деленное на окончательно установившуюся скорость падения капли. Или можно поместить каплю в центрифугу и следить за скоростью осаждения. А если она заряжена, то можно приложить электрическое поле. Таким образом,  $\mu$  — это измеряемая величина, а не какая-нибудь искусственная вещь, и ее значение известно для коллоидных частиц многих типов.

Применим эту формулу также в том случае, когда сила не внешняя, а равна беспорядочным силам броуновского движения. Попробуем определить средний квадрат пройденного телом пути. Будем рассматривать расстояния не в трех, а в одном измерении и определим среднее значение  $x^2$ , чтобы подготовить себя к решению задачи. (Разумеется, среднее значение  $x^2$  равно среднему  $y^2$  и среднему  $z^2$ , поэтому средний квадрат расстояния будет втрое больше того, что мы получим.)

Конечно,  $x$ -составляющая беспорядочной силы так же беспорядочна, как и остальные компоненты. Чему же равна скорость изменения  $x^2$ ? Она равна  $(d/dt)(x^2) = 2x(dx/dt)$ , поэтому скорость изменения среднего  $x^2$  можно найти, усреднив произведение скорости на координату. Покажем, что это постоянная величина, т. е. средний квадрат радиуса возрастает пропорционально времени, и найдем скорость возрастания. Если умножить уравнение (41.19) на  $x$ , то получим  $mx(d^2x/dt^2) + \mu x(dx/dt) = xF_x$ . Нас интересует среднее по времени  $x(dx/dt)$ , поэтому усредним по времени все уравнение целиком и изучим все три слагаемых. Что можно сказать



о произведении  $x$  на силу? Хоть частица и добралась до точки  $x$ , последующие толчки могут быть направлены в любом направлении по отношению к  $x$ , ведь случайная сила *полностью* случайна и ей нет дела, откуда частица начала двигаться. Если координата  $x$  положительна, у средней силы нет никаких оснований направиться в этом же направлении. Для нее оно столь же вероятно, как и любое другое. Случайные силы не могут отправить частицу в определенном направлении. Поэтому среднее произведения  $x$  на  $F_x$  равно нулю. С другой стороны, слагаемому  $mx(d^2x/dt^2)$  можно, немного повозившись, придать вид

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left( x \frac{dx}{dt} \right) - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Мы разбили первоначальное слагаемое на два и должны усреднить их оба. Посмотрим, чему же равно произведение  $x$  на скорость. Это произведение не изменяется со временем, потому что, когда частица попадает в заданную точку, она уже не помнит, где она была раньше, и характеризующие такие ситуации величины не должны зависеть от времени. Поэтому среднее значение этой величины равно нулю. У нас осталось лишь  $mv^2$ , а об этой величине нам кое-что известно: среднее значение  $mv^2/2$  равно  $1/2kT$ . Следовательно, мы установили, что

$$\left\langle mx \frac{d^2x}{dt^2} \right\rangle + \mu \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle = \langle xF_x \rangle$$

влечет за собой

$$- \langle mv^2 \rangle + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 0,$$

или

$$\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = 2 \frac{kT}{\mu}. \quad (41.20)$$

Это значит, что средний квадрат радиус-вектора частицы  $\langle R^2 \rangle$  к моменту  $t$  равен

$$\langle R^2 \rangle = 6kT \frac{t}{\mu}. \quad (41.21)$$

Таким образом, мы и в самом деле можем выяснить, *как далеко* уйдут частицы! Сначала нужно изучить реакцию частицы на постоянную силу, выяснить скорость дрейфа частицы под действием известной силы (чтобы определить  $\mu$ , а тогда мы сможем узнать, далеко ли расползутся беспорядочно движущиеся частицы. Полученное нами уравнение имеет большую историческую ценность, потому что на нем основан один из первых способов определения постоянной  $k$ . Ведь в конце концов можно измерить величину  $\mu$  и время, определить рас-

стояние, на которое удалится частица, и получить средние значения.

Почему так важно определить точное значение  $k$ ? Потому что по закону  $PV = RT$  для моля можно измерить  $R$ , которое равно произведению числа атомов в моле на  $k$ . Моль когда-то определялся как столько-то *граммов* кислорода 16 (теперь для этой цели используют углерод), поэтому числа *атомов* в моле сначала не знали. Это, конечно, интересный и важный вопрос. Каковы размеры атомов? Много ли их? Таким образом, одно из самых ранних определений числа атомов свелось к определению того, далеко ли уйдут мельчайшие соринки, пока мы будем терпеливо разглядывать их в микроскоп в течение строго определенного времени. После этого можно было найти и постоянную Больцмана  $k$ , и число Авогадро  $N_0$ , потому что  $R$  к этому времени было уже измерено.

## ПРИМЕНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

- § 1. Испарение
- § 2. Термоионная эмиссия
- § 3. Тепловая ионизация
- § 4. Химическая кинетика
- § 5. Законы излучения Эйнштейна

### § 1. Испарение

Эта глава посвящена дальнейшим применениям кинетической теории. В предыдущей главе мы подчеркнули один из выводов этой теории, что средняя кинетическая энергия каждой степени свободы молекулы или любого другого объекта равна  $\frac{1}{2}kT$ . Сейчас центральным пунктом нашего изложения будет утверждение о том, что отнесенная к единице объема вероятность обнаружить частицу в том или ином месте пропорциональна  $\exp(-\text{п. э.}/kT)$ . (Это утверждение мы используем в ряде задач.)

Явления, которые мы собираемся изучить, довольно сложны: испарение жидкости, вылет электронов с поверхности металла или химическая реакция, в которой участвует много атомов. В таких случаях кинетическая теория не дает простых и точных предписаний, ситуация слишком сложна для этого. Поэтому выводы этой главы, за исключением особо оговоренных, весьма неточны. Мы только подчеркнем, что, исходя из кинетической теории, можно *более или менее* хорошо понять эти явления. Но гораздо более точное представление о них дают термодинамические аргументы или некоторые измерения отдельных критических величин.

Однако полезно знать, хотя бы очень приблизительно, почему то, что происходит, происходит именно так. Тогда, натолкнувшись на явление, которое содержит в себе нечто, чего мы еще не видели, или то, что проанализировать мы еще не собрались, мы, может быть, сможем более или менее точно сказать, что произошло. Такой анализ будет в высшей сте-

пени неточным, но в общих чертах верным — верным по сути, но чуть-чуть упрощенным, скажем, в некоторых тонких деталях.

Разберем первый пример — испарение жидкости. Предположим, что большой ящик при заданной температуре заполнен жидкостью и паром поровну. Будем считать, что средние расстояния между молекулами пара довольно велики, а вот в жидкости они упакованы плотно. Задача состоит в том, чтобы определить число молекул, находящихся в газовой фазе, по сравнению с числом молекул, находящихся в жидкости. Какова плотность пара при заданной температуре и как она зависит от температуры?

Пусть  $n$  — число молекул пара в единице объема. Это число, естественно, меняется с температурой. С притоком тепла испарение увеличивается. Добавим еще одну величину  $1/V_a$ , равную числу молекул в единице объема, содержащихся в жидкости; мы предполагаем, что в жидкости каждой молекуле отведен вполне определенный объем, поэтому чем больше в жидкости молекул, тем больший объем они занимают. Если  $V_a$  — объем, отведенный одной молекуле, то число молекул в единичном объеме равно единичному объему, деленному на объем, занимаемый молекулой. Далее, предположим, что между молекулами действуют силы притяжения, удерживающие их внутри жидкости. Иначе нельзя понять, почему происходит конденсация. Итак, предположим, что имеется сила притяжения и существует энергия связи молекулы в жидкости, которая теряется при переходе молекул в пар. Это наводит на мысль, что для перевода какой-нибудь молекулы из жидкости в пар, нужно совершить работу  $W$ . Существует определенная разность  $W$  между энергией молекулы в жидкости и ее энергией в паре, потому что для переноса молекул в пар мы должны оторвать ее от всех молекул, к которым она притягивается.

Теперь обратимся к общему принципу, по которому отношение числа атомов в единице объема в разных областях равно  $n_2/n_1 = \exp[-(E_2 - E_1)/kT]$ . Значит,  $n$  — число молекул в единичном объеме пара, деленное на  $1/V_a$  (число молекул в единичном объеме жидкости), равно

$$nV_a = e^{-W/kT}. \quad (42.1)$$

Таково общее правило. Это очень похоже на равновесную атмосферу в поле тяжести, когда низшие слои газа плотнее верхних, потому что для подъема молекулы на высоту  $h$  нужна энергия  $mgh$ . В жидкости молекулы размещены плотнее, чем в газе, так как их заставляет потесниться энергия «подъема»  $W$ , и отношение плотностей равно  $\exp(-W/kT)$ .

Это как раз то, что мы хотели вывести — плотность пара изменяется как  $e$  в некоторой степени. Показателем служит

взятая со знаком минус похожая на энергию величина, деленная на  $kT$ . Множители перед экспонентой не особенно интересны, потому что в большинстве случаев плотность пара гораздо меньше плотности жидкости. При этих обстоятельствах, когда мы далеки от критической точки, где плотности почти одинаковы, соотношение плотностей, при котором  $n$  много меньше  $1/V_a$ , обеспечивается тем, что  $W$  много больше  $kT$ . Поэтому формулы типа (42.1) интересны только тогда, когда  $W$  действительно гораздо больше  $kT$ ; в этом случае  $e$  возводится в громадную отрицательную степень и если немного изменить  $T$ , то изменится слегка и громадная степень, а это изменение повлечет за собой такие изменения экспоненты, которые будут гораздо важнее возможных изменений предэкспоненциальных множителей. Но отчего бы изменяться таким множителям, как  $1/V_a$ ? Да оттого, что наше описание приблизительно. Ведь в действительности каждая молекула не имеет определенного объема; при изменении температуры объем  $V_a$  не остается постоянным — жидкости сжимаются и расширяются. Есть еще и другие мелочи вроде этой, так что действительная ситуация гораздо сложнее. Почти всюду стоят медленно изменяющиеся с температурой множители. В действительности само  $W$  медленно изменяется с температурой, потому что при разных температурах молекулам отведены разные объемы, и притяжение должно быть разным, и т. д. Итак, можно прийти к выводу, что поскольку у нас получилась формула, в которой все неизвестным образом изменяется с температурой, то на самом же деле формулы никакой и нет. Но если мы знаем, что показатель у экспоненты  $W/kT$  заведомо велик, то можно убедиться, что наибольшие изменения кривой плотности пара как функции температуры обусловлены экспоненциальным множителем. Поэтому если мы будем считать  $W$  постоянной величиной, а коэффициент  $1/V_a$  — почти постоянной, то это будет хорошим приближением вдоволь небольшого интервала нашей кривой. Иначе говоря, основные изменения определяются видом функции  $\exp(-W/kT)$ .

Выходит, что в природе есть много, очень много процессов, для которых характерно взятие энергии взаймы; основным свойством таких процессов является экспоненциальная температурная зависимость:  $e$  возводится в отношение взятой с отрицательным знаком энергии к  $kT$ . Это полезный факт, но только в тех случаях, когда энергия велика по сравнению с  $kT$ , поскольку главная часть изменений с температурой определяется изменением  $kT$ , а не величиной постоянных и других множителей.

Давайте рассмотрим сейчас немного подробнее другой способ получения почти аналогичного результата для испарения. Чтобы получить (42.1), мы просто применили всегда справед-

ливое при равновесии правило, но мало что поняли в существе явления. Поэтому невредно попытаться посмотреть детальнее, как происходит испарение. Можно описать его примерно так: молекулы пара непрерывно бомбардируют поверхность жидкости; при ударе они могут либо отскочить от поверхности, либо пробить ее. Что случается чаще, нам неизвестно, может быть, отношение этих исходов равно 50 к 50, а может быть и 10 к 90. Предположим, что поверхность пробивается всегда, потом мы посмотрим, к чему приводит предположение о более прочной поверхности. Тогда в каждый момент будет иметься определенное число атомов, сконденсировавшихся на поверхности жидкости. Число сконденсировавшихся молекул (число молекул, прошедших через площадку единичной площади) равно числу молекул в единице объема  $n$ , умноженному на скорость  $v$ . Эта скорость молекул связана с температурой; ведь известно, что в среднем  $\frac{1}{2}mv^2$  равно  $\frac{3}{2}kT$ . Поэтому  $v$  — какая-то средняя скорость. Конечно, нужно еще проинтегрировать по углам и сделать всякого рода усреднения, но результат прямо пропорционален корню из среднего квадрата скорости. Таким образом,

$$N_c = nv, \quad (42.2)$$

т. е. числу молекул, достигших единичной площадки и сконденсировавшихся.

Но молекулы жидкости непрерывно пляшут, и время от времени отдельные молекулы выскакивают наружу. Теперь нам нужно выяснить, часто ли это происходит. При равновесии число молекул, выскочивших за 1 сек из жидкости, равно числу молекул, поступивших за это же время на ее поверхность.

Ну, а много ли молекул выскакивает? Чтобы выскочить наружу, молекула должна как-то умудриться приобрести некоторую добавочную энергию, которая окажется больше, чем энергия ее соседок. И этот избыток энергии должен быть довольно большим, ведь наша молекула очень сильно притягивается к остальным молекулам жидкости. Обычно ей так и не удастся преодолеть этого сильного притяжения, но иногда при столкновениях на ее долю выпадает излишек энергии. Шансы получить необходимую в нашем случае избыточную энергию  $W$  невелики, если  $W \gg kT$ . Действительно, вероятность того, что атом приобретает энергию, большую чем  $W$ , равна  $\exp(-W/kT)$ . Это общий принцип кинетической теории: шансы признать энергию  $W$  сверх средней энергии равны  $e$ , возведенному в степень, показатель которой равен отношению  $W$  к  $kT$  со знаком минус. Предположим, что некоторым молекулам удалось получить эту энергию. Теперь можно установить, сколько молекул покидает поверхность жидкости за

1 сек. Конечно, получение молекулой нужной энергии еще не означает, что испарение обеспечено. Ведь эта молекула может находиться слишком глубоко в жидкости, а если она даже и находится у поверхности, то может двигаться не туда. Число молекул, покидающих единичную площадку за 1 сек, — это примерно число молекул на единице площади вблизи поверхности, деленное на время, которое требуется молекуле для побега, и умноженное на вероятность  $\exp(-W/kT)$  готовности молекул к побегу, в том смысле, что они уже получили достаточное количество энергии.

Предположим, что каждая молекула на поверхности жидкости занимает определенную площадку площадью  $A$ . Тогда число молекул на единице поверхности жидкости равно  $1/A$ . А много ли молекуле нужно времени, чтобы совершить свой побег? Если молекулы движутся с определенной средней скоростью  $v$  и должны пройти расстояние, равное, скажем, диаметру молекулы  $D$  (толщине наружного слоя), то время, нужное для преодоления этого расстояния, и есть время побега, если только молекула обладает достаточной энергией. Это время равно  $D/v$ . Таким образом, число испаряющихся молекул приблизительно равно

$$N_e = \frac{1}{A} \frac{v}{D} e^{-W/kT}. \quad (42.3)$$

Заметим, что произведение площади каждой молекулы на толщину слоя приблизительно равно объему  $V_a$ , отведенному каждой молекуле. Итак, для получения равновесия мы должны иметь  $N_c = N_e$ , или

$$nv = \frac{v}{V_a} e^{-W/kT}. \quad (42.4)$$

Можно выкинуть из этого равенства скорости, потому что они равны; если даже специально отметить, что одна из них — скорость молекулы пара, а другая — скорость испаряющейся молекулы, — все равно они одинаковы, ведь мы знаем, что средняя кинетическая энергия обеих молекул (в одном направлении) равна  $1/2 kT$ . Но можно сказать: «Нет! Нет! Ведь испаряются только особо быстрые молекулы. Только они приобрели достаточный избыток энергии». Не совсем так, потому что в тот момент, когда эти молекулы выскакивают из жидкости, они *теряют* этот избыток, преодолевая потенциальную энергию. Поэтому при подходе к поверхности они уже движутся с замедленной скоростью  $v$ ! Точно так же обстояло дело с распределением молекулярных скоростей в атмосфере — в нижних слоях молекулы были определенным образом распределены по энергиям. Те из них, которые достигали более высоких слоев, распределялись по энергиям *точно так же*, потому что медленные молекулы вверх совсем не поднима-

лись, а быстрые, поднявшись, двигались медленнее. Испаряющиеся молекулы распределены по скоростям так же, как молекулы, движущиеся в глубине жидкости — поистине поразительный факт. Во всяком случае, нет смысла пытаться столь строго обсуждать нашу формулу, потому что в ней есть и другие неточности; например, мы рассматривали вероятность отражения молекул от поверхности, а не их конденсации и т. д. Мы здесь имеем дело лишь с грубым описанием скорости испарения и конденсации и видим, естественно, что плотность пара  $n$  изменяется так же, как и раньше, но теперь мы понимаем этот процесс много лучше, а раньше писали почти произвольную формулу.

Более глубокое понимание позволит нам выяснить еще кое-что. Например, предположим, что мы откачиваем пар, причем так быстро, что пар удаляется практически с той же быстротой, с какой образуется (если наш насос очень хороший, а испарение происходит медленно). С какой скоростью будет происходить испарение, если температура жидкости  $T$  будет поддерживаться постоянной? Предположим, что мы экспериментально уже измерили равновесную плотность пара и нам известно, сколько молекул в единице объема может быть в равновесии с жидкостью при заданной температуре. Теперь мы хотим узнать *скорость испарения* жидкости. Хотя мы ограничились лишь грубым анализом испарения, он все же дал нам сведения о числе *прибывающих* молекул пара, правда, с точностью до неизвестного коэффициента отражения. Поэтому мы можем использовать то обстоятельство, что при равновесии число покидающих пар молекул равно числу прибывающих молекул. Правда, пар откачивается и молекулы могут только покидать жидкость, но если оставить пар в покое, то установится равновесная плотность, при которой число прибывающих в жидкость молекул равно числу испаряющихся. Следовательно, легко видеть, что в этом случае число молекул, покидающих поверхность жидкости за 1 сек, равно произведению неизвестного коэффициента отражения  $R$  на число молекул, которые каждую секунду возвращались бы в жидкость, если бы пар не откачивался, потому что именно это число входит в уравнение баланса для испарения при равновесии:

$$N_e = nuR = \frac{vR}{V_a} e^{-w/kT}. \quad (42.5)$$

Конечно, легче подсчитать число молекул, переходящих из пара в жидкость, потому что в этом случае не надо ничего предполагать о силах, как это приходилось делать при подсчете числа покидающих жидкость молекул. Проще изменить путь рассуждений.



## § 2. Термоионная эмиссия

Можно привести еще один пример часто встречающегося процесса, столь похожего на испарение жидкости, что его даже не придется анализировать отдельно. В сущности, это та же самая задача. В любой радиолампе есть источник электронов — вольфрамовая нить накаливания и положительно заряженная пластинка, притягивающая электроны. Оторвавшийся с поверхности вольфрама электрон немедленно улетает к пластинке. Это — «идеальный» насос, который непрерывно «откачивает» электроны. Возникает вопрос: сколько электронов ежесекундно покидает вольфрамовую проволоку и как их число зависит от температуры? Решение задачи дается той же формулой (42.5), потому что электроны, находящиеся в куске металла, притягиваются ионами или атомами металла. Они, грубо говоря, притягиваются металлом. Чтобы оторвать электрон от металла, надо сообщить ему определенное количество энергии, т. е. затратить для этого работу. Эта работа для разных металлов различна. Фактически она изменяется даже в зависимости от вида поверхности у одного и того же металла, но в целом она составляет несколько электрон-вольт — величину, вообще типичную для энергии химических реакций. При этом полезно вспомнить, что разность потенциалов химических элементов, например батареи для магниевой вспышки, которая порождается химическими реакциями, порядка 1 в.

Как определить число электронов, покидающих металл за 1 сек? Очень трудно перечислить все, что может повлиять на выход электрона: легче решить задачу по-другому. Представим, что мы не удаляем вылетевшие электроны, а электроны образуют нечто вроде газа и могут вернуться в металл. В этом случае существует вполне определенная равновесная плотность электронов, которая определяется такой же формулой, как (42.1), где  $V_a$ , грубо говоря, — объем, отведенный в металле одному электрону, а  $W = q_e\phi$  ( $\phi$  — так называемая *работа выхода*, или разность потенциалов, необходимая для того, чтобы вырвать электрон с поверхности металла). Эта формула подскажет нам, сколько электронов должно находиться в окружающем пространстве и проникать в металл, чтобы скомпенсировать потерю тех электронов, которые покинули металл. Теперь легко подсчитать, сколько электронов уйдет из металла, если мы будем непрерывно откачивать их, потому что число ушедших электронов в точности равно числу электронов, которые должны были бы вернуться в металл, если существовал электронный «пар», плотность которого определяется формулой (42.1). Иначе говоря, электрический ток через единичную площадку равен произведению за-

ряда электрона на число электронов, находящихся за 1 сек через площадку единичной площади; последнее равно произведению числа электронов в единичном объеме на скорость; поэтому, как мы уже много раз видели,

$$I = q_e n v = \frac{q_e v}{V_a} e^{-q_e \Phi / kT}. \quad (42.6)$$

Мы знаем, что 1 эв соответствует  $kT$  при температуре, достигающей 11 600 град. Нить накаливания радиолампы работает примерно при температуре 1100 град, поэтому экспоненциальный множитель равен примерно  $e^{-10}$ ; когда мы слегка изменяем температуру, экспоненциальный множитель изменяется очень сильно. Это опять основное свойство формул, содержащих  $\exp(-q_e \Phi / kT)$ . Предэкспоненциальный множитель на самом деле совершенно неверен; оказывается, что поведение электронов в металле правильно описывает квантовая, а не классическая механика, но правильный множитель лишь немного отличается от нашего. Фактически до сих пор никто еще не смог точно вычислить этот множитель, хотя многие при расчетах пользовались квантовыми формулами высшего класса. Основная задача состоит в том, чтобы выяснить, не меняется ли  $W$  хотя бы медленно с температурой? Если да, то медленно изменяющуюся с температурой величину  $W$  нельзя отделить от предэкспоненциальных коэффициентов. Если, например,  $W$  зависит от температуры линейно, так что  $W = W_0 + \alpha kT$ , то

$$e^{-W/kT} = e^{-(W_0 + \alpha kT)/kT} = e^{-\alpha} e^{-W_0/kT}.$$

Такая линейная зависимость  $W$  от температуры эквивалентна измененной «постоянной». Попытка точного вычисления предэкспоненциального множителя очень трудна и обычно бесплодна.

### § 3. Тепловая ионизация

Перейдем теперь к еще одному применению все той же идеи. Теперь речь пойдет об ионизации. Предположим, что газ состоит из великого множества атомов, которые обычно нейтральны, но если газ нагреть, то атомы могут оказаться ионизованными. Нам нужно знать, сколько существует ионов при тех или иных обстоятельствах, т. е. при заданной плотности атомов в единичном объеме и при определенной температуре. Снова придется представить себе ящик, в котором находится  $N$  атомов, содержащих в себе электроны. (Если электрон покидает атом, то атому присваивается наименование *ион*, а если атом нейтрален, то говорят просто — *атом*.) Таким образом, предположим, что в заданный момент в единичном объеме число нейтральных атомов равно  $n_a$ ,

число ионов равно  $n_i$ , а число электронов равно  $n_e$ . Нужно определить, как связаны эти три числа между собой.

Прежде всего эти числа подчиняются двум условиям или связям. Например, можно как угодно менять различные условия, температуру и т. д., но сумма  $n_a + n_i$  всегда останется одной и той же, потому что это просто-напросто  $N$  — число атомных ядер в ящике. Если в единице объема число ядер сохраняется постоянным, а изменяется, скажем, температура, то, хотя в результате ионизации некоторые атомы превращаются в ионы, общее число атомов и ионов не изменяется. Значит,  $n_a + n_i = N$ . Другое условие вытекает из того, что если газ в целом электрически нейтрален (и если мы пренебрегаем двойной или тройной ионизацией), то число ионов всегда равно числу электронов, или  $n_e = n_i$ . Эти дополнительные условия просто выражают сохранение заряда и сохранение атомов.

Эти равенства верны, и мы в конце концов всегда используем их при решении реальных задач. Но нам нужно получить другое соотношение между этими величинами. Сделать это можно так. Обратимся снова к идее о том, что для отрыва электрона от атома требуется какое-то количество энергии, которую мы будем называть *энергией ионизации* и обозначать буквой  $W$  (чтобы новые формулы выглядели так же, как и раньше). Итак,  $W$  равна энергии, потребной для того, чтобы оторвать электрон от атома и получить ион. Мы снова убеждаемся, что число свободных электронов в единичном объеме «пара» равно произведению числа электронов в единичном объеме, связанных в атомах, на  $e$  в степени минус разность энергий связанного и свободного электронов, деленная на  $kT$ . Опять основное уравнение. Но как это записать? Число свободных электронов в единичном объеме, конечно,  $n_e$ , потому что это определение  $n_e$ . Ну, а что можно сказать о числе связанных в атоме электронов в единичном объеме? Общее число мест, отданных электронам, равно  $n_a + n_i$ , и мы предположим, что когда все электроны связаны, то каждому отводится некоторый объем  $V_a$ . Таким образом, полный атомный объем, занимаемый связанными электронами, равен  $(n_a + n_i)V_a$ , и нашу формулу теперь можно записать в виде

$$n_e = \frac{n_a}{(n_a + n_i)V_a} e^{-W/kT}.$$

Но формула эта неверна. Мы упустили из вида одно существенное обстоятельство: когда один электрон попал в атом, другой электрон уже не может проникнуть в этот же объем! Иначе говоря, не все объемы из числа возможных доступны электрону, который раздумывает, куда бы ему отправиться — в пар или в конденсированное состояние. Здесь возникают не-

предвиденные осложнения, в силу которых электрон не может подойти близко к тому месту, где уже находится другой электрон, — они отталкиваются. По этой причине мы должны считать только ту часть объема, в которой электрон может разместиться. Ведь те объемы, которые уже заняты, нельзя причислять к числу возможных, и только те объемы, которые предоставлены ионам, можно рассматривать как места, вакантные для электронов. Тогда, учтя это обстоятельство, мы найдем, что более точная формула записывается в виде

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{1}{V_a} e^{-W/kt}. \quad (42.7)$$

Эту формулу называют *уравнением ионизации*, или *уравнением Саха*. Теперь посмотрим, можем ли мы качественно понять, почему получается формула, подобная этой, если следить за кинетикой процесса.

Прежде всего время от времени, когда электрон сталкивается с ионом, они объединяются в атом. Точно так же время от времени атом испытывает столкновение и разваливается на ион и электрон. Скорости обоих процессов должны быть равны. А долго ли электрону и иону искать друг друга? Встречи, конечно, учащаются, если возрастает число электронов в единичном объеме. К этому же приводит и увеличение числа ионов в единичном объеме. Следовательно, полная скорость рекомбинации пропорциональна произведению числа электронов на число ионов. Далее, полная скорость ионизации в результате столкновения должна линейно зависеть от числа способных к ионизации атомов. Таким образом, скорости обоих процессов сбалансируются тогда, когда установится определенное соотношение между произведением  $n_e n_i$  и числом атомов  $n_a$ . Тот факт, что это соотношение выражается особой формулой, куда входит энергия ионизации  $W$ , дает, конечно, несколько бóльшую информацию, но мы можем легко сообразить, что такая формула обязательно должна содержать концентрации электронов, ионов и атомов в комбинации  $n_e n_i / n_a$ , которая приводит к постоянной, не зависящей больше от чисел  $n$ , а только от температуры, атомных размеров и других постоянных.

Заметим также, что поскольку уравнение содержит числа в *единичном объеме* и если мы поставим два опыта с одним и тем же полным числом  $N$  атомов и ионов, т. е. со строго определенным числом ядер, но заключим их в ящики разных объемов, то числа  $n$  будут меньше для больших ящиков. Однако отношение  $n_e n_i / n_a$  должно оставаться постоянным, по этому *полное число* электронов и ионов должно быть больше в большем ящике. Чтобы убедиться в этом, предположим, что в ящик объема  $V$  помещено  $N$  ядер и их  $f$ -я часть

ионизована. Тогда  $n_e = fN/V = n_i$  и  $n_a = (1 - f)N/V$ . В этом случае наше уравнение принимает вид

$$\frac{f^2}{1-f} \frac{N}{V} = \frac{e^{-W/kT}}{V_a}. \quad (42.8)$$

Иначе говоря, если мы берем все меньшую и меньшую плотность атомов или непрерывно увеличиваем объем ящика, относительное число электронов и ионов  $f$  должно возрасти. То, что ионизация может быть вызвана просто «расширением», при котором плотность уменьшается, объясняет нам, почему при очень малых плотностях (какие встречаются в холодном межзвездном пространстве) много ионов, хотя это трудно понять, учитывая имеющуюся в нашем распоряжении энергию. Энергия во много-много раз больше  $kT$ , но ионы все равно есть.

Почему же ионы могут существовать лишь при условии, что вокруг них имеется много места, тогда как при увеличении плотности они стремятся исчезнуть? *Ответ:* Все дело в атомах. Время от времени свет или другой атом, или ион, или еще что-то, что поддерживает тепловое равновесие, разрушает атомы. Очень редко, потому что для этого требуются огромные количества избыточной энергии, электрон отрывается и происходит превращение атома в ион. Если пространства огромны, то электрон слоняется очень долго, быть может, много лет и ничего не встречает. Но однажды он находит ион, и тогда они объединяются в атом. Скорость, с которой электроны покидают атомы, очень мала. Но если объем огромен, то сбегавший электрон так долго ищет ион, с которым он мог бы рекомбинировать, что вероятность рекомбинации совсем ничтожна; поэтому, несмотря на то, что для ионизации нужны большие излишки энергии, число электронов может быть вполне ощутимым.

#### § 4. Химическая кинетика

При химических реакциях происходит нечто похожее на «ионизацию». Например, два вещества  $A$  и  $B$  комбинируют в основном веществе  $AB$ ; тогда, подумав немного, мы можем  $AB$  назвать атомом ( $B$  — то, что мы называем электроном, а  $A$  — то, что мы называем ионом). После такой замены, как и раньше, можно написать уравнение равновесия

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = ce^{-W/kT}. \quad (42.9)$$

Эта формула, конечно, неточна, потому что «постоянная»  $c$  зависит от того, в каком объеме позволено объединяться  $A$  и

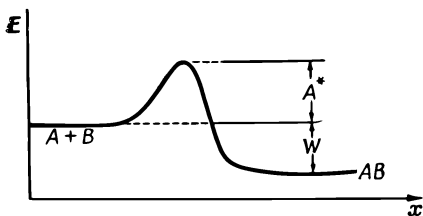
$B$  и т. п., но, обратясь к термодинамическим аргументам, можно придать смысл величине  $W$  в экспоненциальном множителе, и тогда окажется, что она тесно связана с энергией, необходимой для реакции.

Попробуем понять эту формулу как результат столкновений, приблизительно так же, как мы постигли формулу испарения, подсчитывая электроны, вырывающиеся в пространство, и те, которые возвращаются назад за единицу времени. Предположим, что при столкновениях  $A$  и  $B$  иногда образуют соединения  $AB$ . И предположим еще, что  $AB$  — это сложная молекула, которая участвует в общей пляске и по которой ударяют другие молекулы, причем время от времени она получает энергию, достаточную для того, чтобы взорваться и снова развалиться на части  $A$  и  $B$ .

Заметим, что в химических реакциях дело обстоит так, что если сближающиеся атомы имеют слишком малую энергию, то, хотя этой энергии и достаточно для реакции  $A + B \rightarrow AB$ , факт соударения атомов  $A$  и  $B$  еще не обязательно означает начало реакции. Обычно требуется, чтобы соударение было более «жестким», «мягкого» соударения между  $A$  и  $B$  может оказаться недостаточно для начала реакции, даже если в процессе освобождается достаточное для реакции количество энергии. Предположим, что общей чертой химических реакций является требование, по которому для объединения  $A$  и  $B$  в  $AB$  недостаточно простого соударения, а нужно, чтобы они столкнулись, имея определенное количество энергии. Эта энергия называется энергией активации, т. е. энергия, нужная для «активации» реакции. Пусть  $A^*$  — тот избыток энергии, который необходим, чтобы столкновения могли вызвать реакцию. Тогда скорость  $R_f$ , с которой  $A$  и  $B$  порождают  $AB$ , должна содержать произведение числа атомов  $A$  и  $B$ , умноженное на скорость, с которой отдельный атом ударяется о некоторую площадку величиной  $\sigma_{AB}$ , и на величину  $\exp(-A^*/kT)$  (вероятность того, что атомы обладают достаточной энергией):

$$R_f = n_A n_B v \sigma_{AB} e^{-A^*/kT}. \quad (42.10)$$

Теперь надо найти скорость обратного процесса  $R_r$ . Есть некоторая вероятность, что  $A$  и  $B$  снова разойдутся. Чтобы разойтись, им недостаточно энергии  $W$ , которая обеспечит их раздельное существование. Но раз молекулам нелегко соединиться, должен существовать некий барьер, через который  $A$  и  $B$  должны перевалить, чтобы разлететься. Они должны запастись не только нужной для их существования энергией, но и взять кое-что про запас. Получается что-то вроде подъема на холм перед спуском в долину: сначала приходится вскарабкаться на высоту, потом спуститься и только после этого разойтись (фиг. 42.1). Таким образом, скорость перехода  $AB$



Фиг. 42.1. Соотношение энергий в реакции  $A + B \rightarrow AB$ .

в  $A$  и  $B$  пропорциональна произведению  $n_{AB}$  — начальному числу молекул  $AB$  на  $\exp [-(W + A^*)/kT]$ :

$$R_r = c' n_{AB} e^{-(W + A^*)/kT}. \quad (42.11)$$

Постоянная  $c'$  складывается из объема атомов и частоты столкновений; ее можно получить, как и в случае испарения, перемножая площадь и толщину слоя, но сейчас мы этого делать не будем. Сейчас нас больше интересует тот факт, что, когда эти скорости равны, их отношение равно единице. Это говорит о том, что, как и раньше,  $(n_A n_B / n_{AB}) = c \exp(-W/kT)$ , где  $c$  содержит сечения, скорости и другие множители, не зависящие от чисел  $n$ .

Интересно, что скорость реакции по-прежнему изменяется как  $\exp(-\text{const}/kT)$ , хотя эта постоянная уже не имеет никакого отношения к той, с которой мы встречались в задаче о концентрациях; энергия активации  $A^*$  сильно отличается от энергии  $W$ . Энергия  $W$  регулирует пропорции  $A$ ,  $B$  и  $AB$ , при которых устанавливается равновесие, но если нам захочется узнать, быстро ли  $A + B$  переходит в  $AB$ , то это уже к равновесию отношения не имеет, и появляется уже другая энергия, энергия активации, которая с помощью экспоненты управляет скоростью реакции.

Кроме того,  $A^*$  не является фундаментальной постоянной, как  $W$ . Предположим, что реакция происходит на поверхности стены или на какой-нибудь другой поверхности, тогда  $A$  и  $B$  могут растечься по ней так, что объединение в  $AB$  будет для них более легким делом. Иначе говоря, сквозь гору можно прорыть «туннель» или срыть вершину горы. В силу сохранения энергии, по какому бы пути мы ни шли, результат будет один: из  $A$  и  $B$  получится  $AB$ , так что разность энергий  $W$  не зависит от пути, по которому идет реакция, однако энергия активации  $A^*$  очень сильно зависит от этого пути. Вот почему скорости химических реакций столь чувствительны к внешним условиям. Можно изменить скорость реакции, изменив поверхность, с которой соприкасаются реактивы, можно изготовить «набор бочонков» и подбирать с его помощью любые скорости, если они зависят от свойств поверхности. Можно внести в среду, в которой происходит реакция, третий предмет; это также может сильно изменить скорость реакции, такие веще-

ства при незначительном изменении  $A^*$  иногда чрезвычайно влияют на скорость реакции; их называют *катализаторами*. Реакции может практически не быть совсем, потому что  $A^*$  слишком велика для заданной температуры, но если добавив это специальное вещество — катализатор, то реакция протекает очень быстро, потому что  $A^*$  уменьшается.

Между прочим, эта реакция  $A$  плюс  $B$ , дающая  $AB$ , доставляет немало волнений. Ведь невозможно сохранить сразу и энергию, и импульс, пытаясь подогнать два предмета друг к другу, чтобы сделать из них один более устойчивый. Следовательно, необходим по крайней мере третий предмет  $C$  и реальная реакция выглядит гораздо сложнее. Скорость прямого процесса должна содержать произведение  $n_A n_B n_C$ , и можно подумать, что наша формула становится неверной, но это не так! Если мы начнем искать скорость развала  $AB$ , то выясним, что этой молекуле еще надо столкнуться с  $C$ , поэтому скорость обратной реакции пропорциональна  $n_{AB} n_C$  и из формулы для равновесных концентраций  $n_C$  выпадает. Правильность закона равновесия (42.9), который мы написали прежде всего, абсолютно гарантирована независимо от любого возможного механизма реакции!

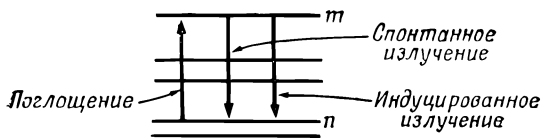
## § 5. Законы излучения Эйнштейна

Обратимся теперь к интересной задаче, похожей на только что описанную и связанную с законом излучения черного тела. В предыдущей главе мы разбирали вывод закона распределения излучения в полости по способу Планка, рассматривая излучение осциллятора. Осциллятор обладает определенной средней энергией, а раз он осциллирует, то должен и излучать и накачивать излучение в полость, пока она не заполнится как раз таким количеством излучения, которое нужно для поддержания равновесия между излучением и поглощением. Рассуждая таким образом, мы нашли, что интенсивность излучения частоты  $\omega$  задается формулой

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar \omega / kT} - 1)}. \quad (42.12)$$

Этот вывод содержит предположение, что генерирующий излучение осциллятор обладает определенными уровнями энергии, отстоящими друг от друга на равном расстоянии. Мы не говорили о том, то свет состоит из фотонов или чего-то вроде этого. Мы даже не задавали вопроса, каким способом при переходе атома с одного уровня энергии на другой переносится единичная энергия  $\hbar \omega$  в виде света. Первоначальная идея Планка состояла в том, что вещество квантовано, а свет — нет: осциллятор не может получать любую энергию, а





Фиг. 42.2. Переход между двумя уровнями энергии атома.

должен принимать ее порциями. Вызывает еще беспокойство то, что способ вывода — полуклассический. Мы вычислили скорость излучения осциллятора, исходя из законов классической физики, а потом забыли об этом и сказали: «Нет, этот осциллятор имеет много уровней энергии». Но для последовательно строгого вывода этой чисто квантовой формулы пришлось пройти длинный путь, завершившийся в 1927 г. созданием квантовой механики. А тем временем Эйнштейн попытался заменить точку зрения Планка, что квантованы только материальные осцилляторы, идеей о том, что свет в действительности состоит из фотонов и его следует в определенном смысле понимать как газ из частиц с энергией  $h\nu$ . Далее, Бор обратил внимание на то, что *любая* система атомов имеет уровни энергии, но расстояния между ними не обязательно постоянны, как у осцилляторов Планка. Поэтому возникла необходимость пересмотреть вывод или хотя бы более точно исследовать закон излучения, исходя из более последовательной квантовомеханической точки зрения.

Эйнштейн предположил, что окончательная формула Планка правильна и использовал ее для получения новой, ранее неизвестной информации о взаимодействии излучения с веществом. Он рассуждал так: надо рассмотреть любые два из возможных уровней энергии атома, скажем,  $m$ -й и  $n$ -й уровни (фиг. 42.2). Затем Эйнштейн предположил, что, когда атом освещается светом подходящей частоты, он может поглотить фотон, перейдя из состояния  $n$  в состояние  $m$ , и вероятность такого перехода за 1 сек пропорциональна интенсивности освещающего атом света и еще зависит от того, какие уровни мы возьмем.

Назовем постоянную пропорциональности  $B_{nm}$ , чтобы помнить, что это не универсальная постоянная природы и зависит она от того, какую пару уровней мы выберем: некоторые уровни возбудить легко, а другие возбуждаются с большим трудом. Теперь надо найти формулу, описывающую скорость перехода из  $m$  в  $n$ . Эйнштейн предположил, что она складывается из двух частей. Даже если внешнего излучения нет, существует вероятность того, что атом, излучив фотон, перейдет из возбужденного состояния в состояние с меньшей энергией. Это так называемое *спонтанное излучение*.

Это предположение аналогично идее о том, что даже классический осциллятор, обладая определенной энергией, не

может ее сохранить; излучение неизбежно вызывает потерю энергии. Таким образом, по аналогии со спонтанным излучением классических систем существует определенная вероятность  $A_{mn}$  (она опять зависит от уровней), с которой атом переходит из состояния  $m$  в состояние  $n$ , и эта вероятность не зависит от того, освещается атом светом или нет. Но Эйнштейн пошел еще дальше и, сравнив с классической физикой и используя другие аргументы, пришел к заключению, что излучение зависит от наличия света вокруг. Когда атом освещается светом подходящей частоты, то вероятность излучения фотона возрастает пропорционально интенсивности света с постоянной пропорциональности  $B_{mn}$ . Если бы нам удалось выяснить, что этот коэффициент равен нулю, то мы уличили бы Эйнштейна в ошибке. Но, конечно, мы увидим, что он был прав.

Итак, Эйнштейн предположил, что существует три сорта процессов: поглощение, пропорциональное интенсивности света, излучение, пропорциональное интенсивности света (его называют *индуцированным излучением* или *вынужденным излучением*), и спонтанное излучение, не зависящее от интенсивности света.

Предположим теперь, что при температуре  $T$  установилось равновесие, и в состоянии  $n$  находится некоторое количество атомов  $N_n$ , а в состоянии  $m$  — некоторое количество атомов  $N_m$ . Тогда полное число атомов, переходящих из  $n$  в  $m$ , равно произведению числа атомов в состоянии  $n$  на скорость перехода одного атома из состояния  $n$  в состояние  $m$ . Таким образом, мы получили формулу для числа атомов, переходящих за 1 сек из  $n$  в  $m$ :

$$R_{n \rightarrow m} = N_n B_{nm} I(\omega). \quad (42.13)$$

Число атомов, переходящих из  $m$  в  $n$ , получается точно таким же способом: надо умножить число атомов в состоянии  $m$  на скорость перехода одного атома. На этот раз получаемое выражение выглядит так:

$$R_{m \rightarrow n} = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)]. \quad (42.14)$$

Теперь предположим, что при тепловом равновесии число атомов, поднимающихся на верхний уровень, должно быть равно числу атомов, спускающихся вниз. Это по крайней мере один из способов удержать число атомов на каждом уровне постоянным\*. Следовательно, при равновесии мы считаем обе скорости равными. Но у нас в запасе есть

\* Это не только способ удержать число атомов на каждом уровне постоянным, но и действительный путь, который избирает природа. При тепловом равновесии каждый процесс должен уравновеситься противоположным процессом, это так называемый *принцип детального равновесия*.

еще кое-какая информация: мы знаем, насколько велико  $N_m$  по сравнению с  $N_n$ ; отношение этих чисел равно  $\exp[-(E_m - E_n)/kT]$ . После этого Эйнштейн предположил, что частота света, который вовлекается в игру при переходах из  $m$  в  $n$ , соответствует разности энергий, так что во всех наших формулах  $E_m - E_n = \hbar\omega$ . Итак,

$$N_m = N_n e^{-\hbar\omega/kT}. \quad (42.15)$$

Таким образом, если приравнять две скорости:  $N_n B_{mn} I(\omega) = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)]$  и поделить на  $N_m$ , то мы получим

$$B_{nm} I(\omega) e^{\hbar\omega/kT} = A_{mn} + B_{mn} I(\omega). \quad (42.16)$$

Из этого выражения можно найти  $I(\omega)$ . Это просто:

$$I(\omega) = \frac{A_{mn}}{B_{nm} e^{\hbar\omega/kT} - B_{mn}}. \quad (42.17)$$

Но Планк уже сказал нам, что формула должна иметь вид (42.12). Следовательно, мы можем сделать кое-какие выводы: прежде всего  $B_{mn}$  должно быть равно  $B_{nm}$ , потому что иначе  $\exp(\hbar\omega/kT) - 1$  не получить. Таким образом, Эйнштейн открыл некоторые соотношения, прямого вывода которых он не знал, например, что *вероятности вынужденного излучения и поглощения должны быть равны*. Это интересно. Кроме того, чтобы (42.17) и (42.12) согласовывались,

$$\frac{A_{mn}}{B_{mn}} \text{ должно быть равно } \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^2}. \quad (42.18)$$

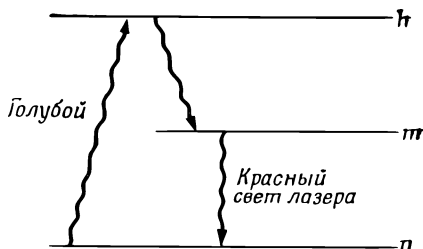
Значит, если известна, скажем, скорость поглощения для заданного уровня, то можно получить скорость спонтанного излучения и скорость вынужденного излучения или какую-нибудь комбинацию этих величин.

Больше этого на основании столь общих предположений ни Эйнштейн, ни вообще кто-либо получить не сможет. Чтобы действительно вычислить абсолютную скорость спонтанного излучения или вообще любую скорость специфически атомного перехода, нужно знать все скрытые механизмы атома. Этому учит так называемая квантовая электродинамика, открытая лишь одиннадцать лет спустя. А Эйнштейн предсказал все это в 1916 г.

Возможность вынужденного излучения в наши дни нашла интересное применение. Если есть свет, то он стремится вызвать переход сверху вниз. Тогда этот переход может увеличить энергию света на  $\hbar\omega$ , если найдутся такие атомы, у которых занят верхний уровень. Можно разработать нетепловой метод приготовления газа, в котором число состояний  $m$  гораздо больше числа состояний  $n$ . Газ будет очень

Фиг. 42.3. При возбуждении голубым светом атом поднимается на высший уровень  $n$  и, быстро испустив фотон, сваливается с него на уровень  $m$ .

Когда число атомов в состоянии  $m$  становится достаточно большим возникает действие лазера.



далек от равновесия, и формулу  $\exp(-\hbar\omega/kT)$ , верную для равновесия, к нему применить нельзя. Можно добиться даже, чтобы число занятых верхних состояний было очень большим, тогда как число атомов в нижнем состоянии практически будет равно нулю. Тогда свет с частотой, соответствующей разности энергий  $E_m - E_n$ , будет поглощаться очень слабо, потому что атомов, находящихся в состоянии  $n$  и способных поглотить его, очень мало. С другой стороны, когда газ из таких атомов освещен, то свет вызывает излучение из верхнего состояния! Таким образом, если в верхнем состоянии находится много атомов, то начинается что-то вроде цепной реакции, когда атомы вдруг начинают излучать; более того, они вынуждены излучать и все разом проваливаются в нижнее состояние. Так работает *лазер*, а если излучаются инфракрасные волны, то их источник называют *мазером*.

Чтобы загнать атомы в состояние  $m$ , прибегают к разным ухищрениям. Может существовать более высокий уровень, на который атомы можно поднять сильным пучком света высокой частоты. С этого высокого уровня атомы падают вниз, испуская самые различные фотоны, пока не соберутся на уровне  $m$ . Если атомы стремятся задержаться на уровне  $m$ , не излучая фотонов, то этот уровень называют *метастабильным*. А потом атомы разом спрыгивают с уровня  $m$ , сопровождая прыжок вынужденным излучением. Еще одна техническая деталь — если поместить нашу систему в обычный ящик, то она может спонтанно излучать во многих направлениях, что наносит ущерб вынужденному излучению. Но можно усилить эффект вынуждения и увеличить его значение, поставив у каждой стенки ящика почти полностью отражающие зеркала; тогда излученный свет получает шанс вызвать дополнительное излучение, следующее отражение добавит еще один такой шанс, а потом еще, еще и еще. Хотя зеркала отражают почти весь свет, существует небольшая вероятность прохождения части света сквозь зеркало и выхода наружу. В конце концов весь свет, подчиняясь закону сохранения энергии, выйдет наружу в виде тонкого, сильного пучка. Так и получают мощные пучки света в лазерах.

**ДИФФУЗИЯ**

**§ 1. Столкновения молекул**

До сих пор мы изучали движение молекул только при тепловом равновесии. А теперь нужно обсудить, как движутся молекулы газа, когда он близок к равновесию, но еще не достиг его полностью. Если газ слишком неравновесен, все становится чрезвычайно сложным и разобраться в том, что там происходит, очень трудно, а вот если отклонения от равновесия незначительны, то задачи решаются легко. Однако, чтобы рассмотреть, что происходит в таком газе, надо снова вернуться к кинетической теории. Статистическая механика и термодинамика пригодны, когда имеется равновесие, а чтобы проанализировать то, что происходит при отклонении от равновесия, приходится, так сказать, перебирать атом за атомом.

В качестве простого примера неравновесной задачи рассмотрим диффузию ионов в газе. Предположим, что в газе содержится немного ионов — электрически заряженных молекул. Если к газу приложить электрическое поле, то на каждый ион будет действовать сила, отличающаяся от сил, действующих на нейтральные молекулы. Если бы других молекул не было, то ион двигался бы с постоянным ускорением, пока не наткнулся бы на стенку ящика. Но наличие других молекул меняет дело: скорость иона возрастает лишь до тех пор, пока он не ударится о молекулу и не потеряет своего импульса. После этого он снова начинает ускоряться, но вновь теряет импульс. В результате ион вынужден двигаться по ломаному пути, хотя все же в конце концов он движется в направлении электриче-

- § 1. Столкновения молекул
- § 2. Средняя длина свободного пробега
- § 3. Скорость дрейфа
- § 4. Ионная проводимость
- § 5. Молекулярная диффузия
- § 6. Теплопроводность

ского поля. Мы замечаем, таким образом, что ион «дрейфует» со средней скоростью, пропорциональной электрическому полю; чем сильнее поле, тем быстрее движется ион. Конечно, пока существует поле и пока ион продолжает двигаться, *не может быть и речи* о тепловом равновесии. Система стремится прийти к равновесию, но для этого нужно, чтобы все ионы приклеились к стенке ящика. С помощью кинетической теории возможно вычислить скорость дрейфа ионов.

Наших математических познаний еще недостаточно, чтобы *точно* вычислить все, что произойдет, но мы можем получить приближенное решение, которое правильно передаст все существенные особенности явления. Мы можем определить зависимость эффекта от давления, температуры и т. п., но не в наших силах вычислить точно все коэффициенты, стоящие перед этими сомножителями. Поэтому не будем мучить себя заботой о точных значениях таких коэффициентов. Получить их можно только после очень тонкого математического анализа.

Прежде чем рассуждать о том, что происходит в отсутствие равновесия, посмотрим повнимательнее на равновесный газ. Необходимо, например, знать среднее время между двумя последовательными столкновениями молекулы.

Каждая молекула непрерывно сталкивается с другими молекулами. Происходят все эти столкновения, конечно, случайно. Если выбрать какую-нибудь молекулу, то за достаточно долгое время  $T$  она получит определенное число  $N$  ударов. Если увеличить промежуток времени вдвое, то и число ударов возрастет вдвое. Таким образом, число столкновений пропорционально времени  $T$ . Это можно выразить следующим образом:

$$N = \frac{T}{\tau}. \quad (43.1)$$

Мы записали постоянную пропорциональности в виде  $1/\tau$ , где  $\tau$  имеет размерность времени. Постоянная  $\tau$  — это среднее время между столкновениями. Предположим для примера, что за час происходит 60 столкновений; тогда  $\tau$  равно одной минуте. Мы будем говорить, что  $\tau$  (одна минута) это *среднее время* между столкновениями.

Часто нам придется искать ответ на такой вопрос: какова *вероятность* того, что молекула испытает столкновение в течение *малого промежутка* времени  $dt$ ? Мы догадываемся, что эта вероятность равна  $dt/\tau$ . Попытаемся, однако, привести более убедительные аргументы. Предположим, что в нашем распоряжении имеется очень большое число  $N$  молекул. Сколько молекул из этого числа столкнется в течение интервала времени  $dt$ ? Если молекулы находятся в равновесном

состоянии, то ничего не будет меняться *в среднем* со временем. Таким образом,  $N$  молекул, пробывших в ящике в течение интервала  $dt$ , испытают столько же соударений, сколько *одна* молекула за время  $Ndt$ . Число соударений одной молекулы за большое время  $Ndt$  известно — это  $Ndt/\tau$ . А если число соударений между  $N$  молекулами за время  $dt$  равно  $Ndt/\tau$ , то вероятность удара для одной молекулы равна  $1/N$  части этой величины, или  $(1/N)(Ndt/\tau) = dt/\tau$  (как мы и говорили с самого начала). Таким образом, относительное число молекул, сталкивающихся за время  $dt$ , грубо говоря, равно  $dt/\tau$ . Если, например,  $\tau$  равно одной минуте, то за секунду столкнется  $1/60$  часть всех молекул.

Это означает, конечно, что если в данный момент  $1/60$  часть молекул подошла достаточно близко к тем, с кем они должны столкнуться, то *их* столкновение произойдет в течение следующей секунды.

Когда мы говорим, что  $\tau$  (среднее время между столкновениями) равно одной минуте, то мы вовсе не считаем, что все столкновения разделены в точности минутными интервалами. Частица, столкнувшись, совсем не выжидает потом еще минуту, чтобы нанести следующий удар. Промежутки между последовательными столкновениями весьма различны. В дальнейшем, правда, нам это не понадобится, но можно задать такой вопрос: а чему все же *равно* время между столкновениями? Мы уже знаем, что в приведенном выше примере *среднее* время равно одной минуте, но нам, быть может, нужно знать, какова вероятность того, что молекула не столкнется ни с кем в течение *двух* минут?

Ответим на более общий вопрос: какова вероятность того, что молекула не испытает ни одного столкновения за время  $t$ ? Начнем в какой-то произвольный момент времени, который мы назовем  $t = 0$ , следить за определенной молекулой. Какова вероятность того, что до момента встречи ее с другой молекулой пройдет время  $t$ ? Чтобы вычислить вероятность, посмотрим, что случится со всеми  $N_0$  молекулами, находящимися в ящике. Пока мы ждем в течение времени  $t$ , некоторые молекулы испытают столкновения. Пусть  $N(t)$  — число молекул, *не испытавших* столкновений за время  $t$ . Мы можем определить  $N(t)$ , ибо нам известно, как это число меняется со временем. Это число  $N(t)$ , естественно, меньше общего числа молекул  $N_0$ . Если мы знаем, что за время  $t$  избежать столкновений удалось  $N(t)$  молекулам, то  $N(t + dt)$  (число молекул, которым удалось сделать это за время  $t + dt$ ) *меньше*  $N(t)$  на число молекул, все-таки столкнувшихся за время  $dt$ . Мы уже раньше научились определять число молекул, которым не удалось избежать столкновений за время  $dt$ , с помощью среднего времени  $\tau$ :  $dN = N(t) dt/\tau$ .

Мы получаем уравнение

$$N(t + dt) = N(t) - N(t) \frac{dt}{\tau}. \quad (43.2)$$

Величину, стоящую в левой части уравнения,  $N(t + dt)$ , можно в согласии с общими правилами дифференциального исчисления записать в виде  $N(t) + (dN/dt)(dt)$ . Сделав эту подстановку, мы приведем уравнение (43.2) к виду

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau}. \quad (43.3)$$

Число молекул, выбывших из игры за промежуток  $dt$ , пропорционально числу наличных молекул и обратно пропорционально среднему времени жизни  $\tau$ . Уравнение (43.3) легко проинтегрировать, если переписать его в виде

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\frac{dt}{\tau}. \quad (43.4)$$

Поскольку в каждой части стоит полный дифференциал, то интеграл уравнения таков:

$$\ln N(t) = -\frac{t}{\tau} + \text{постоянная}, \quad (43.5)$$

или, что то же самое,

$$N(t) = (\text{постоянная}) e^{-t/\tau}. \quad (43.6)$$

Мы знаем, что постоянная должна быть равна  $N_0$  — полному числу молекул, потому что в начальный момент  $t = 0$  все молекулы ждут «следующего» удара. Мы можем записать наш результат в виде

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}. \quad (43.7)$$

Если мы хотим определить *вероятность*  $P(t)$  того, что молекула не испытает столкновений, нужно величину  $N(t)$  поделить на  $N_0$ ; тогда получим

$$P(t) = e^{-t/\tau}. \quad (43.8)$$

Вот наш результат: вероятность того, что какая-то молекула сможет прожить время  $t$ , не столкнувшись, равна  $\exp(-t/\tau)$ , где  $\tau$  — среднее время между столкновениями. Вероятность эта начинается с 1 (очевидности) при  $t = 0$  и уменьшается по мере того, как  $t$  становится все больше и больше. Вероятность того, что молекула избежит столкновений за время  $\tau$ , равна  $e^{-1} = 0,37...$  Шансов выдержать дольше, чем среднее время между столкновениями, меньше половины. В этом нет ничего странного, потому что существует достаточно много молекул, которые избегают столкновений значительно *дольше* среднего времени между столкновениями, так что среднее время между столкновениями по-прежнему равно  $\tau$ .



Первоначально мы определили  $\tau$  как среднее время между столкновениями. Сформулированный в виде уравнения (43.7) результат говорит нам, что среднее время, отсчитываемое от произвольно взятого момента до следующего столкновения, также равно  $\tau$ . Этот несколько удивительный факт можно продемонстрировать следующим образом. Число молекул, которые испытают их следующее столкновение в промежутке  $dt$ , отсчитанного от времени  $t$  после произвольно взятого начального времени, равно  $N(t)dt/\tau$ . Их «промежуток времени до следующего столкновения» равен, конечно,  $t$ . «Среднее время до следующего столкновения» получается обычным образом:

$$\text{Среднее время до следующего столкновения} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \frac{N(t)}{\tau} dt.$$

Используя полученное из (43.7) число  $N(t)$  и вычисляя интеграл, найдем, что  $\tau$ —это среднее время, отсчитанное от любого момента до следующего столкновения.

## § 2. Средняя длина свободного пробега

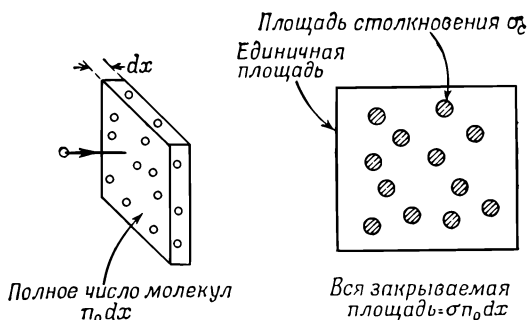
Есть еще возможность описать столкновения молекул, не вводя для этого времени между столкновениями. Можно определить, далеко ли успеет уйти частица между столкновениями. Если мы знаем, что среднее время между столкновениями равно  $\tau$ , а средняя скорость молекул равна  $v$ , то очевидно, что среднее расстояние между столкновениями, которое мы обозначим буквой  $l$ , равно произведению  $\tau$  и  $v$ . Это расстояние между столкновениями обычно называют длиной свободного пробега:

$$\text{Длина свободного пробега } l = v\tau. \quad (43.9)$$

В этой главе мы не будем уточнять, какого рода среднее мы имеем в виду в каждом случае. Существующие разные средние—среднее, корень из среднего квадрата и т. д.—приблизительно равны и отличаются только множителями, близкими к единице. Поскольку для получения правильных множителей необходим подробный анализ, нам нет смысла очень уж стараться уточнить, какое именно среднее используется в том или ином случае. Мы хотим еще предупредить читателей, что используемые для обозначения физических величин алгебраические символы (например,  $l$  для длины свободного пробега) не являются общепринятыми просто потому, что об этом никто еще специально не договаривался.

Вероятность того, что молекула испытает столкновение, пройдя расстояние  $dx$ , равна  $dx/l$ , как вероятность столкновения за короткий промежуток времени  $dt$  равна  $dt/\tau$ . Привзав на помощь те же аргументы, что и раньше, читатель

Фиг. 43.1. Эффективное сечение столкновения.



сможет показать, что вероятность того, что молекула пройдет по крайней мере расстояние  $x$ , прежде чем испытает следующее столкновение, равна  $e^{-x/l}$ .

Среднее расстояние, которое молекула проходит между столкновениями (длина свободного пробега  $l$ ), зависит от количества молекул, ее окружающих, и от того, какого «размера» эти молекулы, т. е. от того, насколько уязвимую мишень представляют они собой. «Размеры» мишени при столкновениях обычно описывают при помощи «эффективного сечения столкновений»; эта же идея используется и в ядерной физике или в задачах о рассеянии света.

Рассмотрим движущуюся частицу, которая проходит расстояние  $dx$  внутри газа, содержащего  $n_0$  рассеивателей (молекул) в единичном объеме (фиг. 43.1). На каждой площадке единичной площади, перпендикулярной к направлению движения выбранной нами частицы, имеется  $n_0 dx$  молекул. Если каждая может быть представлена эффективной площадью столкновения, или, как обычно говорят, «эффективным сечением столкновения»  $\sigma_c$ , то полная площадь, покрываемая рассеивателями, равна  $\sigma_c n_0 dx$ .

Под «эффективным сечением столкновения» понимается площадь, в которую должен попасть центр частицы, если она должна столкнуться с заданной молекулой. Если молекулы выглядят как маленькие шарики (классическая картина), то следует ожидать, что  $\sigma_c = \pi(r_1 + r_2)^2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы двух сталкивающихся молекул. Вероятность того, что наша частица столкнется с какой-нибудь молекулой, равна отношению площади, покрываемой рассеивающими молекулами, к полной площади, принятой нами за единицу. Таким образом, вероятность столкновения на пути  $dx$  равна  $\sigma_c n_0 dx$ :

$$\text{Вероятность столкновения на пути } dx = \sigma_c n_0 dx. \quad (43.10)$$

Мы уже отметили раньше, что вероятность столкновения на пути  $dx$  может быть записана в терминах длины свободного пробега  $l$  как  $dx/l$ . Сравнивая это с (43.10), можно

связать длину свободного пробега с эффективным сечением столкновения:

$$\frac{1}{l} = \sigma_c n_0. \quad (43.11)$$

Это равенство легче запомнить, если записать его так:

$$\sigma_c n_0 l = 1. \quad (43.12)$$

Эта формула говорит, что если частица проходит путь  $l$  внутрь рассеивателя, в котором молекулы *могут* как раз покрыть всю площадь, то в среднем происходит одно столкновение. В цилиндре высотой  $l$ , поставленном на основании единичной площади, содержится  $n_0 l$  рассеивателей; если каждый из них занимает площадь  $\sigma_c$ , то полная площадь, покрытая ими, равна  $n_0 l \sigma_c$ , а это как раз единичная площадь. Конечно, молекулы *не покрывают* всей площади целиком, потому что часть молекул прячется за соседние молекулы. Поэтому некоторые молекулы пройдут между столкновениями большее, чем  $l$ , расстояние. Ведь это только *в среднем* молекулам между столкновениями дается ровно столько времени, чтобы они смогли пройти расстояние  $l$ . Измеряя длину свободного пробега  $l$ , можно определить эффективное сечение рассеяния  $\sigma_c$  и сравнить этот результат с расчетами, основанными на детальной теории строения атомов. Но это уже совсем другая тема! А пока вернемся к проблеме неравновесных состояний.

### § 3. Скорость дрейфа

Мы хотим описать поведение одной или нескольких молекул, которые чем-то отличаются от огромного большинства остальных молекул газа. Будем называть «большинство» молекул молекулами «фона», а отличающиеся от них молекулы получат название «особых» молекул, или (для краткости)  $S$ -молекул. Молекула может быть особой по целому ряду причин: она может быть, скажем, тяжелее молекул фона. Может она отличаться от них также химическим составом. А, может быть, особые молекулы несут электрический заряд — тогда это будет ион на фоне нейтральных молекул. Из-за необычности масс или зарядов на  $S$ -молекулы действуют силы, отличающиеся от сил между молекулами фона. Изучая поведение  $S$ -молекул, можно понять основные эффекты, которые вступают в игру во многих разнообразных явлениях. Перечислим некоторые из них: диффузия газов, электрический ток в батарее, осаждение, разделение при помощи центрифуги и т. д.

Начнем с изучения основного процесса: на  $S$ -молекулу в газе из молекул фона действуют какая-то особая сила **F**

(это может быть сила тяжести или электрическая сила) и, кроме того, более обычные силы, обусловленные столкновениями с молекулами фона. Нас интересует *общий* характер поведения  $S$ -молекулы. Детальное описание ее поведения — это непрерывные стремительные удары и следующие одно за другим столкновения с другими молекулами. Но если проследить внимательно, то станет ясно, что молекула неуклонно движется по направлению силы  $F$ . Мы говорим, что *дрейф* накладывается на беспорядочное движение. Но нам хотелось бы знать, как зависит *скорость дрейфа* от силы  $F$ .

Если в какой-то произвольный момент времени начать наблюдать за  $S$ -молекулой, то можно надеяться, что попали мы как раз где-то между двумя столкновениями. Это время молекула употребит на то, чтобы в дополнение к скорости, оставшейся у нее после всех столкновений, увеличить составляющую скорости вдоль силы  $F$ . Немного погодя (в среднем через время  $\tau$ ) она снова испытает столкновение и начнет двигаться по новому отрезку своей траектории. Стартовая скорость, конечно, будет другой, а ускорение от силы  $F$  останется неизменным.

Чтобы упростить сейчас дело, предположим, что после каждого столкновения наша  $S$ -молекула выходит на совершенно «свободный» старт. Это значит, что у нее не осталось никаких воспоминаний о прежних ускорениях под действием силы  $F$ . Такое предположение было бы разумным, если бы наша  $S$ -молекула была намного легче молекул фона, но это, конечно, не так. Позднее мы обсудим более разумное предположение.

А пока предположим, что все направления скорости  $S$ -молекулы после каждого столкновения равновероятны. Стартовая скорость имеет любое направление и не может дать никакого вклада в результирующее движение, поэтому мы не будем принимать во внимание начальную скорость после каждого столкновения. Но, кроме случайного движения, каждая  $S$ -молекула в любой момент имеет дополнительную скорость в направлении силы  $F$ , которая увеличивается *со времени* последнего столкновения. Чему равно *среднее* значение этой части скорости? Оно равно произведению ускорения  $F/m$  (где  $m$  — масса  $S$ -молекулы) на *среднее* время, прошедшее с момента последнего столкновения. Но среднее время, прошедшее *после последнего* столкновения, должно быть равно среднему времени *перед следующим* столкновением, которое мы уже обозначили буквой  $\tau$ . Средняя скорость, порождаемая силой  $F$ , — это как раз скорость дрейфа; таким образом, мы пришли к соотношению

$$V_{др} = \frac{F\tau}{m}. \quad (43.13)$$

Это наше основное соотношение, главное во всей главе. При нахождении  $\tau$  могут появиться всякого рода осложнения, но основной процесс определяется уравнением (43.13).

Обратите внимание, что скорость дрейфа *пропорциональна* силе. К сожалению, о названии для постоянной пропорциональности еще не договорились. Коэффициент перед силой каждого сорта имеет свое название. В задачах, связанных с электричеством, силу можно представить как произведение заряда на электрическое поле:  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ; в этом случае постоянную пропорциональности между скоростью и электрическим полем  $\mathbf{E}$  называют «подвижностью». Несмотря на возможные недоразумения, мы будем применять термин *подвижность* для отношения скорости дрейфа к силе *любого* сорта. Будем писать

$$v_{\text{др}} = \mu F \quad (43.14)$$

и называть  $\mu$  подвижностью. Из уравнения (43.13) следует

$$\mu = \frac{\tau}{m}. \quad (43.15)$$

Подвижность пропорциональна среднему времени между столкновениями (редкие столкновения слабо тормозят  $S$ -молекулу) и обратно пропорциональна массе (чем больше инерция, тем медленнее набирается скорость между столкновениями).

Чтобы получить правильный численный коэффициент в уравнении (43.13) (а у нас он верен), нужна известная осторожность. Во избежание недоразумений нужно помнить, что мы используем коварные аргументы, и употреблять их можно только после осторожного и детального изучения. Чтобы показать, какие бывают трудности, хотя по виду вроде все благополучно, мы снова вернемся к тем аргументам, которые привели к выводу уравнения (43.13), но эти аргументы, которые выглядят вполне убедительно, приведут теперь к *неверному результату* (к сожалению, такого рода рассуждения можно найти во многих учебниках!).

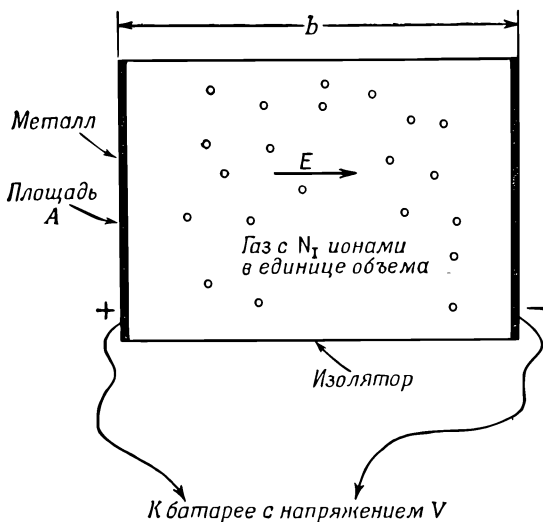
Можно рассуждать так: среднее время между столкновениями равно  $\tau$ . После столкновения частица, начав двигаться со случайной скоростью, набирает перед следующим столкновением дополнительную скорость, которая равна произведению времени на ускорение. Поскольку до *следующего* столкновения пройдет время  $\tau$ , то частица наберет скорость  $(F/m)\tau$ . В момент столкновения эта скорость равна нулю. Поэтому средняя скорость между двумя столкновениями равна половине окончательной скорости, а средняя скорость дрейфа равна  $1/2 F\tau/m$ . (Неверно!) Этот вывод неверен, а уравнение (43.13) правильно, хотя, казалось бы, в обоих случаях мы рассуждали одинаково убедительно. Во второй результат

вкралась довольно коварная ошибка: при его выводе мы фактически предположили, что все столкновения отстоят друг от друга на время  $\tau$ . На самом деле некоторые из них наступают раньше, а другие позже этого времени. Более короткие времена встречаются *чаще*, но их вклад в скорость дрейфа *невелик*, потому что слишком мала в этом случае вероятность «реального подталкивания вперед». Если принять во внимание существование *распределения* свободного времени между столкновениями, то мы увидим, что множителю  $1/2$ , полученному во втором случае, неоткуда взяться. Ошибка произошла из-за того, что мы, обманувшись простотой аргументов, попытались слишком просто связать среднюю скорость со *средней конечной* скоростью. Связь между ними не столь уж проста, поэтому лучше подчеркнуть, что нам нужна средняя скорость сама по себе. В первом случае мы с самого начала искали среднюю скорость и нашли ее верное значение! Быть может, теперь вам понятно, почему мы не пытались найти точного значения всех численных коэффициентов в наших элементарных уравнениях?

Вернемся к нашему предположению о том, что каждое столкновение полностью стирает из памяти молекулы все о былом ее движении и что после каждого столкновения для молекулы начинается новый старт. Предположим, что наша  $S$ -молекула — это тяжелый объект на фоне более легких молекул. Тогда уже недостаточно одного столкновения, чтобы отобрать у  $S$ -молекулы ее направленный «вперед» импульс. Только несколько последовательных столкновений вносят в ее движение «беспорядок». Итак, вместо нашего первоначального рассуждения предположим теперь, что после каждого столкновения (в среднем через время  $\tau$ )  $S$ -молекула теряет определенную часть своего импульса. Мы не будем исследовать детально, к чему приведет такое предположение. Ясно, что это эквивалентно замене времени  $\tau$  (среднего времени между столкновениями) другим, более длинным  $\tau$ , соответствующим среднему «времени забывания», т. е. среднему времени, за которое  $S$ -молекула забудет о том, что у нее когда-то был импульс, направленный вперед. Если понимать  $\tau$  так, то можно использовать нашу формулу (43.13) для случаев, не столь простых, как первоначальный.

#### § 4. Ионная проводимость

Применим наши результаты к частному случаю. Предположим, что в сосуде, заполненном газом, содержатся также ионы — атомы или молекулы с избыточным электрическим зарядом. Схематически это выглядит так, как на фиг. 43.2. Если две противоположные стенки сосуда сделаны из



Фиг. 43.2. Электрический ток в ионизованном газе.

металлических пластин, то их можно подсоединить к полюсам батареи и создать таким образом в газе электрическое поле.

Электрическое поле будет с некоторой силой воздействовать на ионы, и они начнут свой дрейф к одной из пластин. В результате возникнет электрический ток, и газ со своими ионами будет работать как сопротивление. Выразив через скорость дрейфа ионный поток, можно рассчитать величину сопротивления. Больше всего нас интересует зависимость ионного потока от приложенной к пластинам разности потенциалов  $V$ .

В нашем случае сосуд — это прямоугольный ящик, длина которого  $b$ , а площадь поперечного сечения  $A$  (см. фиг. 43.2). Если к пластинам приложена разность потенциалов  $V$ , то электрическое поле  $E$  между пластинами равно  $V/b$ . (Электрический потенциал — это работа, совершаемая при переносе единичного заряда от одной пластины к другой. Сила, действующая на единичный заряд, равна  $E$ . Если значение  $E$  одинаково всюду между пластинами, что можно с достаточным основанием предположить в нашем случае, то затраченная на единичный заряд работа равна  $Eb$ , т. е.  $V = Eb$ .) В нашем случае на ионы действует сила  $qE$ , где  $q$  — заряд иона. Скорость дрейфа иона равна произведению силы на  $\mu$ :

$$v_{др} = \mu F = \mu q E = \mu q \frac{V}{b}. \quad (43.16)$$

Электрический ток  $I$  равен потоку заряда за 1 сек. Электрический ток через одну из пластин равен, таким образом, полному заряду ионов, достигающих пластины за 1 сек. Если

ионы движутся к пластине со скоростью  $v_{др}$ , то за время  $T$  пластины достигнут те ионы, которые находились не дальше, чем на расстоянии  $v_{др}T$  от нее. Если в единичном объеме содержится  $n_i$  ионов, то за время  $T$  на пластине высадится  $n_i A v_{др} T$  ионов. Каждый ион несет заряд  $q$ , поэтому

$$\text{Собранный за время } T \text{ заряд} = q n_i A v_{др} T. \quad (43.17)$$

Ток  $I$  — это отношение собранного за время  $T$  заряда к времени  $T$ :

$$I = q n_i A v_{др}. \quad (43.18)$$

Подставляя сюда скорость дрейфа  $v_{др}$  из (43.16), получаем

$$I = \mu q^2 n_i \frac{A}{b} V. \quad (43.19)$$

Мы выяснили, что ток пропорционален разности потенциалов, это и есть закон Ома, а сопротивление  $R$  равно обратной постоянной пропорциональности:

$$\frac{1}{R} = \mu q^2 n_i \frac{A}{b}. \quad (43.20)$$

Мы нашли связь сопротивления со свойствами молекул  $n_i$ ,  $q$  и  $\mu$ , которое в свою очередь зависит от  $\tau$  и  $m$ . Если мы при помощи атомных измерений определим  $n_i$  и  $q$ , то, измеряя  $R$ , можно определить  $\mu$ , а потом и  $\tau$ .

## § 5. Молекулярная диффузия

Перейдем к другой задаче, для которой нам придется несколько изменить метод анализа, — к задаче о диффузии. Предположим, что мы взяли ящик, заполненный газом, находящимся в тепловом равновесии, а потом в любое место внутри ящика впрыснули небольшое количество другого газа. Назовем первоначальный газ газом «фона», а новый газ — «особым» газом. Особый газ начинает распространяться по всему ящику, но распространение это замедляется наличием молекул фона. Явление такого замедленного распространения называется *диффузией*. Диффузия в основном определяется столкновениями молекул особого газа с молекулами фона. После многих столкновений особые молекулы более или менее равномерно распределяются по всему ящику. Важно *не спутать* диффузию газа с переносом больших количеств вещества в результате конвекционных токов. Обычно смешение двух газов происходит именно в результате комбинации конвекции и диффузии. Сейчас нас интересует только такое перемешивание, которое *не сопровождается «порывами ветра»*. Газ распространяется только благодаря молекулярному движению, т. е. происходит диффузия. Давайте выясним, быстро ли происходит диффузия.



Итак, мы приступаем к вычислению *общего потока* молекул особого газа, порождаемого молекулярным движением. Общий поток не равен нулю только тогда, когда распределение молекул отличается от равновесного, иначе усреднение молекулярного движения сводит общий поток к нулю. Рассмотрим сначала поток в направлении оси  $x$ . Чтобы определить, чему этот поток равен, мы должны вообразить площадку, перпендикулярную к оси, и подсчитать число молекул, пересекающих эту площадку. Чтобы определить общий поток, мы должны считать положительными те молекулы, которые движутся в направлении положительных  $x$ , и *вычитать* из этого числа те молекулы, которые движутся в противоположном направлении. Как мы неоднократно убеждались, число молекул, пересекающих площадку в течение времени  $\Delta T$ , равно числу молекул, находящихся к началу интервала  $\Delta T$  внутри объема, заключенного между нашей площадкой и площадкой, расположенной от нее на расстоянии  $v\Delta T$ . (Заметим, что здесь  $v$  — настоящая скорость молекулы, а отнюдь не скорость дрейфа.)

Мы упростим наши выкладки, если возьмем площадку единичной площади. Тогда число особых молекул, пересекающих площадку слева направо (справа от площадки лежат положительные  $x$ -направления), равно  $n_-v\Delta T$ , где  $n_-$  — число особых молекул в единичном объеме слева от площадки (с точностью до множителя  $\sim 1/6$ , но мы такими множителями пренебрежем!). Аналогично, число особых молекул, движущихся справа налево, равно  $n_+v\Delta T$ , где  $n_+$  — плотность особых молекул справа от площадки. Если мы обозначим молекулярный поток буквой  $J$ , под которой мы будем понимать общий поток молекул через единичную площадку за единицу времени, то получим

$$J = \frac{n_-v\Delta T - n_+v\Delta T}{\Delta T}, \quad (43.21)$$

или

$$J = (n_- - n_+)v. \quad (43.22)$$

А что понимать под  $n_-$  и  $n_+$ ? Когда мы говорим «плотность слева от площадки», то как *далеко* налево? Мы должны измерить плотность в том месте, откуда молекула отправляется в свой «свободный полет», потому что число стартующих молекул определяется числом молекул, находящихся в этом месте. Таким образом,  $n_-$  — это плотность молекул на расстоянии длины свободного пробега  $l$  слева от нашей воображаемой площадки, а  $n_+$  — плотность молекул на расстоянии длины свободного пробега справа от нее.

Распределение особых молекул в ящике удобно описывать с помощью непрерывной функции  $x$ ,  $y$  и  $z$ , которую мы

обозначим  $n_a$ . Под  $n_a(x, y, z)$  нужно понимать плотность особых молекул в маленьком объеме вокруг точки  $(x, y, z)$ . Тогда разность  $(n_+ - n_-)$  можно представить в виде

$$(n_+ + n_-) = \frac{dn_a}{dx} \Delta x = \frac{dn_a}{dx} \cdot 2l. \quad (43.23)$$

Подставляя этот результат в (43.22) и пренебрегая множителем 2, получаем

$$J_x = -lv \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.24)$$

Мы выяснили, что поток особых молекул пропорционален производной плотности, или, как иногда говорят, «градиенту плотности».

Ясно, что мы сделали несколько грубых приближений. Не говоря уже о том, что мы постоянно забывали о множителях, мы использовали  $v$ , когда нужно было ставить  $v_x$ , а разместив объемы, содержащие молекулы  $n_+$  и  $n_-$ , на концах перпендикуляров к площадке, взяли перпендикуляры длиной  $l$ . Между тем для тех молекул, которые движутся не перпендикулярно к поверхности,  $l$  соответствует длине *наклонного* пути. Можно исправить эти недостатки; более тщательный анализ показал бы, что правую часть уравнения (43.24) нужно умножить на  $1/3$ . Итак, более правильный ответ выглядит следующим образом:

$$J_x = -\frac{lv}{3} \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.25)$$

Аналогичные уравнения можно написать для токов вдоль  $y$ - и  $z$ -направлений.

С помощью макроскопических наблюдений можно измерить ток  $J_x$  и градиент плотности  $dn_a/dx$ . Их отношение, найденное экспериментально, называется «коэффициентом диффузии»  $D$ . Это значит, что

$$J_x = -D \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.26)$$

Мы смогли показать, что ожидаемое значение коэффициента  $D$  для газа равно

$$D = \frac{1}{3} lv. \quad (43.27)$$

Пока мы изучили в этой главе два разных процесса: *подвижность* (дрейф молекул под действием «внешней» силы) и *диффузию* (разбегание молекул, определяемое только внутренними силами, случайными столкновениями). Однако эти процессы связаны друг с другом, потому что в основе обоих явлений лежит тепловое движение, и оба раза в расчетах появлялась длина свободного пробега  $l$ .

Если в уравнение (43.25) подставить  $l = v\tau$  и  $\tau = \mu m$ , то получится

$$J_x = -\frac{1}{3} m v^2 \mu \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.28)$$

Но  $mv^2$  зависит только от температуры. Мы еще помним, что

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT, \quad (43.29)$$

так что

$$J_x = -\mu kT \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.30)$$

Таким образом,  $D$ , коэффициент *диффузии*, равен произведению  $kT$  на  $\mu$ , коэффициент *подвижности*:

$$D = \mu kT. \quad (43.31)$$

Оказывается, что (43.31) — это *точное* соотношение между коэффициентами. Хотя мы исходили из очень грубых предположений, не нужно к нему добавлять никаких дополнительных множителей. Можно показать, что (43.31) в самом деле *всегда* удовлетворяется точно. Это верно даже в очень сложных случаях (например, для случая взвешенных в жидкости мелких частиц), когда наши простые вычисления явно отказываются служить.

Чтобы показать, что (43.31) верно в самых общих случаях, мы выведем его иначе, используя только основные принципы статистической механики. Представьте себе, что почему-то существует градиент «особых» молекул и возник ток диффузии, пропорциональный, согласно (43.26), градиенту плотности. Тогда мы создадим в направлении оси  $x$  силовое поле так, что на каждую особую молекулу будет действовать сила  $F$ . По *определению* подвижности  $\mu$  скорость дрейфа дается соотношением

$$v_{др} = \mu F. \quad (43.32)$$

Используя обычные аргументы, можно найти *ток дрейфа* (*общее* число молекул, пересекающих единичную площадку за единицу времени):

$$J_{др} = n_a v_{др}, \quad (43.33)$$

или

$$J_{др} = n_a \mu F. \quad (43.34)$$

А теперь можно так *распорядиться* силой  $F$ , что ток дрейфа, вызываемый силой  $F$ , *компенсирует* диффузию, тогда *полный ток* особых молекул будет равен нулю. В этом случае мы имеем  $J_x + J_{др} = 0$ , или

$$D \frac{dn_a}{dx} = n_a \mu F. \quad (43.35)$$

В этом случае «компенсации» существует постоянный (во времени) градиент плотности, равный

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a \mu F}{D}. \quad (43.36)$$

Теперь уже легко соображать дальше! Ведь мы добились *равновесия* и можем теперь применять наши *равновесные* законы статистической механики. По этим законам вероятность найти молекулу около точки  $x$  пропорциональна  $\exp(-U/kT)$ , где  $U$  — потенциальная энергия. Если говорить о плотности молекул  $n_a$ , то это значит:

$$n_a = n_0 e^{-U/kT}. \quad (43.37)$$

Дифференцируя (43.37) по  $x$ , получаем

$$\frac{dn_a}{dx} = -n_0 e^{-U/kT} \frac{1}{kT} \frac{dU}{dx}, \quad (43.38)$$

или

$$\frac{dn_a}{dx} = -\frac{n_a}{kT} \frac{dU}{dx}. \quad (43.39)$$

В нашем случае сила  $F$  направлена вдоль оси  $x$  и потенциальная энергия  $U$  равна  $-Fx$ , а  $-dU/dx = F$ . Уравнение (43.39) принимает вид

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a F}{kT}. \quad (43.40)$$

[Это в точности уравнение (40.2), из которого мы и вывели  $\exp(-U/kT)$ ; круг замкнулся.] Сравнивая (43.40) и (43.36), мы получаем уравнение (43.31). Мы показали, что в уравнении (43.31), которое выражает ток диффузии через подвижность, все коэффициенты правильны, а само уравнение правильно всегда. Подвижность и диффузия тесно связаны. Эту связь открыл Эйнштейн.

## § 6. Теплопроводность

Методы кинетической теории, которую мы так успешно применяли, позволяют также рассчитать и *теплопроводность* газа. Если газ в верхней части ящика горячее, чем внизу, то тепло перетечет сверху вниз. (Мы предполагаем, что теплее верхняя часть ящика, потому что в противном случае возникнут поднимающиеся вверх конвекционные токи, а этот случай уже не имеет отношения к *теплопроводности*.) Перенос тепла от горячего газа к холодному вызывается диффузией «горячих» молекул (т. е. молекул с большой энергией) вниз и диффузией «холодных» молекул вверх. Чтобы вычислить поток тепловой энергии, мы должны узнать сначала об энергии, переносимой через выделенную площадку сверху вниз

(ее переносят движущиеся вниз молекулы), потом об энергии, переносимой через эту же площадку снизу вверх (за это уже отвечают молекулы, поднимающиеся вверх). Разность этих потоков энергии даст нам полный поток энергии сверху вниз.

Теплопроводность  $\kappa$  определяется как отношение скорости переноса тепловой энергии через единичную площадку к градиенту температуры:

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = -\kappa \frac{dT}{dz}. \quad (43.41)$$

Поскольку ход вычислений теплопроводности очень похож на вычисление потока заряженных частиц в ионизованном газе, то мы предлагаем читателю в виде упражнения доказать, что

$$\kappa = \frac{knlv}{\gamma - 1}, \quad (43.42)$$

при этом  $kT/\gamma - 1$  — средняя энергия молекулы при температуре  $T$ .

Если вспомнить о соотношении  $nl\sigma_c = 1$ , то теплопроводность можно записать в виде

$$\kappa = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{kv}{\sigma_c}. \quad (43.43)$$

Мы получили поистине удивительный результат. Известно, что средняя скорость молекул газа зависит от температуры и *не зависит от плотности*. Можно думать, что  $\sigma_c$  зависит только от *размеров* молекул. Таким образом, наш очень простой вывод сводится к тому, что теплопроводность  $\kappa$  (а следовательно, и *скорость* потока тепла в каждом частном случае) не зависит от *плотности* газа! Изменение числа «носителей» энергии при изменениях плотности в точности компенсируется изменением расстояния, которое пробегает «носитель» между столкновениями.

А теперь можно спросить: действительно ли поток тепла всегда не зависит от плотности газа? Ну а если плотность стремится к нулю и в ящике совсем не остается газа? Конечно, нет! Формула (43.43), как и другие формулы этой главы, выведена в предположении, что средняя длина свободного пробега между столкновениями гораздо меньше любых размеров ящика. Если плотность газа столь мала, что молекула имеет неплохие шансы пробежаться от одной стенки ящика к другой, ни разу не столкнувшись, то все вычисления этой главы рухнут. В этих случаях следует вернуться к кинетической теории и заново все детально рассчитать,

## ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

### § 1. Тепловые машины; первый закон

До сих пор мы рассматривали свойства вещества с атомной точки зрения, причем мы пытались, хотя бы в общих чертах, понять, что произойдет, если принять, что вещество состоит из атомов, подчиняющихся тем или иным законам. Однако вещество обладает и такими свойствами, которые можно понять, не изучая подробно его строения. Поисками соотношений между различными свойствами вещества, не углубляясь в изучение внутреннего его строения, занимается *термодинамика*. Исторически термодинамика стала наукой еще до того, как более или менее точно узнали о внутреннем строении вещества.

Приведем пример: согласно кинетической теории, давление газа вызывается молекулярной бомбардировкой, и нам известно, что при нагревании газа бомбардировка усиливается и давление должно повыситься. И наоборот, если внутрь ящика с газом вдвигается поршень, преодолевающий сопротивление бомбардирующих его молекул, то энергия этих молекул возрастает, а соответственно повышается и температура. Итак, повышая температуру внутри заданного объема, мы увеличиваем давление. Если же мы сжимаем газ, то повышается его температура. Используя кинетическую теорию, можно найти количественные соотношения между этими двумя эффектами, однако каждому понятно, что между давлением и температурой обязательно должна существовать некоторая связь, не зависящая от деталей столкновений.

Рассмотрим еще один пример. Многим, наверное, известно интересное свойство

§ 1. Тепловые машины; первый закон

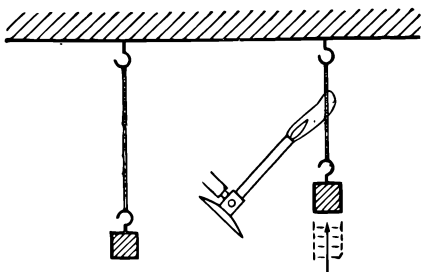
§ 2. Второй закон

§ 3. Обратимые машины

§ 4. Коэффициент полезного действия идеальной машины

§ 5. Термодинамическая температура

§ 6. Энтропия



Фиг. 44.1. Нагретая резина.

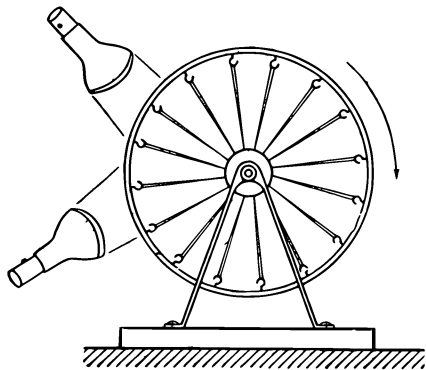
резины — если растянуть ее, она нагреется. Если вы зажмете губами резиновую полоску и, потянув рукой, растянете ее, то отчетливо почувствуете, что она нагрелась. Это нагревание обратимо, т. е. если вы, продолжая держать полоску губами, быстро отпустите ее, то возникнет столь же отчетливое ощущение холода. Это означает, что при растяжении резина нагревается, а при ослаблении натяжения она охлаждается. Наш инстинкт может нам подсказать, что нагретая резина тянет лучше: если растяжение нагревает резину, то нагревание заставит ее сжаться. Действительно, если поднести к растягиваемой грузиком резиновой полоске газовую горелку, то мы заметим, что полоска резко сократится (фиг. 44.1). Таким образом, при нагревании натяжение в резине возрастет, и это вполне согласуется с тем, что при уменьшении натяжения она остывает.

Скрытые в резине механизмы, управляющие этими эффектами, очень сложны. Мы опишем их с молекулярной точки зрения, хотя главная задача этой главы — научиться понимать связь между такими эффектами независимо от молекулярной модели. Тем не менее, именно исходя из молекулярной модели, мы можем показать, что оба эти явления тесно связаны. Поведение резины можно объяснить так. Представьте себе, что резина, по существу, огромный клубок, состоящий из очень длинных молекул, что-то вроде «молекулярных макарон», но с небольшим дополнительным усложнением: между этими молекулярными цепочками имеются соединительные цепочки. Таким образом, моделью куска резины могут служить слипшиеся во время варки макароны, образующие огромный ком. Когда мы растягиваем такой клубок, некоторые молекулярные цепи стремятся вытянуться в линию вдоль направления растяжения. В то же время все цепи участвуют в тепловом движении и непрерывно сталкиваются друг с другом. Поэтому такая цепь, когда ее растягивают, не остается в натянутом виде, так как об нее ударяют со всех сторон другие цепи и другие молекулы, и она будет вынуждена запутаться снова. Поэтому истинная причина того, почему резина все время стремится сократиться, заключается в сле-

дующем: при растяжении цепи действительно вытягиваются вдоль одной линии, но тепловые движения цепей стремятся запутать их снова и сократить их длину. Поэтому если растянуть цепи и увеличить температуру, то усилится и бомбардировка цепей, что приведет к увеличению натяжения. Этим объясняется способность нагретой резины поднять более тяжелый груз. Если растянутую в течение некоторого времени резину отпустить, то каждая цепь становится мягче, ударяющиеся о расслабленные цепи молекулы теряют энергию, и температура падает.

Итак, мы видели, как кинетическая теория устанавливает связь между сокращением при нагревании и остыванием при расслаблении, но было бы чересчур сложно пытаться вывести методами кинетической теории точные соотношения между этими эффектами. Нам пришлось бы для этого выяснить, сколько столкновений происходит каждую секунду и как выглядят молекулярные цепи. И вообще всех трудностей просто не перечислить. Детали механизма столь сложны, что кинетическая теория не в состоянии описать в точности все происходящее. Однако можно вывести некоторые соотношения между этими эффектами, практически ничего не зная о внутреннем механизме!

Вся термодинамика сводится примерно к таким рассуждениям: раз резина при высокой температуре «сильнее», чем при низкой, то с помощью тепла можно совершать самые разнообразные работы, скажем поднимать грузы и передвигать их на новое место. И действительно, мы уже убедились, что нагретая резина способна поднимать тяжести. С изучения возможности использования тепла для совершения работы и начинается термодинамика. Можно ли построить машину, в которой используются тепловые свойства резины? Да, только выглядеть она будет глуповато. Для этого можно немного усовершенствовать велосипедное колесо, вставив



Ф и г. 44.2. Тепловая машина с резиновыми спицами.



туда резиновые спицы (фиг. 44.2). Если с помощью двух ламп накаливания нагреть резину на одной стороне колеса, то она станет «сильнее», чем ненагретая резина на другой стороне. Центр тяжести колеса сдвинется и отойдет от точки опоры. Колесо повернется. После поворота холодные резиновые спицы пододвинутся поближе к теплу, а нагретые уступят им свое теплое место и остынут. И колесо будет медленно вращаться, пока будут гореть лампы. Коэффициент полезного действия такой машины чрезвычайно мал. Для вращения колеса едва хватает содержащейся в двух лампах мощности около 400 *вт*, а способно оно поднять лишь блоху! Однако тут же возникает интересный вопрос: нельзя ли более эффективно перевести тепло в работу?

Собственно говоря, термодинамика ведет свое начало с работ знаменитого инженера Сади Карно, который желал построить наилучшую и наиболее экономичную машину. Это один из немногих замечательных случаев, когда инженер заложил основы физической теории. На память приходит еще один пример, но уже сравнительно недавний — это анализ теории информации, сделанный Клодом Шенноном. Кстати, эти вопросы тесно связаны.

В паровой машине тепло используется для кипячения воды. Образующийся пар, расширяясь, толкает поршень, а поршень крутит маховик. Итак, пар вытолкнул поршень до отказа — что дальше? Эта порция пара свою работу выполнила, однако самое неразумное было бы закончить цикл выпуском пара в атмосферу, тогда к паровому котлу придется вновь подводить воду. Дешевле, а значит, и эффективнее отводить пар в другой сосуд, где он будет конденсироваться холодной водой, и образующуюся при этом воду можно будет снова вернуть в паровой котел, обеспечив непрерывную циркуляцию. Таким образом, паровая машина поглощает тепло и превращает его в работу. А может быть, лучше залить котел спиртом? Какими свойствами должно обладать вещество, чтобы обеспечить наилучшую работу машины? Этот вопрос задавал себе Карно и, размышляя таким образом, как мы уже сказали, попутно открыл соотношение очень общего типа.

Все результаты термодинамики содержатся в нескольких предельно простых утверждениях, называемых *законами термодинамики*. Во времена Карно первый закон термодинамики — закон сохранения энергии — был еще не известен. Однако аргументы были сформулированы Карно так точно, что они оказались правильными, хотя первый закон тогда не был еще открыт! Немного позже Клаузиус привел более простой вывод, который понять оказалось легче, чем очень тонкие рассуждения Карно. Но Клаузиус исходил из предположе-

ния, что сохраняется не полная энергия, а *теплота*; так считала в то время калорическая теория, которая впоследствии была вообще отвергнута как неверная. Поэтому часто говорят, что аргументы Карно были ложными. На самом же деле логика Карно безукоризненна. Неверно только упрощенное толкование этих аргументов Клаузиусом, а именно с ним все обычно знакомятся.

Так случилось, что так называемый второй закон термодинамики был открыт Карно раньше первого закона! Было бы очень интересно привести здесь аргументы Карно, не опирающиеся на первый закон. Но придется отказаться от этого, потому что мы изучаем физику, а не историю. С самого начала будем пользоваться первым законом, хотя многое можно было бы сделать и без него.

Сначала сформулируем первый закон, закон сохранения энергии: если нам дана система и мы подводим к ней тепло и производим над ней какую-то работу, то приращение энергии системы равно подведенному теплу и затраченной работе. Мы запишем все это так: к системе подводится тепло  $Q$  и над ней производится работа  $W$ , тогда энергия системы  $U$  возрастает; эту энергию иногда называют внутренней энергией. Связаны эти величины следующим соотношением:

$$\text{Изменение } U = Q + W. \quad (44.1)$$

Изменение  $U$  можно получить, добавляя небольшое количество тепла  $\Delta Q$  и небольшую работу  $\Delta W$ :

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W. \quad (44.2)$$

Это — дифференциальная форма того же закона. Все это мы уже хорошо знаем из предыдущей главы.

## § 2. Второй закон

А что такое второй закон термодинамики? Мы знаем, что если при работе приходится преодолевать трение, то потерянная работа равна выделившемуся теплу. Если мы преодолеваем трение в комнате при температуре  $T$  и делаем это достаточно медленно, то температура в комнате изменится ненамного. Мы превращаем работу в тепло при постоянной температуре. Ну, а можно ли поступить наоборот? Сумеем ли мы каким-то способом превратить тепло в работу при постоянной температуре? Второй закон термодинамики утверждает, что это невозможно. Было бы очень хорошо научиться превращать тепло в работу, изменив лишь направление процесса, похожего на трение. Если исходить только из закона сохранения энергии, можно считать, что тепловая энергия, например колебательная энергия молекул, способна

служить удобным источником полезной энергии. Но Карно утверждал, что при постоянной температуре тепловую энергию нельзя извлечь из ее источника. Иначе говоря, если бы весь мир имел повсюду одинаковую температуру, то оказалось бы невозможным превратить тепловую энергию в работу. Хотя процессы, при которых работа переходит в тепло, могут идти при постоянной температуре, невозможно обратить их и вернуть работу обратно. Если говорить точно, Карно утверждал, что при постоянной температуре нельзя извлечь тепло из его источника и превратить в работу, *не производя больше никаких изменений* в заданной нам системе или в окружающем пространстве.

Последняя фаза очень важна. Предположим, что в запаянном контейнере находится сжатый воздух при постоянной температуре; мы позволили ему расшириться. Такое устройство может совершать работу; оно может привести в движение пневматический молоток. При расширении, например, воздух чуть-чуть охлаждается, но если в нашем распоряжении очень большое море, огромный тепловой резервуар, то мы снова сможем нагреть его. Итак, мы взяли из моря (резервуара) тепло и произвели работу при помощи сжатого воздуха. Однако Карно не ошибся. Ведь мы *не сумели оставить все в системе без изменения*. Чтобы сжать снова воздух, которому мы позволили расшириться, нам понадобится произвести дополнительную работу. Покончив с этим, мы обнаружим, что не только не смогли заставить систему работать при заданной температуре  $T$ , но еще и сами вложили некую работу. Мы должны говорить только о таких случаях, когда полный результат всего процесса сводится к изъятию тепла и превращению его в работу, точно так же, как при преодолении трения конечный результат есть превращение работы в тепло. Если процесс сводится к движению по окружности, то систему можно вернуть точно в исходное положение, но конечным результатом этого процесса будет переход в тепло затраченной на преодоление трения работы. А можно ли обратить этот процесс? Повернуть, скажем, какую-нибудь ручку, чтобы все повернулось вспять, трение производило полезную работу, а моря остыли? Карно сказал, что этого не может быть. Давайте и мы предположим, что это невозможно.

Если бы это стало вдруг возможным, то это означало бы, что, помимо многих других полезных вещей, мы смогли бы, например, без всяких затрат отнять тепло у холодного тела и отдать его горячему. Между тем каждый знает, что тепло переходит от горячего тела к холодному.

Если мы просто приложим нагретое тело к холодному и больше ничего делать не будем, то, насколько известно, горячее тело никогда не станет горячее, а холодное — холод-

нее! Но если бы мы смогли произвести работу, отобрав тепло, скажем, у океана или от чего-нибудь еще, не изменив его температуры, то эту работу можно было бы, призвав на помощь трение, снова превратить в тепло, но уже при другой температуре. Например, второе плечо нашей воображаемой машины может тереться обо что-то, что и так уже нагрелось. Полный результат процесса в этом случае сводится к охлаждению «холодного» тела, в нашем случае океана, и нагреванию горячих трущихся частей машины. Гипотезу Карно, второй закон термодинамики, иногда формулируют так: тепло не может перетечь само собой от холодного тела к горячему. Но мы только что убедились в эквивалентности этих утверждений. Повторим их снова. *Первое*: нельзя осуществить процесс, единственным результатом которого является превращение тепла в работу при постоянной температуре. *Второе*: тепло не может перетечь само собой от холодного тела к горячему. Мы будем чаще пользоваться первой формулировкой.

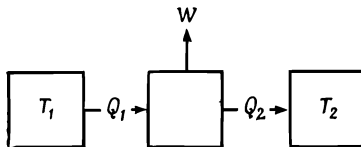
Анализ работы тепловой машины, проделанный Карно, весьма похож на то, что мы делали в гл. 4 (вып. 1), когда изучали подъемные машины и рассуждали о законе сохранения энергии. Более того, приведенные там аргументы подсказаны аргументами Карно о работе тепловых машин. Поэтому некоторые рассуждения в этой главе покажутся вам уже знакомыми.

Предположим, что «котел» построенной нами тепловой машины поддерживается при температуре  $T_1$ . За счет отнятого у котла тепла  $Q_1$  пар совершил работу  $W$  и выделил в «конденсоре» тепло  $Q_2$  [температура конденсора равна  $T_2$  (фиг. 44.3)]. Карно не уточнил, чему равно это тепло, потому что не знал первого закона и не предполагал, что  $Q_2$  равно  $Q_1$ , потому что не верил этому. Многие считали, что  $Q_1$  и  $Q_2$  одинаковы, так предписывала калорическая теория. Но Карно этого не предполагал, в этом одна из тонкостей его аргументов. Если же использовать первый закон, то мы найдем, что выделенное тепло  $Q_2$  равно теплу  $Q_1$  за вычетом совершенной работы:

$$Q_2 = Q_1 - W. \quad (44.3)$$

(Если бы наш процесс был циклическим и сконденсированная вода поступала бы снова в котел, то после каждого цикла

Фиг. 44.3. Схема тепловой машины.



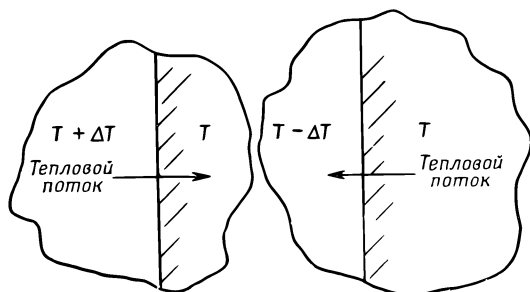
при заданном количестве участвующей в цикле воды поглощалось бы тепло  $Q_1$  и производилась бы работа  $W$ .)

А теперь построим другую машину и посмотрим, не сможем ли мы совершить большую работу при том же количестве тепла, выделяемого при температуре  $T_1$ . В конденсоре будет поддерживаться та же температура  $T_2$ . Мы используем то же тепло  $Q_1$  из котла и попытаемся совершать большую работу, чем та, которая была произведена старой паровой машиной. Для этого, быть может, придется использовать другую жидкость, скажем спирт.

### § 3. Обратимые машины

Давайте разберемся в наших машинах получше. Одно из свойств всех машин нам уже известно. Если в машине есть трение, то неизбежны потери энергии. Наилучшей машиной была бы машина вообще без трения. Предположим, что мы имеем дело с теми же идеальными машинами, что и при изучении закона сохранения энергии, т. е. машинами, которым совсем не надо преодолевать трения.

А теперь обсудим аналог движения без трения — «лишенный трения» перенос тепла. Если мы приложим горячее тело к телу, обладающему более низкой температурой, то возникнет тепловой поток. Тепло течет от горячего тела к холодному, и, чтобы повернуть поток вспять, нужно слегка изменить температуру какого-нибудь одного тела. Но машина, лишенная трения, будет под действием сколь угодно малой силы послушно двигаться туда, куда ей приказывают, а когда сила будет действовать в другую сторону, охотно последует за ней. Аналогом машины без трения может служить устройство, в котором бесконечно малые изменения температуры могут повернуть тепловой поток вспять. Если разность температур конечна, то это невозможно. Но если тепло течет между двумя телами практически при одинаковой температуре и достаточно бесконечно малого изменения температуры, чтобы поток повернул в любом направлении, то поток счи-



Ф и г. 44.4. Обратимый перенос тепла.

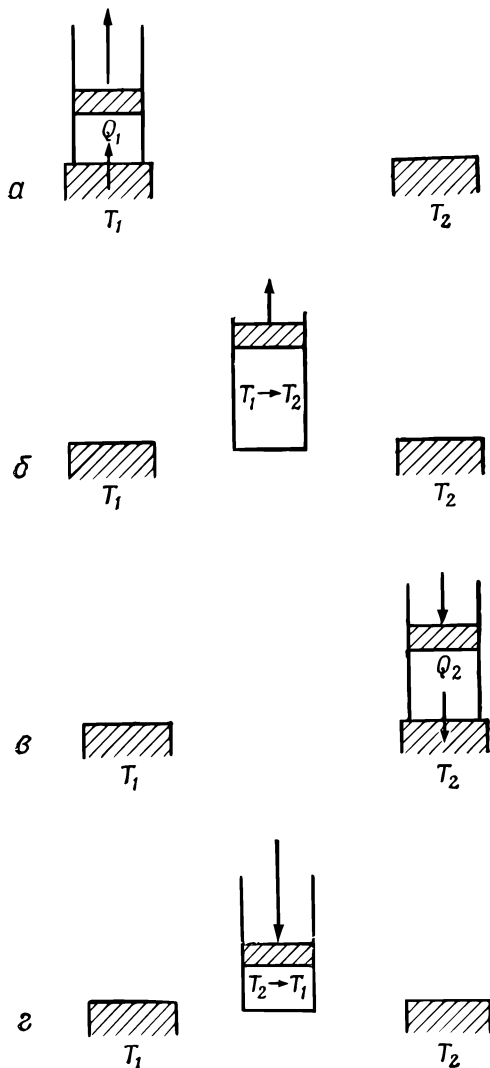
тается обратимым (фиг. 44.4). Если нагреть слегка левую половину тела, тепло потечет вправо; если чуть-чуть охладить левую половину, тепло устремится влево. Итак, оказалось, что идеальной машиной является так называемая *обратимая* машина, в которой любой процесс обратим в том смысле, что малейшие изменения условий работы могут заставить машину работать в обратном направлении. Это означает, что машина не должна ни в каком месте иметь трения; в такой машине не должно быть также места, где тепло резервуара или пар котла прямо соприкасались бы с какими-то более холодными или более горячими частями.

Займемся идеальной машиной, в которой обратимы все процессы. Чтобы показать, что создание такой машины в принципе возможно, мы просто приведем пример рабочего цикла, причем нас не интересует возможность его практической реализации, достаточно того, что с точки зрения Карно он обратим.

Предположим, что в цилиндре, оборудованном поршнем без трения, имеется газ. Это не обязательно идеальный газ. Содержимое цилиндра вообще не обязано быть газом. Но для определенности будем считать, что в цилиндре идеальный газ. Предположим еще, что имеются две тепловые подушки  $T_1$  и  $T_2$  — два очень больших тела, поддерживаемых при определенных температурах  $T_1$  и  $T_2$  (фиг. 44.5). Будем считать, что  $T_1$  больше  $T_2$ . Для начала нагреем газ и, положив цилиндр на подушку  $T_1$ , позволим газу расширяться. Пусть по мере притока тепла в газ поршень очень медленно выдвигается из цилиндра. Тогда можно поручиться, что температура газа не будет сильно отклоняться от  $T_1$ . Если выдернуть поршень очень быстро, температура в цилиндре может упасть значительно ниже  $T_1$  и процесс уже нельзя будет считать полностью обратимым. Если же мы будем медленно вытаскивать поршень, температура газа останется близкой к температуре  $T_1$ . С другой стороны, если поршень медленно вдвигать обратно в цилиндр, температура станет лишь чуть-чуть выше температуры  $T_1$  и тепло потечет вспять. Вы видите, что такое изотермическое (при постоянной температуре) расширение может быть обратимым процессом, если только производить его медленно и осторожно.

Чтобы лучше понять, что происходит, нарисуем кривую зависимости давления газа от его объема (фиг. 44.6). Когда газ расширяется, его давление падает. Кривая  $I$  показывает, как изменяются объем и давление, если в цилиндре поддерживается постоянная температура  $T_1$ . Для идеального газа эта кривая описывается уравнением  $PV = NkT_1$ . Во время изотермического расширения по мере увеличения объема давление падает, пока мы не остановимся в точке  $b$ . За это время

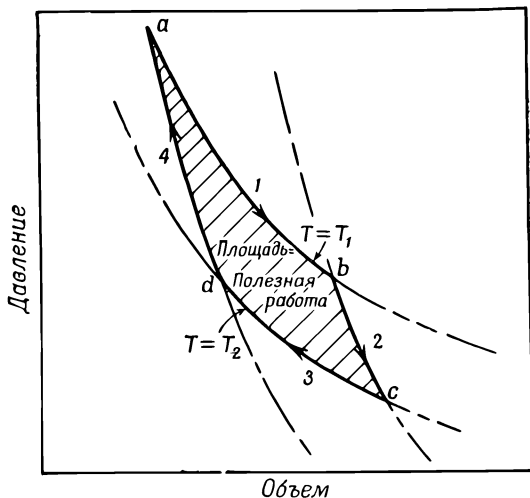
газ заберет из резервуара тепло  $Q_1$ ; ведь мы уже знаем, что если бы газ расширялся, не соприкасаясь с резервуаром, он бы остыл. Итак, мы закончили расширение в точке  $b$ . Давайте теперь снимем цилиндр с резервуара и продолжим расширение. Но теперь теплу уже неоткуда взяться. И снова мы медленно выдвигаем поршень, так что нет причины, почему бы процесс мог быть необратимым. Конечно, мы опять предполагаем, что трения нет. Газ продолжает расширяться, и температура падает, потому что связь с источниками тепла прервана.



Ф и г. 44.5. Шаги цикла Карно.

*a* — шаг 1. Изотермическое расширение при  $T_1$ ; поглощается тепло  $Q_1$ ; *б* — шаг 2. Адиабатическое расширение; температура падает от  $T_1$  до  $T_2$ ; *в* — шаг 3. Изотермическое сжатие при  $T_2$ ; выделяется тепло  $Q_2$ ; *г* — шаг 4. Адиабатическое сжатие; температура поднимается от  $T_2$  до  $T_1$ .

Фиг. 44.6. Цикл Карно.



Будем расширять газ так, чтобы расширение описывалось кривой 2 до тех пор, пока мы не достигнем точки  $c$ , где температура упадет до  $T_2$ . Такое расширение без притока тепла называется *адиабатическим*. Мы уже знаем, что в случае идеального газа кривая 2 имеет вид  $PV^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma$  — постоянная, большая единицы; поэтому адиабатическая кривая падает круче изотермической. Если температура газа в цилиндре достигла  $T_2$ , то, положив цилиндр на вторую тепловую подушку, мы не рискуем вызвать температурных изменений. Теперь можно медленно сжать газ, продвигаясь по кривой 3, причем цилиндр соприкасается с резервуаром при температуре  $T_2$  (см. фиг. 44.5, шаг 2). Поскольку цилиндр соприкасается с резервуаром, его температура не может повыситься, но газу придется отдать резервуару тепло  $Q_2$  при температуре  $T_2$ . Продвинувшись по кривой 3 до точки  $d$ , мы снова снимем цилиндр с тепловой подушки при температуре  $T_2$  и продолжим сжимать газ. На этот раз мы не станем отбирать у газа тепло. При этом поднимется температура, а давление пойдет по кривой 4. Если мы тщательно проделаем все этапы, то вернемся к исходной точке  $a$  при температуре  $T_1$  и можем повторить цикл.

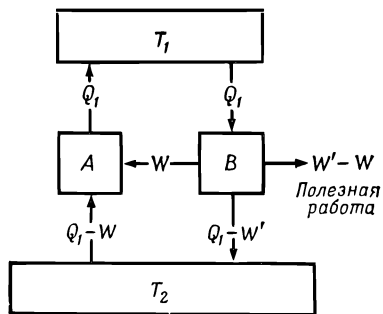
По этой диаграмме судя, газ совершил полный цикл, отняв за это время тепло  $Q_1$  при температуре  $T_1$  и отдав тепло  $Q_2$  при температуре  $T_2$ . Этот цикл обратим, и поэтому мы можем шаг за шагом проделать весь путь в обратном направлении. Мы могли бы пойти назад, а не вперед, могли бы начать движение из точки  $a$  при температуре  $T_1$ , двигаться по кривой 4, затем поглотить тепло  $Q_2$  при температуре  $T_2$  (для



этого надо все время выдвигать поршень) и т. д., пока цикл не будет завершен. Если мы совершали цикл в одном направлении, то заставили газ работать, если же нам захотелось повернуть назад, то придется поработать самим.

Между прочим, легко сосчитать полную работу. Полная работа, совершаемая при расширении, равна произведению давления на изменение объема:  $\int P dV$ . На нашей диаграмме мы откладывали  $P$  вертикально, а  $V$  горизонтально. Если обозначать вертикальное расстояние буквой  $y$ , а горизонтальное буквой  $x$ , то мы получим интеграл  $\int y dx$ , а это — площадь под кривой. Таким образом, площадь под каждой из пронумерованных кривых измеряет работу, совершенную либо газом, либо нами за соответствующий этап цикла. Легко понять, что чистый выход работы равен площади внутри кривых.

Раз уж мы привели пример одной обратимой машины, то можно предположить, что возможно существование и других таких же устройств. Пусть обратимая машина  $A$  забирает  $Q_1$  при  $T_1$ , совершает работу  $W$  и возвращает какое-то количество тепла при температуре  $T_2$ . Предположим, что у нас есть еще одна машина  $B$  — творение рук человека, уже сконструированная, а может быть, еще и не изобретенная. Можно взять паровую машину, колесо с резиновыми спицами — словом, что угодно. Мы даже не интересуемся, обратима ли эта машина. Важно только, чтобы она забирала тепло  $Q_1$  при температуре  $T_1$  и возвращала часть этого тепла при более низкой температуре  $T_2$ . Предположим, что машина  $B$  совершает некую работу  $W'$ . Теперь покажем, что  $W'$  не может быть больше  $W$ ; нет такой машины, которая работала бы лучше, чем обратимая. Но почему? Предположим, что  $W'$  больше  $W$ . Тогда мы можем забрать тепло  $Q_1$  при температуре  $T_1$  и отдать его машине  $B$ . Эта машина совершит работу  $W'$  и отдаст какое-то количество тепла (неважно какое) резервуару с температурой  $T_2$ . После этого мы можем распорядиться какой-то



Фиг. 44.7. Машина  $B$  заставляет работать обратимую машину  $A$  в обратном направлении.

частью работы  $W'$ , которую мы считаем больше  $W$ . Прибережем пока часть работы  $W$ , а остаток  $W' - W$  употребим с пользой для себя (фиг. 44.7). Обладая работой  $W$ , можно запустить машину  $A$  в обратном направлении, *ведь это — обратимая машина*. При этом она поглотит какое-то количество тепла из резервуара с температурой  $T_2$ , но зато вернет тепло  $Q_1$  резервуару при температуре  $T_1$ . Каков чистый результат этого двойного цикла? Мы вернули *все* к исходному состоянию и совершили дополнительную работу  $W' - W$ . Дело свелось к тому, что мы извлекли энергию из резервуара с температурой  $T_2$ ! Тепло  $Q_1$ , взятое из резервуара с температурой  $T_1$ , было аккуратно возвращено. Раз это тепло все равно возвращается, то в качестве резервуара с температурой  $T_1$  можно взять что-нибудь поменьше океана и заключить это устройство внутри составной машины  $A + B$ . Чистым результатом цикла такой машины будет изъятие из резервуара при температуре  $T_2$  тепла  $W' - W$  и превращение его в работу. Но извлечение полезной работы из резервуара при неизменной температуре *без других изменений* запрещается постулатом Карно. Этого нельзя сделать. Таким образом, не существует таких машин, которые извлекли бы некоторое количество тепла из резервуара при температуре  $T_1$ , возвратили бы какую-то его часть при температуре  $T_2$  и совершили большую работу, чем обратимая машина, работающая при тех же самых температурных условиях.

Предположим теперь, что машина  $B$  тоже обратима. Тогда, конечно, не только  $W'$  не больше  $W$ , но и  $W$  не больше  $W'$ . Чтобы доказать это, надо просто обратить предыдущие аргументы. Итак, если обе машины обратимы, то они должны производить одинаковую работу, и мы пришли к блестящему выводу Карно: если машина обратима, то безразлично, как она умудряется превращать тепло в работу. Произведенная машиной работа, если только машина поглощает определенное количество тепла при температуре  $T_1$  и возвращает какую-то его часть при температуре  $T_2$ , *не зависит от устройства машины*. Так уж устроен мир, и от частных свойств машины это не зависит.

Если бы мы нашли закон, определяющий работу, совершаемую при изъятии тепла  $Q_1$  при температуре  $T_1$  и возвращении части этого тепла при температуре  $T_2$ , то эта величина была бы универсальной постоянной, не зависящей от свойств вещества. Конечно, если нам известны свойства какого-нибудь вещества, мы можем вычислить интересующую нас величину. После этого мы будем вправе заявить, что все остальные вещества, если с их помощью построить обратимую машину, произведут точно такую же работу. Такова основная идея, ключ, с помощью которого мы можем найти

последующие соотношения. Например, мы хотим узнать, насколько резина сжимается при нагревании и насколько она остывает, когда мы позволяем ей сжаться. Предположим, что мы взяли резину в качестве рабочего вещества обратной машины и совершили обратимый цикл. Чистый результат, полная произведенная работа, — это универсальная функция, великая функция, не зависящая от свойств вещества. Таким образом, мы убеждаемся, что есть нечто, ограничивающее в известном роде разнообразие свойств вещества. Мы не можем сделать эти свойства какими захотим, не можем изобрести вещество, которое, будучи использованным в тепловой машине, произвело бы за обратимый цикл работу больше допустимой. Этот принцип, это ограничение, — единственное реальное правило, которое можно вывести из термодинамики.

#### § 4. Коэффициент полезного действия идеальной машины

А сейчас попробуем найти закон, определяющий работу  $W$  как функцию  $Q_1$ ,  $T_1$  и  $T_2$ . Ясно, что  $W$  пропорционально  $Q_1$ , ибо если две обратимые машины работают в параллель, то такая сдвоенная машина тоже будет обратной машиной. Если каждая из этих машин поглощает тепло  $Q_1$ , то обе сразу поглощают  $2Q_1$ , а работа, которую они совершают, равна  $2W$  и т. д. Поэтому пропорциональность  $W$  затраченному теплу  $Q_1$  вполне естественна.

После этого сделаем еще один важный шаг к универсальному закону. В качестве рабочего вещества машины можно взять одно вещество с хорошо известными нам свойствами. Воспользуемся этим и выберем идеальный газ. Можно и не делать этого, а вывести интересующее нас правило чисто логически, совсем не используя для этого какого-то вещества. Это одно из самых блестящих теоретических доказательств в физике, но пока мы используем менее абстрактный и более простой метод прямого вычисления.

Нам нужно лишь получить формулы для  $Q_1$  и  $Q_2$  (ведь  $W = Q_1 - Q_2$ ) — тепла, которым машина обменивается с резервуарами во время изотермического расширения и сжатия. Для примера вычислим  $Q_1$  — тепло, полученное от резервуара при температуре  $T_1$  во время изотермического расширения (кривая  $I$  на фиг. 44.6) от точки  $a$ , где давление равно  $p_a$ , объем  $V_a$ , температура  $T_1$ , до точки  $b$ , где давление равно  $p_b$ , объем  $V_b$ , а температура та же самая  $T_1$ . Энергия каждой молекулы идеального газа зависит только от температуры, а поскольку в точках  $a$  и  $b$  одинаковы и температура, и число молекул, то и внутренняя энергия тоже одинакова. Энергия  $U$

не изменяется; полная работа газа в период расширения

$$W = \int_a^b p dV$$

совершается за счет энергии  $Q_1$ , полученной от резервуара. Во время расширения  $pV = NkT_1$ , или

$$p = \frac{NkT_1}{V},$$

значит,

$$Q_1 = \int_a^b p dV = \int_a^b NkT_1 \frac{dV}{V},$$

т. е.

$$Q_1 = NkT_1 \ln \frac{V_b}{V_a}. \quad (44.4)$$

Вот то тепло, которое взято из резервуара при температуре  $T_1$ . Точно так же можно вычислить и тепло, отданное при сжатии (кривая 3 на фиг. 44.6) резервуару при температуре  $T_2$ :

$$Q_2 = NkT_2 \ln \frac{V_c}{V_d}. \quad (44.5)$$

Чтобы закончить анализ, нужно еще найти соотношение между  $V_c/V_d$  и  $V_b/V_a$ . Для этого взглянем сначала на кривую 2, которая описывает адиабатическое расширение от  $b$  до  $c$ . В это время  $pV^\gamma$  остается постоянным. Поскольку  $pV = NkT$ , то формулу для адиабатического расширения в конечных точках пути можно записать в виде  $(pV) V^{\gamma-1} = \text{const}$ , или  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ , т. е.

$$T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}. \quad (44.6)$$

Так как кривая 4 описывает адиабатическое сжатие от  $d$  до  $a$ , то

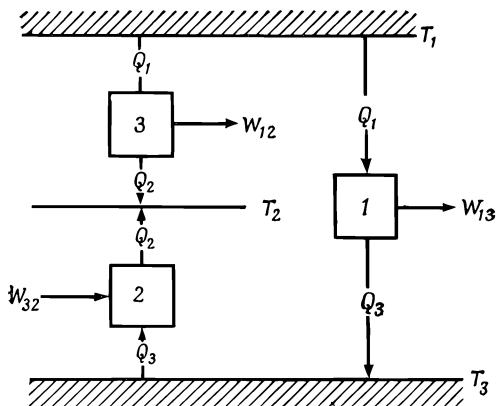
$$T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1}. \quad (44.6a)$$

Если поделить эти равенства одно на другое, то мы выясним, что отношения  $V_b/V_a$  и  $V_c/V_d$  равны, поэтому равны и логарифмы в (44.4) и (44.5). Значит,

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.7)$$

Это и есть то соотношение, которое мы искали. Хотя оно доказано для машины с идеальным газом, мы уже знаем, что оно справедливо для любой обратимой машины.

А теперь посмотрим, как можно вывести этот универсальный закон на основании только логических аргументов, не интересуясь частными свойствами веществ. Предположим, что



Фиг. 44.8. Спаренные машины 1 и 2 эквивалентны машине 3.

у нас есть три машины и три температуры  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ . Одна машина поглощает тепло  $Q_1$  при температуре  $T_1$ , производит работу  $W_{13}$  и отдает тепло  $Q_3$  при температуре  $T_3$  (фиг. 44.8). Другая машина работает при перепаде температур  $T_2$  и  $T_3$ . Предположим, что эта машина устроена так, что она поглощает то же тепло  $Q_3$  при температуре  $T_3$  и отдает тепло  $Q_2$ . Тогда нам придется затратить работу  $W_{32}$ , ведь мы заставили машину работать в обратном направлении. Цикл первой машины заключается в поглощении тепла  $Q_1$  и выделении тепла  $Q_3$  при температуре  $T_3$ . Вторая машина в это время забирает из резервуара то же самое тепло  $Q_3$  при температуре  $T_3$  и отдает его в резервуар с температурой  $T_2$ . Таким образом, чистый результат цикла этих спаренных машин состоит в изъятии тепла  $Q_1$  при температуре  $T_1$  и выделении тепла  $Q_2$  при температуре  $T_2$ . Эти машины эквивалентны третьей, которая поглощает тепло  $Q_1$  при температуре  $T_1$ , совершает работу  $W_{12}$  и выделяет тепло  $Q_2$  при температуре  $T_2$ . Действительно, исходя из первого закона, можно сразу же показать, что  $W_{12} = W_{13} - W_{32}$ :

$$W_{13} - W_{32} = (Q_1 - Q_3) - (Q_2 - Q_3) = Q_1 - Q_2 = W_{12}. \quad (44.8)$$

Теперь можно получить закон, связывающий коэффициенты полезного действия машин. Ведь ясно, что между эффективностями машин, работающих при перепаде температур  $T_1 - T_3$ ,  $T_2 - T_3$  и  $T_1 - T_2$ , должны существовать определенные соотношения.

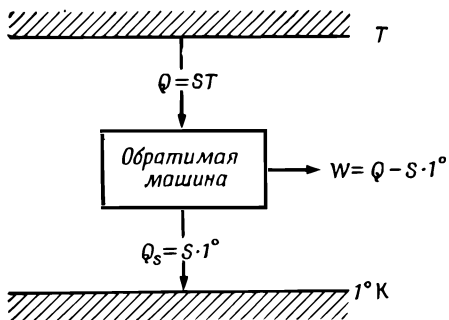
Сформулируем пояснее наши аргументы. Мы убедились, что всегда можем связать тепло, поглощенное при температуре  $T_1$ , и тепло, выделенное при температуре  $T_2$ , определенное тепло, выделенное при какой-то другой температуре  $T_3$ . Это значит, что мы можем описать все свойства машины, если введем стандартную температуру и будем анализировать все

процессы с помощью именно такой стандартной температуры. Иначе говоря, если мы знаем коэффициент полезного действия машины, работающей между температурой  $T$  и какой-то стандартной температурой, то сможем вычислить коэффициент полезного действия машины, работающей при любом перепаде температур. Ведь мы рассматриваем только обратимые машины, поэтому ничто не мешает нам спуститься от начальной температуры к стандартной, а потом снова вернуться к конечной температуре. Примем температуру в *один градус* за стандартную. Для обозначения выделяемого при стандартной температуре тепла используем особый символ  $Q_s$ . Это значит, что если машина поглощает при температуре  $T$  тепло  $Q$ , то при температуре в один градус она выделяет тепло  $Q_s$ . Если какая-то машина, поглощая тепло  $Q_1$  при  $T_1$ , выделяет тепло  $Q_s$  при температуре в один градус, а другая машина, поглотив тепло  $Q_2$  при  $T_2$ , выделяет то же самое тепло  $Q_s$  при температуре в один градус, то машина, поглощающая  $Q_1$  при  $T_1$ , должна при температуре  $T_2$  выделять тепло  $Q_2$ . Мы уже доказали это, рассмотрев три машины, работающие при трех температурах. Таким образом, для полного описания работы машин нам остается узнать совсем немного. Мы должны выяснить, сколько тепла  $Q_1$  должна поглотить машина при температуре  $T_1$ , чтобы выделить при единичной температуре тепло  $Q_s$ . Конечно, между теплом  $Q$  и температурой  $T$  существует зависимость. Легко понять, что тепло должно возрастать при возрастании температуры, ведь мы знаем, что если заставить работать машину в обратном направлении, то при более высокой температуре она отдает тепло. Легко также понять, что тепло  $Q_1$  должно быть пропорционально  $Q_s$ . Таким образом, наш великий закон выглядит примерно так: каждому количеству тепла  $Q_s$ , выделенного при температуре в один градус, соответствует количество тепла, поглощенного машиной при температуре  $T$ , равное  $Q_s$ , умноженному на некоторую возрастающую функцию  $f$  температуры:

$$Q = Q_s f(T). \quad (44.9)$$

## § 5. Термодинамическая температура

Пока мы не будем делать попыток выразить эту возрастающую функцию в терминах делений знакомого нам ртутного градусника, а взамен *определим новую температурную шкалу*. Когда-то «температура» определялась столь же произвольно. Мерой температуры служили метки, нанесенные на равных расстояниях на стенках трубочки, в которой при нагревании расширялась вода. Потом решили измерить температуру ртутным термометром и обнаружили, что градусные



Фиг. 44.9. Абсолютная термодинамическая температура.

расстояния уже не одинаковы. Сейчас мы можем дать определение температуры, не зависящее от каких-либо частных свойств вещества. Для этого мы используем функцию  $f(T)$ , которая не зависит ни от одного устройства, потому что эффективность обратимых машин не зависит от их рабочего вещества. Поскольку найденная нами функция возрастает с температурой, то мы можем считать, что она сама по себе измеряет температуру, начиная со стандартной температуры в один градус. Для этого надо только договориться, что

$$Q = Q_s T \quad (44.10)$$

и

$$Q_s = S \cdot 1^\circ. \quad (44.11)$$

Это означает, что теперь мы можем найти температуру тела, определив количество тепла, которое поглощается обратной машиной, работающей в интервале между температурой тела и температурой в один градус (фиг. 44.9). Если машина забирает из котла в семь раз больше тепла, нежели поступает в одноградусный конденсор, то температура котла равна семи градусам и т. д. Таким образом, измеряя количество тепла, поглощаемого при разных температурах, мы определяем температуру. Полученная таким образом температура называется *абсолютной термодинамической температурой* и не зависит от свойств вещества. Теперь мы будем пользоваться исключительно этим определением температуры\*.

Теперь нам ясно, что если у нас имеются две машины, из коих одна работает при перепаде температур  $T_1$  и один градус, а другая —  $T_2$  и один градус, и обе они выделяют при

\* Раньше мы определяли температурную шкалу иначе. Мы утверждали, что средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа пропорциональна температуре или, согласно закону идеального газа, что  $pV$  пропорционально  $T$ . Эквивалентно ли это новому определению? Да. Ведь окончательный результат (44.7), выведенный из закона идеального газа, совпадает с приведенным здесь результатом. Мы еще поговорим об этом в следующей главе.

единичной температуре одинаковое количество тепла, то поглощаемое ими тепло должно удовлетворять соотношению

$$\frac{Q_1}{T_1} = S = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.12)$$

Но это означает, что если какая-нибудь обратимая машина поглощает тепло  $Q_1$  при температуре  $T_1$ , а выделяет тепло  $Q_2$  при температуре  $T_2$ , то отношение  $Q_1$  к  $T_1$  равно отношению  $Q_2$  к  $T_2$ . Это справедливо для любой обратимой машины. Все, что будет дальше, содержится в этом соотношении: это центр термодинамической науки.

Но если это все, что есть в термодинамике, то почему же ее считают такой трудной наукой? А попробуйте описать поведение какого-нибудь вещества, если вам даже заранее известно, что масса вещества все время постоянна. В этом случае состояние вещества в любой момент времени определяется его температурой и объемом. Если известны температура и объем вещества, а также зависимость давления от объема и температуры, то можно узнать и внутреннюю энергию. Но кто-нибудь скажет: «А я хочу поступить иначе. Дайте мне температуру и давление и я скажу вам, каков объем. Я могу считать объем функцией температуры и давления и искать зависимость внутренней энергии именно от этих переменных». Трудности термодинамики связаны именно с тем, что каждый может подойти к задаче с того конца, с какого вздумает. Нужно только сесть и выбрать определенные переменные, а потом уж твердо стоять на своем, и все станет легко и просто.

Сейчас приступим к выводам. В механике мы подошли к всем нужным нам результатам, исходя из центра механического мира  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Такую же роль в термодинамике сыграет только что найденный нами принцип. Но какие выводы можно сделать, исходя из этого принципа?

Ну начнем. Сначала скомбинируем закон сохранения энергии и закон, связывающий  $Q_1$  и  $Q_2$ , чтобы найти *коэффициент полезного действия обратной машины*. Первый закон говорит, что  $W = Q_1 - Q_2$ . Согласно нашему новому принципу,

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1.$$

Поэтому работа равна

$$W = Q_1 \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (44.13)$$

Это соотношение характеризует эффективность машины, т. е. количество работы, произведенное при заданной затрате тепла. Коэффициент полезного действия пропорционален



перепаду температур, при котором работает машина, деленному на более высокую температуру:

$$\text{К. п. д.} = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (44.14)$$

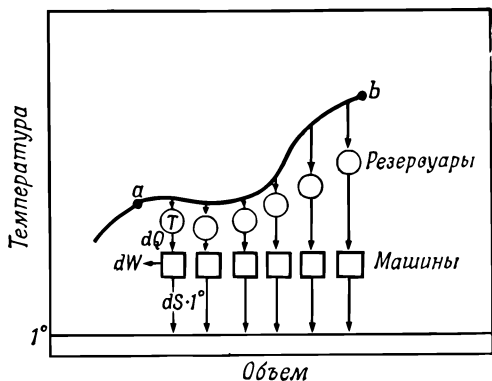
Коэффициент полезного действия не может быть больше единицы, а абсолютная температура не может быть меньше нуля, абсолютного нуля. Таким образом, раз  $T_2$  должна быть положительной, то коэффициент полезного действия всегда меньше единицы. Это наш первый вывод.

## § 6. Энтропия

Уравнение (44.7) или (44.12) может быть истолковано особо. При работе обратимых машин  $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$ , и тепло  $Q_1$  при температуре  $T_1$  «эквивалентно» теплу  $Q_2$  при температуре  $T_2$ ; ведь если поглощается  $Q_1$ , то всегда выделяется тепло  $Q_2$ . Если теперь придумать для  $Q/T$  особое название, то можно сказать, что при обратимых процессах поглощается столько же  $Q/T$ , сколько и выделяется. Иначе говоря,  $Q/T$  не убывает и не прибывает. Эта величина  $Q/T$  называется *энтропией*, и мы говорим, что «за обратимый цикл изменение энтропии равно нулю». Если  $T = 1^\circ$ , то энтропия равна  $Q/1^\circ$ ; мы уже снабдили энтропию особым символом  $S = Q_S/1^\circ$ . Энтропия повсюду обозначается буквой  $S$ , а численно она равна теплу (которое мы обозначили буквой  $Q_S$ ), выделяемому в одноградусном резервуаре (энтропия не равна просто теплу, это тепло, деленное на температуру, и измеряется она в *джоулях на градус*).

Интересно, что, кроме давления, которое зависит от температуры и объема, и внутренней энергии (функции все тех же объема и температуры), мы нашли еще величину — энтропию вещества, которая тоже является функцией состояния. Постараемся объяснить, как вычислять энтропию и что мы понимаем под словами «функция состояния». Проследим за поведением системы в разных условиях. Мы уже умеем создавать разные условия экспериментально, например можно заставить систему расширяться адиабатически или изотермически. (Между прочим, машина не обязательно должна иметь только два резервуара, может быть и три, и четыре различные температуры, и машина будет обмениваться теплом с каждым из резервуаров.) Мы можем прогуляться по всей диаграмме  $pV$ , переходя от одного состояния к другому. Иначе говоря, можно перевести газ из состояния  $a$  в какое-нибудь другое состояние  $b$  и потребовать, чтобы переход из  $a$  в  $b$  был обратимым. Теперь предположим, что вдоль пути из  $a$  в  $b$  поставлены маленькие резервуары с разными темпера-

Фиг. 44.10. Изменение энтропии при обратимом переходе.



турами. Тогда каждый короткий шагок будет сопровождаться изъятием из вещества тепла  $dQ$  и передачей его в резервуар при температуре, соответствующей данной точке пути. Поставим теперь между каждым резервуаром и одним общим резервуаром (с  $T = 1^\circ$ ) обратимую тепловую машину. После того как мы закончим перевод вещества из состояния  $a$  в состояние  $b$ , мы вернем все резервуары в их первоначальное состояние. Обратимая машина вернет каждую дольку тепла  $dQ$ , изъятую из вещества при температуре  $T$ , и каждый раз при температуре  $1^\circ$  будет выделяться энтропия  $dS$ , равная

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (44.15)$$

Подсчитаем полное количество выделенной энтропии. Разность энтропий, или энтропия, нужная для перехода из  $a$  и  $b$  в результате какого-нибудь обратимого изменения, это — полная энтропия, т. е. энтропия, взятая из маленьких резервуаров и выделенная при температуре  $1^\circ$ :

$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.16)$$

Вопрос заключается в том, зависит ли разность энтропий от пути в плоскости  $pV$ ? Из  $a$  в  $b$  ведет много дорог. Вспомним, что в цикле Карно мы могли перейти из точки  $a$  в точку  $c$  (см. фиг. 44.6) двумя способами. Можно было расширить газ сначала изотермически, а потом адиабатически, а можно было начать с адиабатического расширения и окончить изотермическим. Итак, мы должны выяснить, меняется ли энтропия при изменении пути из  $a$  в  $b$  (фиг. 44.10). Она не должна измениться, потому что если мы совершим полный цикл, выйдя из  $a$  в  $b$  по одному пути и возвратясь по другому, то

это путешествие будет эквивалентно полному циклу обратной машины. При таком цикле никакого тепла не передается одноградусному резервуару.

Поскольку мы не имеем права взять тепло из одноградусного резервуара, то при каждом путешествии из  $a$  в  $b$  приходится обходиться одним и тем же количеством энтропии. Это количество *не зависит от пути*, существенны только конечные точки. Таким образом, можно говорить о некоторой функции, которую мы назвали энтропией вещества. Эта функция зависит только от состояния вещества, т. е. только от объема и температуры.

Можно найти функцию  $S(V, T)$ . Мы подсчитаем изменение энтропии при обратимых изменениях вещества, следя за теплом, выделяемым в одноградусном резервуаре. Но это изменение можно выразить еще в терминах тепла  $dQ$ , изымаемого у вещества при температуре  $T$ :

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}. \quad (44.17)$$

Полное изменение энтропии равно разности энтропии в конечной и начальной точках пути:

$$\Delta S = S(V_b, T_b) - S(V_a, T_a) = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.18)$$

Это выражение не определяет энтропию полностью. Пока известна лишь *разность* энтропии в двух разных состояниях. Определить энтропию абсолютно можно только после того, как мы сумеем вычислить энтропию одного какого-нибудь состояния.

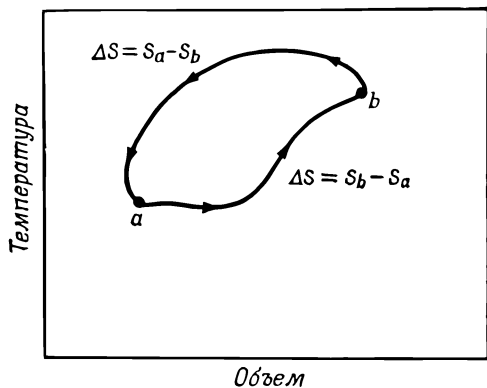
Очень долго считалось, что абсолютная энтропия — это вообще ничего не значащее понятие. Но в конце концов Нернст высказал утверждение, названное им *тепловой теоремой* (иногда его называют третьим законом термодинамики). Смысл ее очень прост. Сейчас мы сообщим эту теорему, не объясняя, почему она верна. Постулат Нернста утверждает просто, что энтропия всякого тела при абсолютном нуле равна нулю. Теперь мы знаем, при каких  $T$  и  $V$  (при  $T = 0$ ) энтропия равна нулю, и сможем вычислить энтропию в любой другой точке.

Чтобы проиллюстрировать эту идею, давайте вычислим энтропию идеального газа. При изотермическом (а следовательно, обратимом) расширении  $\int \frac{dQ}{T}$  равен просто  $Q/T$ , потому что  $T$  постоянная. Таким образом, согласно (44.4), изменение энтропии равно

$$S(V_a, T) - S(V_b, T) = Nk \ln \frac{V_a}{V_b},$$

Фиг. 44.11. Изменение энтропии за полный обратимый цикл.

Полное изменение энтропии равно нулю.



так что  $S(V, T) = Nk \ln V$  плюс функция одной только температуры. А как  $S$  зависит от  $T$ ? Мы уже знаем, что при адиабатическом расширении *теплообмена нет*. Таким образом, энтропия остается постоянной, хотя объем  $V$  изменяется, заставляя изменяться  $T$  (чтобы сохранить равенство  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ ). Ясно ли вам после этого, что

$$S(V, T) = Nk \left[ \ln V + \frac{1}{\gamma-1} \ln T \right] + a,$$

где  $a$  — постоянная, не зависящая ни от  $V$ , ни от  $T$ ? [Постоянная  $a$  называется химической постоянной. Она зависит от свойств газа, и ее можно определить экспериментально в соответствии с теоремой Нернста. Для этого надо измерить тепло, выделяемое газом при его охлаждении и конденсации до превращения его при  $0^\circ$  в твердое тело (гелий и при этой температуре остается жидким). Потом надо найти интеграл  $\int \frac{dQ}{T}$ . Можно найти  $a$  и теоретически; для этого понадобятся постоянная Планка и квантовая механика, но в нашем курсе этого мы не будем касаться.]

Отметим некоторые свойства энтропии. Сначала вспомним, что на участке обратимого цикла между точками  $a$  и  $b$  энтропия меняется на  $S_b - S_a$  (фиг. 44.11). Вспомним еще, что по мере продвижения вдоль этого пути энтропия (тепло, выделяемое при единичной температуре) возрастает в согласии с правилом  $dS = dQ/T$ , где  $dQ$  — тепло, изъятное из вещества при температуре  $T$ .

Мы уже знаем, что после обратимого цикла полная энтропия всего, что включается в процесс, не изменяется. Ведь тепло  $Q_1$ , поглощенное при  $T_1$ , и тепло  $Q_2$ , выделенное при  $T_2$ , вносят в энтропию равные по величине, но противоположные по знаку вклады. Поэтому чистое изменение энтропии равно нулю. Таким образом, при обратимом цикле энтропия всех

участников цикла, включая резервуары, не изменяется. Это правило как будто похоже на закон сохранения энергии, но это не так. Оно применимо только к обратимым циклам. Если перейти к необратимым циклам, то закона сохранения энтропии уже не существует.

Приведем два примера. Для начала предположим, что какая-то машина с трением производит необратимую работу, выделяя тепло  $Q$  при температуре  $T$ . Энтропия возрастет на  $Q/T$ . Тепло  $Q$  равно затраченной работе, и когда мы производим какую-то работу с помощью трения о какой-то предмет, температура которого равна  $T$ , то энтропия возрастает на величину  $W/T$ .

Другой пример необратимости: если приложить друг к другу два предмета с разными температурами, скажем  $T_1$  и  $T_2$ , то от одного предмета к другому перетечет некоторое количество тепла. Предположим, например, что мы бросили в холодную воду горячий камень. Насколько изменяется энтропия камня, если он отдает воде тепло  $\Delta Q$  при температуре  $T_1$ ? Она уменьшается на  $\Delta Q/T_1$ . А как изменяется энтропия воды? Она возрастет на  $\Delta Q/T_2$ . Тепло, конечно, может перетечь только от более высокой температуры  $T_1$  к более низкой  $T_2$ . Поэтому если  $T_1$  больше  $T_2$ , то  $\Delta Q$  положительно. Таким образом, изменение энтропии положительно и равно разности двух дробей:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}. \quad (44.19)$$

Итак, справедлива следующая теорема: в любом необратимом процессе энтропия всего на свете возрастает. Только обратимые процессы могут удерживать энтропию на одном уровне. А поскольку абсолютно обратимых процессов не существует, то энтропия всегда понемногу растет. Обратимые процессы — это идеализированные процессы с минимальным приростом энтропии.

К сожалению, нам не придется углубиться в область термодинамики. Наша цель лишь проиллюстрировать основные идеи этой науки и объяснить причины, по которым возможно основываться на этих аргументах. Но в нашем курсе мы не будем часто прибегать к термодинамике. Термодинамикой широко пользуются в технике и в химии. Поэтому с термодинамикой вы практически познакомитесь в курсе химии или технических наук. Ну а дублировать нет смысла, и мы ограничимся лишь некоторым обзором природы теории и не будем вдаваться в детали для специальных ее применений.

Два закона термодинамики часто формулируют так:

*Первый закон:* Энергия Вселенной всегда постоянна.

*Второй закон:* Энтропия Вселенной всегда возрастает.

Это не слишком хорошая формулировка второго закона. В ней ничего не говорится, например, о том, что энтропия не изменяется после обратимого цикла и не уточняется само понятие энтропии. Просто это легко запоминаемая форма обоих законов, но из нее нелегко понять, о чем собственно идет речь.

Все законы, о которых сейчас шла речь, мы собрали в табл. 44.1. А в следующей главе мы используем эту сводку законов, чтобы найти соотношение между теплом, выделяемым резиной при растяжении, и дополнительным натяжением резины при ее нагревании.

Таблица 44.1 ● ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

<i>Первый закон</i>
<p>Подведенное к системе тепло + Работа, совершенная над системой = Возрастание внутренней энергии системы:</p> $dQ + dW = dU.$
<i>Второй закон</i>
<p>Процесс, <i>единственным</i> результатом которого было бы изъятие тепла из резервуара и превращение его в работу, невозможен. Ни одна машина, поглощающая тепло <math>Q_1</math> при температуре <math>T_1</math> и выделяющая тепло <math>Q_2</math> при температуре <math>T_2</math>, не может производить больше работы, чем обратимая машина. Работа обратимой машины равна</p> $W = Q_1 - Q_2 = Q_1 \left( \frac{T_1 - T_2}{T_1} \right).$
<i>Определение энтропии системы</i>
<p>а) Если в систему обратимо втекает тепло <math>\Delta Q</math> при температуре <math>T</math>, то энтропия системы возрастает на <math>\Delta S = \Delta Q/T</math>.</p> <p>б) Если <math>T = 0</math>, то <math>S = 0</math> (<i>третий закон</i>).</p> <p>При <i>обратимых изменениях</i> полная энтропия всех соучастников (включая резервуары) не изменяется.</p> <p>При <i>необратимых изменениях</i> полная энтропия системы всегда возрастает.</p>

## ПРИМЕРЫ ИЗ ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 1. Внутренняя энергия

§ 2. Применения

§ 3. Уравнение Клаузиуса — Клапейрона

## § 1. Внутренняя энергия

Когда приходится использовать термодинамику для дела, то оказывается, что она очень трудный и сложный предмет. В этой книге, однако, мы не будем залезать в самые дебри. Эта область особенно интересна для химиков и инженеров, и тем, кому захочется получше познакомиться с ней, следует обратиться к физической химии или инженерной термодинамике. Есть еще ряд хороших справочных книг, в которых эта тема обсуждается более подробно.

Термодинамика сложна потому, что каждое явление она позволяет описывать многими способами. Если нам нужно описать поведение газа, то мы можем исходить из того, что его давление зависит от температуры и объема, а можно предположить, что объем зависит от давления и температуры. То же самое и с внутренней энергией  $U$ : можно сказать, что она определяется температурой и объемом, стоит только выбрать именно эти переменные, но можно говорить о зависимости от температуры и давления или от давления и объема и т. д. В предыдущей главе мы познакомились с другой функцией температуры и объема, называемой энтропией  $S$ . И теперь ничто не помешает нам построить другие функции этих переменных. Например, функция  $U - TS$  тоже зависит от температуры и объема. Таким образом, нам приходится иметь дело с большим количеством разных величин, зависящих от разнообразных комбинаций переменных.

Чтобы упростить понимание этой главы, договоримся с самого начала выбрать в качестве независимых переменных *температуру и объем*. Химики используют для этого темпера-

туру и давление, потому что их легче измерять и контролировать в химических реакциях. Но мы используем повсюду в этой главе температуру и объем и изменим этому только в одном месте, чтобы посмотреть, как совершается переход к химическим переменным.

Итак, сначала рассмотрим только одну систему независимых переменных — температуру и объем. Затем нас будут интересовать только две функции этих переменных: внутренняя энергия и давление. Все другие термодинамические функции можно получить с помощью этих двух, но не обязательно это делать именно сейчас. Даже после таких ограничений термодинамика останется еще трудным предметом, но все же уже не столь невозможным для понимания!

Сначала немного займемся математикой. Если величина есть функция от двух переменных, то дифференцировать ее придется осторожнее, чем мы это делали раньше, имея дело с одной переменной. Что мы понимаем под производной давления по температуре? Изменение давления, сопровождающее изменение температуры, разумеется, зависит от того, что случилось с *объемом*, пока менялась температура. Прежде чем понятие производной по температуре обретет ясный смысл, надо сказать что-то определенное об изменении объема. Например, можно спросить, какова скорость изменения  $P$  относительно  $T$  при постоянном объеме. Тогда отношение изменений обеих величин, по существу, обычная производная, которой привыкли присваивать символ  $dP/dT$ . Мы обычно используем особый символ  $\partial P/\partial T$ , он напоминает нам, что  $P$  зависит, кроме  $T$ , еще и от переменной  $V$ , и эта переменная не изменяется. Чтобы подчеркнуть тот факт, что  $V$  не изменяется, мы не только используем символ  $\partial$ , но еще пометим индексом остающуюся постоянной переменную  $(\partial P/\partial T)_V$ . Конечно, поскольку имеются только две независимые переменные, то это обозначение излишне, но оно, быть может, поможет нам легче пройти сквозь термодинамические дебри частных производных.

Предположим, что функция  $f(x, y)$  зависит от двух независимых переменных  $x$  и  $y$ . Под символом  $(\partial f/\partial x)_y$  мы понимаем самую обычную производную, получаемую общепринятым способом, если  $y$  постоянна:

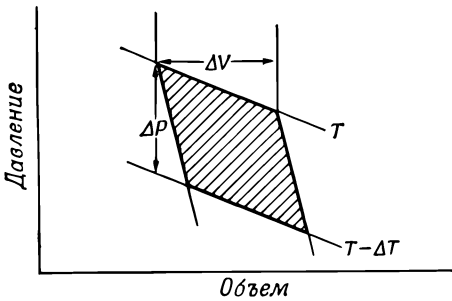
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Например, если  $f(x, y) = x^2 + yx$ , то  $(\partial f/\partial x)_y = 2x + y$ , а  $(\partial f/\partial y)_x = x$ . Мы можем распространить это на старшие





Ф и г. 45.1. Диаграмма  $P - V$  для цикла Карно.

Кривые, помеченные  $T$  и  $T - \Delta T$ , — изотермы; крутые кривые между ними — адиабаты. Когда газ изотермически расширяется при температуре  $T$ , он получает тепло  $\Delta Q$  и увеличивает свой объем на  $\Delta V$ ;  $\Delta P$  — изменение давления при постоянном объеме, температура в это время падает с  $T$  до  $T - \Delta T$ .

производные:  $\partial^2 f / \partial y^2$  или  $\partial^2 f / \partial y \partial x$ . Последний случай означает, что сначала  $f$  продифференцировано по  $x$ , считая  $y$  постоянным, а затем результат продифференцирован по  $y$ , но теперь постоянным стало  $x$ . Порядок дифференцирования не имеет значения:  $\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$ .

Нам придется подсчитывать изменение  $\Delta f$ , происходящее с  $f(x, y)$ , если  $x$  переходит в  $x + \Delta x$ , а  $y$  переходит в  $y + \Delta y$ . Будем предполагать, что  $\Delta x$  и  $\Delta y$  бесконечно малы:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= \underbrace{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)} + \underbrace{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)} = \\ &= \Delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y + \Delta y \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x. \end{aligned} \quad (45.1)$$

Последнее уравнение и есть основное соотношение, связывающее приращение  $\Delta f$  с  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

Посмотрим, как используется это соотношение; для этого вычислим изменение внутренней энергии  $U(T, V)$ , если температура  $T$  переходит в  $T + \Delta T$ , а объем  $V$  переходит в  $V + \Delta V$ . Используем формулу (45.1) и запишем

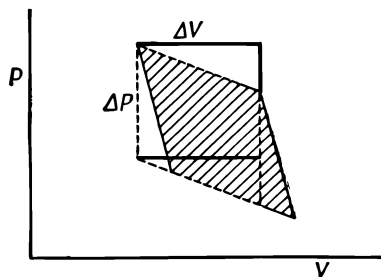
$$\Delta U = \Delta T \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \Delta V \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T. \quad (45.2)$$

В предыдущей главе мы нашли другое выражение для изменения внутренней энергии  $\Delta U$ ; тогда к подводимому газу прибавлялось тепло  $\Delta Q$ :

$$\Delta U = \Delta Q - P \Delta V. \quad (45.3)$$

Сравнив (45.2) и (45.3), можно было бы подумать, что  $P = -(\partial U / \partial V)_T$ , но это не так. Чтобы получить верный результат, сначала предположим, что газ получает тепло  $\Delta Q$ , причем объем его не изменяется, так что  $\Delta V = 0$ . Если  $\Delta V = 0$ , то уравнение (45.3) говорит нам, что  $\Delta U = \Delta Q$ , а уравнение (45.2) утверждает, что  $\Delta U = (\partial U / \partial T)_V \Delta T$ , поэтому  $(\partial U / \partial T)_V = \Delta Q / \Delta T$ . Отношение  $\Delta Q / \Delta T$  — количество тепла,

Ф и г. 45.2. Заштрихованная площадь = Площадь, ограниченная пунктирными линиями = Площадь прямоугольника =  $\Delta P \Delta V$ .



которое нужно подвести к телу, чтобы изменить его температуру на один градус, удерживая объем постоянным, — называется *удельной теплоемкостью при постоянном объеме* и обозначается символом  $C_V$ . Таким образом, мы показали, что

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V. \quad (45.4)$$

Теперь снова подведем к газу тепло  $\Delta Q$ , но на этот раз договоримся, что температура газа останется постоянной, а объему мы позволим измениться на  $\Delta V$ . В этом случае анализ сложнее, но мы можем вычислить  $\Delta U$ , используя аргументы Карно, для чего нам придется снова призвать на помощь цикл Карно из предыдущей главы.

Диаграмма давление — объем для цикла Карно изображена на фиг. 45.1. Мы уже показали, что полная работа, совершаемая газом при обратимом цикле, равна  $\Delta Q(\Delta T/T)$ , где  $\Delta Q$  — тепло, подводимое к газу при температуре  $T$  во время изотермического расширения от  $V$  до  $V + \Delta V$ , а  $T - \Delta T$  — это конечная температура, которой достигает газ при адиабатическом расширении на втором этапе цикла. Сейчас мы покажем, что эта работа равна, кроме того, заштрихованной площади на фиг. 45.1. Работа газа во всех случаях жизни равна  $\int P dV$ ; она положительна, если газ расширяется, и отрицательна, когда он сжимается. Если вычертить зависимость  $P$  от  $V$ , то изменения  $P$  и  $V$  изобразятся кривой, в каждой точке которой определенному значению  $P$  соответствует определенное значение  $V$ . Работа, произведенная газом, пока его объем изменяется от одного значения до другого (интеграл  $\int P dV$ ), — это площадь под кривой, соединяющей начальное и конечное значения  $V$ . Применим эту идею к циклу Карно и убедимся, что если обойти цикл, помня о знаке совершенной газом работы, то чистая работа газа будет равна заштрихованной на фиг. 45.1 площади.

А теперь вычислим эту площадь чисто геометрически. Цикл, который был использован для получения фиг. 45.1,

отличается от цикла, описанного в предыдущей главе тем, что теперь  $\Delta Q$  и  $\Delta T$  бесконечно малы. Наши адиабаты и изотермы очень близки друг к другу, поэтому фигура, описанная жирными линиями на фиг. 45.1, приближается к параллелограмму, когда приращения  $\Delta Q$  и  $\Delta T$  стремятся к нулю. Площадь этого параллелограмма в точности равна  $\Delta V \Delta P$  (где  $\Delta V$  — изменение объема, когда к газу подводится энергия  $\Delta Q$  при постоянной температуре, а  $\Delta P$  — изменение давления при изменении температуры на  $\Delta T$  и постоянном объеме). Легко показать, что заштрихованная площадь на фиг. 45.1 равна площади, ограниченной пунктиром на фиг. 45.2. А эту фигуру легко превратить в прямоугольник со сторонами  $\Delta P$  и  $\Delta V$ , для чего нужно лишь вырезать из нее треугольники и сложить их немного иначе.

Соберем все наши выводы вместе.

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Работа газа} &= \text{Заштрихованная площадь} = \Delta V \Delta P = \Delta Q \frac{\Delta T}{T}, \\
 &\quad \text{или} \\
 \frac{\Delta T}{T} \cdot (\text{Тепло, необходимое для изменения } V \text{ на } \Delta V)_T &= \\
 &= \Delta V \cdot (\text{Изменение } P, \text{ когда } T \text{ меняется на } \Delta T)_V, \\
 &\quad \text{или} \\
 \frac{1}{\Delta V} \cdot (\text{Тепло, необходимое для изменения } V \text{ на } \Delta V)_T &= T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V.
 \end{aligned} \right\} (45.5)$$

Выражение (45.5) содержит в себе суть результатов, следующих из аргументов Карно. Всю термодинамику можно вывести из (45.5) и первого закона, содержащегося в уравнении (45.3). Выражение (45.5) — это, в сущности, второй закон, хотя впервые Карно сформулировал его несколько иначе, поскольку не пользовался нашим определением температуры.

А теперь можно приступить к вычислению  $(\partial U / \partial V)_T$ . Насколько изменится внутренняя энергия  $U$ , если объем изменится на  $\Delta V$ ? Во-первых, внутренняя энергия  $U$  меняется за счет подводимого тепла и, во-вторых, за счет совершаемой работы. Подводимое тепло, согласно (45.5), равно

$$\Delta Q = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta V,$$

а совершаемая над веществом работа равна  $-P \Delta V$ . Поэтому изменение  $\Delta U$  складывается из двух кусков

$$\Delta U = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta V - P \Delta V. \quad (45.6)$$

Поделив обе стороны на  $\Delta V$ , мы найдем скорость изменения  $U$  относительно  $V$  при постоянной  $T$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P. \quad (45.7)$$

В нашей термодинамике, где есть только две переменные,  $T$  и  $V$ , и только две функции,  $P$  и  $U$ , уравнения (45.3) и (45.7) — это основные уравнения, из которых можно вывести все последующие результаты.

## § 2. Применения

Теперь обсудим смысл уравнения (45.7) и посмотрим, почему оно дает ответ на поставленные в предыдущей главе вопросы. Мы занимались рассмотрением такой задачи: в кинетической теории ясно, что рост температуры приводит к увеличению давления, потому что усиливается бомбардировка поршня атомами. Те же физические причины приводят к тому, что при выталкивании поршня от газа отбирается тепло, и чтобы удержать температуру постоянной, надо позаботиться о подводе тепла. При расширении газ остывает, а при нагревании его давление возрастает. Между этими явлениями должна существовать какая-то связь, и она полностью определяется уравнением (45.7). Если мы удерживаем объем постоянным и поднимаем температуру, давление растет со скоростью  $(\partial P/\partial T)_V$ . Вот мы и нашли эту связь: если увеличить объем и не подвести какого-то количества тепла для поддержания температуры, то газ остынет, а величина  $(\partial U/\partial V)_T$  подскажет нам, сколько именно надо подбавить тепла. Уравнение (45.7) выражает фундаментальную связь между этими двумя эффектами. Именно это мы обещали найти, отправляясь на поиски законов термодинамики. Не зная внутреннего строения газа и лишь веря, что построить вечный двигатель второго рода выше наших сил, мы смогли вывести соотношение между количеством тепла, необходимого для поддержания постоянной температуры при расширении газа, и изменением давления газа при нагревании!

Получив от газа все, что нужно, рассмотрим другой случай — резину. Растянув резиновую полоску, мы обнаружили, что ее температура возросла, а нагревание заставило ее сжаться. Какое уравнение дает в случае резины тот же результат, что и уравнение (45.3) для газа? Сначала все идет, как и раньше: когда к резине подводится тепло  $\Delta Q$ , внутренняя энергия изменяется на  $\Delta U$  и производится какая-то работа. Только теперь эта работа равна —  $F\Delta L$  вместо  $P\Delta V$ , где  $F$  — это приложенная к резине сила, а  $L$  — длина резиновой полоски. Сила  $F$  зависит от температуры и длины резиновой полоски. Заменяя в (45.3)  $P\Delta V$  на  $-F\Delta L$ , получим

$$\Delta U = \Delta Q + F\Delta L. \quad (45.8)$$

Сравнивая (45.3) и (45.8) мы убедимся, что уравнение для резины получилось сразу после замены одних букв другими.

Если заменить  $V$  на  $L$ , а  $P$  на  $-F$ , то все аргументы цикла Карно окажутся применимыми и к резине. Можно тотчас же, скажем, вывести, что нужное для растяжения на  $\Delta L$  тепло  $\Delta Q$  определяется уравнением, аналогичным (45.5):  $\Delta Q = -T(\partial F/\partial T)_L \Delta L$ . Это уравнение говорит нам, насколько увеличится сила, если длина резиновой полоски при нагревании останется постоянной. Надо только узнать, сколько тепла требуется для поддержания постоянной температуры при небольшом растяжении полоски. Итак, мы видим, что и к резине, и к газу применимы одни и те же уравнения. Можно даже писать  $\Delta U = \Delta Q + A\Delta B$ , где  $A$  и  $B$  — самые разные величины, сила и длина, давление и объем и т. д. Если интересуется поведение газа, нужно заменить  $A$  и  $B$  на  $P$  и  $V$ .

Для примера рассмотрим разность электрических потенциалов, или электродвижущую силу (э. д. с.) батареи  $E$ , и заряд  $\Delta Z$ , прошедший через батарею. Мы знаем, что работа, производимая обратимой электрической батареей, например аккумулятором, равна  $E\Delta Z$ . (Поскольку мы не включили в рассмотрение член  $P\Delta V$ , то придется потребовать, чтобы объем оставался постоянным.) Посмотрим, что скажет о работе батареи термодинамика. Если заменить  $P$  на  $E$ , а  $V$  на  $Z$ , го вместо уравнения (45.6) получится

$$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = T \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_Z - E. \quad (45.9)$$

Это уравнение говорит нам, что при путешествии заряда  $\Delta Z$  по батарее меняется внутренняя энергия  $U$ . Но почему  $\Delta U/\Delta Z$  — это не просто э. д. с. батареи  $E$ ? Дело в том, что в реальных обстоятельствах движение зарядов внутри батареи вызывает выделение тепла. Внутренняя энергия батареи изменяется, во-первых, за счет работы, производимой батареей во внешней цепи, и, во-вторых, за счет нагревания батареи. Интересно, что вторую часть изменения внутренней энергии опять-таки можно подсчитать, следя, как меняется э. д. с. батареи при изменении температуры. Между прочим, когда заряды текут по батарее, там происходят химические реакции, и уравнение (45.9) указывает на отличный способ измерения необходимой для реакции энергии. Для этого нам нужно лишь сделать батарею, работающую на этой реакции, и сначала просто измерить э. д. с., а потом проследить, как меняется э. д. с. с температурой, если ни один заряд не выпускается из батареи!

Мы предположили, что объем батареи можно поддерживать постоянным, только поэтому мы позволили себе пренебречь членом  $P\Delta V$  и считать, что работа батареи равна  $E\Delta Z$ . Но оказывается, что поддерживать объем постоянным технически очень трудно. Гораздо легче держать батарею под постоянным

атмосферным давлением. Вот почему химики не любят только что написанных нами уравнений: они предпочитают уравнения, которые были бы связаны с постоянным *давлением*. Мы с самого начала этой главы за независимые переменные приняли  $V$  и  $T$ . Химикам больше нравятся  $P$  и  $T$ , поэтому посмотрим теперь, как преобразуются наши выводы при переходе к химической системе переменных. Постарайтесь при этом не ошибиться, потому что мы как-никак сменили детали и перешли от  $T$  и  $V$  к  $T$  и  $P$ .

Начнем с (45.3), где  $\Delta U = \Delta Q - P\Delta V$ ; член  $P\Delta V$  можно заменить на  $E\Delta Z$  или даже на  $A\Delta B$ . Если бы нам удалось как-нибудь заменить  $P\Delta V$  на  $V\Delta P$ , тогда  $V$  и  $P$  поменялись бы ролями и химики остались бы довольны. Тот, кто сообразителен, заметит, что дифференциал произведения  $PV$  равен  $d(PV) = P dV + V dP$ . Добавив это равенство к (45.3), он получит

$$\begin{aligned} \Delta(PV) &= P\Delta V + V\Delta P \\ \Delta U &= \Delta Q - P\Delta V \\ \hline \Delta(U + PV) &= \Delta Q + V\Delta P \end{aligned}$$

Чтобы все наши последующие выводы походили на выводы из уравнения (45.3), давайте будем считать  $U + PV$  какой-то новой функцией, назовем ее *энтальпией*  $H$ , и напишем в таком виде:  $\Delta H = \Delta Q + V\Delta P$ .

Вот теперь мы готовы перевести все наши рассуждения на химический язык, надо только помнить, что  $U \rightarrow H$ ,  $P \rightarrow -V$ ,  $V \rightarrow P$ . Химики считают, что вся термодинамика содержится не в уравнении (45.7), а в уравнении

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + V.$$

Выяснив, как происходит переход к химическим переменным  $T$  и  $P$ , вернемся к нашим старым переменным. Теперь и уже до конца главы нашими независимыми переменными будут  $T$  и  $V$ .

Сейчас давайте применим полученные результаты к некоторым физическим процессам. Сначала рассмотрим идеальный газ. Из кинетической теории известно, что внутренняя энергия газа зависит только от характера движения молекул и от их числа. Внутренняя энергия зависит только от  $T$ , а к  $V$  она безразлична. Если изменять  $V$  при постоянной  $T$ , то  $U$  не изменится. Значит,  $(\partial U/\partial V)_T = 0$ , и уравнение (45.7) говорит нам, что для идеального газа

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = 0. \quad (45.10)$$

Уравнение (45.10) — это дифференциальное уравнение, и оно кое-что расскажет нам о  $P$ . Мы расправимся с частной

производной так: поскольку частная производная вычислена при постоянном  $V$ , можно заменить частную производную обычной, только надо помнить, что все это делается «при постоянном  $V$ ». Уравнение (45.10) тогда принимает вид

$$T \frac{\Delta P}{\Delta T} - P = 0 \quad (\text{при постоянном } V), \quad (45.11)$$

интегрирование не составит для нас труда, и мы получим

$$\begin{aligned} \ln P &= \ln T + \text{const} \quad (\text{при постоянном } V), \\ P &= \text{const} \times T \quad (\text{при постоянном } V). \end{aligned} \quad (45.12)$$

Мы знаем, что давление идеального газа равно

$$P = \frac{RT}{V}. \quad (45.13)$$

Это соотношение совместимо с (45.12), потому что  $R$  и  $V$  — постоянные. Но зачем же мы мучились, решая эти уравнения? Ведь результат-то был уже известен. Потому что мы пользовались *двумя независимыми определениями температуры!* Однажды мы предположили, что кинетическая энергия молекул пропорциональна температуре. Это предположение привело нас к температурной шкале, которую мы назвали шкалой идеального газа. Температура  $T$  в уравнении (45.13) отсчитывается по газовой шкале. Мы называли отсчитанную по газовой шкале температуру *кинетической* температурой. Потом мы определили температуру иначе, и это определение вообще не нуждалось ни в каком веществе. Исходя из второго закона, мы определили то, что можно назвать «абсолютной термодинамической температурой»  $T$ ; она появляется в уравнении (45.12). Здесь мы только доказали, что давление идеального газа (идеальный газ для нас нечто, чья внутренняя энергия не зависит от объема) пропорциональна абсолютной термодинамической температуре. Мы, кроме того, знаем, что давление пропорционально температуре, измеренной по газовой шкале. Таким образом, можно заключить, что кинетическая температура пропорциональна «абсолютной термодинамической температуре». Это, конечно, означает, что если бы мы были благоразумны, то показания обеих шкал могли бы всегда жить в согласии. В конце концов эти шкалы можно *выбрать* так, что они совпадут; постоянную пропорциональности можно положить равной единице. Очень долго люди сами себе создавали трудности, но наконец превратили две шкалы в одну!

### § 3. Уравнение Клаузиуса — Клапейрона

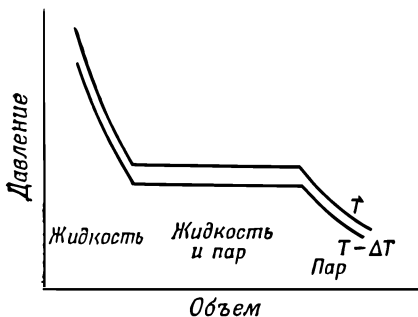
Испарение жидкости — это еще одна область, в которой можно применить наши результаты. Предположим, что мыдвигаем поршень в цилиндр с каким-то веществом. Естест-

венно задать себе вопрос: как зависит давление от объема, если температура остается постоянной? Иначе говоря, мы хотим начертить изотермические линии на диаграмме  $P—V$ . Вещество в цилиндре — это далеко не идеальный газ, с которым мы имели дело; теперь это жидкость или пар, а может быть, и то и другое вместе. Если сжать вещество достаточно сильно, то оно начнет превращаться в жидкость. Если мы будем увеличивать давление, объем изменится очень мало, а наши изотермы при уменьшении объема пойдут резко вверх, как это показано в левой части фиг. 45.3.

Если увеличивать объем, выдвигая поршень из цилиндра, давление будет падать, пока мы не достигнем точки кипения жидкости и в цилиндре появится пар. Дальнейшее вытягивание поршня приведет к более сильному испарению. Когда цилиндр заполнен частично паром, а частично жидкостью, то между ними устанавливается равновесие — жидкость испаряется, пар конденсируется, и скорости этих процессов равны. Если предоставить пару больший объем, то, чтобы удержать прежнее давление, понадобится больше пара. Поэтому, хоть жидкость все испаряется, давление остается прежним. Вдоль плоской части кривой на фиг. 45.3 давление не изменяется, это давление называется *давлением пара при температуре  $T$* . Если объем все увеличивается, наступит момент, когда запасы жидкости иссякнут. В такой ситуации давление падает при увеличении объема, ведь теперь мы имеем дело с обычным газом; это изображено в первой части диаграммы  $P—V$ . Нижняя кривая на фиг. 45.3 — это изотермическая кривая при более низкой температуре  $T—\Delta T$ . Давление жидкости в этом случае немного меньше, потому что с ростом температуры жидкости расширяются (не все жидкости: вода около точки замерзания поступает наоборот), а давление пара при уменьшении температуры, конечно, падает.

Из двух изотерм можно снова построить цикл, соединив концы их плоских участков (скажем, адиабатами), как это показано на фиг. 45.4. Небольшая зазубрина в нижнем правом углу фигуры несущественна, и мы просто забудем о ней. Используем аргументы Карно, которые показывают, как связан тепло, подведенное к жидкости для превращения ее в пар, с работой, совершаемой веществом при обходе цикла. Пусть  $L$  — это тепло, необходимое для испарения жидкости в цилиндре. Вспомним, как мы рассуждали при выводе уравнения (45.5), и немедленно скажем, что  $L(\Delta T/T)$  равно работе, совершенной веществом. Как и раньше, работа вещества равна площади, заключенной внутри цикла. Эта площадь приблизительно равна  $\Delta P(V_G - V_L)$ , где  $\Delta P$  — разность давлений пара при температурах  $T$  и  $T - \Delta T$ ,  $V_G$  — объем газа, а  $V_L$  — объем жидкости. Оба объема надо измерять при давлении,





Фиг. 45.3. Изотермы конденсирующегося пара.

Пар сжимается в цилиндре. Слева — все вещество превратилось в жидкость; справа — вся жидкость испарилась; в середине — в цилиндре сосуществуют жидкость и пар.

равном давлению пара. Сравнивая два выражения для работы, мы получаем  $L(\Delta T/T) = \Delta P(V_G - V_L)$ , или

$$\frac{L}{T(V_G - V_L)} = \left( \frac{\partial P_{\text{пар}}}{\partial T} \right). \quad (45.14)$$

Уравнение (45.14) связывает скорость изменения давления пара с температурой и количеством тепла, необходимым для испарения жидкости. Хотя вывел его Карно, называется оно уравнением Клаузиуса — Клапейрона.

Сравним уравнение (45.14) с результатом, следующим из кинетической теории. Обычно  $V_G$  гораздо больше  $V_L$ . Поэтому  $V_G - V_L \approx V_G = RT/P$  на моль. Если еще предположить, что  $L$  — не зависящая от температуры постоянная (хотя это не очень хорошее приближение), то мы получим  $\partial P/\partial T = L/(RT^2/P)$ . Вот решение этого дифференциального уравнения:

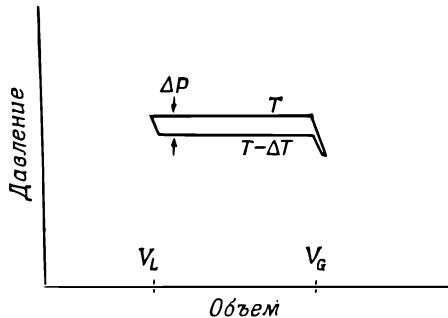
$$P = \text{const} \cdot e^{-L/RT}. \quad (45.15)$$

Надо выяснить, в каких отношениях находится это выражение с полученной ранее с помощью кинетической теории зависимостью давления от температуры. Кинетическая теория говорит, хотя и очень неопределенно, что число молекул пара над жидкостью примерно равно

$$n = \left( \frac{1}{V_A} \right) e^{-(U_G - U_L)/RT}, \quad (45.16)$$

где  $U_G - U_L$  — разность отнесенных к молью внутренних энергий газа и жидкости. Термодинамическое уравнение (45.15) и кинетическое уравнение (45.16) очень похожи, потому что давление равно  $nkT$ , но все-таки это разные уравнения. Однако их можно сделать одинаковыми, если заменить старое предположение  $L = \text{const}$  предположением о том, что  $L - U_G = \text{const}$ . Если предположить, что  $L - U_G$  — не зави-

Фиг. 45.4. Диаграмма  $P-V$  для цикла Карно с конденсирующимся в цилиндре паром. Слева — все вещество переходит в жидкость. Чтобы полностью испарить ее при температуре  $T$ , нужно добавить тепло  $L$ . При падении температуры от  $T$  до  $T-\Delta T$  пар расширяется адиабатически.



сущая от температуры постоянная, то соображения, из которых ранее следовало (45.15), приведут теперь к уравнению (45.16).

Это сравнение показывает преимущества и недостатки термодинамики по сравнению с кинетической теорией. Прежде всего полученное термодинамическое уравнение (45.14) — это точное соотношение, а (45.16) — всего-навсего приближение. Ведь нам пришлось предположить, что  $U$  приблизительно постоянна и что наша модель верна. Во-вторых, нам, быть может, никогда не удастся понять до конца, как газ переходит в жидкость, и все-таки уравнение (45.14) правильно, а (45.16) — это только приближение. В-третьих, хотя мы говорили о превращении газа в жидкость, наши аргументы верны для любого перехода из одного состояния в другое. Например, переход твердое тело — жидкость описывается кривыми, очень похожими на кривые фиг. 45.3 и 45.4. Вводя скрытую теплоту плавления  $M/\text{моль}$ , мы получим формулу, аналогичную уравнению (45.14):  $(\partial P_{пл}/\partial T)_V = M/[T(V_L - V_S)]$ . Мы можем не знать ничего о кинетической теории процесса плавления, а все же получить правильное уравнение. Однако если мы узнаем кинетическую теорию, то сразу же получим большое преимущество. Уравнение (45.14) — это всего лишь дифференциальное уравнение, и мы еще совершенно не умеем находить постоянные интегрирования. В кинетической теории можно вычислить и эти постоянные, надо только придумать хорошую модель, описывающую все явление полностью. Итак, в каждой теории есть и хорошее, и плохое. Если познания наши слабы, а картина сложна, то термодинамические соотношения оказываются самым мощным средством. Когда же картина упрощается настолько, что можно ее проанализировать теоретически, то лучше сначала попробовать выжать из этого анализа как можно больше.

Еще один пример: излучение черного тела. Мы уже говорили об ящике, содержащем излучение и ничего больше, и уже толковали о равновесии между излучением и

осциллятором. Мы выяснили также, что когда фотоны ударяются о стенки ящика, они создают давление  $P$ . Мы вывели формулу  $PV = U/3$ , где  $U$  — полная энергия фотонов, а  $V$  — объем ящика. Если подставить  $U = 3PV$  в основное уравнение (45.7), то обнаружится, что

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 3P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \quad (45.17)$$

Поскольку объем ящика не изменяется, можно заменить  $(\partial P/\partial T)_V$  на  $dP/dT$  и получить обыкновенное дифференциальное уравнение. Оно легко интегрируется и дает  $\ln P = 4 \ln T + \text{const}$ , или  $P = \text{const} \cdot T^4$ . Давление излучения изменяется как четвертая степень температуры, поэтому заключенная в излучении энергия  $U/V = 3P$  тоже меняется как  $T^4$ . Обычно пишут так:  $U/V = (4\sigma/c)T^4$ , где  $c$  — скорость света, а  $\sigma$  — другая постоянная. Термодинамика сама по себе ничего не скажет нам об этой постоянной. Это хороший пример и ее могущества, и ее бессилия. Знать, что  $U/V$  изменяется как  $T^4$ , — это уже большое дело, но узнать, чему именно равно  $U/V$  при той или иной температуре, можно, только разобравшись в деталях полной теории. У нас есть теория излучения черного тела и сейчас мы вычислим  $\sigma$ .

Пусть  $I(\omega)d\omega$  — распределение интенсивности, иначе говоря, поток энергии через  $1 \text{ м}^2$  за  $1 \text{ сек}$  в интервале частот между  $\omega$  и  $\omega + d\omega$ :

$$\text{Распределение плотности энергии} = \frac{\text{Энергия}}{\text{Объем}} = \frac{I(\omega) d\omega}{c},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{U}{V} &= \text{Полная плотность энергии,} \\ &= \int_{\omega=0}^{\infty} (\text{Плотность энергии между } \omega \text{ и } \omega + d\omega), \\ &= \int_0^{\infty} \frac{I(\omega) d\omega}{c}. \end{aligned}$$

Мы уже успели узнать, что

$$I(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar \omega/kT} - 1)}.$$

Подставляя выражение для  $I(\omega)$  в наше уравнение для  $U/V$ , получаем

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{e^{\hbar \omega/kT} - 1}.$$

Если сделать замену переменных  $x = \hbar\omega/kT$ , то это выражение примет вид

$$\frac{U}{V} = \frac{(kT)^4}{\hbar^3 \pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Этот интеграл — просто-напросто какое-то число, и мы можем найти его приближенно. Для этого надо лишь вычертить подынтегральную кривую и подсчитать площадь под ней. Она приблизительно равна 6,5. Математики могут вычислить наш интеграл точно, он равен  $\pi^4/15$ \*. Сравнивая это выражение с записанным ранее  $U/V = (4\sigma/c)T^4$ , мы найдем  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{k^4 \pi^2}{60 \hbar^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{ватт}}{(\text{метр})^2 \cdot (\text{градус})^4}.$$

Много ли энергии утечет за 1 сек из дырки единичной площади, проделанной в стенке ящика? Чтобы найти поток энергии, умножим плотность энергии  $U/V$  на  $c$ . Еще нужно умножить на  $1/4$ ; эта четверть набегаёт вот по каким причинам. Во-первых,  $1/2$  появляется из-за того, что мы вычисляем только вырвавшуюся *наружу* энергию, и, во-вторых, если поток подходит к дырке не под прямым углом, то вырваться ему труднее; это уменьшение эффективности учитывается умножением на косинус угла с нормалью. Среднее значение косинуса равно  $1/2$ . Теперь понятно, почему мы писали  $U/V = (4\sigma/c)T^4$ : так проще выразить поток энергии сквозь маленькую дырку; если отнести поток к единичной площади, то он равен просто  $\sigma T^4$ .

---

\* Поскольку  $(e^x - 1)^{-1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots$ , то интеграл равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^3 dx.$$

Но  $\int_0^{\infty} e^{-nx} dx = 1/n$ , поэтому, дифференцируя три раза по  $n$ , мы полу-

чаем  $\int_0^{\infty} e^{-nx} x^3 dx = 6/n^4$ , так что интеграл равен  $6 \left( 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots \right)$ ,

и несколько первых членов ряда дают уже хорошее приближение. В гл. 50 мы сможем показать, что сумма обратных четвертых степеней целых чисел равна  $\pi^4/90$ .

## ХРАПОВИК И СОБАЧКА

§ 1. Как действует храповик

§ 2. Храповик как машина

### § 1. Как действует храповик

§ 3. Обратимость в механике

В этой главе мы поговорим о храповике и собачке — очень простом устройстве, позволяющем оси вращаться только в одном направлении. Возможность получать одностороннее вращение заслуживает глубокого и тщательного анализа, из него проистекут интересные заключения.

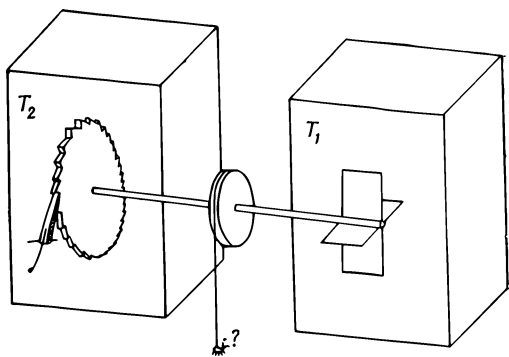
§ 4. Необратимость

§ 5. Порядок и энтропия

Вопросы, которые мы будем обсуждать, возникают при попытке найти с молекулярной или кинетической точки зрения простое объяснение тому, что существует предел работы, которая может быть получена от тепловой машины. Правда, мы уже знаем сущность доказательства Карно, но было бы приятно найти и элементарное его объяснение — такое, которое показало бы, что там физически на самом деле происходит. Существуют, конечно, сложные, покоящиеся на законах Ньютона математические доказательства ограниченности количества работы, которое можно получить, когда тепло перетекает с одного места в другое; но очень непросто сделать эти доказательства элементарными. Короче говоря, мы не понимаем их, хотя можем проследить выкладки.

В доказательстве Карно то обстоятельство, что при переходе от одной температуры к другой нельзя извлечь неограниченное количество тепла, следует из другой аксиомы: если все происходит при одной температуре, то тепло не может быть превращено в работу посредством циклического процесса. Поэтому первым делом попытаемся понять, хотя бы на одном элементарном примере, почему верно это более простое утверждение.

Фиг. 46.1. Машина, состоящая из храповика и собачки.



Попробуем придумать такое устройство, чтобы второй закон термодинамики нарушался, т. е. чтобы работу из теплового резервуара получали, а перепада температур не было. Пусть в сосуде находится газ при некоторой температуре, а внутри имеется вертушка (фиг. 46.1), причем будем считать, что  $T_1 = T_2 = T$ . От ударов молекул газа вертушка будет покачиваться. Нам остается лишь пристроить к другому концу оси колесико, которое может вертеться только в одну сторону, — храповичок с собачкой. Собачка пресечет попытки вертушки поворачиваться в одну сторону, а повороты в другую — разрешит. Колесико будет медленно поворачиваться; может быть, удастся даже подвесить на ниточку блошку, привязать нить к барабану, насаженному на ось, и поднять эту блошку!

Возможно ли это? По гипотезе Карно — нет. Но по первому впечатлению — очень даже возможно (если только мы верно рассудили). Видно, надо посмотреть повнимательнее. И действительно, если вдуматься в работу храповика с собачкой, все оказывается не так просто.

Во-первых, хотя наш идеализированный храповик и предельно прост, но есть еще собачка, а при ней положено быть пружинке. Проскочив очередной зубец, собачка должна возвратиться в прежнее положение, так что без пружинки не обойтись.

Весьма существенно и другое свойство храповика и собачки (на рисунке его нельзя показать). Предположим, что части нашего устройства идеально упруги. Когда собачка пройдет через конец зубца и сработает пружинка, собачка ударится о колесико и начнет подпрыгивать. Если в это время произойдет очередная флуктуация, вертушка может повернуться в другую сторону, так как зубец может проскользнуть под собачкой, когда та приподнята! Значит, для необратимости вертушки важно, чтобы было устройство, способное гасить прыжки собачки. Но при этом гашении энергия собачки перейдет к храповику и примет вид тепловой

энергии. Выходит, что по мере вращения храповик будет все сильнее нагреваться. Для простоты пусть газ вокруг храповика уносит часть тепла. Во всяком случае, вместе с храповиком начнет нагреваться и сам газ. И что же, так будет продолжаться вечно? Нет! Собачка и храповик, сами обладая некоторой температурой  $T$ , подвержены также и броуновскому движению. Это значит, что время от времени собачка случайно поднимается и проходит мимо зубца как раз в тот момент, когда броуновское движение вертушки попытается повернуть ее назад. И чем горячее предмет, тем чаще это бывает.

Вот отчего наш механизм не будет находиться в вечном движении. Иногда от щелчков по крыльям вертушки собачка поднимается и вертушка поворачивается. Но иногда, когда вертушка стремится повернуть назад, собачка оказывается уже приподнятой (из-за флуктуаций движений этого конца оси) и храповик действительно поворачивает обратно. В итоге — чистый нуль. И совсем нетрудно показать, что, когда температура в обоих сосудах одинакова, в среднем вращения не будет. Будет, конечно, множество поворотов в ту или иную сторону, но чего мы хотим — одностороннего вращения, — тому не бывать.

Рассмотрим причину этого. Чтобы поднять собачку до верха зубца, надо проделать работу против натяжения пружинки. Назовем эту работу  $\epsilon$ ; пусть  $\theta$  — угол между зубцами. Шанс, что система накопит достаточно энергии  $\epsilon$ , чтобы поднять собачку до края зубца, есть  $\exp(-\epsilon/kT)$ . Но вероятность того, что собачка поднимется случайно, тоже есть  $\exp(-\epsilon/kT)$ . Значит, сколько раз собачка случайно поднимется, давая храповику свободно повернуться назад, столько же раз окажется достаточно энергии, чтобы при прижатой собачке вертушка повернулась вперед. Выйдет равновесие, а не вращение.

## § 2. Храповик как машина

Пойдем дальше. Рассмотрим другой пример: температура вертушки  $T_1$ , а температура храповика  $T_2$ ;  $T_2$  меньше  $T_1$ . Так как храповик холодный и флуктуации собачки сравнительно редки, ей теперь очень трудно раздобыть энергию  $\epsilon$ . Но из-за того, что вертушка горячая, она часто получает энергию  $\epsilon$ , и наше устройство начнет, как и задумано, вертеться в одну сторону.

Посмотрим-ка, удастся ли нам теперь поднимать грузы. Привяжем к барабану нить и привесим к ней грузик вроде нашей блошки. Пусть  $L$  будет момент, создаваемый грузом. Если момент  $L$  не очень велик, наша машина груз поднимет, так как из-за броуновских флуктуаций повороты в одну сто-

рону вероятнее, чем в другую. Определим, какой вес мы сможем поднять, как быстро он будет подниматься и т. д.

Сперва рассмотрим движение вперед, для которого храповик и предназначен. Сколько энергии нужно занять у вертушки, чтобы продвинуться на шаг? Чтобы поднять собачку, нужна энергия  $\epsilon$ . Чтобы повернуть храповик на угол  $\theta$  против момента  $L$ , нужна энергия  $L\theta$ . Всего нужно занять энергию  $\epsilon + L\theta$ . Вероятность заполучить ее равна  $\exp[-(\epsilon + L\theta)/kT_1]$ . В действительности дело не только в самой этой энергии, но и в том, сколько раз в секунду она окажется в нашем распоряжении. Вероятность в секунду только пропорциональна  $\exp[-(\epsilon + L\theta)/kT_1]$ ; обозначим коэффициент пропорциональности  $1/\tau$  (он в конце выкладок выпадет). После каждого шага вперед совершенная над грузом работа есть  $L\theta$ . Энергия, взятая у вертушки, равна  $\epsilon + L\theta$ . Энергией  $\epsilon$  наматывается нить, затем следует: шелк, шелк, клингенклангеклунген..., и энергия переходит в тепло. Вся одолженная энергия идет на то, чтобы поднять блошку и собачку, которая потом падает и отдает тепло другой стороне (храповику).

Рассмотрим теперь случай обратного вращения. Что происходит здесь? Чтобы храповик повернулся назад, надо лишь снабдить собачку такой энергией, чтоб ей хватило сил подняться и пропустить храповик. Эта энергия по-прежнему равна  $\epsilon$ . Вероятность (в пересчете на секунду) того, что собачка поднимется на нужную высоту, теперь равна  $(1/\tau)\exp(-\epsilon/kT_2)$ . (Множитель пропорциональности тот же, но в показателе стоит  $kT_2$  из-за того, что температура иная.) Когда это случается, т. е. зубчатка проскальзывает назад, работа уже высвобождается (высвободился один зубец, а вместе с ним и работа  $L\theta$ ). Энергия, взятая у системы храповик — собачка, есть  $\epsilon$ , а энергия, переданная газу на другом конце оси при температуре  $T_1$ , есть  $L\theta + \epsilon$ . Это тоже легко понять. Положим, что собачка поднялась сама собой за счет флуктуации. Когда она упадет и пружинка ударит ее по зубцу, возникнет сила, стремящаяся повернуть зубчатку, ведь плоскость-то, о которую ударились собачка, наклонная. Эта сила производит работу; то же можно сказать о весе грузика. Обе силы суммируются, и вся медленно высвобождаемая энергия появляется в виде тепла на той стороне, где вертушка. (Конечно, так и должно быть по закону сохранения энергии, но мы обязаны тщательно все до конца продумать!)

Мы замечаем, что все эти энергии в точности те же, что и раньше, только переставлены. Итак, смотря по тому, какое из отношений больше, грузик либо медленно поднимается, либо медленно опускается. Конечно, на самом деле он непрерывно ходит туда-сюда, покачивается, но мы говорим об усредненном поведении.



Положим, что при определенном весе вероятности окажутся равными. Тогда приведем к нити бесконечно легкий грузик. Весь груз медленно пойдет вниз, и машина будет совершать работу, энергия будет откачиваться от храповика и пересылаться вертушке. Если же убрать часть груза, неравновесность перекинется на другую сторону. Груз поднимается, тепло отбирается от вертушки и поставляется шестерне. Мы попадаем в условия обратимого цикла Карно благодаря тому, что груз выбран как раз так, чтобы обе вероятности были равны. Это условие таково:  $(\epsilon + L\theta)/T_1 = \epsilon T_2$ . Пусть машина медленно тянет груз вверх.

Таблица 46.1 ● ОПЕРАТИВНАЯ СВОДКА ДЕЙСТВИЙ ХРАПОВИКА И СОБАЧКИ

*Вперед:* Требуемая энергия  $\epsilon + L\theta$  (от вертушки); вероятность этого равна

$$\frac{1}{\tau} \exp [-(L\theta + \epsilon)/kT_1]$$

Отнято у вертушки  $L\theta + \epsilon$   
 Произведет работу  $L\theta$   
 Перейдет к храповику  $\epsilon$

*Назад:* Требуемая энергия  $\epsilon$  (для собачки); вероятность этого равна  $\frac{1}{\tau} \exp (-\epsilon/kT_2)$

Отнято у храповика  $\epsilon$   
 Высвободилась работа  $L\theta$   
 Будет отдано вертушке  $\epsilon + L\theta$  } те же, что и выше  
 но с обратным знаком

Если система обратима, вероятности равны, т. е.

$$\frac{\epsilon + L\theta}{T_1} = \frac{\epsilon}{T_2},$$

$$\frac{\text{Тепло к храповику}}{\text{Тепло от вертушки}} = \frac{\epsilon}{L\theta + \epsilon},$$

отсюда 
$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Энергия  $Q_1$  отбирается от лопастей, а энергия  $Q_2$  доставляется шестерне, и эти энергии находятся в отношении  $(\epsilon + L\theta)/\epsilon$ . Когда мы опускаем груз, то опять  $Q_1/Q_2 = (\epsilon + L\theta)/\epsilon$ .

Итак (табл. 46.1), мы имеем

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Далее, полученная работа относится к энергии, взятой у вертушки, как  $L\theta$  к  $L\theta + \epsilon$ , т. е. как  $(T_1 - T_2)/T_1$ . Мы видим, что наше устройство, работая обратимо, ни за что не сможет высосать работы больше, чем позволяет это отношение. Это тот

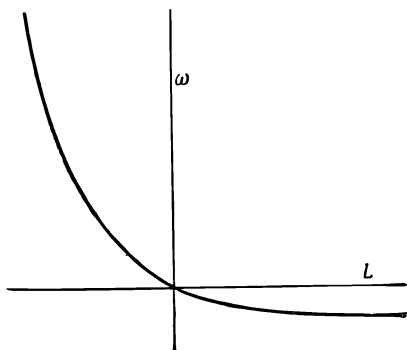
вывод, которого мы и ожидали на основе доказательства Карно, а одновременно и главный результат этой лекции.

Однако мы можем использовать наше устройство, чтобы понять еще кое-какие явления, даже неравновесные, лежащие в области применимости термодинамики.

Давайте подсчитаем теперь, как быстро наш односторонний механизм будет вращаться, если все его части одинаково нагреты, а к барабану подвешен грузик. Если мы потянем чересчур сильно, могут произойти любые неприятности. Собачка соскользнет вдоль храповика, пружинка лопнет или еще что-нибудь случится. Но предположим, мы тянем так осторожно, что все работает гладко. В этих условиях верен вышеприведенный анализ вероятностей поворота храповика вперед или назад, и нужно только учесть равенство температур. С каждым скачком валик поворачивается на угол  $\theta$ , так что угловая скорость равна величине  $\theta$ , помноженной на вероятность одного из этих скачков в секунду. Ось поворачивается вперед с вероятностью  $(1/\tau)\exp[-(\epsilon + L\theta)/kT]$ , а назад она поворачивается с вероятностью  $(1/\tau)\exp(-\epsilon/kT)$ . Угловая скорость равна

$$\omega = \frac{\theta}{\tau} [e^{-(\epsilon + L\theta)/kT} - e^{-\epsilon/kT}] = \frac{\theta}{\tau} e^{-\epsilon/kT} (e^{-L\theta/kT} - 1). \quad (46.1)$$

График зависимости  $\omega$  от  $L$  показан на фиг. 46.2. Мы видим, что, когда  $L$  положительно, результат один, когда отрицательно — совсем другой. Если  $L$  растет, будучи положительным, что бывает, когда мы хотим повернуть храповик назад, скорость вращения назад близка к постоянной величине. А когда  $L$  становится отрицательным,  $\omega$  поистине «рвется вперед», так как у  $e$  показатель степени огромен! Таким образом, угловая скорость, вызываемая действием разных сил, весьма несимметрична. Пойти в одну сторону легко: мы получаем большую угловую скорость от маленькой силы. Идя в обратную сторону, мы можем приложить много усилий, а вал все же будет двигаться еле-еле.



Фиг. 46.2. Угловая скорость храповика как функция вращательного момента.

Такое же положение возникает в *электрическом выпрямителе*. Вместо силы там имеется электрическое поле, а взамен угловой скорости — сила тока. Для выпрямителя напряжение тоже не пропорционально сопротивлению, наблюдается та же несимметричность. Анализ, сделанный нами для механического выпрямителя, годится и для электрического. Вид полученной выше формулы типичен для зависимости пропускной способности выпрямителя от напряжения.

Уберем теперь все грузики и обратимся к первоначальному механизму. Если бы  $T_2$  было меньше  $T_1$ , то храповик вертелся бы вперед. Этому поверит любой. Но вот во что трудно поверить сразу, так это в обратное. Если  $T_2$  больше  $T_1$ , то храповик вращается назад! Динамический храповик с избытком теплоты внутри вертится назад, потому что собачка храповика отскакивает. Если собачка в какой-то момент находится на наклонной плоскости, она толкает эту плоскость в сторону подъема. Но это происходит *все время*, ведь если случится, что собачка поднимется достаточно высоко, чтобы проскочить край зубца, она окажется на новой наклонной плоскости. Словом, горячие храповик с собачкой идеально приспособлены для вращения в сторону, обратную той, в какую им первоначально предназначено было вертеться!

Как бы хитроумно мы ни сконструировали «однобокий» механизм, при равенстве температур он не захочет вертеться в одну сторону чаще, чем в другую. Когда мы смотрим на него, он может поворачиваться либо туда, либо сюда, но при продолжительной работе ему никуда не уйти. Тот факт, что он не уйдет никуда, на самом деле фундаментальный, глубокий принцип: все в термодинамике покоится на нем.

### § 3. Обратимость в механике

Что же это за глубокий механический принцип, который утверждает, что при постоянстве температуры и достаточной продолжительной работе наше устройство не уйдет ни назад, ни вперед? Очевидно, мы получили фундаментальное утверждение о том, что нельзя придумать машину, которая, будучи предоставлена самой себе в течение долгого времени, охотней повернулась бы в какую-то одну определенную сторону. Попробуем выяснить, как это вытекает из законов механики.

Законы механики действуют примерно так: сила есть масса на ускорение; сила, действующая на частицу, есть сложная функция положений всех прочих частиц. Бывает, что силы зависят и от скорости, например в магнетизме, но не о них сейчас речь. Возьмем простой случай, скажем тяготение, когда силы определяются только расположением частиц. Положим, что мы решили нашу систему уравнений и получили

для каждой частицы определенную траекторию  $x(t)$ . Для достаточно сложных систем и решения очень сложны; с течением времени возможно появление самых невероятных конфигураций. Если мы придумаем любое, какое только нам придет в голову, расположение частиц и терпеливо подождем, то это расположение непременно наступит! Следя за решением в течение долгого времени, мы увидим, что оно как бы перепробует все, что возможно. В простейших устройствах это не обязательно, но в более или менее сложных системах с большим числом атомов такая вещь происходит.

Но решения атомовны и на большее. Решая уравнения движения, мы можем получить некоторую функцию, скажем  $t + t^2 + t^3$ . Мы утверждаем, что другим решением будет  $-t + t^2 - t^3$ . Иными словами, если всюду в решение подставить  $-t$  вместо  $t$ , то мы получим еще одно решение того же уравнения. Это произойдет оттого, что при замене  $t$  на  $-t$  в первоначальном дифференциальном уравнении ничего не изменится: в нем присутствуют лишь вторые производные по времени. Значит, если наблюдается некоторое движение, то возможно и точно противоположное движение. К нашему замешательству, может оказаться, когда мы следим за движением достаточно долго, что оно временами совершается в одну сторону, а временами — в обратную. Одно направление ничем не привлекательней другого. Поэтому невозможно сконструировать машину, для которой после длительной работы одно направление окажется более вероятным, чем другое, если только машина достаточно сложна.

Можно, правда, изобрести машину, для которой это утверждение явным образом неверно. Взять, например, колесо, закрутить его в пустом пространстве, и оно навсегда пойдет вертеться в одну сторону. Имеются поэтому некоторые условия, вроде сохранения момента вращения, из-за которых наши рассуждения нарушаются. Но это только означает, что наши доказательства надо проделать поаккуратней. Надо, например, учесть, что вращательный момент забирают себе стенки или еще что-то, так что специальные законы сохранения перестают действовать. Тогда опять, если система достаточно сложна, наше доказательство годится. Оно основано на обратимости законов механики.

Отдавая должное истории, мы хотели бы отметить устройство, изобретенное Максвеллом, впервые разработавшим динамическую теорию газов. Он нарисовал такую картину: пусть имеются два сосуда с газом при одной и той же температуре. Между сосудами имеется маленькое отверстие. Возле него сидит небольшой чертик (конечно, это может быть и прибор!). В отверстии есть дверца, чертик может ее открывать и закрывать. Он следит за молекулами, подлетающими

слева. Как только он замечает быструю молекулу, он открывает дверцу. Увидит медленную — дверцу на замок! Можно сделать его чертиком высшей квалификации, пристроив на затылок ему еще пару глаз, чтобы с молекулами в другом сосуде он поступал наоборот: пропускал налево медленные, а быстрые не выпускал. Вскоре левый сосуд остынет, а правый нагреется. Спрашивается, будут ли нарушены идеи термодинамики существованием такого чертика?

Оказывается, что если чертик конечного размера, то сам он вскоре так нагреется, что ничего не увидит. Простейшим чертиком явится, скажем, откидная дверца с пружинкой. Быстрой молекуле хватает сил открыть дверцу и проскочить, а медленной не хватит, и она отлетит прочь. Но это опять-таки знакомая нам система храповик — собачка, только в другом виде; в конце концов механизм просто нагреется. Чертик не может не нагреться, если его теплоемкость не бесконечна. В нем, во всяком случае, имеется конечное число шестеренок и колесиков, так что он не сможет отделаться от излишка тепла, которое приобретет, наблюдая молекулы. Вскоре он так начнет дрожать от броуновского движения, что не сможет сказать, что это там за молекулы, приближаются ли они, удаляются ли, словом, не сможет работать.

#### § 4. Необратимость

Все ли законы физики обратимы? Конечно, нет! Попробуйте-ка, например, из яичницы слепить обратно яйцо! Или пустите фильм в обратную сторону — публика в зале тотчас же начнет смеяться. Необратимость — самая яркая черта всех событий.

Откуда же она появляется? Ведь ее нет в законах Ньютона. Если мы считаем, что любое явление может быть в конечном счете объяснено законами физики, и если также оказывается, что все уравнения обладают фантастическим свойством давать при  $t \rightarrow -t$  другое решение, то ведь тогда обратимо любое явление. Но как же тогда получается, что в природе, в явлениях большого масштаба, все необратимо? Видимо, значит, есть какие-то законы, какие-то неизвестные нам, но важные уравнения, быть может, даже в электричестве, а может, в нейтринной физике, для которых уже *существенно*, куда идет время.

Рассмотрим теперь этот вопрос. Один закон такого рода мы уже знаем — он утверждает, что энтропия только растет. Когда одно тело теплое, а другое холодное, тепло переходит от теплого к холодному. Это утверждение нам подошло бы. Но хорошо бы и этот закон понять с точки зрения механики. Нам уже удалось получить при помощи чисто механических

соображений все следствия из постулата о том, что тепло не может течь в обратную сторону; это помогло нам понять второй закон. Значит, необратимость из обратимых уравнений получать мы способны. Но использовали ли мы при этом *только* законы механики? Разберемся в этом глубже.

Так как речь зашла об энтропии, то нам придется найти ее микроскопическое описание. Когда мы говорим, что в чем-то (например, в газе) содержится определенное количество энергии, то мы можем обратиться к микроскопической картине этого явления и сказать, что каждый атом имеет определенную энергию. Полная энергия есть сумма энергий атомов. Равным образом, у каждого атома есть своя определенная энтропия. Суммируя, получим полную энтропию. На самом деле здесь все обстоит не так уж гладко, но все же давайте посмотрим, что получится.

В виде примера подсчитаем разницу энтропий газа при одной температуре, но в разных объемах. В гл. 44 для изменения энтропии мы получили

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

В нашем случае энергия газа до и после расширения одна и та же, потому что температура не менялась. Значит, чтобы восполнить работу, проделанную газом, нужно придать ему какое-то количество тепла. Для малых изменений объема

$$dQ = P dV.$$

Подставив это в  $dQ$ , получим, как в гл. 44,

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} P \frac{dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{V} \frac{dV}{T} = Nk \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Например, при удвоении объема энтропия меняется на  $Nk \ln 2$ .

Рассмотрим теперь другой интересный пример. Пусть имеется цилиндр с перегородкой посередине. По одну ее сторону — неон («черные» молекулы), а по другую — аргон («белые» молекулы). Уберем перегородку и позволим газам перемешаться. Как изменится энтропия? Можно представить себе, что вместо перегородки между газами стоит поршень с отверстиями, в которые проходят белые молекулы и не проходят черные, и другой поршень с обратными свойствами. Сдвигая поршень к основанию цилиндра, легко понять, что для каждого газа задача сводится к только что решенной. Энтропия, таким образом, меняется на  $Nk \ln 2$ ; это значит, что энтропия на одну молекулу возрастает на  $k \ln 2$ . Цифра 2 появилась оттого, что вдвое увеличился объем, входящий на одну молекулу. Странное обстоятельство! В нем проявилось свойство не самой молекулы, а *свободного места* вокруг нее.

Выходит, что энтропия увеличивается, когда температура и энергия не меняются, а изменилось только распределение молекул!

Мы знаем, что стоит убрать перегородку, и газы через некоторое время перемешаются из-за столкновений, колебаний, ударов молекул и т. д. Стоит убрать перегородку, и какая-то белая молекула начнет приближаться к черной, а черная — к белой, они проскочат мимо друг друга и т. д. Постепенно какие-то из белых молекул проникнут случайно в объем, занятый черными, а черные — в область белых. Через какое-то время получится смесь. В общем это необратимый процесс реального мира, он должен привести к росту энтропии.

Перед нами простой пример необратимого процесса, полностью состоящего из обратимых событий. Каждый раз, когда происходит столкновение двух молекул, они разлетаются в определенных направлениях. Если запустить киноленту, на которой засняты столкновения, в обратную сторону, то ничего неправильного на экране не появится. Ведь один вид столкновений столь же вероятен, как и другой. Поэтому перемешивание полностью обратимо, и тем не менее оно необратимо. Каждому известно, что, взяв отдельно белое и отдельно черное и перемешав их, мы через несколько минут получим смесь. Подождем еще сколько-то там минут — они не отделятся, смесь останется смесью. Значит, бывает необратимость, основанная на обратимых ситуациях. Но теперь нам ясна и *причина*. Мы начали с расположения, которое в каком-то смысле *упорядочено*. В хаосе столкновений оно стало неупорядоченным. *Переход от упорядоченного расположения к беспорядочному является источником необратимости.*

Конечно, если бы мы сняли на киноленту это движение и пустили бы потом пленку назад, то увидели бы, как постепенно устанавливается порядок. Кто-нибудь мог бы возразить: «Но это — против всех законов физики!» Тогда мы бы прокрутили фильм еще раз и просмотрели бы каждое столкновение. Все они были бы безупречны, каждое подчинялось бы законам физики. Все дело, конечно, в том, что скорости каждой молекулы были бы выдержаны в точности, так что, если проследить их пути вспять, мы возвратимся к начальным условиям. Но такая ситуация крайне маловероятна. Если иметь дело не со специально приготовленным газом, а просто с белыми и черными молекулами, их никогда не удалось бы вернуть назад.

## § 5. Порядок и энтропия

Итак, мы должны теперь потолковать о том, что понимать под беспорядком и что — под порядком. Дело не в том, что

порядок приятен, а беспорядок неприятен. Наши смешанные и несмешанные газы отличаются следующим. Пусть мы разделили пространство на маленькие элементы объема. Сколькими способами можно разместить белые и черные молекулы в элементах объема так, чтобы белые оказались на одной стороне, а черные — на противоположной? И сколькими способами можно их разместить без этого ограничения? Ясно, во втором случае способов гораздо больше. Мы измеряем «беспорядок» в чем-то по числу способов, каким может быть переставлено его содержание, лишь бы внешне все выглядело без изменения. *Логарифм числа способов — это энтропия.* В цилиндре с разделенными газами число способов меньше и энтропия меньше, т. е. меньше «беспорядок».

Пользуясь этим техническим определением «беспорядка», можно понять наше утверждение. Во-первых, энтропия измеряет «беспорядок». Во-вторых, Вселенная всегда переходит от «порядка» к «беспорядку», поэтому энтропия всегда растет. Порядок не есть порядок в том смысле, что именно эта расстановка молекул нам нравится; смысл в том, что число разных способов расставить молекулы (лишь бы со стороны расстановки выглядели одинаково) относительно ограничено. Когда мы крутили назад наш фильм о перемешивании газов, было не так уж много беспорядка. Каждый отдельный атом имел в точности необходимые скорость и направление, чтобы выйти куда положено! Энтропия была в общем невысока, хотя это и не было заметно.

А что можно сказать о необратимости других физических законов? Когда мы рассматривали электрическое поле ускоряемого заряда, было сказано, что мы должны брать запаздывающее поле. В момент  $t$  на расстоянии  $r$  от заряда надо брать поле, созданное ускорением в момент  $t - r/c$ , а не в момент  $t + r/c$ . Поэтому законы электричества на первый взгляд необратимы. Вместе с тем очень странно, что эти законы следуют из уравнений Максвелла, которые в действительности обратимы. Однако можно привести довод, что если бы мы пользовались только опережающим полем, полем, отвечающим положению дел в момент  $t + r/c$ , и сделали это совершенно последовательно в полностью замкнутом пространстве, то все происходило бы в точности так же, как при употреблении запаздывающих полей! Эта кажущаяся необратимость в теории электричества, таким образом (по крайней мере в замкнутой полости), вовсе не является необратимостью. Вы это должны уже слегка сами чувствовать; вы знаете уже, что когда колеблющийся заряд создает поле, отражающееся от стен оболочки, то в конечном счете устанавливается равновесие, в котором одностронности нет места. Запаздывающие поля — только прием, удобный метод решения.



Насколько нам известно, все основные законы физики, подобно уравнениям Ньютона, обратимы. Тогда откуда необратимость? Она — из-за превращения порядка в беспорядок. Но это утверждение все равно не понятно, пока мы не знаем, откуда порядок. Почему ситуации, в которых мы оказываемся ежедневно, никогда не бывают равновесными? Одно мыслимое объяснение таково. Рассмотрим снова наш цилиндр со смесью белых и черных молекул. Если следить за ним достаточно долго, может оказаться, что по чисто случайному, крайне невероятному, но все же мыслимому стечению обстоятельств белые молекулы распределятся главным образом у дна, а черные — у крышки. После этого с течением времени они опять начнут перемешиваться.

Стало быть, одно возможное объяснение высокой степени упорядоченности нынешнего мира заключается в том, что нам просто повезло. Вероятно, как-то однажды во Вселенной случилась флуктуация, все как-то разделилось, а теперь вновь возвращается к прежнему. Такая теория не несимметрична; на вопрос, как мог бы выглядеть разделенный газ немного раньше или немного позже, она ответит: в любом случае мы увидели бы серое пятно, потому что молекулы опять смешались бы. Как бы ни потекло время, вперед или назад, газ все равно перемешался бы. Таким образом, по этой теории именно необратимость является одной из случайностей жизни.

Легко показать, что это не так. Предположим, что мы смотрим не на весь цилиндр сразу, а на какую-то часть его. Пусть в какой-то момент мы открыли в этой части определенную степень порядка: белое с черным в ней разделены. Что отсюда следует для частей, которые мы еще не рассматривали? Если мы и впрямь считаем, что порядок возникает из беспорядка путем флуктуации, то мы обязаны рассмотреть самую вероятную флуктуацию из тех, которые способны в нашей части установить порядок. Но при такой наивероятнейшей флуктуации остальная часть сосуда *вовсе не должна* рассортироваться — совсем наоборот! Значит, из гипотезы, что мир — это флуктуация, следует, что, когда мы взглянем на часть мира, прежде нами не виденную, мы должны обнаружить в ней смесь, беспорядок, в отличие от известного нам прежде мира. Если весь наш порядок есть флуктуация, выброс, мы не смеем надеяться на порядок где-либо сверх того; где он уже обнаружен.

Теперь предположим, что разделение произошло от того, что в прошлом Вселенная была действительно упорядочена (не из-за флуктуации, а просто белое и черное были первоначально обособлены). Тогда эта теория предскажет, что в других местах тоже должен быть порядок, порядок не как случайность, а из-за того, что в прежние времена порядок был

лучше. Тогда можно ожидать, что мы обнаружим в местах, которые мы еще не видели, порядок.

Астрономы, например, пока наблюдали не все звезды. Каждую ночь они наводят свои телескопы на новые звезды, и эти звезды ведут себя так же, как и старые. Из этого мы заключаем, что Вселенная — не флуктуация и что наш порядок — это память о тех временах, когда все только начиналось. Мы не говорим, что нам понятна логика этого. По каким-то причинам Вселенная когда-то имела очень малую для своего энергосохранения энтропию, и с той поры энтропия выросла. Это — путь по направлению в будущее. В этом начале всех необратимостей. Именно это порождает процессы роста и распада. Именно из-за этого мы вспоминаем не будущее, а прошлое, вспоминаем события, которые ближе к тому моменту в истории мира, когда порядок был лучше нынешнего. Именно поэтому мы не способны вспомнить события того времени, беспорядок при котором сильнее теперешнего, — мы называем это время будущим.

Мы уже говорили когда-то, что в стакане вина откроется нам вся Вселенная, стоит только заглянуть в него поглубже. Стакан вина — штука достаточно сложная, есть там и влага, и стекло, и свет, и еще многое другое.

Прелесть физики еще и в том, что даже такие простые и идеализированные вещи, как храповик с собачкой, действуют лишь оттого, что и они — часть Вселенной. Храповик с собачкой работают в одну сторону только потому, что они находятся в тесном контакте с остальной Вселенной. Если бы храповик с собачкой поместить в сосуд и изолировать на некоторое время, то колесико перестанет предпочитать одно направление вращения другому. Но по той же причине, по какой мы, открывая шторы, впускаем свет, из-за чего мы идем остывать в тень и греться на солнце, по той же причине храповик с собачкой вертятся лишь в одну сторону. Односторонность связана как-то с тем, что храповик — это часть нашей Вселенной. Часть Вселенной не только в том смысле, что храповик подчиняется законам Вселенной, но и в том, что его одностороннее поведение связано с односторонним поведением всей Вселенной. Поведение храповика не будет понято до конца, пока тайна начала начал Вселенной из смутных гипотез не перейдет в область научного познания.

## ЗВУК. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 1. Волны

§ 2. Распространение звука

§ 3. Волновое уравнение

§ 4. Решения волнового уравнения

§ 5. Скорость звука

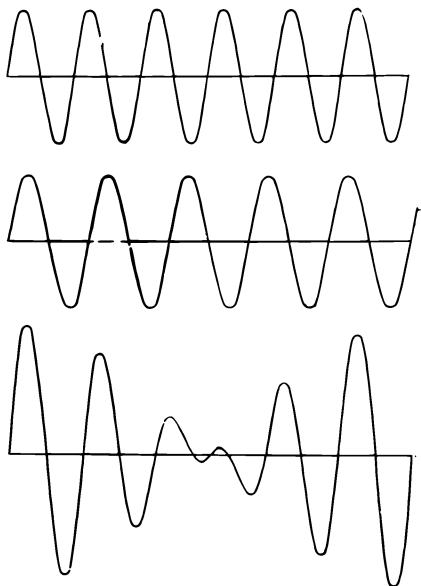
## § 1. Волны

В этой главе мы будем обсуждать новое явление — *волны*. О волнах часто и много говорится в физике, и мы наше внимание должны сконцентрировать на этом вопросе не только потому, что собираемся рассмотреть частный пример волн — звук, — но и потому, что волновые процессы имеют и другие многочисленные применения во всех областях физики.

Изучая гармонический осциллятор, мы уже отмечали, что существуют примеры как механических колеблющихся систем, так и электрических. Волны тесно связаны с колебательными системами, однако волновое движение есть не только колебание в данном месте, зависящее от времени, но и движение в пространстве.

Мы уже на самом деле изучали волны. Когда мы говорили о волновых свойствах света, мы обращали особое внимание на пространственную интерференцию волн одной и той же частоты от различных источников, расположенных в разных местах. Существуют еще два важных явления, о которых мы не упоминали и которые свойственны как свету, т. е. электромагнитным волнам, так и любой другой форме волнового движения. Первое из них — это явление *интерференции*, но уже не в пространстве, а *во времени*. Когда мы слушаем звуки сразу от двух источников, причем частоты их слегка отличаются, к нам приходят то гребни обеих волн, то гребень одной волны и впадина другой (фиг. 47.1). Звук то усиливается, то ослабевает, возникают *биения*, или, другими словами, происходит интерференция во времени. Второе явление — это волновое движение

Ф и г. 47.1. Интерференция звука во времени от двух источников с несколько отличающимися частотами приводит к биениям.



в замкнутом объеме, когда волны отражаются то от одной, то от другой стенки.

Все эти эффекты можно было, конечно, рассмотреть и на примере электромагнитных волн. Мы этого не сделали по той причине, что на одном примере мы не почувствовали бы общего характера явления, свойственного самым разным процессам. Чтобы подчеркнуть общность понятия вне рамок электродинамики, мы рассмотрим здесь другой пример — звуковые волны.

Есть еще пример — морские волны, набегающие на берег, или мелкая водяная рябь. Кроме того, существуют два рода упругих волн в твердых телах: волны сжатия (или продольные волны), в которых частицы тела колеблются вперед и назад в направлении распространения волны (звуковые колебания в газе именно такого типа), и поперечные волны, когда частицы тела колеблются перпендикулярно направлению движения волны. При землетрясениях в результате движения участка земной коры возникают упругие волны обоих типов.

И, наконец, есть еще один тип волн, который нам дает современная физика. Это волны, определяющие амплитуду вероятности нахождения частицы в данном месте, — «волны материи», о которых мы уже говорили. Их частота пропорциональна энергии, а волновое число пропорционально импульсу. Эти волны встречаются в квантовой механике.

В этой главе мы будем рассматривать только такие волны, скорость которых не зависит от длины волны. Пример таких

волн — распространение света в вакууме. Скорость света в этом случае одна и та же для радиоволн, для синего и зеленого света и вообще для света любой длины волны. Именно поэтому, когда мы описывали волновые явления, мы сначала и не заметили самого факта распространения волн. Вместо этого мы говорили, что если перенести заряд в некоторую точку, то электрическое поле на расстоянии  $x$  будет пропорционально ускорению заряда, но не в момент времени  $t$ , а в более ранний момент времени  $t - x/c$ . Поэтому распределение электрического поля в пространстве в некоторый момент времени, изображенное на фиг. 47.2, спустя время  $t$  передвинется на расстояние  $ct$ . Выражаясь математически, можно сказать, что в рассматриваемом нами одномерном случае электрическое поле есть функция от  $x - ct$ . Отсюда видно, что при  $t = 0$  оно оказывается функцией только  $x$ . Если взять более поздний момент времени и несколько увеличить  $x$ , мы получим ту же самую величину поля. Например, если максимум поля возникает при  $x = 3$  и в момент времени  $t = 0$ , то положение максимума в момент времени  $t$  находится из равенства

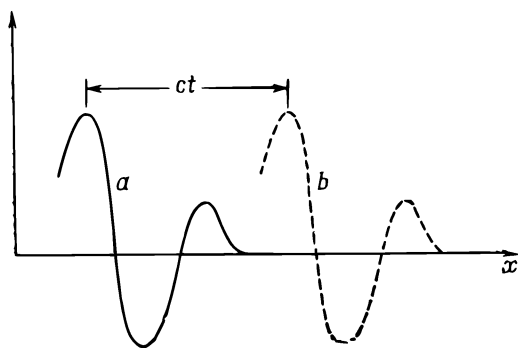
$$x - ct = 3, \quad \text{или} \quad x = 3 + ct.$$

Мы видим, что такая функция отвечает распространению волны.

Итак, функция  $f(x - ct)$  описывает волну. Мы можем все сказанное записать кратко так:

$$f(x - ct) = f[x + \Delta x - c(t + \Delta t)],$$

если  $\Delta x = c\Delta t$ . Конечно, существует еще и другая возможность, когда источник излучает волны не направо, как указано на фиг. 47.2, а налево, так что волны будут двигаться в сторону отрицательных  $x$ . Тогда распространение волны описывалось бы функцией  $g(x + ct)$ .



Фиг. 47.2. Примерное распределение электрического поля в некоторый момент времени (a) и электрическое поле через промежуток времени  $t$  (b).

Может еще случиться, что в пространстве одновременно движется несколько волн, и тогда электрическое поле есть сумма всех полей и все они распространяются независимо. Это свойство электрических полей можно выразить так: пусть  $f_1(x - ct)$  отвечает одной волне, а  $f_2(x - ct)$  — другой, тогда их сумма также описывает некоторую волну. Это утверждение называется *принципом суперпозиции*. Он справедлив и для звуковых волн.

Мы хорошо знаем, что звуки воспринимаются в той последовательности, в какой они создаются источником. А если бы высокие частоты распространялись быстрее, чем низкие, то вместо звуков музыки мы слышали бы резкий и отрывистый шум. Точно так же если бы красный свет двигался быстрее, чем синий, то вспышка белого света выглядела бы сначала красной, затем белой и наконец синей. Мы хорошо знаем, что такого на самом деле не происходит. И звук, и свет движутся в воздухе со скоростью, почти не зависящей от частоты. Примеры волнового движения, где этот принцип не выполняется, будут рассмотрены в гл. 48.

Для света (электромагнитных волн) мы получили формулу, определяющую электрическое поле в данной точке, которое возникает при ускорении заряда. Казалось бы, нам остается теперь подобным образом определить какую-нибудь характеристику воздуха, скажем давление на заданном расстоянии от источника через движение источника, и учесть запаздывание при распространении звука.

В случае света такой подход был приемлем, так как все наши знания сводились к тому, что заряд в одном месте действует с некоторой силой на заряд в другом месте. Подробности распространения взаимодействия из одной точки в другую были абсолютно несущественны. Но звук, как известно, распространяется по воздуху от источника к уху, и естественно спросить, чему равно давление воздуха в каждый данный момент. Кроме того, хотелось бы знать, как именно движется воздух.

В случае электричества мы могли поверить в правило, поскольку законы электричества мы еще не проходили, но для звука это не так. Нам недостаточно сформулировать закон, определяющий распространение звукового давления в воздухе; этот процесс должен быть объяснен на основе законов механики. Короче, звук есть часть механики, и он должен быть объяснен с помощью законов Ньютона. Распространение звука из одной точки в другую есть просто следствие механики и свойств газов, если звук распространяется в газе, или свойств жидкостей и твердых тел, если звук проходит через эти среды. Позднее мы выведем также свойства света и его волновое движение из законов электродинамики.

## § 2. Распространение звука

Давайте выведем теперь свойства распространения звука между источником и приемником, основываясь на законах Ньютона, но не учитывая при этом взаимодействия звука с источником и приемником. Обычно мы более подробно останавливались на результате, а не на его выводе. В этой главе мы используем противоположный подход. Главным здесь будет в некотором смысле само получение результата. Метод объяснения новых явлений с помощью старых, законы которых уже известны, представляет собой, пожалуй, величайшее искусство математической физики. Математическая физика решает две проблемы: найти решение заданного уравнения и найти уравнения, описывающие новое явление. То, чем мы будем заниматься, относится как раз ко второй проблеме.

Рассмотрим простейший пример — распространение звука в одномерном пространстве. Для вывода нам сначала необходимо понять, что же в действительности происходит. В основе явления лежит следующий факт: когда тело перемещается в воздухе, возникает возмущение, которое как-то распространяется по воздуху. На вопрос, что это за возмущение, мы можем ответить: это такое движение тела, которое вызывает изменение давления. Конечно, если тело движется медленно, воздух лишь обтекает его, но нас интересует быстрое движение, когда воздух не успевает обойти вокруг тела. При этих условиях воздух в процессе движения сжимается и возникает избыточное давление, толкающее окружающие слои воздуха. Эти слои в свою очередь сжимаются, снова возникает избыточное давление, и вот начинает распространяться волна.

Опишем этот процесс на языке формул. Прежде всего решим, какие нам нужны переменные. В нашей задаче нам нужно знать, насколько переместился воздух, поэтому *смещение* воздуха в звуковой волне, несомненно, будет первой нашей переменной. Вдобавок хотелось бы знать, как меняется *плотность* воздуха при смещении. *Давление* воздуха тоже меняется, и это еще одна интересная переменная. Кроме того, воздух движется с некоторой *скоростью*, и мы должны уметь определить скорость частиц воздуха. Частицы воздуха имеют еще и *ускорение*, но, записав все эти переменные, мы сразу же поймем, что и скорость, и ускорение будут нам известны, если известно *смещение* воздуха как функция времени.

Как уже говорилось, мы рассмотрим волну в одном измерении. Так можно поступить, если мы найдем достаточно далеко от источника и так называемый *фронт волны* мало отличается от плоскости. На этом примере наше доказательство будет проще, поскольку можно сказать, что смещение  $\chi$  зави-

сит только от  $x$  и  $t$ , а не от  $y$  и  $z$ . Поэтому поведение воздуха описывается функцией  $\chi(x, t)$ .

Насколько полно такое описание? Кажалось бы, оно очень не полно, потому что нам не известны подробности движения молекул воздуха. Они движутся во всех направлениях, и этот факт не отражается функцией  $\chi(x, t)$ . С точки зрения кинетической теории, если в одном месте наблюдается бóльшая плотность молекул, а в соседнем меньшая, молекулы будут переходить из области с большей плотностью в область с меньшей плотностью, так чтобы уравнивать плотности. Очевидно, что при этом никаких колебаний не происходит и звук не возникает. Для получения звуковой волны нужно, чтобы молекулы, вылетая из области с большей плотностью и давлением, передавали импульс другим молекулам, находящимся в области разрежения. Звук возникает в том случае, если размеры области изменения плотности и давления намного больше расстояния, проходимого молекулами до соударения с другими молекулами. Это расстояние есть длина свободного пробега, и оно должно быть много меньше расстояния между гребнями и впадинами давления. В противном случае молекулы перейдут из гребня во впадину, и волна моментально выровняется.

Мы, естественно, хотим описать поведение газа в масштабе, большем, чем длина свободного пробега, так что свойства газа не будут определяться поведением отдельных молекул. Например, смещение есть смещение центра инерции небольшого объема газа, а давление или плотность относятся к этому же объему. Мы обозначим давление через  $P$ , а плотность через  $\rho$ , причем обе величины будут функциями от  $x$  и  $t$ . Необходимо помнить, что наше описание приближенное и справедливо лишь, когда свойства газа не слишком быстро меняются с расстоянием.

### § 3. Волновое уравнение

Итак, физические явления, происходящие в звуковой волне, обладают следующими тремя свойствами:

- I. Газ движется, и плотность его меняется.
- II. При изменении плотности меняется и давление.
- III. Неравномерное распределение давления вызывает движение газа.

Рассмотрим сначала свойство II. Для любого газа, жидкости или твердого тела давление является функцией плотности. До прихода звуковой волны мы имели равновесное состояние с давлением  $P_0$  и плотностью  $\rho_0$ . Давление  $P$  зависит от плотности среды:  $P = f(\rho)$ , и в частности равновесное давление  $P_0 = f(\rho_0)$ . Отклонения величины давления от равновесного



в звуковой волне очень малы. Давление удобно измерять в *барах* ( $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ н/м}^2$ ). Давление в одну стандартную атмосферу приблизительно равно  $1 \text{ бар}$  ( $1 \text{ атм} = 1,0133 \text{ бар}$ ). Для звука обычно используется логарифмическая шкала интенсивности, так как восприятие уха, грубо говоря, растет логарифмически. В этой децибельной шкале уровень звукового давления  $I$  связан с амплитудой звукового давления:

$$I = 20 \log_{10} \left( \frac{P}{P_{\text{отн}}} \right) \text{ дБ}, \quad (47.1)$$

где давление отнесено к некоторому стандартному давлению  $P_{\text{отн}} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ бар}$ .

Звуковое давление  $P = 10^3 P_{\text{отн}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ бар}$ \* соответствует довольно сильному звуку в  $60 \text{ дБ}$ . Мы видим, что давление меняется в звуковой волне на очень малую величину по сравнению с равновесным или средним, равным  $1 \text{ атм}$ . Смещения и перепады плотности также очень малы. При взрывах, однако, изменения уже не столь малы; избыточное звуковое давление может превышать  $1 \text{ атм}$ . Такие большие перепады давления приводят к новым явлениям, которые мы рассмотрим позже. В звуковых волнах уровень силы звука выше  $100 \text{ дБ}$  встречается редко; уровень силы звука в  $120 \text{ дБ}$  уже вызывает боль в ушах. Поэтому, написав для звуковой волны

$$P = P_0 + P_u, \quad \rho = \rho_0 + \rho_u, \quad (47.2)$$

можно считать, что изменение давления  $P_u$  очень мало по сравнению с  $P_0$ , а изменение плотности  $\rho_u$  очень мало по сравнению с  $\rho_0$ . Тогда

$$P_0 + P_u = f(\rho_0 + \rho_u) = f(\rho_0) + \rho_u f'(\rho_0), \quad (47.3)$$

где  $P_0 = f(\rho_0)$  и  $f'(\rho_0)$  — производная от  $f(\rho)$ , взятая при значении  $\rho = \rho_0$ . Второе равенство здесь возможно только потому, что  $\rho_u$  очень мало. Таким образом, мы находим, что избыточное давление  $P_u$  пропорционально избыточной плотности  $\rho_u$ ; коэффициент пропорциональности обозначается через  $\kappa$ :

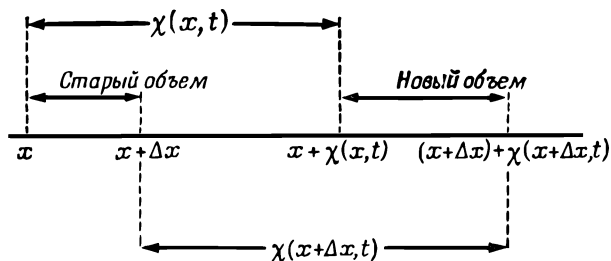
$$(II) \quad P_u = \kappa \rho_u, \quad \text{где } \kappa = f'(\rho_0) = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0. \quad (47.4)$$

Это весьма простое соотношение и составляет точное содержание свойства II.

Перейдем теперь к свойству I. Предположим, что положение элемента объема воздуха, не возмущенного звуковой волной, есть  $x$ , а звук смещает его в момент времени  $t$  на величину  $\chi(x, t)$ , так что его новое положение есть  $x + \chi(x, t)$ ,

---

\* При таком выборе  $P_{\text{отн}}$ ,  $P$  — уже не максимальная амплитуда звукового давления, а «среднее квадратичное» давление, равное максимальному, деленному на  $\sqrt{2}$ .



Фиг. 47.3. Смещение воздуха в точке  $x$  есть  $\chi(x, t)$ , в точке  $x + \Delta x$  равно  $\chi(x + \Delta x, t)$ .

Первоначальный объем, приходящийся на единицу площади в плоской звуковой волне, есть  $\Delta x$ , а окончательный объем равен  $\Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t)$ .

как показано на фиг. 47.3. Далее, положение соседнего элемента объема есть  $x + \Delta x$ , и его смещенное положение есть  $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ . Теперь можно найти изменение плотности. Поскольку мы рассматриваем плоскую волну, удобно взять единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ , т. е. направлению распространения волны. Количество воздуха, приходящееся на единичную площадку в интервале  $\Delta x$ , есть  $\rho_0 \Delta x$ , где  $\rho_0$  — невозмущенная, или равновесная, плотность воздуха. Эта порция воздуха, смещенная звуковой волной, будет находиться теперь между  $x + \chi(x, t)$  и  $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ , причем количество воздуха в этом интервале то же самое, что в интервале  $\Delta x$  до прихода волны. Если через  $\rho$  обозначить новую плотность, то

$$\rho_0 \Delta x = \rho [x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)]. \quad (47.5)$$

Поскольку  $\Delta x$  мало, можно написать  $\chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t) = (\partial \chi / \partial x) \Delta x$ . Здесь уже появляется частная производная, потому что  $\chi$  зависит и от  $x$ , и от времени. Наше уравнение принимает вид

$$\rho_0 \Delta x = \rho \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \Delta x + \Delta x \right), \quad (47.6)$$

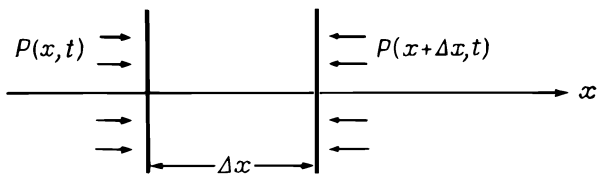
или

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_u) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \rho_0 + \rho_u. \quad (47.7)$$

Но в звуковой волне все изменения малы, так что  $\rho_u$  мало,  $\chi$  мало и  $\partial \chi / \partial x$  тоже мало. Поэтому в уравнении, которое мы только что написали,

$$\rho_u = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} - \rho_u \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (47.8)$$

можно пренебречь  $\rho_u (\partial \chi / \partial x)$  по сравнению с  $\rho_0 (\partial \chi / \partial x)$ . Так мы приходим к соотношению, которое требовалось согласно



Фиг. 47.4. Результирующая сила в направлении оси  $x$ , возникающая за счет давления на единичную площадку, перпендикулярную к оси  $x$ , есть  $-(\partial P/\partial x) \Delta x$ .

свойству I:

$$(I) \quad \rho_u = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (47.9)$$

Именно такой вид уравнения можно было ожидать из чисто физических соображений. Если смещение различно для разных  $x$ , плотность будет изменяться. Знак тоже правильный: если смещение  $\chi$  растет с ростом  $x$ , так что воздух расширяется, плотность должна уменьшаться.

Теперь нам нужно найти третье уравнение — уравнение движения, производимого избытком давления. Зная соотношение между силой и давлением, можно получить уравнение движения. Возьмем объем воздуха толщиной  $\Delta x$  и с единичной площадью грани, перпендикулярной  $x$ , тогда масса воздуха в этом объеме есть  $\rho_0 \Delta x$ , а ускорение воздуха есть  $\partial^2 \chi / \partial t^2$ , так что масса, умноженная на ускорение для этого слоя, есть  $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$ . (Если  $\Delta x$  мало, то безразлично, где брать ускорение — на краю слоя или где-нибудь посередине.) Сила, действующая на единичную площадку нашего слоя, перпендикулярную оси  $x$ , должна быть равна  $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$ . В точке  $x$  мы имеем силу  $P(x, t)$ , действующую на единицу площади в направлении  $+x$ , а в точке  $x + \Delta x$  возникает сила в обратном направлении, по величине равная  $P(x + \Delta x, t)$  (фиг. 47.4):

$$P(x, t) - P(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial P_u}{\partial x} \Delta x. \quad (47.10)$$

Мы учли, что  $\Delta x$  мало и что только избыточное давление  $P_u$  меняется в зависимости от  $x$ . Итак, согласно свойству III мы получаем

$$(III) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_u}{\partial x}. \quad (47.11)$$

Теперь уже уравнений достаточно, чтобы увязать все величины и привести к одной переменной, скажем  $x$ . Можно выразить  $P_u$  в (47.11) с помощью (47.4):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\kappa \frac{\partial \rho_u}{\partial x}, \quad (47.12)$$

а затем исключить  $\rho_0$  с помощью (I). Тогда  $\rho_0$  сократится и у нас останется

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}. \quad (47.13)$$

Обозначим  $c_s^2 = \kappa$ , тогда можно написать

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (47.14)$$

Это и есть волновое уравнение, которое описывает распространение звука в среде.

#### § 4. Решения волнового уравнения

Посмотрим теперь, действительно ли волновое уравнение описывает основные свойства звуковых волн в среде. Прежде всего мы хотим вывести, что звуковое колебание, или возмущение, движется с постоянной скоростью. Кроме того, нам нужно доказать, что два различных колебания могут свободно проходить друг через друга, т. е. принцип суперпозиции. Мы хотим еще доказать, что звук может распространяться и вправо и влево. Все эти свойства должны содержаться в нашем одном уравнении.

Раньше мы отмечали, что любое возмущение, имеющее вид плоской волны и движущееся с постоянной скоростью, записывается в виде  $f(x - vt)$ . Посмотрим теперь, является ли  $f(x - vt)$  решением волнового уравнения. Вычисляя  $\partial \chi / \partial x$ , получаем производную функцию  $\partial \chi / \partial x = f'(x - vt)$ . Дифференцируя еще раз, находим

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = f''(x - vt). \quad (47.15)$$

Дифференцируя эту же функцию  $\chi$  по  $t$ , получаем значение  $-v$ , умноженное на производную, или  $\partial \chi / \partial t = -vf'(x - vt)$ ; вторая производная по времени дает

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt). \quad (47.16)$$

Очевидно, что  $f(x - vt)$  удовлетворяет волновому уравнению, если  $v$  равно  $c_s$ .

Таким образом, из законов механики мы получаем, что любое звуковое возмущение распространяется со скоростью  $c_s$  и, кроме того,

$$c_s = \kappa^{1/2} = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0^{1/2};$$

тем самым мы связали скорость звуковых волн со свойствами среды.

Легко увидеть, что звуковая волна может распространяться и в направлении отрицательных  $x$ , т. е. звуковое возмущение вида  $\chi(x, t) = g(x + vt)$  также удовлетворяет волновому уравнению. Единственное отличие этой волны от той, которая распространялась слева направо, заключается в знаке  $v$ , но знак  $\partial^2\chi/\partial t^2$  не зависит от выбора  $x + vt$  или  $x - vt$ , потому что в эту производную входит только  $v^2$ . Отсюда следует, что решение уравнения описывает волны, бегущие в любом направлении со скоростью  $c_s$ .

Особый интерес представляет вопрос о суперпозиции решений. Допустим, мы нашли одно решение, скажем  $\chi_1$ . Это значит, что вторая производная  $\chi_1$  по  $x$  равна второй производной  $\chi_1$  по  $t$ , умноженной на  $1/c_s^2$ . И пусть есть второе решение  $\chi_2$ , обладающее тем же свойством. Сложим эти два решения, тогда получается

$$\chi(x, t) = \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t). \quad (47.17)$$

Теперь мы хотим удостовериться, что  $\chi(x, t)$  тоже представляет некую волну, т. е.  $\chi$  тоже удовлетворяет волновому уравнению. Это очень просто доказать, так как

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi_2}{\partial x^2} \quad (47.18)$$

и вдобавок

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\chi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\chi_2}{\partial t^2}. \quad (47.19)$$

Отсюда следует, что  $\partial^2\chi/\partial x^2 = (1/c_s^2)\partial^2\chi/\partial t^2$ , так что справедливость принципа суперпозиции проверена. Само существование принципа суперпозиции связано с тем, что волновое уравнение *линейно* по  $\chi$ .

Теперь естественно было бы ожидать, что плоская световая волна, распространяющаяся вдоль оси  $x$  и поляризованная так, что электрическое поле направлено по оси  $y$ , тоже удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (47.20)$$

где  $c$  — скорость света. Волновое уравнение для световой волны есть одно из следствий уравнений Максвелла. Уравнения электродинамики приводят к волновому уравнению для света точно так же, как уравнения механики приводят к волновому уравнению для звука.

## § 5. Скорость звука

При выводе волнового уравнения для звука мы получили формулу, которая связывает при нормальном давлении скорость движения волны и относительное изменение давления с

плотностью:

$$c_s^2 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0. \quad (47.21)$$

Чтобы оценить скорость изменения давления, очень важно знать, как при этом меняется температура. Можно ожидать, что в местах сгущения звуковой волны температура повысится, а в местах разрежения — понизится. Ньютон первым вычислил скорость изменения давления с плотностью, предположив, что температура при этом не меняется. Он считал, что тепло передается из одной области звуковой волны в другую так быстро, что температура измениться не успеет. Способ Ньютона дает изотермическую скорость звука, что неправильно. Правильное вычисление было сделано позже Лапласом, считавшим вопреки Ньютону, что давление и температура в звуковой волне меняются адиабатически. Поток тепла из области сгущения в область разрежения пренебрежимо мал, если только длина волны велика по сравнению с длиной свободного пробега. При этих условиях ничтожная утечка тепла в звуковой волне не влияет на скорость звука, хотя и приводит к небольшому поглощению звуковой энергии. Мы можем, естественно, ожидать, что поглощение тепла усилится, когда длина волны приблизится к длине свободного пробега, но такие длины волн примерно в миллион раз меньше длины волны слышимого звука.

Итак, для звука истинная скорость изменения давления с плотностью должна вычисляться без учета отвода тепла. Это соответствует адиабатическому изменению давления, для которого мы нашли, что  $PV^\gamma = \text{const}$ , где  $V$  — объем. Поскольку плотность  $\rho$  обратно пропорциональна объему, связь  $P$  и  $\rho$  для адиабатических процессов дается соотношением

$$P = \text{const} \cdot \rho^\gamma, \quad (47.22)$$

откуда мы получаем  $dP/d\rho = \gamma P/\rho$ . Тогда для скорости звука возникает соотношение

$$c_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho}. \quad (47.23)$$

Можно еще написать  $c_s^2 = \gamma PV/\rho V$  и использовать соотношение  $PV = NkT$ . Мы видим, кроме того, что  $\rho V$  есть масса газа, которую можно записать как  $Nm$  или  $\mu$ , где  $m$  — масса молекулы, а  $\mu$  — молекулярный вес. Таким образом, находим

$$c_s^2 = \frac{\gamma kT}{m} = \frac{\gamma RT}{\mu}, \quad (47.24)$$

откуда видно, что скорость звука зависит только от температуры газа и не зависит от давления или плотности. Мы уже

отмечали, что

$$kT = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle, \quad (47.25)$$

где  $\langle v^2 \rangle$  — средняя квадратичная скорость молекул. Отсюда следует, что  $c_s^2 = \gamma/3 \langle v^2 \rangle$ , или

$$c_s = \left( \frac{\gamma^{1/2}}{3^{1/2}} \right) v_{\text{ср}}. \quad (47.26)$$

Это равенство означает, что скорость звука есть средняя скорость молекул воздуха (точнее, корень квадратный из средней квадратичной скорости), умноженная на некоторое число, грубо говоря, на  $1/(3)^{1/2}$ . Другими словами, она того же порядка величины, что и скорость молекул, но на самом деле несколько меньше средней скорости молекул.

В общем-то мы могли этого ожидать, потому что такое возмущение, как изменение плотности, передается в конечном счете движением молекул. Однако подобного рода соображения не подсказывают нам точного значения скорости; могло ведь оказаться, что звук переносится самыми быстрыми или самыми медленными молекулами. Разумно и весьма утешительно, что скорость звука оказалась равной приблизительно половине средней молекулярной скорости.

## БИЕНИЯ

§ 1. Сложение двух волн

§ 2. Некоторые замечания о биениях и модуляции

## § 1. Сложение двух волн

§ 3. Боковые полосы

§ 4. Локализованный волновой пакет

§ 5. Амплитуда вероятности частиц

§ 6. Волны в пространстве трех измерений

§ 7. Собственные колебания

Не так давно мы довольно подробно обсудили свойства световых волн и их интерференцию, т. е. эффект суперпозиции двух волн от различных источников. Но при этом предполагалось, что частоты источников одинаковы. В этой же главе мы остановимся на некоторых явлениях, возникающих при интерференции двух источников с *различными* частотами.

Нетрудно догадаться, что при этом произойдет. Действуя так же, как прежде, давайте предположим, что имеются два одинаковых осциллирующих источника с одной и той же частотой, причем фазы их подобраны так, что в некоторую точку  $P$  сигналы приходят с одинаковой фазой. Если это свет, то в этой точке он очень ярк, если это звук, то он очень громк, а если это электроны, то их очень много. С другой стороны, если входящие волны отличаются по фазе на  $180^\circ$ , то в точке  $P$  не будет никаких сигналов, ибо полная амплитуда будет иметь здесь минимум. Предположим теперь, что некто крутит ручку «регулировка фазы» одного из источников и меняет разность фаз в точке  $P$  то туда, то сюда, скажем сначала он делает ее нулевой, затем — равной  $180^\circ$  и т. д. При этом, разумеется, будет меняться и сила приходящего сигнала. Ясно теперь, что если фаза одного из источников медленно, постоянно и равномерно меняется по сравнению с другим, начиная с нуля, а затем возрастает постепенно до  $10, 20, 30, 40^\circ$  и т. д., то в точке  $P$  мы увидим ряд слабых и сильных «пульсаций», ибо когда разность фаз проходит через  $360^\circ$ , в амплитуде снова возникает максимум. Но утверждение, что один



источник с постоянной скоростью меняет свою фазу по отношению к другому, равносильно утверждению, что число колебаний в 1 сек у этих двух источников несколько различно.

Итак, теперь известен ответ: если взять два источника, частоты которых немного различны, то в результате сложения получаются колебания с медленно пульсирующей интенсивностью. Иначе говоря, все сказанное здесь действительно имеет отношение к делу!

Этот результат легко получить и математически. Предположим, например, что у нас есть две волны и забудем на минуту о всех пространственных соотношениях, а просто посмотрим, что приходит в точку  $P$ . Пусть от одного источника приходит волна  $\cos \omega_1 t$ , а от другого — волна  $\cos \omega_2 t$ , причем обе частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не равны в точности друг другу. Разумеется, амплитуды их тоже могут быть различными, но сначала давайте предположим, что амплитуды равны. Общую задачу мы рассмотрим позднее. Полная амплитуда в точке  $P$  при этом будет суммой двух косинусов. Если мы построим график зависимости амплитуды от времени, как это показано на фиг. 48.1, то окажется, что когда гребни двух волн совпадают, получается большое отклонение, когда совпадают гребень и впадина — практически нуль, а когда гребни снова совпадают, вновь получается большая волна.

Математически нам нужно взять сумму двух косинусов и как-то ее перестроить. Для этого потребуются некоторые полезные соотношения между косинусами. Давайте получим их. Вы знаете, конечно, что

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} \quad (48.1)$$

и что вещественная часть экспоненты  $e^{ia}$  равна  $\cos a$ , а мнимая часть равна  $\sin a$ . Если мы возьмем вещественную часть  $\exp [i(a+b)]$ , то получим  $\cos (a+b)$ , а для произведения

$$e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i \sin a) (\cos b + i \sin b)$$

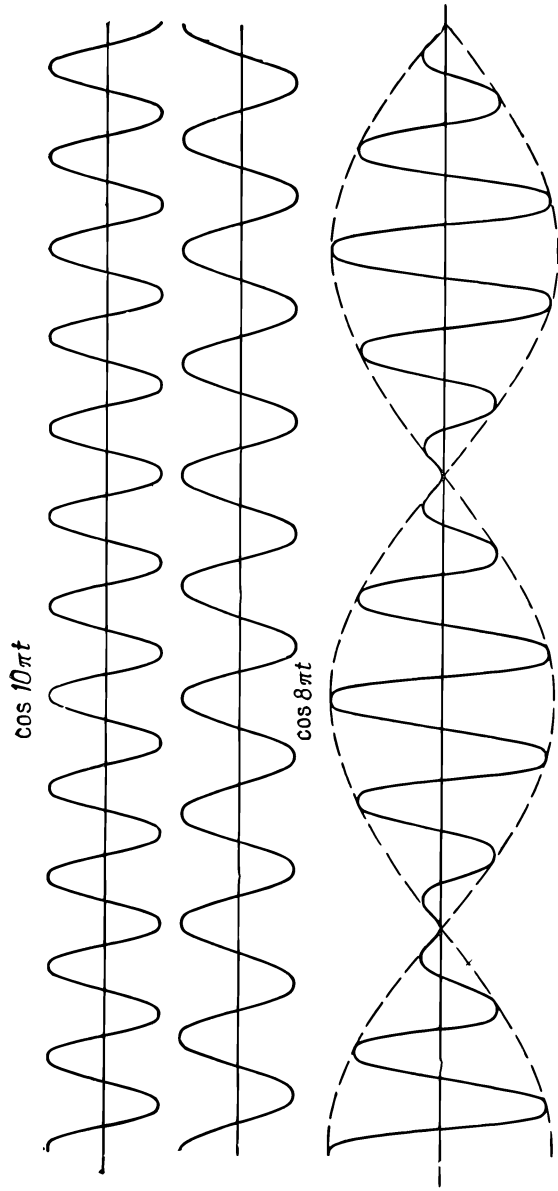
мы получаем  $\cos a \cos b - \sin a \sin b$  плюс некоторая мнимая добавка. Сейчас, однако, нам нужна только вещественная часть. Таким образом,

$$\cos (a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (48.2)$$

Если теперь изменить знак величины  $b$ , то, поскольку косинус при этом не изменяет знака, а синус изменяет знак на обратный, мы получаем аналогичное выражение для косинуса разности

$$\cos (a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \quad (48.3)$$

После сложения этих двух уравнений произведение синусов сократится, и мы находим, что произведение двух косинусов



$$\cos(5\pi t/2) + \cos 2\pi t = 2 \cos(\pi t/4) \cdot \cos(9\pi t/4)$$

Ф и г. 48.1. Суперпозиция двух косинусообразных волн с отношением частот 8 : 10. Точное повторение колебаний внутри каждого биения для общего случая не типично.

равно половине косинуса суммы плюс половина косинуса разности

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos (a + b) + \frac{1}{2} \cos (a - b). \quad (48.4)$$

Теперь можно обернуть это выражение и получить формулу для  $\cos \alpha + \cos \beta$ , если просто положить  $\alpha = a + b$ , а  $\beta = a - b$ , т. е.  $a = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ , а  $b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ :

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta). \quad (48.5)$$

Но вернемся к нашей проблеме. Сумма  $\cos \omega_1 t$  и  $\cos \omega_2 t$  равна

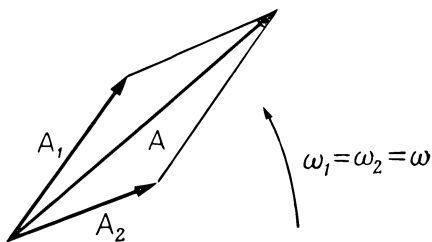
$$\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = 2 \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) t \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) t. \quad (48.6)$$

Пусть теперь частоты приблизительно одинаковы, так что  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$  равна какой-то средней частоте, которая более или менее та же, что и каждая из них. Но разность  $\omega_1 - \omega_2$  *гораздо меньше*, чем  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , поскольку мы предположили, что  $\omega_1$  и  $\omega_2$  приблизительно равны друг другу. Это означает, что результат сложения можно истолковать так, что будто есть косинусообразная волна с частотой, более или менее равной первоначальным, но что «размах» ее медленно меняется: он пульсирует с частотой, равной  $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ . Но та ли это частота, с которой мы слышим биения? Уравнение (48.6) говорит, что амплитуда ведет себя как  $\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$ , и это надо понимать так, что высокочастотные колебания заключены между двумя косинусоидами с противоположными знаками (пунктирная линия на фиг. 48.1). Хотя амплитуда действительно меняется с частотой  $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ , однако если речь идет об *интенсивности* волн, то мы должны представлять себе частоту в два раза большую. Иначе говоря, модуляция амплитуды в смысле ее интенсивности происходит с частотой  $\omega_1 - \omega_2$ , хотя мы и умножаем на косинус половинной частоты.

Пренебрегая этими небольшими усложнениями, мы можем заключить, что если складывать две волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то получим волну с частотой, равной средней частоте  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ , «сила» которой осциллирует с частотой  $\omega_1 - \omega_2$ .

Если амплитуды двух волн различны, то можно, конечно, повторить все вычисления снова, умножив предварительно косинусы на различные амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  и произведя массу всяких математических вычислений, перестроек и т. п. с использованием уравнений, подобных (48.2)—(48.5). Однако есть и другой, более легкий путь провести этот же анализ. Известно, например, что гораздо легче работать с экспонентами, чем с синусами и косинусами, поэтому можно предста-

Фиг. 48.2. Результат сложения двух комплексных векторов с равными частотами.



вить  $A_1 \cos \omega_1 t$  как реальную часть экспоненты  $A_1 \exp(i\omega_1 t)$ . Подобным же образом вторая волна будет реальной частью  $A_2 \exp(i\omega_2 t)$ . После сложения этих экспонент  $A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(i\omega_2 t)$  и выделения в качестве множителя экспоненты со средней частотой мы получим

$$A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} = e^{\frac{i}{2}(\omega_1 + \omega_2)t} \left[ A_1 e^{\frac{i}{2}(\omega_1 - \omega_2)t} + A_2 e^{-\frac{i}{2}(\omega_1 - \omega_2)t} \right], \quad (48.7)$$

т. е. снова оказывается, что высокочастотная волна модулируется малой частотой.

## § 2. Некоторые замечания о биениях и модуляции

Предположим теперь, что нас интересует интенсивность волны, описываемой уравнением (48.7). Чтобы найти ее, нужно взять квадрат абсолютной величины либо правой, либо левой части этого уравнения. Давайте возьмем левую часть. Интенсивность при этом будет равна

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (48.8)$$

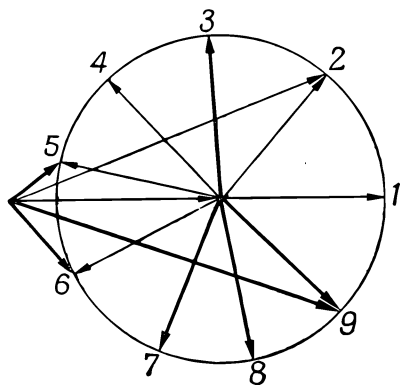
Видите, интенсивность возрастает и падает с частотой  $\omega_1 - \omega_2$ , изменяясь в пределах между  $(A_1 + A_2)^2$  и  $(A_1 - A_2)^2$ . Если  $A_1 \neq A_2$ , то минимальная интенсивность не равна нулю.

Те же результаты можно получить и другим путем — с помощью схем, подобных фиг. 48.2. Изобразим одну из волн в виде вектора длиной  $A_1$  в комплексной плоскости, вращающегося с угловой скоростью  $\omega_1$ . Вторую волну изобразим другим вектором, длина которого  $A_2$ , а угловая скорость вращения  $\omega_2$ . Если эти частоты в точности равны между собой, то мы получим вращающийся вектор, длина которого все время постоянна. Так что интенсивность в этом случае будет все время постоянной фиксированной величиной. Если, однако, частоты хоть немного отличаются одна от другой, то эти два вектора будут крутиться с различными скоростями.

На фиг. 48.3 показано, как выглядит вся картина «с точки зрения» вектора  $A_1 \exp(i\omega_1 t)$ . Мы видим, что вектор  $A_2$

медленно «отворачивается» от вектора  $A_1$ , так что амплитуда, получаемая при сложении этих векторов, сначала велика, а затем, когда второй вектор совсем «отвернется» в другую сторону, т. е. когда угол между ними станет  $180^\circ$ , она будет особенно мала, и т. д. Вектор крутится, амплитуда суммы векторов становится то больше, то меньше, а интенсивность пульсирует. Идея сравнительно простая, и ее можно реализовать множеством различных способов. Этот эффект очень легко наблюдать экспериментально. Можно установить, например, два громкоговорителя, каждый из которых связан со своим генератором колебаний и может давать свой собственный тон. Таким образом, мы принимаем один сигнал от первого источника, а другой сигнал от второго. Если частоты этих сигналов в точности одинаковы, то в результате в каждой точке пространства получится эффект определенной силы. Но если генераторы немного расстроить, то мы услышим некоторые изменения интенсивности. Чем больше мы расстраиваем генераторы, тем более быстрыми будут изменения силы звука. Однако уху становится трудно уследить за изменениями, скорость которых превышает 10 колебаний в секунду или что-то около этого.

Тот же эффект можно наблюдать и на осциллографе, который просто показывает сумму токов двух генераторов. Если частота пульсаций сравнительно мала, то мы просто видим, как на экране перед нами проходят синусоидальные волны, амплитуда которых пульсирует, но если сделать пульсации более быстрыми, то мы увидим нечто похожее на то, что показано на фиг. 48.1. По мере увеличения разницы между частотами «вершины» сближаются все больше и больше. Если амплитуды не равны друг другу, если мы один сигнал сделаем слабее другого, то образуется волна, амплитуда которой, как это и ожидается, никогда не становится равной нулю. Все

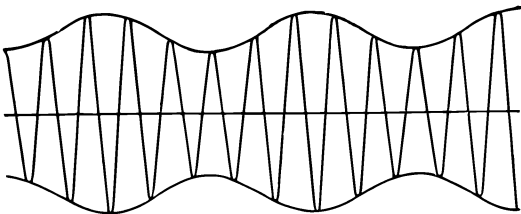


*Фиг. 48.3. Результат сложения двух комплексных векторов с различными частотами во вращающейся системе отсчета первого вектора.*

*Показаны девять последовательных положений медленно вращающегося вектора.*

Фиг. 48.4. Модуляция несущей волны.

На этом схематическом рисунке отношение  $\omega_c/\omega_m = 5$ . В настоящей радиоволне  $\omega_c/\omega_m \approx 100$ .



получается так, как нужно, независимо от того, электричество это или звук.

Но возможно и обратное явление! При радиопередаче используют так называемую *амплитудную модуляцию* (АМ). Вот как это делается. Радиопередатчик возбуждает электрические колебания очень высокой частоты. Для радиовещания, например, используется частота 800 кГц. Если включен этот *несущий сигнал*, то передатчик будет излучать волны с частотой 800 000 колебаний в секунду, причем амплитуда их постоянна. Информация же (зачастую совершенно бесполезная, вроде того, какую марку автомобиля вам следует приобрести) передается следующим образом: когда кто-то говорит в микрофон, амплитуда несущего сигнала изменяется «в ногу» с колебаниями звука, приходящего в микрофон.

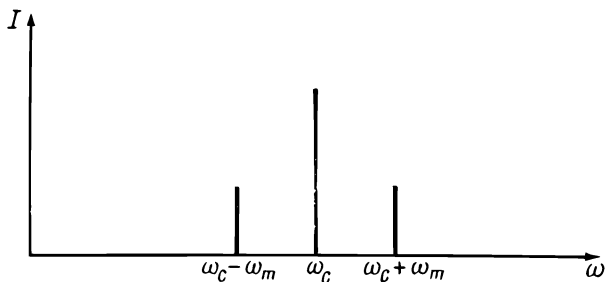
Возьмем простейший с точки зрения математики случай, когда певица берет безупречную ноту с безупречным синусоидальным колебанием голосовых связок, причем получается сигнал, сила которого меняется, как это показано на фиг. 48.4. Изменения слышимой частоты принимаются затем приемником; мы избавляемся от несущей волны и смотрим просто на «обертку», которая представляет собой колебания голосовых связок, или звук голоса певицы. Громкоговоритель же производит колебания той же частоты в воздухе, и в принципе слушатель не может обнаружить разницы между настоящим голосом певицы и передачей, слышимой по радио. В действительности же из-за некоторых искажений и других тончайших эффектов можно все же определить, слышим ли мы радио или «живой» голос певицы; в других же отношениях все происходит так, как мы описали.

### § 3. Боковые полосы

Описанную выше модулированную волну математически можно записать в виде

$$S = (1 + b \cos \omega_m t) \cos \omega_c t, \quad (48.9)$$

где  $\omega_c$  — несущая частота, а  $\omega_m$  — частота слышимого звука. Используя теоремы о косинусах или свойства экспоненты



Фиг. 48.5. Спектр частот несущей волны  $\omega_c$ , модулированной одной косинусообразной волной  $\omega_m$ .

$\exp(i\theta)$  (разницы в этом никакой нет, однако легче работать с экспонентой), мы получаем

$$S = \cos \omega_c t + \frac{1}{2} b \cos (\omega_c + \omega_m) t + \frac{1}{2} b \cos (\omega_c - \omega_m) t. \quad (48.10)$$

Таким образом, с другой точки зрения можно сказать, что выходящая волна состоит из суперпозиции трех волн: обычной волны с частотой  $\omega_c$ , т. е. несущей частоты, и затем двух новых волн с двумя другими частотами. Одна из них равна сумме несущей и модулирующей частот, а другая — разности. Если построить нечто вроде графика зависимости интенсивности излучения генератора от частоты, то сначала мы, естественно, обнаружим большую интенсивность при несущей частоте  $\omega_c$ , но как только певца начнет петь, мы неожиданно обнаружим интенсивность, пропорциональную силе голоса певца  $b^2$  при частотах  $\omega_c + \omega_m$  и  $\omega_c - \omega_m$ , как это показано на фиг. 48.5. Они называются *боковыми полосами*. Если из передатчика выходит модулированный сигнал, то возникают боковые полосы. Если в одно и то же время передаются две ноты, скажем, с частотами  $\omega_m$  и  $\omega_m'$ , например играют два инструмента или какая-то другая усложненная волна, тогда из математики видно, что получаются две новые волны, соответствующие частотам  $\omega_m \pm \omega_m'$ .

Итак, если происходит какая-то сложная модуляция, которую можно представить в виде суммы многих косинусов\*,

\* Следует сделать здесь небольшое примечание: в каких случаях кривая может быть представлена в виде суммы множества косинусов? *Ответ:* Почти всегда, за исключением небольшого числа случаев, которые могут присниться разве только математику. В каждой точке кривая, разумеется, должна иметь только одно значение и она не должна быть безумной кривой, прыгающей до бесконечности на протяжении бесконечно малого промежутка времени или что-нибудь в этом духе. Однако если отвлечься от этих ограничений, то любая разумная кривая (в частности, и та, которая получается при колебании голосовых связок певца) всегда может быть представлена в виде суммы косинусоидальных волн.

то оказывается, что в действительности передатчик работает в целой области частот, именно несущей частоты плюс-минус максимальная частота, содержащаяся в модулирующем сигнале.

Хотя вначале мы могли поверить, что радиопередатчик работает только на номинальной несущей частоте, так как в нем находится большой сверхстабильный кристаллический осциллятор и все подобрано так, чтобы частота была равна в точности 800 *кГц*, но в тот момент, когда диктор *объявляет*, что станция работает на частоте 800 *кГц*, он тем самым модулирует эту частоту и передача уже не идет точно на этой частоте. Предположим, что усилители построены так, что они могут передавать широкую полосу частот в области, воспринимаемой ухом (ухом может слышать частоты вплоть до 20 000 *Гц*, но обычно радиоприемники и радиопередатчики работают ниже частоты 10 000 *Гц*, и по радио мы высших частот не слышим). Так что голос диктора, объявляющего что-то по радио, может содержать частоты вплоть до 10 000 *Гц*, передатчик излучает частоты в области от 790 до 810 *кГц*. Если при этом на частоте, скажем, 795 *кГц* работает еще одна радиостанция, то возникают большие помехи. Если мы сделаем наш приемник столь чувствительным, что он будет принимать только частоту 800 *кГц* и не будет захватывать по 10 *кГц* с каждой стороны, то мы не услышим, что сказал диктор, ведь информация передается именно на боковых частотах! Поэтому очень важно, чтобы станции были разделены некоторой областью частот и их боковые полосы не перекрывались, а приемник не должен быть столь избирательным, чтобы не позволять принимать боковые полосы вместе с номинальной частотой. Но эта проблема не вызывает больших затруднений при радиопередачах. Мы слышим в области  $\pm 20$  *кГц*, а радиопередача ведется обычно в области от 500 до 1500 *кГц*, так что места должно хватить для множества станций.

Проблема телевидения намного труднее. Когда электронный луч бежит по экрану телевизионной трубки, он создает множество светлых и темных точек. Эти светлые и темные точки и есть «сигналы». Обычно, чтобы «показать» весь кадр, лучу требуется примерно в тридцатую долю секунды пробежать 500 строк. Пусть разрешение по горизонтали и по вертикали более или менее одинаково, т. е. на миллиметр каждой строки приходится ровно столько же точек, сколько строк приходится на миллиметр высоты. Нужно, чтобы мы могли различать последовательность светлое — темное, светлое — темное, светлое — темное на протяжении 500 линий. Чтобы это можно было сделать с помощью косинусообразной волны, требуется длина волны, т. е. расстояние от максимума до минимума, соответствующая длине  $1/250$  части экрана. Таким



образом, получается  $250 \times 500 \times 30$  «единичек информации» в секунду, поэтому высшая частота, которую нужно передать, оказывается равной приблизительно  $4 \text{ Мгц}$ . На самом деле, чтобы отделить телевизионные станции одну от другой, мы должны использовать несколько большую ширину — около  $6 \text{ Мгц}$ . Часть ее используется для передачи звукового сопровождения и другой информации. Таким образом, телевизионный канал имеет ширину  $6 \text{ Мгц}$ . Разумеется, модулировать с частотой, превышающей частоту несущей волны, невозможно, поэтому телевизионные передачи нельзя вести на частоте, например,  $800 \text{ кгц}$ .

Во всяком случае, телевизионная полоса начинается с частоты  $54 \text{ Мгц}$ . Первый телевизионный канал в Соединенных Штатах работает в полосе от  $54$  до  $60 \text{ Мгц}$ , т. е. имеет ширину  $6 \text{ Мгц}$ \*. «Постойте, — можете сказать вы, — ведь только сейчас мы доказали, что боковые полосы должны быть с обеих сторон, а поэтому ширина должна быть вдвое больше». Оказывается, радионинженеры довольно хитрый народ. Если при анализе модулирующего сигнала использовать не только косинус, а косинус и синус, чтобы учесть разность фаз, то между высокочастотной и низкочастотной боковыми полосами обнаружится наличие определенного постоянного соотношения. Этим мы хотим сказать, что вторая боковая полоса не содержит никакой новой информации по сравнению с первой, так что одну из них вполне можно выкинуть. Приемник же устроен таким образом, что потерянная информация восстанавливается из несущей частоты и одной боковой полосы. Передача с помощью одной боковой полосы — очень интересный метод уменьшения ширины полосы, необходимой для передачи информации.

#### § 4. Локализованный волновой пакет

Следующий вопрос, который мы хотим обсудить, — это интерференция волн как в пространстве, так и во времени. Предположим, что в пространстве распространяются две волны. Вы, конечно, знаете, что распространение волны в пространстве, например звуковой, можно описать с помощью экспоненты  $\exp[i(\omega t - kx)]$ . Такая экспонента удовлетворяет волновому уравнению при условии, что  $\omega^2 = k^2 c^2$ , где  $c$  — скорость распространения волны. В этом случае экспоненту можно записать в виде  $\exp[ik(x - ct)]$ , что является частным случаем общего решения  $f(x - ct)$ . Такая экспонента должна описать волну, распространяющуюся со скоростью  $\omega/k$ , равной  $c$ , и поэтому здесь все в порядке.

\* В Советском Союзе изображение имеет 625 строк и ширина каналов несколько больше. — *Прим. ред.*

Давайте теперь складывать две такие волны. Пусть первая волна распространяется с одной частотой, а вторая волна — с какой-то другой. Случай неравных амплитуд рассмотрим самостоятельно, хотя существенного отличия здесь нет. Таким образом, мы хотим сложить  $\exp[i(\omega_1 t - k_1 x)] + \exp[i(\omega_2 t - k_2 x)]$ . Это можно сделать с помощью математики, аналогичной использованной нами при сложении двух сигналов. Если скорости  $c$  обеих волн одинаковы, то сделать это очень легко; за исключением того, что вместо  $t$  стоит  $t' = t - x/c$ , это будет то же самое, что мы недавно проделали:

$$e^{i\omega_1(t - \frac{x}{c})} + e^{i\omega_2(t - \frac{x}{c})} = e^{i\omega_1 t'} + e^{i\omega_2 t'}. \quad (48.11)$$

При этом, естественно, мы получаем точно такие же модуляции, как и раньше, которые, однако, движутся вместе с волной. Другими словами, если сложить две волны, которые не просто осциллируют, но и перемещаются в пространстве, то получившаяся волна также будет двигаться с той же скоростью.

Хотелось бы обобщить это на случай волн, у которых отношение между частотой и волновым числом  $k$  не столь просто, например распространение волн в веществе с некоторым показателем преломления. В гл. 31 (вып. 3) мы уже изучали показатель преломления  $n$  и выяснили, что он связан с волновым числом следующим образом:  $k = n\omega/c$ . В качестве интересного примера мы нашли показатель преломления  $n$  для рентгеновских лучей:

$$n = 1 - \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m \omega^2}. \quad (48.12)$$

На самом деле в гл. 31 мы получали и более сложные формулы, однако эта ничуть не хуже, так почему бы нам не взять ее в качестве примера.

Нам известно, что даже в том случае, когда  $\omega$  и  $k$  не пропорциональны друг другу, отношение  $\omega/k$  все равно будет скоростью распространения данной частоты и данного волнового числа. Это отношение называется *фазовой скоростью*, т. е. скоростью, с которой движется фаза или узел отдельной волны:

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}. \quad (48.13)$$

Интересно, что, например, для случая распространения рентгеновских лучей в стекле эта фазовая скорость больше скорости света в пустоте [поскольку  $n$ , согласно (48.12), меньше единицы], а это несколько неприятно, ведь не думаем же мы, что можно посылать сигналы быстрее скорости света!

Обсудим теперь интерференцию двух волн, у которых значения  $\omega$  и  $k$  связаны какой-то определенной зависимостью. Например, написанная ранее формула для показателя  $n$  говорит, что  $k$  есть определенная известная функция частоты  $\omega$ . Для большей определенности давайте выпишем формулу зависимости  $k$  и  $\omega$  в данной частной задаче:

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{a}{\omega c}, \quad (48.14)$$

где  $a = Nq_0^2/2\epsilon_0 m$  — постоянная. Во всяком случае, мы хотим сложить такие две волны, у которых для каждой частоты существует определенное волновое число.

Давайте сделаем это точно так же, как и при получении уравнения (48.7):

$$e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} = e^{i/2[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x]} \times \\ \times \{e^{i/2[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} + e^{-i/2[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]}\}. \quad (48.15)$$

Таким образом, снова получается модулированная волна, распространяющаяся со средней частотой и средним волновым числом, однако сила ее меняется в соответствии с выражением, зависящим от разности частот и разности волновых чисел.

Рассмотрим теперь случай, когда разности между двумя волнами относительно малы. Предположим, что мы складываем две волны с приблизительно равными частотами, при этом  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  практически равно каждой из частот  $\omega$ . То же можно сказать и о  $(k_1 + k_2)/2$ . Таким образом, скорость волны, быстрых осцилляций, узлов действительно остается равной  $\omega/k$ . Но смотрите, скорость распространения модуляций не та же самая! Как нужно изменить  $x$ , чтобы сбалансировать некоторую величину времени  $t$ ? Скорость этих модулирующих волн равна

$$v_M = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \quad (48.16)$$

Скорость движения модуляций иногда называют *групповой скоростью*. Если мы возьмем случай относительно малой разности между частотами и соответственно относительно малой разности между волновыми числами, то это выражение переходит в пределе в

$$v_{гp} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (48.17)$$

Другими словами, чем медленнее модуляции, тем медленнее и биения, и вот что самое удивительное — существует определенная скорость их распространения, которая не равна фазовой скорости волны.

*Групповая скорость равна производной  $\omega$  по  $k$ , а фазовая скорость равна отношению  $\omega/k$ .*

Посмотрим, можно ли понять, почему так происходит. Рассмотрим две волны с несколько различными длинами, как это показано на фиг. 48.1. Они то совпадают по фазе, то различаются, то снова совпадают и т. д. Однако теперь эти волны в действительности представляют волны в пространстве, распространяющиеся с немного различными скоростями. Но поскольку фазовая скорость, скорость узлов этих двух волн, не в точности одинакова, то происходит нечто новое. Предположим, что мы едем рядом с одной из волн и смотрим на другую. Если бы они двигались с одинаковой скоростью, то вторая волна оставалась бы относительно нас там же, где и была с самого начала, поскольку мы едем как бы на гребне одной волны и видим гребень второй прямо около себя. Однако в действительности скорости не равны. Частоты немного отличаются друг от друга, а поэтому немного отличаются и скорости. Из-за этой небольшой разницы в скоростях другая волна либо медленно обгоняет нас, либо отстает. Что же с течением времени происходит с узлом? Если чуть-чуть продвинуть одну из волн, то узел при этом уйдет на значительное расстояние вперед (или назад), т. е. сумма этих двух волн имеет какую-то огибающую, которая вместе с распространением волн скользит по ним с другой скоростью. *Групповая скорость* является той скоростью, с которой передаются модулирующие сигналы.

Если мы посылаем сигнал, т. е. производим какие-то изменения волны, которые могут быть услышаны и расшифрованы кем-то, то это является своего рода модуляцией, но такая модуляция при условии, что она относительно медленная, будет распространяться с групповой скоростью (быстрые модуляции значительно труднее анализировать).

Теперь мы можем показать (наконец-то!), что скорость распространения рентгеновских лучей в куске угля, например, не больше, чем скорость света, хотя фазовая скорость больше скорости света. Чтобы сделать это, нужно найти соотношение  $d\omega/dk$ , которое мы вычислим дифференцированием формулы (48.14):  $dk/d\omega = 1/c + a/\omega^2 c$ . А групповая скорость равна обратной величине, т. е.

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{1 + \frac{a}{\omega^2}}, \quad (48.18)$$

что меньше, чем  $c$ ! Таким образом, хотя фазы могут бежать быстрее скорости света, модулирующие сигналы движутся медленнее, и в этом состоит разрешение кажущегося парадокса! Разумеется, в простейшем случае  $\omega = kc$  групповая

скорость  $d\omega/dk$  тоже равна  $c$ , т. е. когда все фазы движутся с одинаковой скоростью, естественно, и групповая скорость будет той же самой.

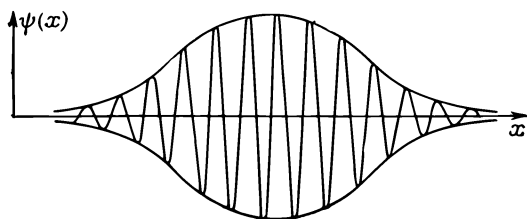
### § 5. Амплитуда вероятности частиц

Рассмотрим еще один необычайно интересный пример фазовой скорости. Он относится к области квантовой механики. Известно, что амплитуда вероятности найти частицу в данном месте изменяется при некоторых обстоятельствах в пространстве и времени (давайте возьмем одно измерение) следующим образом:

$$\psi = Ae^{i(\omega t - kx)}, \quad (48.19)$$

где  $\omega$  — частота, связанная с классической энергией,  $E = \hbar\omega$ , а  $k$  — волновое число, которое связано с импульсом соотношением  $p = \hbar k$ . Мы говорим, что частица имеет определенный импульс  $p$ , если волновое число в точности равно  $k$ , т. е. если бежит идеальная волна повсюду с одинаковой амплитудой. Выражение (48.19) дает амплитуду вероятности, но если мы возьмем квадрат абсолютной величины, то получим относительную вероятность обнаружения частицы как функцию положения и времени. В данном случае она равна *постоянной*, что означает вероятность обнаружить частицу в любом месте. Рассмотрим теперь случай, когда известно, что обнаружить частицу в каком-то месте более вероятно, чем в других местах. Подобную картину мы описываем волной, которая имеет максимум в данном месте и сходит на нет по мере удаления в стороны (фиг. 48.6). (Это не то же самое, что изображено на фиг. 48.1, где волна имеет целый ряд максимумов, но с ними вполне можно расправиться, сложив несколько волн с приблизительно одинаковыми значениями  $\omega$  и  $k$ . Таким способом можно избавиться от всех максимумов, кроме одного.)

При этих обстоятельствах, поскольку квадрат выражения (48.19) представляет вероятность найти частицу в некотором месте, мы знаем, что в данный момент больше шансов найти частицу вблизи центра «колокола», где амплитуда макси-



Фиг. 48.6. Локализованный волновой пакет.

мальна. Если подождать немного, то волна передвинется, и по прошествии некоторого промежутка времени «колокол» перейдет в какое-то другое место. Зная, что частица вначале где-то была расположена, мы ожидали бы, согласно классической механике, что она будет где-то и позднее, ведь есть же у нее *скорость* и импульс в конце концов. При этом квантовая теория дает в пределе правильные классические соотношения между энергией, импульсом и скоростью, если только групповая скорость, скорость модуляции, будет равна скорости классической частицы с тем же самым импульсом.

Сейчас необходимо показать, так ли это на самом деле или нет. Согласно классической теории, энергия связана со скоростью уравнением

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (48.20)$$

Точно таким же образом импульс равен

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (48.21)$$

Как следствие отсюда после исключения  $v$  получается

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4,$$

т. е.  $p_\mu p_\mu = m^2$ . Это величайший результат четырехмерья, о котором мы уже говорили много раз, устанавливающий связь между энергией и импульсом в классической теории. Теперь же, поскольку мы собираемся заменить  $E$  и  $p$  на  $\omega$  и  $k$  с помощью подстановки  $E = \hbar\omega$  и  $p = \hbar k$ , он означает, что в квантовой механике должна существовать связь

$$\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} - \hbar^2k^2 = m^2c^2. \quad (48.22)$$

Таким образом, возникло соотношение между частотой и волновым числом квантовомеханической амплитуды, описывающей частицу с массой  $m$ . Из этого уравнения можно получить

$$\omega = c \sqrt{k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}},$$

т. е. фазовая скорость  $\omega/k$  снова больше скорости света!

Рассмотрим теперь групповую скорость. Она должна быть равна скорости, с которой движется модуляция, т. е.  $d\omega/dk$ .

Чтобы найти ее, нужно продифференцировать квадратный корень; это дело нехитрое. Производная равна

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc}{\sqrt{k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}}}.$$

Но входящий сюда квадратный корень есть попросту  $\omega/c$ , так что эту формулу можно записать в виде  $d\omega/dk = c^2k/\omega$ . Далее, так как  $k/\omega$  равно  $p/E$ , то

$$v_{\text{гр}} = \frac{c^2p}{E}.$$

Но, согласно (48.20) и (48.21),  $c^2p/E$  равно  $v$  — скорости частицы в классической механике. Таким образом видно, что, принимая во внимание основные квантовомеханические соотношения  $E = \hbar\omega$  и  $p = \hbar k$ , определяющие  $\omega$  и  $k$  через классические величины  $E$  и  $p$  и дающие только уравнение  $\omega^2 - k^2c^2 = m^2c^4/\hbar^2$ , теперь можно понять также соотношения (48.20) и (48.21), связывающие  $E$  и  $p$  со скоростью. Групповая скорость, разумеется, должна быть скоростью частиц, если эта интерпретация вообще имеет какой-либо смысл. Пусть в какой-то момент, как мы полагаем, частица находится в одном месте, а затем, скажем через 10 минут, — в другом. Тогда, согласно квантовой механике, расстояние, пройденное «колоколом», разделенное на интервал времени, должно равняться классической скорости частицы.

## § 6. Волны в пространстве трех измерений

Мы заканчиваем наше обсуждение волн несколькими общими замечаниями о волновом уравнении. Эти замечания, призванные дать нам картину того, чем нам предстоит заниматься в будущем, вовсе не претендуют на то, чтобы вы поняли их сразу; они должны скорее показать, как будут выглядеть все эти вещи, когда вы несколько больше познакомитесь с волнами. Мы уже записали уравнение для распространения звука в одном измерении:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2};$$

здесь  $c$  — скорость того, что мы назвали волнами. Если речь идет о звуке, то это скорость звука, если о свете — то это скорость света. Мы показали, что для звуковой волны перемещения частиц должны распространяться с некоторой скоростью. Но избыточное давление, как и избыточная плотность, тоже распространяется с некоторой скоростью. Таким образом, можно ожидать, что и давление будет удовлетворять этому же уравнению. Так оно и есть на самом деле, однако

докажите это самостоятельно. *Указание:*  $\rho_u$  пропорционально скорости изменения  $\chi$  с расстоянием  $x$ . Следовательно, продифференцировав волновое уравнение по  $x$ , мы немедленно обнаружим, что  $\partial\chi/\partial x$  удовлетворяет тому же самому уравнению. Другими словами,  $\rho_u$  удовлетворяет тому же самому уравнению. Но  $P_u$  пропорционально  $\rho_u$ , поэтому и  $P_u$  удовлетворяет тому же самому уравнению. Таким образом, и давление, и перемещение — все описывается одним и тем же уравнением.

Обычно волновое уравнение для звука записывается через давление, а не через перемещение. Это проще, потому что давление — скаляр и не имеет никакого направления. Но перемещение есть вектор, и поэтому лучше иметь дело с давлением.

Следующий вопрос, который нам предстоит обсудить, относится к волновому уравнению в трехмерном пространстве. Мы знаем, что звуковая волна в одномерном пространстве описывается решением  $\exp[i(\omega t - kx)]$ , где  $\omega = kc_s$ . Кроме того, нам известно, что в трех измерениях волна описывается выражением  $\exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]$ , и в этом случае  $\omega^2 = k^2 c_s^2$  [сокращенная запись  $(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) c_s^2$ ]. Сейчас мы хотим просто угадать вид волнового уравнения в трехмерном пространстве. Естественно, что в случае звука это уравнение можно получить с помощью тех же самых динамических соображений, но уже в трехмерном пространстве. Однако мы не будем сейчас делать этого, а просто напомним ответ: уравнение для давления или перемещения (или чего-то другого) имеет вид

$$\frac{\partial^2 P_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_u}{\partial z^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 P_u}{\partial t^2}; \quad (48.23)$$

правильность этого уравнения может быть легко проверена подстановкой в него функции  $\exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ . Ясно, что при каждом дифференцировании по  $x$  происходит умножение на  $-ik_x$ . Если мы дифференцируем дважды, то это эквивалентно умножению на  $-k_x^2$ , так что для такой волны первый член получится равным  $-k_x^2 P_u$ . Точно таким же образом второй член окажется равным  $-k_y^2 P_u$ , а третий — равным  $-k_z^2 P_u$ . С правой же стороны мы получим  $-\omega^2/c_s^2 P_u$ . Если мы вынесем за скобку  $P_u$  и изменим знаки всех трех членов, то увидим, что между  $k$  и  $\omega$  как раз получится желаемое соотношение.

Возвращаясь назад, мы должны прийти к основному уравнению, соответствующему дисперсионному соотношению (48.22) для квантовомеханической волны. Если  $\phi$  — амплитуда нахождения частицы в момент  $t$  в точке с координатами  $x, y$



и  $z$ , то основное уравнение квантовой механики для свободной частицы имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Phi. \quad (48.24)$$

Прежде всего заметим, что релятивистский характер этого уравнения гарантируется появлением координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$  в такой удачной комбинации, что она автоматически учитывает принцип относительности. Кроме того, это уравнение волновое. Если подставить в него плоскую волну, то как следствие мы получим равенство  $-k^2 + \omega^2/c^2 = m^2 c^2/\hbar^2$ , которое должно выполняться в квантовой механике. В этом волновом уравнении содержится еще одна фундаментальная вещь: любая суперпозиция волн также будет его решением. Таким образом, это уравнение опирается на всю квантовую механику и всю теорию относительности, которая уже обсуждалась нами до сих пор, по крайней мере когда мы имели дело с единственной частицей в пустом пространстве без всяких потенциалов и воздействующих на нее сил!

## § 7. Собственные колебания

Вернемся теперь к другим очень любопытным примерам биений, которые немного отличаются от того, что мы рассматривали до сих пор. Представьте себе два одинаковых маятника, которые связаны между собой слабой пружинкой. Длины их должны быть одинаковыми с возможно большей точностью. Если мы оттянем один маятник и отпустим его, то он будет качаться взад и вперед и будет тянуть то взад, то вперед связывающую пружинку, т. е. получится устройство, создающее силу с собственной частотой второго маятника. Можно заключить из знакомой нам теории резонансов, что если к какому-то предмету прикладывать с надлежащей частотой силу, то она будет двигать этот предмет. Таким образом, ясно, что один маятник, двигаясь взад и вперед, будет раскачивать второй. Однако при этих условиях происходит некое новое явление, связанное с тем, что энергия системы конечна. Первый маятник постепенно растрчивает свою энергию, вызывая движение другого маятника, и в конце концов полностью отдаст свою энергию и остановится. Вся энергия теперь будет сосредоточена во втором маятнике. Но пройдет немного времени и все будет происходить наоборот: энергия из второго маятника будет перекачиваться назад, в первый маятник. Это очень интересное и занимательное явление. Мы сказали, что оно связано с теорией биений, и сейчас мы должны показать, как можно понять это явление с точки зрения этой теории.

Обратите внимание, что движение каждого из двух маятников — это колебания с циклически изменяющейся амплитудой. Поэтому движение одного из маятников можно, очевидно, рассматривать с различных точек зрения, в частности как сумму двух одновременных колебаний с мало отличающимися частотами. Таким образом должно быть возможно обнаружить в этой системе два других движения и утверждать, что поскольку система наша, безусловно, линейная, то мы видим суперпозицию этих двух решений. Действительно, легко найти два способа так запустить нашу систему, что каждый из них даст в результате идеальное абсолютно периодическое колебание с одной частотой. Движение, с которого мы начали, не строго периодически, оно не продолжается все время (один маятник постепенно передает свою энергию другому и изменяет свою амплитуду), но есть способы так начать движение, что не будет никаких подобных изменений. Как только вы узнаете, что это за способы, то сразу же поймете почему. Если, например, мы запустим оба маятника одновременно, то, поскольку длина их одинакова и пружинка в этом случае бездействует, оба маятника так и будут продолжать качаться все время вместе. (Разумеется, если нет трения и все достаточно хорошо подогнано.) С другой стороны, существует еще одна возможность создать строго периодическое движение, которое также имеет определенную частоту, — когда маятники, оттянутые вначале в разные стороны на точно равные расстояния, движутся в противоположных направлениях. Нетрудно сообразить, что пружинка немного увеличивает «восстанавливающую силу», возникающую из-за действия силы тяжести, и система колеблется с несколько большей частотой, чем в первом случае, — вот и все. Почему с большей? Да потому что пружинка тянет, помогая силе тяжести, и это делает систему более «жесткой», так что частота такого колебания чуть-чуть больше.

Итак, создать колебания с постоянной амплитудой в нашей системе можно двумя способами: либо оба маятника качаются все время вместе с одной частотой, либо они качаются в противоположных направлениях с несколько большей частотой.

Действительное же движение системы, поскольку она линейна, можно представить в виде суперпозиции этих двух способов. (Напомним, что предметом этой главы являются эффекты сложения двух движений с различными частотами.) Давайте подумаем, что произошло бы, если бы мы сложили эти два решения. Если в момент  $t = 0$  запустить оба эти движения (причем с равными амплитудами и одинаковой фазой), то сумма этих двух движений означает, что один маятник, на который каким-то образом воздействовало первое движение

и противоположным образом воздействовало второе, должен оставаться на месте, тогда как другой маятник, двигаясь одинаково при обоих способах движения, качается с удвоенной амплитудой. С течением времени, однако, оба эти основных *движения*, существуя независимо одно от другого, медленно сдвигаются по фазе одно относительно другого. Это означает, что после достаточно большого промежутка времени, такого, что в первом движении произойдет, скажем, 900,5 колебания, а во втором — только 900, относительная фаза станет как раз обратной по отношению к тому, что было вначале. Иначе говоря, маятник, имевший вначале бóльшую амплитуду, остановится, тогда как маятник, неподвижный вначале, начнет качаться изо всех сил!

Итак, мы видим, что такое сложное движение можно рассматривать в рамках идеи резонансов, когда энергия от одного маятника переходит к другому, или как суперпозицию двух движений с постоянной амплитудой и различными частотами.

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

## § 1. Отражение волн

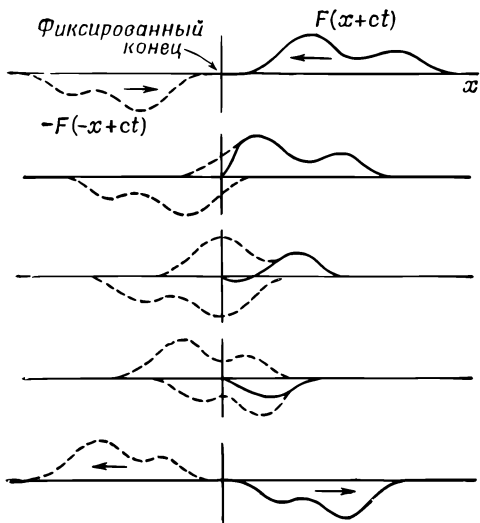
В этой главе мы рассмотрим ряд замечательных явлений, возникающих в результате «заклучения» волны в некоторую ограниченную область. Сначала нам придется установить несколько частных фактов, относящихся, например, к колебанию струны, а затем, обобщив эти факты, мы придем, по-видимому, к наиболее далеко идущему принципу математической физики.

Первый пример волн в ограниченном пространстве — это волны в пространстве, ограниченном с одной стороны. Давайте возьмем простой случай одномерной волны на струне. Можно было бы рассмотреть плоскую звуковую волну в пространстве, ограниченном с одной стороны стенкой, или какие-то другие примеры той же природы, но для наших теперешних целей вполне достаточно простой струны. Предположим, что один конец струны закреплен, ну, например, вмурован в «абсолютно жесткую» стенку. Математически это можно описать, указав, что перемещение струны  $y$  в точке  $x = 0$  должно быть нулем, ибо конец струны не может двигаться. Далее, если бы в этом деле не участвовала стенка, то, как мы знаем, общее решение, описывающее движение струны, можно было бы представить в виде суммы двух функций  $F(x - ct)$  и  $G(x + ct)$ , причем первая описывает волну, бегущую по струне в одну сторону, а вторая — в другую, так что

$$y = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (49.1)$$

будет общим решением для любой струны. Но нам, помимо этого, нужно еще удовлетворить

- § 1. Отражение волн
- § 2. Волны в ограниченном пространстве и собственные частоты
- § 3. Двумерные собственные колебания
- § 4. Связанные маятники
- § 5. Линейные системы



Фиг. 49.1. Отражение от стенки как суперпозиция двух бегущих волн.

условию неподвижности одного конца. Если в уравнении (49.1) мы положим  $x = 0$  и посмотрим, какие будут  $y$  в любой момент  $t$ , то получим  $y = F(-ct) + G(+ct)$ . Но эта сумма должна быть нулем в любой момент времени, а это означает, что функция  $G(+ct)$  должна быть равна  $-F(-ct)$ . Другими словами, функция  $G$  от некоторой величины должна быть равна функции  $-F$  от той же величины со знаком минус. Подставляя снова полученный результат в уравнение (49.1), находим решение поставленной задачи:

$$y = F(x - ct) - F(-x - ct). \quad (49.2)$$

Ясно, что это выражение всегда даст  $y = 0$ , если  $x$  положить равным нулю.

На фиг. 49.1 представлена волна, идущая в отрицательном  $x$ -направлении вблизи точки  $x = 0$ , и гипотетическая волна, идущая в противоположном направлении с обратным знаком и с другой стороны от начала координат. Я сказал «гипотетическая», потому что с другой стороны, конечно, никакой колеблющейся струны нет. Истинное же движение струны должно рассматриваться как сумма этих двух волн в области положительных  $x$ . Достигнув начала координат, они в точке  $x = 0$  полностью уничтожат друг друга, а затем вторая (отраженная) волна, идущая, разумеется, в противоположном направлении, окажется единственной волной в области положительных  $x$ . Эти результаты эквивалентны следующему утверждению: волна, достигнув зашпеленного конца струны, отражается от него с изменением знака. Такое отражение всегда

можно понять, если представить себе, как нечто дошедшее до конца струны вылетит затем из-за стены «вверх ногами». Коротче говоря, если мы предположим, что струна бесконечна и что, где бы ни находилась волна, бегущая в одном направлении, всегда существует симметричная ей относительно точки  $x = 0$  другая волна, бегущая в противоположном направлении, то в самой точке  $x = 0$  никакого перемещения не будет, а поэтому безразлично, заземлена ли струна в этом месте или нет.

Следующий наш пример — отражение периодической волны. Предположим, что волна, описываемая функцией  $F(x - ct)$ , представляет собой синусоидальную волну, которая затем отражается. Тогда отраженная волна  $-F(-x - ct)$  тоже будет синусоидальной волной той же частоты, но пойдет она в противоположном направлении. Эту ситуацию проще всего описать с помощью комплексных функций

$$F(x - ct) = e^{i\omega(t - x/c)} \quad \text{и} \quad F(-x - ct) = e^{i\omega(t + x/c)}.$$

Нетрудно убедиться, что если подставить их в выражение (49.2) и положить  $x = 0$ , то в любой момент времени  $t$  перемещение будет равно нулю и, следовательно, необходимое условие окажется выполненным. Воспользовавшись теперь свойством экспоненты, можно записать результат в более простом виде:

$$y = e^{i\omega t} (e^{-i\omega x/c} - e^{i\omega x/c}) = -2ie^{i\omega t} \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (49.3)$$

Мы получили нечто новое и интересное. Из этого решения ясно, что если мы посмотрим на любую точку  $x$  нашей струны, то увидим, что она осциллирует с частотой  $\omega$ . Совершенно неважно, где находится эта точка, все равно частота будет той же самой! Однако на струне есть такие места (где  $\sin(\omega x/c) = 0$ ), которые вообще не перемещаются. Более того, если в любой момент времени  $t$  сделать моментальный снимок колеблющейся струны, то на фотографии получится синусоидальная волна, но величина ее амплитуды будет зависеть от времени  $t$ . Из выражения (49.3) можно видеть, что длина одного цикла синусоидальной волны равна длине какой-либо из волн:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (49.4)$$

Неподвижные точки удовлетворяют условию  $\sin(\omega x/c) = 0$ , которое означает, что  $\omega x/c = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$ . Эти точки называются *узлами*. Каждая точка между двумя соседними узлами движется синусоидально вверх и вниз, но способ ее движения остается фиксированным в пространстве. Это основная характеристика того, что называется *собственным колебанием*,

гармоникой или модой. Если движение обладает тем свойством, что каждая точка предмета движется строго синусоидально и все точки движутся с одинаковой частотой (хотя одни, может быть, больше, а другие меньше), то мы имеем дело с собственным колебанием.

## § 2. Волны в ограниченном пространстве и собственные частоты

Перейдем к обсуждению следующей интересной задачи. Что произойдет, если струну закрепить с двух концов, скажем в точках  $x = 0$  и  $x = L$ ? Давайте начнем с идеи отражения волны, с некоего горба, движущегося в одном направлении. С течением времени этот горб подойдет к одному концу струны и в конце концов превратится в небольшой всплеск, поскольку здесь он складывается с перевернутым ответным горбом, идущим с другой стороны. Наконец первый горб совсем исчезнет, а в обратном направлении побежит другой, «ответный» горб, и весь процесс повторится уже на другом конце. Как видите, задача решается совсем просто, впрочем здесь возникает интересный вопрос: можно ли в этом случае получить синусоидальную волну (только это описанное решение *периодично*, но, разумеется, не *синусоидально* периодически). Давайте попытаемся «вставить» в нашу струну синусоидально периодическую волну. Если один конец струны закреплен, то мы знаем, что должно получиться нечто похожее на наше предыдущее решение (49.3). Но то же самое должно получиться и у второго конца, ведь он тоже закреплен. Поэтому единственная возможность получить периодическое синусоидальное движение — это взять волну, которая в точности укладывается на длине струны. В противоположном случае мы не получим собственной частоты, с которой струна могла бы продолжать свои колебания. Короче говоря, если по струне пустить синусоидальную волну, которая в точности укладывается на ее длине, то она сохраняет свою идеальную синусообразную форму и будет гармонически колебаться с некоторой частотой.

Математически мы можем задать форму волны в виде функции  $\sin kx$ , где  $k = \omega/c$ , как и в уравнениях (49.3) и (49.4). Эта функция обращается в нуль при  $x = 0$ , однако то же условие должно выполняться и на другом конце струны. Дело в том, что  $k$  уже не будет произвольным, как в случае полуограниченной струны. Оба конца могут быть закреплены при одном-единственном условии, что  $\sin kL = 0$ . Но чтобы синус был равен нулю, его угол должен быть кратен целому числу  $\pi$ , например  $0, \pi, 2\pi$  и т. д. Поэтому уравнение

$$kL = n\pi \quad (49.5)$$

в зависимости от того целого числа, которое мы подставим в него, дает полный набор различных чисел  $k$ . При этом каждому числу  $k$  соответствует частота  $\omega$ , которая по формуле (49.5) равна просто

$$\omega = kc = \frac{\pi \nu c}{L}. \quad (49.6)$$

Итак, мы нашли, что синусоидальные колебания струны могут происходить *только с некоторыми определенными частотами*. Это — наиболее важная характеристика волн в ограниченной области. Сколь бы сложна ни была система, всегда оказывается, что в ней могут быть чисто синусоидальные колебания, но частота их определяется свойствами данной системы и природой ее границ. В случае струны возможно множество различных частот, каждой из которых соответствует определенное собственное колебание — движение, синусоидально повторяющее самое себя.

На фиг. 49.2 показаны первые три собственные гармоники нашей струны. Длина волны  $\lambda$  первой из них равна  $2L$ . В этом легко убедиться, продолжив волну до точки  $x = 2L$  и получив полный цикл синусоидальной волны. Угловая частота  $\omega$  равна в общем случае  $2\pi c$ , деленному на длину волны  $\lambda$ , а поскольку сейчас у нас  $\lambda = 2L$ , то частота будет равна  $\pi c/L$ , что согласуется с формулой (49.6) при  $n = 1$ . Обозначим эту частоту через  $\omega_1$ . Следующая собственная гармоника напоминает бантик из двух петель с узлом посередине. Ее длина просто равна  $L$ . Соответствующая величина  $k$ , а следовательно, и частота  $\omega$  должны быть вдвое большими, т. е. частота равна  $2\omega_1$ . Частота третьей собственной гармоники оказывается равной  $3\omega_1$  и т. д. Таким образом, различные собственные гармоники кратны целому числу низшей частоты  $\omega_1$ , т. е.  $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1$  и т. д.

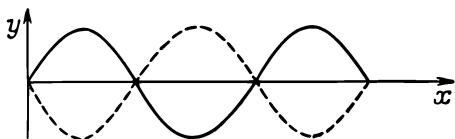
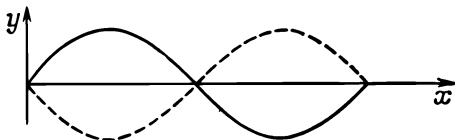
Вернемся теперь к общему движению струны. Оказывается, что любое возможное движение можно рассматривать как одновременное действие некоторого числа собственных колебаний. На самом деле для описания наиболее общего движения должно быть одновременно возбуждено бесконечное число собственных гармоник. Чтобы получить некоторое представление о том, что происходит при таком сложении, давайте посмотрим, что получится при одновременном колебании двух первых собственных гармоник. Пусть первая из них колеблется так, как это показано в ряде схематических чертежей фиг. 49.3, где изображены отклонения струны через равные промежутки времени на протяжении полуцикла низшей частоты.

Предположим теперь, что одновременно с первой собственной гармоникой работает и вторая. Последовательные положения струны при возбуждении этой собственной гармоники





Фиг. 49.2. Первые три гармоники колеблющейся струны.

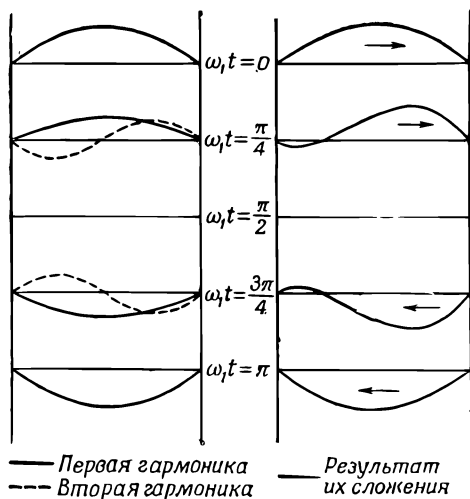


показаны тоже на фиг. 49.3 пунктирной линией. По отношению к первой гармонике они сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ . Это означает, что в начальный момент никакого отклонения не было, но скорости двух половинок струны направлены в противоположные стороны. Вспомним теперь общий принцип линейных систем: если взять любые два решения, то сумма их тоже будет решением. Поэтому перемещения, полученные сложением двух решений, показанных на фиг. 49.3, будут третьим возможным решением. На этом же рисунке показан и результат сложения, который начинает напоминать горб, пробегающий взад и вперед по струне от одного конца до другого, хотя с помощью только двух собственных гармоник нельзя построить достаточно хорошей картины такого движения; их нужно гораздо больше. Этот результат представляет на самом деле частный случай основного принципа линейных систем, который гласит:

*Любое движение можно рассматривать как составленное из различных собственных гармоник, взятых с надлежащими амплитудами и фазами.*

Значение этого принципа обусловлено тем фактом, что каждое собственное колебание — очень простая вещь — это просто синусоидальное движение во времени. По правде говоря, даже общее движение струны — еще не самая сложная вещь; существует движение куда более сложное, скажем такое, как вибрация крыльев самолета. Тем не менее даже у крыльев самолета можно обнаружить некие собственные кручения с определенными частотами. А если так, то полное движение можно рассматривать как суперпозицию гармони-

Фиг. 49.3. Две гармоника, напоминающие при сложении бегущую волну.



ческих колебаний (за исключением тех случаев, когда вибрация настолько велика, что система уже не может рассматриваться как линейная).

### § 3. Двумерные собственные колебания

Сейчас мы перейдем к рассмотрению очень интересного поведения собственных гармоник в двумерных колебаниях. До сих пор мы говорили только об одномерных колебаниях: натянутой струне или звуковых волнах в трубе. В конце концов мы должны добраться до трех измерений, но сначала давайте остановимся на более легком этапе — этапе двумерных колебаний. Возьмем для большей определенности прямоугольный резиновый барабан, перепонка которого закреплена по краям так, что на прямоугольном крае барабана она перемещаться не может. Пусть размеры прямоугольника будут равны  $a$  и  $b$ , как это показано на фиг 49.4. Прежде всего, каковы характеристики возможного движения? Можно начать с того же, с чего мы начали, когда рассматривали пример со струной. Если бы никакого закрепления не было вовсе, то можно было бы ожидать появления волн, бегущих в некотором направлении, например синусоидальной волны, описываемой функцией  $\exp(i\omega t) \exp[-i(k_x x) + i(k_y y)]$ , направление движения которой зависит от относительной величины чисел  $k_x$  и  $k_y$ . А как теперь сделать узел на оси  $x$ , т. е. при  $y = 0$ ? Используя ту же идею, что и для одномерной струны, можно добавить волну, описываемую комплексной функцией  $-\exp(i\omega t) \exp[-i(k_x x) - i(k_y y)]$ .

Суперпозиция этих волн в результате дает нулевое перемещение при  $y = 0$  независимо от того, каковы будут значения  $x$  и  $t$ . (Хотя эти функции будут определены и для отрицательных значений  $y$  там, где никакого барабана нет и колебаться нечему, но на это можно не обращать никакого внимания. Ведь нам хотелось устранить перемещение при  $y = 0$ , и мы добились этого.) Вторую функцию в этом случае можно рассматривать как отраженную волну.

Однако нам нужно получить узел не только на линии  $y = 0$ , но и на линии  $y = b$ . Как же это сделать? Решение такой задачи связано с некоторыми вещами, которыми мы занимались при изучении отражения света от кристалла. Волны, гасящие друг друга при  $y = 0$ , могут сделать то же самое и при  $y = b$ , только когда  $2b \sin \theta$  равно целому числу длин волн  $\lambda$  ( $\theta$  — угол, показанный на фиг. 49.4):

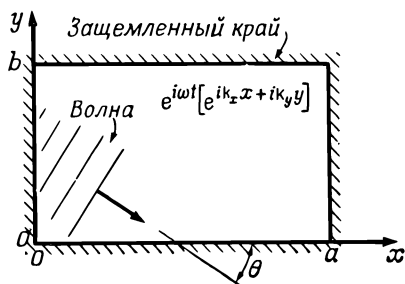
$$m\lambda = 2b \sin \theta, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (49.7)$$

Точно таким же образом, т. е. сложением еще двух функций  $[-\exp(i\omega t)] \exp[i(k_x x + i(k_y y))]$  и  $[+\exp(i\omega t)] \exp[i(k_x x - i(k_y y))]$ , каждая из которых представляет отражение другой от линии  $x = 0$ , можно устроить узел и на оси  $y$ . Условие того, что линия  $x = a$  будет тоже узловой, получается так же, как и условие при  $y = b$ , т. е.  $2a \cos \theta$  должно быть равно целому числу длин волн:

$$n\lambda = 2a \cos \theta. \quad (49.8)$$

Тогда окончательный результат таков: волны, «заключенные» в ящике, имеют вид стоячей волны, т. е. образуют какие-то определенные собственные гармоники.

Таким образом, если мы хотим иметь дело с собственными гармониками, то должны удовлетворить двум написанным выше условиям. Для начала давайте найдем длину волны. Исключив из уравнений (49.7) и (49.8) угол  $\theta$ , можно выразить длину волны через  $a$ ,  $b$ ,  $n$  и  $m$ . Легче всего это сделать так: сначала разделить обе части уравнений соответственно



Фиг. 49.4. Колебание прямоугольной пластинки.

на  $2b$  и  $2a$ , а затем возвести их в квадрат и сложить. В результате мы получим уравнение

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = \left( \frac{n\lambda}{2a} \right)^2 + \left( \frac{m\lambda}{2b} \right)^2,$$

которое легко разрешить относительно  $\lambda$ :

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{n^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4b^2}. \quad (49.9)$$

Итак, мы определили длину волны через два целых числа, а по длине волны мы немедленно получаем частоту  $\omega$ , ибо, как известно, частота равна  $2\pi c$ , деленной на длину волны.

Этот результат настолько важен и интересен, что необходимо теперь получить его строго математически без использования аналогий с отражением. Давайте представим колебание в виде суперпозиции четырех волн, подобранных таким образом, чтобы все четыре линии  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  и  $y = b$  были узловыми. Потребуем еще, чтобы все эти волны имели одинаковую частоту, т. е. чтобы результирующее движение представляло собственное колебание. Из главы об отражении света мы уже знаем, что функция  $\exp(i\omega t)\exp[-i(k_x x) + i(k_y y)]$  описывает волну, идущую в направлении, указанном на фиг. 49.4. По-прежнему остается справедливым уравнение (49.6), т. е.  $k = \omega/c$ , с той разницей, что теперь

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (49.10)$$

Из рисунка ясно, что  $k_x = k \cos \theta$ , а  $k_y = k \sin \theta$ .

Таким образом, наше выражение для перемещения прямоугольной перепонки барабана (назовем это перемещение  $\varphi$ ) запишется в виде

$$\varphi = e^{i\omega t} [e^{-i(k_x x - k_y y)} - e^{i(k_x x + k_y y)} - e^{-i(k_x x + k_y y)} + e^{i(k_x x - k_y y)}] \quad (49.11a)$$

Хотя выглядит это довольно неприглядно, сумма таких экспонент, в сущности, не так уж громоздка. Их можно свернуть в синусы, так что перемещение, как оказывается, приобретает вид

$$\varphi = (-4 \sin k_x x \sin k_y y) (e^{i\omega t}). \quad (49.11b)$$

Другими словами, получились знакомые синусоидальные колебания, форма которых тоже синусоидальна как в направлении оси  $x$ , так и в направлении оси  $y$ . Граничные условия при  $x = 0$  и  $y = 0$  удовлетворяются автоматически. Однако мы хотим, кроме того, чтобы  $\varphi$  обращалось в нуль при  $x = a$  и  $y = b$ . Для этого мы должны наложить два дополнительных условия, а именно  $k_x a$  и  $k_y b$  должны быть равны целому числу  $\pi$  (эти целые числа могут быть разными для  $k_x a$  и  $k_y b$ ). Но поскольку, как мы видели,  $k_x = k \cos \theta$  и  $k_y = k \sin \theta$ , то

отсюда немедленно получаются уравнения (49.7) и (49.8), а из них следует окончательный результат (49.9).

Возьмем теперь для примера прямоугольник, ширина которого вдвое больше высоты. Если положить  $a = 2b$  и воспользоваться уравнениями (49.4) и (49.9), то можно вычислить частоты всех гармоник:

$$\omega^2 = \left(\frac{\pi c}{b}\right)^2 \frac{n^2 + 4m^2}{4}. \quad (49.12)$$

В табл. 49.1 перечислено несколько простых гармоник и качественно показана их форма.

Следует отметить наиболее важную особенность этого частного случая — частоты не кратны ни друг другу, ни какому-то другому числу. Представление о том, что собственные частоты гармонически связаны друг с другом, в общем случае неверно. Оно неверно ни для системы размерности, большей единицы, ни даже для одномерной системы, более

Таблица 49.1 ● ПРОСТЫЕ ГАРМОНИКИ И ИХ ФОРМА

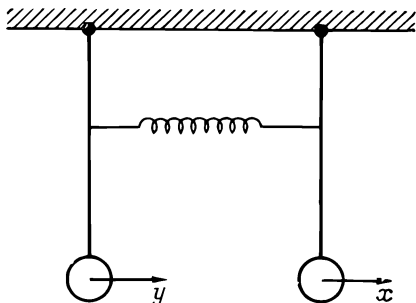
Форма собственных гармоник	$m$	$n$	$(\omega/\omega_0)^2$	$\omega/\omega_0$
+	1	1	1,25	1,12
+   -	1	2	2,00	1,41
+   -   +	1	3	3,25	1,80
- +	2	1	4,25	2,06
-   + +   -	2	2	5,00	2,24

сложной, чем однородная и равномерно натянутая струна. Простейшим примером может служить подвешенная цепочка, натяжение которой сверху больше, чем внизу. Если возбудить в такой цепочке гармонические колебания, то возникнут собственные гармоника с различными частотами, однако частоты не будут просто кратными какому-то числу, да и сама форма гармоник больше не будет синусоидальной.

Еще причудливей оказываются гармоника более сложных систем. Человеческий рот, например, представляет собой полость, расположенную над голосовыми связками. Движением языка и губ можно создать либо трубу с открытым концом, либо трубу с закрытым концом, причем диаметры и формы этой трубы будут различными. В общем это страшно сложный резонатор, но тем не менее все же резонатор. При разговоре мы с помощью голосовых связок создаем какой-то тон. Тон этот довольно сложен, в него входит множество звуков, но благодаря различным резонансным частотам полость рта еще больше модифицирует его. Певец, например, может петь различные главные: «а», «о», «у» и еще другие с той же самой высотой, но звучат они по-разному, ибо различные гармоника по-разному резонируют в этой полости. Огромную роль резонансных частот полости в образовании голосовых звуков можно продемонстрировать на очень простом опыте. Как известно, скорость звука обратно пропорциональна квадратному корню из плотности, поэтому для разных газов она различна. Если вместо воздуха мы используем гелий, плотность которого меньше, то скорость звука в нем окажется больше и все резонансные частоты полости будут больше. Следовательно, если бы мы могли перед тем, как начать говорить, наполнить наши легкие гелием, то, хотя голосовые связки по-прежнему колебались бы с той же частотой, характер нашего голоса резко изменился бы.

#### **§ 4. Связанные маятники**

Напоследок необходимо подчеркнуть, что гармоника возникают не только в сложных непрерывных системах, но и в очень простых механических системах. Хорошим примером этого служит рассмотренная в предыдущей главе система двух связанных маятников. Там мы показали, что общее движение этой системы можно рассматривать как суперпозицию двух типов гармонических движений с различными частотами, так что даже такую систему можно рассматривать с точки зрения собственных гармоник. В струне возбуждается бесконечное число собственных гармоник, у двумерной поверхности их тоже бесконечно много. В каком-то смысле здесь получается даже двойная бесконечность (если бы мы только



Ф и г. 49.5. Два связанных маятника.

знали, как работать с бесконечностями!). Но в простом механическом устройстве, обладающем только двумя степенями свободы и требующем для своего описания лишь двух переменных, возбуждаются всего две гармоники.

Попробуем найти математически эти две гармоники для случая, когда длины маятников одинаковы. Пусть отклонение одного маятника будет  $x$ , а другого —  $y$ , как это показано на фиг. 49.5. При отсутствии пружины сила тяжести, действующая на первый маятник, пропорциональна его отклонению. Если бы здесь не было пружины, то для одного маятника появилась бы некоторая собственная частота  $\omega_0$ , а уравнение движения в этом случае приобрело бы вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2x. \quad (49.13)$$

Второй маятник при отсутствии пружины качался бы точно так же, как и первый. Однако при наличии пружины в дополнение к восстанавливающей силе, возникающей в результате гравитации, появляется еще добавочная сила от пружины, которая стремится «стянуть» маятники. Эта сила зависит от превышения отклонения  $x$  над отклонением  $y$  и пропорциональна их разности, т. е. она равна некоторой постоянной, зависящей только от геометрии, умноженной на  $(x-y)$ . Та же сила, но в обратном направлении действует на второй маятник. Поэтому уравнения движения, которые мы должны решить, будут следующими:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -m\omega_0^2x - k(x-y), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -m\omega_0^2y - k(y-x). \end{aligned} \quad (49.14)$$

Чтобы найти движение, при котором оба маятника колеблются с одинаковой частотой, мы должны определить, насколько отклоняется каждый из них. Другими словами, маятник  $A$  и маятник  $B$  будут колебаться с одинаковой частотой

и с какими-то амплитудами  $A$  и  $B$ , отношение которых фиксировано. Давайте проверим, насколько подходит такое решение:

$$x = Ae^{i\omega t}, \quad y = Be^{i\omega t}. \quad (49.15)$$

Если подставить его в уравнения (49.14) и собрать подобные члены, то получим

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right) A &= -\frac{k}{m} B, \\ \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right) B &= -\frac{k}{m} A. \end{aligned} \quad (49.16)$$

При выводе этих уравнений мы сократили общий множитель  $e^{i\omega t}$  и разделили все на  $m$ .

Теперь мы видим, что получились два уравнения для, казалось бы, двух неизвестных. Однако на самом деле здесь не *два* неизвестных, ибо общие масштабы движения нельзя найти из этих уравнений. Они могут дать нам только *отношение*  $A$  к  $B$ , причем оба уравнения должны дать одинаковую величину. Требование согласованности уравнений друг с другом накладывает требование на частоту: она должна быть какой-то очень специальной.

Но найти частоту в этом частном случае довольно легко. Если перемножить оба уравнения, то мы получим

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)^2 AB = \left(\frac{k}{m}\right)^2 AB. \quad (49.17)$$

В обеих сторонах можно сократить произведение  $AB$ , за исключением тех случаев, когда либо  $A$ , либо  $B$  равно нулю, что означает отсутствие движения вообще. Но если движение есть, то должны быть равны между собой и другие сомножители, что приводит к квадратному уравнению. В результате получаются две возможные частоты:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \quad \text{и} \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m}. \quad (49.18)$$

Более того, если подставить эти значения частот снова в уравнения (49.16), то для первой частоты мы получим  $A = B$ , т. е. пружина вообще не будет растягиваться и оба маятника колеблются с частотой  $\omega_0$ , как если бы пружины вообще не было. В другом решении, когда  $A = -B$ , пружина увеличивает восстанавливающую силу и частота возрастает. Более интересен случай, когда маятники имеют различные длины. Анализ этого случая, который очень похож на то, что мы недавно проделали, рекомендуем в качестве упражнения провести самим читателям.



## § 5. Линейные системы

Давайте теперь подытожим рассмотренные выше идеи, которые все являются аспектами, по-видимому, наиболее общего и удивительного принципа математической физики. Если у нас есть линейная система, характеристики которой не зависят от времени, то движение ее, вообще говоря, не обязано быть каким-то особенно простым. На самом деле оно может быть чрезвычайно сложным, однако существуют такие особые движения (обычно их целый ряд), при которых форма колебания синусоидально зависит от времени. Для колеблющихся систем, о которых сейчас шла речь, мы обычно получали мнимую экспоненту, но вместо того, чтобы сказать «экспоненциально», я предпочел сказать «синусоидально». Однако если стремиться к большей общности, то нужно говорить о каких-то особых движениях, очень специальной формы, изменяющихся экспоненциально со временем. Наиболее общее движение систем всегда можно представить в виде суперпозиции движений, включающих каждую из различных экспонент.

Есть смысл подчеркнуть еще раз специально для случая синусоидального движения: линейная система не обязательно должна двигаться чисто синусоидально, т. е. с одной определенной частотой, но как бы она ни двигалась, это движение можно представить в виде суперпозиции чисто синусоидальных колебаний. Частота каждого из этих колебаний, как и форма волны, зависит от свойств системы. Общее движение любой такой системы характеризуется заданием амплитуды и фазы каждой из гармоник при их сложении. Можно сказать это и по-другому: колебание любой линейной системы эквивалентно набору гармонических независимых осцилляторов, частоты которых соответствуют частотам собственных гармоник данной системы.

Эту главу мы закончим замечанием о связи гармоник с квантовой механикой. Колеблющимися объектами и величинами, которые изменяются со временем в квантовой механике, являются амплитуды вероятности, которые определяют вероятность обнаружения электрона или системы электронов в данном месте. Эта амплитуда может изменяться в пространстве и времени и удовлетворяет линейному уравнению. Но при переходе к квантовой механике происходит переименование. То, что мы называли частотой амплитуды вероятности, переходит в энергию в ее классическом смысле. Поэтому установленный выше принцип можно перевести на язык квантовой механики, заменив слово *частота* словом *энергия*. Получится примерно так: квантовомеханическая система, например атом, не обязательно обладает определенной энергией, точно так же, как простая механическая система не обязательно имеет

определенную частоту, но каково бы ни было поведение системы, его всегда можно представить в виде суперпозиции состояний с определенной энергией. Энергия каждого состояния, как и форма амплитуды, которая дает вероятность нахождения частицы в различных местах, определяется свойствами атома. Общее движение может быть описано заданием амплитуд каждого из различных энергетических состояний. Именно здесь кроется причина возникновения энергетических уровней в квантовой механике. Поскольку квантовая механика все описывает в виде волн, то при некоторых обстоятельствах, когда электрон не обладает достаточной энергией, чтобы бесповоротно оторваться от протона, он представляет собой просто *волну в ограниченном пространстве*. Поэтому, так же как и для ограниченной струны, при решении волнового уравнения в квантовой механике в подобном случае возникают определенные дискретные частоты. В квантовомеханической интерпретации это будут определенные *энергии*. Следовательно, квантовомеханическая система, вследствие того что она описывается с помощью волн, может иметь определенные состояния с фиксированной энергией; примером могут служить дискретные энергетические уровни атомов.

## ГАРМОНИКИ

§ 1. Музыкальные звуки

§ 2. Ряд Фурье

§ 3. Качество и гармония

§ 4. Коэффициенты Фурье

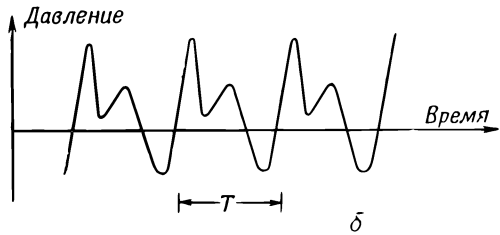
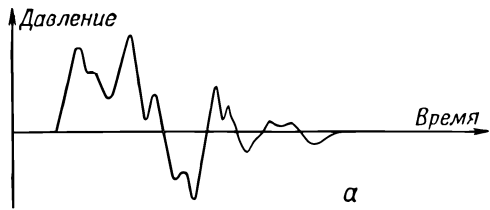
§ 5. Теорема об энергии

§ 6. Нелинейная реакция

### § 1. Музыкальные звуки

Говорят, что Пифагор первый обнаружил тот интересный факт, что одновременное звучание двух одинаковых струн различной длины приятнее для слуха, *если* длины этих струн относятся друг к другу как небольшие целые числа. Если длины струн относятся как 1 : 2, то это — музыкальная октава; если они относятся как 2 : 3, то это соответствует интервалу между нотами до и соль и называется квинтой. Эти интервалы считаются «приятно» звучащими аккордами. На Пифагора произвело такое впечатление это открытие, что на его основе он создал школу «пифагорийцев», как их называли, которые мистически верили в великую силу чисел. Они полагали, что нечто подобное будет открыто и в отношении планет, или «сфер». Иногда можно услышать такое выражение: «музыка сфер». Смысл его в том, что в природе предполагалось существование числовой связи между орбитами планет или между другими вещами. Это считается чем-то вроде суеверия древних греков. Но далеко ли от этого ушел наш сегодняшний научный интерес к количественным соотношениям? Открытие Пифагора, помимо геометрии, было первым примером установления числовых связей в природе. Поистине должно быть было удивительно вдруг неожиданно обнаружить, что в природе есть такие *факты*, которые описываются простыми числовыми соотношениями. Обычное измерение длин позволяет предсказать, то, что, казалось бы, не имеет никакого отношения к геометрии, — создание «приятных» звуков. Это открытие привело к мысли, что арифметика и математический анализ, по-

Фиг. 50.1. Давление как функция времени.  
 а—для шума; б—для музыкального звука.



видимому, могут служить хорошим орудием в понимании природы. Результаты современной науки полностью подтверждают такую точку зрения.

Пифагор смог сделать свое открытие лишь с помощью экспериментальных наблюдений. Однако все значение этого открытия, по-видимому, не было ему ясно. А случись это, и развитие физики началось бы гораздо раньше. (Впрочем, всегда легко рассуждать о том, что сделал кто-то когда-то и что на его месте *следовало бы сделать!*)

Можно отметить еще одну, третью сторону этого интересного открытия: оно касается двух нот, которые звучат *приятно* для слуха. Но далеко ли ушли *мы* от Пифагора в понимании того, *почему* только некоторые звуки приятны для слуха? Общая теория эстетики, по-видимому, ненамного продвинулась со времен Пифагора. Итак, одно это открытие греков имеет три аспекта: эксперимент, математические соотношения и эстетику. Физики пока добились успеха только в первых двух. В этой главе мы расскажем о современном понимании открытия Пифагора.

Среди звуков, которые мы слышим, есть такой сорт, который называется *шумом*. Ему соответствуют какие-то нерегулярные колебания барабанной перепонки уха, вызванные нерегулярными колебаниями находящихся поблизости объектов. Если начертить диаграмму зависимости давления воздуха на барабанную перепонку (а следовательно, и перемещения ее) от времени, то график, соответствующий шуму, будет выглядеть так, как это изображено на фиг. 50.1, а. (Такой шум может, например, вызвать топание ногой.) А *музыкальный* звук имеет другой характер. Музыка характеризуется нали-

чем более или менее *длительных тонов*, или музыкальных «нот». (Кстати, музыкальные инструменты тоже умеют производить шум!)

Тон может длиться сравнительно недолго, например когда мы ударяем по клавише фортепьяно, или неопределенно долго, когда, скажем, флейта берет длинную ноту.

В чем состоит особенность музыкальной ноты с точки зрения давления воздуха? Музыкальный звук отличается от шума тем, что график его периодичен. Форма колебаний давления воздуха со временем пусть даже какая-то неправильная, но она должна повторяться снова и снова. Пример зависимости давления от времени для музыкального звука показан на приведенной выше фиг. 50.1, б.

Обычно музыканты, говоря о музыкальном тоне, определяют три его характеристики — громкость, высоту и «качество». «Громкость», как известно, определяется величиной изменения давления. «Высоте» соответствует период времени повторения основной формы давления («низкие» ноты имеют более длинный период, нежели «высокие»). А под «качеством» тона понимается разница, которую мы способны уловить между двумя нотами одинаковой громкости и высоты. Мы прекрасно различаем звучание гобоя, скрипки или сопрано, даже если высота издаваемых ими звуков кажется одинаковой. Здесь уже дело идет о структуре периодически повторяющейся формы.

Давайте кратко рассмотрим звук, производимый вибрирующей струной.

Если оттянуть струну, а затем отпустить ее, то последующее движение будет определяться волнами, которые мы возбудили. Эти волны, как вы знаете, пойдут в обоих направлениях по струне, а затем отразятся от ее концов. Так они будут бегать взад и вперед довольно долго. И сколь бы сложны ни были эти волны, они будут повторяться периодически снова и снова.

Период этих повторений равен просто времени  $T$ , которое требуется волне, чтобы пробежать дважды всю длину струны. Ведь это как раз то время, которое необходимо для того, чтобы любая волна, отразившись от каждого конца, вернулась в начальное положение и продолжала движение в первоначальном направлении. Время, необходимое для того, чтобы волна достигла конца струны в любом направлении, одинаково. Каждая точка струны после целого периода возвращается в свое исходное положение, затем опять отклоняется от него и снова, спустя период, возвращается, и т. д.

Возникающий при этом звук тоже должен повторять те же колебания; вот почему мы, тронув струну, получаем музыкальный звук.

## § 2. Ряд Фурье

В предыдущей главе мы познакомились с другой точкой зрения на колеблющуюся систему. Мы видели, что в струне возникают различные собственные гармоника и что любое частотное колебание, которое только возможно получить из начальных условий, можно рассматривать как составленную в надлежащей пропорции комбинацию нескольких одновременно осциллирующих собственных гармоник. Для струны мы нашли, что собственные гармоника имеют частоты  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ . Поэтому наиболее общее движение струны складывается из синусоидальных колебаний основной частоты  $\omega_0$ , затем второй гармоника  $2\omega_0$ , затем третьей гармоника  $3\omega_0$  и т. д. Основная гармоника повторяется через каждый период  $T_1 = 2\pi/\omega_0$ , вторая гармоника — через каждый период  $T_2 = 2\pi/2\omega_0$ ; она повторяется *также* и через каждый период  $T_1 = 2T_2$ , т. е. после двух своих периодов. Точно таким же образом через период  $T_1$  повторяется и третья гармоника. В этом отрезке укладываются три ее периода. И снова мы понимаем, почему задетая струна через период  $T_1$  полностью повторяет форму своего движения. Так получается музыкальный звук.

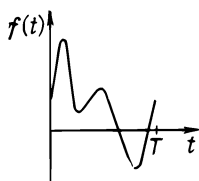
До сих пор мы говорили о движении струны. Однако *звук*, который представляет собой движение воздуха, вызванное движением струны, тоже должен состоять из тех же гармоник, хотя здесь мы уже не можем говорить о собственных гармониках воздуха. К тому же относительная сила различных гармоник в воздухе может быть совсем другой, чем в струне, особенно если струна «связана» с воздухом посредством «звучащей доски». Разные гармоника по-разному связаны с воздухом.

Если для музыкального тона функция  $f(t)$  представляет давление воздуха в зависимости от времени (скажем, такая, как на фиг. 50,1, б), то можно ожидать, что  $f(t)$  записывается в виде суммы некоторого числа простых гармонических функций от времени (подобных  $\cos \omega t$ ) для каждой из различных гармонических частот. Если период колебаний равен  $T$ , то основная угловая частота будет  $\omega = 2\pi/T$ , а следующие гармоника будут  $2\omega, 3\omega$  и т. д.

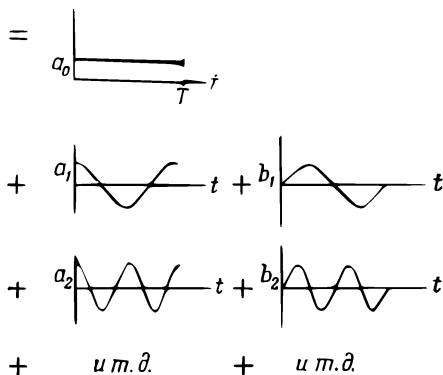
Здесь появляется небольшое усложнение. Мы не вправе ожидать, что для каждой частоты начальные фазы обязательно будут равны друг другу. Поэтому нужно пользоваться функциями типа  $\cos(\omega t + \varphi)$ . Вместо этого, однако, проще использовать для *каждой* частоты как синус, так и косинус. Напомним, что

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t, \quad (50.1)$$

а поскольку  $\varphi$  — постоянная, то *любые* синусоидальные колебания с частотой  $\omega$  могут быть записаны в виде суммы членов, в один из которых входит  $\sin \omega t$ , а в другой —  $\cos \omega t$ .



Ф и г. 50.2. Любая периодическая функция  $f(t)$  равна сумме простых гармонических функций.



Итак, мы приходим к заключению, что *любая* периодическая функция  $f(t)$  с периодом  $T$  математически может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
 f(t) = & a_0 + \\
 & + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \\
 & + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \\
 & + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \\
 & + \dots + \dots, \quad (50.2)
 \end{aligned}$$

где  $\omega = 2\pi/T$ , а  $a$  и  $b$  — числовые постоянные, указывающие, с каким весом каждая компонента колебания входит в общее колебание  $f(t)$ . Для большей общности мы добавили в нашу формулу член с нулевой частотой  $a_0$ , хотя обычно для музыкальных тонов он равен нулю. Это просто сдвиг средней величины звукового давления (т. е. сдвиг «нулевого» уровня). С этим членом наша формула верна для любого случая. Уравнение (50.2) схематически показано на фиг. 50.2. Амплитуды гармонических функций  $a_n$  и  $b_n$  выбираются по специальному правилу. На рисунке они показаны только схематически без соблюдения масштаба. [Ряд (50.2) называется *рядом Фурье* для функций  $f(t)$ .]

Мы сказали, что *любую* периодическую функцию можно написать в таком виде. Следует внести небольшую поправку и подчеркнуть, что в такой ряд можно разложить вообще любую звуковую волну или любую функцию, с которой мы

сталкиваемся в физике. Математики, конечно, могут придумать такую функцию, что ее нельзя будет составить из простых гармонических (например, функцию, которая «заворачивает» назад, так что для некоторых величин  $t$  она имеет два значения!). Однако здесь нам не стоит беспокоиться о таких функциях.

### § 3. Качество и гармония

Теперь мы уже можем описать, чем определяется «качество» музыкального тона. Оно определяется относительным количеством различных гармоник, т. е. относительными величинами  $a$  и  $b$ . Тон, содержащий только первую гармонику, называется «чистым», а тон с несколькими сильными гармониками называется «богатым». Скрипка дает гармоники в одной пропорции, а гобой — в другой.

Можно «изготовить» различные музыкальные тоны, если подсоединить к громкоговорителю несколько «осцилляторов». (Осциллятор обычно дает приблизительно чистые простые гармонические колебания.) В качестве частот осцилляторов мы выберем  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  и т. д. Приделав к каждому осциллятору регулятор громкости, можно смешивать гармоники в любой желаемой пропорции и тем самым создавать звуки различного качества. Примерно так работает электрический орган. Клавиши выбирают частоту основного осциллятора, а педали контролируют относительную пропорцию различных гармоник. С помощью этих регуляторов можно заставить орган звучать как флейту, или как гобой, или как скрипку.

Интересно, что для получения такого «искусственного» звука нет никакой необходимости разделять осцилляторы на «синусные» и «косинусные» — для каждой частоты нам достаточно только одного осциллятора. Наше ухо не очень чувствительно к относительной фазе гармоник. Оно воспринимает «синусную» и «косинусную» части частоты *в целом*. Поэтому наш анализ более точен, чем это необходимо для объяснения субъективной стороны музыки. Однако реакция микрофона или другого физического инструмента все-таки зависит от фазы, и наш полный анализ для таких случаев просто необходим.

«Качество» разговорной речи определяется гласными звуками. Форма рта определяет частоты собственных гармоник колебаний звука в нем. Некоторые из этих гармоник возбуждаются звуковыми волнами от голосовых связок. Таким способом происходит усиление одних гармоник по сравнению с другими. Когда мы меняем форму рта, мы даем преимуществу гармоникам одних частот над другими. Благодаря этому эффекту, например, имеется разница между звуком «о—о—о» и звуком «а—а—а».



Всем известно, что каждый гласный звук, скажем «о—о—о», когда мы говорим или поем, всегда похож сам на себя как при высоких, так и при низких частотах. Из описанного нами механизма мы бы ожидали, что когда мы открываем рот и произносим звук «а—а—а», то тем самым мы выделяем какие-то *определенные* частоты, которые *не должны измениться* при повышении голоса. Таким образом, с изменением высоты отношение важных гармоник к основному тону, т. е. то, что мы называем «качеством», должно как будто изменяться. Очевидно, механизм, с помощью которого мы узнаем звуки речи, основан не на соотношении различных гармоник.

Что же можно теперь сказать об открытии Пифагора? Мы понимаем, что основные частоты двух струн, длины которых относятся как 3:2, будут относиться как 3:2. Но почему же вместе они «приятно звучат»? Разгадку, по-видимому, нужно искать в частотах гармоник. Вторая гармоника короткой струны будет иметь *ту же самую* частоту, что и третья гармоника длинной струны. (Легко показать или просто поверить, что, задев струну, мы возбуждаем несколько сильных нижних гармоник.)

По-видимому, справедливо следующее правило: ноты звучат гармонично, когда у них есть гармоники с одинаковой частотой. Ноты диссонировать, если их *высшие* гармоники имеют частоты, близкие друг к другу, но достаточно отличающиеся для того, чтобы между ними возникали быстрые биения. Однако, почему биения звучат неприятно и почему унисон высших гармоник звучит приятно, мы не умеем ни определить, ни описать. Исходя из наших знаний, мы не можем сказать, что должно приятно *звучать*, так же как, например, что должно приятно *пахнуть*. Иными словами, наше понимание этого явления не идет дальше простого утверждения, что когда ноты звучат в унисон, то это приятно. Но отсюда, кроме свойства гармонии в музыке, нам ничего не вывести.

Гармонические соотношения, которые мы только что описали, легко проверить, проделав несложный опыт на фортепьяно. Давайте обозначим три последовательные ноты до в середине клавиатуры через до, до' и до'', а три последовательные ноты соль, расположенные непосредственно выше их, через соль, соль' и соль''. Основные гармоники при этом будут иметь следующие относительные частоты:

До — 2	Соль — 3
До' — 4	Соль' — 6
До'' — 8	Соль'' — 12

Вот как можно продемонстрировать эти гармонические соотношения. Давайте *медленно* нажмем клавишу до' так, чтобы

она не зазвучала, но чтобы демпфер приподнялся. Если теперь нажать до, то *вместе* с основной гармоникой будет возбуждена и вторая гармоника, которая возбудит основную гармонику струны до'. Если теперь отпустить клавишу до (оставляя нажатой клавишу до'), то демпфер заглушит струну до, и мы можем услышать, как замирает тихий звук струны до'. Точно таким же образом третья гармоника до может вызвать звучание струны соль' или шестая гармоника до (которая звучит гораздо тише) может вызвать колебание основной гармоники струны соль''.

Совершенно другой результат получится, если мы сначала потихоньку нажмем соль, а затем ударим по клавише до'. Третья гармоника до' будет соответствовать четвертой гармонике соль, так что будет возбуждена *только* четвертая гармоника соль. Мы можем услышать (если слушать очень внимательно) звук соль'', который на две октавы выше, чем соль, которую мы нажали! Можно придумать еще очень много комбинаций этой игры.

Попутно заметим, что мажорный лад можно просто определить условием, что каждый из трех мажорных аккордов (фа — ля — до), (до — ми — соль) и (соль — си-бемоль — ре) представляет последовательность тонов с отношением частот (4 : 5 : 6). Эти отношения и тот факт, что в октаве (до — до', соль — соль' и т. д.) частоты относятся как 1 : 2, определяют в «идеальном» случае весь строй, который называется «натуральным, или пифагорийским строем». Но обычно клавишные инструменты типа фортепьяно не настраиваются таким образом, а устраивается небольшая «подтасовка», так что для всех возможных начальных тонов отношение частот *только приблизительно* верно. При таком строе, названном «темперированным», октава (для которой отношение частот по-прежнему равно 1 : 2) делится на 12 равных интервалов, так что отношение частот для каждого интервала равно  $(2)^{1/12}$ . Для квинты отношение частот будет уже не  $3/2$ , а  $(2)^{7/12} = 1,499$ , но для большинства людей оно достаточно близко к  $3/2$  \*.

---

\* В основе деления октавы на 12 ступеней лежит открытие Пифагора. Он брал струну, зажимал ее посредине и получал звук на октаву выше, чем звук незажатой струны. Затем половину струны он опять зажимал посредине и получал звук еще на октаву выше и т. д. Точно так же, зажимая последовательно струну на  $1/3$  длины, он каждый раз получал звук выше на квинту. И вот оказалось, что 12 квинт почти точно укладываются на интервале в 7 октав [т. е.  $2^7 \approx (3/2)^{12}$ ]. Если же теперь от каждой квинты отложить целое число октав вверх и вниз, то каждая первоначальная октава разделится на 12 частей. Так возник пифагорийский строй. Однако беда в том, что 12 квинт *только приблизительно* равны 7 октавам, поэтому в разных местах диапазона «лесенки» получались неровные. При развитии мелодии эти неточности накапливались и возникали противные уху интервалы, так называемые «волки», которые страшно досаждали музыкантам. Иногда дело доходило до курьезов. Рассказывают, что извест-

Итак, мы установили правила благозвучия через совпадение гармоник. Может быть, это совпадение и является *причиной* благозвучия? Кто-то утверждал, что два абсолютно чистых тона, т. е. тщательно очищенных от высших гармоник, не дают ощущения благозвучия или неблагозвучия (диссонанса), когда их частоты равны или приблизительно равны ожидаемому отношению. (Это очень сложный эксперимент, поскольку приготовить чистые тоны очень трудно по причинам, которые мы увидим дальше.) Мы не можем с уверенностью сказать, сравнивает ли ухо гармоника или занимается арифметикой, когда мы решаем, что звук нам нравится.

#### § 4. Коэффициенты Фурье

Вернемся теперь к утверждению о том, что каждую ноту, т. е. любое *периодическое* колебание, можно представить в виде надлежащей комбинации гармоник. Хотелось бы знать, как можно найти нужную долю каждой гармоника. Конечно, если нам *даны* все коэффициенты  $a$  и  $b$ , то пользуясь формулой (50.2), легко подсчитать функцию  $f(t)$ . Теперь же вопрос состоит в том, как можно найти коэффициенты при различных гармониках, если нам задана функция  $f(t)$ ? (Нетрудно испечь пирог, если есть рецепт, но как, отведав пирог, написать его рецепт?)

Фурье открыл, что на самом деле сделать это не очень трудно. Член  $a_0$  уж наверняка нетрудно найти. Мы говорили, что он равен среднему значению  $f(t)$  на протяжении одного периода (от  $t = 0$  до  $t = T$ ). Легко увидеть, что это действительно так. Среднее значение синуса или косинуса на протяжении одного периода равно нулю. На протяжении двух, или трех, или другого целого числа периодов оно тоже равно нулю. Таким образом, среднее значение всех членов с правой стороны (50.2), за исключением только  $a_0$  равно нулю. (Напомним, что мы должны выбрать  $\omega = 2\pi/T$ .)

Далее, поскольку среднее значение суммы равно сумме средних, то среднее значение функции  $f(t)$  равно просто среднему от  $a_0$ . Но ведь  $a_0$  — просто *постоянная*, и ее среднее значение равно ей самой. Вспоминая определение среднего,

---

ный композитор Жак Рамо сумел так ловко извлекать из органа «волчьих» звуки, что однажды, желая отказаться от должности церковного органиста, привел своей «игрой» в ужас святых отцов и убедил их в своей «бесталанности». Много сил было потрачено на изгнание «волков». Этим, в частности, безуспешно занимались такие умы, как Кеплер и Эйлер. Однако сделать это удалось не физику и не математику, а органисту Андрею Веркемейстеру. Решение его гениально просто: он отказался от чистых квинт, укоротив их как раз настолько, чтобы дюжина вместились в 7 октав, и несоместимое совместилось, а «волки» исчезли. Так возник современный темперированный строй. — *Прим. ред.*

мы получаем

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (50.3)$$

Найти остальные коэффициенты ненамного труднее. Чтобы сделать это, используем один фокус, открытый самим Фурье. Предположим, что мы умножили обе стороны уравнения (50.2) на какую-то гармоническую функцию, скажем на  $\cos 7\omega t$ . При этом получается

$$\begin{aligned} f(t) \cos 7\omega t &= a_0 \cos 7\omega t + \\ &+ a_1 \cos \omega t \cos 7\omega t + b_1 \sin \omega t \cos 7\omega t + \\ &+ a_2 \cos 2\omega t \cos 7\omega t + b_2 \sin 2\omega t \cos 7\omega t \\ &+ \dots \quad + \dots \\ &+ a_7 \cos 7\omega t \cos 7\omega t + b_7 \sin 7\omega t \cos 7\omega t + \\ &+ \dots \quad + \dots \end{aligned} \quad (50.4)$$

А теперь усредним обе стороны равенства. Среднее от члена  $a_0 \cos 7\omega t$  по периоду  $T$  пропорционально среднему от косинуса по семи его периодам. Но последнее просто равно нулю. Среднее почти всех остальных членов тоже будет равно нулю. Действительно, давайте рассмотрим член с  $a_1$ . Мы знаем, что в общем случае

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos(A+B) + \frac{1}{2} \cos(A-B), \quad (50.5)$$

так что член с  $a_1$  равен

$$\frac{1}{2} a_1 (\cos 8\omega t + \cos 6\omega t). \quad (50.6)$$

Таким образом получаются два косинуса: один с восемью полными периодами, а другой с шестью. Оба они равны нулю. Поэтому среднее значение этого члена тоже равно нулю.

Для члена с  $a_2$  мы получаем  $\cos 9\omega t$  и  $\cos 5\omega t$ , каждый из которых при усреднении превратится в нуль. Для члена с  $a_3$  получится  $\cos 16\omega t$  и  $\cos(-2\omega t)$ . Но  $\cos(-2\omega t)$  — это то же самое, что  $\cos 2\omega t$ , так что опять оба члена дадут при усреднении нуль. Ясно, что все слагаемые с косинусами, за исключением одного, дадут при усреднении нуль. Этим единственным слагаемым будет член с  $a_7$ . Для него же мы получим

$$\frac{1}{2} a_7 (\cos 14\omega t + \cos 0). \quad (50.7)$$

Косинус нуля равен единице, а среднее от него, разумеется, тоже равно единице. Итак, мы получили, что среднее от всех членов с косинусами уравнения (50.4) равно  $\frac{1}{2} a_7$ .

Еще легче расправиться с синусами. Когда мы умножаем их на косинус типа  $\cos n\omega t$ , то таким же методом можно показать, что *все* они при усреднении обращаются в нуль.

Мы видим, что способ, придуманный Фурье, действует как своеобразное сито. Когда мы умножаем на  $\cos 7\omega t$  и усредняем, то все члены, кроме  $a_7$ , отсеиваются и в результате остается

$$\text{Среднее } [f(t) \cos 7\omega t] = \frac{a_7}{2}, \quad (50.8)$$

или

$$a_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos 7\omega t dt. \quad (50.9)$$

Пусть читатель сам докажет, что коэффициенты  $b_7$ , например, находятся с помощью умножения (50.2) на  $\sin 7\omega t$  и усреднения обеих частей. Результат таков:

$$b_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin 7\omega t dt. \quad (50.10)$$

Но то, что верно для 7, очевидно, верно и для любого другого целого числа. Теперь мы запишем результат нашего доказательства в следующей, более элегантной математической форме. Если  $m$  и  $n$  — целые отличные от нуля числа и если  $\omega = 2\pi/T$ , то

$$\text{I. } \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt = 0. \quad (50.11)$$

$$\text{II. } \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \text{если } n \neq m, \\ \frac{T}{2}, \quad \text{если } n = m. \end{array} \right. \quad (50.12)$$

$$\text{III. } \int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t dt = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \text{если } n \neq m, \\ \frac{T}{2}, \quad \text{если } n = m. \end{array} \right.$$

$$\text{IV. } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t. \quad (50.13)$$

$$\text{V. } a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (50.14)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt. \quad (50.15)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt. \quad (50.16)$$

В предыдущих главах для описания простого гармонического движения было удобно пользоваться экспоненциальной функцией. Вместо  $\cos \omega t$  мы использовали  $\operatorname{Re} \exp(i\omega t)$  — действительную часть экспоненциальной функции. В этой главе мы использовали синус и косинус, потому что с ними, пожалуй, немного проще проводить доказательства. Однако наш окончательный результат, уравнение (50.13), можно записать в более компактной форме:

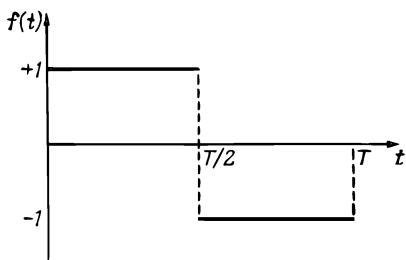
$$f(t) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n e^{in\omega t}, \quad (50.17)$$

где  $\hat{a}_n$  — комплексное число  $a_n - ib_n$  (с  $b_0 = 0$ ). Если мы всюду будем пользоваться одним и тем же обозначением, то должны также написать

$$\hat{a}_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n \geq 1). \quad (50.18)$$

Итак, теперь мы умеем раскладывать периодическую волну на ее гармонические компоненты. Эта процедура называется *разложением в ряд Фурье*, а отдельные члены называются *фурье-компонентами*. Однако до сих пор мы не показали, что, определив все фурье-компоненты и затем сложив их, мы действительно придем назад к нашей функции  $f(t)$ . Математики доказали, что для широкого класса функций (в сущности, для всех функций, интересных физикам), которые можно проинтегрировать, мы снова получаем  $f(t)$ . Но есть одно небольшое исключение. Если функция  $f(t)$  разрывна, т. е. если она неожиданно прыгает от одного значения к другому, сумма Фурье такой функции даст в точке разрыва значение, лежащее посередине между верхним и нижним значениями. Таким образом, если у нас есть странная функция  $f(t) = 0$  для  $0 \leq t < t_0$  и  $f(t) = 1$  для  $t_0 \leq t \leq T$ , то ее сумма Фурье всюду даст нам правильную величину, за исключением точки  $t_0$ , где вместо единицы получится  $1/2$ . Во всяком случае, физически даже нельзя требовать, чтобы функция была всюду нулем *вплоть до точки*  $t_0$ , а в самой точке  $t_0$  вдруг стала равной единице. Может быть, стоило бы специально для физиков издать такой «указ», что любая разрывная функция (которая может быть только упрощением *настоящей* физической функции) в точке разрыва должна принимать среднее значение. Тогда любая такая функция, с любым конечным числом «ступенек», как и все другие интересные для физики функции, будет правильно описываться рядом Фурье.

В качестве упражнения предлагаем читателю найти ряд Фурье для функции, показанной на фиг. 50.3. Поскольку эту функцию нельзя записать в точной алгебраической форме, то



Фиг. 50.3. Ступенчатая функция  
 $f(t) = +1$  для  $0 < t < \frac{T}{2}$ ,  $f(t) = -1$  для  
 $\frac{T}{2} < t < T$ .

брать интеграл от 0 до  $T$  обычным способом невозможно. Однако если разделить его на две части: по интервалу от 0 до  $T/2$  [на котором функция  $f(t) = 1$ ] и по интервалу от  $T/2$  до  $T$  [на котором  $f(t) = -1$ ], то интеграл легко берется. В результате должно получиться

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right), \quad (50.19)$$

где  $\omega = 2\pi/T$ . Таким образом, оказывается, что для нашей ступенчатой волны (со специально выбранной фазой) будут только нечетные гармоники, причем их амплитуды обратно пропорциональны частотам.

Давайте проверим, что для некоторого значения  $t$  результат (50.19) действительно дает снова  $f(t)$ . Возьмем  $t = T/4$  или  $\omega t = \pi/2$ . Тогда

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \right), \quad (50.20)$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right). \quad (50.21)$$

Сумма этого ряда \* равна  $\pi/4$ , а, стало быть,  $f(t) = 1$ .

## § 5. Теорема об энергии

Энергия волны пропорциональна квадрату ее амплитуды. Для сложной волны энергия за один период пропорциональна

$\int_0^T f^2(t) dt$ . Эту энергию можно связать с коэффициентами

\* Ее можно вычислить следующим образом. Во-первых, заметим, что  $\int_0^x dx/(1+x^2) = \text{arctg } x$ . Во-вторых, разложив подынтегральное выражение в ряд, получим  $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ . Интегрируя затем почленно этот ряд (от нуля до  $x$ ), получаем  $\text{arctg } x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$ , а положив  $x = 1$ , мы докажем использованный результат, поскольку  $\text{arctg } 1 = \pi/4$ .

Фурье. Напишем

$$\int_0^T f^2(t) dt = \int_0^T \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \omega t \right]^2 dt. \quad (50.22)$$

После раскрытия квадрата в правой части мы получим сумму всевозможных перекрестных членов типа  $a_5 \cos 5\omega t b_7 \cos 7\omega t$ . Однако выше мы уже показали [уравнения (50.11) и (50.12)], что интегралы от всех таких членов по одному периоду равны нулю, так что останутся только квадратные члены, подобные  $a_5^2 \cos^2 5\omega t$ . Интеграл от любого квадрата косинуса или синуса по одному периоду равен  $T/2$ , так что получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T f^2(t) dt &= T a_0^2 + \frac{T}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + b_1^2 + b_2^2 + \dots) = \\ &= T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned} \quad (50.23)$$

Это уравнение называют «теоремой об энергии», которая говорит, что полная энергия волны равна просто сумме энергий всех ее фурье-компонент. Применяя, например, эту теорему к ряду (50.19), мы получаем

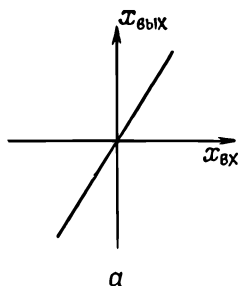
$$T = \frac{T}{2} \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right),$$

поскольку  $[f(t)]^2 = 1$ . Таким образом мы узнали, что сумма квадратов обратных нечетных чисел равна  $\pi^2/8$ . Точно так же, выписав сначала ряд Фурье для функции и используя затем теорему об энергии, можно доказать результат, понаблюдавший нам в гл. 45, т. е. что  $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$  равно  $\pi^4/90$ .

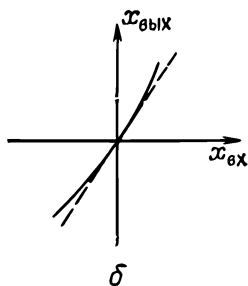
## § 6. Нелинейная реакция

Наконец, в теории гармоник есть одно очень важное явление, которое необходимо отметить, учитывая его практическую важность, но это уже относится к области нелинейных эффектов. Во всех рассмотренных нами до сих пор системах все предполагалось линейным; реакция на действие силы, например перемещение или ускорение, всегда была пропорциональна силам. Токи в электрической цепи были тоже пропорциональны напряжениям и т. д. Теперь мы хотим рассмотреть случаи, когда строгая пропорциональность отсутствует. Представим на минуту устройство, реакция которого  $x_{\text{выход}} \equiv x_{\text{вых}}$  в момент  $t$  определяется внешним воздействием  $x_{\text{вход}} \equiv x_{\text{вх}}$  в тот же момент  $t$ . Например,  $x_{\text{вх}}$  может быть





а



б

Фиг. 50.4. Реакции.  
 а — линейная,  $x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}$ ;  
 б — нелинейная,  
 $x_{\text{вых}} = k(x_{\text{вх}} + \epsilon x_{\text{вх}}^2)$ .

силой, а  $x_{\text{вых}}$  — перемещением, или  $x_{\text{вх}}$  — ток, а  $x_{\text{вых}}$  — напряжением. Если бы устройство было линейное, то мы бы получили

$$x_{\text{вых}}(t) = Kx_{\text{вх}}(t), \quad (50.24)$$

где  $K$  — постоянная, не зависящая ни от  $t$ , ни от  $x_{\text{вх}}$ . Предположим, однако, что устройство только приблизительно линейное, т. е. на самом деле нужно писать

$$x_{\text{вых}}(t) = K[x_{\text{вх}}(t) + \epsilon x_{\text{вх}}^2(t)], \quad (50.25)$$

где  $\epsilon$  мало по сравнению с единицей. Такие линейная и нелинейная реакции показаны на фиг. 50.4.

Нелинейная реакция приводит к нескольким важным практическим следствиям. Некоторые из них мы сейчас обсудим. Посмотрим сначала, что получается, если пропустить через подобное устройство «чистый» тон. Пусть  $x_{\text{вх}} = \cos \omega t$ . Если мы построим график зависимости  $x_{\text{вых}}$  от времени, то получим сплошную кривую, показанную на фиг. 50.5. Для сравнения там же проведена пунктирная кривая, представляющая реакцию линейной системы. Мы видим, что на выходе получается уже не косинусообразная функция. Она более острая в вершине и более плоская в основании. Поэтому мы говорим, что выходной сигнал *искажен*. Однако, как известно, такая волна не будет уже чистым тоном, а приобретает какие-то высшие гармоники. Можно найти эти гармоники. Подставляя  $x_{\text{вх}} = \cos \omega t$  в уравнение (50.25), получаем

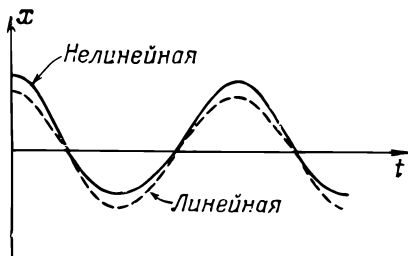
$$x_{\text{вых}} = K(\cos \omega t + \epsilon \cos^2 \omega t). \quad (50.26)$$

Используя равенство  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ , находим

$$x_{\text{вых}} = K\left(\cos \omega t + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \cos 2\omega t\right). \quad (50.27)$$

Таким образом, в выходящей волне присутствует не только основная компонента, которая была во входящей волне, но и некоторая доля второй гармоники. Кроме того, в выходящей

Фиг. 50.5. Реакция нелинейного устройства на входящий сигнал  $\cos \omega t$ . Для сравнения показана линейная реакция.



волне появился постоянный член  $K(\varepsilon/2)$ , который соответствует сдвигу среднего значения, показанному на фиг. 50.5. Эффект возникновения сдвига среднего значения называется *выпрямлением*.

Нелинейное устройство будет выпрямлять и давать на выходе высшие гармоники. Хотя предположенная нами нелинейность только добавляет вторую гармонику, нелинейность высшего порядка, например  $x_{\text{вх}}^3$  или  $x_{\text{вх}}^4$ , даст уже более высокие гармоники.

Другим результатом нелинейной реакции является *модуляция*. Если входящая функция содержит два (или больше) чистых тона, то на выходе получатся не только их гармоники, но и другие частотные компоненты. Пусть  $x_{\text{вх}} = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$ , причем  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не находятся в рациональном отношении друг к другу. Тогда в дополнение к линейному члену (равному произведению  $K$  на входящую волну) на выходе мы получим

$$x_{\text{вых}} = K\varepsilon (A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t)^2, \quad (50.28)$$

$$x_{\text{вых}} = K\varepsilon (A^2 \cos^2 \omega_1 t + B^2 \cos^2 \omega_2 t + 2AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t). \quad (50.29)$$

Первые два члена в скобках уравнения (50.29) — старые знакомые. Они дают нулевую и вторую гармоники, но последний член — это уже нечто новое.

На этот новый «перекрестный член»  $AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$  можно смотреть с двух сторон. Во-первых, если две частоты сильно отличаются друг от друга (например,  $\omega_1$  много больше  $\omega_2$ ), то мы можем считать, что перекрестный член представляет косинусообразные колебания с переменной амплитудой. Я имею в виду такую запись:

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = C(t) \cos \omega_1 t, \quad (50.30)$$

где

$$C(t) = AB \cos \omega_2 t. \quad (50.31)$$

Мы говорим, что амплитуда колебаний  $\cos \omega_1$  *модулируется* с частотой  $\omega_2$ .

Во-вторых, этот же перекрестный член можно рассмотреть с другой точки зрения:

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{AB}{2} [\cos (\omega_1 - \omega_2) t + \cos (\omega_1 + \omega_2) t], \quad (50.32)$$

т. е. можно сказать, что возникают две *новые* компоненты, одна из которых равна *сумме* частот  $\omega_1 + \omega_2$ , а другая — *разности*  $\omega_1 - \omega_2$ .

Таким образом, существуют два различных, но эквивалентных способа толкования одного и того же явления. В предельном случае  $\omega_1 \gg \omega_2$  можно связать эти две различные точки зрения, заметив, что поскольку  $(\omega_1 + \omega_2)$  и  $(\omega_1 - \omega_2)$  близки друг к другу, то между ними должны наблюдаться биения. Но эти биения дают в результате *модуляцию* амплитуды колебаний со *средней* частотой  $\omega_1$ , половиной разности частот  $2\omega_2$ . Теперь вы видите, почему эти два описания эквивалентны.

Итак, мы обнаружили, что нелинейная реакция дает несколько эффектов: выпрямление, возникновение гармоник и модуляцию т. е. возникновение компонент с суммой и разностью частот.

Обратите внимание, что все эти эффекты пропорциональны не только коэффициенту нелинейности  $\epsilon$ , но и произведению амплитуд: либо  $A^2$ , либо  $B^2$ , либо  $AB$ . Поэтому мы ожидаем, что они будут более важны для *сильных* сигналов, чем для слабых.

Описанные нами эффекты находят множество практических приложений. Во-первых, что касается звука, то, как полагают, наше ухо — нелинейный аппарат. Такое представление возникло из того факта, что даже когда звук содержит только чистые тоны, при большой громкости возникает ощущение, что мы *слышим* высшие гармоники, а также сумму и разность частот.

Аппараты, используемые обычно в звуковоспроизводящих устройствах, — усилители, громкоговорители и т. д. — всегда имеют какие-то нелинейности. Они искажают звук, порождая гармоники, которых вначале не было. Эти новые гармоники воспринимаются ухом и, несомненно, нежелательны. Именно по этой причине высокочастотная аппаратура должна быть как можно «более линейной». (Почему нелинейность нашего собственного уха не «неприятна» и откуда нам знать, что нелинейность «сидит» в *громкоговорителе*, а не в нашем *ухе*. — не ясно!)

Однако в некоторых случаях нелинейность совершенно *необходима*, и в некоторых частях радиопередающих и принимающих устройств она намеренно делается побольше. При радиопередачах с помощью амплитудной модуляции сигналы

от «голоса» (частоты порядка нескольких килогерц) комбинируются с «несущим сигналом» (с частотой порядка нескольких мегагерц) в нелинейной цепи, которая называется *модулятором*. При этом получают модулированные колебания, которые затем излучаются в эфир. В приемнике сигнал снова попадает в нелинейный контур, который складывает и вычитает частоты модулированного сигнала, выделяя снова звуковой сигнал.

Когда мы разбирали вопрос прохождения света через вещество, мы предполагали, что вынужденные колебания зарядов пропорциональны электрическому полю света, т. е. мы брали линейную реакцию. Это действительно очень хорошее приближение. Только в последние несколько лет были построены источники света (лазеры), которые дают интенсивность, достаточную для наблюдения нелинейных эффектов. Теперь можно создавать гармоники световых частот. Если пропускать через кусок стекла сильный красный свет, то выходит он оттуда с небольшим добавком второй гармоники — голубого света!

## ВОЛНЫ

§ 1. Волна от движущегося предмета

§ 2. Ударные волны

§ 3. Волны в твердом теле

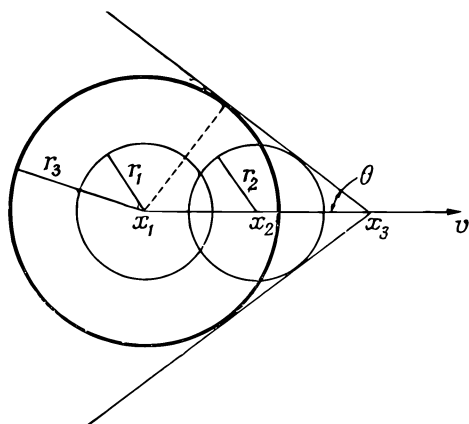
§ 4. Поверхностные волны

### § 1. Волна от движущегося предмета

Мы закончили количественный анализ волн, но посвятим еще одну дополнительную главу некоторым качественным оценкам различных явлений, связанных с волнами; для подробного анализа они слишком сложны. Волнами мы занимаемся уже на протяжении нескольких глав, поэтому предмет настоящей главы было бы вернее назвать «некоторые из более сложных явлений, связанных с волнами».

Первым объектом нашего обсуждения будет эффект, производимый источником волн, движущимся со скоростью, превышающей скорость распространения волн, т. е. быстрее их фазовой скорости. Рассмотрим сначала волны, которые, подобно звуку или свету, имеют определенную постоянную скорость. Если источник звука движется со сверхзвуковой скоростью, то произойдет нечто вроде следующего. Пусть в данный момент источник, находящийся в точке  $x_1$ , порождает звуковую волну (фиг. 51.1), тогда в следующий момент источник переместится в точку  $x_2$ , а волна из точки  $x_1$  распространится в радиусе  $r_1$ , который меньше расстояния, пройденного источником, а из точки  $x_2$ , разумеется, пойдет другая волна. Когда источник переместится еще дальше, в точку  $x_3$ , и отсюда тоже пойдет волна, то волна из точки  $x_2$  распространится в радиусе  $r_2$ , а волна из точки  $x_1$  — в радиусе  $r_3$ . Конечно, все это происходит непрерывно, а не какими-то этапами, и поэтому получается целый ряд таких волновых колец с общей касательной линией, проходящей через центр источника. Мы видим, что источник, вместо того чтобы порож-

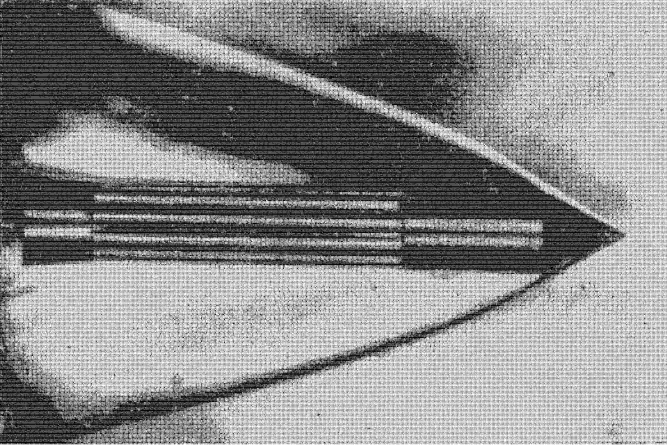
Ф и г. 51.1. Фронт ударной волны, образующий конус с вершиной в источнике и углом полураствора  $\theta = \arcsin(c_w/v)$ .



дать сферические волны, как это произошло бы, будь он неподвижен, порождает фронт, образующий в трехмерном пространстве конус или в двухмерном пару пересекающихся прямых линий. Из рисунка нетрудно найти угол между этими двумя линиями. За данный отрезок времени источник проходит расстояние, пропорциональное его скорости  $v$ , скажем  $x_3 - x_1$ . Тем временем фронт волны распространится на расстояние  $r_3$ , пропорциональное  $c_w$  — скорости волны. Ясно поэтому, что синус угла полураствора равен отношению скорости волны к скорости источника, а это может быть только тогда, когда  $c_w$  меньше  $v$ , или скорость объекта больше скорости волны:

$$\sin \theta = \frac{c_w}{v}. \quad (51.1)$$

Интересно, что движущийся предмет вовсе не обязан быть *источником* звука, оказывается, что когда предмет движется быстрее скорости звука, то он сам *производит* звук. Ему для этого вовсе не обязательно вибрировать. Любой предмет, движущийся через среду быстрее, чем эта среда переносит волны, будет автоматически порождать волны просто благодаря своему движению. Это проще понять для случая звука, но то же самое происходит и со светом. Сначала может показаться, что ничто не может двигаться быстрее скорости света. Однако фазовая скорость света в стекле, например, меньше, чем в пустоте, а через кусок стекла можно пропустить такую частицу, скорость которой будет очень близка к скорости света в пустоте, тогда как фазовая скорость света в стекле может быть равна только  $2/3$  этой скорости. Частица, летящая быстрее света в среде, порождает коническую световую волну с вершиной в источнике, подобно волнам, вызванным лодкой (эти волны одной и той же природы).



*Фиг. 51.2. Ударная волна в газе, вызванная снарядом, движущимся быстрее звука.*

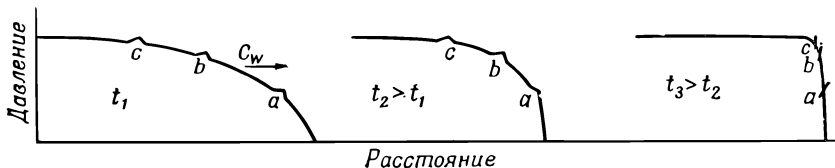
Измеряя угол при вершине конуса, мы можем определить скорость частицы. В физике это используется для измерения скорости частиц как один из методов определения их энергии при высокоэнергетических исследованиях. Единственное, что приходится измерять, — это направление излучения света.

Такое излучение называют излучением Черенкова, который первый наблюдал его. Тамм и Франк теоретически выяснили, насколько оно должно быть интенсивным. За эту работу этим ученым в 1958 г. совместно была присуждена Нобелевская премия.

Подобное же явление для случая звука показано здесь на фиг. 51.2; это фотография объекта, движущегося через газ со скоростью, превышающей скорость звука. Изменение в давлении приводит к изменению показателя преломления, поэтому границу волн с помощью специальной оптической системы можно сделать видимой. Итак, предмет, движущийся быстрее скорости звука, действительно дает коническую волну. Однако при более внимательном рассмотрении оказывается, что граница на самом деле искривлена. В асимптотике это действительно прямая линия, но вблизи вершины она искривлена, и сейчас мы обсудим, отчего так может получаться. Это непосредственно приводит нас ко второй теме данной главы.

## **§ 2. Ударные волны**

Зачастую скорость волны зависит от ее амплитуды, и в случае звука эта зависимость возникает следующим образом. Движущийся в воздухе предмет должен сдвигать его со



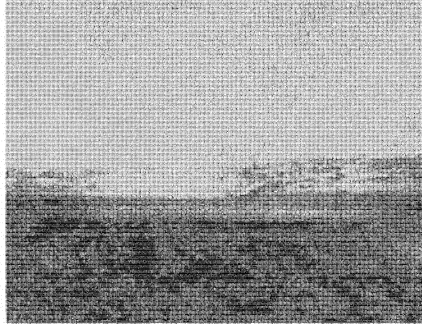
Фиг. 51.3. «Мгновенные снимки» ударного фронта в последовательные моменты времени.

своего пути вызывая при этом возмущение в виде какой-то ступенчатой функции давления, причем давление за волновым фронтом оказывается выше, чем в невозмущенной области, т. е. в области, куда волна (которая распространяется с нормальной скоростью) еще не добралась. Воздух за волновым фронтом оказывается адиабатически сжатым, поэтому температура его будет выше, чем перед фронтом. Но скорость звука с температурой увеличивается, поэтому в области позади скачка она оказывается больше скорости звука впереди него.

Это означает, что любое другое возмущение за скачком, вызванное, например, постоянным напором тела или чем-то другим, будет бежать быстрее, чем сам фронт: с увеличением давления скорость увеличивается. Эта картина показана на фиг. 51.3, причем для большей наглядности дополнительные возмущения взяты в виде небольших горбиков. Мы видим, что области высокого давления с течением времени «подгоняют» фронт волны, пока волна давления в конце концов не превратится в волну с резким фронтом. Если сила волны очень велика, то «в конце концов» означает — сразу же; если же волна довольно слабая, то это займет сравнительно много времени; обычно звук скорее рассеивается и замирает прежде, чем это превращение успеет произойти.

Давление, вызываемое звуком нашей речи, очень мало по сравнению с атмосферным — только одна миллионная часть или что-то в этом роде. Но при изменении давления на величину порядка  $1 \text{ атм}$  скорость волны увеличивается примерно на 20% и «заострение» фронта волны происходит соответственно быстрее. В природе, по-видимому, ничего не протекает бесконечно быстро и то, что мы называем «резким» фронтом, на самом деле имеет все же небольшую толщину; он не бесконечно крут. Расстояние, на котором все это происходит, — порядка средней длины свободного пробега молекулы, но на таких расстояниях волновое уравнение становится несправедливым, ведь при выводе его мы не учитываем молекулярной структуры газа.





Фиг. 51.4. Падение воды и водовороты.

Вернемся снова к фиг. 51.2. Мы видим, что кривизну легко объяснить, если понять, что давление вблизи вершины выше, чем вдали от нее, поэтому угол  $\theta$  здесь больше. Таким образом, кривизна возникла вследствие зависимости скорости от силы волны. Например, волна от взрыва атомной бомбы в течение некоторого времени движется гораздо быстрее звука, пока не отойдет достаточно далеко и в результате расплывания не будет ослаблена в такой степени, что перепад давления станет малым по сравнению с атмосферным. При этом скорость фронта приближается к скорости звука в газе, в котором он распространяется. (Скорость ударной волны всегда оказывается выше скорости звука в газе перед ней и ниже скорости звука в газе за ней. Таким образом, импульсы, идущие сзади, будут догонять фронт, но сам он движется в среде быстрее, чем нормальная скорость звукового сигнала. Поэтому только по звуку никто не в силах предсказать появление ударной волны, пока не становится слишком поздно. Конечно, свет от взрыва бомбы виден раньше, но предугадать приход ударной волны невозможно, никакого звукового сигнала впереди нее нет.)

Накапливание волн — очень интересное явление, и в основном причина его состоит в том, что после прихода одной волны скорость следующей за ней волны должна возрасти.

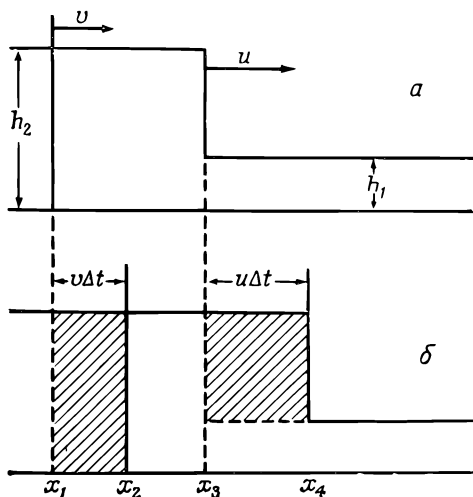
Рассмотрим еще один пример того же явления. Представьте себе длинный канал конечной ширины и глубины, заполненный водой. Если с достаточной быстротой двигать вдоль канала поршень, то вода будет собираться перед ним, как снег перед снегоочистителем. Теперь вообразите ситуацию, подобную изображенной на фиг. 51.4. когда где-то в канале вдруг возникает скачок высоты уровня воды. Можно показать, что длинные волны в канале идут быстрее по глубокой воде, чем по мелкой. Поэтому любой новый толчок или какие-то иные нерегулярности в энергии, поступающей от поршня, побегут вперед и соберутся на фронте волны. Теоретически мы снова в конце концов должны получить резкий фронт. Однако (см. фиг. 51.4) здесь возникают некото-

рые осложнения. Вы видите волну, идущую вверх по каналу, причем поршень находится где-то далеко с правой стороны канала. Сначала может показаться, что это хорошая волна, такая, какую и следует ожидать, но дальше она становится острее и острее, пока не произойдет то, что изображено на рисунке. Вода на поверхности начинает сильно бурлить и переливаться вниз, но, что самое существенное, край по-прежнему остается резким, и впереди него нет никакого возмущения.

В действительности волна на воде — вещь куда более сложная, чем звук. Однако для иллюстрации мы попытаемся проанализировать скорость так называемого *высокого прилива в канале*. Дело не в том, что это очень важно для наших целей (никакого обобщения здесь не будет), это только иллюстрация того, как законы механики, которые мы хорошо знаем, способны объяснить подобное явление.

Вообразите на минуту, что поверхность воды имеет такой вид, как изображено на фиг. 51.5, *а*, и что на верхнем уровне  $h_2$  она движется со скоростью  $v$ , а фронт со скоростью  $u$  надвигается на невозмущенную поверхность, высота которой  $h_1$ . Мы хотим определить скорость, с которой движется фронт. За промежуток времени  $\Delta t$  вертикальная плоскость, проходившая вначале через точку  $x_1$ , передвинется на расстояние  $v\Delta t$ , т. е. от  $x_1$  до  $x_2$ , а фронт волны пройдет расстояние  $u\Delta t$ .

Применим теперь законы сохранения вещества и импульса. Возьмем сначала первый из них: мы видим, что на единицу ширины канала количество вещества  $h_2 v \Delta t$ , прошедшее мимо точки  $x_1$  (область, заштрихованная на фиг. 51.5, *б*),



Фиг. 51.5. Два разреза высокого прилива в канале. Разрез б сделан на интервал времени  $\Delta t$  позднее разреза а.

компенсируется другой заштрихованной областью, представляющей количество вещества  $(h_2 - h_1)u\Delta t$ . Разделив на  $\Delta t$ , получим  $vh_2 = u(h_2 - h_1)$ . Но этого еще недостаточно, так как, хотя нам известны  $h_1$  и  $h_2$ , мы еще не знаем ни  $u$ , ни  $v$ , а хотим найти обе величины.

Следующим шагом будет использование закона сохранения импульса. Мы еще не касались вопросов давления в воде и прочей гидродинамики, но и так ясно, что давление в воде на какой-то глубине должно быть как раз достаточным, чтобы поддерживать столбик воды над этой глубиной. Следовательно, давление воды равно произведению плотности  $\rho$  на  $g$  и на глубину. Так как давление воды возрастает линейно с глубиной, то среднее давление на плоскость, проходящую, например, через точку  $x_1$ , равно  $\frac{1}{2}\rho gh_2$ , что также представляет среднюю силу на единичную ширину и на единичную длину, толкающую плоскость к точке  $x_2$ . Чтобы получить полную силу, давящую на воду слева, мы должны еще раз умножить на  $h_2$ . С другой стороны, давление на рассматриваемую область справа дает противоположно направленную силу, которая по тем же причинам равна  $\frac{1}{2}\rho gh_1^2$ . Теперь мы должны приравнять эти силы к скорости изменения импульса. Таким образом, нам нужно выяснить, насколько в случае, изображенном на фиг. 51.5, б, импульс больше, чем в случае, показанном на фиг. 51.5, а.

Мы видим, что дополнительная масса, которая приобрела скорость  $v$ , равна просто  $\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t$  (на единицу ширины), а умножение ее на  $v$  дает дополнительный импульс, который должен быть приравнен к импульсу силы  $F\Delta t$ :

$$(\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t) v = \left( \frac{1}{2} \rho g h_2^2 - \frac{1}{2} \rho g h_1^2 \right) \Delta t.$$

Исключая из этого уравнения  $v$  подстановкой  $vh_2 = u(h_2 - h_1)$  и упрощая его, получаем окончательно  $u^2 = gh_2(h_1 + h_2)/2h_1$ .

Если разность высот очень мала, так что  $h_1$  и  $h_2$  приблизительно одинаковы, то скорость будет равна  $\sqrt{gh}$ . Как мы увидим позднее, это справедливо только при условии, что длина волны много больше глубины канала.

Аналогичную вещь можно сделать и для ударных волн, только теперь нужно добавить уравнение сохранения внутренней энергии, потому что ударная волна — явление необратимое. Действительно, если в задаче о высокой приливной волне проверить закон сохранения энергии, то мы увидим, что он не выполняется. Когда разность высот мала, то энергия почти сохраняется, но как только разность высот становится более заметной, возникают большие потери.

Это проявляется в падении воды и водоворотах, показанных на фиг. 51.4.

С точки зрения адиабатического процесса в ударной волне тоже происходит аналогичная потеря энергии. Энергия в звуковой волне за ударным фронтом уходит на нагревание газа, что соответствует бурлению воды при высоком приливе. Оказывается, что необходимо решить три уравнения, чтобы описать все это для случая звука, причем нужно учесть, что температура за ударной волной и перед ней, как мы видели, не одинакова.

Если мы попытаемся пустить высокий прилив в обратную сторону ( $h_2 < h_1$ ), то окажется, что потеря энергии отрицательна. Но поскольку энергию взять неоткуда, высокий прилив не может поддерживать сам себя — он не стабилен. Если попытаться создать волну такого вида, то дальше она становится все более и более плоской, ведь зависимость скорости от высоты, которая раньше давала резкий фронт, в нашем случае будет работать в обратную сторону.

### § 3. Волны в твердом теле

Следующий тип волн, о которых нам следует поговорить, — это волны в твердом теле. Мы уже рассмотрели звуковые волны в жидкости и газе, а между ними и звуковыми волнами в твердом теле имеется непосредственная аналогия. Если резко толкнуть твердое тело, то оно сожмется. Оно сопротивляется сжатию и в нем возникнут волны, аналогичные звуковым. Однако в твердом теле могут быть волны и другого рода, которых не бывает в жидкости. Если мы возбудим колебания твердого тела с помощью бокового давления (это называется *сдвигом*), то тело стремится вернуться в начальное положение. Именно этим, по определению, твердое тело отличается от жидкого. Если искривить жидкость, и подержать ее так немного, чтобы она успокоилась, а затем отпустить, то она останется в том же состоянии, но если мы возьмем твердое тело, похожее на дрожащий кусок желе, надавим на него и отпустим, то оно вернется назад, а в теле возникает волна *сдвига*, которая распространяется так же, как и волна сжатия. Во всех случаях скорость этих волн меньше скорости продольных волн. В каком-то отношении волны сдвига больше напоминают световые волны, ибо здесь мы тоже имеем дело с поляризацией. У звука нет никакой поляризации, это просто волна сжатия, а световые колебания имеют характерную ориентацию, перпендикулярную к направлению их распространения

Итак, в твердом теле могут быть волны обоих сортов. Во-первых, там распространяются волны сжатия, аналогичные звуку в воздухе, и, во-вторых, волны сдвига. Если наше твер-

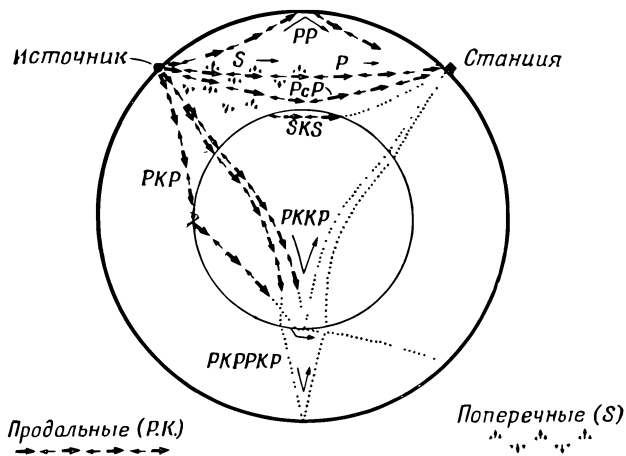
дое тело не кристалл, то волна может быть поляризована в любом направлении. (Конечно, все твердые тела — кристаллы, но если мы возьмем кусок, состоящий из микрочастиц всех ориентаций, то кристаллическая анизотропия усредняется.)

Есть еще один интересный вопрос, касающийся звуковых волн. Что получится, если длина волны в твердом теле становится все меньше и меньше? До каких пор может это продолжаться? Ясно, что она не может стать меньше расстояния между атомами, ибо если под волной мы понимаем такое явление, когда одна точка идет вниз, а следующая — вверх и т. д., то кратчайшая возможная длина волны при этом, очевидно, равна межатомному расстоянию. Вам известно, что колебания могут быть как продольные, так и поперечные, длинноволновые и коротковолновые. Если мы рассматриваем длины волн, сравнимые с межатомным расстоянием, то скорость уже не будет постоянной; возникает дисперсионный эффект, когда скорость становится зависимой от волнового числа. А высшая гармоника поперечных волн все же должна характеризоваться именно тем, что каждые два соседних атома делают нечто противоположное друг другу.

С атомистической точки зрения ситуация здесь напоминает два связанных маятника, о которых мы уже говорили. У них могут быть два вида собственных колебаний: один — когда они качаются вместе, и другой — когда в противоположные стороны. Так что волны в твердом теле можно рассматривать и с иной точки зрения — как колебания связанных гармонических осцилляторов, подобных огромному числу связанных маятников, причем высшая гармоника получается, когда маятники колеблются в противоположные стороны, и низшие — при других соотношениях фаз.

Эти кратчайшие волны настолько малы, что обычно их невозможно получить технически. Однако они очень интересны, поскольку свойства этих коротких звуковых волн помогают нам объяснить в термодинамической теории твердого тела его тепловые свойства, в частности удельную теплоемкость. Переход к предельно коротким звуковым волнам означает переход к индивидуальному движению атомов; это в конечном счете одно и то же.

Очень интересным примером звуковых волн в твердом теле являются волны, идущие по земному шару, как продольные, так и поперечные. Хотя нам и не известно почему, но внутри Земли время от времени происходят землетрясения. Один породы сдвигаются относительно других, и это движение сходно с очень низким звуком. Из такого источника выходят и путешествуют по всей Земле волны, подобные звуковым, и хотя их длина значительно больше длины обычных звуко-



Ф и г. 51.6. Схема земного шара.  
Показаны пути продольных и поперечных звуковых волн.

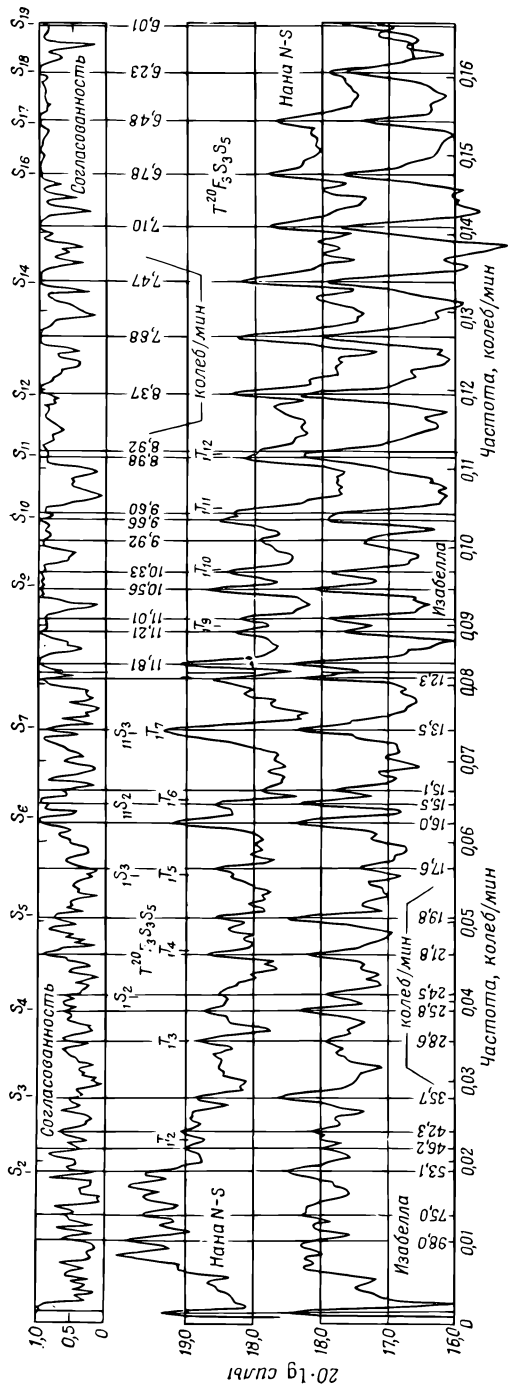
вых волн, но все же это звуковые волны. Земля не однородна: давление, плотность, сжимаемость и т. д. изменяются с изменением глубины, а поэтому изменяется и скорость волн. Возникает нечто похожее на показатель преломления, и волны идут не по прямому пути, а по некоторой кривой. Кроме того, картина осложняется тем, что продольные и поперечные волны распространяются с разной скоростью, а поэтому и решения для них будут разными. Если мы в каком-то месте поставим сейсмограф и будем наблюдать, как скачет его самописец после того, как где-то произошло землетрясение, то мы увидим не просто какие-то неправильные прыжки. Мы увидим, как самописец сначала запрыгает, затем успокоится, затем опять запрыгает. Более конкретные детали происходящего зависят от положения сейсмографа. Если он расположен достаточно близко к месту землетрясения, то сначала мы примем продольные волны от возмущения, а уж потом, несколько секунд спустя, — поперечные, ибо они идут медленней. Измеряя разницу времени между их приходами, можно сказать, насколько далеко произошло землетрясение, разумеется, если мы достаточно хорошо знаем скорости и состав внутренних областей.

На фиг. 51.6 показан пример поведения различных видов волн в Земле. Два сорта волн обозначены различными значками. Если в каком-то месте (назовем его «источник») произошло землетрясение, то поперечные и продольные волны, идущие по прямому пути, придут на станцию в разные моменты времени. Кроме того, возникнут отражения от границ

неоднородности, дающие в результате другие пути и времена. Подобные исследования показали, что у Земли есть некое ядро, не проводящее поперечных волн. Однако даже если станция расположена диаметрально противоположно источнику, то поперечные волны все же приходят, но с неправильной фазой. Это получается оттого, что поперечные волны, падающие наклонно на поверхность, разделяющую два вещества, всегда рождает две новые волны: поперечную и продольную. Но внутри ядра Земли поперечные волны не распространяются (по крайней мере в отличие от продольных волн для них этого не обнаружено). Затем на границе ядра оба вида волн возникают вновь и попадают на станцию.

Именно по поведению волн, вызванных землетрясениями, было обнаружено, что поперечные волны не могут распространяться в некоторой сфере внутри Земли. Это означает, что центр Земли жидкий в том смысле, что он не проводит поперечных волн. Изучение землетрясений — это единственный источник наших сведений о внутреннем строении Земли. Таким образом, в результате большого числа наблюдений на различных станциях в период многих землетрясений были выяснены все детали; известно все: скорости, кривые и т. д. Мы знаем скорости различных сортов волн на любой глубине. А зная это, мы, следовательно, можем выяснить, каковы собственные гармоника Земли, ибо нам известна скорость распространения звуковых волн: другими словами, известны упругие свойства на любой глубине. Предположим, что мы приплюснули земной эллипсоид и затем опустили его. Задача определения периода и формы свободных колебаний сводится просто к вопросу о суперпозиции волн, идущих по эллипсоиду. Мы уже выяснили, что при подобном возмущении возникает множество гармоник, начиная от низшей, которая для Земли эллипсоидальна, и вплоть до более высоких и более сложных.

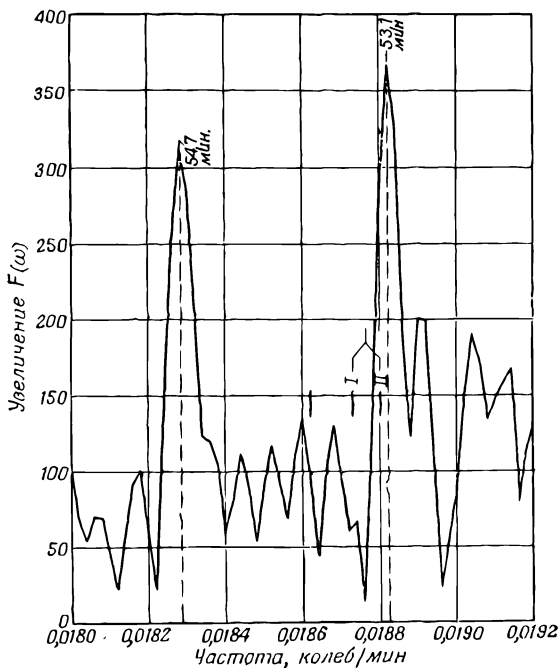
Чилийское землетрясение в мае 1960 г. произвело такой «шум», что его эхо много раз обошло вокруг Земли. Как раз к этому времени были изготовлены новые высокочувствительные сейсмографы, с помощью которых определялись основные гармоника Земли и сравнивались с величинами, вычисленными из теории звука по известным скоростям, найденным из других независимых землетрясений. Результат этого эксперимента показан на фиг. 51.7, где отложена сила сигнала в зависимости от его частоты (*фурье-анализ*). Заметьте, что одни из принимаемых частот оказывались более сильными, чем другие; наблюдались очень четкие максимумы. Это и есть собственные частоты Земли, поскольку они являются главными частотами ее колебаний.



Ф и г. 51.7. Зависимость силы от частоты, зарегистрированная сейсмографом в городах Нана (Перу) и Изабелла (Калифорния).

Согласованность (или когерентность) обозначает степень связанности сигналов, регистрируемых этими станциями.





Фиг. 51.8. Фурье-анализ записи высокочувствительного сейсмографа на станции Изабелла.

Хорошо виден спектральный дублет.

Иными словами, если все движение Земли сводится к суперпозиции множества различных гармоник, то можно надеяться, что запись нерегулярных толчков на любой станции даст одну и ту же суперпозицию многих частот. Если проанализировать это в терминах частот, то мы сможем определить характеристические частоты Земли. Тонкие вертикальные линии на рисунке изображают рассчитанные частоты, и мы видим замечательное согласие, убеждающее нас, что теория звука вполне работает и внутри Земли.

Очень интересный факт обнаруживается на фиг. 51.8, где представлены очень точные измерения (с еще большим разрешением) низшей эллипсоидальной гармоники. Заметьте, что здесь не один, а два немного отличающихся максимума: первый — с периодом 54,7 мин и второй — 53,1 мин. Природа этих двух максимумов не была известна, когда они были обнаружены, хотя с тех пор ее могли найти. Существуют по крайней мере два правдоподобных объяснения. Одно из них — это возможная асимметрия в распределении вещества Земли, которая может дать два подобных максимума. Другое, еще более интересное объяснение состоит в следующем. Вообразите волны, идущие от источника вокруг Земли в двух направлениях. Если мы в уравнениях движения учтем эффект

вращения Земли, которым обычно пренебрегали при анализе, то скорости этих волн окажутся разными. Движение во вращающейся системе из-за действия кориолисовой силы изменится, и это может вызвать наблюдаемое расщепление.

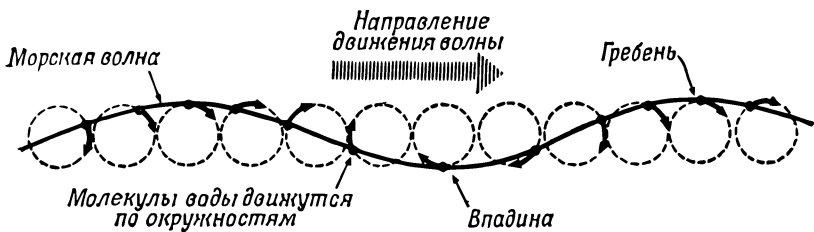
Коротко о методе получения этих кривых. На сейсмографе мы записываем не зависимость амплитуды от частоты, а перемещение как функцию времени, причем всегда какой-то очень неправильной и причудливой формы.

Чтобы найти из нее долю различных синусообразных волн для всех частот, мы уже знаем, что нужно делать. Фокус состоит в умножении полученных данных на синусообразную волну данной частоты и интегрировании, т. е. усреднении; при этом усреднении все другие частоты исчезают.

Таким образом, на рисунках фактически показаны графики интегралов от произведения полученных данных на синусообразные волны с различным числом периодов в минуту.

#### **§ 4. Поверхностные волны**

Следующий интересный тип волн, которые, несомненно, видел каждый и которые обычно в элементарных курсах служат примером волн, — это волны на поверхности воды. Вы скоро убедитесь, что более неудачного примера придумать трудно, ибо они нисколько не похожи ни на звук, ни на свет; здесь собрались все трудности, которые только могут быть в волнах. Давайте начнем с длинных волн на глубокой воде. Если считать океан бесконечно глубоким и на его поверхности происходят какие-то возмущения, то возникнут волны. Вообще говоря, возможны любые возмущения, но синусоидальное движение с очень небольшим возмущением дает волны, напоминающие обычные гладкие океанские волны, идущие к берегу. Вода, разумеется, в среднем остается на месте, а движутся сами волны. Что же это за движение — поперечное или продольное? Оно не может быть ни тем, ни другим: ни поперечным, ни продольным. Хотя в каждом данном месте горбы чередуются со впадинами, оно не может быть движением вверх и вниз просто из-за закона сохранения количества воды. Куда должна деваться вода из впадины? Ведь она же практически несжимаема. Скорость волн сжатия, т. е. звука в воде, во много раз больше: мы сейчас их не рассматриваем. Итак, для нас сейчас вода несжимаема, поэтому при образовании впадины вода из этого места может двигаться только в стороны. Так оно и получается на самом деле: частички воды вблизи поверхности будут двигаться приблизительно по окружности. Как-нибудь, когда вы будете нежиться на воде, лежа на круге, и придет такой гладкий вал, посмотрите на соседние предметы и вы увидите, что они движутся по окружностям. Так что картина получается ножидаемая: здесь



Фиг. 51.9. Волны на глубокой воде образуются частицами, движущимися по окружности.

Обратите внимание на систематический сдвиг фазы от одной окружности к другой. Как может при этом двигаться плавающий предмет?

мы имеем дело со смесью продольных и поперечных волн. С увеличением глубины круги уменьшаются, пока на достаточной глубине от них ничего не останется (фиг. 51.9).

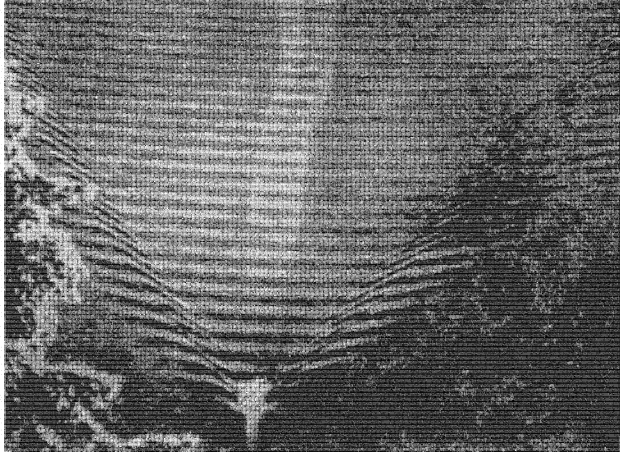
Очень интересно определить скорость таких волн. Это должно быть какой-то комбинацией плотности воды, ускорения силы тяжести, которая в данном случае является восстанавливающей силой, и, возможно, длины волны и глубины. Если мы рассмотрим случай бесконечной глубины, то скорость больше не будет зависеть от нее. Но какую бы формулу для фазовой скорости волн мы ни взяли, она должна содержать эти величины в такой комбинации, чтобы давать правильную размерность. Испробовав множество различных способов, мы найдем, что только одна комбинация  $g$  и  $\lambda$  может дать нам размерность скорости, именно  $\sqrt{g\lambda}$ , которая совсем не включает плотности. На самом деле эта формула для фазовой скорости не вполне точна, и полный анализ динамики, в который мы не будем входить, показывает, что все действительно получится так, как у нас, за исключением  $\sqrt{2\pi}$ , т. е.

$$v_{\text{фаз}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (\text{для волн «тяжести»).$$

Интересно, что длинные волны бегут быстрее коротких. Так что когда проходящая вдали моторная лодка создает волны, то после некоторого промежутка времени они достигнут берега, но сначала это будут редкие всплески, поскольку первыми приходят длинные волны. Затем приходящие волны становятся все короче и короче, ибо скорость падает как квадратный корень из длины волны.

«Это же неверно, — может возразить кто-нибудь, — ведь чтобы делать такое утверждение, мы должны смотреть на групповую скорость». Правильно, конечно. Формула для фазовой скорости не говорит нам о том, что приходит первым; об этом может нам сказать только групповая скорость. Так что мы должны получить групповую скорость и мы сможем

Ф и г. 51.10. След  
прошедшей мотор-  
ной лодки.



показать, что она равна половине фазовой скорости. Для этого нужно только вспомнить, что фазовая скорость ведет себя как квадратный корень из длины волны. Так же, т. е. как квадратный корень из длины волны, ведет себя и групповая скорость. Но как может групповая скорость быть вдвое меньше фазовой? Посмотрите на группу волн, вызванных проходящей мимо лодкой, и проследите за каким-то определенным гребнем. Вы обнаружите, что он бежит вместе с группой, но постепенно становится все меньше и меньше, а дойдя до переднего фронта, совсем умирает. Но таинственным и непостижимым образом на смену ему с заднего фронта поднимается слабенькая волна и становится она все сильнее и сильнее. Короче говоря, по группе движутся волны, тогда как сама группа движется вдвое медленнее этих волн.

Поскольку групповая и фазовая скорости не равны друг другу, то волны, вызванные движущимся объектом, будут уже не просто коническими, а гораздо более сложными и интересными. Вы можете видеть это на фиг. 51.10, где показаны волны, вызванные движущейся по воде лодкой. Заметьте, что они совсем не похожи на то, что мы получали для звука (когда скорость не зависит от длины волны), где фронт волны был просто распространяющимся в стороны конусом. Вместо него мы получили волны позади движущегося объекта, фронт которых перпендикулярен его движению, да еще движущиеся под другими углами небольшие волны с боков. Всю эту картину движения волн в целом можно очень красиво воссоздать, зная только, что фазовая скорость пропорциональна квадратному корню из длины волны. Весь фокус заключается в том, что картина волн стационарна относительно лодки (движущейся с постоянной скоростью); все другие виды волн отстанут от нее.

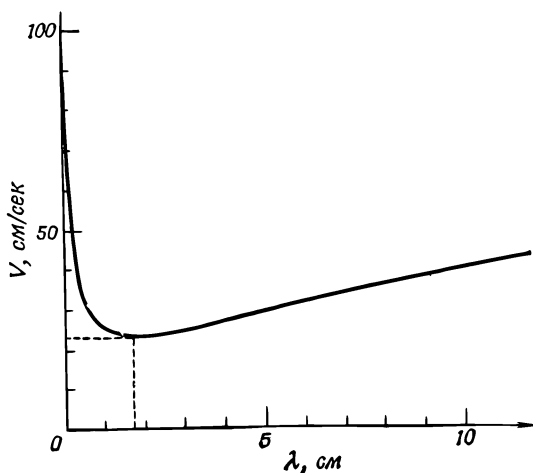
До сих пор мы рассматривали длинные волны, для которых восстанавливающей силой была сила тяжести. Но когда волны становятся очень короткими, то основной восстанавливающей силой оказывается капиллярное притяжение, т. е. энергия поверхностного натяжения. Для волн поверхностного натяжения фазовая скорость равна

$$v_{\text{фаз}} = \sqrt{\frac{2\pi T}{\lambda \rho}} \quad (\text{для ряби}),$$

где  $T$  — поверхностное натяжение, а  $\rho$  — плотность. Здесь все наоборот: чем короче длина волн, тем *большей* оказывается фазовая скорость. Если же действуют и сила тяжести и капиллярная сила, как это обычно бывает, то мы получаем комбинацию

$$v_{\text{фаз}} = \sqrt{\frac{T k}{\rho} + \frac{g}{k}},$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. Как видите, скорость волн на воде — вещь действительно довольно *сложная*. На фиг. 51.11 показана фазовая скорость как функция длины волны. Она велика для очень коротких волн, велика для очень длинных волн, но между ними существует некоторая минимальная скорость распространения. Исходя из этой формулы, можно вычислить и групповую скорость: она оказывается равной  $3/2$  фазовой скорости для ряби и  $1/2$  фазовой скорости для волн «тяжести». Слева от минимума групповая скорость больше фазовой, а справа групповая скорость меньше. С этим фактом связано несколько интересных явлений. Поскольку групповая скорость с уменьшением длины волны быстро увеличивается, то, если мы создадим какие-то возмущения, воз-

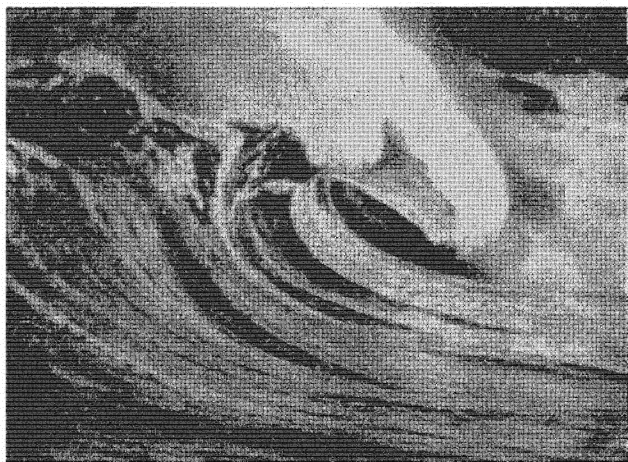


Фиг. 51.11. График зависимости фазовой скорости от длины волны для воды.

никнут волны соответствующей длины, которые идут с минимальной скоростью, а впереди них с большей скоростью побегут короткие и очень длинные волны. В любом водоеме можно легко увидеть очень короткие волны, а вот длинные волны наблюдать труднее.

Таким образом, мы убедились, что рябь, которая столь часто используется для иллюстрации простых волн, на самом деле гораздо сложнее и интереснее: у нее нет резкого волнового фронта, как в случае простых волн, подобных звуку или свету. Основная волна, которая вырывается вперед, состоит из мелкой ряби. Благодаря дисперсии резкое возмущение поверхности воды не приводит к резкой волне. Первыми все равно идут очень мелкие волны. Во всяком случае, когда по воде с некоторой скоростью движется объект, то возникает очень сложная картина, поскольку разные волны идут с разной скоростью. Взяв корыто с водой, можно легко продемонстрировать, что самыми быстрыми будут мелкие капиллярные волны, а уже за ними идут более крупные. Кроме того, наклонив корыто, можно увидеть, что там, где меньше глубина, меньше и скорость. Если волна идет под каким-то углом к линии максимального наклона, то она заворачивает в сторону этой линии. Таким способом можно продемонстрировать множество различных вещей и прийти к заключению, что волны на воде — куда более сложная вещь, чем волны в воздухе.

Скорость длинных волн с круговым движением воды уменьшается на мелком месте и увеличивается на глубоком. Таким образом, когда волна идет к берегу, где глубина меньше, она замедляется. Но там, где вода глубже, волна движется быстрее, так что мы снова сталкиваемся с механизмом



**Ф и г. 51.12. Морская волна.**

ударной волны. Однако на этот раз, поскольку волна не столь проста, ударный фронт ее гораздо больше искажен: волна «перегибается через себя» самым привычным для нас образом (фиг. 51.12). Именно это мы видим, когда волна набегаёт на берег: в ней выявляются все присущие природе трудности. Никому до сих пор не удалось вычислить форму волны в тот момент, когда она разбивается. Это очень легко сделать, когда волны малы, но когда они становятся большими, все слишком усложняется.

Интересное свойство поверхности капиллярных волн можно наблюдать при возмущении поверхности движущимся объектом. С точки зрения самого объекта вода течёт мимо него, и волны, которые в конечном итоге останутся вместе с ним, всегда будут волнами, которые как раз имеют нужную скорость, чтобы оставаться на воде вместе с объектом. Точно так же если поместить объект в поток, который будет омывать его, то картина волн окажется стационарной и как раз нужной длины волны для того, чтобы двигаться с той же скоростью, что и вода. Но если групповая скорость меньше фазовой, то возмущение идет по потоку *назад*, поскольку групповая скорость недостаточна для того, чтобы догнать поток. Если же групповая скорость больше фазовой, то волновая картина появится перед объектом. Если пристально следить за плывущим в потоке объектом, то можно заметить впереди него небольшую рябь, а позади него — длинные волны.

Другие интересные явления подобного рода можно наблюдать в льющейся жидкости. Если, например, быстро выливать молоко из бутылки, то можно заметить, как струя молока пересекается множеством перекрещивающихся линий. Это волны, вызванные возмущением на краях бутылки; они очень похожи на волны, вызванные объектом, плывущим по потоку. Но теперь такой эффект возникает с обеих сторон, поэтому получается картина пересекающихся линий.

Итак, мы познакомились с некоторыми интересными свойствами волн, с различными усложнениями, зависящими от фазовой скорости и длины волны, а также с зависимостью скорости волны от глубины и т. д.; все это приводит к весьма сложным, а потому и интересным явлениям природы.

## СИММЕТРИЯ ЗАКОНОВ ФИЗИКИ

### § 1. Симметричные операции

В этой главе мы будем говорить о том, что мы называем *симметрией физических законов*. Подобные симметрии уже обсуждались нами в ряде мест нашего курса, когда говорилось о векторном анализе (вып. 1, гл. 11), теории относительности (вып. 2, гл. 16) и вращениях (вып. 2, гл. 20).

Почему же симметрии так интересуют нас? Прежде всего потому, что симметрия импонирует нашему складу ума, каждому доставляет удовольствие любоваться предметом, который в каком-то смысле симметричен. Любопытно, что окружающий нас мир буквально заполнен симметричными объектами, созданными самой природой. Пожалуй, самый симметричный объект, который только можно себе представить, — это сфера, а природа дает нам массу примеров сферических тел: звезды, планеты, капельки воды в облаках и т. д. А сколько различных, порой причудливых примеров симметрии находим мы в кристаллах горных пород! Изучение их позволяет нам заглянуть внутрь вещества и получить важные сведения о структуре твердого тела. Столь же полон симметриями окружающий нас животный и растительный мир, хотя симметрия цветка или бабочки уже не столь совершенна и не столь фундаментальна, как симметрия кристалла.

Но тема этой главы все же не симметрия *предметов*, а куда более удивительная симметрия Вселенной — симметрия тех *фундаментальных законов*, которые управляют всеми процессами физического мира.

Однако *что же такое* симметрия? Каким образом физический закон может быть

- § 1. Симметричные операции
- § 2. Симметрия в пространстве и времени
- § 3. Симметрия и законы сохранения
- § 4. Зеркальное отражение
- § 5. Полярный и аксиальный векторы
- § 6. Какая же рука правая?
- § 7. Четность не сохраняется!
- § 8. Антивещество
- § 9. Нарушенная симметрия



«симметричным»? Проблема определения симметрии — одна из основных. Мы уже говорили об очень хорошем определении, которое было дано Вейлем. Суть его состоит в том, что объект считается симметричным, если с ним можно сделать нечто такое, после чего он будет выглядеть точно так же, как и прежде. Например, симметрична ваза, которая, отразившись в зеркале или будучи повернута вокруг своей оси, выглядит точно так же, как и до поворота или отражения. Вопрос, который мы хотим разобрать здесь, — это что можно сделать с физическим явлением или ситуацией, возникшей при эксперименте, чтобы получился тот же самый результат. Список операций симметрии, в результате которых различные физические явления остаются неизменными, приведен в табл. 52.1.

Таблица 52.1 ● ОПЕРАЦИИ СИММЕТРИИ

---

Перенос в пространстве
Перемещение во времени
Поворот на фиксированный угол
Движение по прямой с постоянной скоростью (преобразование Лоренца)
Обращение времени
Отражение пространства
Перестановка одинаковых атомов или одинаковых частиц
Изменение квантовомеханической фазы
Замена вещества антивеществом (зарядовое сопряжение)

## § 2. Симметрия в пространстве и времени

Самое простое, что можно попытаться сделать — это перенести (транслировать) различные явления в пространстве. Если мы в некотором месте сделаем какой-то опыт, а потом построим такую же установку (или просто перенесем старую) в другом месте и повторим наш опыт, то все должно повториться, причем в той же самой последовательности. При этом, конечно, все детали окружения и условия работы, существенные для нашего опыта, на новом месте должны быть теми же, что и прежде, т. е. должны быть тоже перенесены вместе с нашей аппаратурой. О том, что существенно и что не существенно, мы уже говорили и больше не будем останавливаться на этом.

Насколько нам сегодня известно, *перемещение во времени* тоже не должно изменять физических законов. (Впрочем, обо всем содержащемся в этой главе, можно сказать: *насколько нам известно сегодня!*) Это означает, что если мы построим какую-то установку и запустим ее в некоторый момент времени, скажем в 10 часов утра во вторник, а затем построим вторую, точно такую же установку и запустим ее при тех же

самых условиях, но ровно на три дня позднее, то эта вторая установка будет работать точно так же, как и первая, т. е. она будет повторять те же действия, в той же последовательности и с теми же интервалами длительности. При этом, конечно, снова подразумевается, что существенные свойства окружения изменяются со *временем* точно таким же образом, как и прежде.

Необходимо обращать внимание и на разницу, вносимую географией, ибо с изменением положения на Земле некоторые характеристики могут тоже меняться. Если мы в каком-то месте измеряем магнитное поле, а затем вместе со всей аппаратурой переедем куда-то в другое место, то приборы могут и не работать точно таким же образом, как раньше, поскольку магнитное поле в этих различных районах может быть разным. Однако всю ответственность за разницу в этом случае мы можем свалить на магнитное поле Земли. Но если вообразить, что мы передвигаем аппаратуру вместе со всем земным шаром, то, разумеется, никакой разницы быть не должно.

Другое свойство, которое мы тоже подробно обсуждали, — это вращение в пространстве. Если мы повернем нашу аппаратуру на некоторый угол, то она будет работать точно так же, как и прежде, но, разумеется, при неизменном условии, что вместе с ней мы повернем все существенное для работы аппаратуры окружение. Проблеме симметрии при вращении в пространстве была посвящена глава 11. Там вы познакомились и с *векторным анализом* — математическим аппаратом, который наиболее полно и изящно учитывает вращательную симметрию.

Поднявшись в изучении природы на ступеньку выше, мы познакомились с более сложной симметрией — симметрией при равномерном и прямолинейном движении. Это поистине замечательная вещь. Если мы погрузим нашу работающую установку на автомашину (со всем, конечно, существенным окружением) и поедем с постоянной скоростью по прямой дороге, то явления, происходящие в движущейся машине, будут протекать точно так же, как если бы она стояла на месте, т. е. все законы физики остаются теми же самыми.

Нам даже известно, как математически выражается эта симметрия: все математические уравнения должны оставаться неизменными при *преобразованиях Лоренца*. Кстати, именно изучение проблем теории относительности заострило внимание физиков на симметриях физических законов.

Однако все упомянутые виды симметрии имеют геометрическую природу, причем в некотором смысле утверждается эквивалентность пространства и времени. Но существуют симметрии совершенно другого рода. Например, можно

заменить один атом другим атомом того же сорта, или (в несколько другой постановке) существуют атомы одного и того же сорта, т. е. существуют такие группы атомов, что если мы переставим любые два из них, то ничто не изменится. То, что может сделать один атом кислорода определенного сорта, способен сделать и второй.

«Ерунда какая-то, — может возразить какой-нибудь скептик, — ведь это же просто *определение* того, что означают атомы одного и того же сорта!» Согласен, это может быть просто определением, но все дело в том, что до опыта нам не известно, существуют ли в природе атомы «одного и того же сорта», а экспериментальный *факт* состоит в том, что таких атомов много, очень много, так что наше утверждение все-таки что-то означает. В указанном смысле одинаковы и так называемые элементарные частицы, из которых сделаны атомы; одинаковы все протоны, одинаковы все положительные  $\pi$ -мезоны и т. д.

После столь длинного списка того, что можно делать, не изменяя при этом явлений, может создаться впечатление, что практически позволено делать все что угодно. Совсем нет. Вот вам пример — просто для того, чтобы продемонстрировать разницу. Допустим, что нас интересует вопрос: «А не остаются ли законы физики теми же самыми при изменении масштаба?» Пусть вы построили какую-то машину, а затем построили точную ее копию, но увеличенную, скажем, в пять раз. Будет ли копия работать точно так же? Нет, не будет! Длина волны света, испускаемого, например, атомами кальция, находящимися внутри ящика, и длина волны, излученная газом атомов кальция, которых в пять раз больше, будет не в пять раз больше, а в точности той же самой. Так что изменится отношение длины волны к размеру излучателя.

Возьмем другой пример. Время от времени в газетах вы видите фотографии моделей знаменитых соборов, сделанные из спичек, — удивительное произведение искусства, более удивительное и потрясающее, чем настоящий собор. А представьте себе, что такой деревянный собор в самом деле построен в натуральную величину. Вы уже чувствуете, что из этого получится! Он не будет стоять, он рухнет, ибо такие увеличенные модели из «спичек» недостаточно прочны. «Правильно, — может сказать кто-нибудь из вас, — но ведь существует внешнее влияние, которое тоже необходимо изменить в соответствующей пропорции!» Вы имеете в виду способность предметов противостоять силе тяжести? Хорошо. Сначала, когда мы взяли модель собора, сделанного из настоящих спичек, и настоящую Землю, то все было отлично и устойчиво. Но потом, когда мы увеличили собор, то должны увеличить и Землю, а это для собора будет еще хуже: ведь сила тяжести станет еще больше

Сейчас вы, конечно, понимаете, что в основе зависимости явлений от размеров лежит атомная природа строения вещества. Если бы нам удалось построить аппаратуру, которая была бы так мала, что содержала бы всего пять атомов, то такую штуку нельзя было бы произвольно уменьшить или увеличить. Ведь размер отдельного атома не произвольный, он совершенно определенный.

Тот факт, что законы физики не остаются теми же при изменении масштаба, открыл еще Галилей. Он понял, что прочность материалов изменяется не в прямой пропорции с их размерами, и иллюстрировал это свойство на примере, очень похожем на наш собор из спичек. Он рисовал два скелета собаки, один из них обычный, в той пропорции, которая необходима для поддержания ее веса, а второй — необходимый для некоей воображаемой «суперсобаки», которая в десять или, может быть, в тысячу раз больше обычной. Получилось нечто громадное и внушительное с совершенно другими пропорциями. Не известно, привели ли Галилея эти соображения к заключению о том, что законы природы должны иметь определенный масштаб; ясно лишь одно, что он был настолько потрясен своим открытием, что счел его столь же важным, как и открытие законов движения. Именно поэтому Галилей опубликовал оба эти закона в одном и том же томе под заглавием «О двух Новых Науках».

Другой хорошо известный пример несимметрии законов — это вращение. В системе, вращающейся с постоянной угловой скоростью, законы физики будут выглядеть совсем иначе, чем в покоящейся. Если мы произведем какой-то опыт, а затем погрузим всю аппаратуру в космический корабль и заставим его вращаться в межпланетном пространстве с постоянной угловой скоростью, то аппаратура из-за наличия центробежных и кориолисовых сил уже не будет работать так, как раньше. В сущности, ведь о вращении Земли мы узнаем, наблюдая лишь за поведением маятника (так называемого «маятника Фуко»). Нам вовсе не нужно для этого «выглядывать наружу», т. е. смотреть на звезды, например.

Следующей в нашем списке стоит очень интересная симметрия. Это *обращение времени*. На первый взгляд кажется, что оно неверно, что физические законы не могут быть обращены. Ведь всем ясно, что в нашем обычном масштабе явления необратимы.

«Скользит по бумаге перо,  
За строчкой написанной — новая строчка...»

Насколько нам сейчас известно, причиной этой необратимости является огромное число частиц, принимающих участие в обычных процессах. Но если бы мы видели отдельные

молекулы, то не могли бы сказать, работает ли вся машина вперед или назад. Поясним, что мы имеем в виду: построим такой прибор, в котором нам известно, что делает каждый из атомов (мы можем наблюдать за всеми их проделками). Построим теперь второй, точно такой же прибор, но запустим его в обратную сторону, т. е. установим его в конечном положении, а все скорости изменим на противоположные. После этого мы увидим *в точности то же самое движение*, но только все будет происходить *в обратной последовательности*. Возьмем другой пример. Предположим, что мы засняли на киноленту какой-то процесс, происходящий с веществом, и запустили пленку задом наперед. Тогда ни один из физиков не мог бы сказать: «Это противоречит физическим законам, происходит что-то не то». Если деталей не видно, то все становится совершенно ясно. Например, когда на тротуар падает яйцо и разбивается вдребезги, то вы сразу скажете: «Этот процесс необратим; если мы заснимем его на киноленту и прокрутим ее наоборот, то яйцо само соберется в скорлупу, которая тут же склеится обратно, а это бессмыслица!» Но если мы видим отдельные атомы, то все кажется нам полностью обратимым. Открыть эту симметрию было, конечно, гораздо труднее, чем другие, но все-таки то, что фундаментальные законы физики, управляющие атомами и молекулами, обратимы во времени, по-видимому, верно.

### § 3. Симметрия и законы сохранения

Даже на этом уровне симметрии физических законов очень увлекательны, но оказывается, что они куда более интересны и удивительны при переходе к квантовой механике. Факт, причину которого я не могу вам объяснить с вашим запасом знаний, но который до сих пор потрясает большинство физиков своей глубиной и красотой, состоит в следующем: в квантовой механике *каждой из симметрий соответствует закон сохранения* — существует вполне определенная связь между законами сохранения и симметриями физических законов. Сейчас мы можем только это констатировать, не пытаюсь вдаваться в объяснения.

Оказывается, например, что симметрия законов физики по отношению к переносу в пространстве вместе с принципами квантовой механики означает *сохранение импульса*.

То, что законы симметричны при перемещении во времени, означает в квантовой механике *сохранение энергии*.

Неизменность (инвариантность) при повороте на фиксированный угол в пространстве соответствует *сохранению момента количества движения*. Среди наиболее мудрейших и удивительных

тельнейших вещей в физике эти связи — одни из самых интересных и красивых.

В квантовой механике, кроме того, возникают некоторые симметрии, которые, к несчастью, не имеют классического аналога; их нельзя описать методами классической физики. Вот одна из них. Если  $\psi$  — это амплитуда некоторого процесса или чего-то другого, то, как мы знаем, квадрат ее абсолютной величины будет вероятностью этого процесса. Пусть теперь некто сделал свои вычисления, используя не  $\psi$ , а  $\psi'$ , которая отличается от  $\psi$  только по фазе [т. е. прежняя  $\psi$  умножается на  $\exp(i\Delta)$ , где  $\Delta$  — какая-то постоянная], тогда квадрат абсолютной величины  $\psi'$ , который тоже будет вероятностью события, равен квадрату абсолютной величины  $\psi$ :

$$\psi' = \psi e^{i\Delta}, \quad |\psi'|^2 = |\psi|^2. \quad (52.1)$$

Следовательно, физические законы не изменяются от того, что мы сдвигаем фазу волновой функции на некоторую произвольную постоянную. Это еще одна симметрия. Природа физических законов такова, что сдвиг квантовомеханической фазы не изменяет их. В начале этого параграфа мы говорили, что в квантовой механике каждой симметрии соответствует закон сохранения. И вот оказывается, что закон сохранения, связанный с квантовомеханической фазой, не что иное, как *закон сохранения электрического заряда*. Словом, это удивительнейшая вещь!

#### § 4. Зеркальное отражение

Перейдем к следующему вопросу, который будет занимать нас до конца главы, — это симметрия при *отражении в пространстве*. Проблема заключается в следующем: симметричны ли физические законы при отражении? Можно ее сформулировать и по-другому. Предположим, что мы построили некое устройство, например часы с множеством колесиков, стрелок и пр. Они идут, внутри у них есть устройство для заводки. Посмотрим теперь на часы в зеркало. Дело не в том, как они *выглядят* в зеркале. Нет, давайте *построим* другие часы, в точности такие же, как те первые, отраженные в зеркале. Там, где у первых часов находится винт с правой резьбой, мы поставим винт с левой резьбой, там, где на циферблате стоит цифра «XII», мы на циферблате вторых часов нарисуем «IХ», каждая спиральная пружина закручена в одну сторону у первых часов и в противоположную у зеркально отраженных. Когда все будет закончено, получатся двое часов, каждый из которых будет точным зеркальным отражением других, хотя заметьте, что и те и другие настоящие физические материальные объекты. Возникает вопрос: а что, если и те и другие

часы запущены при одинаковых условиях, если пружины их закручены одинаково туго, будут ли они идти и тикать, как точное зеркальное отражение? (Это чисто физический, а вовсе не философский вопрос.) Наша интуиция и наше знание физических законов подсказывают, что *будут*.

Мы подозреваем, что по крайней мере в этом случае отражение будет одной из симметрий физических законов, т. е. если заменить «право» на «лево», а все остальное оставить тем же самым, то никакой разницы при этом мы обнаружить не сможем. Предположим на минуту, что все это верно. Тогда никакими физическими явлениями невозможно различить, где «право», а где «лево», точно так же, как, скажем, никаким физическим опытом невозможно найти абсолютной скорости движения. Таким образом, с помощью каких-то опытов невозможно абсолютно определить, что мы понимаем под «правым», как противоположностью «левого», поскольку все физические законы должны быть симметричны.

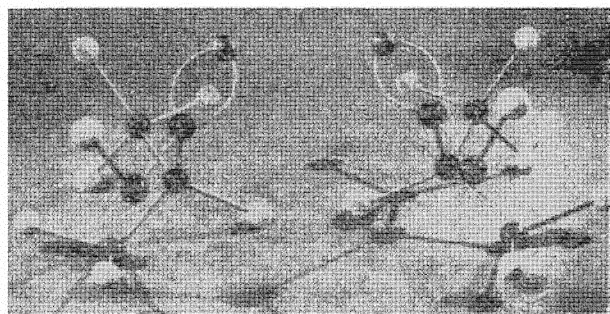
Разумеется, мир наш *не должен* быть симметричным. Если, например, взять то, что мы называем «географией», то здесь вполне можно определить, где правая сторона. Пусть мы находимся в Нью-Орлеане и смотрим в сторону Чикаго. Тогда Флорида будет от нас справа (конечно, если мы стоим ногами на Земле!). Так что в географии можно определить, где «право» и где «лево». В любой системе реальное положение не должно иметь ту симметрию, о которой идет речь, вопрос в том — симметричны ли законы? Другими словами, *противоречит ли физическим законам наличие подобного Земле шара с левосторонней поверхностью* и человеком, подобным нам, смотрящим в сторону города, подобного Чикаго, с места, подобного Нью-Орлеану, но со всем остальным, перевернутым наоборот, так что Флорида у него будет уже с другой стороны? Ясно, что такая ситуация не кажется невозможной, физическим законам не противоречит такая замена всего левого на правое.

Еще одно обстоятельство: наше определение «правой» стороны не должно зависеть от истории. Иначе было бы очень просто отличить «левое» от «правого» — пойти в магазин запчастей и наугад взять какой-нибудь болт. Вообще говоря, у нас в руках не обязательно окажется «правый болт», но все же более вероятно, что он будет именно правым, а не левым. Но это вопрос истории, или условностей, или общего положения вещей, а не фундаментальных законов. Ведь кто-то может начать выпускать болты с левой резьбой.

Таким образом, нам нужно поискать какие-то другие явления, где бы «правое» входило более фундаментальным образом. Рассмотрим следующую возможность. Известно, что поляризованный свет, пропущенный через сахарный раствор,

поворачивает свою плоскость поляризации. Как мы видели в гл. 33 (вып. 3), плоскость поляризации при определенной концентрации сахара поворачивается направо. Казалось бы, мы нашли способ определения «правой стороны», потому что, растворив в воде некоторое количество сахара, мы можем повернуть плоскость поляризации вправо. Но сахар получается из живых организмов, а если мы сделаем его искусственно, то обнаружим, что он *не поворачивает* плоскости поляризации. Если в этот искусственный сахар, который не поворачивает плоскости поляризации, напустить бактерий (они съедают некоторое количество сахара) и затем отфильтровать их, то обнаружится, что, хотя сахар остался (почти половина первоначального количества), и он поворачивает плоскость поляризации, но теперь уже *в другую сторону!* Этот факт кажется очень обескураживающим, однако его можно легко объяснить.

Приведем другой пример. Одно из веществ, общее для всех живых существ, основа жизни — это белки (протеин). Белок состоит из цепочек аминокислот. На фиг. 52.1 показана модель аминокислоты, выделенной из белка. Эта кислота названа аланином, и на фиг. 52.1 (*слева*) показано расположение атомов в молекуле аланина, выделенного из белка живых существ. Если же мы попытаемся создать аланин из двуокиси углерода, этана и аммиака (что в самом деле *можно* сделать — это не столь уже сложная молекула), то обнаружим, что получились не только такие молекулы, но и другие, подобные показанной на фиг. 52.1 (*справа*), причем в равных количествах! Первые молекулы, те, которые произошли от живых существ, называются *L-аланином*. Другие же, одинаковые с ним химически в том смысле, что состоят из тех же атомов с теми же связями между ними, образуют «правосторонние» молекулы, которые в отличие от «левосторонних» молекул *L-аланина* называют *D-аланином*. Интересно, что если мы будем готовить аланин в лаборатории из простых газов, то



Фиг. 52.1. Модели молекул аланина. Слева — *L-аланин*; справа — *D-аланин*.



получится смесь обоих сортов в равных количествах. Жизнь, однако, использует только *L*-аланин. (Но не без исключения, конечно: то там, то здесь в живых существах встречается и *D*-аланин, однако эти случаи очень редки. Во все белки входит исключительно *L*-аланин.) Если мы приготовим оба сорта и будем этой смесью кормить животных, которые любят «есть» его (т. е. усваивают аланин), то окажется, что они не смогут использовать *D*-аланин, а «съедят» только *L*-аланин. В результате получится то же, что и с нашим сахаром; после того как бактерии «съедят» тот сахар, который им нравится, остается только «ненастоящий» сорт! (Левосторонний сахар тоже сладкий, а все же не такой, как настоящий, правосторонний!)

Итак, похоже, что явления жизни позволяют отличить «правую» сторону от «левой», поскольку две молекулы химически отличны одна от другой. И все-таки — нет, не могут! Пока мы занимались физическими измерениями, подобными определению энергий или скоростей химических реакций и т. д., эти два сорта вели себя совершенно одинаковым образом, если, разумеется, все остальное тоже было зеркально отражено. Одни молекулы поворачивают свет направо, а другие, проходя то же количество раствора, — налево на точно ту же величину. Таким образом, с точки зрения физики можно использовать любую из этих двух аминокислот. Насколько мы понимаем основу вещей сегодня, уже в уравнении Шредингера заложено, что две молекулы должны вести себя в точности одинаковым образом, хотя там, где у одной правая сторона, у другой — левая. Но в природе тем не менее все устроено только одним способом!

Как полагают, причина этого состоит в следующем. Представьте себе, например, что в один прекрасный момент возникли такие условия, что все белки у каких-то существ содержали только левосторонние аминокислоты. Это привело к тому, что все на свете «перекосилось», «перекосились» все вещества в живых клетках, «перекосились» все ферменты — все стало несимметричным. Когда пищеварительные ферменты пытались сменить химию своей пищи с одного сорта на другой, то один сорт пищи «подходил» им, а другой — нет (совсем как золушкин башмачок, с тем исключением, что мы меряем его на «левую ногу»). Насколько нам известно сейчас, в принципе возможно создать такую лягушку, у которой, например, каждая молекула окажется «перевернутой», т. е. создать точное зеркальное отражение настоящей лягушки, так сказать, «левостороннюю» лягушку. Некоторое время эта «левосторонняя лягушка» чувствовала бы себя вполне нормально, но не смогла бы найти себе пищи: если бы она проглотила муху, то ее ферменты не способны были бы перева-

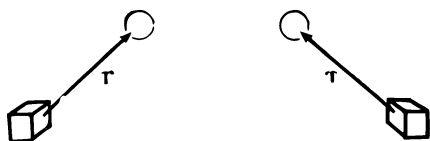
ритель ее. Ведь муха-то настоящая, с правосторонней аминокислотой (разумеется, если мы не разведем специально для нашей лягушки «левосторонних мух»). И так, насколько нам сегодня известно, химические и жизненные процессы, если бы мы все «перевернули», протекали бы точно так же, как и сейчас.

Если жизнь — полностью физико-химическое явление, то факт «закрученности» всех белков только в одном направлении можно понять лишь с той точки зрения, что с самого начала совершенно случайно победил какой-то один сорт молекул. Где-то однажды органическая молекула как-то «перекосилась», и правая сторона оказалась выделенной; какой-то случай в истории создал одностороннюю ситуацию, и с тех пор «перекос» разрастался все шире и шире. Но, возникнув однажды, ситуация, которую мы наблюдаем сейчас, будет продолжаться вечно: все ферменты переваривают и готовят только «правосторонние» вещества. Когда в листья растений входит углекислый газ, водяной пар и другие вещества, то ферменты, приготовляющие из них сахар, делают его правосторонним, ибо они сами правосторонние. Если бы в более позднее время возник какой-то новый сорт вирусов или каких-то других живых существ, то они смогли бы выжить только, если оказались бы способны питаться уже существующими органическими веществами. А, стало быть, и сами они должны быть того же сорта.

Для правосторонних молекул не существует закона сохранения их числа. Жизнь может только увеличивать его. Предположение, таким образом, состоит в том, что жизненные явления говорят нам не об отсутствии симметрии физических законов, а, наоборот, об универсальности природы и общности начала всех живых созданий на Земле в описанном выше смысле.

## § 5. Полярный и аксиальный векторы

Пойдем дальше. Вы видели, что в физике имеется масса примеров применимости правила правой и левой руки. В самом деле, когда мы изучали векторный анализ, то узнали о правиле правой руки, которым необходимо пользоваться, чтобы получить правильный момент количества движения и момент силы, магнитное поле и т. п. Например, сила, действующая на заряд в магнитном поле, равна  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Но представьте себе такое положение: пусть мы знаем  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ . Как из этого узнать, где у нас правая сторона? Если вернуться назад и посмотреть, откуда произошли векторы, то увидим, что правило правой руки — просто соглашение, своего рода трюк. В самом начале такие величины, как угловая скорость,



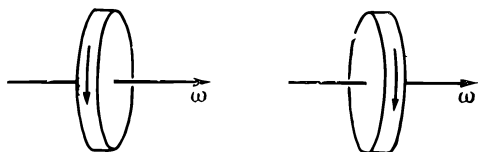
Фиг. 52.2. Отрезок в пространстве и его зеркальное отражение.

момент количества движения и другие, подобные им, в действительности вообще не были настоящими векторами! Все они каким-то образом связаны с определенными плоскостями, и только благодаря тому, что наше пространство трехмерно, эти величины можно связать с направлением, перпендикулярным данной плоскости. Мы же из двух возможных направлений выбрали правое.

Представьте себе, что какой-то озорной чертик, решив подшутить над физиками, пробрался во все лаборатории и всюду заменил слово «правое» на «левое». И в результате, где было написано правило правой руки, мы вынуждены были бы пользоваться правилом левой руки. Ну что ж, физики бы просто не заметили этого, ибо ни к какому изменению в физических законах это бы не привело, разумеется, если физические законы симметричны.

Покажем это на примере. Вы знаете, что существуют два сорта векторов. Имеются обыкновенные, «настоящие» векторы, подобные, например, отрезку расстояния  $\Delta r$  в пространстве. Пусть в нашей аппаратуре что-то находится «здесь», а нечто другое — «там», тогда те же самые «что-то» будут присутствовать и в зеркально отраженной аппаратуре. Если мы в обоих случаях проведем векторы от «сюда» до «туда», то один вектор будет отражением другого (фиг. 52.2), причем направление стрелки вектора точно, как и все пространство, «выворачивается наизнанку». Такие векторы мы называем *полярными*.

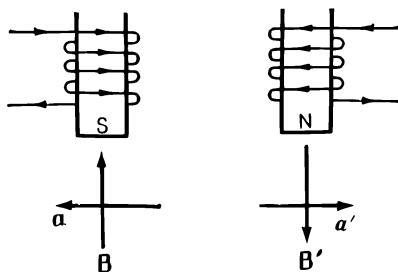
Но второй сорт векторов, связанных с вращением, имеет совсем другую природу. Представьте себе нечто вращающееся в трехмерном пространстве (фиг. 52.3). Если посмотреть на это в зеркало, то вращение будет происходить так, как показано на рисунке, т. е. как зеркальное изображение первоначального вращения. Условимся теперь представлять зеркальное вращение с помощью того же самого правила. В результате мы получили «вектор», который в отличие от



Фиг. 52.3. Вращающееся колесо и зеркальное отражение.

Заметьте, что направление «вектора» угловой скорости не изменяется.

Фиг. 52.4. Электромагнит и его зеркальное отражение.



полярного вектора *не* изменяется при отражении и оказывается перевернутым по отношению к полярному вектору и геометрии всего пространства. Такой вектор мы называем *аксиальным*.

Если физический закон симметрии относительно отражения правилен, то уравнения должны быть устроены так, чтобы при изменении знака каждого аксиального вектора и каждого векторного произведения (что соответствует отражению) ничего не произошло. Например, когда мы пишем формулу для момента количества движения  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , то здесь все в порядке, потому что при переходе в левую систему координат мы изменяем знак  $\mathbf{L}$ , а знак  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$  не изменяется. Кроме того, изменится и векторное произведение, поскольку мы должны правило правой руки заменить правилом левой руки. Возьмем другой пример. Известно, что сила, действующая на заряд в магнитном поле, равна  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , но если мы от правой системы перейдем к левой, то, поскольку, как известно,  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{v}$  — полярные векторы, изменение знака из-за наличия векторного произведения должно компенсироваться изменением знака  $\mathbf{B}$ , а это означает, что  $\mathbf{B}$  должен быть аксиальным вектором. Другими словами, при таком отражении  $\mathbf{B}$  должен переходить в  $-\mathbf{B}$ . Таким образом, если мы изменяем левые координаты на правые, то одновременно нужно северный полюс магнита изменить на южный.

Давайте посмотрим на примере, как это все получается. Пусть у нас имеются два магнита, похожих на изображенные на фиг. 52.4. Один из магнитов выглядит в точности так, как зеркальное отражение другого, т. е. витки его накручены в другую сторону, и все, что происходит внутри катушки, должно быть в точности обращено в другую сторону; ток течет, как это показано на рисунке. Теперь из законов магнетизма (которые вы хотя еще и не знаете официально, но, по-видимому, помните из школьного курса) получается, что магнитное поле направлено так, как это показано на рисунке. Там, где у первого магнита южный полюс, у другого магнита будет северный, ибо у него ток течет в другую сторону,

а магнитное поле перевернуто. Таким образом, выходит, что при переходе от правой системы к левой мы действительно должны заменить северный полюс на южный!

Но северный и южный полюсы — это просто договоренность, и замена их еще ничего не означает. Давайте посмотрим на само *явление*. Предположим, что электрон движется от нас через магнитное поле перпендикулярно плоскости страницы. Тогда, если воспользоваться формулой для силы  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  (не забудьте, что электрон отрицательный!), мы получим, что в соответствии с этим физическим законом электрон должен отклоняться в указанном направлении. Таким образом, явление заключается вот в чем. Если в катушке в определенном направлении течет ток, то электрон как-то отклоняется. Это и есть физика, и неважно, как мы будем называть все по дороге.

А теперь сделаем тот же опыт с зеркально отраженным магнитом: пошлем электрон в соответствующем направлении. Теперь на него будет действовать обратная сила. Вычислив ее по тем же правилам, мы получим правильный результат: соответствующее *движение* будет зеркальным отражением предыдущего!

### § 6. *Какая же рука правая?*

Дело в том, что существует один интересный факт: в любом явлении правило правой руки всегда встречается два или вообще четное число раз, и в результате любое явление всегда выглядит симметричным. Короче говоря, раз мы не можем отличить северный полюс от южного, то не можем отличить и правую сторону от левой. Может показаться, что определить, где находится северный полюс магнита, очень просто. Северным концом магнитной стрелки компаса будет тот, который указывает на север. Но это опять локальное свойство, связанное с географией Земли, все равно, что указание, в какой стороне находится Чикаго, и поэтому не идет в счет. Если вы видели стрелку компаса, то, вероятно, заметили, что ее северный конец окрашен в какое-то подобие синего цвета. Но это уже дело рук человека, который окрасил стрелку. Так что все это — условные критерии.

Вот если бы магнит обладал тем свойством, что, посмотрев на него внимательно, мы бы обнаружили на его северном полюсе растущую бороду, которой нет на южном, и это было бы общим правилом, т. е. если бы существовал какой-то *единый* способ, позволяющий отличить северный полюс магнита от южного, то *это было бы концом симметрии при отражении*.

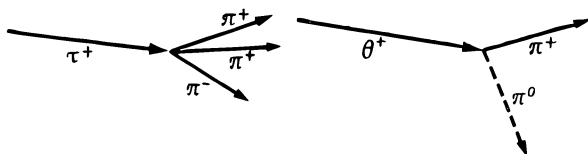
Чтобы яснее представить себе всю проблему в целом, вообразите, что вы разговариваете по радио с каким-то суще-

ством, находящимся очень далеко от вас. Мы не можем послать ему какой-нибудь образец, чтобы он его увидел; вот если бы мы, к примеру, могли послать пучок света, то мы послали бы свет, поляризованный по кругу в правую сторону, и сказали бы: «Обрати внимание на направление вращения поляризации этого света, мы называем его правым». Но мы не можем послать ему ничего подобного, а можем только говорить с ним. Наш собеседник находится очень, очень далеко, в каком-нибудь неизвестном мире, и не может видеть того, что видим мы. Мы не можем сказать: «Взгляни на Большую Медведицу. Смотри, как расположены ее звезды. Под правой стороной мы понимаем...» Мы можем только говорить с ним по радио.

Предположим, нам захотелось рассказать ему о себе. Ну, лучше всего начать с чисел: «Тик, тик — *два*, тик, тик тик, — *три*...», так что постепенно он выучит эти два слова, а потом больше. Спустя некоторое время вы настолько познакомитесь с ним, что он у вас спросит: «Послушай, приятель, а как ты выглядишь?» Вы начнете описывать себя и первым делом скажете: «Мой рост один метр 75». « Подожди, — скажет он, — что такое метр? » Можно ли объяснить ему, что такое метр? Конечно, можно! Вы скажете: «Тебе известен диаметр атома водорода, так вот, мой рост составляет 17 000 000 000 диаметров атома водорода!» Это возможно, ибо физические законы не инвариантны относительно изменения масштаба, а поэтому мы *можем* определить абсолютную длину. Итак, мы определили размер нашего тела; можно описать и общую форму тела: рассказать, что у нас есть конечности с пятью отростками на концах и т. д., и так без особых трудностей он из нашего описания поймет, как мы выглядим. Он даже может вылепить нашу модель и, поглядев на нее, сказать: «Э-э, да ты, приятель, совсем недурен. Но вот что у тебя внутри?» И мы начнем описывать ему наши внутренние органы, дойдем до сердца, тщательно опишем его форму и скажем: «Помести его в левую сторону груди». «Куда, куда? В левую сторону? А что это такое?» — удивится он. И вот как же описать ему, в какой стороне находится сердце, если он не может видеть то, что видим мы, и никогда не получал от нас ничего, что позволило бы ему понять, где же собственно левая сторона. Можно ли это сделать?

## § 7. Четность не сохраняется!

Оказывается, что законы тяготения, законы электричества и магнетизма, законы ядерных сил — все подчиняется принципу симметрии при отражении, так что ни эти законы, ни все, что получено из них, не может помочь нам. Однако



Ф и г. 52.5. Схематические диаграммы распадов  $\tau$ - и  $\theta$ -мезонов.

в природе было обнаружено явление, которое может происходить со многими частицами, и называется оно *бета-распадом*, или *слабым распадом*. Один из видов слабого распада, связанный с частицей, открытой в 1954 г., задал физикам трудную головоломку. Есть такая заряженная частица, которая распадается на три  $\pi$ -мезона, как это схематически показано на фиг. 52.5. Частицу эту временно назвали  $\tau$ -мезоном. На том же рисунке показана и другая частица, которая распадается на *два*  $\pi$ -мезона. По закону сохранения заряда один должен быть нейтральным. Эта частица была названа  $\theta$ -мезоном. Итак, у нас есть  $\tau$ -мезон, распадающийся на три  $\pi$ -мезона, и есть  $\theta$ -мезон, распадающийся на два  $\pi$ -мезона. Вскоре, однако, обнаружилось, что массы  $\tau$  и  $\theta$  почти равны друг другу, точнее, в пределах экспериментальных ошибок они просто равны. Более того, интервалы времени, через которые они распадались на  $3\lambda$  и на  $2\lambda$ , оказались почти одинаковыми: частицы жили одно и то же время. Кроме того, где бы они ни появлялись, они всегда рождаются в одной и той же пропорции, скажем 14%  $\tau$ -частиц и 86%  $\theta$ -частиц.

Кто подогадливей, тот сразу поймет, что здесь мы имеем дело с одной и той же частицей, т. е. что рождаются не две частицы, а всего лишь одна, которая может распадаться двумя различными способами. Поэтому мы получали один и тот же процент рождения (ведь это же просто процент, отражающий способы, которыми она распадается).

Однако квантовая механика из принципа симметрии при отражении позволяет доказать (сейчас я, к сожалению, не могу объяснить вам, как это делается), что совершенно *невозможно*, чтобы оба эти способа распада принадлежали одной частице: одна частица никак *не может* распадаться двумя различными способами. Закон сохранения, соответствующий принципу симметрии при отражении, не имеет аналога в классической физике, и этот специфический закон сохранения в квантовой механике был назван *законом сохранения четности*. Таким образом, вследствие закона сохранения четности, или, точнее, из симметрии квантовомеханических уравнений слабого распада относительно отражения, получалось, что одна и та же частица не может распасться

обоими способами, так что здесь мы встречаемся с каким-то удивительным совпадением в массах, временах жизни и т. д. Но чем больше изучалось это явление, тем более удивительным становились совпадения и постепенно росло подозрение в несправедливости фундаментального закона симметрии природы относительно отражения.

Это кажущееся нарушение побудило физиков Ли и Янга предложить поставить другие эксперименты и проверить, будет ли закон сохранения четности выполняться в других родственных распадах. Первый такой эксперимент выполнила Ву в Колумбийском университете. Заключался он в следующем. Оказывается, что у кобальта, который является хорошим магнетиком, существует изотоп, распадающийся с испусканием электронов. Поместим его в очень сильное магнитное поле при очень низкой температуре, так чтобы тепловые колебания не слишком сильно сбивали атомные «магнетики», тогда все они «выстроятся» вдоль магнитного поля. Таким образом, все атомы кобальта «выстраиваются» в этом сильном поле одинаковым образом. Потом они распадаются, испускают электроны, и вот оказалось, что когда атомы «выстраиваются» в магнитном поле с направленным вверх вектором  $\mathbf{B}$ , то большинство электронов летит вниз.

Тому, кто не очень «на ты» с миром физики, это замечание мало что говорит, однако тот, кого волнуют тайны природы, увидит, что это наиболее удивительное открытие нашего времени. Если поместить атомы кобальта в очень сильное магнитное поле, то вылетевшие электроны более охотно летят вниз, чем вверх. Поэтому если бы мы отразили этот опыт в зеркале так, чтобы атомы кобальта были «выстроены» наоборот, т. е. вверх, то они бы испускали свои электроны *вверх*, а не *вниз*, и *симметрия исчезла бы*.

Теперь мы знаем, что южный полюс магнита это тот, от которого летят  $\beta$ -распадные электроны; таким образом, физически возможно отличить северный полюс от южного.

После этого было сделано множество других экспериментов: распад  $\pi$ -мезона на  $\mu$  и  $\nu$ , распад  $\mu$ -мезона на электрон и два нейтрино, распад  $\Lambda$ -частицы на протон и  $\pi$ -мезон, распад  $\Sigma$ -частицы и много других распадов. И почти во всех тех случаях, где этого можно было ожидать, обнаружено *отсутствие* принципа зеркальной симметрии! Фундаментальный закон физики — закон симметрии при отражении — оказался на этом уровне несправедливым.

Короче говоря, теперь мы уже могли бы объяснить нашему приятелю из космоса, где у нас расположено сердце. «Послушай, — сказали бы мы ему, — сделай себе магнит, намотай на него проволоку и пусти по ней ток. Затем возьми кусок кобальта, охлади его до низкой температуры. Расположи все



устройство так, чтобы испущенные электроны летели от ног к голове, тогда направление тока в катушке скажет тебе, какую сторону мы называем правой, а какую — левой: ток входит с правой стороны и выходит с левой». Итак, с помощью эксперимента такого рода можно определить, где правая, а где левая сторона.

Было предсказано множество других свойств. Оказалось, например, что спин, т. е. угловой момент, или момент количества движения ядра кобальта, до распада равен пяти единицам  $\hbar$ , а после распада — четырем. Половину этого момента количества движения уносит электрон, а половину — нейтрино. Нетрудно теперь сообразить, что момент количества движения, уносимый электроном, должен быть направлен по линии его движения, как и момент количества движения нейтрино. Казалось, что электрон вертится справа налево; это тоже было проверено. Сделано это было прямо здесь в КАЛТЕХ'е. Бем и Валстра, поставившие эксперимент, обнаружили, что электрон действительно крутится налево. (Были и другие эксперименты, дававшие противоположный ответ, но они оказались неверными!)

Следующей задачей было нахождение правила нарушения закона сохранения четности. Есть ли какое-нибудь правило, говорящее нам, насколько велико должно быть это нарушение? Оно оказалось следующим: нарушение происходит только в очень медленных реакциях, названных слабыми распадами, и если уж оно произошло, то частицы, уносящие спин, такие, как электрон или нейтрино, вылетают, преимущественно вращаясь налево. Это как бы «правило перекоса», оно связывает полярный вектор скорости и аксиальный вектор момента количества движения и говорит, что моменту количества движения более присуще направление против вектора скорости, нежели по нему.

Таково правило, но мы еще не очень понимаем всех его «почему» и «поэтому». *Почему справедливо именно это правило, в чем его фундаментальная причина и как оно связано с другими явлениями?* Сейчас мы настолько потрясены самим фактом несимметрии мира, что до сих пор еще не можем оправиться и понять, как же оно отразится на всех остальных правилах. Тем не менее проблема эта интересная, животрепещущая и, увы, до сих пор не решенная. Поэтому сейчас самое время обсудить вопросы, связанные с этим правилом.

## § 8. Антивещество

Когда исчезает одна из симметрий, то первым делом нужно немедленно обратиться к списку известных или предположенных симметрий и посмотреть, не может ли еще

нарушиться какая-то из них. Мы не упоминали еще об одной операции из нашего списка, а именно к ней наш вопрос относится в первую очередь — это отношение между веществом и антивеществом. Дирак предсказал, что в дополнение к электронам в мире должны существовать другие частицы, называемые позитронами (открытые Андерсоном в КАЛТЕХ'е), и они тесно связаны с электронами. Все свойства этих двух частиц подчиняются определенным правилам соответствия: энергии их равны, массы равны, заряды противоположны, но самое важное, столкнувшись, они могут уничтожить друг друга (аннигилировать), превратив всю свою массу в энергию, например  $\gamma$ -излучение. Позитрон называется *античастицей* электрона, и эти свойства являются основными свойствами частицы и ее античастицы. Из рассуждений Дирака было ясно, что у всех остальных частиц тоже должны быть соответствующие античастицы. Например, наряду с протоном должен существовать и антипротон, который сейчас обозначается символом  $\bar{p}$ . У него должен быть отрицательный электрический заряд, та же, что и у протона, масса и т. д. Однако наиболее важным свойством является, то, что протон и антипротон, столкнувшись, могут уничтожить друг друга. Я особенно подчеркиваю это потому, что люди обычно удивляются, когда говоришь, что наряду с нейтроном существует и антинейтрон; они говорят: «Как антинейтрон может иметь противоположный заряд, ведь он нейтральный?» Приставка «анти» означает не просто противоположный заряд, частица характеризуется целым набором свойств, многие из которых становятся противоположными. Антинейтрон можно отличить от нейтрона следующим способом: если поместить рядом два нейтрона, они так и останутся двумя нейтронами, но если мы поместим рядом нейтрон и антинейтрон, то они уничтожат друг друга, причем выделяют большое количество энергии в виде разных л-мезонов,  $\gamma$ -квантов и т. п.

Далее, если у нас есть антипротоны, антинейтроны и позитроны\*, то из них в принципе можно составить антиатомы. Это еще не сделано, но в принципе вполне возможно. В атоме водорода, например, в центре расположен протон, вокруг которого крутится электрон. Вообразите теперь, что мы сделали антипротон и запустили вокруг него позитрон. Будет ли он крутиться? Ну прежде всего антипротон заряжен отрицательно, а позитрон — положительно, так что они будут притягиваться друг к другу с соответствующей силой, а поскольку массы у них одинаковы с протоном и электроном, то

---

\* Сейчас уже научились делать еще два антиядра: антитритий и антиизотоп гелия: анти He<sup>3</sup>. — *Прим. ред.*

одинаково будет и все остальное. В этом состоит один из принципов симметрии в физике: уравнения, по-видимому, говорят нам, что если сделать одни часы из вещества, а другие, точно такие же, из антивещества, то они будут идти совершенно одинаково. (Разумеется, если мы поместим эти часы рядом, то они уничтожат друг друга, но это уже совсем другое дело.)

Тогда немедленно возникает вопрос: «можно ли сделать двое часов из вещества, причем одни «правосторонние», а другие «левосторонние»? Можно, скажем, сделать не простые часы, а часы с кобальтом, магнитами и детекторами, регистрирующими  $\beta$ -распадные электроны и считающими их. Всякий раз, когда регистрируется электрон, секундная стрелка слегка подвигается. Но тогда зеркально отраженные часы, в которые приходит меньше электронов, не будут идти с той же скоростью. Итак, теперь нам ясно, что возможно построить такую пару часов, что правосторонние не будут согласовываться с левосторонними. Давайте сделаем часы из вещества и назовем их стандартными, или правосторонними, и сделаем еще часы тоже из вещества и назовем их левосторонними. Мы только что установили, что эти двое часов, вообще говоря, *не* будут идти одинаковым образом, а до этого выдающегося открытия в физике считалось, что будут. Далее мы, кроме того, полагали, что вещество и антивещество эквивалентны, т. е. если бы мы сделали часы из антивещества, такие же правосторонние, той же самой формы, то они шли бы точно так же, как и правосторонние часы из вещества, а если бы мы сделали такие же левосторонние часы, то и они тоже ходили бы точно таким же образом. Другими словами, первоначально мы полагали, что *все четверо* таких часов должны работать совершенно одинаково. Но теперь мы знаем, что правосторонние и левосторонние часы из вещества не одинаковы. А следовательно, право- или левосторонние часы из антивещества тоже, по-видимому, не одинаковы.

Теперь возникает очевидный вопрос: есть ли пара часов, которые идут одинаково? Иначе говоря, ведет ли себя правостороннее вещество так же, как правостороннее антивещество? Или же правостороннее вещество ведет себя так же, как левостороннее антивещество? Эксперименты с  $\beta$ -распадом, но не с электронным, а с позитронным  $\beta$ -распадом, указывают, что эта связь такова: «правое» вещество ведет себя точно так же, как «левое» антивещество.

Итак, в конечном счете право-левая симметрия все же реабилитирована! Если мы изготовим левосторонние часы, но изготовим их из материала совершенно другого рода — из антивещества, а не из вещества, то они будут идти точно таким же образом. В итоге произошло вот что: вместо двух независимых правил в нашем списке симметрий мы получили

одно новое комбинированное правило, гласящее, что правостороннее вещество симметрично с левосторонним антивеществом.

Таким образом, если наш приятель из космоса сделан из антивещества и мы даем ему указания, как сделать нашу «правостороннюю» модель, то он, разумеется, сделает все наоборот. Что произошло бы, если бы после долгих переговоров мы научились друг у друга строить космические корабли и договорились бы о встрече где-то в космическом пространстве, на полпути между нами? Разумеется, мы бы предварительно рассказали друг другу о своих обычаях и прочем, и вот наконец вы спешите навстречу, чтобы пожать ему руку. Но будьте внимательны. Если он протянет вам левую руку — берегитесь!

### § 9. Нарушенная симметрия

А что нам делать с законами, которые только *приблизительно* симметричны? Самое удивительное здесь то, что в широкой области важнейших явлений — ядерные силы, электромагнитные явления и даже некоторые слабые взаимодействия типа гравитации, словом, все законы в широчайшей области физики оказываются симметричными. Но, с другой стороны, вдруг всплывает какое-то слабенькое явление и говорит: «Нет, не все на свете симметрично!» Но как могло случиться, что природа почти симметрична, а не абсолютно симметрична? Что нам с ней делать? Прежде всего давайте все-таки посмотрим, нет ли каких-то других примеров подобного рода? Да, такие примеры есть и даже не один. Например, ядерные части сил между протоном и протоном, между протоном и нейтроном или нейтроном и нейтроном в точности равны друг другу. Это некая новая симметрия — симметрия ядерных сил: в ядерных взаимодействиях протон и нейтрон вполне могут заменять друг друга. Но она, очевидно, не всеобщая симметрия, ибо между двумя нейтронами не существует электрического отталкивания, как между двумя протонами. Поэтому мы не можем *всегда* заменять протон нейтроном, это, вообще говоря, неверно, хотя и является хорошим приближением. Почему *хорошим*? Да потому, что ядерные силы гораздо больше электрических. Так, что это тоже «почти симметрия». Итак, подобные примеры все же есть и в других областях.

Нас всегда тянет рассматривать симметрию как некоего рода совершенство. Это напоминает старую идею греков о совершенстве кругов. Им было даже страшно представить, что планетные орбиты не круги, а только почти круги. Но между кругом и почти кругом разница немалая, а если гово-

ритель об образе мыслей, то это изменение просто огромно. Совершенство и симметрия круга исчезают, как только чуть-чуть исказить его. Деформируйте немного круг, и это будет концом его симметрии и совершенства. Спрашивается, почему же орбиты только *почти* круги? Это куда более трудный вопрос. Истинное движение планет, вообще говоря, должно происходить по эллипсам, но в течение веков благодаря приливным силам они превратились в почти окружности. Но везде ли есть подобная проблема? Если бы пути планет были действительно кругами, то проблема не требовала бы пространных объяснений — они просты. Но поскольку эти пути только почти круговые, то объяснить нужно очень многое. Результат же превращается в большую динамическую проблему, и теперь нам нужно объяснить, привлекая приливные силы или что-то еще, почему они приблизительно симметричны.

Итак, наша цель понять, откуда взялась симметрия. Почему природа столь близка к симметрии? По этому вопросу ни у кого нет никакой разумной мысли. Единственное, что я могу предложить вам, — это старое японское предание. В японском городе Никко есть ворота, которые японцы называют самыми красивыми воротами страны. Они были построены в период большого влияния китайского искусства\*. Это необычайно сложные ворота, со множеством фронтонов, изумительной резьбой и большим количеством колонн, на основании которых вырезаны драконьи головы, божества и т. п. Но, приглядевшись, можно заметить, что в сложном и искусном рисунке на одной из колонн некоторые из его мелких деталей вырезаны вверх ногами. В остальном рисунок полностью симметричен. Спрашивается, для чего это было нужно? Как говорит предание, это было сделано для того, чтобы боги не заподозрили человека в совершенстве. Ошибка была сделана намеренно, дабы не вызвать зависти и гнева богов.

Мы можем, вообще говоря, подхватить эту мысль и сказать, что истинное объяснение приблизительной симметрии мира состоит в следующем: боги сотворили свои законы только приближенно симметричными, чтобы мы не завидовали их совершенству!

---

\* Их построил архитектор и резчик Цингору в середине XVII века. — *Прим. ред.*

<b>Глава 26. Оптика. Принцип наименьшего времени . . .</b>	<b>5</b>
§ 1. Свет . . . . .	5
§ 2. Отражение и преломление . . . . .	7
§ 3. Принцип наименьшего времени Ферма . . . . .	9
§ 4. Применения принципа Ферма . . . . .	13
§ 5. Более точная формулировка принципа Ферма . . . . .	18
§ 6. Квантовый механизм . . . . .	20
<b>Глава 27. Геометрическая оптика . . . . .</b>	<b>22</b>
§ 1. Введение . . . . .	22
§ 2. Фокусное расстояние для сферической поверхности . . . . .	23
§ 3. Фокусное расстояние линзы . . . . .	28
§ 4. Увеличение . . . . .	30
§ 5. Сложные линзы . . . . .	32
§ 6. Аберрация . . . . .	33
§ 7. Разрешающая способность . . . . .	34
<b>Глава 28. Электромагнитное излучение . . . . .</b>	<b>37</b>
§ 1. Электромагнетизм . . . . .	37
§ 2. Излучение . . . . .	41
§ 3. Дипольный излучатель . . . . .	43
§ 4. Интерференция . . . . .	46
<b>Глава 29. Интерференция . . . . .</b>	<b>49</b>
§ 1. Электромагнитные волны . . . . .	49
§ 2. Энергия излучения . . . . .	51
§ 3. Синусоидальные волны . . . . .	52
§ 4. Два дипольных излучателя . . . . .	54
§ 5. Математическое описание интерференции . . . . .	58
<b>Глава 30. Дифракция . . . . .</b>	<b>63</b>
§ 1. Результирующее поле $n$ одинаковых осцилляторов . . . . .	63
§ 2. Дифракционная решетка . . . . .	68
§ 3. Разрешающая способность дифракционной решетки . . . . .	72
§ 4. Параболическая антенна . . . . .	74
§ 5. Окрашенные пленки; кристаллы . . . . .	75
§ 6. Дифракция на непрозрачном экране . . . . .	77
§ 7. Поле системы осцилляторов, расположенных на плоскости . . . . .	80
<b>Глава 31. Как возникает показатель преломления . . . . .</b>	<b>85</b>
§ 1. Показатель преломления . . . . .	85
§ 2. Поле, излучаемое средой . . . . .	90
§ 3. Дисперсия . . . . .	93
§ 4. Поглощение . . . . .	97
§ 5. Энергия световой волны . . . . .	98
§ 6. Дифракция света на непрозрачном экране . . . . .	100

<b>Глава 32. Радиационное затухание. Рассеяние света . . .</b>	<b>103</b>
§ 1. Радиационное сопроствление . . . . .	103
§ 2. Интенсивность излучения . . . . .	105
§ 3. Радиационное затухание . . . . .	107
§ 4. Независимые источники . . . . .	109
§ 5. Рассеяние света . . . . .	112
<b>Глава 33. Поляризация . . . . .</b>	<b>118</b>
§ 1. Вектор электрического поля световой волны . . . . .	118
§ 2. Поляризация рассеянного света . . . . .	121
§ 3. Двойное лучепреломление . . . . .	121
§ 4. Поляризаторы . . . . .	125
§ 5. Оптическая активность . . . . .	127
§ 6. Интенсивность отраженного света . . . . .	128
§ 7. Аномальное преломление . . . . .	132
<b>Глава 34. Релятивистские явления в излучении . . . . .</b>	<b>136</b>
§ 1. Движущиеся источники . . . . .	136
§ 2. Определение «кажущегося» движения . . . . .	138
§ 3. Синхротронное излучение . . . . .	140
§ 4. Космическое синхротронное излучение . . . . .	144
§ 5. Тормозное излучение . . . . .	146
§ 6. Эффект Допплера . . . . .	147
§ 7. Четырехвектор ( $\omega$ , $k$ ) . . . . .	150
§ 8. Аберрация . . . . .	152
§ 9. Импульс световой волны . . . . .	154
<b>Глава 35. Цветовое зрение . . . . .</b>	<b>157</b>
§ 1. Человеческий глаз . . . . .	157
§ 2. Цвет зависит от интенсивности . . . . .	160
§ 3. Измерение восприятия цвета . . . . .	162
§ 4. Диаграмма цветности . . . . .	167
§ 5. Механизм цветового зрения . . . . .	170
§ 6. Физико-химические свойства цветового зрения . . . . .	173
<b>Глава 36. Механизм зрения . . . . .</b>	<b>176</b>
§ 1. Ощущение цвета . . . . .	176
§ 2. Физиология зрения . . . . .	180
§ 3. Палочки . . . . .	186
§ 4. Сложные глаза насекомых . . . . .	188
§ 5. Другие типы глаз . . . . .	192
§ 6. Нервные механизмы зрения . . . . .	194
<b>Глава 37. Квантовое поведение . . . . .</b>	<b>201</b>
§ 1. Атомная механика . . . . .	201
§ 2. Опыт с пулеметной стрельбой . . . . .	203
§ 3. Опыт с волнами . . . . .	205
§ 4. Опыт с электронами . . . . .	207
§ 5. Интерференция электронных волн . . . . .	209
§ 6. Как проследить за электроном? . . . . .	211
§ 7. Исходные принципы квантовой механики . . . . .	216
§ 8. Принцип неопределенности . . . . .	218
<b>Глава 38. Соотношение между волновой и корпускуляр- ной точками зрения . . . . .</b>	<b>221</b>
§ 1. Волны амплитуды вероятности . . . . .	221
§ 2. Измерение положения и импульса . . . . .	223

§ 3. Дифракция на кристалле . . . . .	228
§ 4. Размер атома . . . . .	231
§ 5. Уровни энергии . . . . .	233
§ 6. Немного философии . . . . .	235

#### ВЫПУСК 4

<b>Глава 39. Кинетическая теория газов . . . . .</b>	<b>239</b>
§ 1. Свойства вещества . . . . .	239
§ 2. Давление газа . . . . .	241
§ 3. Сжимаемость излучения . . . . .	247
§ 4. Температура и кинетическая энергия . . . . .	248
§ 5. Закон идеального газа . . . . .	255
<b>Глава 40. Принципы статистической механики . . . . .</b>	<b>259</b>
§ 1. Экспоненциальная атмосфера . . . . .	259
§ 2. Закон Больцмана . . . . .	262
§ 3. Испарение жидкости . . . . .	264
§ 4. Распределение молекул по скоростям . . . . .	266
§ 5. Удельные теплоемкости газов . . . . .	271
§ 6. Поражение классической физики . . . . .	275
<b>Глава 41. Броуновское движение . . . . .</b>	<b>279</b>
§ 1. Равнораспределение энергии . . . . .	279
§ 2. Тепловое равновесие излучения . . . . .	283
§ 3. Равномерное распределение и квантовый осциллятор . . . . .	289
§ 4. Случайные блуждания . . . . .	293
<b>Глава 42. Применения кинетической теории . . . . .</b>	<b>298</b>
§ 1. Испарение . . . . .	298
§ 2. Термоионная эмиссия . . . . .	304
§ 3. Тепловая ионизация . . . . .	305
§ 4. Химическая кинетика . . . . .	308
§ 5. Законы излучения Эйнштейна . . . . .	311
<b>Глава 43. Диффузия . . . . .</b>	<b>316</b>
§ 1. Столкновения молекул . . . . .	316
§ 2. Средняя длина свободного пробега . . . . .	320
§ 3. Скорость дрейфа . . . . .	322
§ 4. Ионная проводимость . . . . .	325
§ 5. Молекулярная диффузия . . . . .	327
§ 6. Теплопроводность . . . . .	331
<b>Глава 44. Законы термодинамики . . . . .</b>	<b>333</b>
§ 1. Тепловые машины; первый закон . . . . .	333
§ 2. Второй закон . . . . .	337
§ 3. Обратимые машины . . . . .	340
§ 4. Коэффициент полезного действия идеальной машины . . . . .	346
§ 5. Термодинамическая температура . . . . .	349
§ 6. Энтропия . . . . .	352
<b>Глава 45. Примеры из термодинамики . . . . .</b>	<b>358</b>
§ 1. Внутренняя энергия . . . . .	358
§ 2. Применения . . . . .	363
§ 3. Уравнение Клаузиуса — Клапейрона . . . . .	366



<b>Глава 46. Храповик и собачка</b>	372
§ 1. Как действует храповик	372
§ 2. Храповик как машина	374
§ 3. Обратимость в механике	378
§ 4. Необратимость	380
§ 5. Порядок и энтропия	382
<b>Глава 47. Звук. Волновое уравнение</b>	386
§ 1. Волны	386
§ 2. Распространение звука	390
§ 3. Волновое уравнение	391
§ 4. Решения волнового уравнения	395
§ 5. Скорость звука	396
<b>Глава 48. Биения</b>	399
§ 1. Сложение двух волн	399
§ 2. Некоторые замечания о биениях и модуляции	403
§ 3. Боковые полосы	405
§ 4. Локализованный волновой пакет	408
§ 5. Амплитуда вероятности частиц	412
§ 6. Волны в пространстве трех измерений	414
§ 7. Собственные колебания	416
<b>Глава 49. Собственные колебания</b>	419
§ 1. Отражение волн	419
§ 2. Волны в ограниченном пространстве и собственные частоты	422
§ 3. Двумерные собственные колебания	425
§ 4. Связанные маятники	429
§ 5. Линейные системы	432
<b>Глава 50. Гармоники</b>	434
§ 1. Музыкальные звуки	434
§ 2. Ряд Фурье	437
§ 3. Качество и гармония	439
§ 4. Коэффициенты Фурье	442
§ 5. Теорема об энергии	446
§ 6. Нелинейная реакция	447
<b>Глава 51. Волны</b>	452
§ 1. Волна от движущегося предмета	452
§ 2. Ударные волны	454
§ 3. Волны в твердом теле	459
§ 4. Поверхностные волны	465
<b>Глава 52. Симметрия законов физики</b>	471
§ 1. Симметричные операции	471
§ 2. Симметрия в пространстве и времени	472
§ 3. Симметрия и законы сохранения	476
§ 4. Зеркальное отражение	477
§ 5. Полярный и аксиальный векторы	481
§ 6. Какая же рука правая?	484
§ 7. Четность не сохраняется!	485
§ 8. Антивещество	488
§ 9. Нарушенная симметрия	491

2р.25к.