

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ  
С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ



• ФЕЙНМАН  
• ЛЕЙТОН  
• СЭНДС



ФЕЙНМАНОВСКИЕ



ЛЕКЦИИ



ПО ФИЗИКЕ

ЗАДАЧИ  
И УПРАЖНЕНИЯ  
С ОТВЕТАМИ  
И РЕШЕНИЯМИ



***THE FEYNMAN  
LECTURES  
ON PHYSICS***

**EXERCISES**

**ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC.  
READING, MASSACHUSETTS, PALO ALTO, LONDON  
1964—1965**

**Ф**ЕЙНМАНОВСКИЕ  
ЛЕКЦИИ  
ПО ФИЗИКЕ

**ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ  
С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ**

Перевод с английского,  
составление ответов и решений  
под редакцией  
А. П. Леванюка

**ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“**

**МОСКВА 1978**



Этот задачник можно рассматривать как дополнительный выпуск «Фейнмановских лекций по физике», последнее издание которых в русском переводе вышло в свет в издательстве «Мир» в 1976—1978 гг. В нем содержатся задачи с ответами и решениями по всем разделам общей физики. Идеи большинства задач были предложены основным автором лекций — лауреатом Нобелевской премии Р. Фейнманом. Задачи с решениями являются естественным дополнением к курсу лекций, но их можно использовать и независимо от него.

Книга рассчитана на преподавателей вузов, техникумов и средних школ, студентов и аспирантов, на руководителей школьных физических кружков. Часть материала можно использовать для подготовки к экзаменам при поступлении в физико-технические вузы.

*Редакция литературы по физике*

## **Предисловие**

В этой книге собраны задачи к «Фейнмановским лекциям по физике». Они предлагались студентам Калифорнийского технологического института (США), слушавшим лекции Р. Фейнмана. В оригинальном издании (содержащем только условия) составители задач к первому тому не указаны, но сообщается, что половина задач ко второму тому предложена Р. Фейнманом, а половина — преподавателями, проводившими семинарские занятия, большинство задач к третьему тому составлены М. Сэндсом, Р. Фейнманом, Дж. Пайком и Дж. Нойгенбауэром. В настоящем, как и в предыдущем русском издании, кроме условий задач даны также и их подробные решения.

Польза от любого задачника, в котором кроме условий есть и их решения, далеко не бесспорна. То же может быть сказано и о данной книге. Чтобы научиться физике, безусловно необходимо (хотя и недостаточно) решать задачи. Но их нужно именно решать, а не смотреть в решения. Эта книга едва ли поможет тем, кто не имеет времени (или не очень любит) подумать. Если студент или самостоятельно изучающий предмет не обладает ко всему прочему достаточной волей и самолюбием, он почти наверняка не устоит перед искушением посмотреть в решение, не попытавшись решить задачу сам. А жаль! Чтобы научиться думать так, как думают физики, нельзя обойтись без того, чтобы не «поломать голову». Как это ни удивительно, довольно многие не понимают, что цель обучения — не в том, чтобы узнать некий набор фактов и положений, а в том, чтобы научиться самостоятельно находить подход к решению физических проблем. В свете сказанного идеальным представляется случай, когда читатель смотрит в решение, приведенное в книге только после того, как получит свое собственное. Мы надеемся, что сравнение его решения с приведенным в книге будет полезным. Прежде всего для него — он может обнаружить, что понимает некоторые вопросы не так глубоко, как ему казалось, и, несомненно, захочет восполнить этот пробел. Кроме того, может оказаться, что его решение более удачно, чем приведенное в книге, — в этом случае он поможет улучшить ее следующее издание, если, конечно, напишет письмо в редакцию. Правда, задач слишком

много, чтобы решать их с начала и до конца. Поэтому иногда имеет смысл заглянуть в решение, не решая задачу полностью, лишь прикинув в уме, как ее можно решить.

Составители и редактор хотели бы выразить большую благодарность лицам, приславшим свои замечания по решениям и указания на ошибки, которых в предыдущем издании оказалось, увы, довольно много. Большое число замечаний и предложений прислал нам читатель из Ленинграда С. М. Заславский, некоторые из его решений использованы в настоящем издании. Весьма полезными оказались также замечания И. П. Базарова, Т. С. Величкиной, И. А. Яковлева, Ю. А. Янайта и многих других, перечислить которых не представляется возможным. Мы надеемся продолжить работу по улучшению решений и рассчитываем на дальнейшую помощь читателей.

Составление решений, а также их переработка при подготовке третьего издания задачника были проведены группой преподавателей Московского инженерно-физического института. Решения задач к первому тому лекций составлены В. И. Куштаном (гл. 1—21), Н. С. Работновым (гл. 26—30 и 32—38) и Ю. В. Конобеевым (гл. 22—25, 31, 39—50); решения ко второму и третьему томам — соответственно Ю. В. Конобеевым и Г. Я. Коренманом.

*А. Леванюк*

## УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



## Вып. 1

### СОВРЕМЕННАЯ НАУКА О ПРИРОДЕ ● ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

#### *К главе 1. Атомы в движении*

При решении приведенных ниже задач используйте идеи и методы, изложенные в первой главе «Лекций», а также ваш собственный опыт и воображение. О получении точных численных результатов особенно не заботьтесь.

1. 1. При обычных условиях воздух имеет плотность около  $0,001 \text{ г/см}^3$ , тогда как плотность жидкого воздуха примерно  $1 \text{ г/см}^3$ .
  - а) Оцените число молекул в  $1 \text{ см}^3$  газообразного и жидкого воздуха.
  - б) Оцените массу «молекулы воздуха».
  - в) Рассчитайте среднее расстояние, которое молекула воздуха проходит между двумя последовательными соударениями с другими молекулами при нормальном давлении и температуре. Это расстояние называется *средней длиной свободного пробега*.
  - г) Оцените давление, до которого необходимо откачать вакуумную систему, чтобы средняя длина свободного пробега в ней равнялась  $1 \text{ м}$ .
  
1. 2. В один из давних дней палеозойской эры капля послеполюденного ливня упала на мягкую ровную землю и оставила на ней отпечаток. Шло время, на этот отпечаток при раскопках наткнулся страдающий от жары и жажды студент-геолог. Осушая свою фляжку, он от нечего делать прикидывает, сколько молекул из той древней капли было в воде, которую он только что выпил. Оцените и вы число этих молекул, используя только те данные, которые вам уже известны. О деталях, не приведенных в условии задачи, сделайте сами разумные предположения.

1. 3. Действие происходит где-то в Калифорнии. На подоконнике возле раскрытого окна оставили стакан с водой.
  - а) Как вы думаете, сколько времени он так простоит, пока вода из него не испарится полностью?
  - б) Сколько молекул при этом будет испаряться с каждого квадратного сантиметра водной поверхности в секунду?
  - в) Существует ли связь, и если да, то какая, между ответом на вопрос (а) и среднегодовым количеством осадков?
1. 4. Если атомы, из которых состоят все тела, находятся в непрерывном движении, то за счет чего предметы сохраняют постоянную форму, иногда не меняясь очень подолгу (например, окаменелости)?
1. 5. Можете ли вы объяснить, почему не существует кристаллов с гранями в форме правильного пятиугольника? (Треугольники, квадраты и шестиугольники в кристаллических формах встречаются постоянно.)
1. 6. Как зависит давление газа  $P$  от числа атомов в единице объема  $n$  и  $\langle v \rangle$  — средней скорости атомов? Будет ли  $P$  прямо пропорционально  $n$  и  $\langle v \rangle$  или зависимость отличается от линейной?
1. 7. Если теплота есть не что иное, как движение молекул, то чем отличается горячий покоящийся бейсбольный мячик от холодного, но быстро движущегося?
1. 8. Объясните, почему и как трение между движущимися частями машины приводит к выделению тепла.
1. 9. Химики обнаружили, что молекулы резины состоят из длинных перекрещивающихся цепочек атомов. Объясните, почему кусок резины нагревается, если его растянуть.
- 1.10. Что случится с куском резины, на котором подвешен груз, если резину нагреть? (Проделайте сами такой опыт.)
- 1.11. Вам дано большое число стальных шариков равного диаметра  $d$  и сосуд известного объема  $V$ . Все габариты сосуда много больше диаметра шариков. Какое максимальное число шариков может поместиться в сосуде?

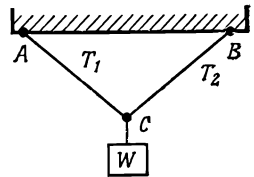


## К главе 4.

Решите следующие задачи, используя закон сохранения энергии и принцип виртуальной работы.

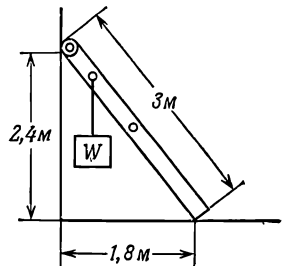
4. 1. Груз весом  $W = 50 \text{ кг}$  подвешен в средней точке проволоки  $ACB$ , как показано на рисунке;  $AC = CB = 5 \text{ м}$ ;  $AB = 5\sqrt{2} \text{ м}$ .

Найдите натяжения  $T_1$  и  $T_2$  проволоки.

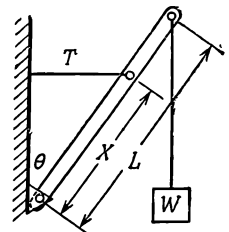


4. 2. Лестница длиной  $3 \text{ м}$  приставлена под углом к гладкой вертикальной стене. В верхнем ее конце имеются ролики (см. рисунок). Лестница весит  $12 \text{ кг}$ . На расстоянии  $0,75 \text{ м}$  от ее верхнего конца подвешен груз  $24 \text{ кг}$ . Найдите:

- а) силу, с которой ролики давят на стену;  
б) горизонтальную и вертикальную составляющие силы, с которой лестница давит на землю.



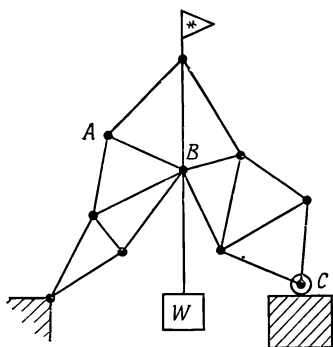
4. 3. Подъемное устройство состоит из однородного стержня длиной  $L$  и весом  $W$ ; устройство своим нижним концом шарнирно соединено со стенкой. С вертикально стержень образует постоянный угол  $\theta$  благодаря горизонтально натянутой проволоке, которая соединена со стержнем на расстоянии  $X$  от шарнира. Груз  $W$  подвешен к верхней точке стержня. Найдите натяжение  $T$  горизонтальной проволоки.



4. 4. Ферма состоит из легких алюминиевых стержней, концы которых шарнирно соединены друг с другом. В точке  $C$  ферма опирается на ролик, который может двигаться по гладкой плоскости. При сварке стержень  $AB$  нагревается,

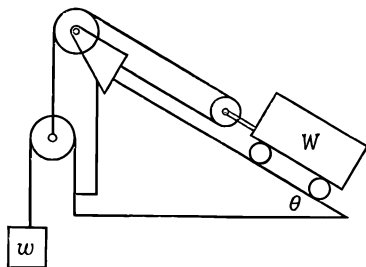
причем его длина увеличивается на величину  $x$ . В результате груз весом  $W$  смещается по вертикали на расстояние  $y$ .

а) Как направлено смещение груза  $W$  — вверх или вниз?

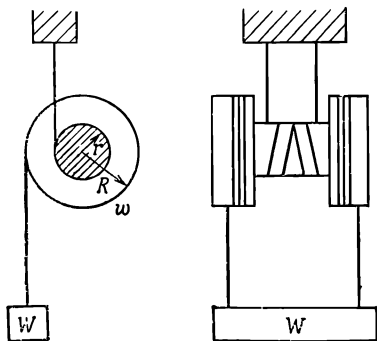


б) Какая сила действует на стержень  $AB$  (определить нужно и знак силы, т. е. растянут стержень или сжат)?

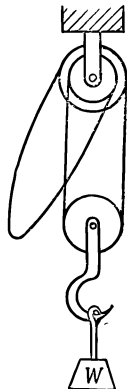
4. 5. Тележка удерживается на наклонной плоскости грузом весом  $w$ , подвешенным, как указано на рисунке. Трение во всех частях устройства пренебрежимо мало. Найдите вес тележки  $W$ .



4. 6. Вес катушки равен  $w$ , а ее большой и малый радиусы равны  $R$  и  $r$  соответственно. С помощью нитей, навитых по малому радиусу, катушка прикреплена к неподвижному бруску, а снизу к ней на нитях, навитых уже по большому радиусу, подвешен груз весом  $W$  (см. рисунок). Вес груза подобран так, что катушка находится в равновесии. Чему равен вес груза  $W$ ?



4. 7. В дифференциальном воротае, который схематически изображен на рисунке, используется цепь, каждый метр которой содержит  $N$  звеньев. Шкивы верхнего блока снабжены зубцами, которые продеваются в звенья цепи, причем шкив большего диаметра имеет  $n$  зубцов, а шкив меньшего диаметра  $n - 1$ . Трение в системе таково, что силы, необходимые для подъема или опускания груза  $W$ , отличаются в  $R$  раз. Предполагая, что трение от направления движения не зависит, найдите эти силы.

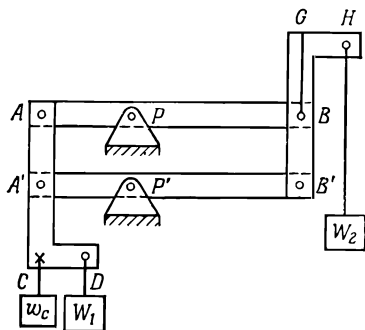


4. 8. Петля, сделанная из гибкой тяжелой цепи весом  $W$ , надетая на гладкий прямой круговой конус, высота которого  $h$ , а радиус основания  $r$ . Цепь покоится в горизонтальной плоскости (ось конуса направлена вертикально). Найдите натяжение цепи.
4. 9. Подвижная рама  $AA'BB'$  укреплена в вертикальной плоскости на шарнирах  $P$  и  $P'$  (см. рисунок). Трение во всех подвижных соединениях пренебрежимо мало. Все размеры жестких уголков  $AA'CD$  и  $BB'GH$  одинаковы; кроме того,

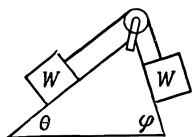
$$AP = A'P' = \frac{1}{2} PB = \frac{1}{2} P'B',$$

$$CD = GH = \frac{1}{2} AP.$$

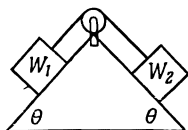
Благодаря противовесу  $w_c$  рама в отсутствие грузов  $W_1$  и  $W_2$  находится в равновесии. Если в точке  $D$  подвесить груз  $W_1$  весом  $0,5$  кг, то какой следует подвесить груз  $W_2$  в точке  $H$ , чтобы сохранить равновесие?



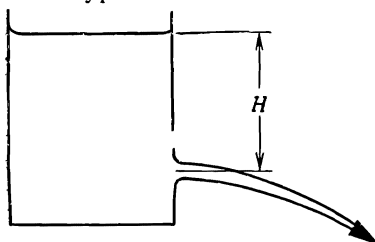
- 4.10. Через блок перекинута одинаковые грузы, которые опираются на абсолютно гладкие наклонные плоскости (см. рисунок). Если позволить грузам двигаться, какую скорость они приобретут, пройдя расстояние  $D$ ?



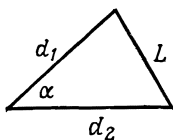
- 4.11. Два груза  $W_1$  и  $W_2$  разного веса ( $W_1 > W_2$ ) удерживаются в состоянии покоя на гладких наклонных плоскостях. Если позволить им двигаться, то какова будет их скорость после прохождения расстояния  $D$ ?



- 4.12. В бак с площадью поперечного сечения  $A$  налита жидкость плотности  $\rho$ . Жидкость свободно вытекает из небольшого отверстия, расположенного на расстоянии  $H$  ниже уровня жидкости. Площадь отверстия равна  $a$ . Если внутреннее трение (вязкость) в жидкости отсутствует, с какой скоростью она вытекает из отверстия?



- 4.13. Из решения приведенных выше задач должно быть ясно, что рассмотрение статического равновесия в отсутствие трения можно свести, используя принцип виртуальных перемещений, к проблеме чисто геометрического характера. куда сместится одна точка, если малое смещение другой задано? Во многих случаях на этот вопрос легко ответить, используя следующие свойства треугольников:



- I. Если при постоянной длине сторон  $d_1$  и  $d_2$  угол меняется на малую величину  $\Delta\alpha$ , то длина противолежащей стороны  $L$  меняется на

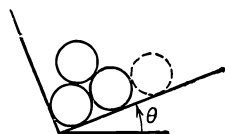
$$\Delta L = \frac{d_1 d_2}{L} \sin \alpha \Delta \alpha.$$

- II. Если длины сторон прямоугольного треугольника  $a$ ,  $b$  и  $c$  изменяются соответственно на  $\Delta a$ ,  $\Delta b$  и  $\Delta c$ , то эти изменения связаны между собой соотношением

$$a \Delta a + b \Delta b = c \Delta c$$

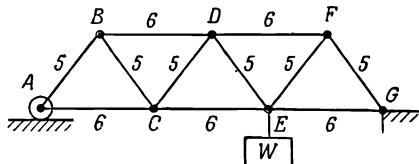
( $c$  — гипотенуза). Можете ли вы доказать эти формулы?

- 4.14. Грузовик загружен одинаковыми гладкими бревнами. Он заехал в кювет и стоит, накренившись на один борт, причем дно кузова образует с горизонталью угол  $\theta$  (крена в продольном направлении нет — грузовик стоит «на ровном киле»). Заканчивается разгрузка кузова. Если удалить бревно, показанное на рисунке штрихами, то последние три бревна при малейшем уменьшении угла  $\theta$  раскатятся. Найдите угол  $\theta$ .

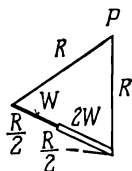


- 4.15. Длины наклонных и горизонтальных стержней фермы, показанной на рисунке, относятся как 5 : 6. Все соединения шарнирные, свободные, и вес самой фермы пренебрежимо мал.

- а) Какие стержни при данном положении груза  $W$  можно заменить гибкими связями?  
 б) Найдите усилие в стержне  $BD$ .

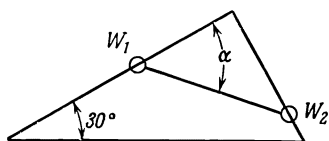


- 4.16. Стержень длиной  $R$  составлен из двух однородных кусков одинаковой длины, один из которых весит вдвое больше другого. Стержень подвешен за концы на двух нитях длиной  $R$ , прикрепленных к гвоздю в точке  $P$ . Какой угол с горизонталью образует стержень в положении равновесия?



- 4.17. Из прочной проволоки изготовлена рамка в форме прямоугольного треугольника и помещена в вертикальной пло-

скости, как показано на рисунке. По проволоке без трения скользят связанные нитью два грузика весом  $W_1 = 100 \text{ Г}$  и  $W_2 = 300 \text{ Г}$ . Чему равны натяжение нити и угол  $\alpha$  в положении равновесия?



### К главе 6. Вероятность

6. 1. «Молекула воздуха» при температуре  $25^\circ \text{С}$  и давлении  $760 \text{ мм рт. ст.}$ , двигаясь со средней скоростью  $450 \text{ м/сек}$ , успевает между двумя последовательными столкновениями пролететь около  $7 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ . Если в воздухе отсутствует *струйное*, макроскопическое движение, то сколько примерно времени понадобится молекуле, чтобы удалиться на  $1 \text{ см}$  от точки, в которой она находится в данный момент времени?
6. 2. В сумке у мальчика три красных, два зеленых и один белый шарик. Он вынимает, не глядя, три первых попавшихся под руку шарика. Какова вероятность того, что
- все три шарика разного цвета?
  - все три шарика одного цвета?
6. 3. Неподвижная сфера радиусом  $b$  «обстреливается» потоком маленьких шариков радиусом  $a$ . Будем предполагать, что рассеяние абсолютно упругое и что угол падения равен углу отражения (они отсчитываются от линии, соединяющей центры сферы и шарика в момент соприкосновения). Получите выражение для относительной доли шариков, рассеиваемых на разные углы. Результат представьте в виде формулы для сечения рассеяния. Убедитесь, что результат для полного сечения рассеяния сводится к очевидному выражению  $\pi(a + b)^2$ .

### К главе 7. Теория тяготения

Приведем некоторые свойства эллипса. Его размеры и форма полностью определяются заданием любых двух следующих величин:

- $a$  — большая полуось;
- $b$  — малая полуось;
- $c$  — расстояние от центра до одного из фокусов;
- $e$  — эксцентриситет;
- $r_p$  — кратчайшее расстояние от фокуса до линии эллипса;
- $r_a$  — наибольшее расстояние от фокуса до линии эллипса.

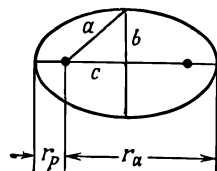
Соотношения между этими величинами имеют вид

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

$$r_p = a - c = a(1 - e),$$

$$e = \frac{c}{a} \text{ (по определению),}$$

$$r_a = a + c = a(1 + e).$$



• • •

7. 1. Расстояние от Луны до центра Земли изменяется от 363 300 км в перигее до 405 500 км в апогее, а период обращения Луны вокруг Земли составляет 27,322 дня. Искусственный спутник Земли движется по орбите так, что расстояние от земной поверхности в перигее равно 225 км, а в апогее 710 км. Средний диаметр Земли равен 12 756 км. Определите период обращения спутника.
7. 2. Спутник движется по круговой орбите радиусом  $R$  вокруг большого небесного тела массы  $M$ . Масса спутника  $m$ .
  - а) Используя соотношение  $s = at^2/2$  и рассуждения, изложенные в гл. 7 «Лекций», получите выражение для центростремительного ускорения, которое испытывает спутник, движущийся по круговой орбите. Выразите это ускорение через орбитальную скорость и радиус орбиты.
  - б) Полагая  $ma = GMm/R^2$ , получите третий закон Кеплера.
7. 3. а) Сравнивая параметры орбитальных движений Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли, определите отношение массы Солнца к массе Земли (Можете при этом использовать соотношения, полученные в предыдущей задаче.)
  - б) Ио, спутник Юпитера, совершает оборот по орбите радиусом 421 800 км за 1,769 дня. Определите отношение массы Юпитера к массе Земли.
7. 4. Используя представление о том, что два взаимно притягивающихся тела непрерывно «падают» друг на друга и в результате обращаются вокруг одной общей неподвижной точки (центра масс системы), покажите, что период обращения при фиксированном расстоянии  $R$  между телами зависит только от суммы их масс, но не от отношения масс. Это утверждение справедливо и для эллиптических орбит. Попытайтесь его доказать.



7. 5. Две звезды  $a$  и  $b$  движутся одна вокруг другой под действием взаимного гравитационного притяжения. Большая полуось орбиты этого относительного движения, измеренная в астрономических единицах ( $A. E.$ ), равна  $R$ , а период обращения составляет  $T$  лет. Получите выражение для отношения суммы масс звезд  $m_a + m_b$  к массе Солнца.
7. 6. Тригонометрический параллакс Сириуса (т. е. угол, под которым с Сириуса виден радиус земной орбиты) равен  $0,378$  угл. сек. Используя это значение и численные данные, приведенные на фиг. 7.7 в «Лекциях» (вып. 1, стр. 132), определите возможно точнее суммарную массу системы Сириуса по отношению к массе Солнца:
- а) считая, что плоскость орбиты относительного движения Сириуса  $A$  и Сириуса  $B$  перпендикулярна направлению на Землю;
  - б) учитывая, что реальный угол между плоскостью орбиты и направлением на Землю отличается от прямого, является ли значение массы, полученное вами, предельным? Если да, то верхний это предел или нижний?
7. 7. Эксцентриситет земной орбиты равен  $0,0167$ . Найдите отношение максимального значения орбитальной скорости Земли к минимальному значению.
7. 8. В 1986 г. ожидается появление кометы Галлея. Это будет ее седьмое возвращение из путешествия вокруг Солнца, если начинать счет с тех дней 1456 г., когда перепуганные люди возносили в церквях молитвы, прося защитить их от «дьявола, турка и кометы». Во время ее последнего прохождения через перигелий 19 апреля 1910 г. было измерено расстояние между нею и Солнцем, оказавшееся равным  $0,60 A. E.$
- а) На какое расстояние уходит комета от Солнца в самой дальней точке своей траектории?
  - б) Чему равно отношение максимального значения ее орбитальной скорости к минимальному?
7. 9. Как можно определить массу Луны?
- 7.10. Радиусы Земли и Луны равны  $6378$  и  $1738$  км соответственно, а их массы находятся в отношении  $81,3:1$ . Рассчитайте ускорение свободного падения на Луне, если на Земле оно равно  $9,8$  м/сек<sup>2</sup>.

- 7.11. Какова должна быть точность экспериментального определения  $g$ , чтобы стал заметен «суточный ход» этой величины из-за наличия лунного притяжения? Для простоты будем предполагать, что лаборатория, в которой производятся измерения, имеет такое географическое расположение, что Луна проходит над ней в зените, а «под ней» — в надире. Пренебрегайте влиянием приливов.

### К главе 8. Движение

8. 1. Тело движется по прямой линии с постоянным ускорением  $a$ . При  $t = 0$  оно находится в точке  $x = x_0$  и имеет скорость  $v_x = v_{x0}$ . Покажите, что в момент времени  $t$  положение и скорость тела определяются соотношениями

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}at^2,$$

$$v_x(t) = v_{x0} + at.$$

8. 2. Исключите время из формул, приведенных в предыдущей задаче, и покажите, что в любой момент времени выполняется равенство

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a(x - x_0).$$

8. 3. Обобщите результаты двух последних задач на случай трехмерного движения с постоянным ускорением, проекции которого на координатные оси равны  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$ .
8. 4. Снаряд выпущен из орудия, установленного на поверхности Земли, с начальной скоростью  $v$  под углом  $\theta$  к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислите расстояние, которое он пролетит, и максимальную высоту, которой он достигнет в полете.
8. 5. Под каким углом к горизонту следует установить ствол орудия, чтобы снаряд (см. предыдущую задачу) пролетел максимальное возможное расстояние?
8. 6. Новичок-автолюбитель, незнакомый с обычаями регулировщиков движения на пригородных дорогах, был наказан штрафом за превышение скорости. Поэтому, увидев на ровном участке дороги плакат «Проверьте спидометр», он решает последовать этому совету. Пройдя линию «0», размеченного участка шоссе, он нажимает на акселератор и в течение всего времени проверки заставляет свою машину двигаться с постоянным ускорением. Он замечает, что мимо столбика с отметкой «0,1 мили» его машина

проходит через 16 сек после начала испытания, а еще через 8 сек он проезжает мимо отметки «0,2 мили».

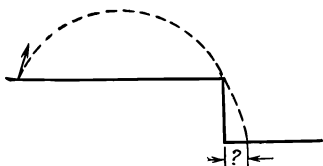
- а) Каково будет в этот момент времени показание его спидометра?
- б) С каким ускорением двигалась машина?

8. 7. Ракета, запущенная в вертикальном направлении, движется с ускорением  $2g$  в течение всех 50 сек работы двигателя. Пренебрегая сопротивлением воздуха и изменением величины  $g$  с высотой.

- а) начертите диаграмму  $v-t$  (зависимость скорости от времени) для всего времени полета;
- б) определите максимальную высоту, которой достигла ракета;
- в) рассчитайте полное время полета от момента запуска до возвращения на Землю.

8. 8. На длинном горизонтальном участке полигона испытываются ракетные и авиационные реактивные двигатели. Тележка с ракетным двигателем, стартуя с места, начала двигаться с постоянным ускорением, пока не выгорело все горючее, а потом она продолжала двигаться с постоянной скоростью. Горючее, как оказалось, кончилось ровно посередине отмеренного расстояния. Затем из той же начальной точки начала разгоняться тележка с авиационным реактивным двигателем, которая прошла с постоянным ускорением *все* расстояние. Оказалось, что обе тележки прошли известное расстояние за одинаковое время. Чему равно отношение ускорений, развиваемых ракетным и авиационным двигателями?

8. 9. Миномет установлен на расстоянии 8100 м от вертикального обрыва высотой 105 м (см. схему). Необходимо минометным огнем поразить цели, скрытые за обрывом. Как близко к основанию обрыва могут «подобраться» мины, если их начальная скорость составляет 300 м/сек?



8.10. Угол можно измерять длиной дуги окружности, которую отсекает угол, если его вершина находится в центре окружности. Если  $S$  — длина дуги, а  $R$  — радиус окружности, то угол в радианах равен

$$\theta = \frac{S}{R}.$$

- а) Покажите, что если  $\theta \ll 1$  рад, то  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ .  
 б) Используя полученный результат и формулы для косинуса и синуса суммы двух углов, найдите производные от  $\sin x$  и  $\cos x$ , применяя основную формулу

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

**8.11.** Тело движется по кругу радиусом  $R$  против часовой стрелки с постоянной скоростью  $v$ . Центр окружности помещается в начале прямоугольной системы координат  $(x, y)$ , и в момент  $t = 0$  тело находится в точке с координатами  $(R, 0)$ .

- а) Найдите  $x$ ,  $y$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $a_x$ ,  $a_y$  как функции времени.  
 б) Покажите, что

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

и

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

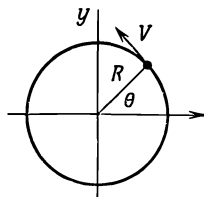
где

$$\omega = \frac{v}{R},$$

а точка над буквой означает производную по времени, так что

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$



**8.12.** Небольшой камешек застрял в узоре протектора автомобильной шины радиусом  $R$ . Шина катится по горизонтальной дороге без проскальзывания с постоянной скоростью  $v$ . Найдите выражения для координат камешка  $x$  и  $y$  как функций времени (в момент времени  $t = 0$  камешек касается дороги). Найдите также в прямоугольной системе координат зависимость от времени компонент скорости и ускорения камешка.

## К главе 9. Динамические законы Ньютона

**9. 1.** Частица массой  $m$  движется в области пространства, где на нее действует сила, пропорциональная скорости частицы и перпендикулярная одновременно вектору скорости и оси  $z$ . В начальный момент скорость частицы равна  $v_0$ .

и лежит в плоскости  $x - y$ . Покажите, что частица движется по круговой орбите и найдите радиус этой орбиты. Пусть коэффициент пропорциональности в выражении для силы через скорость равен  $\beta$ , т. е.  $F = \beta v$ .

9. 2. Найдите радиусы кривизны орбиты, изображенной на фиг. 9.6 в «Лекциях» (вып. 1, стр. 173) в моменты времени  $t = 0$ ,  $t = 0,82$  и  $t = 2,086$  сек.

9. 3. Мальчик бросает мяч вверх под углом  $70^\circ$  к горизонту и попадает прямо в открытое окно, которое расположено на 9,6 м выше его плеча. Мяч влетает в окно горизонтально.

а) С какой скоростью вылетел мяч из руки?

б) Чему равен радиус кривизны траектории мяча, когда он перелетает через подоконник?

Можете ли вы определить радиус кривизны траектории в любой момент времени?

9. 4. Джим и Джо, два специалиста по космической физике, выросшие на разных планетах, встречаются на межпланетном симпозиуме Палаты мер и весов, посвященном утверждению универсальной системы физических единиц. Джим с гордостью описывает заслуги системы MKSA, которой пользуются все цивилизованные люди на Земле. Джо с меньшей гордостью превозносит прелести системы  $M'K'S'A'$ , которой пользуются цивилизованные люди во всей Солнечной системе, кроме Земли. Если постоянные множители, которые связывают единицы массы, длины и времени в этих двух системах, равны  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $\tau$ , так что

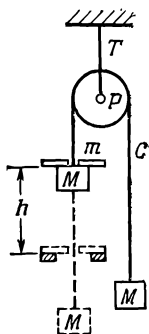
$$m' = \mu m, \quad l' = \lambda l \quad \text{и} \quad t' = \tau t,$$

то какие множители потребуются для перевода единиц измерения скорости, ускорения, силы и энергии из одной системы в другую?

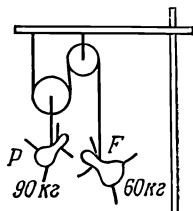
9. 5. Как будут связаны между собой численные значения гравитационной постоянной, измеренные в двух системах единиц, описанных в предыдущей задаче?

9. 6. Чему будет равно численное значение величины  $GM_\odot$ , если расстояние измерять в астрономических единицах, а время в годах?

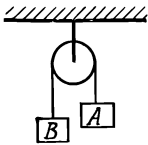
9. 7. Если изготовить модель Солнечной системы в одну  $k$ -ю натуральной величины из материалов той же самой средней плотности, которая известна для настоящих планет и Солнца, то как будут зависеть от «масштабного фактора»  $k$  периоды обращения «планет» модели по своим орбитам?
9. 8. На схеме изображена машина Атвуда — один из первых приборов для измерения ускорения свободного падения. Массы блока  $P$  и нитей пренебрежимо малы, трение отсутствует. С обеих сторон блока подвешены грузы одинаковой массы  $M$ , и система находится в равновесии. Затем на один из грузов кладется маленький грузик  $m$ , и этот груз начинает опускаться. После того как он пройдет расстояние  $h$ , грузик подхватывается специальным упором и грузы продолжают движение с постоянной скоростью  $v$ . Найдите ускорение свободного падения  $g$ , если величины  $m$ ,  $M$ ,  $h$  и  $v$  известны.



9. 9. Двое молодых марсиан, Паоло и Франческа, хотят переправиться через марсианский канал Римини, но ни одна гондола не берет их обоих сразу, а переправляются в разных лодках они отказались. Находчивый гондольер Джузеппе умудряется все-таки заработать на их переезде. Он подвешивает эту парочку на мачте (см. рисунок) с помощью невесомых и абсолютно гладких блоков и веревок (характерная особенность всех марсианских конструкций) и быстро переправляет влюбленных через канал, пока ни один из них не успевает коснуться ни мачты, ни палубы. Много ли при этом Джузеппе выигрывает в нагрузке? Напоминаем: натяжение невесомой нити, перекинутой без трения через невесомый блок, одинаково с обеих сторон блока.



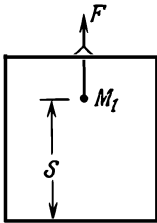
- 9.10. Космический путешественник собирается отправиться на Луну. У него есть пружинные весы и гиря  $A$  массой  $1 \text{ кг}$ . Если подвесить эту гирю на пружине весов на Земле, они покажут  $1 \text{ кг}$ . Опустившись на некотором участке лунной поверхности, где ускорение свободного падения точно не известно (известно лишь, что оно примерно в шесть раз меньше, чем на Земле), космонавт подбирает камень  $B$ , который вытягивает на весах тот же самый  $1 \text{ кг}$ . Затем он подвешивает  $A$  и  $B$  на нити, перекинутой через блок,



как показано на рисунке, и обнаруживает, что камень опускается с ускорением  $1,2 \text{ м/сек}^2$ . Чему равна масса камня  $B$ ?

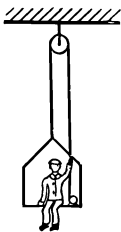
- 9.11. К потолку лифта, масса которого  $M_2$ , подвешен груз массой  $M_1$ . Приложенная сила  $F$  заставляет лифт двигаться с ускорением вверх [ $F$  больше  $(M_1 + M_2)g$ ]. Груз  $M_1$  находится на расстоянии  $S$  от пола лифта.

- Найдите ускорение лифта.
- Чему равно натяжение нити, которой груз привязан к потолку?
- Нить внезапно оборвалась. Чему равно ускорение лифта и груза  $M_1$  в следующий момент?



- Сколько времени пройдет от момента разрыва нити до удара груза  $M_1$  об пол?

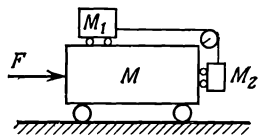
- 9.12. Маляр работает в подвесном кресле (см. рисунок). Вес его  $72 \text{ кг}$ . Ему понадобилось срочно подняться вверх. Он принимается тянуть за веревку с такой силой, что его давление на кресло уменьшается до  $40 \text{ кг}$ . Само кресло весит  $12 \text{ кг}$ .



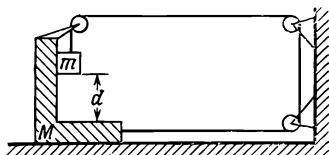
- Чему равно ускорение маляра и кресла?
- Чему равна полная нагрузка на блок?



- 9.13. Посмотрите на рисунок. Какую постоянную горизонтальную силу нужно приложить к  $M$ , чтобы  $M_1$  и  $M_2$  относительно  $M$  не двигались?



- 9.14. В системе, изображенной на рисунке, трение между любыми поверхностями отсутствует. Если грузику с массой  $m = 150$  г, находящемуся над рамой на расстоянии  $1,2$  м, позволить двигаться, то за какое время он пройдет это расстояние? Масса рамы  $M = 1650$  г.



- 9.15. Груз, подвешенный на пружине, неподвижен. Затем он приводится в движение ударом, направленным снизу вверх, и в начальный момент времени его скорость равна единице. Масса и упругость пружины таковы, что уравнение движения имеет вид  $\ddot{x} = -x$ . Найдите максимальную высоту, которой достигнет груз, путем численного интегрирования уравнения движения.
- 9.16. Тело массой  $m$  движется прямолинейно. Движение тормозится силой, пропорциональной скорости тела,  $F = -kv$ . Найдите численным интегрированием  $x$  как функцию времени, если в начальный момент  $t = 0$ ,  $x = 0$  и  $v = v_0$ . Найдите время  $t_{1/2}$ , за которое тело потеряет половину своей скорости, и максимальное расстояние  $x_m$ , которое пройдет тело.
- Примечание.* а) Подберите временной и линейный масштабы так, чтобы уравнение движения имело простые численные коэффициенты.
- б) Придумайте схему расчета (аналогичную приведенной в тексте «Лекций»), которая обеспечивала бы хорошую точность при сравнительно большом шаге  $\Delta t$ .
- в) Исходя из соображений размерности, выясните, как  $t_{1/2}$  и  $x_m$  зависят от  $v_0$ ,  $k$  и  $m$ , а уравнение движения решите только для одного удобного значения  $v_0$ , скажем для  $v_0 = 1,00$  (в модифицированных единицах  $x$  и  $t$ ).

- 9.17. Заряженная частица движется в электрическом и магнитном полях в соответствии с уравнениями движения

$$\frac{dv_x}{dt} = -2v_y$$

и

$$\frac{dv_y}{dt} = 1 + 2v_x.$$

При  $t = 0$  частица находится в точке  $(0, 0)$  и скорость ее имеет составляющие  $v_x = 1,00$  и  $v_y = 0$ . Определите тип движения с помощью численного интегрирования. Прочтите примечание (б) к предыдущей задаче.

- 9.18. Мина вылетает из ствола миномета со скоростью  $300 \text{ м/сек}$  под углом  $45^\circ$  к горизонту. Ее движение тормозится силой, пропорциональной кубу скорости ( $F = -kv^3$ ). Коэффициент пропорциональности  $k$  таков, что при скорости  $300 \text{ м/сек}$  сила сопротивления вдвое превышает вес мины. Численным интегрированием найдите приближенные значения максимальной высоты, на которую поднимется мина, и расстояние от точки выстрела, на котором она упадет на землю. Сравните их с величинами, получающимися при отсутствии сопротивления воздуха.

### К главе 10. Закон сохранения импульса

10. 1. В горизонтальном воздушном желобе (он описан в гл. 10 «Лекций», вып. 1, стр. 185) могут свободно двигаться два тела. Одно неподвижно, а другое налетает на него, и происходит абсолютно упругое столкновение, после чего тела разлетаются в противоположных направлениях с равными скоростями. Чему равно отношение их масс?
10. 2. Два одинаковых массивных тела движутся навстречу друг другу в горизонтальном воздушном желобе с одинаковыми по величине скоростями  $v$  и  $-v$ . Происходит почти упругое соударение, и они разлетаются в противоположные стороны с несколько меньшими скоростями. При столкновении теряется доля кинетической энергии  $f \ll 1$ . Если бы до столкновения одно из этих тел покоилось, какова была бы скорость второго тела после столкновения? (Эту маленькую остаточную скорость  $\Delta v$  легко выразить через  $v$  — конечную скорость тела, покоившегося до столкновения, и таким путем определить упругость пружинных буферов.)

*Примечание.* Если  $x \ll 1$ , то  $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ .

10. 3. Спутник Земли массой  $10 \text{ кг}$  со средним поперечным сечением  $0,50 \text{ м}^2$  движется по круговой орбите на высоте  $200 \text{ км}$ , где средний пробег молекул измеряется многими метрами и плотность воздуха равна  $1,6 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}^3$ . Приблизительно будем считать соударения молекул со спутником абсолютно неупругими (молекулы не то чтобы прилипают к спутнику, но отскакивают от него с очень малыми относительными скоростями). Подсчитайте, какая тормозящая сила будет действовать на спутник за счет трения о воздух. Как будет зависеть эта сила от скорости спутника? Будет ли скорость спутника уменьшаться под действием всех приложенных к нему сил? (Учтите зависимость орбитальной скорости спутника от высоты круговой орбиты.)
10. 4. Ракета, первоначальная масса которой  $M_0 \text{ кг}$ , выбрасывает продукты сгорания топлива с постоянной скоростью  $v_0$  (по отношению к ракете). В  $1 \text{ сек}$  выбрасывается  $dm/dt = -r_0 \text{ кг/сек}$  газов.
- а) Рассчитайте ускорение ракеты в начальный момент, пренебрегая силой тяжести.
  - б) Если скорость истечения  $v_0 = 2,0 \text{ км/сек}$ , какую массу газа в секунду необходимо выбрасывать для создания тяги  $10^5 \text{ кГ}$ ?
  - в) Запишите дифференциальное уравнение, которое связывает скорость ракеты с ее остаточной массой, и, если можете, решите это уравнение.
10. 5. Если два тела движутся по одной прямой, то существует такая система координат, в которой импульс одного тела равен по величине и противоположен по направлению импульсу другого тела. Это значит, что суммарный импульс двух тел в такой системе равен нулю. Такая система отсчета называется системой центра масс (сокращенно ц. м.). Если массы тел равны  $m_1$  и  $m_2$ , а тела движутся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  соответственно, то покажите, что скорость системы ц. м. равна

$$v_{\text{ц. м.}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

10. 6. Обобщите результат задачи 10.5 на произвольное число тел, движущихся по одной прямой, т. е. найдите скорость системы координат, в которой суммарный импульс всех этих тел равен нулю.
10. 7. Пусть  $T$  — полная кинетическая энергия двух тел в задаче 10.5, а  $T_{\text{ц. м.}}$  — их полная кинетическая энергия

в системе ц. м. Покажите, что

$$T = T_{ц. м.} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{ц. м.}^2.$$

10. 8. Можете ли вы обобщить результат задачи 10.7 на произвольное число тел?
10. 9. Нейтрон с кинетической энергией  $E$  испытывает лобовое столкновение с покоящимся ядром  $C^{12}$  и отскакивает от него после абсолютно упругого соударения в направлении, прямо противоположном начальному направлению своего движения. Как изменится кинетическая энергия нейтрона после соударения?
- 10.10. Скорость ружейной пули можно измерить с помощью баллистического маятника: пуля с известной массой  $m$  и неизвестной скоростью  $v$  попадает в покоящийся деревянный брусок массы  $M$ , подвешенный на нити длиной  $L$ , и застревает в нем. Брусок при этом приходит в движение. Амплитуду его колебаний  $x$  можно измерить и, используя закон сохранения энергии, определить тем самым скорость бруска сразу после попадания в него пули. Выразите скорость пули через  $m$ ,  $M$ ,  $L$  и  $x$ .

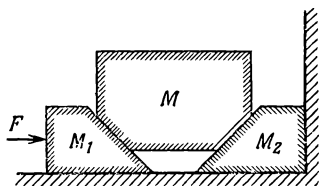
### К главе 11. Векторы

11. 1. Если три вектора заданы равенствами  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$  и  $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ , получите
- $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,
  - $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,
  - $a_x$ ,
  - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$ ,
  - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ,
  - $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ .
11. 2. Велосипедист едет со скоростью 10 км/час в северном направлении, и ему кажется, что ветер (который дует со скоростью 6 км/час откуда-то с северо-востока) направлен почти навстречу ему, под углом  $15^\circ$  к линии его движения.
- Определите истинное направление ветра.
  - Найдите кажущееся направление ветра с точки зрения велосипедиста, который едет в обратном направлении с той же скоростью 10 км/час.

11. 3. Вы находитесь на судне, которое идет на восток с постоянной скоростью 15 узлов. Корабль, идущий постоянным курсом с известной скоростью 26 узлов, находится в 6 милях южнее. Позднее он проходит у вас за кормой, причем расстояние наибольшего сближения составляет 3 мили.
- а) Найдите курс этого корабля.
  - б) Какое время прошло между двумя моментами, описанными в задаче?
11. 4. Колесо радиусом  $R$  катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Колесо расположено в вертикальной плоскости, а ось его движется горизонтально с постоянной скоростью  $v$  относительно поверхности. Вычислите величину и направление скорости произвольной точки на ободе колеса. Убедитесь, что скорости точек на ободе таковы, как если бы колесо вращалось вокруг мгновенной оси, проходящей через точку соприкосновения колеса с горизонтальной поверхностью.
11. 5. Моторная лодка, скорость которой относительно воды равна  $v$ , движется по прямолинейному участку реки. Скорость течения постоянна и равна  $u$ . Сперва лодка поднимается вверх по течению на расстояние  $d$  от своей стоянки и возвращается обратно, а затем отправляется в пункт на противоположном берегу реки как раз напротив стоянки и возвращается обратно. Ширина реки также равна  $d$ . Для простоты будем предполагать, что лодка все время движется с постоянной скоростью, и на разворотах время не теряется. Если  $t_V$  — время движения вдоль реки,  $t_A$  — время движения поперек, а  $t_L$  — время, за которое лодка прошла бы расстояние  $2d$  по озеру, то:
- а) чему равно отношение  $t_V/t_A$ ?
  - б) чему равно отношение  $t_A/t_L$ ?
11. 6. Человек, стоящий на берегу реки, хочет переправиться на другой берег, в прямо противоположную точку. Он может сделать это двумя способами: 1) плыть все время под углом к течению, так что результирующая скорость будет все время перпендикулярна берегу; 2) плыть прямо к противоположному берегу, а расстояние, на которое его снесет течением, пройти затем по берегу пешком. Плавает он со скоростью 2,5 км/час, а идет со скоростью 4 км/час. Скорость течения 2 км/час. Какой способ позволит переправиться скорее?
11. 7. На горизонтальной плоскости установлены два одинаковых клина с углами наклона  $45^\circ$  и одинаковыми массами

$M_1 = M_2 = 8,0$  кг. Все плоскости абсолютно гладкие, как и у груза с массой  $M = 384$  кг, который требуется приподнять с помощью этих клиньев. Оба клина лежат на гладкой горизонтальной плоскости; один из них упирается в вертикальную стену, а к другому приложена горизонтальная сила  $F = 592$  кГ.

- а) Найдите величину и направление ускорения подвижного клина  $M_1$ .  
 б) Найдите величину и направление ускорения груза  $M$ .



- в) С какой силой давит неподвижный клин  $M_2$  на груз  $M$ ?

11. 8. На конце нити висит материальная точка массой  $m$ , а другой конец нити прикреплен к шаровому шарниру, в котором отсутствует трение. Материальная точка приводится в движение по круговому пути, расположенному в горизонтальной плоскости, отстоящей от шарнира на расстоянии  $H$ . Найдите период такого движения.

11. 9. Обобщите результаты задач 10.5 и 10.8 на трехмерное движение, используя векторную символику и обозначение

$$M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

11.10. «Частица» массой  $m_1 = 2$  кг, движущаяся со скоростью  $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$  м/сек, испытывает абсолютно неупругое столкновение с другой частицей, масса которой  $m_2 = 3$  кг, а скорость  $\mathbf{v}_2 = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  м/сек. Найдите скорость получившейся составной частицы.

11.11. Найдите кинетическую энергию частиц, описанных в задаче 11.10, в системе ц. м. до их столкновения.

11.12. Тело массой 1 кг, движущееся точно на север со скоростью 6 м/сек, сталкивается с покоящимся телом, масса которого 2 кг. После соударения тело с меньшей массой движется под углом  $45^\circ$  к направлению своего первоначального движения (на северо-восток) со скоростью 2,82 м/сек.

- а) Чему равна скорость тела с массой 2 кг?  
 б) Какая доля кинетической энергии в системе ц. м. «пропала» из-за неупругости соударения?

в) На какой угол отклонилось более легкое тело в системе ц. м.?

- 11.13. Движущаяся частица испытывает абсолютно упругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Покажите, что после соударения частицы разлетаются под прямым углом.

При анализе двухчастичных столкновений полезно использовать следующий подход:

- 1) Найдите  $\mathbf{v}_{ц.м.}$ , т. е. скорость системы ц. м.
- 2) Вычтите  $\mathbf{v}_{ц.м.}$  из  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  (скоростей первой и второй частиц до столкновения), чтобы получить начальные скорости в системе ц. м., т. е.  $\mathbf{v}'_1$  и  $\mathbf{v}'_2$ .
- 3) Импульсы обеих частиц теперь равны по величине и противоположны по направлению.
- 4) Происходит столкновение, в результате которого:
  - а) поворачивается линия относительного движения частиц 1 и 2;
  - б) абсолютные величины векторов  $\mathbf{v}'_1$  и  $\mathbf{v}'_2$  увеличиваются, уменьшаются или остаются неизменными в зависимости от того, выделяется, поглощается или остается неизменной энергия в процессе столкновения.
- 5) Прибавьте  $\mathbf{v}_{ц.м.}$  к скоростям  $\mathbf{v}'_1$  и  $\mathbf{v}'_2$  в системе ц. м. после соударения. Получатся скорости  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  после столкновения в «лабораторной» системе.

- 11.14. Два маленьких шарика  $A$  и  $B$  движутся под действием силы тяжести с ускорением  $9,8 \text{ м/сек}^2$ . Масса каждого шарика равна  $1 \text{ г}$  (ускорение считать направленным по оси  $z$ ).

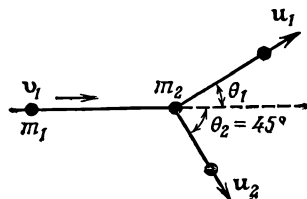
Заданы следующие начальные условия при  $t = 0$ :

$$\mathbf{r}_a(0) = 7\mathbf{i} + 4,9\mathbf{k} \text{ м}, \quad \mathbf{v}_a(0) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \text{ м/сек},$$

$$\mathbf{r}_b(0) = 49\mathbf{i} + 4,9\mathbf{k} \text{ м}, \quad \mathbf{v}_b(0) = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \text{ м/сек}.$$

Найдите  $\mathbf{r}_a(t)$  и  $\mathbf{r}_b(t)$  для любого момента времени  $t > 0$ .

- 11.15. Частица массой  $m_1$  налетает со скоростью  $\mathbf{v}_1$  на покоящуюся частицу, масса которой  $m_2 = 3m_1$ . Происходит абсолютно упругое соударение, после которого частица  $m_2$  движется под углом  $\theta_2 = 45^\circ$  к первоначальному направлению движения частицы  $m_1$  (см. рисунок). Требуется найти  $\theta_1$  — угол отклонения первой частицы и величины скоростей  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ .





11.16. Частица массой  $M$  налетает на покоящуюся частицу массой  $m$  ( $m < M$ ), и происходит упругое столкновение. Найдите максимальный возможный угол отклонения налетающей частицы.

11.17. Частица массой  $m$  упруго сталкивается с покоящейся частицей, масса которой  $M > m$ , и отклоняется от первоначального направления на  $90^\circ$ . Под каким углом  $\theta$  к направлению первоначального движения полетит более тяжелая «частица отдачи»?

11.18. Пусть в столкновении, описанном в предыдущей задаче, теряется доля  $1 - \alpha^2$  кинетической энергии в системе ц. м. Чему равен в этом случае угол вылета частицы отдачи, покоящейся до столкновения?

11.19. Частица с массой  $1 \text{ кг}$  движется так, что ее положение в любой момент времени определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = i\mathbf{t} + \mathbf{j} \left( t + \frac{t^2}{2} \right) - \mathbf{k} \left( \frac{4}{\pi^2} \right) \sin \frac{\pi t}{2}.$$

а) Определите положение, скорость, ускорение и кинетическую энергию частицы в моменты времени  $t = 0$  и  $t = 1 \text{ сек.}$

б) Получите выражение для силы, которая заставляет частицу двигаться.

в) Найдите радиус кривизны траектории частицы в момент времени  $t = 1 \text{ сек.}$

11.20. В начальный момент времени частица находится в точке  $\mathbf{r}_0$  и имеет скорость  $\mathbf{v}_0$ . Определите ее дальнейшее движение под действием силы тяжести.

11.21. Используйте векторную алгебру для нахождения расстояния по дуге большого круга между двумя точками земной поверхности, широта и долгота которых равны соответственно  $(\lambda_1, \varphi_1)$  и  $(\lambda_2, \varphi_2)$ .

*Примечание.* Используйте прямоугольную систему координат с началом в центре Земли. Одну ось этой системы направьте вдоль земной оси, другую — в направлении, определяемом углами  $\lambda = 0$ ,  $\varphi = 0$ , а третью — под углами  $\lambda = 0$ ,  $\varphi = 90^\circ$ . (Долгота пусть меняется от  $0$  до  $360^\circ$  с востока на запад.)

11.22. Чему равны величина и направление ускорения Луны:

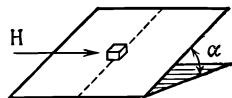
а) в новолуние?

- б) в первую четверть?  
в) в полнолуние?

*Примечание.* Расстояние от Земли до Солнца равно  $1,5 \cdot 10^8$  км, расстояние от Земли до Луны  $3,85 \cdot 10^5$  км, масса Солнца составляет  $3,33 \cdot 10^5$  земных масс.

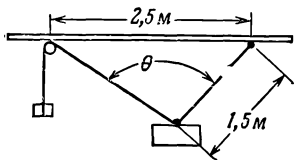
## К главе 12. Характеристики силы

12. 1. Кирпич массой  $m$  скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\theta$ . Если коэффициент трения скольжения  $\mu < \operatorname{tg} \theta$ , то с каким ускорением будет двигаться кирпич:
- а) вверх по плоскости?
  - б) вниз по плоскости?
  - в) под углом  $\varphi$  к горизонтальной линии на плоскости?  
(Представьте себе, что к плоскости приложена гладкая линейка, вдоль которой и движется кирпич. Используйте в наклонной плоскости координаты  $x$  и  $y$ ;  $x$  направьте по горизонтали, а  $y$  — вверх по наклонной плоскости.)
12. 2. Пусть в предыдущей задаче  $m = 1,00$  кг,  $\mu = 0,20$ , а  $\theta = 30^\circ$ . Если в начальный момент кирпич движется по наклонной плоскости вверх со скоростью  $3,00$  м/сек, то:
- а) как далеко вверх он поднимется?
  - б) сколько времени ему понадобится, чтобы попасть в высшую точку и вернуться в исходную?
  - в) сколько энергии он потеряет за это время?
12. 3. Тело весом  $W$  покоится на шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом  $\alpha$ .
- а) Коэффициент статического трения  $\mu = 2 \operatorname{tg} \alpha$ ; найдите минимальную горизонтальную силу  $H_{\min}$ , которая приведет тело в движение (см. рисунок).
  - б) В каком направлении начнет двигаться тело?



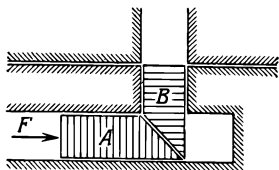
12. 4. Груз весом  $1$  кг подвешен на двух нитях. Первая нить длиной  $1,5$  м привязана к кольцу, которое скользит по горизонтальному стержню (см. рисунок). Коэффициент трения между кольцом и стержнем равен  $0,75$ . Ко второй нити привязан грузик, и она перекинута через блок, прикрепленный к стержню на  $2,5$  м левее кольца. Груз,

подвешенный ко второму концу нити, увеличивают до тех пор, пока кольцо не начинает скользить. Найдите:

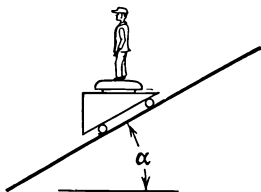


- а) вес груза  $W$ , при котором кольцо начнет скользить,  
б) натяжение нити длиной 1,5 м и угол  $\theta$ .

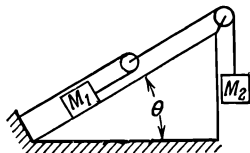
12. 5. На рисунке показан в разрезе простейший вертикальный замок. Нижняя его часть  $A$  может двигаться по горизонтальному пазу. Стенки паза абсолютно гладкие, но плоскости соприкосновения брусьев  $A$  и  $B$ , наклоненные под  $45^\circ$  к горизонтали, шероховаты, и коэффициент трения между ними равен  $\mu$ . Какова минимальная сила  $F$ , которую необходимо приложить, чтобы привести части замка в движение, если масса задвижки  $B$  равна  $m$ ?



12. 6. Один неосторожный молодой человек проводит следующий опыт. Он ставит плоские медицинские весы на деревянную подставку с роликами, которая может скатываться без трения по наклонной плоскости (см. рисунок). Затем сам становится на весы и катится вниз, наблюдая за показаниями весов. Чему равен угол наклона плоскости, если весы показывают в этот момент 120 фунтов, а молодой человек весит 160 фунтов?



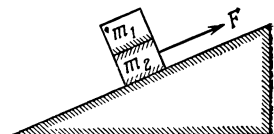
12. 7. В устройстве, показанном на рисунке, груз  $M_1$  скользит без трения по наклонной плоскости;  $\theta = 30^\circ$ ,  $M_1 = 400$  г,  $M_2 = 200$  г. Найдите ускорение груза  $M_2$  и натяжение нитей.



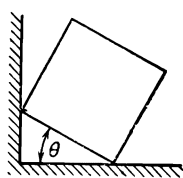
12. 8. Длина наклонной плоскости, изображенной на рисунке, 130 см, верхний ее конец расположен на 50 см выше ниж-

него. На этой плоскости лежат один на другом два бруска с массами  $m_1$  (200 г) и  $m_2$  (60 г). Коэффициент статического трения между брусками равен 0,5, а коэффициент трения скольжения между плоскостью и нижним бруском 0,33. К нижнему бруску приложена сила  $F$ , параллельная наклонной плоскости.

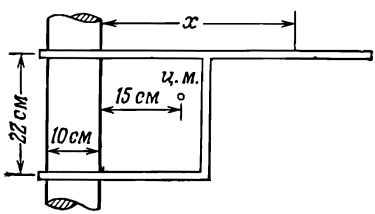
- а) Чему равно ускорение нижнего бруска в тот момент, когда верхний только-только начинает соскальзывать с него?
- б) Чему равно значение силы  $F$  перед началом этого соскальзывания?



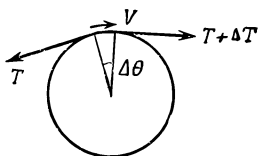
12. 9. Куб массой  $M$  прислонен к стене в наклонном положении, как показано на рисунке. Между кубом и стеной трение отсутствует, но между кубом и полом оно есть, и величины коэффициента трения  $\mu$  как раз еле хватает на то, чтобы куб не начал скользить. Если  $0 < \theta < 45^\circ$ , найдите это минимальное значение коэффициента трения как функцию  $\theta$ . Проверьте свой ответ, рассмотрев предельные случаи  $\theta \rightarrow 0$  и  $\theta \rightarrow 45^\circ$ , и рассчитайте значение  $\theta$ , при котором  $\mu = 1$ .



- 12.10. Кронштейн для подвешивания небольших грузов, который легко устанавливается на любой высоте, очень удобен. Один такой кронштейн изображен на рисунке, там же приведены и основные размеры. Он может передвигаться по вертикальной стойке и удерживается на одном уровне силой трения. Если коэффициент статического трения между кронштейном и стойкой равен 0,30, а вес груза, подвешенного на расстоянии  $x$  от стойки, в 50 раз превышает вес самого кронштейна, каково будет минимальное значение  $x$ , при котором кронштейн не соскальзывает по столбу?



- 12.11. а) Веревка, движущаяся с небольшой скоростью  $v$ , трется о цилиндрический столб (см. рисунок). Угол  $\Delta\theta$  много меньше  $1$  рад. Если натяжение веревки с одной стороны столба равно  $T + \Delta T$ , а с другой  $T$ , то чему равна разность  $\Delta T$ , возникающая за счет трения?



- б) Проинтегрируйте результат для  $\Delta T$ , полученный в пункте (а), и найдите отношение натяжений на двух концах веревки, которая заворачивается вокруг столба на конечный угол  $\alpha$  и натянута так, что начинает проскальзывать.

- 12.12. Тело находится у основания абсолютно гладкой пластинки длиной  $1$  м, наклоненной под углом  $20^\circ$  к горизонтали. Пластика начинает двигаться с горизонтальным ускорением  $a = 4,00$  м/сек<sup>2</sup>. За какое время тело достигнет верхнего края пластинки?

- 12.13. Напишите размерности
- электрического поля  $E$ ;
  - магнитной индукции  $B$ ;
  - отношения  $E/B$ ;
  - гравитационного поля.

- 12.14. Заряженная частица движется в плоскости, перпендикулярной магнитному полю  $\mathbf{B}$ . Покажите, что движение совершается по круговой орбите, и найдите радиус орбиты.

- 12.15. Найдите время одного оборота частицы из предыдущей задачи. Ответ на этот вопрос необходимо знать при управлении циклотроном. Почему?

- 12.16. Частица с массой  $m$  и зарядом  $q$  движется в электромагнитном поле, у которого от нуля отличны только компоненты  $E_y$  и  $B_z$ .

а) Напишите уравнение движения частицы.

б) Примените преобразование Галилея к координатам частицы:  $x' = x - (E_y/B_z)t$ ,

$$y' = y,$$

$$z' = z.$$

- в) Какое заключение после этого можно сделать о движении частицы во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях?

## К главе 14. Работа и потенциальная энергия

14. 1. Сила  $\mathbf{F} = 1,5y\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j} - 0,2(x^2 + y^2)\mathbf{k}$  ньютон действует на материальную точку массой 1,00 кг. При  $t = 0$  положение частицы описывается радиусом-вектором  $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  м, и она движется со скоростью  $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$  м/сек. Найдите для  $t = 0$ :
- силу, которая действует на частицу;
  - ускорение частицы;
  - ее кинетическую энергию;
  - скорость изменения кинетической энергии.
14. 2. Найдите приближенно положение, скорость и кинетическую энергию частицы из предыдущей задачи в момент  $t = 0,01$  сек.
14. 3. Частица движется от точки  $(0, -1,0)$  в точку  $(0, +1,0)$  без трения под действием той же, что и в задаче 14.1, силы  $\mathbf{F}$  (плюс некоторая сила, удерживающая частицу и не дающая ей «сойти с пути»). Найдите работу, совершенную силой  $\mathbf{F}$ , для двух вариантов траектории:
- прямая вдоль оси  $y$ ,
  - окружность в плоскости  $z - y$ .
- Является ли поле силы  $\mathbf{F}$  консервативным?
14. 4. Материальная точка массой 6,0 кг может двигаться вдоль оси  $x$  без трения. В каждом из перечисленных ниже случаев она начинает движение при  $x = 0$  и  $t = 0$ .
- Точка проходит расстояние, равное 3 м, под действием силы  $F = (3 + 4x)$  ньютон ( $x$  в метрах).
    - Какую скорость она при этом приобретет?
    - Каково ее ускорение в конце пути?
    - Чему равна мощность, затрачиваемая на ее движение в этот момент?
  - Точка движется в течение 3 сек под действием силы  $F = (3 + 4t)$  ньютон (время в секундах). Ответьте на вопросы (а) — (в) для этого случая.
14. 5. Сферическая оболочка радиусом 0,5 м равномерно заряжена до потенциала  $10^6$  в. Найдите ее заряд.
14. 6. Как правило, конденсатор состоит из двух металлических тел, несущих заряды разного знака. Емкость  $C$  определяется как отношение заряда на одном из тел к разности потенциалов между ними:

$$C = \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1} \phi.$$

Определите емкость двух концентрических сфер радиусами  $A$  и  $B$ .

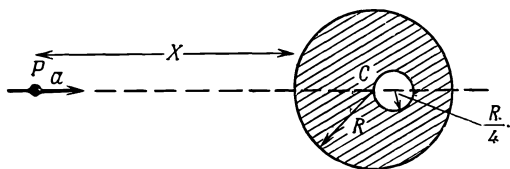
14. 7. Если бы Земля несла нескомпенсированный электрический заряд  $1$  кулон, чему был бы равен ее потенциал?
14. 8. Автомобиль весит  $1000$  кг. Максимальная мощность, развиваемая его двигателем, равна  $120$  квт. Пусть эта максимальная мощность достигается при скорости  $60$  км/час. Каково ускорение автомобиля при этой скорости?
14. 9. Гибкий кабель длиной  $L$  и весом  $M$  кг на метр перекинут через блок, масса и радиус которого пренебрежимо малы. Трение в блоке отсутствует. В начальный момент кабель находится в положении равновесия, из которого его выводит слабый рывок за один из концов. Более длинная часть начинает перевешивать, и кабель с ускорением соскальзывает с блока. Найдите скорость кабеля в тот момент, когда его конец проходит через блок.
- 14.10. Вода (плотность ее  $1$  г/см<sup>3</sup>) прокачивается через гладкий шланг и вырывается из его наконечника, поперечное сечение которого равно  $35$  см<sup>2</sup>. Струя направлена под углом  $30^\circ$  к горизонту и взлетает на  $4,8$  м выше выходного отверстия. Подающий шланг насоса погружен в большой резервуар, уровень воды в котором на  $2,4$  м ниже наконечника. Если полный к. п. д. насоса вместе с электромотором составляет  $60\%$ , какую мощность потребляет мотор?
- 14.11. Мировые рекорды в толкании ядра, метании диска и копья составляли в 1960 г.  $19,40$ ,  $59,96$  и  $86,09$  м соответственно. Массы этих метательных снарядов равны соответственно  $7,257$ ,  $1,99$  и  $0,806$  кг. Округлите эти цифры и сравните работу, затраченную каждым спортсменом в рекордном броске для трех снарядов, предполагая каждый раз, что снаряд вылетает под углом  $45^\circ$  с уровня  $1,8$  м над землей. Спротивлением воздуха пренебрегите.
- 14.12. Мощность двигателя машины  $85$  л. с., а вес машины  $1200$  кг. При движении с постоянной скоростью  $48$  км/час мощность, развиваемая двигателем, равна всего  $20$  л. с. Найдите величину самого крутого уклона, на который эта машина может подниматься с такой скоростью, считая, что сопротивление трения от наклона дороги не зависит.

(Величину уклона характеризуйте либо углом по отношению к горизонтали, либо какой-нибудь функцией этого угла).

- 14.13. Масса  $M$  некоего сферического тела радиусом  $R$  равномерно распределена по его объему. Каков гравитационный потенциал и напряженность гравитационного поля, создаваемого этим телом на разных расстояниях от его центра? Представьте результат графически.
- 14.14. Чашка пружинных весов весит  $0,025$  кг, а упругость пружины составляет  $15,3$  ньютон/м. Грузик массой  $m = 50$  г падает на чашку с высоты  $h = 9,0$  см. Соударение абсолютно неупругое. На какое максимальное расстояние опустится грузик? Отсчет ведется от точки, из которой он начал падать.
- 14.15. Пружина с упругой постоянной  $k$  растянута под действием постоянной силы  $F$  и находится в равновесии. Считая растяжение по-прежнему пропорциональным силе, показать, что при смещениях относительно нового положения равновесия упругая постоянная та же.
- 14.16. Небольшая тележка движется без трения по наклонному пути, в нижней точке которого установлена «мертвая петля» радиусом  $R$ . С какой высоты  $H$  должна начать движение тележка, чтобы пройти петлю, не сорвавшись?
- 14.17. Материальная точка покоится в верхней точке абсолютно гладкой сферы радиусом  $R$ , а затем начинает скользить вниз по поверхности сферы под действием силы тяжести. Какое расстояние пройдет она вниз от начальной точки прежде, чем оторвется от сферы?
- 14.18. Небольшое тело массой  $m$  движется под влиянием гравитационного притяжения по эллиптической орбите вокруг массивного тела массы  $M$ . Тяжелое тело можно считать неподвижным. Большая полуось орбиты равна  $a$ , ее эксцентриситет равен  $e$ . Вычислите полную энергию тела  $E$  (кинетическую плюс потенциальную). Обратите внимание на то, что результат не зависит от эксцентриситета.
- 14.19. а) Покажите, что площадь эллипса равна  $\pi ab$ .  
б) Получите третий закон Кеплера для эллиптических орбит.  
в) Покажите, что орбиты всех тел, у которых на единицу массы приходится одинаковая энергия, соответствуют равным периодам обращения.  
(Для простоты предполагайте, что  $m \ll M$ .)



- 14.20. Скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно покинуло гравитационное поле Земли, равна примерно  $11 \text{ км/сек}$ . Если межпланетный корабль после сгорания всего топлива (при выходе из атмосферы) двигался со скоростью  $12 \text{ км/сек}$ , какова будет его скорость на расстоянии  $10^6 \text{ км}$  от Земли?
- 14.21. Двигатели космического корабля прекращают работу где-то в районе Земли. Какую минимальную скорость должен набрать космический корабль, чтобы покинуть пределы Солнечной системы, имея «на выходе» скорость  $16 \text{ км/сек}$  относительно Солнца? Скорость Земли в ее орбитальном движении равна  $30 \text{ км/сек}$ .
- 14.22. Космический корабль из предыдущей задачи должен покинуть Солнечную систему в *определенном направлении*. Какова *максимальная* скорость запуска с Земли, которая может для этого потребоваться?
- 14.23. Требуется вывести космический корабль на околосолнечную орбиту с перигелием  $0,01 \text{ А.Е.}$  и тем же периодом обращения по орбите, который имеет Земля (1 год). С какой скоростью и в каком направлении относительно линии Земля—Солнце нужно запустить этот корабль с Земли? Орбитальная скорость Земли равна  $30 \text{ км/сек}$ .
- 14.24. Внутри сферического тела радиусом  $R$  и плотностью  $\rho$  имеется сферическая полость радиусом  $R/4$ . Центр ее находится на расстоянии  $R/4$  от точки  $C$ —центра большой сферы, на линии  $PC$ , соединяющей  $C$  с точкой  $P$ , которая находится на расстоянии  $X$  от поверхности большой сферы (см. рисунок). Найдите ускорение свободного падения  $a$  в точке  $P$ .



*К главе 15. Специальная теория относительности*

15. 1. Используя формулы преобразований Лоренца, выразите  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$  через  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  и  $t'$ .
15. 2. Проанализируйте работу «световых часов», которые ориентированы параллельно направлению своего движения. Схема этого устройства приведена на фиг. 15.3 «Лекций» (вып. 2, стр. 274). Не забудьте учесть лоренцево сокращение.
15. 3. В верхних слоях атмосферы рождается  $\mu$ -мезон, движущийся со скоростью  $v = 0,99 c$ . До распада он успевает пролететь 5,00 км.
- а) Каково время жизни  $\mu$ -мезона, наблюдаемое нами, и чему оно равняется в системе координат, связанной с самим  $\mu$ -мезоном?
  - б) Чему равна толщина слоя атмосферы, пройденного  $\mu$ -мезоном, измеренная в его «собственной» системе координат?
15. 4. Производство электроэнергии Соединенными Штатами в 1962 г. составляло  $2,15 \cdot 10^{12}$  квт-ч.
- а) Какой массе вещества соответствует эта энергия?
  - б) Представим себе, что вся эта энергия вырабатывалась бы за счет превращения дейтерия в гелий, причем разность масс использовалась бы целиком (в действительности часть ее идет на испускание нейтрино). Сколько тяжелой воды пришлось бы расходовать ежесекундно для обеспечения такого годового производства энергии?

*Примечание.*  $M_{\text{H}^2} = 2,0147$  а. е. м,  
 $M_{\text{He}^4} = 4,0039$  а. е. м.

15. 5. Мощность солнечного излучения, поглощаемая в земной атмосфере, составляет примерно  $1,4$  квт/м<sup>2</sup>. Если вся эта энергия получается на Солнце за счет превращения

обычного водорода в гелий, то сколько же тонн водорода в секунду [сгорает] на Солнце? (Потерей на испускание нейтрино пренебрегите.)

15. 6. Частица с массой покоя  $m_0$  движется вдоль оси  $x$  так, что ее положение в каждый момент времени задается формулой

$$x = \sqrt{q^2 + c^2 t^2} - b.$$

Чему равна сила, под действием которой частица совершает такое движение?

15. 7. а) Выразите ускорение свободного падения в единицах *свет. год/год<sup>2</sup>*.  
 б) Космический корабль движется с таким ускорением, что его экипаж ощущает такую же постоянную силу тяжести, что и на Земле. С точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно точки, в которой корабль находился в момент  $t = 0$ , такой разгон продолжается 5,00 лет. На какое расстояние улетит корабль за это время и какова будет его скорость в конце разгона?

### К главе 16. *Релятивистская энергия и релятивистский импульс*

16. 1. Напишите преобразование Лоренца в дифференциальной форме:  $dx = \gamma(dx' + \beta c dt')$  и т. д. и вычислите таким образом  $dx/dt$  и  $dy/dt$ , выразив эти производные через  $v'_x$ ,  $V$  и пр.
16. 2. Частица движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $v_x$  и ускорением  $a_x$ . Система координат  $S'$  движется по отношению к исходной со скоростью  $v$ . Чему равны скорость и ускорение частицы в этой системе?
16. 3. Проверьте формулу  $m_w = m_0 \sqrt{1 - (u^2/c^2)}$ , полученную в «Лекциях» (вып. 2, стр. 294).
16. 4. Частица с массой покоя  $m_0$ , движущаяся со скоростью  $4c/5$ , испытывает неупругое соударение с покоящейся частицей такой же массы.  
 а) Чему равна скорость образовавшейся составной частицы?  
 б) Чему равна ее масса покоя?
16. 5. Ускоритель «беватрон» в Беркли проектировался с таким расчетом, чтобы он мог разгонять протоны до энергии, достаточной для образования пар протон — антипротон в

реакции  $p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p})$ . Так называемая пороговая энергия этой реакции соответствует случаю, когда четыре частицы, перечисленные в правой части формулы реакции, движутся вместе как одна частица с массой покоя  $M = 4m_p$ . Если протоны мишени до соударения покоятся, чему равна пороговая кинетическая энергия бомбардирующих протонов?

### К главе 17. Пространство-время

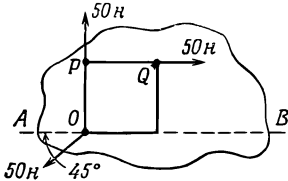
17. 1. Масса покоя протона составляет  $m_p = 938 \text{ Мэв}$ . В космических лучах встречаются протоны с энергией порядка  $10^{10} \text{ Гэв}$  ( $1 \text{ Гэв} = 10^3 \text{ Мэв}$ ); появление их удастся определить с помощью разных косвенных методов. Пусть протон с такой энергией пересекает Галактику по диаметру. Этот диаметр равен  $10^5$  световых лет. Сколько времени потребуется протону на это путешествие «с его точки зрения»?
17. 2. Покажите, что энергия покоя электрона  $m_e c^2 = 0,511 \text{ Мэв}$ .
17. 3. Покоящийся  $\pi$ -мезон ( $m_\pi = 273 m_e$ ) распадается на  $\mu$ -мезон ( $m_\mu = 207 m_e$ ) и нейтрино ( $m_\nu = 0$ ). Выразите в  $\text{Мэв}$  кинетическую энергию и импульс  $\mu$ -мезона и нейтрино.
17. 4. Изучается движение заряженной частицы в магнитном поле. Если  $q$  измеряется в зарядах электрона,  $p$  — в  $\text{Мэв}$ , а  $B$  — в  $гс$ , то как связаны между собой величины  $p$ ,  $B$  и  $R$ ? Обозначьте  $q = Zq_e$ .
17. 5. Строится циклотрон, ускоряющий протоны до кинетической энергии  $150 \text{ Мэв}$ . Напряженность магнитного поля в нем составляет  $1,00 \cdot 10^4 \text{ гс}$ .
- Чему должен быть равен радиус магнита?
  - Какова должна быть частота сигнала, подаваемого на ускоряющие электроды?
  - На сколько процентов должна меняться эта частота в процессе ускорения данной частицы из-за наличия релятивистских эффектов?

### К главе 18. Двумерные вращения

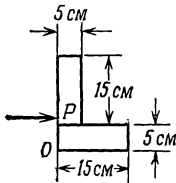
18. 1. Сила  $\mathbf{F} = 30\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$  ньютон приложена к точке  $\mathbf{r} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$  м. Найдите:
- момент силы относительно начала координат;
  - плечо силы;
  - составляющую силы, перпендикулярную  $\mathbf{r}$ .

18. 2. На какой широте скорость точки земной поверхности за счет суточного вращения Земли на  $200 \text{ м/сек}$  меньше, чем в Лос-Анджелесе?

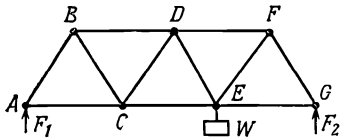
18. 3. На плоскую стальную пластинку, плавающую в ртути, действуют три силы, приложенные к трем разным углам квадрата со стороной  $0,1 \text{ м}$  (см. рисунок). Найдите силу, которая *одна* может удержать эту пластинку в положении равновесия. Найдите величину, направление и точку приложения этой силы (точка расположена на линии  $AB$ ).



18. 4. На рисунке показан уголок, сделанный из металлического листа постоянной толщины. Он лежит на гладком горизонтальном столе. После удара, направление которого указано на рисунке, уголок начинает двигаться по поверхности стола *без вращения*. На каком расстоянии от вершины  $O$  находится точка, в которой был нанесен удар?



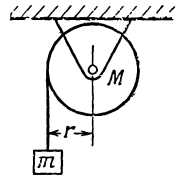
18. 5. На рисунке изображена конструкция фермы моста. Она состоит из твердых невесомых стержней равной длины, соединенных между собой шарнирно. Трение в шарнирах отсутствует. Найдите силы реакции  $F_1$  и  $F_2$  и усилие в стержне  $DF$ , если в точке  $E$  подвешен груз весом  $W$ .



18. 6. Вычислите моменты инерции следующих твердых тел, каждое из которых имеет массу  $m$ :
- Тонкий прямолинейный однородный стержень длиной  $L$ . Момент нужно вычислить относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов.
  - Тот же стержень, но ось проходит через его середину.
  - Тонкостенный полый круговой цилиндр радиусом  $r$ ; относительно оси цилиндра.

г) Сплошной круговой цилиндр радиусом  $r$ ; относительно оси цилиндра.

18. 7. Груз массой  $m$  подвешен на нити, обмотанной вокруг сплошного цилиндра массой  $M$  и радиусом  $r$ . Цилиндр может вращаться вокруг своей оси без трения (см. рисунок). Найдите ускорение груза  $m$ .



18. 8. Груз массой  $m$  движется по горизонтальной гладкой поверхности стола. К грузу привязана нить, проходящая вниз через маленькое отверстие в столе. В начальный момент длина конца нити, находящегося на поверхности стола, равна  $r_1$ , а груз  $m$  движется по кругу радиусом  $r_1$  со скоростью  $v_1$ . Затем за нить тянут снизу, и длина конца, оставшегося на поверхности стола, сокращается до  $r_2$ .

Найдите:

- скорость груза  $v_2$  в конечном состоянии;
- работу, совершенную силой, которая тянула нить под стол;
- величину силы, которую необходимо приложить к нижнему концу нити, чтобы радиус окружности, по которой движется  $m$ , оставался постоянным.

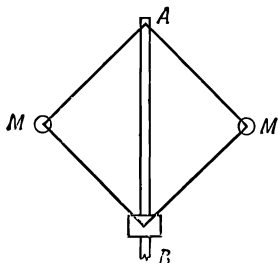
Используйте принцип виртуальной работы.

18. 9. Найдите момент количества движения планеты массой  $m$ , которая движется по круговой орбите радиусом  $R$ . Используя этот результат, покажите, что из-за приливов, тормозящих вращение Земли, расстояние между Луной и Землей с течением времени будет увеличиваться (хотя и очень медленно). Обсудите еще вопрос о сохранении энергии в системе Земля — Луна.

18.10. Решите задачу 4.9, используя следующее условие: в положении статического равновесия результирующая сила и результирующий момент, приложенные к телу, должны равняться нулю.

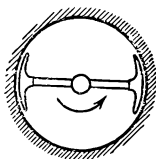
18.11. Центробежный регулятор, показанный на рисунке, должен выключать машину, когда скорость вращения вала превосходит 120 оборотов в минуту. Управляющая обойма

$C$  весит  $4 \text{ кг}$  и скользит без трения по вертикальному валу  $AB$ . Выключение происходит, когда расстояние  $AC$  сокращается до  $43 \text{ см}$ . Длина каждого из звеньев регулятора равна  $30 \text{ см}$ , их можно считать невесомыми, трение



в соединительных шарнирах отсутствует. Чему должна равняться масса грузиков  $M$ , чтобы регулятор работал в соответствии с техническим заданием?

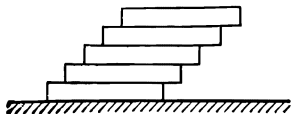
- 18.12. На вертикальный вал простого регулятора скорости (см. схему) перпендикулярно ему насажен горизонтальный стержень, по которому могут свободно скользить тяжелые тормозные колодки. Во время вращения вала колодки прижимаются к внутренней поверхности неподвижного тормозного цилиндра (барабана). Масса каждой колодки равна  $m$ , толщина их пренебрежимо мала по сравнению с радиусом барабана  $r$ , а коэффициент трения скольжения между колодками и барабаном равен  $\mu$ . Выведите формулу, которая выражала бы мощность, необ-



ходимую для вращения вала, через  $m$ ,  $r$ ,  $\mu$  и  $\omega$  — угловую скорость вращения вала.

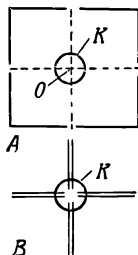
- 18.13. Однородный брусок длиной  $L$  лежит на гладкой горизонтальной поверхности (см. рисунок). Сверху на него накладываются такие же бруски так, что их боковые грани образуют одну плоскость, а торец каждого следующего бруска смещается по отношению к предыдущему на величину  $L/a$  ( $a$  — целое число). Сколько брусков удастся уложить, прежде чем все сооружение опрокинется?

Покажите, что, если не ограничивать себя ни числом брусков, ни способом их укладки, верхний брусок можно сдвинуть относительно нижнего на сколь угодно большое расстояние.



## К главе 19. Центр масс; момент инерции

19. 1. Восемь тонких однородных стержней образуют плоский квадрат, поддерживаемый невесомой рамкой (показана пунктиром на рисунке А). Длина каждого стержня равна  $L$ , а масса  $M$ . Квадрат свободно вращается без трения вокруг оси  $O$ , перпендикулярной его плоскости, с угловой скоростью  $\omega_0$  рад/сек. В процессе вращения внутренний механизм  $K$ , соединенный с рамкой и имеющий постоянный момент инерции  $\frac{40}{3}ML^2$ , складывает квадрат в крест, изображенный на рисунке В. Какую он при этом затрачивает энергию?



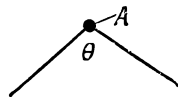
19. 2. Упругий момент, создаваемый закручиваемой нитью, пропорционален углу закручивания:  $\tau_{\text{нити}} = -k\theta$ .
- Покажите, что потенциальная энергия такой нити, закрученной на угол  $\theta$ , равна  $\frac{1}{2}k\theta^2$ .
  - Момент, действующий на рамку гальванометра, имеет вид

$$\tau = nABi,$$

где  $i$  — ток, текущий через рамку;  $n$  — число витков в рамке;  $B$  — магнитное поле, создаваемое постоянным магнитом гальванометра.

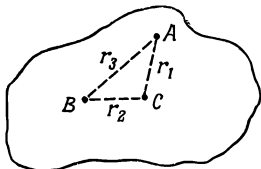
Для измерения заряда конденсатора его разряжают через рамку гальванометра и отмечают максимальный угол отклонения. При этом разряд происходит так быстро, что за то время, пока течет ток, рамка не успевает существенно отклониться от начального положения  $\theta = 0$ . Пренебрегая трением и учитывая, что  $|i| = |dq/dt|$ , покажите, что максимальный угол отклонения пропорционален первоначальному заряду конденсатора.

19. 3. Прямолинейная однородная проволока длиной  $L$  и массой  $M$  согнута посередине под углом  $\theta$ . Чему равен ее момент инерции относительно оси, проходящей через точку  $A$  и перпендикулярной плоскости проволоки?



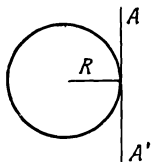


19. 4. Металлическая пластинка неправильной формы, но постоянной толщины имеет массу  $M$  и центр тяжести ее расположен в точке  $C$ . Момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости пластинки (и проходящей через точку  $A$ ), известен и равен  $I_A$ . При каких условиях, налагаемых на расстояния  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ , справедливо следующее выражение для момента инерции пластинки относительно оси, также перпендикулярной плоскости пластинки, но проходящей через точку  $B$ :



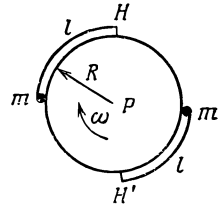
$$I_B = I_A + Mr_3^2?$$

19. 5. Круг радиусом  $R$  вращается вокруг своей касательной  $AA'$ . При этом образуется тело вращения, называемое тором. Найдите объем этого тора.

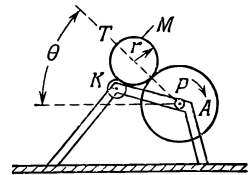


19. 6. Материальные точки массами  $M_1$  и  $M_2$  помещены на противоположных концах невесомого стержня длиной  $L$ . Стержень приводится во вращение вокруг оси, перпендикулярной ему. Через какую точку стержня должна проходить ось вращения, чтобы энергия, затрачиваемая на достижение заданной угловой скорости  $\omega_0$ , была минимальна?
19. 7. Для замедления вращательного движения искусственных спутников используется устройство, работающее по следующему принципу. Однородный круглый диск радиусом  $R$  и массой  $M$  может свободно вращаться в горизонтальной плоскости вокруг шарнира  $P$ , установленного в центре диска. На краю диска укреплены два маленьких груза, масса каждого из них  $m$ . С диском их также соединяют две нити длиной  $l$ , намотанные по его периферии (см. рисунок). Когда диск вращается, грузики одновременно освобождаются без изменения полного момента количества движения системы. После этого грузики отлетают от диска, и в тот момент, когда нити натягиваются вдоль

радиальных направлений, они соскакивают с крючков  $H$  и  $H'$ , позволяя грузикам улететь. Найдите длину нитей  $l$ , при которой угловая скорость диска в результате этой операции уменьшится в  $n$  раз.

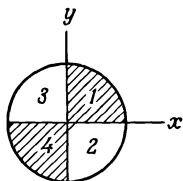


19. 8. Джим находится в системе координат  $(x', y')$  и вращается относительно Джо, который неподвижен и находится в системе координат  $(x, y)$ . Найдите выражение для компонент силы, которая, по мнению Джима, действует на некоторую частицу, и покажите, что она складывается из компонент истинной силы  $\mathbf{F}$ , которую наблюдает и Джо, и двух псевдосил: радиальной центробежной силы и силы Кориолиса, которая перпендикулярна скорости.
19. 9. Однородный шар радиусом  $R$  и массой  $M$  в начальный момент пущен по плоскости так, что он скользит по ней без качения. Между шаром и плоскостью существует трение, коэффициент которого равен  $\mu$ . Какое расстояние пройдет шар, прежде чем его движение превратится в качение без скольжения, и какова будет к этому моменту его скорость?
- 19.10. На рисунке изображена упрощенная схема устройства для подачи типографской краски в печатном станке. Краска подается из барабана  $K$ , который свободно вращается на закрепленной оси. Момент инерции этого барабана пренебрежимо мал;  $P$  — ведомый печатный вал с неподвижной осью, а  $T$  — передающий валик, свободно катящийся по  $K$  и  $P$ . Валик  $T$  — это сплошной цилиндр радиусом  $r$  и массой  $M$ ; он все время катится по  $K$  и  $P$  без скольжения, и геометрия устройства такова, что линия, соединяющая оси  $T$  и  $P$ , образует с горизонталью угол  $\theta$ . Какое максимальное угловое ускорение  $A$  можно сообщить валу  $P$  без потери контакта между  $T$  и  $K$ ?

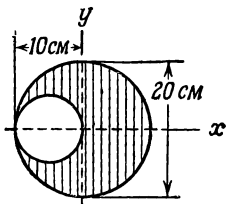


- 19.11. Сплошной цилиндр состоит из четырех секций — квадрантов, причем плотности материалов, из которых сделаны

разные секции, различаются и относятся, как числа, указанные на рисунке. Проведем оси  $x$  и  $y$  так, как показано на рисунке. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и через центр масс цилиндра.

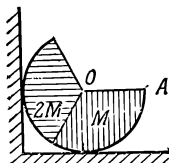


- 19.12. В диске постоянной плотности вырезано отверстие, как показано на рисунке. Найдите положение центра масс полученного тела.



- 19.13. Найдите положение центра масс однородной проволоки, изогнутой по дуге окружности радиусом  $R$ . Длина проволоки  $L$  ( $R > L/2\pi$ ). Используйте систему координат с началом в центре окружности и с осью  $x$ , проходящей через середину проволоки.
- 19.14. Используя результат предыдущей задачи или другой способ, найдите центр тяжести сектора с углом раствора  $\alpha$ , вырезанного из однородного диска радиусом  $R$ .
- 19.15. Цилиндр, радиус которого  $\pi$  см, а масса 3 кг, разрезан на три равные части. То же самое сделано с другим цилиндром радиусом  $\pi$  см, но массой уже 6 кг. Эти куски склеены друг с другом, как показано на рисунке, причем линия  $OA$  направлена горизонтально. Стенка абсолютно гладкая, а «пол» — абсолютно шероховатый.

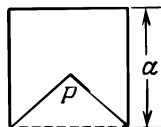
- а) С какой силой цилиндр давит на стенку?  
 б) На каком расстоянии от центра на линии  $OA$  следует поместить материальную точку массой  $m$ , чтобы система оставалась в равновесии и после удаления стенки?



- 19.16. Из квадратной металлической пластинки с длиной ребра  $a$  необходимо вырезать с одной стороны равнобедренный

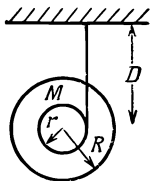
треугольник так, чтобы оставшаяся фигура, будучи подвешена за точку  $P$  (вершину треугольника), находилась в равновесии независимо от положения.

Чему равна высота треугольника?



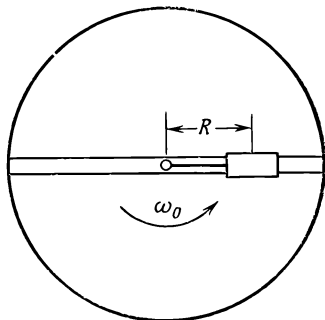
- 19.17. Катушка состоит из двух одинаковых дисков радиусом  $R$  и массой  $M$ , насаженных на невесомую ось радиусом  $r$ . Нить, намотанная на ось катушки, прикреплена к потолку. Расстояние от катушки до потолка равно  $D$  (см. рисунок). Из этого состояния катушка начинает двигаться вниз.

- Какой угол должна образовать нить с вертикалью в начальный момент, чтобы, опускаясь, катушка не раскачивалась?
- Каково вертикальное ускорение центра катушки?



- 19.18. Поворотный стол с моментом инерции  $I_0$  свободно вращается вокруг вертикальной оси. На столе проложена прямолинейная радиальная дорожка, по которой может без трения двигаться тележка массой  $m$  (см. рисунок). Нить, привязанная к тележке, перекинута через маленький блок, а затем уходит под стол через полую ось. Первоначально система вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ , и тележка находится на фиксированном расстоянии  $R$  от оси. Затем нить некоторой внешней силой вытягивается внутрь оси на такое расстояние, что тележка теперь отделена от оси меньшим промежутком  $r$  и остается в этом положении.

- Чему равна угловая скорость системы в конечном состоянии?
- Покажите подробно, что разность между значениями энергии системы в конечном и начальном состояниях равна работе, которую совершила сила, вытягивающая нить.
- Если нить отпустить, с какой радиальной скоростью  $v_r$  пройдет тележка через точку  $R$ ?



## К главе 20. Вращение в пространстве

20. 1. Записав векторы в компонентной форме или как-нибудь по-другому, докажите следующие соотношения:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

$$(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0,$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

20. 2. Твердое тело вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  относительно некоторой фиксированной оси. Покажите, что скорость любой точки  $P$  этого тела равна  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  — вектор, проведенный из произвольно выбранной точки, расположенной на оси вращения, к данной.

20. 3. Твердое тело вначале поворачивается на очень малый угол  $\Delta\theta_1$  относительно одной оси, а затем на очень малый угол  $\Delta\theta_2$  относительно другой оси, пересекающей первую в точке  $O$ . Покажите, что общее смещение любой точки рассматриваемого тела такое же, как если бы оно было сразу повернуто на определенный малый угол относительно некоторой оси. Как найти эти ось и угол? Докажите, что твердое тело, подвергнутое одновременно действию нескольких угловых скоростей относительно различных осей, движется так, как если бы на него действовала только одна угловая скорость, равная векторной сумме всех слагающих скоростей. (Каждую угловую скорость следует рассматривать как вектор длиной  $\omega$ , направленный вдоль оси вращения.)

20. 4. Система  $N$  частиц с массами  $m_i$ , координатами  $\mathbf{r}_i$  и скоростями  $\mathbf{v}_i$  обладает моментом количества движения, равным

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i).$$

Если же рассматривать систему координат, жестко связанную с центром масс, то можно считать, что система имеет момент количества движения  $\mathbf{L}_{ц.м.}$ . Пусть  $\mathbf{R}_{ц.м.}$  и  $\mathbf{v}_{ц.м.}$  — это положение и скорость центра масс, а

$M = \sum_{i=1}^N m_i$  — общая масса всех частиц. Покажите, что

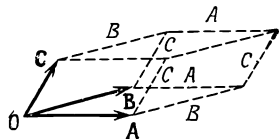
$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{ц.м.} + M(\mathbf{R}_{ц.м.} \times \mathbf{v}_{ц.м.}).$$

Сравните результат с решением задачи 11.9.

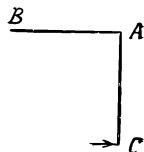
20. 5. а) Любые три вектора  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  можно рассматривать как определяющие твердое тело с шестью попарно параллельными плоскостями, т. е. параллелепипед. Покажите, что объем этого тела равен

$$V = |\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|.$$

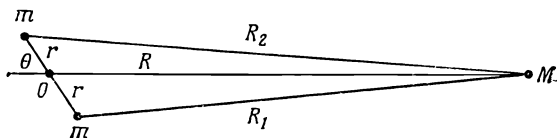
Параллелепипед, одна из вершин которого находится в начале координат, имеет три соседние вершины в точках  $(10, -5, 3)$ ,  $(3, -4, 7)$  и  $(-5, -6, 3)$ . Используется прямоугольная система координат  $(x, y, z)$ . Чему равен объем параллелепипеда?



20. 6. Два однородных одинаковых жестких стержня  $AB$  и  $AC$  скреплены в точке  $A$  ( $AC \perp AB$ ) и перемещаются на гладком горизонтальном столе. В точке  $C$  перпендикулярно  $AC$  наносится горизонтальный удар. Найдите отношение скоростей центров масс стержней  $AB$  и  $AC$  немедленно после удара.



20. 7. Маховик, имеющий форму однородной тонкой круглой пластинки массой  $10,0 \text{ кг}$  и радиуса  $1,00 \text{ м}$ , смонтирован на оси, проходящей через центр масс и составляющий угол  $1^\circ$  с перпендикуляром, восстановленным к плоскости маховика. Если последний вращается относительно этой оси с угловой скоростью  $25,0 \text{ рад/сек}$ , то чему равна пара сил, приложенная к его подшипникам?
20. 8. Два тела с одинаковыми массами  $m$ , скрепленные жестким стержнем (не имеющим массы) на расстоянии  $2r$  друг от друга, притягиваются телом массы  $M$ , расположенным на расстоянии  $R \gg r$  от центра стержня. Стержень составляет угол  $\theta$  с направлением  $R$ . Найдите приближенную величину вращающего момента относительно его центра.



20. 9. Как Луна, так и Солнце в результате действия на Землю создают вращающий момент, поскольку Земля слегка сплюснута. Какое небесное тело образует больший момент и приблизительно во сколько раз? (См. предыдущую задачу.)

20.10. Экваториальный и полярный радиусы Земли равны 6378,388 и 6356,912 км соответственно. Плотность  $\rho$  на различных глубинах  $D$ , отсчитанных от поверхности Земли, приведена ниже (звездочкой помечены скачки плотности):

$D$ , км	0	30*	100	200	400	1000	2000	2900*	3500	5000*	6000
$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	2,60	3,0	3,4	3,5	3,6	4,7	5,2	5,7	10,2	11,5	17,1
		3,3						9,4		16,8	

Используя эти значения, оцените:

- момент инерции Земли;
- ее вращательный момент количества движения;
- кинетическую энергию вращения.

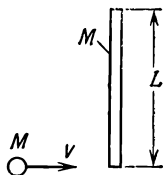
20.11. 1) Симметричное тело начинает катиться (без скольжения) вниз по наклонной плоскости с высоты  $h$ . Момент инерции тела относительно оси, проходящей через собственный центр масс, равен  $I$ , масса тела равна  $M$ , а радиус поверхности качения, находящейся в контакте с наклонной плоскостью,  $r$ . Определите линейную скорость центра масс в нижней точке наклонной плоскости.

2) Примените полученное вами общее выражение для определения скорости центра масс тела, если это тело а) сфера; б) диск; в) диск массой  $M_1$  с внешним радиусом  $R_1$ , насаженный на вал, имеющий массу  $m_2$  и радиус  $r_2$ .

20.12. Тонкий стержень массой  $M$  и длиной  $L$  лежит на горизонтальной абсолютно гладкой поверхности. Кусок замазки такой же массы, обладающей скоростью  $v$ , которая направлена перпендикулярно стержню, ударяется об один конец стержня и прилипает к нему, совершая тем самым неупругое столкновение очень малой продолжительности.

- Какова скорость центра масс системы до и после столкновения?
- Чему равен момент количества движения системы относительно ее центра масс непосредственно перед столкновением?

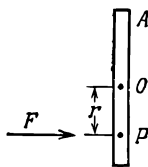
- в) Чему равна угловая скорость (относительно центра масс) сразу же после столкновения?  
 г) На сколько уменьшается кинетическая энергия системы при столкновении?



**20.13.** Если весь лед на Земле растопить, то средний уровень мирового океана поднимется приблизительно на 61 м. Примите среднюю широту, где находятся льды, равной  $80^\circ$ ; нерегулярным распределением водных масс океанов на Земле пренебрегите и рассчитайте, на сколько секунд увеличится при этом длина дня? Предполагаем, что Земля — сфера радиусом 6370 км с моментом инерции  $8,11 \cdot 10^{37}$  кгм<sup>2</sup>.

**20.14.** Однородный стержень длиной  $L$  и массой  $M$  покоится на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. За очень малый промежуток времени он получает импульс  $J = \int F dt$ , приложенный в точке  $P$  ( $OP = r$ ).

- а) Чему равна скорость центра масс  $O$  сразу же после сообщения импульса? Чему равна угловая скорость относительно точки  $O$ ? Какова мгновенная скорость точки  $A$  на другом конце стержня?  
 б) Определите расстояние  $AP$ , для которого скорость точки  $A$  равнялась бы нулю сразу же после удара?



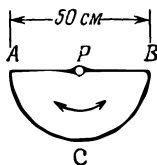
### К главе 21. Гармонический осциллятор

- 21. 1.** Твердое тело массой  $M$  свободно насажено на расположенную горизонтально ось, которая проходит на расстоянии  $d$  от центра масс  $C$ . Момент инерции относительно оси вращения равен  $I$  (трение отсутствует).
- а) Напишите дифференциальное уравнение, которое описывает изменение угла поворота тела  $\theta$  со временем (угол  $\theta$  отсчитывайте от равновесного положения тела).
- б) Если тело совершает малые колебания, так что  $\sin \theta \approx \theta$ , то чему равен период этих колебаний?



21. 2. В предыдущей задаче момент инерции твердого тела относительно его центра масс равен  $I_c$ . Найдите выражение для периода малых колебаний как функции  $d$  (и  $I_c$ ) и покажите:
- что имеются два значения  $d$ :  $d_1$  и  $d_2$ , которые соответствуют данному периоду;
  - что период равен  $T = 2\pi \left( \frac{d_1 + d_2}{g} \right)$ ;
  - что период минимален, когда  $d = \sqrt{I_c/M}$ . Найдите это минимальное значение периода.
21. 3. Линейная пружина, находясь в свободном состоянии, имеет длину  $D$ , а когда на ее конце подвешен груз массой  $m$ , ее длина становится равной  $D + A$ . На груз, находящийся в покое, с высоты  $A$  падает другой груз такой же массы, прилипающий к первому. Найдите период и амплитуду колебаний такой системы и максимальную высоту (над первоначальным положением равновесия), достигаемые в результирующем движении.
21. 4. Две частицы  $A$  и  $B$  совершают гармоническое движение с одинаковой амплитудой (10 см) по одной и той же прямой. Частоты их движений составляют  $\omega_A = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\omega_B = 21 \text{ сек}^{-1}$  соответственно. В момент времени  $t = 0$  обе частицы проходят точку  $x = 0$  в положительном направлении оси  $x$  (следовательно, они находятся «в фазе»).
- На каком расстоянии они будут находиться друг от друга в момент времени  $t = 0,350 \text{ сек}$ ?
  - Какова скорость частицы  $B$  относительно  $A$  в этот же момент времени?

21. 5. Каркас, сделанный из однородной проволоки, состоит из полуокружности  $ACB$  и ее диаметра  $AB$ . Этот каркас прикрепляется с помощью абсолютно гладкого штифта в точке  $P$ , проходящей через отверстие в средней точке его диаметра, и приводится в движение как маятник. Если диаметр каркаса  $AB$  равен 50 см, то каков период колебательного движения такого каркаса?



21. 6. На вертикальной пружине пренебрежимо малой массы подвешена пластина массой 20 г, на которой лежит грузик массой 5 г. Если оттянуть пружину, то система начнет колебаться с периодом  $\pi/3 \text{ сек}$ . Затем груз 5 г заме-

няется другим с массой 25 г. Каково будет смещение пластины при равновесии?

21. 7. Две частицы с массами  $\frac{3}{4}M$  и  $M$  соединены пружиной пренебрежимо малой массы; длина пружины в свободном состоянии равна  $L$ , упругая постоянная  $K$ . Вначале массы покоятся на расстоянии  $L$  друг от друга на горизонтальном абсолютно гладком столе. Третья частица массой  $\frac{1}{4}M$ , движущаяся вдоль линии, соединяющей первые две частицы, сталкивается и прилипает к частице массой  $\frac{3}{4}M$ . Найти амплитуду и период колебаний системы.
21. 8. Гравитационная сила, действующая на частицу, которая помещена в однородный шар, прямо пропорциональна расстоянию от центра шара. Если принять за такой шар Землю и просверлить сквозь нее вдоль ее диаметра, соединяющего полюса, отверстие, то сколько времени понадобится телу, попавшему в это отверстие, чтобы достигнуть поверхности с противоположной стороны Земли? Спротивлением воздуха пренебречь.
21. 9. В начальном состоянии колония бактерий растет со скоростью, пропорциональной числу наличных бактерий. Написать дифференциальное уравнение, выражающее это соотношение.
- 21.10. Точка подвеса математического маятника, период собственных колебаний которого равен 1 сек, совершает синусоидальные колебания с амплитудой 1,00 см и периодом 1,10 сек. Какова амплитуда установившихся колебаний маятника?

### К главе 22. Алгебра

Наиболее общим видом числа, которое удовлетворяет правилам элементарной алгебры, является *комплексное число*. Оно может быть записано в виде суммы действительного (вещественного) и мнимого чисел

(Комплексное число)  $u = (\text{Вещественное число}) x + (\text{Мнимое число}) iy$ ,

$i = \sqrt{-1}$  называется мнимой единицей.

Любое алгебраическое уравнение должно оставаться справедливым при изменении знака перед  $i$ . Такая операция носит название *комплексного сопряжения*. Если  $u = x + iy$ , то комплексно сопряженное число  $u^*$  равно  $x - iy$ .

Правила алгебры, примененные к комплексным числам, дают

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Величина  $|u| = \sqrt{uu^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$  называется *модулем* числа  $u$ .

Вещественное число, возведенное в мнимую степень, становится комплексным числом с модулем, равным единице. Если величина мнимой степени изменяется, то вещественная и мнимая части комплексного числа осциллируют по закону синуса и косинуса. В частности,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (A)$$

• • •

22. 1. В равенстве  $u + iv = (a + ib)(c + id)$  положим

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{d}{c} = \operatorname{tg} \beta.$$

Используя формулу (22.4) «Лекций» (вып. 2, стр. 381) и формулы тригонометрии, покажите, что

$$а) \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2},$$

$$б) \frac{v}{u} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

22. 2. Решите предыдущую задачу, используя приведенную выше формулу (A).

22. 3. Покажите, что

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

22. 4. Покажите, что

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd + i(bc - cd)}{c^2 + d^2}.$$

22. 5. Функции  $\operatorname{ch} \theta$  и  $\operatorname{sh} \theta$ , определяемые равенствами

$$\operatorname{ch} \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}, \quad \operatorname{sh} \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2},$$

называются гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом угла  $\theta$ .

Покажите, что

$$\begin{aligned} \cos i\theta &= \operatorname{ch} \theta, \\ \sin i\theta &= i \operatorname{sh} \theta, \\ \operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta &= 1. \end{aligned}$$

6. Используя основную формулу дифференцирования

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

докажите, что

$$\frac{d}{dx} (e^{ax}) = ae^{ax}.$$

22. 7. а) Последовательным дифференцированием или каким-либо иным способом покажите, что функция  $e^x$  может быть представлена в виде следующего бесконечного ряда:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

б) Покажите, что функции  $\cos x$  и  $\sin x$  могут быть представлены следующими бесконечными рядами:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(Эти ряды часто применяются при вычислении функций  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$  для значений  $x \ll 1$ , хотя они сходятся при любых  $x$ .)

22. 8. Найдите полное алгебраическое решение уравнения

$$y = \sqrt[n]{1},$$

где  $n$  — целое число.

22. 9. Используя свойства функции  $e^{i\theta}$  и биномиальную теорему, покажите, что

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots$$

22.10. а) Воспользовавшись соотношением  $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi}$ , выведите тригонометрические формулы косинуса и синуса суммы двух углов.

б) Дайте геометрическую интерпретацию результата умножения одного комплексного числа  $Ae^{i\theta}$  на другое комплексное число  $Be^{i\varphi}$ .

- 22.11. Найдите  $\log_{11} 2$  и  $\log_{11} 7$ , используя следующую таблицу последовательных значений корней  $r$ -й степени из числа 11:

Показатель корня	$\sqrt[r]{11}$	$\log_{11} \sqrt[r]{11}$
1	11,000	1,00000
2	3,3166	1,50000
4	1,8212	0,25000
8	1,3495	0,12500
16	1,1617	0,06667
32	1,0778	0,03333
64	1,0382	0,01667
128	1,0189	0,00833

Проверьте свой результат с помощью тождества

$$\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N,$$

где  $a$  и  $b$  — любые два значения основания логарифмов.

### К главе 23. Резонанс

23. 1. Составьте и решите дифференциальное уравнение, описывающее поведение тока, когда он протекает:
- в катушке индуктивностью  $L$ ,
  - в конденсаторе емкостью  $C$ ,
- если к ним приложено синусоидальное напряжение частотой  $\omega$ .
- Найдите комплексный импеданс указанных выше цепей.
23. 2. Найдите зависимость импеданса (полного сопротивления)  $Z$  от частоты  $\omega$  для цепи, состоящей из индуктивности  $L$  и емкости  $C$ , если они соединены:
- последовательно,
  - параллельно.
- Качественно обсудите полученные результаты.
23. 3. а) Покажите, что дифференциальное уравнение движения тела массой  $m$ , прикрепленного к пружине с упругой постоянной  $k$  и испытывающего силу трения  $-m\gamma v$ , имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

- б) Найдите решение этого уравнения (используйте комплексную форму записи!), предполагая, что оно имеет вид  $x = e^{\alpha t}$ , а затем покажите, что общее решение дается выражением

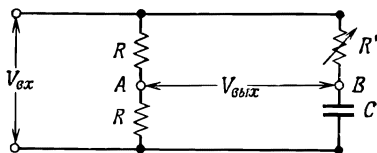
$$x = e^{-\frac{1}{2} \gamma t} \left[ A \cos \left( \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} t \right) \right],$$

если  $\gamma < 2\omega_0$ .

- в) Как изменится вид найденного решения, если  $\gamma > 2\omega_0$ ?

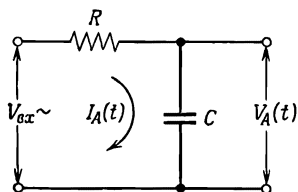
23. 4. В момент времени  $t = 0$  положение и скорость тела массой  $m$  (см. предыдущую задачу) равны  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = v_0$ . Найдите  $A$  и  $B$ .

23. 5. Часто требуется, чтобы в электрической цепи имелось синусоидальное напряжение постоянной амплитуды, фазу которого можно менять. Электрическая схема, с помощью которой можно осуществить это требование, называется фазовращателем. Один из примеров такой цепи показан на рисунке. Докажите, что амплитуда напряжения между точками  $A$  и  $B$  составляет половину амплитуды входного напряжения, а фаза может меняться в пределах от  $0$  до  $180^\circ$  при изменении сопротивления  $R'$ .

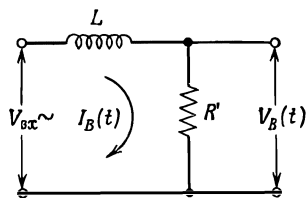


23. 6. На входе цепей  $A$  и  $B$  (см. рисунок) имеется источник с напряжением  $V_{вх} = V_0 \cos \omega t$ . Положим, что ток, протекающий через клеммы на выходе цепей, пренебрежимо мал.

- а) Найдите соотношение, которое должно существовать между  $R$ ,  $C$ ,  $R'$  и  $L$ , чтобы выходные напряжения обеих цепей  $V_A(t)$  и  $V_B(t)$  были равны.  
 б) Найдите токи  $I_A(t)$  и  $I_B(t)$ .



A



B

### К главе 24. Переходные решения

24. 1. Тело на воздушной подушке при движении теряет свою скорость главным образом из-за вязкости в тонком воздушном слое под ним, причем сила торможения пропорциональна скорости. Составьте и решите дифференциальное уравнение движения тела на плоскости. Как его скорость изменяется:

- со временем?
- с расстоянием?

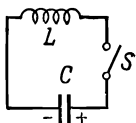
24. 2. Пластины конденсатора емкостью  $C$ , первоначально заряженного до напряжения  $V_0$ , в момент времени  $t=0$  соединяются через сопротивление  $R$ . Составьте дифференциальное уравнение для  $V$  как функции  $t$ . Решите это уравнение, предполагая, что существует экспоненциальное решение.

24. 3. Тело на воздушной подушке имеет магнит. Этот магнит при движении тела генерирует круговые токи, магнитные поля которых действуют на магнит, в результате чего появляется замедляющая сила, пропорциональная скорости. Найдите (в зависимости от коэффициента торможения  $\gamma$ ):

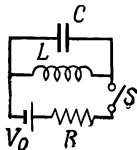
- конечную скорость, достигаемую телом;
- скорость тела в зависимости от времени;
- положение тела в зависимости от времени, если оно начинает двигаться из состояния покоя.

24. 4. Конденсатор емкостью  $C$  и катушка индуктивностью  $L$  соединены так, как показано на рисунке. Конденсатор первоначально заряжен до напряжения  $V_0$ , а ключ  $S$  разомкнут. В момент времени  $t=0$  он замыкается.

- Найдите напряжение на конденсаторе в зависимости от времени.
- Рассчитайте зависимость от времени величин  $CV^2/2$  и  $LI^2/2$ . Каков, по-вашему, физический смысл этих величин?



24. 5. В электрической цепи, показанной на рисунке, ключ  $S$  вначале замкнут. По цепи протекает постоянный ток  $I = V_0/R$ . В момент времени  $t=0$  ключ мгновенно размыкает цепь. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе.



24. 6. Тело массой 5,0 кг колеблется с малым затуханием, которым можно пренебречь. Подвешенное на пружине тело совершает 10 полных колебаний за 10,0 сек, затем приводится в действие маленький магнитный замедлитель движения и появляется затухание, пропорциональное скорости движения. В результате амплитуда колебаний уменьшается за 10 полных циклов от 0,2 до 0,1 м.
- Составьте уравнение движения тела, причем коэффициенты перед членами  $d^2x/dt^2$ ,  $dx/dt$  и  $x$  выразите в численном виде, воспользовавшись системой единиц МКС.
  - Чему равен новый период колебаний тела?
  - За сколько колебаний (начиная с цикла с амплитудой 0,2 м) амплитуда уменьшается до 0,05 м? До 0,02 м?
  - Чему равна максимальная скорость диссипации энергии в течение первого колебания?

24. 7. Гармонический осциллятор с затуханием представляет собой шарик массой  $m$ , подвешенный на пружине с упругой постоянной  $k$ ; он находится в вязкой среде, в результате взаимодействия с которой появляется сила трения, равная  $-m\gamma(dx/dt)$ .

1) Для случая движения с трением найдите решения  $x = x(t)$  для  $t \geq 0$ , если на шарик действует сила:

$$a) F = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ F_0 = \text{const} & \text{при } t \geq 0; \end{cases}$$

б) сила отсутствует, но в момент времени  $t = 0$  шарик сообщается импульс  $p = p_x$ ;

$$в) F = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ F_0 \cos \omega_0 t & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

2) Если на осциллятор действует сила  $F = F_0 \cos \omega t$  и рассматриваются достаточно большие отрезки времени, то чему равна частота  $\omega^*$ , при которой амплитуда колебаний достигает максимального значения?

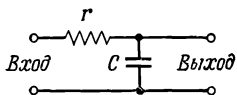
*Примечание.* Помните, что полное решение содержит два члена, описывающие как стационарное, так и переходное движение, и что начальные условия полностью определяют постоянные интегрирования.

### К главе 25. Линейные системы

25. 1. Чтобы уменьшить колебания напряжения, снимаемого с выпрямительного устройства, используется так называемый «сглаживающий» фильтр. В простейшем случае он состоит из резистора ( $r = 10^3 \text{ ом}$ ), соединенного с конден-

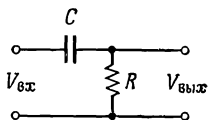


сатором ( $C = 10$  мкф) так, как показано на рисунке. Найдите напряжение на выходе конденсатора, если входное напряжение имеет постоянную компоненту  $V_0$  и переменную компоненту с циклической частотой  $120 \text{ сек}^{-1}$  и амплитудой  $V_2$ .



25. 2. Во многих случаях желательно иметь электрическую цепь, которая «дифференцирует» функцию, описывающую подаваемое на ее вход напряжение, по времени. Простая цепь, удовлетворяющая этому требованию, изображена на рисунке. Покажите, что выходное напряжение в такой цепи (если пренебречь током, протекающим на выходе) равно

$$V_{\text{вых}}(t) = RC \frac{dV_{\text{вх}}}{dt}$$



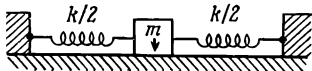
при условии, что

$$|V_{\text{вых}}| \ll |V_{\text{вх}}|.$$

25. 3. Найдите  $V_{\text{вых}}$  в цепи, изображенной на рисунке к предыдущей задаче, для случая, когда  $V_{\text{вх}} = V_0 \cos \omega t$ , и проверьте еще раз правильность результата, полученного выше.
25. 4. Придумайте простую цепь, которая «интегрировала» бы входное напряжение и обсудите ее свойства.
25. 5. Тело массой  $m$ , прикрепленное двумя одинаковыми горизонтальными пружинами с упругими постоянными  $k/2$ , скользит по поверхности стола. Предполагается, что коэффициент трения постоянен. Тело смещают в сторону на расстояние  $A$  вправо от центральной точки и затем отпускают.
- а) Составьте дифференциальное уравнение движения тела и решите его для временного интервала

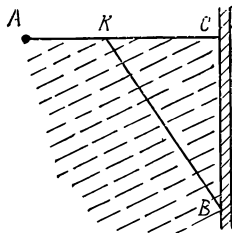
$$0 < t < \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- б) Каково должно быть расстояние  $A$ , чтобы размах колебания тела оставался больше расстояния  $B$  от центра после пересечения точки  $x = 0$  целое число  $(0, 1, 2 \dots)$  раз?



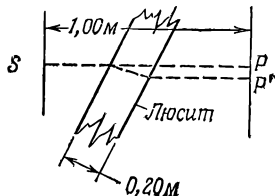
К главе 26. **Оптика. Принцип наименьшего времени**

26. 1. Пешеход, идя по тротуару, проходит 1,5 м в 1 сек, а по вспаханному полю — только 0,9 м за 1 сек. Он вышел из точки  $A$ , находящейся на расстоянии 42 м от стены, и направляется в точку  $B$ , расположенную к югу вдоль стены на расстоянии 36 м от края поля. По какому пути  $AKB$  должен идти пешеход, чтобы пройти его за кратчайшее время? (Уместно предположить, что к этой задаче приложим «закон преломления». Однако если вы достаточно смелы, то попытайтесь решить ее без такого предположения, а потом проверьте, оправдывается ли оно.)

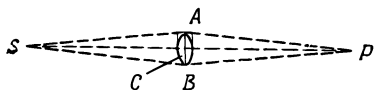


26. 2. Свет от источника  $S$ , расположенного на расстоянии 1 м от экрана, посылается узким пучком перпендикулярно экрану и попадает на него в точке  $P$ . На пути луча помещается пластинка из люсита толщиной 0,2 м (показатель преломления люсита 1,5) так, чтобы направление распространения пучка в этой пластине составляло  $30^\circ$  с первоначальным направлением (когда не было пластины).

- Найдите боковое смещение луча  $PP'$ .
- Найдите в процентах увеличение времени прохождения лучом пути  $SP'$  по сравнению с временем, необходимым для прохождения первоначального пути  $SP$  в воздухе.



26. 3. Пусть  $S$  — источник света, а  $P$  — его изображение, даваемое линзой  $ACB$ ,  $SC = CP = 1$  м,  $AC = BC = 0,1$  м. Линза  $ACB$  имеет на краях толщину 3 мм. Если луч проходит путь  $SCP$  за то же время, что и расстояния  $SAP$  и  $SBP$ , то какова толщина линзы в середине (в точке  $C$ )? (Показатель преломления стекла 1,60.)

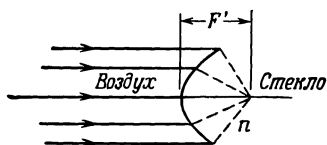


26. 4. В обычном плоском зеркале наше изображение оказывается перевернутым справа налево, т. е. изображение правой руки выглядит, как левая рука. Почему зеркало не переворачивает еще все и вверх ногами? Что действительно переворачивается зеркалом?
26. 5. Два плоских зеркала расположены так, что образуют прямой двугранный угол, причем линия пересечения вертикальна. Объяснить, почему в таком зеркале мы «видим себя такими, какими нас видят другие люди».
26. 6. Три взаимно перпендикулярных зеркала расположены так, что образуют прямой трехгранный угол. Луч света падает на одно из зеркал, а затем, отражаясь от него, попадает на другое зеркало, а может быть, и на третье. Покажите, что после всех отражений (мы предполагаем, что зеркала безграничны) луч выйдет в направлении, строго противоположном первоначальному, но окажется несколько смещенным. Знаете ли вы практическое применение такого «углового отражателя»?
26. 7. Хорошо известно, что когда свет переходит из одной прозрачной среды в другую, то не все лучи испытывают преломление, некоторая их часть отражается, а весьма малая доля (если таковая вообще есть) поглощается или рассеивается. Что происходит, когда пучок света падает на поверхность раздела двух сред под большим углом к нормали, проходя вначале через более плотную в оптическом отношении (имеющую больший показатель преломления) среду?

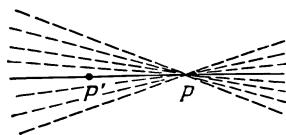
### К главе 27. Геометрическая оптика

27. 1. Параллельный пучок света, распространяющийся в воздухе, собирается в фокусе преломляющей поверхности, которая ограничивает область с показателем преломления  $n$ .

Найдите форму этой поверхности.

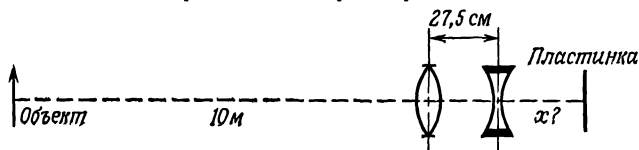


27. 2. Внешний диаметр стеклянной капиллярной трубки равен  $D$ , показатель ее преломления  $n$ . Если смотреть на трубку со стороны, то кажется, что маленькое капиллярное отверстие имеет диаметр  $d$ . Чему в действительности равен диаметр  $d'$  трубки?
27. 3. Пучок света сходится в определенной точке  $P$ . Нужно в данной точке  $Q$ , расположенной на оси, поместить такую отражающую поверхность, которая даст изображение в новом фокусе — в точке  $P'$ . Определите форму требуемой поверхности.



27. 4. Линза с фокусным расстоянием  $F$  дает действительное изображение отдаленного объекта, которое рассматривается через увеличительное стекло с фокусным расстоянием  $f$ . Чему равно увеличение системы, если линзы расположены так, что передний фокус окуляра совпадает с задним фокусом объектива?
27. 5. Нормальный человеческий глаз может сфокусироваться на объекте, находящемся на расстоянии  $25\text{ см}$  и дальше. Прямо против глаза расположена простая тонкая увеличивающая линза с фокусным расстоянием  $f = +5\text{ см}$ .
- Между какими двумя предельными положениями должен быть расположен рассматриваемый объект, чтобы его было ясно видно?
  - Определите увеличение системы для каждого из этих двух положений.
27. 6. Телеобъектив состоит из положительной линзы с фокусным расстоянием  $f_1 = 30\text{ см}$  и отрицательной линзы с фокусным расстоянием  $f_2 = -10\text{ см}$ ; расстояние между обеими линзами  $27,5\text{ см}$ . Где должна быть расположена фотопластинка, на которой будет сфотографирован объект,

находящийся впереди первой линзы на расстоянии 10 м? Тщательно проследите путь луча.



27. 7. 200-дюймовый телескоп Гейла имеет фокусное расстояние 160 м. Какова разница в положении изображений при наблюдении отдаленных звезд и
- Луны;
  - искусственного спутника, находящегося от Земли на расстоянии 320 км?
27. 8. Две тонкие линзы  $L$  и  $L'$  с фокусными расстояниями  $f$  и  $f'$  находятся на расстоянии  $D$  друг от друга. Найдите эквивалентное фокусное расстояние  $F$  всего устройства и расстояния  $\Delta$  и  $\Delta'$  от главных плоскостей до линз  $L$  и  $L'$ .

### К главе 28. Электромагнитное излучение

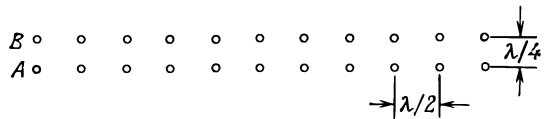
28. 1. Дайте геометрическую интерпретацию и найдите модули следующих комплексных величин:
- $re^{i\varphi/2} + re^{-i\varphi/2}$ ,
  - $\sum_{n=0}^{N-1} re^{in\varphi}$ .

### К главе 29. Интерференция

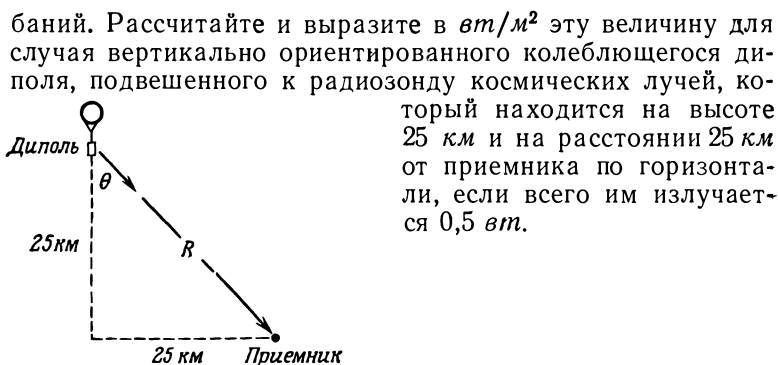
29. 1. Две антенны расположены так, как показано на фиг. 29.5 «Лекций» (вып. 3, стр. 54). Они работают в одной фазе так, что, когда одна из них излучает с интенсивностью  $I_0$  по всем горизонтальным направлениям, интенсивность излучения другой составляет  $2I_0$ . Чему равна наблюдаемая интенсивность излучения обеих антенн в различных направлениях, указанных на рисунке?
29. 2. Четыре идентичных дипольных излучателя расположены параллельно друг другу и находятся на одинаковых расстояниях 2,50 см друг от друга. Они работают на частоте  $3,00 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$  и сфазированы так, что фаза излучения каждого последующего диполя отстает от предыдущего на  $90^\circ$ . Найдите интенсивность излучения на больших расстояниях от системы в экваториальной плоскости (пер-

пендикулярной оси диполя) и постройте эту функцию в полярных координатах. Полученная диаграмма носит название диаграммы направленности антенной системы.

29. 3. Две параболические «чашки» радиотелескопа КАЛТЕХа в Оуэнс Вэлли расположены на расстоянии 480 м друг от друга. Каждая «чашка» концентрирует поступающее излучение в малом приемнике, находящемся в ее фокусе. Два принимаемых сигнала подаются в расположенный посередине между «чашками» смеситель, где оба сигнала складываются, а затем вычисляется средний квадрат результирующей амплитуды. С какой точностью можно установить угловое положение удаленного точечного источника, наблюдаемого с помощью радиотелескопа, если 10%-ные флуктуации выходного сигнала уже считаются заметными? Длину волны возьмите равной 50 см.
29. 4. Заряд  $q$  движется по окружности радиусом  $a$  с угловой частотой  $\omega$ . Вычислите электрическое поле, создаваемое зарядом, на большом расстоянии  $R$  от системы под углом  $\theta$  к оси круговой орбиты. Найдите интенсивность излучения в плоскости орбиты и на оси орбиты при больших значениях  $R$ .
29. 5. Все  $N$  диполей в линии  $A$  работают в одинаковой фазе, а все диполи в линии  $B$  отстают по фазе на  $90^\circ$  от диполей в линии  $A$ . Определите картину излучения в экваториальной плоскости (как в задаче 29.2) на большом рас-



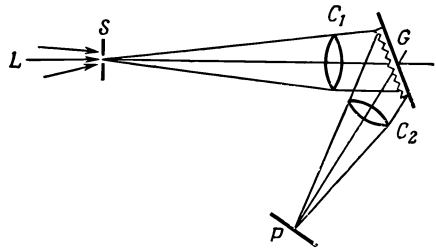
- стоянии от линий.
29. 6. Электроны в длинной прямой тонкой проволоке длиной  $L$  колеблются с круговой частотой  $\omega$  и малой амплитудой  $a$  в одинаковой фазе вдоль всей проволоки. Найдите электрическое поле, создаваемое ими под углом  $\theta$  относительно направления проволоки на больших расстояниях  $R$  от нее ( $R \gg L$ ).
29. 7. Количество энергии на единицу площади, переносимой электромагнитной волной, пропорционально среднему квадрату напряженности электрического поля. Найдите долю полной энергии, излучаемой колеблющимся зарядом, которая падает на единицу площади, нормальной к радиус-вектору  $R$ , проведенному под углом  $\theta$  к оси коле-



### К главе 30. Дифракция

34. 1. Длины волн  $D$ -линий в спектре возбуждения натрия равны 5889,95 и 5895,92 Å соответственно. Какую длину должна иметь решетка, содержащая 600 линий на 1 мм, чтобы разрешить эти линии в спектре первого порядка?
30. 2. По прямой дороге идет обычная автомашина с включенными фарами (рассматриваемыми как точечные источники). Расстояние между фарами автомобиля 120 см. На каком расстоянии от наблюдателя должна находиться машина, чтобы он был уверен, что видит два источника света, а не один? Примите диаметр зрачка глаза равным 0,5 см, а эффективную длину волны света, испускаемого фарами, равной 5500 Å. Как вы думаете, тот факт, что свет «белый» (т. е. представляет собой смесь лучей с разными длинами волн), облегчает или затрудняет разрешение двух источников света?
30. 3. На рисунке показан общий вид спектрографической решетки. Свет от источника  $L$  проходит через узкую щель  $S$ , затем через коллиматорную линзу (или зеркало)  $C_1$ , которая превращает его в параллельный пучок лучей (так что на решетку падает как бы плоская волна, приходящая из бесконечности). Далее параллельный пучок лучей дифрагирует от решетки  $G$ ; дифрагированный свет, идущий в определенном угловом интервале, падает на линзу  $C_2$ , называемую камерной, и фокусируется ею в плоскости  $P$ . Получается набор узких спектральных линий. Пусть длина щели равна  $h$ , ее ширина  $w$ , фокусные расстояния линз  $C_1$  и  $C_2$  равны  $F_1$  и  $F_2$ , а углы между нормалью к решетке и осями линз  $C_1$  и  $C_2$  равны  $\theta_i$  и  $\theta_a$ ; 1 мм решетки содержит  $N$  линий. Дайте ответ на следующие вопросы:

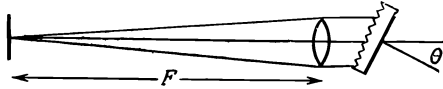
- а) Какую ширину будет иметь полоса, занимаемая спектром в плоскости  $P$ ?
- б) Какой длине волны ( $s$ ) будет отвечать линия, лежащая на плоскости  $P$  в месте прохождения оси линзы  $C_2$ ?
- в) На каком расстоянии друг от друга в фокальной плоскости будут находиться две спектральные линии, длины волн которых отличаются на  $1,00 \text{ \AA}$ ? Такая величина часто называется *дисперсией* оптического устройства.
- г) Какова ширина спектральной линии в плоскости  $P$ , если ширина щели  $w$  много больше разрешения коллиматорной линзы [равного  $1,22\lambda(F_1/A_1)$ , где  $A_1$  — апертура] и уширения, создаваемого решеткой и равного  $(\lambda/L)F_1$ , где  $L$  — размер решетки?



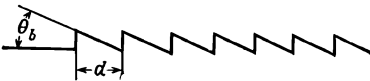
30. 4. Спектрограф 150-футового солнечного башенного телескопа, находящегося в обсерватории Маунт Вильсон, показан схематически на рисунке. В этом устройстве одна и та же линза действует и как коллиматорная, и как камерная, а  $\theta_i = -\theta_d$  (почти!). Фокусное расстояние всего устройства  $F = 23 \text{ м}$ , а решетка имеет площадь  $15 \text{ см} \times 25 \text{ см}$ , причем в  $1 \text{ мм}$  ее содержится 600 линий. Обычно при наблюдениях используется спектр пятого порядка.
- а) При каком угле  $\theta$  наклона решетки линия спектра возбуждения нейтрального атома железа, отвечающая длине волны  $\lambda = 5250,218 \text{ \AA}$ , будет совпадать с положением щели в спектре пятого порядка?
  - б) Для каких других длин волн в интервале от  $\lambda = 3600 \text{ \AA}$  до  $\lambda = 7000 \text{ \AA}$  линия спектра также будет совпадать с положением щели?
  - в) Предложите простой способ устранения в наблюдаемой картине спектров нежелательных порядков, оставив только спектр пятого порядка.
  - г) Какова дисперсия рассматриваемого устройства при длине волны  $\lambda = 5250 \text{ \AA}$ , отвечающей линии в спектре пятого порядка?



- д) Каково минимальное теоретическое значение  $\Delta\lambda$ , которое может быть разрешено при длине волны  $\lambda=5250 \text{ \AA}$  в спектре пятого порядка?



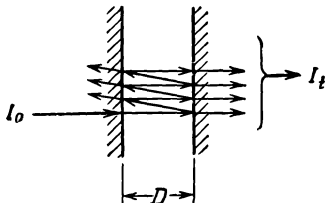
30. 5. Длины волн спектральных линий обычно измеряются с точностью около  $0,001 \text{ \AA}$  при помощи спектрографов, разрешающая сила которых составляет только  $0,010 \text{ \AA}$ . Не нарушаются ли при этом какие-нибудь основные законы физики? Объясните.
30. 6. Когда желобки дифракционной решетки располагаются так, что отражают большую часть падающего излучения только в определенном направлении, то говорят, что решетка *блестит* в этом направлении. Предположим, что желобки можно нанести так, чтобы сечение решетки представляло собой пилообразную функцию, показанную на рисунке, причем поверхность каждого желобка лежит под определенным углом  $\theta_b$  к горизонтали.
- Используя понятие о дифрагированном пучке света как об излучении, испускаемом в веществе осцилляторами, которые колеблются в одной фазе с падающим излучением, определите, в каком направлении дифрагированный пучок будет иметь наибольшую интенсивность, если  $\theta_i = 0$ ?
  - Приблизительно оцените тот угловой интервал, внутри которого решетка «блестит».



30. 7. Интерферометр Фабри — Перо состоит из пары прецизионно отшлифованных плоских поверхностей, параллельных друг другу и расположенных на расстоянии  $D$ . Эти поверхности отражают часть  $R^2$  света, нормально падающего на них, и пропускают долю  $T^2$ . Свет с интенсивностью  $I_0$  и длиной волны  $\lambda$  вначале падает слева (см. рисунок), причем часть лучей сразу проходит через систему, а некоторая их доля отражается от правой поверхности, потом от левой, а затем проходит сквозь систему. В общем проходящий пучок состоит из лучей, которые отразились  $0, 2, 4, 6 \dots$  раз и в конце концов прошли

через обе поверхности. Как интенсивность проходящего света зависит от величин  $D$ ,  $\lambda$ ,  $R$  и  $T$ ?

*Примечание.* Узкополосные оптические фильтры, называемые интерференционными, действуют по такому же принципу. Обе отражающие поверхности у них сделаны из нескольких слоев высококачественного стекла точно фиксированной толщины и с различными показателями преломления.



### К главе 31. Как возникает показатель преломления

31. 1. Найдите показатель преломления алюминия для рентгеновских лучей с длиной волны  $1,56 \cdot 10^{-8}$  см, предполагая, что электроны в алюминии имеют собственную частоту, много меньшую, чем частота рентгеновских лучей.
31. 2. Показатель преломления ионосферы для радиоволн с частотой  $100$  мксек $^{-1}$  равен  $n = 0,90$ . Определите плотность электронов в  $1$  см $^3$  ионосферы.
31. 3. Электрическое поле  $E$  световых волн, проходящих через среду с показателем преломления  $n$ , равно  $E_0 e^{i\omega(t-nz/c)}$ .
- а) Покажите, что если  $n = n' - in''$ , то

$$E = E_0 e^{-n''\omega z/c} e^{i\omega(t-n'z/c)}.$$

- б) Используя выражение  $n - 1 = \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 n} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$ , найдите, по какому закону ослабляется интенсивность световой волны, частота которой в точности равна собственной частоте  $\omega_0$  атома.

31. 4. Известно, что мгновенная плотность потока энергии электромагнитной волны равна  $S = \epsilon_0 c E^2$  вт/м $^2$ .
- а) Найдите полную энергию, излучаемую в единицу времени электроном, осциллирующим с амплитудой  $x_0$  и угловой частотой  $\omega$ .
- б) Сравните энергию, излучаемую за одно колебание, с запасенной энергией  $\frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$  и найдите константу затухания  $\gamma_R$ . Это затухание называется *радиационным затуханием*.

- в) Возбужденный атом испускает фотоны с определенной длиной волны  $\lambda$ . Рассчитайте ожидаемое уширение  $\Delta\lambda$  спектральной линии, если оно возникает исключительно из-за радиационного затухания. (Рассматривайте атом как крошечный осциллятор, обладающий затуханием.)

**К главе 32. Радиационное затухание.  
Рассеяние света**

- 32. 1.** Покажите, что если уравнение движения заряженного осциллятора имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x - \frac{2e^2}{3c^2 m} \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{F(t)}{m},$$

то член, содержащий третью производную и отвечающий так называемой радиационной силе трения, правильно описывает скорость уменьшения энергии при излучении (сопротивление излучения) для любой частоты.

*Примечание.* Пусть  $F(t) = A \cos \omega t$ . Найдите работу, совершаемую радиационной силой трения.

- 32. 2.** Пучок света проходит через область, содержащую  $N$  рассеивающих центров в единице объема. Сечение рассеяния света на каждом из них равно  $\sigma$ . Покажите, что интенсивность света в зависимости от пройденного расстояния  $x$  описывается формулой  $I = I_0 e^{-N\sigma x}$ .

- 32. 3.** Используя выражение для сечения рассеяния

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

и выведенную в «Лекциях» формулу для показателя преломления газа, покажите, что величина  $N\sigma$  может быть записана в виде

$$N\sigma = \frac{2}{3\pi} \frac{(n-1)^2}{N} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4.$$

(Таким способом было вычислено впервые число Авогадро при изучении рассеяния света.)

- 32. 4.** Сколько голубого света ( $\lambda = 4500 \text{ \AA}$ ), испускаемого Солнцем, проходит через атмосферу, когда Солнце находится
- в зените?
  - под углом  $10^\circ$  к горизонту?

32. 5. Когда были открыты новые лучи (названные  $X$ -лучами, ибо они обладали неизвестными, но удивительными свойствами), было высказано предположение, что они, как и свет, являются поперечными волнами. Затем было замечено, что эти лучи рассеиваются электронами вещества. Как можно доказать, что они действительно представляют собой поперечные волны? Можно ли их поляризовать?
32. 6. Внутренняя корона Солнца (называемая  $K$ -короной) представляет собой, собственно, солнечный свет, рассеянный свободными электронами. Кажущаяся яркость этой  $K$ -короны на расстоянии одного солнечного радиуса от солнечного диска составляет около  $10^{-8}$  от яркости самого диска (на единицу площади). Вычислите число свободных электронов в  $1 \text{ см}^3$  пространства вблизи Солнца.
32. 7. Покажите, что величина  $(\epsilon_0 c)^{-1}$  имеет размерность сопротивления и оцените ее численно.
32. 8. Межзвездное пространство заполнено облаками из крошечных пылинок, состоящих из углерода, льда и очень малого количества других элементов. Какова должна быть минимальная масса таких пылинок, отнесенная к единице площади ( $1 \text{ г/см}^2$ ), способная ухудшить наши наблюдения за звездами, скажем, в 100 раз (т. е. на 5,0 звездной величины). Не забудьте, что свет от звезд может не только рассеиваться на пылинках, но и просто поглощаться ими.
32. 9. Короткий прямой кусок проволоки, помещенный в поток электромагнитных волн, излучаемых РЛС, рассеивает их. Электрическое поле падающей волны взаимодействует с движущимися электронами в проволоке, вследствие чего и происходит рассеяние. Если рассматривать достаточно короткий кусок проволоки (длина которого много меньше  $\lambda$ ), то можно предположить, что среднее смещение электронов в нем вдоль оси пропорционально компоненте  $E_{\parallel}$  электрического поля волны, параллельной проволоке. Таким образом, если в проволоке имеется  $N$  электронов, а  $d$  — их среднее смещение, то  $d = \chi E_{\parallel}$ . Нам нужно знать (в зависимости от  $\chi$  и  $N$ ):
- а) чему равно сечение рассеяния проволоки?
  - б) как зависит сечение рассеяния от ориентации проволоки?

## К главе 33. Поляризация

33. 1. Две поляроидные пластинки расположены так, что их оси поляризации образуют прямой угол, а третья размещается между ними так, чтобы ее ось составляла угол  $\theta$  с осью первого поляроида. Какова интенсивность света, проходящего через такое устройство, если все поляроиды идеальны (потерь нет)?
33. 2. Предположим, что когда пучок плоско поляризованного света падает на поляроидную пластинку, то часть его  $\alpha^2 I_0$  ( $I_0$  — интенсивность падающего света) проходит через пластинку, если ось поляроида параллельна направлению поляризации. Если же эти направления образуют прямой угол, то через пластинку проходит только доля падающего света  $\varepsilon^2 I_0$ , где  $\varepsilon \ll 1$ . (Если поляроид идеальный, то  $\alpha^2$  должно быть равно единице, а  $\varepsilon^2$  — нулю.) Неполаризованный свет интенсивностью  $I_0$  проходит через пару поляроидных пластинок, оси которых образуют угол  $\theta$ . Какова интенсивность прошедшего света? (Пренебречь эффектами отражения.)
33. 3. Покажите, что для угла Брюстера (угол падения  $i$ , при котором отраженный луч полностью поляризован) справедливо соотношение  $\operatorname{tg} i = n$ .
33. 4. Оцените интенсивность и поляризацию излучения электрона, движущегося с постоянной скоростью по круговой орбите, для точек, расположенных:
- а) на оси, проходящей через центр круга,
  - б) в плоскости окружности.
33. 5. Показатели преломления кристаллического кварца для света с длиной волны 600 мкм равны  $n_o = 1,544$  и  $n_e = 1,553$  для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно. В кристалле кварца, вырезанном параллельно оптической оси, можно получить максимальную разность скоростей обыкновенного и необыкновенного лучей, если они нормально падают на поверхность кристалла. Какова должна быть толщина кристалла, чтобы произошел сдвиг фаз этих лучей на  $90^\circ$ , если используется свет указанной длины волны?
33. 6. Первокурсник КАЛТЕХа, прогуливаясь с девушкой, видит Луну под углом  $10^\circ$  над горизонтом и ее отражение в спокойном озере. С тоской вспоминая гл. 33 «Лекций», он делает попытку рассчитать яркость изображения по сравнению с яркостью самой Луны, полагая, что излучение от

Луны не поляризовано (почти), и забывая, что обиженная спутница уйдет. Какой результат он получит? Покажите, что интенсивность отраженных касательных лучей достигает 100%.

33. 7. Свет падает перпендикулярно плоскости одной из граней алмаза ( $n = 2,40$ ).
- Какая доля падающего излучения отражается?
  - Чему равен угол Брюстера для алмаза?
33. 8. В дополнение к задаче 33.5 предположим, что показатели преломления кварца для света с длиной волны  $\lambda_1 = 410$  мкм равны  $n_o = 1,557$  и  $n_e = 1,567$  и что кристалл кварца есть четвертьволновая пластинка для света с длиной волны  $\lambda_2 = 600$  мкм. Полностью опишите состояние поляризации света с длиной волны  $\lambda_1$ , прошедшего через кристалл, если падающие лучи были линейно поляризованы.
33. 9. Вам дана отполированная пластинка, например из черного обсидиана. Нужно измерить показатель преломления этого материала. Как вы поступите?

#### К главе 34. Релятивистские явления в излучении

34. 1. Диск радиусом  $A$  катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Напишите уравнение пути, проходимого точкой, находящейся на расстоянии  $R \leq A$  от центра диска, в зависимости от  $A$ ,  $R$  и угла поворота диска  $\theta$ . Ось  $x$  направлена вертикально от центра диска, а ось  $z$  — в направлении его движения. Найдите ускорение  $d^2x/dt^2$  точки при  $z = ct$ .
34. 2. Полученное в предыдущей задаче выражение необходимо для вычисления интенсивности излучения частицы, движущейся по круговой траектории радиусом  $R$ . Выразите результат через наблюдаемые величины  $R$ ,  $v$  (скорость частицы) и  $x$  (положение частицы в момент наблюдения).
34. 3. Найдите отношение интенсивностей излучения заряженной частицы, когда она движется по направлению к наблюдателю и от него по круговой орбите.
34. 4. Получите для угла абберации формулу  $\sin \theta = v/c$ , используя преобразования Лоренца.
34. 5. Покажите, что скорость электрона с энергией 1 Гэв отличается от скорости света на одну восьмимиллионную часть.

34. 6. При наблюдении  $D$ -линии излучения атомов натрия (лабораторная длина волны  $589,0$  мкм) установлено, что она сдвинута в спектре излучения звезды и имеет длину волны  $588,0$  мкм. Чему равна скорость звезды относительно наблюдателя?
34. 7. Астроном из КАЛТЕХа Р. Минковский пришел к выводу, что наиболее отдаленная туманность, которую он наблюдал, имела скорость движения  $0,6$  с (удаленные космические объекты движутся от нас). Чему равен доплеровский сдвиг для света, приходящего от этой туманности? Найдите наблюдаемую длину волны в спектре света от этой туманности, если длина волны в системе, связанной со звездой, составляет  $300$  мкм.
34. 8. Бродли открыл в 1728 г. аберрацию света, суть которой состоит в том, что при наблюдении звезды кажутся смещенными из-за того, что Земля движется по своей орбите. Поэтому в опытах, когда рассматриваются звезды, находящиеся вблизи от полюса эклиптики, оптическую ось телескопа следует отклонить вперед (в направлении движения Земли) на  $20,5''$ . Если считать, что скорость света равна  $3,00 \cdot 10^8$  м/сек, то какова величина радиуса земной орбиты, рассчитанная по результатам этого опыта?
34. 9. Предположим, что межпланетное пространство заполнено малыми крупинками пыли со средним удельным весом  $\rho$  и приблизительно сферической формы радиуса  $R$ .
- Покажите, что для песчинки любого размера отношение силы гравитационного притяжения и радиационного отталкивания Солнцем не зависит от расстояния до него.
  - Используя тот факт, что интенсивность солнечного излучения на земной орбите составляет  $1374$  Вт/м<sup>2</sup>, и предполагая сечение поглощения излучения равным  $\pi R^2$ , найдите, для какого значения радиуса  $R$  силы радиационного давления и гравитационного притяжения будут полностью скомпенсированы?
  - Учитывая результаты, полученные в гл. 32 «Лекций» (вып. 3), можно ли утверждать, что сечение поглощения песчинки может быть значительно больше  $\pi R^2$ ?

*К главе 38. Соотношение между волновой и корпускулярной точками зрения*

38. 1. В гл. 32 «Лекций» мы показали, что возбужденный атом излучает свою энергию определенными порциями. Это приводит к эффекту ограничения «времени жизни» воз-

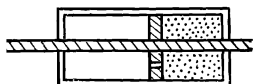
бужденного состояния и к образованию конечной ширины соответствующей спектральной линии. Покажите, что эти эффекты, интерпретируемые как неопределенности в измерении энергии и времени излучения фотона, согласуются с принципом неопределенности.

- 38. 2.** Анализируя размерности, оцените «боровский радиус» атома водорода. Покажите, пользуясь принципом неопределенности, что энергия, необходимая для отрыва электрона от протона в атоме водорода, — порядка нескольких электронвольт.
- 38. 3.** В ультрафиолетовой части спектра возбуждения водорода наблюдается серия линий, известных под названием серии Лаймана. Три линии этой серии имеют длины волн: 1216, 1026, 973 Å. Рассчитайте длины волн, отвечающие трем другим возможным линиям в спектре возбуждения водорода, которые могут быть «предсказаны» на основе одних этих данных, а также на основе комбинационного принципа Ритца. Две из них лежат в видимой области (серия Бальмера), а одна — в инфракрасной (первая линия серии Пашена).

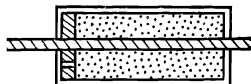


*К главе 39. Кинетическая теория газов*

39. 1. Можно показать, что при адиабатическом сжатии идеального газа выполняется соотношение  $PV^\gamma = \text{const}$  [см. формулу (39.14), вып. 4, стр. 247]. С другой стороны, при всех условиях  $PV/T = \text{const}$ . Используя эти данные, найдите связь между параметрами  $P$  и  $T$  или  $V$  и  $T$  для случая адиабатического сжатия.
39. 2. С помощью двухтактного насоса, который используется для накачивания велосипедных шин, можно достигнуть давления  $3,5 \text{ кг/см}^2$ , начав накачку воздуха при нормальном атмосферном давлении [ $1 \text{ кг/см}^2$  при  $20^\circ\text{C}$  ( $293 \text{ K}$ )]. Какова температура (по шкале Цельсия) воздуха, выходящего из насоса, если для воздуха  $\gamma = 1,40$ ? Потери тепла через стенки насоса пренебрежимо малы.
39. 3. Имеются два идентичных теплоизолированных сосуда. Каждый сосуд разделен пополам перегородкой с закрывающимся отверстием. В одной половине каждого сосуда содержится гелий (газ), а другая половина каждого из сосудов откачана до полного вакуума. Ставятся два опыта:
- Отверстие в перегородке одного сосуда открывается, и газ перетекает в другую половину сосуда, пока не установится равновесие. Затем перегородку начинают медленно передвигать к одному из краев сосуда.
  - Перегородку другого сосуда очень медленно двигают по направлению к вакуумированному краю до упора. Сравните количественно конечное состояние газа в этих двух сосудах (трением при передвигании перегородки можно пренебречь).



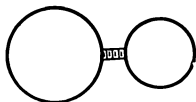
*Начальное состояние*



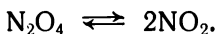
*Конечное состояние*

39. 4. а) Представьте себе высокий вертикальный цилиндр, наполненный газом или жидкостью, плотность которых изменяется с высотой. Покажите, что в этом случае зависимость давления от высоты описывается дифференциальным уравнением  $dP/dh = -\rho(h)g$ .
- б) Решите это уравнение для случая атмосферного воздуха (молекулярный вес  $\mu$ ), если его температура не зависит от высоты.
39. 5. Адиабатической называется атмосфера, в которой давление и плотность в зависимости от высоты удовлетворяют соотношению  $P\rho^{-\gamma} = \text{const}$ .
- а) Покажите, что температура этой атмосферы линейно уменьшается с высотой, и найдите коэффициент пропорциональности. Такой температурный градиент называется *адиабатическим*. Найдите температурный градиент для земной атмосферы.
- б) Используя аргументы, основанные на энергетических соображениях, покажите, что атмосфера с температурным градиентом, меньшим или большим адиабатического, будет соответственно стабильной или нестабильной относительно конвекции.
39. 6. Цилиндр с непроницаемой абсолютно гладкой перегородкой содержит  $1 \text{ м}^3$  газа при давлении  $1 \text{ атм}$ . Газ медленно сжимается при постоянной температуре до конечного объема  $0,4 \text{ м}^3$ . Какая работа затрачивается при этом?
39. 7. Два газа,  $A$  и  $B$ , занимающие один и тот же начальный объем  $V_0$ , при одинаковом начальном давлении  $P_0$  внешне подвержены адиабатическому сжатию, каждый — до половины своего первоначального объема. Каково конечное давление в каждом газе по сравнению с начальным, если  $\gamma_A = 5/3$  (одноатомный газ),  $\gamma_B = 7/5$  (двухатомный)?
39. 8. Найти отношение количеств работы, необходимой для сжатия газов  $A$  и  $B$ , рассмотренных в задаче 39.7.
39. 9. Два сосуда сферической формы объемом  $200$  и  $100 \text{ см}^3$  соединены короткой трубкой (см. рисунок), в которой имеется изолирующая пористая перегородка. С ее помощью можно добиться равенства давлений в сосудах, но не температуры. Система имеет температуру  $t = 27^\circ\text{C}$  и содержит кислород под давлением  $760 \text{ мм рт. ст.}$  Малая

сфера помещается в сосуд со льдом при  $0^\circ\text{C}$ , а большая — в сосуд с паром при  $100^\circ\text{C}$ . Какое давление установится в системе? Тепловым расширением сосудов пренебречь.



- 39.10.** Резервуар объемом  $50\text{ л}$  соединен с резервуаром объемом  $15\text{ л}$  с помощью короткой трубки, в которой имеется специальный клапан давления, позволяющий газу просачиваться из большого резервуара в малый, если давление в большом превышает давление в меньшем на  $88\text{ см рт. ст.}$ . При  $t = 17^\circ\text{C}$  большой резервуар содержит газ при атмосферном давлении, а меньший — полностью откачан. Каково будет давление в последнем, если оба резервуара нагреть до  $162^\circ\text{C}$ ?
- 39.11.** Четырехокись азота может диссоциировать с образованием двуокиси азота:



В откачанный сосуд объемом  $250\text{ см}^3$  вводится  $0,90\text{ г}$  жидкого  $\text{N}_2\text{O}_4$ . Когда жидкость испаряется (при  $0^\circ\text{C}$ ), давление становится равным  $760\text{ мм рт. ст.}$  Сколько процентов четырехокиси азота при этом диссоциирует?

- 39.12.** В изолированном сосуде с подвижной крышкой вначале находится  $1$  моль идеального одноатомного газа, занимающий объем  $V_1$  при давлении  $P_1$  и температуре  $T_1 = 27^\circ\text{C}$ . Затем газ медленно нагревается с помощью помещенного внутрь нагревателя, на что полностью тратится энергия  $8,31\text{ вт}\cdot\text{ч}$ . В результате газ расширяется при постоянном давлении  $P_1$ , нагреваясь до температуры  $T_2$  и занимая конечный объем  $V_2$ . Вычислите работу, совершенную газом при расширении, и запас энергии газа, а также найдите: а)  $T_2$ , б)  $V_2/V_1$ .

### К главе 40. Принципы статистической механики

- 40. 1.** В радиометре молекулы газа бомбардируют тонкие легкие крылышки вертушки, которые с одной стороны зачернены, а с другой — покрыты блестящей краской. Когда на крылышки попадает излучение, поглощенная ими при этом энергия уносится в основном молекулами, бомбардирующими зачерненную сторону каждого крылышка. В результате возникает результирующая несбалансированная сила, которая поворачивает вертушку. Рассмотрим сосуд,

в единице объема которого имеется  $n$  молекул массой  $m$ , при абсолютной температуре  $T$ . Тонкое крылышко единичной площади, расположенное внутри такого сосуда, поглощает в единицу времени радиационную энергию, равную  $\Pi$  *вт*, причем эта энергия уносится (изотропно) молекулами, попадающими только на одну сторону крылышка. Оцените примерно силу, действующую на крылышко в воздухе при комнатной температуре.

40. 2. Какая доля молекул газа (газ находится в тепловом равновесии), достигающих в единицу времени поверхности сосуда, обладает кинетической энергией:  
 а) большей, чем средняя тепловая,  
 б) в 3 раза большей, чем средняя тепловая?
40. 3. Молярная теплоемкость вещества при постоянном объеме  $C_V$  — это количество энергии, необходимое для повышения температуры 1 моля вещества на  $1^\circ$ , если объем остается постоянным. Чему равна молярная теплоемкость при постоянном объеме:  
 а) идеального одноатомного газа?  
 б) идеального двухатомного газа?
40. 4. Газ при нормальных давлении и температуре вытекает со скоростью  $v$  через гладкую трубку с постоянным поперечным сечением площадью  $A$ . Когда газ проходит через проволочную сетку, оказывающую пренебрежимо малое сопротивление потоку, он нагревается. Приобретаемая мощность равна  $q$  *вт*. Из трубки газ вытекает со скоростью  $v'$ . Напишите уравнения, выражающие законы сохранения массы, энергии и импульса для случая, когда через трубку протекает воздух, а затем найдите:  
 а)  $v'$ ,  
 б) конечную температуру  $T$ ,  
 в) силу тяги  $F$  (основную характеристику реактивного двигателя).
40. 5. Обсудите достоинства воздушного реактивного двигателя в свете предыдущей задачи, если при его работе затрачивается 100 кг воздуха и 2,00 кг керосина в секунду. Теплотворная способность керосина составляет около  $4,65 \cdot 10^7$  *дж/кг*. Какие обстоятельства могут сделать неправильным полученный вами результат?
40. 6. Закон распределения Максвелла имеет вид

$$\frac{dN}{dv} = Av^2 e^{-bv^2}.$$

Он может быть преобразован так:  $y = x^2 e^{-x}$ .

а) Нарисуйте график этой функции для  $0 \leq x \leq 3,0$  и покажите, что при увеличении  $x$  главную роль играет экспоненциальный член.

б) Найдите максимальное значение  $y$ .

40. 7. Согласно барометрической формуле  $n = n_0 e^{-mgh/kT}$ , где  $kT/mg$  — характерный параметр задачи. Рассчитайте этот параметр для земной атмосферы и околосолнечного пространства, если

$$u_{\oplus} = 29, \quad T_{\oplus} = 300 \text{ К}, \quad g_{\oplus} = 9,8 \text{ м/сек}^2,$$

$$u_{\odot} = 1,5, \quad T_{\odot} = 5500 \text{ К}, \quad g_{\odot} = 2,7 \cdot 10^2 \text{ м/сек}^2.$$

Значения  $u$ ,  $g$ ,  $T$  относятся соответственно к условиям у поверхности Солнца ( $\odot$ ) и Земли ( $\oplus$ ).

### К главе 41. Броуновское движение

41. 1. Рассчитайте (и запомните):

а) температуру  $T$ , при которой  $kT = 1 \text{ эв}$ ;

б) величину  $kT$  (в эв) при комнатной температуре;

в) длину волны фотона, соответствующей квантовому переходу с разностью энергий  $1 \text{ эв}$ .

41. 2. Закон распределения излучения абсолютно черного тела имеет вид

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}.$$

Перейдя к новой переменной  $x = \hbar\omega/kT$ , покажите, что:

а) проинтегрированная по всем частотам полная интенсивность излучения пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры;

б) частота  $\omega_m$ , при которой  $I(\omega)$  имеет максимальное значение, пропорциональна абсолютной температуре.

41. 3. Найдите относительные интенсивности света с длиной волны  $0,31 \text{ мк}$ , излучаемого двумя абсолютно черными телами, которые находятся при температуре  $2000$  и  $4000 \text{ К}$  соответственно.

### К главе 42. Применения кинетической теории

42. 1. Энергия активации, теплота испарения, теплоты образования или диссоциации и т. д. обычно выражаются в джоулях на  $1 \text{ г-моль}$  или в электронвольтах на  $1 \text{ атом}$ . Сколько дж/г-моль содержится в  $1 \text{ эв/атом}$ ? (Химики обычно

используют энергетическую единицу, называемую килокалорией;  $1 \text{ ккал} = 4186 \text{ Дж}$ .)

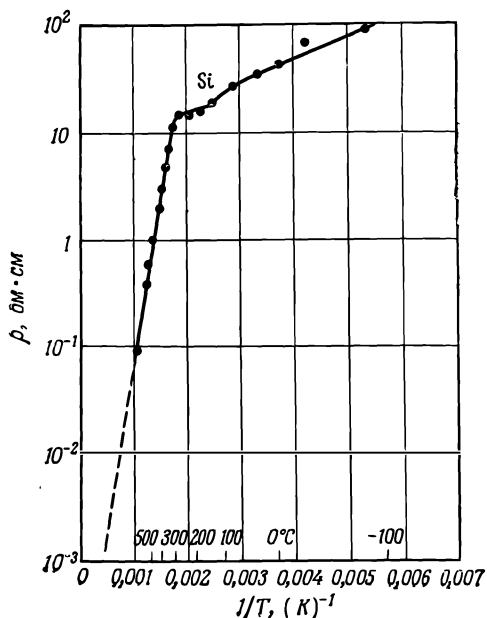
42. 2. а) Постройте график плотности паров ртути в зависимости от  $1/T$  в полулогарифмической шкале (соответствующие данные возьмите из учебников физики и химии). С помощью графика определите теплоту испарения ртути. Сравните ваши результаты с табличной величиной.

б) Прделайте то же самое для воды.

42. 3. В температурном интервале  $0\text{--}300^\circ\text{C}$  теплота возгонки ртути изменяется только на 3% (в среднем это составляет около  $0,61 \text{ эв/атом}$ ). Какую ошибку вы сделаете при расчете плотности паров ртути при  $0^\circ\text{C}$ , если используете теплоту возгонки при  $300^\circ\text{C}$  вместо правильного значения при  $0^\circ\text{C}$ ?

*Замечание.* Незначительное в процентном отношении отличие в показателе экспоненты может привести к большой ошибке.

42. 4. Сопротивление почти чистого кремния в зависимости от температуры показано на прилагаемом графике. Сделайте качественный вывод о природе прямого тока в этом веществе выше и ниже  $300^\circ\text{C}$ .



## К главе 43. Диффузия

43. 1. «Диаметр» молекулы кислорода приблизительно равен  $d = 3 \text{ \AA}$ . Вычислите среднюю длину свободного пробега и среднее время между двумя столкновениями для молекул кислорода при нормальных давлении и температуре.
43. 2. Сосуд содержит  $10^{24}$  молекул газа; средняя длина свободного пробега одной молекулы равна  $l$ . Для какой длины пробега  $L$  вероятность того, что хоть *какая-нибудь из молекул* пройдет в сосуде без столкновения путь, превышающий  $L$ , меньше 50%?
43. 3. Если в веществе существует температурный градиент, то происходит перенос тепла, причем количество переносимой энергии в единицу времени пропорционально этому градиенту (без учета конвекции). Коэффициент пропорциональности, приведенный к единице площади и к единице температурного градиента, называется *теплопроводностью*  $\kappa$ . Таким образом,  $dQ/dt = \kappa A (dT/dx)$ . Покажите, что в отсутствие конвекции теплопроводность газа равна (см. § 6 гл. 43 «Лекций», вып. 4, стр. 332)

$$\kappa = knv \frac{l}{\gamma - 1} = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{kv}{\sigma_c},$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $n$  — концентрация молекул,  $v$  — средняя тепловая скорость,  $l$  — средняя длина свободного пробега,  $\gamma$  — постоянная в уравнении адиабаты,  $\sigma_c = 1/nl$ .

*Примечание.* Интерпретируйте теплопроводность как перенос внутренней (тепловой) энергии  $U$  через плоскость внутри вещества, как это было сделано при рассмотрении процесса диффузии.

43. 4. Когда в жидкости существует градиент скорости, причем скорость зависит от расстояния в направлении, перпендикулярном потоку, то в результате возникает тормозящий движение фактор, называемый *вязкостью*. В газе его появление обусловлено переносом импульса. Через каждую плоскость импульс переносится молекулами, находящимися по обе стороны от нее на расстоянии, не превышающем длину свободного пробега. Если поток движется в направлении оси  $x$  и существует градиент скорости  $v_x$  в направлении оси  $y$ , то сила вязкости, отнесенная к единице площади плоскости, перпендикулярной оси  $y$ , равна  $F/A = \eta dv_x/dy$ . Покажите, что для газа коэффициент

вязкости  $\eta$  приближенно равен

$$\eta = nvm l = \frac{vm}{\sigma_c},$$

где  $n$  — концентрация молекул,  $v$  — средняя тепловая скорость,  $m$  — масса молекулы,  $l$  — длина свободного пробега, а  $\sigma_c = 1/nl$ .

43. 5. Отметим, что теплопроводность и вязкость газа не зависят от давления. (Однако при малых давлениях процесс переноса энергии и импульса в газе уже нельзя описывать с помощью найденных выше коэффициентов вязкости и теплопроводности.) Измените соответствующим образом формулу для количества энергии, переносимой между двумя поверхностями, имеющими температуры  $T$  и  $T + \Delta T$  и находящимися на неизменном расстоянии  $D$  друг от друга, если  $l \gg D$ . Прделайте то же самое, рассматривая процесс переноса импульса между двумя такими поверхностями, движущимися со скоростями  $v$  и  $v + \Delta v$ .

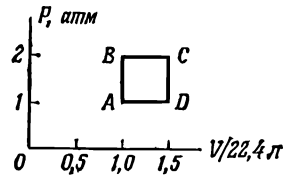
43. 6. Два газа  $A$  и  $B$  с плотностями частиц  $n_A$  и  $n_B$  находятся при определенной температуре  $T_0$ . Отдельный ион, за которым ведется наблюдение, обладает подвижностями  $\mu_A$  в газе  $A$  и  $\mu_B$  в газе  $B$  ( $\mu = v_{др}/F$ , где  $F$  — сила, см. вып. 4, стр. 324). Какова подвижность иона в смеси этих газов с плотностью  $n_A + n_B$  при той же температуре  $T_0$ ?

### К главе 44. Законы термодинамики

44. 1. Идеальный газ, имеющий  $\gamma = 4/3$ , последовательно переводится из состояния  $A$  (давление  $P = 1$  атм, объем  $V = 22,4$  л, температура  $t = 273$  К) в состояние  $C$  ( $P = 2$  атм,  $V = 33,6$  л) либо по пути  $ABC$ , либо по пути  $ADC$ .

а) Покажите, что изменение энтропии в обоих случаях одинаково.

б) Рассчитайте это изменение.



44. 2. Переведите идеальный цикл Карно  $abcd$  (см. фиг. 44.6 «Лекций», вып. 4, стр. 343) на диаграмме  $p - V$  между состояниями, характеризующимися параметрами  $T_1$  и  $T_2$  и  $(p_a, V_a)$ ,  $(p_c, V_c)$ , в цикл  $abcd$  на диаграмме температура — энтропия.



44. 3. Температура парогенератора на современной теплоэлектростанции, использующей перегретый пар, равна  $600^\circ\text{C}$ . В холодильник подается речная вода при  $t=20^\circ\text{C}$ . Каков максимальный к. п. д., который может быть получен на такой станции?
44. 4. В идеальном обратимом двигателе, в котором в качестве рабочего тела используется  $28\text{ г}$  азота ( $\gamma = 7/5$ ), рабочий цикл  $abcd$  происходит без использования золотника (см. фиг. 44.6 «Лекций», вып. 4, стр. 343). Температура нагревателя  $400\text{ К}$ , холодильника  $300\text{ К}$ . Начальный объем газа в точке  $a$  равен  $6,0\text{ л}$ , а объем в точке  $c$  составляет  $18,0\text{ л}$ .
- При каком объеме  $V_b$  нужно прекратить подачу в цилиндр тепла (изотермическое расширение) и, теплоизолировав его, начать адиабатическое расширение от  $V_b$  к  $V_c$ ? При каком объеме  $V_d$  начнется адиабатическое сжатие?
  - Какое количество тепла поступает в систему на участке  $a \rightarrow b$  цикла?
  - Какое количество тепла уходит из системы на участке  $c \rightarrow d$ ?
  - Чему равен к. п. д. двигателя?
  - Чему равно изменение энтропии на  $1\text{ г}$  рабочего вещества на участках  $a \rightarrow b$  и  $c \rightarrow d$ ?

*Примечание.* Вы должны получить, что для цикла Карно в случае идеального газа отношения  $V_b/V_a$  и  $V_c/V_d$  равны.

44. 5. Беззаботный экспериментатор, торопясь уйти, оставил золотник резервуара, наполненного гелием, неплотно закрытым. Газ, первоначально находившийся при давлении  $200\text{ атм}$ , медленно изотермически выходит из резервуара при температуре  $20^\circ\text{C}$ . Чему равно изменение энтропии на  $1\text{ кг}$  газа?

#### К главе 45. Примеры из термодинамики

45. 1. Солнце излучает приблизительно как черное тело при температуре  $5700\text{ К}$ . Если солнечным светом облучать абсолютно черную медную сферу, расположенную на расстоянии  $1\text{ А. Е.}$  от Солнца, то какая равновесная температура будет достигнута при этом? (Диаметр Солнца виден с Земли под углом  $0,50^\circ$ .)
45. 2. Солнечный свет падает перпендикулярно на некоторую область, находящуюся в Экваториальной Африке. Если

поверхность излучает как абсолютно черное тело, то какова максимальная температура этой области? (Солнечная постоянная равна  $1395 \text{ вт/м}^2$ .)

45. 3. Черное тело радиусом  $r$  при температуре  $T$  окружено зачерненной с обеих сторон тонкой оболочкой радиусом  $R$ . Найдите, насколько такой радиационный экран уменьшает скорость охлаждения тела. (В пространстве между телом и оболочкой — вакуум; потерь, связанных с теплопроводностью, нет.)
45. 4. Плотность в центре Солнца равна приблизительно  $80 \text{ г/см}^3$ , а температура  $\sim 13 \cdot 10^6 \text{ К}$ . Вещество Солнца почти целиком состоит из протонов и электронов. Найдите давление газа и радиационное давление в центре Солнца.
45. 5. Скрытая теплота испарения воды равна приблизительно  $2,44 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3$ , а плотность пара при  $100^\circ\text{C}$  составляет  $0,598 \text{ кг/м}^3$ . Используя уравнение Клаузиуса — Клапейрона, найдите скорость изменения температуры кипения с высотой в  $\text{град/км}$  на уровне моря. Положите температуру воздуха равной  $300 \text{ К}$ .
45. 6. Покажите, что для идеального газа, внутренняя энергия которого зависит только от температуры, разность между молярными теплоемкостями при постоянном давлении и постоянном объеме равна газовой постоянной  $R$ :

$$C_p - C_v = R.$$

45. 7. При  $0^\circ\text{C}$  удельный объем насыщенного водяного пара равен  $206 \text{ м}^3/\text{кг}$ . Какова скрытая теплота испарения в  $\text{Дж/кг}$  при этой температуре? (Определите  $dp/dt$  из таблиц, рассчитайте  $L$  и сравните с табличным значением.)
45. 8. Тело поглощает фиксированную долю  $A$  полного излучения, падающего на его поверхность, и отражает остаток. Покажите, что при температуре  $T$  оно излучает энергию  $A\sigma T^4$ .
45. 9. а) Используя термодинамические соображения, покажите, что если вещество при замерзании расширяется, то его температура замерзания должна уменьшаться с увеличением давления.  
б) Бытует мнение, что катание на коньках связано с плавлением льда под коньком. Приняв эту гипотезу, рассчитайте самую низкую температуру льда на катке, при которой катание на коньках еще возможно.

К главе 47. Звук. Волновое уравнение

47. 1. Найдите отношение скоростей звука в гелии и водороде при одной и той же температуре.
47. 2. В два свистка одинаковой длины вдуваются: воздух, охлажденный почти до температуры жидкого воздуха ( $-180^\circ\text{C}$ ), и теплый воздух. Один свисток издает звук ровно на октаву выше, чем другой (т. е. удвоенной частоты). Какова должна быть температура воздуха, вдуваемого во второй свисток?
47. 3. Если вы вдохнете гелий и начнете разговаривать, то звук вашего голоса будет неестественно высоким. Если все ваши резонансные полости («пустоты в вашей голове») будут заполнены гелием, а не воздухом, то насколько увеличится каждая *резонансная* частота? Если вы при этом напеваете, то как повлияет наличие гелия на тональность, в которой вы поете?
47. 4. Рассмотрим постоянную плоскую звуковую волну с частотой  $1000 \text{ сек}^{-1}$ , в которой экстремумы давления отличаются на  $\pm 1 \text{ дин/см}^2$  от среднего атмосферного давления  $1 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$ .
- Чему равно изменение плотности, сопровождающее распространение такой волны?
  - Чему равно максимальное смещение  $\chi_m$  частиц?
  - Чему равна интенсивность волны?  
(Примите скорость звука равной  $340 \text{ м/сек.}$ )
47. 5. Зажмите кончиками пальцев обеих рук резиновую полосу длиной около  $5 \text{ см}$ , а затем попросите товарища слегка щелкнуть по резине. Послышится звук. Потом растяните полосу в 2, 3, 4, 5 раз, *не меняя массу* полоски между руками, и повторите ту же процедуру. Обсудите результаты наблюдения. Почему ничего похожего не происходит со струной скрипки?
- 47.6. Однородная абсолютно гибкая струна линейной плотности  $\sigma \text{ кг/м}$  растянута с натяжением  $T$ . Сформулируйте волновое уравнение, описывающее поперечное смещение струны  $y$ , и найдите скорость распространения возмущения вдоль струны. Используйте предположение о том, что  $dy/dx \ll 1$  во всех точках в любой момент времени, и рассмотрите только плоские колебания струны. Отметим, что компонента натяжения струны в поперечном направлении очень близка к  $Tdy/dx$ .

47. 7. Покажите, что выражение  $u = Ae^{i(\omega t - kx)}$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

при условии, что  $\omega$  и  $k$  связаны соотношением  $\omega = vk$ .

### К главе 48. Биения

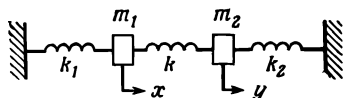
48. 1. Фазовая скорость волны с длиной волны  $\lambda$ , распространяющейся по водной поверхности, если пренебречь поверхностным натяжением и конечной глубиной водоема,  $v_{\text{фаз}} = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ . Покажите, что групповая скорость волны равна половине фазовой. Чему равна групповая и фазовая скорости волны длиной 1000 м?
48. 2. Если в предыдущей задаче рассматривать влияние поверхностного натяжения, то можно показать, что фазовая скорость волны на поверхности жидкости с плотностью  $\rho$  и с поверхностным натяжением  $T$  равна  $v_{\text{фаз}} = (2\pi T/\lambda\rho + g\lambda/2\pi)^{1/2}$ , когда глубина водоема достаточно велика. Найдите групповую скорость такой волны.
48. 3. Найдите фазовую скорость ряби с длиной волны 1,0 см на поверхности:  
 а) воды (поверхностное натяжение 70 дин/см);  
 б) этилового спирта (поверхностное натяжение 26 дин/см).
48. 4. Найдите длину волны и частоту ряби на поверхности воды, которая движется с *минимальной* скоростью.
48. 5. Длинный дизельный товарный поезд идет в гору со скоростью 5,0 м/сек по прямому пути. Когда он достигает туннеля в отвесной скале, машинист дает длинный непрерывный гудок с основной частотой 340 гц. Звук гудка и его эхо, возникающее при отражении от стены, слышат машинист и человек, находящийся на земле вблизи последнего вагона. Какой частоты звук слышит каждый из них?

### К главе 49. Собственные колебания

49. 1. Два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  прикреплены к двум стенам пружинами, коэффициенты упругости которых  $k_1$  и  $k_2$  соответственно. Друг с другом они соединены пружиной

с жесткостью  $k$  (см. рисунок). Напишите уравнения движения этих тел, положив

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \omega_0^2,$$



49. 2. Подставьте  $x = Ae^{i\omega t}$  и  $y = Be^{i\omega t}$  в полученные выше уравнения и найдите частоты и отношения амплитуд грузиков для нормальных колебаний.
49. 3. Покажите, что функция

$$f(x, y, z, t) = Ae^{i\omega t} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi z}{c},$$

где

$$\omega^2 = v^2\pi^2 \left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right),$$

а  $l, m, n$  — целые числа, большие или равные единице,

- а) удовлетворяет трехмерному волновому уравнению (описывающему волну со скоростью распространения  $v$ );  
 б) равна 0 при  $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$ ;  
 в) осциллирует во времени подобно синусоиде.

49. 4. Полагая, что в предыдущей задаче  $a : b : c = 1 : 2 : 3$ , найдите 10 минимальных частот, выраженных через наименьшую частоту  $\omega_0$ . Расположите их в порядке возрастания и отложите на вертикальной шкале.
49. 5. Используя понятие о бесконечно длинных периодических волнах, распространяющихся в противоположных направлениях, выясните, что произойдет, если идеальная однородная натянутая струна длиной  $L$  оттянута от средней точки на расстояние  $A$ , а затем отпущена. Нарисуйте несколько положений струны в различные моменты времени в течение одного полупериода первой гармоники.

### К главе 50. Гармоники

50. 1. Используя фурье-разложения прямоугольной волны

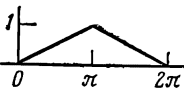
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases} = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right),$$

покажите, что

$$а) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

$$б) 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$в) 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \\ = \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

50. 2. Разложите функцию  $g(x) =$   в интеграл Фурье и покажите, что полученные результаты согласуются с тем, что получается при интегрировании функции, использованной в предыдущей задаче.

50. 3. Используя результат предыдущей задачи, покажите, что

$$а) 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96},$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2^4}{2^4 - 1} \left( 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

50. 4. В гл. 45 нам надо было вычислить интеграл

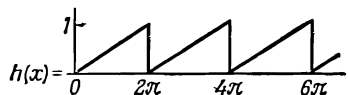
$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Теперь вы можете это сделать, умножив числитель и знаменатель на  $e^{-x}$ , разложив подынтегральную функцию в ряд и интегрируя почленно. Получим

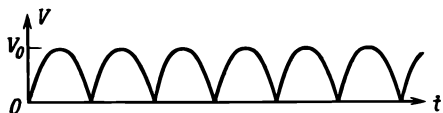
$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du \left[ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right] = 6 \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Проверьте это.

50. 5. Найдите фурье-разложения пилообразной функции, которая описывает ток, протекающий в цепи горизонтальной развертки электронного осциллографа:



50. 6. Выпрямитель есть устройство, которое преобразует синусоидальную волну, например напряжения с амплитудой  $V_0$ , в напряжение следующего вида:



- а) Вычислите среднее значение  $V(t)$ . Оно называется выходным напряжением.  
 б) Найдите амплитуду второй гармоники в выходном напряжении.
50. 7. С трансформатора снимается выходное напряжение, пропорциональное  $V_{\text{вых}} = V_{\text{вх}} + e(V_{\text{вх}})^3$ . Выясните, к каким эффектам приведет учет кубического члена, если:
- а) входная волна синусоидальная;  
 б) имеются две или более входные синусоидальные волны с разными частотами.

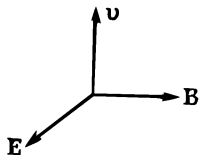
### ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

#### К главе 1. Электромагнетизм

1. 1. Электрические силы и силы гравитации.
  - а) Какой должна была бы быть масса протона, чтобы сила гравитационного притяжения между двумя покоящимися протонами по величине совпадала с силой их электрического отталкивания? Каково отношение этой массы к обычной массе протона?
  - б) Какой была бы величина силы электростатического взаимодействия двух монет по 1 копейке, помещенных на противоположных концах лекционной доски, ширина которой равна 10 м, если бы заряды ядер и электронов этих монет компенсировали себя лишь с точностью до 1%? Можете ли вы себе представить тело, вес которого по величине совпадал бы с этой силой?
1. 2. Оцените приближенно работу, которую необходимо затратить на преодоление силы электрического отталкивания при образовании ядра урана из двух одинаковых половинок. Чему равна эта работа при образовании ядра гелия из двух дейтронов? Выразите оба ответа в киловатт-часах на килограмм.
1. 3. На каждый атом меди приходится один электрон проводимости. Какова средняя скорость электронов проводимости, если через медный провод диаметром 0,2 мм течет ток 10 а? Чему равно в этом случае отношение  $v^2/c^2$ ? (Напомним, что отношение «магнитных» эффектов к «электрическим» такого же порядка.)
1. 4. В области пространства создано однородное электрическое поле  $\mathbf{E}$  напряженностью 10 000 в/см, направленное вдоль оси  $x$ , а также однородное магнитное поле  $\mathbf{B}$ , направленное вдоль оси  $y$ . Через эту область в направлении оси  $z$  по прямой линии движется пучок  $\mu$ -мезонов со скоростью, равной  $c/3$ .



- а) Какова напряженность магнитного поля **B**? (Масса заряженного  $\mu$ -мезона равна 207 электронным массам, а его заряд по величине совпадает с зарядом электрона.)



- б) Можно ли с помощью этого эксперимента определить знак заряда мюона?

1. 5. а) В некоторой области пространства создано постоянное однородное магнитное поле  $B_x = 0$ ,  $B_y = 0$  и  $B_z = B_0$ . Электрических полей и токов в этой области пространства нет. Из начала координат в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $v$  вылетает частица массой  $m$  с положительным зарядом  $q$ . Найдите траекторию частицы.
- б) Предположите, что  $B_x = 0$ ,  $B_y = 0$ , а  $B_z = B_0 + ax$ , где  $ax$  всюду мало по сравнению с  $B_0$ . Опишите качественно траекторию частицы [см. работу Шарпака с сотрудниками, опубликованную в «Physical Review Letters», 6, 128 (1961), где подобное поле использовалось в одном ответственном эксперименте].
- в) Покажите, что магнитное поле такого вида не удовлетворяет уравнениям Максвелла, если оно замкнуто в конечном объеме или, как предполагалось выше, в объеме отсутствуют токи или электрическое поле.
1. 6. В поле неподвижного отрицательного точечного заряда, расположенного в начале координат, а также в однородном магнитном поле  $B_0$ , направленном в положительном направлении оси  $z$ , из точки  $x = z = 0$ ,  $y = a$  движется частица массой  $m$  с положительным зарядом  $q$  и малой скоростью  $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_x$ .
- а) При какой величине напряженности поля  $B_0$  траектория частицы будет представлять собой окружность радиусом  $a$  с центром в начале координат?
- б) Объясните, почему в том случае, когда напряженность магнитного поля отличается от найденной, скорость частицы зависит только от ее расстояния до начала координат.
- в) Схематически нарисуйте несколько витков траектории частицы, когда частица начинает свое движение из точки  $x = z = 0$ ,  $y = a$  с нулевой скоростью.

## К главе 2. Дифференциальное исчисление векторных полей

2. 1. Медная проволока радиусом  $a = 1$  мм равномерно покрыта слоем изоляции, внешний радиус которого равен  $b$ . Электрическим током проволока нагревается до температуры  $T_1$ , при этом температура внешней поверхности изоляционного покрытия  $T_2$  остается почти комнатной.

а) Чему равен  $\nabla T$  внутри покрытия? Ответ выразить в переменных  $a, b, T_1$  и  $T_2$ .

б) Чему равна разность температур  $T_1 - T_2$ , если через медную проволоку, покрытую слоем резины (толщина  $0,2$  см, коэффициент теплопроводности  $1,6 \cdot 10^{-3}$  вт/см $\cdot$ град), течет ток  $20$  а?

2. 2. Вычислением «в лоб» покажите, что

а)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ ,

б)  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ .

2. 3. Покажите, что если  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку  $x, y, z$ , то

а)  $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$ ,

б)  $\nabla \times \mathbf{R} = 0$ ,

в)  $\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = 0$ ,

г)  $\nabla \times \left( -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = 0$ ,

д)  $\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$

(при  $R \neq 0$ ).

е) Из равенства (б) и формулы (2.46) «Лекций» (вып. 5, стр. 42) следует, что вектор  $\mathbf{R}$  можно представить в виде  $\mathbf{R} = \nabla \phi$ . Найдите функцию  $\phi$ .

2. 4. Уравнения Максвелла имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (4)$$

Закон сохранения заряда можно записать в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5)$$

- а) Покажите, что уравнения 3 и 2 совместны.  
 б) Покажите, что уравнение 5 можно получить, взяв дивергенцию от левой и правой частей уравнения 4 (т. е. убедитесь, что уравнения Максвелла справедливы лишь при выполнении закона сохранения заряда).  
 в) Покажите, что в пустоте ( $\mathbf{j} = 0$ ,  $\rho = 0$ ) поле  $\mathbf{E}$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

- г) Покажите, что в пустоте поле  $\mathbf{B}$  удовлетворяет такому же волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

- д) Покажите, что, согласно уравнению 2, поле  $\mathbf{E}$  можно представить в виде  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - (\partial\mathbf{A}/\partial t)$ , где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал магнитного поля  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Почему вектор  $\mathbf{B}$  может быть представлен в таком виде?

2. 5. Пусть  $\mathbf{v}(x, y, z)$  — поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси. Покажите, что

а)  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ,

б)  $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$ ,

где  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости.

2. 6. Покажите прямым вычислением, что если  $\mathbf{A}$  — постоянный вектор, а  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, то

$$\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{R}) = 2\mathbf{A}.$$

Если, однако, в хорошо известную формулу

$$\mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C}$$

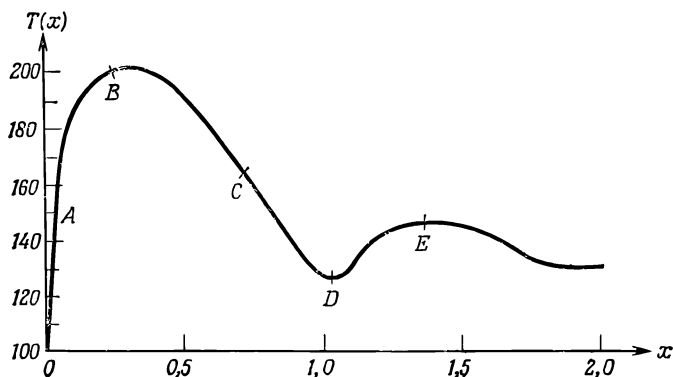
вместо векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  формально подставить  $\nabla$  и  $\mathbf{R}$ , то получится неверный результат

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{R}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{R}) - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{R} = 3\mathbf{A}.$$

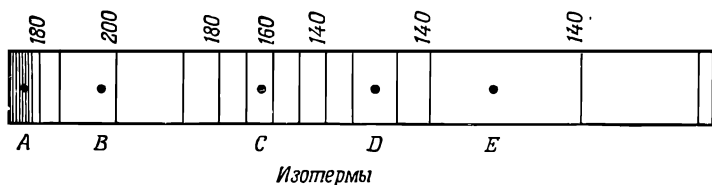
В чем тут дело?

2. 7. Длинный стальной стержень подвергается некоторой термической обработке, в результате чего в некоторый момент времени после начала остывания стержня распределение температуры  $T(x)$  вдоль стержня имеет вид, изображенный на фиг. 1. Изотермы, нанесенные с интервалом температур в  $10^\circ\text{C}$ , изображены на фиг. 2. Будем предполагать, что температура в каждой точке стержня

зависит только от расстояния  $x$  до конца стержня. Нарисуйте в точках  $A, B, C$  векторы, направление и длина которых совпадают с направлением и величиной  $\nabla T$ . В какой из пяти отмеченных точек дивергенция теплового потока  $\mathbf{h}$  максимальна? В каких из пяти точек  $\nabla \times \mathbf{h} = 0$ ?



Фиг. 1.



Фиг. 2.

### К главе 3. Интегральное исчисление векторов

3. 1. а) Уравнения Максвелла в гл. 1 «Лекций» были сформулированы в интегральной форме (хотя и словесно), а в гл. 2 — в дифференциальной форме. Покажите, что обе формы уравнений Максвелла эквивалентны.  
б) Покажите, что уравнение

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

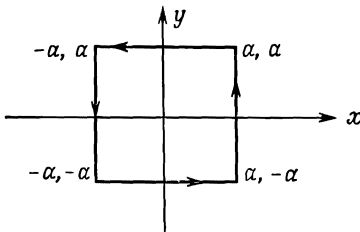
где  $\rho$  — плотность зарядов, а  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока, есть не что иное, как закон сохранения заряда,

3. 2. Поверхность шара равномерно покрыта слоем радиоактивного вещества, которое испускает  $\alpha$ -частицы высокой энергии. Вообразим, что  $\alpha$ -частицы вылетают только наружу от поверхности шара, причем только в радиальном направлении. С поверхности шара тем самым стекают заряды, т. е. течет некоторый ток. Создает ли этот ток магнитное поле?
3. 3. Напряженность электрического поля точечного заряда, помещенного в начало координат, имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{K}{r^3} \mathbf{r}, \text{ где } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \mathbf{r} = ix + jy + kz$$

( $K$  — некоторая постоянная).

- а) Вычислите поток вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  через поверхность сферы радиуса  $a$ , центр которой совпадает с зарядом.
- б) Воспользовавшись теоремой Остроградского — Гаусса, представьте поток вектора  $\mathbf{E}$  через поверхность сферы в виде объемного интеграла от  $(\nabla \cdot \mathbf{E})$ . Можете ли вы объяснить полученный вами результат?
- в) Вычислите циркуляцию вектора  $\mathbf{E}$  вдоль контура, изображенного на рисунке (контур лежит в плоскости  $xy$ ).



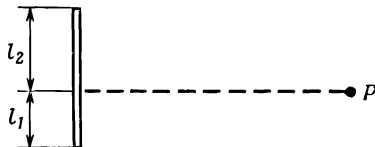
Убедитесь в правильности полученного результата, воспользовавшись теоремой Стокса.

3. 4. Воспользовавшись решением задачи 2.3 (а), получите формулу (практически бесполезную) для произвольного объема в виде интеграла по поверхности этого объема. Убедитесь в правильности вашего ответа для шара и прямоугольного параллелепипеда.

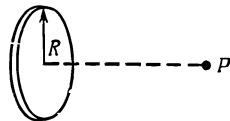
#### К главе 4. Электростатика

4. 1. Найдите потенциал  $\phi$  в точке  $P$ , удаленной на расстояние  $r$  от заряженной нити длиной  $l_1 + l_2$  м. Линейная плотность зарядов на нити равна  $\lambda$  (см. рисунок).

Сравните полученный результат с тем, которого следует ожидать в случае  $r \gg (l_1 + l_2)$ . Проверьте ваш ответ в предельном случае  $r \ll (l_1 + l_2)$ , сравнив напряженности электрического поля, найденные с помощью  $\Phi$  и по теореме Гаусса.

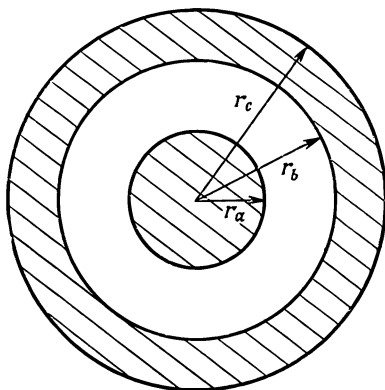


4. 2. Вычислите напряженность электрического поля в точке  $P$ , расположенной на оси тонкого равномерно заряженного диска радиуса  $R$  на расстоянии  $r$  от его центра.



4. 3. Две металлические сферы имеют общий центр, причем внутренней из них сообщен заряд  $q'$ , а внешней — заряд  $q$ .

- Найдите зависимость электрического потенциала от радиуса на далеких расстояниях.
- Найдите зависимость напряженности электрического поля от радиуса.
- Чему равен потенциал на поверхности внутренней сферы?
- Как изменится электрическое поле на расстояниях  $r > r_c$  и  $r_b < r < r_c$ , если центры внутренней и внешней сфер слегка разойдутся?

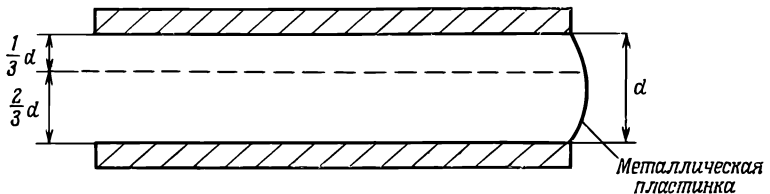


К главе 5. Применения закона Гаусса

5. 1. Покажите, что электрический потенциал  $\Phi$  обладает следующим интересным свойством: среднее значение  $\bar{\Phi}$  на воображаемой сферической поверхности равно значению

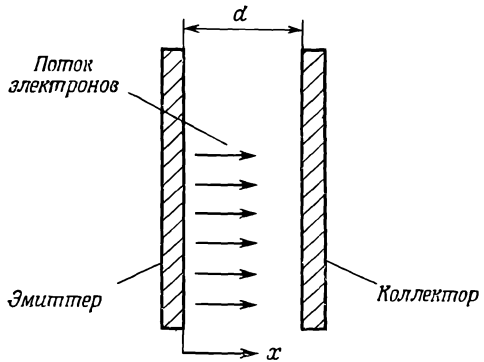
$\varphi(0)$  в центре этой сферы *при условии*, что внутри сферы нет никаких зарядов. В каких задачах, по вашему мнению, удобно воспользоваться этим свойством?

5. 2. Найдите напряженность электрического поля во внутренних точках очень длинного равномерно заряженного цилиндра, достаточно удаленных от его концов. Чем отличается результат от получающегося в случае равномерно заряженного шара?
5. 3. Две широкие параллельные металлические пластины расположены одна над другой на расстоянии  $d$ . Края этих пластин соединены металлическим проводом. Между пластинами на расстоянии  $\frac{1}{3}d$  ниже верхней пластины натянута тонкая равномерно заряженная пластмассовая пленка, на единицу площади которой приходится заряд  $\sigma$ . Найдите напряженности электрического поля  $E_1$  и  $E_2$  вблизи верхней и нижней пластин.



5. 4. Найдите выражение для  $x$ -компоненты электрического поля, если плотность зарядов  $\rho$  в пространстве зависит только от  $x$ .
5. 5. В электронной лампе электроны вылетают из раскаленной металлической пластины (катод) и собираются на плоской металлической пластине (анод), расположенной параллельно эмиттирующей поверхности на расстоянии  $d$  от нее. (Расстояние  $d$  предполагается малым по сравнению с размерами обеих пластин.) Потенциал электрического поля между пластинами меняется по закону  $\varphi = kx^{1/2}$ , где  $x$  — расстояние от эмиттера.
- а) Чему равна плотность поверхностных зарядов на эмиттере? На коллекторе?

- б) Как меняется плотность объемного заряда  $\rho(x)$  в пространстве между пластинами, т. е. в интервале  $0 < x < d$ ?



5. 6. Пусть на поверхности проводника распределены заряды с плотностью  $\sigma$  кулон/м<sup>2</sup>, где  $\sigma$  — вообще говоря, переменная величина. Покажите, что сила, действующая на заряд, заключенный в элементарной площадке  $dA$ , нормальна к поверхности проводника и равна  $1/2(\sigma^2/\epsilon_0) dA$ . (Множитель  $1/2$  правилен. Объясните, почему он возникает?)
5. 7. Максимальная напряженность электрического поля, которое может существовать на поверхности проводника, граничащего с вакуумом, по порядку величины равна  $10$  в/м. Полагая, что поверхностный заряд, создающий это поле, отрицателен, сравните число избыточных электронов, приходящееся на единицу площади, с числом атомов, приходящееся на ту же площадь. Сравните величину силы, действующей на электрон в таком поле, с величиной силы, которую испытывает электрон в поле протона на расстояниях порядка атомных.
5. 8. Отрицательный мюон ( $\mu$ -мезон) — это частица, заряд которой равен заряду электрона, а масса в  $207$  раз тяжелее массы электрона. При торможении в веществе отрицательный мюон может быть захвачен ядром какого-нибудь атома и заместить один из вращающихся вокруг ядра электронов, образовав «мезоатом». Так как масса мюона велика, то размер его орбиты во много раз меньше размеров орбит атомных электронов; например, для тяжелых ядер орбита мюона, соответствующая его наименьшему энергетическому состоянию, даже находится внутри ядра. Мюон взаимодействует с ядерным веществом с помощью не ядерных сил, а электрических, причем ядро им



воспринимается как равномерно заряженный шар. Из независимых экспериментов было найдено, что радиус ядра зависит от суммарного числа протонов и нейтронов ( $A$ ) следующим образом:  $R = R_0 \cdot A^{1/3}$  ( $R_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ ). Рассмотрим модель мезоатома свинца, в котором мюон осциллирует относительно центра ядра вдоль произвольной линии, проходящей через этот центр. Чему равна собственная частота  $\omega$  таких осцилляций? Вы уже знаете, что квантовые уровни гармонического осциллятора разделены друг от друга энергией  $\hbar\omega$ . Чему равна разность энергий двух самых низких состояний мезоатома в рассматриваемой модели? Экспериментально было обнаружено, что при образовании мезоатомов в свинце испускаются  $\gamma$ -лучи с энергией  $6 \text{ Мэв}$ . Как бы вы интерпретировали этот факт?

5. 9. Представьте себе, что через земной шар по диаметру прорыт туннель. Плотность пород, образующих земной шар, можно считать постоянной. Покажите, что если в этот туннель бросить какой-то предмет, то он будет совершать колебания относительно центра земного шара с периодом, равным периоду обращения спутника, запущенного вокруг Земли на небольшой высоте над ее поверхностью.
- 5.10. Известно, что за год Земля выделяет тепловую энергию, примерно равную  $Q = 8 \cdot 10^{20} \text{ Дж}$ . Не строя последовательной теории этого явления, можно рассмотреть несколько весьма упрощенных моделей, позволяющих сделать правильные оценки по порядку величины. В качестве примера рассмотрим модель, согласно которой все тепло создается в результате распада радиоактивных веществ, однородно распределенных по объему земного шара: кинетическая энергия испускаемых ими частиц полностью переходит в тепло.  
По существующим оценкам температура в центре Земли примерно равна  $2500^\circ\text{C}$ , а теплопроводность земных пород в среднем равна  $0,03 \text{ Дж/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$ . Находится ли описанная выше модель в согласии с этими оценками?
- 5.11. Два длинных коаксиальных проводящих цилиндра заряжены так, что на большом расстоянии от их концов на единицу длины внутреннего цилиндра приходится  $\lambda_1$  кулонов, а на единицу длины внешнего цилиндра  $\lambda_2$  кулонов. Внутренний и внешний радиусы внутреннего цилиндра равны  $r_1$  и  $r_2$ , а внешнего цилиндра равны  $r_3$  и  $r_4$ . Найдите поле  $\mathbf{E}(r)$  в точках, расположенных вблизи середины цилиндров (т. е. там, где краевыми эффектами мож-

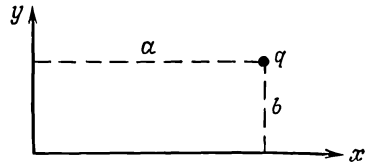
но пренебречь). Определите разность потенциалов между цилиндрами.

Опишите качественно, в какую сторону будут меняться напряженность поля и разность потенциалов, если:

- 1)  $r_1$  будет уменьшаться;
- 2)  $r_2$  будет увеличиваться;
- 3) внешний контур сечения внутреннего проводника имеет форму квадрата со сторонами, равными  $2r_2$  (при этом предполагается, что  $\sqrt{2} r_2 < r_3$ )?

### К главе 6 и 7. Электрическое поле в разных физических условиях

6. 1. Методом изображений найдите силу, действующую на заряд  $q$ , помещенный на расстояниях  $a$  и  $b$  от двух проводящих полуплоскостей, образующих между собой прямой угол.



6. 2. Частица с зарядом  $q$ , в начальный момент времени закрепленная на расстоянии  $x_0$  от поверхности заземленной проводящей плоскости, освобождается и начинает двигаться по направлению к поверхности.
- а) Как зависит кинетическая энергия частицы от расстояния  $x$  до поверхности? (Потерями энергии частицы на излучение пренебречь.) Есть ли что-нибудь нефизическое в вашем ответе?
  - б) Реальную металлическую пластинку можно рассматривать как идеальную проводящую плоскость лишь на расстояниях, превышающих межатомные, т. е. лишь до расстояний примерно 2—3 Å. Оцените кинетическую энергию электрона, который в момент  $t = 0$  был освобожден на расстоянии 1 см от проводящей пластинки. Ответ выразить в электронвольтах.
6. 3. Прямоугольный пластмассовый брусок с размерами  $1\text{ см} \times 10\text{ см} \times 100\text{ см}$  равномерно заряжен. Плотность зарядов равна  $\rho$  кулон/см<sup>3</sup>. Нарисуйте примерный ход потенциала  $\varphi$  как функции расстояния до центра бруска вдоль прямой линии, перпендикулярной стенке с размерами  $10\text{ см} \times 100\text{ см}$  и проходящей через центр бруска.

Рассмотрите интервал расстояний от  $0,001$  см (внутри бруска) до расстояний, во много раз превышающих  $100$  см. Масштаб возьмите логарифмический, т. е. нарисуйте  $\log \varphi$  как функцию логарифма расстояния. На том же графике нарисуйте кривую зависимости напряженности электрического поля  $E$  от расстояния.

6. 4. Земля непрерывно облучается космическими лучами высокой энергии, приходящими из пространства вне Солнечной системы. С помощью измерений, выполненных на зондах и спутниках, было установлено, что космические лучи в основном состоят из протонов и лишь малую часть их составляют  $\alpha$ -частицы, тяжелые ядра и электроны. Средняя энергия протонов в космических лучах оказалась равной нескольким миллиардам электронвольт; интенсивность потока протонов, достигающих земной атмосферы, примерно равна одному протону в секунду на  $1$  см<sup>2</sup>. Интересно, какое время необходимо, чтобы заряженные частицы космических лучей подняли потенциал Земли настолько, чтобы протоны уже не могли попасть на поверхность Земли из-за электрического отталкивания? Велико ли это время по сравнению с возрастом Земли, оцениваемым примерно в 5 миллиардов лет? Если это время меньше возраста Земли, то почему космические лучи продолжают достигать ее поверхности?
6. 5. Определите емкость, приходящуюся на единицу длины бесконечного цилиндрического конденсатора, изготовленного из двух проводящих коаксиальных цилиндров, радиусы которых равны  $a$  (внутренний цилиндр) и  $b$ . Ответьте качественно на вопрос, что случилось бы, если бы в конструкции конденсатора оказались дефекты, скажем на поверхности внешнего цилиндра имелся бы острый выступ?
6. 6. а) Чему равна плотность поверхностных зарядов, индуцированных на поверхности незаряженной изолированной проводящей сферы, центр которой расположен на расстоянии  $b$  от точечного заряда  $q$ ?
- б) Чему равна сила, действующая на заряд со стороны сферы, если потенциал последней равен  $V$ ?
6. 7. В гл. 6 «Лекций» (вып. 5) на основе качественных рассуждений было показано, что электрическое поле вне сферы, плотность поверхностных зарядов на которой меняется в зависимости от полярного угла  $\theta$  как  $\cos \theta$ , можно

себе представить как суперпозицию электрических полей двух слабо сдвинутых относительно друг друга и противоположно заряженных шаров. Покажите теперь это путем вычислений и найдите электрическое поле как *вне*, так и *внутри* сферы, считая, что плотность поверхностных зарядов на ней зависит от полярного угла  $\theta$ :  $\sigma(\theta) = A \cos \theta$ , где  $A$  — некоторая постоянная.

6. 8. Поле электрического диполя определяется выражениями (6.14) и (6.15) «Лекций» (вып. 5, стр. 113, 114).

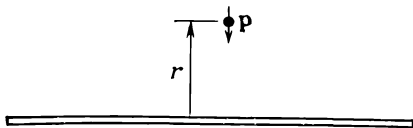
- а) Найдите радиальную и тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля диполя в точке  $(r, \theta, \varphi)$ .
- б) Покажите, что электрическое поле диполя направлено в одну и ту же сторону во всех точках прямой, проходящей через диполь.
- в) Найдите направление и относительные величины напряженности  $\mathbf{E}$  на некотором произвольном расстоянии от диполя в точках, определяемых углами  $0, \pi/4$ , и  $\pi/2$ , отсчитанными от направления вектора  $\mathbf{p}$ ?

6. 9. Пусть диполь находится в однородном электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}_0$ .

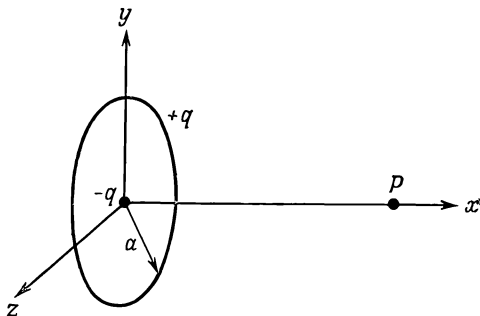
- а) Если направление дипольного момента совпадает с направлением электрического поля, то существует эквипотенциальная поверхность, охватывающая диполь. Покажите, что такой поверхностью является сфера, и найдите величину дипольного момента, для которой сфера имеет радиус  $a$ .
- б) Опишите электрическое поле вне этой сферы.
- в) Изменится ли электрическое поле, если с этой эквипотенциальной поверхностью совпадет тонкая проводящая сфера, заряженная до того же потенциала?
- г) Как будут распределены заряды на проводящей сфере?
- д) Каким дипольным моментом будет обладать это распределение зарядов?
- е) Как бы вы использовали полученные результаты?

6.10. Частица с дипольным моментом  $\mathbf{p}$  помещена на расстоянии  $r$  от длинного провода, на единицу длины которого приходится заряд  $\lambda$  ( $\lambda$  — константа). Вектор дипольного момента расположен в плоскости, проходящей через провод и частицу.

- а) Чему равна сила, действующая на частицу, и момент этой силы, если вектор  $\mathbf{p}$  направлен нормально к проводу?
- б) Чему равна сила, действующая на частицу, и момент силы, если вектор  $\mathbf{p}$  параллелен проводу?

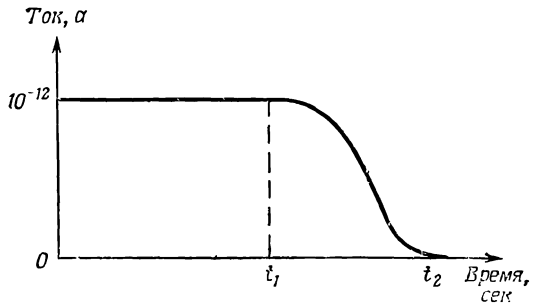


- 6.11. Найдите потенциал, создаваемый большой пластиной, на единицу площади которой приходится  $N$  диполей, как функцию расстояния от этой пластины. Считайте, что все диполи обладают одинаковым дипольным моментом  $\mathbf{p}$ , направленным перпендикулярно поверхности пластины.
- 6.12. Электрический заряд  $+q$  равномерно распределен по тонкому кольцу радиуса  $a$ . Центр кольца совпадает с началом координат, а плоскость кольца совпадает с плоскостью  $yz$ . В начале координат помещен заряд  $-q$ .
- а) Найдите потенциал  $\phi$  в точке  $P$ , расположенной на оси  $x$  на расстоянии  $x$  от начала координат.
- б) Чему равно электрическое поле в этой точке?
- в) Как зависит электрическое поле от  $x$  на расстояниях  $x \gg a$ ? Убывает ли оно быстрее электрического поля диполя на больших расстояниях? Как это объяснить?



- 6.13. Плоский конденсатор емкостью  $100 \text{ нФ}$ , расстояние между обкладками которого  $1 \text{ см}$ , заряжается с помощью батареи до разности потенциалов  $10 \text{ в}$ . После этого батарея отключается. Нижняя пластина конденсатора затем облучается синим светом, выбивающим из нее электроны, кинетическая энергия которых лежит в интервале от  $0$  до  $1,5 \text{ эв}$ . Обкладки заряжены так, что электроны притяги-

ваются к верхней из них. На приведенном рисунке показана зависимость от времени полного тока, текущего на верхнюю пластину конденсатора. Сколько времени понадобится для того, чтобы разность потенциалов на обкладках обратилась в нуль (время  $t_1$  на рисунке)? Чему равна разность потенциалов в момент времени  $t \gg t_2$ ? Как изменится ваш ответ, если *перед* зарядкой конденсатора расстояние между пластинами увеличить вдвое? Как изменится ваш ответ, если расстояние между пластинами было увеличено вдвое лишь *после* того, как конденсатор был полностью заряжен и батарея отключена?



6.14. Палочка из изолятора длиной  $1\text{ м}$  и радиусом  $R = 1\text{ см}$  вытянута вдоль оси  $x$  так, что ее концы расположены в точках с координатами  $x = 0,5\text{ м}$  и  $x = -0,5\text{ м}$ . Плотность объемного заряда в палочке равна  $\rho = ar^2$ , где  $r$  — расстояние до оси палочки, а  $a$  — положительная постоянная, равная  $2\text{ кулон/м}^5$ .

- Найдите напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  в четырех точках  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y = 0, 0,5, 1,0$  и  $2,0\text{ см}$ . В этой части задачи считайте палочку бесконечно длинной.
- Дайте разумную оценку потенциала в точке  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , взяв за нуль потенциала его значение на бесконечности. Укажите неопределенность вашей оценки и обоснуйте ее.
- Будет ли потенциал в точке  $x = 0,5\text{ м}$ ,  $y = z = 0$  больше, меньше или равен потенциалу в начале координат?

7. 1. а) Покажите, что эквипотенциальные поверхности вокруг двух параллельных противоположно заряженных нитей представляют собой цилиндры вращения. Расстояние между нитями равно  $d$ , линейная плотность зарядов на них равна  $+\lambda$  и  $-\lambda\text{ кулон/м}$  соответственно.

- б) Используя результат предыдущей части задачи, найдите емкость, приходящуюся на единицу длины двух параллельных проводов с радиусом поперечного сечения  $r_0$ , оси которых находятся друг от друга на расстоянии  $d$ . Считайте, что  $d \gg 2r_0$ .
- в) Покажите, что при  $x, y > d$  потенциал может быть представлен в комплексном виде

$$f(z) \equiv U + iV = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}.$$

### К главе 8. Электростатическая энергия

8. 1. Согласны ли вы с утверждением, содержащимся в гл. 8 «Лекций» (вып. 5), что электростатическая энергия ядра, содержащего  $Z$  протонов, более или менее однородно распределенных по объему сферы радиусом  $r$ , примерно равна величине

$$U = \frac{3}{5} Z(Z-1) \frac{e^2}{r} ?$$

8. 2. Максимальная емкость конденсатора настройки в радиоприемнике равна  $100 \text{ нф}$ . Путем поворота подвижных пластин емкость конденсатора может быть уменьшена до  $10 \text{ нф}$ . Предположим, что конденсатор заряжен до разности потенциалов  $300 \text{ в}$ , когда его емкость максимальна. Затем ручка настройки поворачивается и емкость конденсатора становится минимальной. Чему равна работа, совершенная при повороте ручки настройки?
8. 3. Заряды на обкладках двух конденсаторов емкостью  $C_1$  и  $C_2$  равны  $q_1$  и  $q_2$ . Покажите, что, за исключением особых случаев, запасенная электростатическая энергия конденсаторов уменьшается, если они соединяются параллельно. Куда при этом девается энергия? Найдите условия, при которых соединение конденсаторов не приводит к потере энергии.
8. 4. а) Покажите, что в электрическом поле  $\mathbf{E}$  электростатическая энергия диполя с дипольным моментом  $\mathbf{p}$  равна

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

- б) Вычислите момент силы, действующей на диполь в электрическом поле  $\mathbf{E}$ . Сделайте это как прямым путем, так и с помощью приведенного выше выражения для энергии диполя. Будет ли энергия диполя той же самой, если он создан путем последовательного помещения его зарядов в электрическое поле? Если нет, то

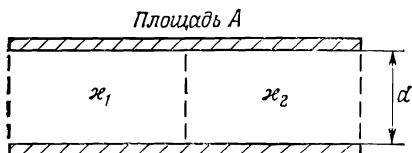
вычислите разность энергий; если да, то приведите физические соображения в защиту вашего утверждения.

8. 5. Покажите, что обкладки плоского конденсатора притягивают друг друга с силой  $F = q^2/2\epsilon_0 A$  ( $A$  — площадь обкладки). Найдите работу, которую необходимо затратить, чтобы расстояние между обкладками увеличить с  $x$  до  $x + dx$ .
8. 6. Известно, что пион ( $\pi$ -мезон) может находиться в трех различных зарядовых состояниях. Иными словами, существуют положительный, отрицательный и нейтральный пионы. Масса (умноженная на  $c^2$ ) заряженного пиона равна  $139,6 \text{ Мэв}$ , масса же нейтрального пиона равна  $135 \text{ Мэв}$ . В одной из моделей пиона предполагается, что различие масс определяется лишь электростатической энергией. Если далее предположить, что заряженные пионы имеют сферическую форму и заряд равномерно распределен по их объему, то можно вычислить радиус пиона. Вычислите радиус пиона в этих предположениях. Находится ли ваш результат в согласии с существующими оценками размеров ядер?
8. 7. Внутренний радиус металлической сферической оболочки равен  $a$ , ее внешний радиус равен  $b$ , а центр находится в начале координат. В оболочке просверлено небольшое отверстие. Полный заряд оболочки равен нулю. Какую работу нужно затратить, чтобы заряд  $q_1$  перевести из бесконечности через отверстие в начало координат? Чему равна эта работа, если полный заряд оболочки равен  $q_2$ ?

### К главе 10. Диэлектрики

10. 1. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком, состоящим из двух половинок равных размеров, но с разными диэлектрическими проницаемостями  $\kappa$  (см. рисунок). Покажите, что емкость такого конденсатора равна

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$





10. 2. Расстояние между обкладками плоского конденсатора, имеющими форму квадратов с площадью  $400 \text{ см}^2$ , равно  $1 \text{ см}$ . С помощью электрической батареи конденсатор заряжается до разности потенциалов  $10 \text{ в}$ , а затем отключается от нее. После этого между обкладками конденсатора вставляется широкая пластина из диэлектрика толщиной, немного меньшей  $1 \text{ см}$ , причем так, что остается закрытой лишь площадь  $10 \times 20 \text{ см}^2$ . Диэлектрическая проницаемость пластины равна 4.

- Чему равна сила притяжения обкладок конденсатора друг к другу?
- Чему равен дипольный момент единицы объема диэлектрика внутри, но достаточно далеко от краев конденсатора (чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами)?
- Предположим, что внутри диэлектрика с диэлектрической проницаемостью 4,0 равномерно распределены маленькие металлические шарики. Будет ли при этом разность потенциалов на пластинах конденсатора больше, меньше или равна той, которая существовала бы в случае однородного диэлектрика?



10. 3. Емкость плоского конденсатора с воздушным промежутком толщиной  $d$  между его пластинами равна  $C_0$ . Между пластинами конденсатора вдвигается брусок из изолятора с диэлектрической проницаемостью  $\kappa$ , толщиной  $t < d$  и площадью, равной площади пластин конденсатора, причем так, что его плоскости параллельны пластинам. Пренебрегая краевыми эффектами, покажите, что емкость конденсатора при этом становится равной

$$C = \frac{C_0}{1 - [(\kappa - 1)/\kappa](t/d)}.$$

10. 4. Изолированному металлическому шару радиусом  $a$  сообщен заряд  $Q$ . Поверхность шара равномерно покрыта слоем диэлектрика с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$ .
- Вычислите поверхностный заряд, наведенный на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика.
  - Найдите, чему равна плотность наведенных зарядов в объеме диэлектрика.
10. 5. Плоский конденсатор подключен к электрической батарее, поддерживающей на его пластинах разность потен-

сигналов  $V_0$ . В пространство между обкладками конденсатора вдвигается пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\kappa$  так, что это пространство полностью заполняется диэлектриком.

а) Покажите, что при этом электрической батареей совершается работа  $q_0 V_0 (\kappa - 1)$ , где  $q_0$  — заряд на обкладках конденсатора до заполнения его диэлектриком.

б) Какую работу при заполнении конденсатора диэлектриком совершают механические силы? Совершается ли эта работа над диэлектриком или самим диэлектриком?

10. 6. Две коаксиальные трубки радиусами  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) погружаются вертикально в масляную ванну. Покажите, что, если между трубками существует разность потенциалов  $V$ , масло в них поднимется на высоту

$$h = \frac{2V^2 (\kappa - 1) \varepsilon_0}{\ln(b/a) \rho (b^2 - a^2) g},$$

где  $\kappa$  — диэлектрическая проницаемость масла.

10. 7. Покажите, что силовые линии электрического поля, пересекающие поверхность раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , образуют с нормалью к этой поверхности углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , связанные соотношением  $\kappa_1 \operatorname{ctg} \theta_1 = \kappa_2 \operatorname{ctg} \theta_2$ .

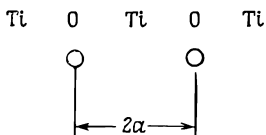
### К главе 11. Внутреннее устройство диэлектриков

11. 1. Найдите электрическое поле внутри и вне однородно поляризованного шара радиусом  $a$  (см. фиг. 11.7, вып. 5, стр. 226).
11. 2. Диэлектрическая проницаемость газа гелия при  $0^\circ \text{C}$  и давлении  $1 \text{ атм}$  равна  $1,000074$ . Найдите дипольный момент атома гелия в однородном электрическом поле напряженностью  $100 \text{ в/см}$ .
11. 3. Диэлектрическая проницаемость водяного пара, газа полярных частиц, весьма заметно зависит от температуры. В приведенной ниже таблице представлены экспериментальные данные по исследованию этой зависимости. Считая водяной пар идеальным газом, вычислите поляризуемость его молекул как функцию температуры и начертите график этой зависимости, откладывая по оси абсцисс

обратную температуру. По наклону кривой определите дипольный момент молекулы воды.

$T, K$	Давление, см рт. ст	$(\kappa - 1) \cdot 10^5$
393	56,49	400,2
423	60,93	371,7
453	65,34	348,8
483	69,75	328,7

11. 4. Рассмотрите систему, состоящую из двух атомов, расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга. Поляризуемость каждого атома равна  $\alpha$ . Найдите связь между  $a$  и  $\alpha$ , при которой эта система будет сегнетоэлектриком. (Ответ:  $\alpha = 2\pi a^3$ .) Если эта задача покажется вам слишком простой, рассмотрите линейную цепочку атомов кислорода, расположенных на расстоянии  $2a$  друг от друга, между каждой парой которых находится атом титана.



Найдите соотношения между  $a$  и поляризуемостями атома кислорода  $\alpha_o$  и атома титана  $\alpha_{Ti}$ , при котором такая система будет сегнетоэлектриком.

*Примечание:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1,2.$$

11. 5. «Диэлектрик» представляет собой пространственную решетку регулярно расположенных стеклянных шариков диаметром  $d$  с минимальным расстоянием между соседними шариками, равным  $3d$ . Предполагая, что поляризация, наведенная во внешнем электрическом поле в каждом стеклянном шарике, не зависит от наличия остальных (т. е. пренебрегая перераспределением наведенных зарядов благодаря взаимному влиянию шариков), найдите диэлектрическую проницаемость такого «диэлектрика».

### К главе 12. Электростатические аналогии

12. 1. Из медной проволоки диаметром поперечного сечения  $b$  сделано кольцо радиусом  $a$ , причем  $b \ll a$ . Кольцо помещено в центр пластмассового шара, радиус которого во

много раз больше радиуса кольца. Переменным магнитным полем в кольце наводится ток. Ток нагревает проволоку, причем в единицу времени в кольце выделяется  $W$  тепла (в  $\text{дж/сек}$ ). Температура на поверхности шара равна  $T_0$ . Чему равна температура в центре шара в стационарном случае?

12. 2. В задаче 5.10 была рассмотрена одна из простейших моделей для описания теплового баланса Земли. Другая модель (тоже сильно упрощенная) основана на предположении, что внутри Земли существует ядро радиусом  $a$  с предельно высокой теплопроводностью. Найдите, какого размера должно быть это ядро, считая его температуру равной  $2500^\circ\text{C}$ , а коэффициент теплопроводности окружающих ядро пород равным  $0,03 \text{ дж/см}\cdot\text{сек}\cdot\text{град}$  и принимая во внимание тот факт, что Земля ежегодно выделяет  $8 \cdot 10^{20} \text{ дж}$  тепла.

12. 3. а) В ряде случаев электростатический потенциал  $\varphi$  можно представить в виде  $\varphi = f(r) \cos \theta = f(r) z/r$ , где  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Например, потенциал такого вида в гл. 12 «Лекций» (вып. 5) возникает при решении задачи об обтекании шара «сухой» водой. Если функцию  $f(r)$  разложить в ряд

$$f(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n r^n,$$

то для потенциала  $\varphi$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа, только два коэффициента  $b_n$  будут отличны от нуля. Найдите эти коэффициенты.

- б) В двумерной задаче потенциал  $\varphi$  может быть записан в виде

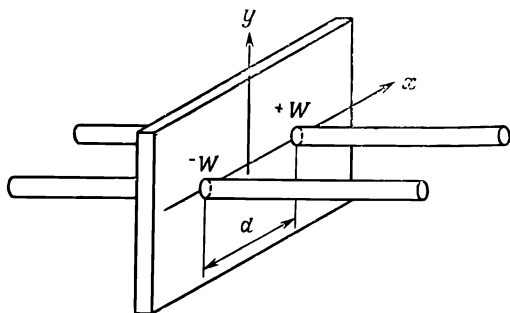
$$\varphi = g(\rho) \cos \theta = g(\rho) \cdot \frac{z}{\rho}, \quad g(\rho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^n,$$

где  $\rho^2 = y^2 + z^2$ . Найдите отличные от нуля коэффициенты, если потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

При решении задачи используйте декартову систему координат.

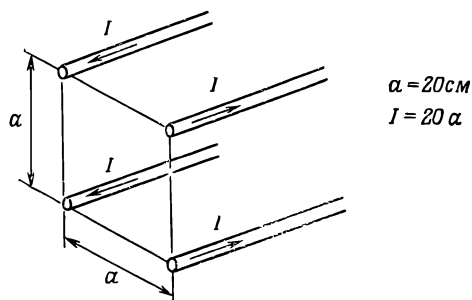
12. 4. Две тонкие водопроводные трубы, расположенные параллельно на расстоянии  $d$  друг от друга, пересекают под прямым углом широкую стенку толщиной  $t$ . Теплопроводность стенки равна  $\kappa$ , а температура на далеких расстояниях

от труб равна  $T_0$ . По трубе, пересекающей стенку в точке  $x = +d/2$ , течет горячая вода, сообщаящая стенке  $+W$  вт тепла. По другой трубе течет холодная вода, которая, наоборот, забирает от стенки  $-W$  вт тепла. Считая трубы бесконечно длинными, а задачу двумерной, найдите температуру в точке  $P$  с координатами  $x = 100d$ ,  $y = 100d$ . Пусть  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $d = 50$  см,  $\kappa = 0,03$  вт/см·град,  $W = 200$  вт и толщина стенки равна 10 см. Решите задачу в разумных приближениях.



### К главе 13. Магнитостатика

13. 1. Концы четырех параллельных медных проводов сечением  $1\text{ мм}^2$  достаточно большой длины образуют квадрат со стороной 20 см (см. рисунок). По каждому проводу течет ток 20 а в направлении, указанном стрелками. Какова величина и направление вектора магнитного поля  $\mathbf{B}$  в центре квадрата? Куда направлена сила, действующая на 1 погонный метр левого нижнего из проводов, и какова ее величина?

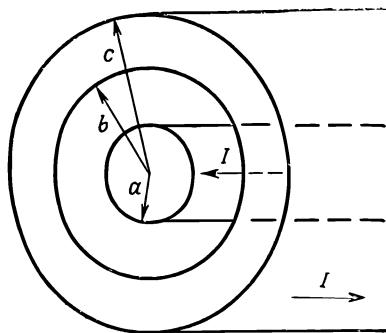


13. 2. Длинный диэлектрический цилиндр радиусом  $a$  статически поляризован, причем вектор поляризации во всех точ-

ках цилиндра направлен радиально, а величина его пропорциональна расстоянию от оси, т. е.  $\mathbf{P} = P_0 r/2$ . Цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси. Найдите магнитное поле в точках на оси цилиндра, достаточно удаленных от его концов.

13. 3. Длинный коаксиальный кабель состоит из двух concentрических проводников, размеры которых указаны на рисунке. Предполагается, что плотность токов в проводниках однородна по сечению.

- Найдите магнитное поле  $\mathbf{B}$  в точках  $r$  внутри центрального проводника ( $r < a$ ).
- Найдите  $\mathbf{B}$  в пространстве между проводниками ( $a < r < b$ ).
- Найдите  $\mathbf{B}$  внутри внешнего проводника ( $b < r < c$ ).
- Найдите  $\mathbf{B}$  вне кабеля ( $r > c$ ).

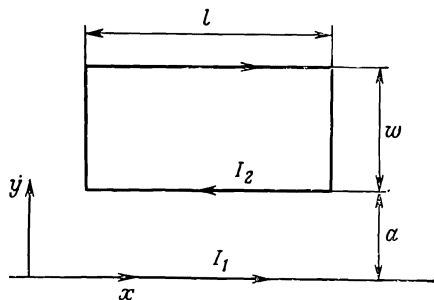


13. 4. Развертка электронного луча в телевизионной электронно-лучевой трубке осуществляется магнитным полем, создаваемым системой отклоняющих катушек, расположенных в узкой части электронно-лучевой трубки. Источником электронов, как правило, служит электронная пушка, из которой электроны вылетают с энергией 3 кэВ. После отклонения электроны ускоряются электрическим полем. Оцените напряженность магнитного поля, соответствующую максимальному отклонению электронного луча. Оцените в том же момент времени число ампер-витков в отклоняющей катушке. При оценке можно пренебречь ускорением электронов после отклонения. В какую сторону изменятся ваши оценки, если учесть это ускорение?

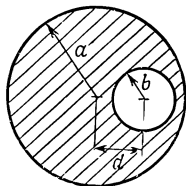
13. 5. По длинному прямолинейному проводу течет ток  $I_1$ , а по контуру, имеющему форму прямоугольника со сторонами  $l$  и  $w$ , течет ток  $I_2$ . Прямолинейный проводник и контур лежат в одной плоскости.

- Чему равна сила, действующая на контур? Какая сила действует при этом на линейный проводник?

- б) Какой вращающий момент приложен к контуру? Чему равен вращающий момент, приложенный к линейному проводнику?



13. 6. Внутри очень длинного проводящего стержня радиусом  $a$  имеется цилиндрическая полость радиусом  $b$ , ось которой параллельна оси стержня, но находится от нее на расстоянии  $d$ . По проводнику течет ток, плотность которого по сечению однородна и равна  $+j$ . Чему равно магнитное поле на оси полости, вдали от конца стержня?

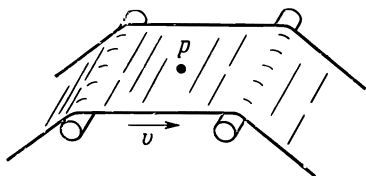


#### К главе 14. Магнитное поле в разных случаях

14. 1. При производстве пластмассовой пленки широкая тонкая полоса пластмассы протягивается со скоростью  $v$  через два последовательно расположенных ролика. В процессе обработки поверхность пленки приобретает равномерно распределенный электрический заряд  $\sigma$ .

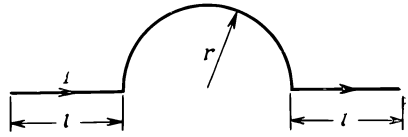
а) Найдите векторный потенциал вблизи поверхности полосы в центре пролета между роликми (вблизи точки  $P$  на рисунке).

б) Чему равно поле  $\mathbf{B}$  в этой же области?



14. 2. По тонкому проводу течет ток  $I$ . Чему равно магнитное поле в центре полуокружности, созданное:

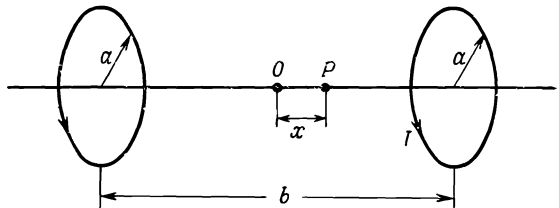
- а) каждым из прямолинейных участков провода, длина которых равна  $l$ ?
- б) криволинейным участком провода длиной  $\pi r$ ?
- в) всем проводом?



14. 3. В используемых на практике устройствах часто необходимо добиться высокой однородности магнитного поля. Одной из важнейших характеристик этих устройств является однородность поля, создаваемого кольцами Гельмгольца: двумя коаксиальными витками проволоки, по которым течет ток в одном направлении. Пусть радиус витков равен  $a$ , сила тока в них  $I$ , а расстояние между ними равно  $b$ .

- а) Найдите магнитное поле на оси витков в точке  $P$ , расположенной на расстоянии  $x$  от средней точки между витками.
- б) Разложите полученное выражение в ряд по степеням  $x$  с точностью до членов  $x^2$ .
- в) Каково соотношение между величинами  $a$  и  $b$ , при котором слагаемые с  $x^2$  обращаются в нуль?
- г) Покажите, что созданное витками магнитное поле в указанном в пункте (б) приближении и при условии, найденном в пункте (в), определяется выражением

$$B_x = \frac{8I}{5^{1/2} a \varepsilon_0 c^2}.$$



14. 4. По квадратной проволочной рамке со сторонами, равными  $a$ , течет ток  $I$ .

- а) Используя закон Био — Савара, покажите, что магнитное поле  $\mathbf{B}$  на оси рамки в точке, расположенной на расстоянии  $x$  от ее центра, равно

$$B = \frac{4a^2 I}{\pi (4x^2 + a^2) (4x^2 + 2a^2)^{1/2} \varepsilon_0 c^2}.$$



- б) Получите тот же результат, определив векторный потенциал.

*Примечание.* Исходите из интегрального представления векторного потенциала и используйте соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy,$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \{ \lim_{x \rightarrow c} f(x, y) \} dy.$$

14. 5. Определите векторный потенциал, вычислите магнитное поле на оси бесконечно тонкого кольца радиусом  $a$ , по которому течет ток  $I$ .
14. 6. Проводящая сфера радиусом  $a$  заряжена до потенциала  $V$ . Сфера вращается вокруг одной из осей, проходящих через ее центр, с угловой скоростью  $\omega$ . Покажите, что магнитное поле сферы совпадает с полем магнитного диполя, магнитный момент которого равен

$$\mu = \epsilon_0 \omega V \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right).$$

Покажите также, что поле внутри сферы равно

$$B_{\text{вн}} = \frac{2\omega V}{3c^2}.$$

Эти выражения точные для всех точек соответственно вне и внутри сферы. Если вы не можете доказать этого, получите ответ на первый вопрос для расстояний, намного превышающих  $a$ , а второй результат — для центра сферы.

14. 7. Как отмечалось в «Лекциях», скорость вращения Земли в принципе можно определить, измерив разность потенциалов между центром и поверхностью заряженного цилиндра, помещенного на Северном полюсе Земли так, что его ось проходит через центр земного шара.
- а) Покажите, что эту разность потенциалов можно представить в виде

$$V = \left( \frac{v}{c} \right)^2 \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0},$$

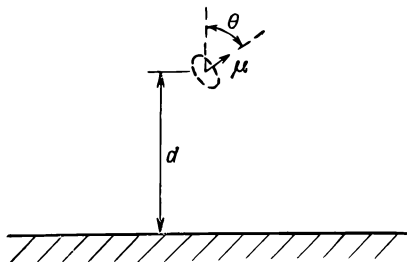
где  $v$  — линейная скорость точек на поверхности цилиндра, а  $\lambda$  — поверхностный заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра.

- б) Можно ли представить себе установку с разумными параметрами для измерения этого эффекта?

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

К главе 15. Векторный потенциал

15. 1. Внутри сверхпроводника поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  равны нулю.
- Граничным условием для поля  $\mathbf{E}$  на поверхности сверхпроводника является равенство нулю его тангенциальных компонент. Как выглядят граничные условия для магнитного поля?
  - Маленькая рамка с током помещена на расстоянии  $d$  от поверхности сверхпроводника, занимающего полупространство. Магнитный момент  $\mu$  рамки образует угол  $\theta$  с нормалью к поверхности. Несколькими словами опишите метод, с помощью которого можно найти магнитное поле в любой точке пространства, предполагая, что поле магнитного диполя уже известно.
  - Найдите зависимость от угла  $\theta$  вращающего момента, приложенного к диполю. Найдите углы, соответствующие равновесию диполя. Какие из них отвечают устойчивому равновесию, а какие — неустойчивому?
  - Найдите зависимость от угла  $\theta$  силы, притягивающей магнитный диполь к сверхпроводнику или отталкивающей диполь от него.

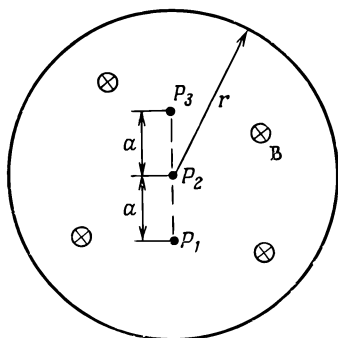


К главе 17. Законы индукции

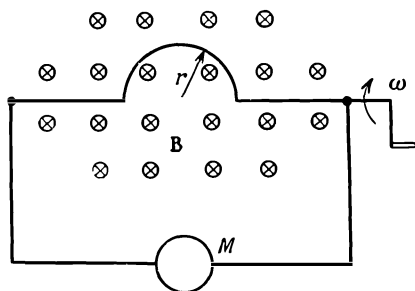
17. 1. На приведенном рисунке показано (крестиками) однородное магнитное поле  $\mathbf{B}$  внутри цилиндра радиусом  $r$ . Напряженность магнитного поля  $\mathbf{B}$  уменьшается

с постоянной скоростью  $100 \text{ гс/сек}$ . Чему равно мгновенное

ускорение (величина и направление) электрона, помещенного в точки  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ ? Величину  $a$  считать равной  $5,0 \text{ см}$ .

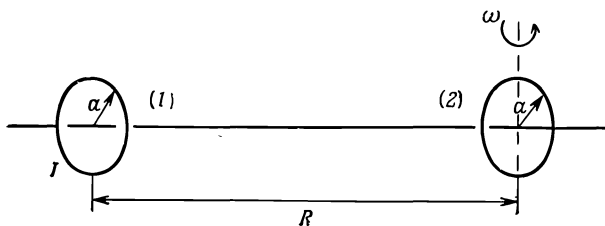


17. 2. Жесткий провод, согнутый в полуокружность радиусом  $r$ , вращается с угловой скоростью  $\omega$  в однородном магнитном поле. Чему равна частота и амплитуда напряжения и тока, наведенного в проводнике, если внутреннее сопротивление вольтметра  $M$  равно  $R_M$ , а сопротивление остальных частей цепи ничтожно мало? Предположите, что



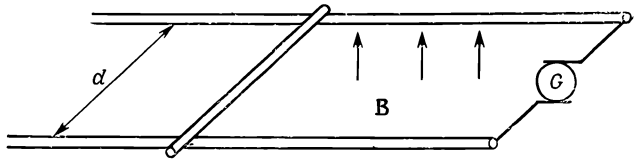
поле, создаваемое током, мало по сравнению с полем  $\mathbf{B}$ , т. е. наведенный ток мал и неспособен существенно изменить величину  $\mathbf{B}$ .

17. 3. По круговому витку (1) провода, радиус  $a$  которого мал, течет постоянный ток  $I$ . Другой точно такой же виток провода (2) помещен на оси, проходящей через центр первого витка, на расстоянии  $R$ , причем  $R \gg a$ . Плоскости витков параллельны. Затем виток (2) приводится во вращение с угловой скоростью  $\omega$  вокруг одного из его диаметров. Какова наведенная в цепи витка (2) э. д. с., если он разомкнут?



17. 4. Металлический провод массой  $m$  скользит без трения по двум параллельным металлическим рельсам, находящимся на расстоянии  $d$  друг от друга, как показано на рисунке. При движении провод пересекает силовые линии однородного магнитного поля  $\mathbf{B}$ , направленного вертикально.

- а) Генератор  $G$  создает постоянный ток  $I$ , текущий от одного рельса к другому через скользящий провод. Определите скорость (величину и направление) провода как функцию времени, предполагая, что в момент  $t = 0$  провод покоился.
- б) Генератор заменяется электрической батареей с постоянной э. д. с. Провод при этом движется с постоянной скоростью. Найдите скорость установившегося движения. Достигает ли скорость такой величины в условиях задачи (а)?



- в) Чему равен ток в задаче (б) в условиях установившегося движения? Считайте, что магнитное поле, создаваемое током  $I$ , значительно меньше  $\mathbf{B}$ .

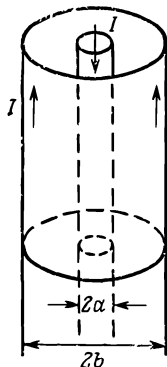
17. 5. Цепь состоит из двух соединенных последовательно катушек с индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$ . Взаимная индуктивность катушек равна  $\mathcal{M}$ . Найдите полную индуктивность цепи. Как изменится суммарная индуктивность, если витки одной катушки перемотать в другую сторону?

17. 6. Кабель сделан из провода и охватывающего его коаксиального проводящего цилиндра, по которым текут токи в противоположных направлениях. Радиус внутреннего провода кабеля равен  $a$ , а внешний радиус цилиндра равен  $b$ .

- а) Покажите, что если предположить, что ток во внутреннем проводе течет только по его поверхности, то индуктивность, приходящаяся на единицу длины кабеля, равна

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

- б) Вычислите индуктивность, если ток равномерно распределен по сечению внутреннего провода кабеля. Сравните оба полученных результата. Сильно ли зависит результат от характера распределения тока по сечению центрального провода?

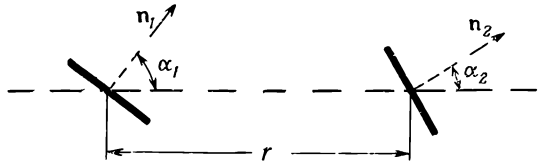


17. 7. Торoidalная катушка из  $N$  витков, внутренний радиус которой равен  $b$ , в поперечном сечении имеет форму квадрата со сторонами, равными  $a$ .
- а) Покажите, что индуктивность катушки равна

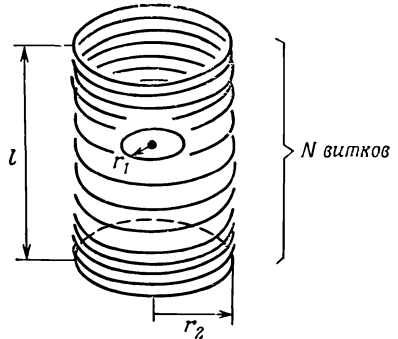
$$\mathcal{L} = \frac{N^2 a}{2\pi \epsilon_0 c^2} \ln \left( 1 + \frac{a}{b} \right).$$

- б) Выразите через те же величины взаимную индуктивность системы, состоящей из торoidalной катушки и длинного прямолинейного провода, вытянутого вдоль оси симметрии катушки. Считайте, что проводники, замыкающие цепь, настолько удалены от катушки, что их влиянием можно пренебречь.
- в) Найдите отношение индуктивности катушки к взаимной индуктивности системы.
17. 8. Два плоских витка провода с одинаковой площадью  $A$  и током  $I$  помещены на расстоянии  $r$  друг от друга так, как показано на рисунке. Единичные векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , определяющие направления нормалей к виткам, образуют с линией, соединяющей центры витков, углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и лежат с ней в одной плоскости.
- а) Предполагая, что радиус каждого витка во много раз меньше  $r$ , найдите взаимную индуктивность  $\mathfrak{M}_{12}$  двух витков.
- б) Используя найденное выражение для  $\mathfrak{M}_{12}$ , найдите величину и направление силы, действующей между витками.

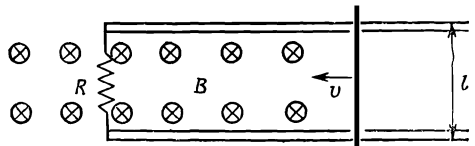
- в) Как изменится эта сила, если направление тока в одном из витков или сразу в обоих поменять на противоположное?



17. 9. Круговой виток провода радиусом  $r_1$  расположен в центре соленоида длиной  $l$ , состоящего из  $N$  витков радиусом  $r_2$ , причем  $r_2 \gg r_1$ . Оси витка и соленоида совпадают. Обозначив цепь кругового витка индексом 1, а цепь соленоида индексом 2, найдите индуктивности  $\mathcal{M}_{12}$  и  $\mathcal{M}_{21}$ .



- 17.10. В однородном магнитном поле  $\mathbf{B}$ , направленном перпендикулярно плоскости рисунка, по двум проводящим рельсам со скоростью  $v$  движется провод. Какой ток течет через сопротивление  $R$ , если  $v = 100$  см/сек,  $l = 10$  см,  $B = 0,1$  вебер/м<sup>2</sup> и  $R = 10$  ом (магнитным полем, создаваемым током, пренебречь). В какую сторону изменится найденный вами ток, если не пренебрегать полем, создаваемым движущимся проводником? Изменится ли ваш ответ, если магнит, создающий поле  $\mathbf{B}$ , будет двигаться со скоростью  $v$  в ту же сторону, что и провод? Как меняется со временем коэффициент самоиндукции изображенной на рисунке цепи?



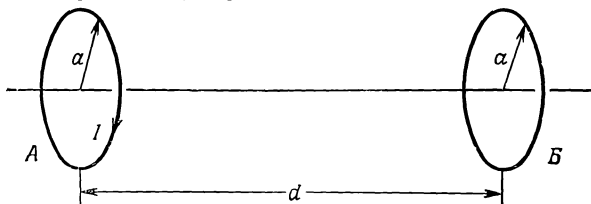
**17.11.** Рассмотрим два витка провода радиусом  $a$ , находящиеся на расстоянии  $d$  друг от друга ( $d \gg a$ ). Центры витков лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости обоих витков. Через виток  $A$  в направлении, показанном на рисунке стрелкой, пропускается ток  $I = K_0 t^2$  ( $t$  — время). Сопротивление витка  $B$  равно  $R$ .

- а) Если пренебречь самоиндукцией витков, то чему равен момент сил, действующих на виток  $B$ ?
- б) Покажите, что если пренебречь самоиндукцией, то сила, действующая на виток  $B$ , равна

$$\frac{24\pi^4 a^8 K_0^2 t^3}{(4\pi\epsilon_0 c^2)^2 d^2 R}$$

В какую сторону направлена эта сила?

- в) Покажите качественно, уменьшается или увеличивается найденная вами величина силы и величина момента силы, если самоиндукцией витков не пренебрегать?
- г) Выясните, как изменится ответ к пунктам (а) и (б) задачи, если виток  $B$  повернуть на  $90^\circ$  вокруг оси, перпендикулярной общей оси витков.



### К главе 20. Решения уравнений Максвелла в пустом пространстве

**20.1.** Решение дифференциальных уравнений иногда удобно искать в комплексном виде.

- а) Покажите, что если электрическое поле зависит от времени  $t$  и координаты  $x$  (зависимости от  $y$  и  $z$  нет) в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)},$$

то каждая компонента вектора напряженности электрического поля удовлетворяет волновому уравнению. (Напомним, что физическое поле описывается вещественной частью приведенного выражения.)

- б) Убедитесь, что вещественная часть  $\mathbf{E}$  описывает плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$ . В какую сторону оси  $x$  распространяется волна?

- в) Покажите, что если оператор  $\nabla$  действует на функции, подобные приведенной в пункте (а), то он имеет вид

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{e}_x (-ik),$$

где  $\mathbf{e}_x$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $x$ ;  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица, т. е. что его действие сводится к простому умножению функции на число. Можно ли подобное утверждать относительно оператора производной по времени?

- г) Используя результат пункта (в), покажите, какой вид имеют уравнения Максвелла для полей, зависящих от  $t$  и  $x$  синусоидально. Какая связь должна существовать между  $\omega$  и  $k$ ?
- д) Как изменятся ваши ответы, если электрическое поле имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\pm i(\omega t + kx)}$$

20. 2. Плоская электромагнитная волна частоты  $\omega$  отражается от зеркала, движущегося со скоростью  $v$  в направлении распространения волн. Используя уравнения Максвелла, найдите частоту отраженной волны, которая регистрируется неподвижным наблюдателем. Сравните ваш результат с тем, который был получен в вып. 3 с помощью теории относительности.

### К главе 21. Решения уравнений Максвелла с токами и зарядами

21. 1. Выведите подробно выражение (21.26) (см. «Лекции», вып. 6, стр. 144).
21. 2. С помощью уравнения (21.1) (см. вып. 6, стр. 157) можно найти электрическое поле, создаваемое движущимся зарядом. Рассмотрим диполь, образованный положительным и отрицательным зарядами, осциллирующими относительно начала координат вдоль оси  $z$  так, что координата положительного заряда меняется со временем по закону  $z_+ = (d/2) \cos \omega t$ , а отрицательного  $z_- = -(d/2) \cos \omega t$ . Дипольный момент такой системы зарядов  $\mathbf{p} = \mathbf{e}_z qd \cos \omega t$ . Покажите, что электрическое поле диполя, найденное из упомянутого уравнения, имеет вид ( $p = qd$ )

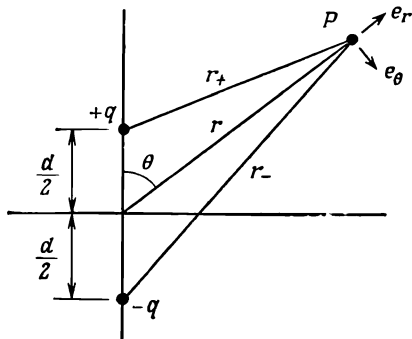
$$E_\varphi = 0,$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left[ \left( -\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{1}{r^3} \right) \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$E_r = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta \left[ \frac{1}{r^3} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right].$$



При решении задачи считайте, что точка  $P$  находится на расстоянии  $r \gg d$  от диполя.



*Примечание.*  $\mathbf{e}_{r+} \approx \mathbf{e}_r \approx \mathbf{e}_{r-}$ , а  $d\mathbf{e}_{r+}/dt$  и  $d^2\mathbf{e}_{r+}/dt^2$  — это векторы, направления которых практически совпадают с направлением вектора  $\mathbf{e}_\theta$ .

21. 3. Используя симметрию уравнений Максвелла и вид электрического и магнитного полей осциллирующего электрического диполя, найдите поле осциллирующего магнитного диполя\*. Это поле должно совпадать с полем диполя, создаваемого контуром с током  $i = i_0 \cos \omega t$ , радиус которого равен  $a$  ( $a \ll c/\omega$ ).

21. 4. В задаче 21.2 диполь состоял из двух зарядов, осциллирующих вокруг начала координат. Диполь, величина которого изменяется со временем по гармоническому закону, можно построить иным способом: взять два проводящих шара, соединить их проводником длиной  $d$  и по проводнику пропустить переменный ток. Тогда на концах проводника возникает переменный заряд  $\pm q(t)$ , а сам проводник остается в целом нейтральным; заряд  $q(t)$  можно рассматривать как вещественную часть выражения  $Q_0 e^{i\omega t}$ .

В произвольной точке  $P$  на расстоянии  $r \gg d$  от диполя интегральное представление для запаздывающего потенциала приводит к точному выражению для  $\varphi$  (см. рисунок)

$$\varphi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\cos \omega(t - r_1/c)}{r_1} - \frac{\cos \omega(t - r_2/c)}{r_2} \right].$$

а) Предполагая  $\omega d/2c \ll 1$ , покажите, что

$$\varphi = \frac{Q_0 d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \frac{1}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right].$$

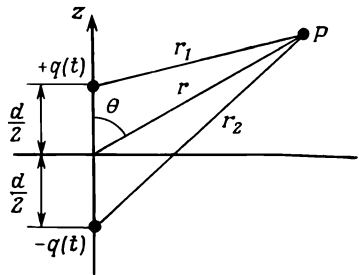
\* Электрическое поле диполя найдено в задаче 21.2. Магнитное поле диполя определяется из уравнения (21.1) «Лекций» (вып. 6):

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}.$$

б) Покажите далее, что

$$A_z \approx - \frac{Q_0 \omega d \sin \omega (t - r/c)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r}.$$

в) Убедитесь, что из найденных вами потенциалов следуют те же выражения для электрического и магнитного полей.



21. 5. Антенна, предназначенная для работы на частоте  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , изготовлена из двух коллинеарных проводов, длина каждого из которых равна  $1/4$  длины волны. На антенну подается синусоидально меняющееся напряжение требуемой частоты. Возникающее в антенне распределение токов с большой степенью точности описывается выражением

$$i = -i_0 \sin(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

Для определения поля излучения антенну можно представить в виде суперпозиции большого числа диполей длиной  $\Delta z$ , причем каждый из них расположен в точке  $z$ . Величина дипольного момента меняется от диполя к диполю.

а) Покажите, что дипольный момент каждого такого диполя следует брать в виде

$$\Delta p = \left\{ \frac{i_0}{\omega} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t \right\} \Delta z.$$

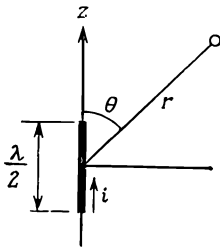
б) Покажите, что на больших расстояниях ( $r \gg c/\omega$ ) электрическое и магнитное поля антенны имеют вид

$$E_\theta = \frac{2i_0}{4\pi \epsilon_0 c r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right),$$

$$B_\varphi = \frac{1}{c} E_\theta.$$

в) Нарисуйте примерный вид кривой зависимости  $E_\theta$  от угла  $\theta$ . На этом же рисунке нанесите кривую зависимости

$E_\theta$  от  $\theta$  для одного диполя и сравните полученные кривые.

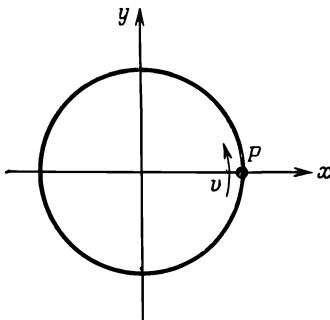


$$i = -i_0 (\sin \omega t) \cos \frac{2\pi z}{\lambda},$$

$$\left(-\frac{\lambda}{4} < z < \frac{\lambda}{4}\right).$$

21. 6. Частица, имеющая заряд  $q$ , движется по кругу радиусом  $a$  со скоростью  $v$ .

- Найдите скалярный потенциал  $\varphi$  в центре круга в тот момент, когда частица находится в точке  $P$ .
- Определите векторный потенциал  $\mathbf{A}$  в центре круга в тот же момент.
- Определив потенциалы в окрестности центра круга, воспользуйтесь выражениями (18.16), (18.19) («Лекции», вып. 6, стр. 92, 93) и найдите электрическое и магнитное поля в центре. Как ориентирован вектор напряженности электрического поля по отношению к радиусу-вектору, проведенному в точку  $P$ ?
- Вычислите эти поля, воспользовавшись формулой (21.1) (вып. 6, стр. 144).

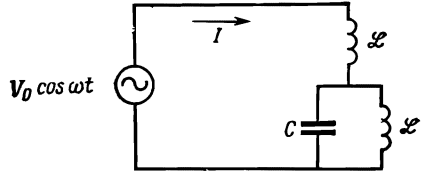


В этой задаче скорость  $v$  не предполагается малой по сравнению со скоростью света  $c$ .

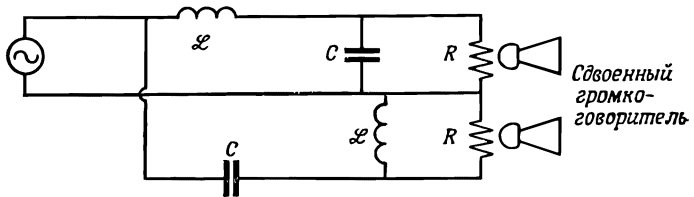
### К главе 22. Цепи переменного тока

22. 1. Проволочки соединены так, что они образуют ребра куба, причем сопротивление каждого ребра  $1 \text{ ом}$ . Найдите сопротивление между различными парами вершин куба.

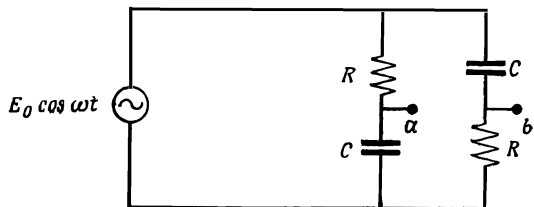
22. 2. а) Найдите ток  $I$  в цепи, схема которой изображена на рисунке.  
 б) Чему равен ток  $I$ , если изображенные на схеме катушки индуктивности обладают взаимной индуктивностью  $M$ ?



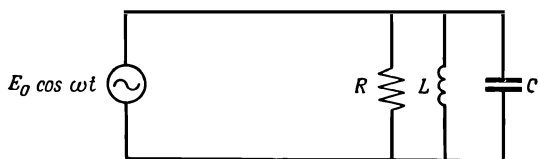
22. 3. Принципиальная схема устройства звуковоспроизведения высокого качества имеет вид, приведенный на рисунке. Эффективное сопротивление каждого громкоговорителя равно  $R$ .  
 а) Покажите, что при  $R^2 = \mathcal{L}/2C$  импеданс на входе (на клеммах генератора) веществен и равен  $R$ .  
 б) Покажите, что если  $\omega_c$  определить как частоту, при которой на каждый из громкоговорителей приходится  $1/2$  общей мощности, то  $\omega_c^2 = 1/\mathcal{L}C$ .



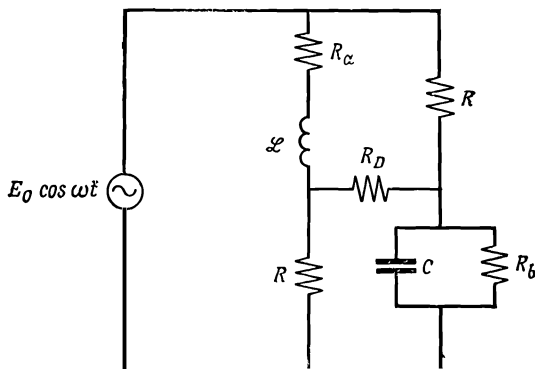
22. 4. Покажите, что амплитуда разности потенциалов (напряжения) между точками  $a$  и  $b$  цепи, изображенной на схеме, не зависит от  $\omega$ . Опишите качественно зависимость фазы этой разности потенциалов от частоты  $\omega$ . Как изменится величина разности потенциалов между точками  $a$  и  $b$ , а также ее фаза, если источник напряжения обладает внутренним сопротивлением  $R/10$ ?



22. 5. Электрическая цепь имеет вид, изображенный на схеме.
- Изобразите схематически зависимость амплитуды тока в цепи от частоты для произвольно выбранных величин  $L$ ,  $C$  и  $R$ .
  - Если  $R \gg \sqrt{L/C}$ , сравните частоту резонанса и ширину пика резонансной кривой данной цепи с аналогичными величинами для цепи с последовательным соединением ее элементов, но при  $R \ll \sqrt{L/C}$ . Специально рассмотрите случай  $R = K \sqrt{L/C}$  для цепи с параллельным соединением и случай  $R = (1/K) \sqrt{L/C}$  для цепи с последовательным соединением.



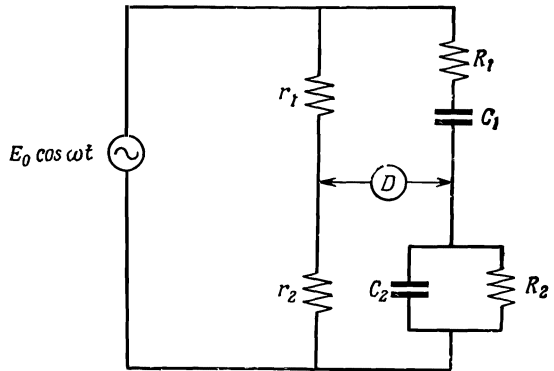
22. 6. Мостовая схема, изображенная на рисунке, используется для измерений индуктивности. Источником переменной э. д. с. частоты  $\omega$  служит генератор напряжения. Если мост сбалансирован, ток через сопротивление  $R_D$  равен нулю. Найдите  $\mathcal{L}$  как функцию  $R$  и  $C$ .



22. 7. Изображенная схема представляет собой мост Вина, часто используемый в избирательных  $RC$ -системах. Если ток через индикатор  $D$  равен нулю, говорят, что мост сбалансирован. Покажите, что баланс наступает при одно-

временном выполнении следующих двух условий:

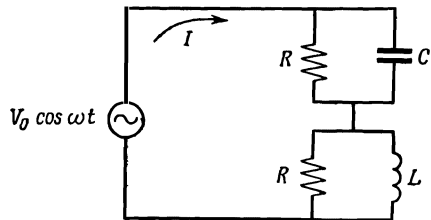
$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \left(\frac{C_2}{C_1}\right), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$



22. 8. В цепи, изображенной на рисунке, действует источник переменного напряжения  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ .

а) Покажите, что если  $R$ ,  $L$  и  $C$  подобраны так, что  $RC = L/R$ , ток  $I$  в цепи не зависит от частоты.

б) Какова разность фаз между приложенным напряжением и напряжением на концах  $RC$ -пары (при  $RC = L/R$ )?



22. 9. Электрическая цепь собрана так, что один из ее проводов, показанный на рисунке стрелкой и подключенный к точке  $P_3$ , может быть присоединен к любой из точек  $P_0, P_1, \dots, P_n$ .

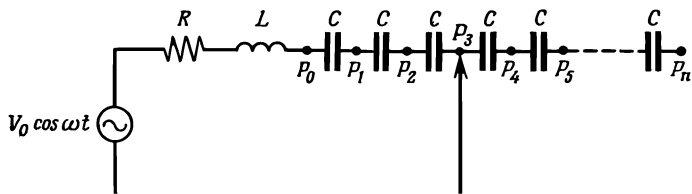
1. Найдите выражение для мощности, выделяемой в сопротивлении  $R$ , если цепь замкнута в точке  $P_m$ , где  $0 \leq m \leq n$ .

2. Допустим, что  $R = 1000$  ом,  $L = 10$  генри,  $C = 20$  мкф,  $\omega = 100$  рад/сек.

а) При каком значении  $m$  эта мощность максимальна?

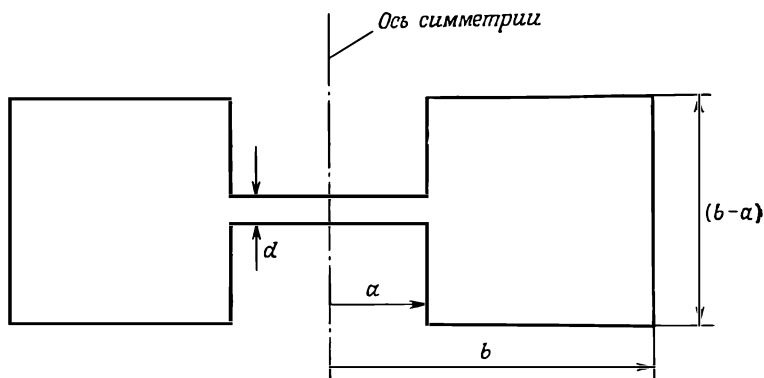
б) Каково максимальное значение напряжения между

точками  $P_0$  и  $P_2$  при  $m = 2$  и  $V_0 = 100$  в? На концах сопротивления  $R$ ?



### К главе 23. Полые резонаторы

23. 1. Найдите приближенно «резонансную» частоту для полости, показанной на рисунке, предполагая, что  $d \ll a$  и  $d \ll (b - a)$ . Какими основными эффектами вы пренебрегли? Если полость равномерно остывает (т. е. температура во всех точках полости в один и тот же момент времени одинакова), приведет ли ее тепловое сжатие к увеличению или уменьшению резонансной частоты? А может быть, она останется неизменной?



### К главе 24. Волноводы

24. 1. Единица длины линии передачи обладает индуктивностью  $L_0$  и емкостью  $C_0$ . Покажите, что если напряжение  $V$  и ток  $I$  в линии передачи меняются медленно (что соответствует передаче сигналов с длиной волны, много большей, чем расстояние между секциями линии передачи),

то  $V$  и  $I$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}, \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C_0 \frac{\partial V}{\partial t},\end{aligned}$$

т. е.  $I$  и  $V$  удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

где

$$v^2 = \frac{1}{L_0 C_0}.$$

Заметьте, что предположение о медленном изменении сигналов отнюдь не обязательно, но обоснование этого утверждения выходит за рамки гл. 24.

24. 2. Характеристический импеданс равен  $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$ , где  $L_0$  — индуктивность, а  $C_0$  — емкость единицы длины. Покажите, что для линии передачи, состоящей из двух тонких полос шириной  $b$ , находящихся на расстоянии  $a$  друг от друга ( $a \ll b$ ), характеристический импеданс равен

$$Z_0 \approx \frac{1}{\epsilon_0 c} \frac{a}{b}.$$

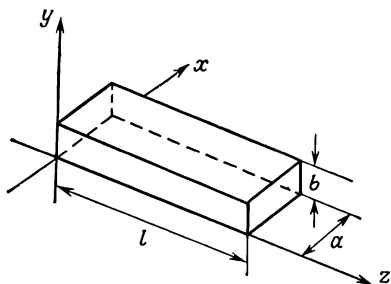
24. 3. Секция цилиндрической коаксиальной линии передачи закрыта с обоих концов проводящими пластинами. Длина полости, образованной таким способом, равна  $l$ . Для самой низкой моды, электрическое поле которой радиально:
- найдите частоту;
  - найдите выражение для  $\mathbf{E}$ ;
  - сравните найденную частоту с  $\omega_0 = 1/\sqrt{\mathcal{L}C}$ , где  $\mathcal{L}$  — индуктивность, а  $C$  — емкость, приходящиеся на длину  $l$  бесконечной коаксиальной линии.
24. 4. Волновод в форме прямоугольного параллелепипеда (стороны сечения  $a$  и  $b$ ) изготовлен из идеального проводящего материала. Концы одной секции волновода, длина которой  $l$ , закрыты пластинами из проводящего материала, так что полость внутри волновода фактически представляет собой резонатор. Если электрическое поле



в полости определяется вещественной частью выражения

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_0(x, z) \mathbf{e}_y e^{i\omega t},$$

то чему равна амплитуда  $E_0(x, z)$  для колебания самой низкой резонансной частоты? Чему равна сама резонансная частота?

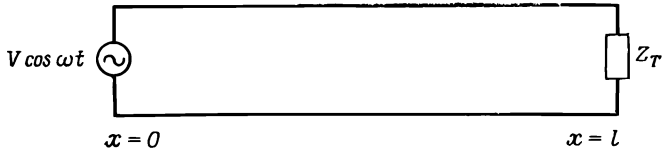


24. 5. Коаксиальный кабель состоит из двух концентрических проводящих цилиндров. Один конец ( $x = 0$ ) кабеля подсоединен к генератору переменного напряжения  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ . Другой конец ( $x = l$ ) закрыт проводящей пластиной. Индуктивность и емкость единицы длины кабеля равны  $L_0$  и  $C_0$ . Поле в таком кабеле можно представить в виде суперпозиции двух волн: падающей и отраженной от закороченного конца. Амплитуды и фазы этих волн должны быть подобраны так, чтобы суммарное напряжение между проводниками было равно нулю при  $x = l$  и  $V_0 \cos \omega t$  при  $x = 0$ .
- Напишите выражения для падающей и отраженной волн.
  - Нарисуйте кривую зависимости напряжения между проводниками от расстояния  $x$ , если длина кабеля  $l$  равна  $5\pi c/2\omega$  ( $c$  — скорость света). Укажите значения  $x$ , для которых напряжение максимально.
  - Чему равен ток в точках  $x = 0$ ,  $x = l/2 = 1/2(5\pi c/2\omega)$  и  $x = l = 5\pi c/2\omega$ ?
  - Предполагая источник напряжения идеальным, определите *средний* момент сил, который должен быть приложен к его ротору, чтобы последний вращался с угловой скоростью  $\omega$ .
24. 6. Покажите, что если при  $x = l$  линия передачи замкнута (включен элемент с импедансом  $Z_T$ ), то импеданс на «входе» линии ( $x = 0$ ) равен

$$Z_s = iZ_0 \frac{\operatorname{tg}(\omega \sqrt{LC} l) - iZ_T/Z_0}{1 + iZ_T/Z_0 \operatorname{tg}(\omega \sqrt{LC} l)},$$

где  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  — характеристический импеданс линии. Чему равно  $Z_s$ , если

- а)  $Z_T = 0$ ?  
 б)  $Z_T = \infty$ ?  
 в)  $Z_T = Z_0$ ?



24. 7. Линия передачи с характеристическим импедансом  $Z_1$  соединена с другой линией с характеристическим импедансом  $Z_2$ .

Покажите, что если система работает от генератора, подключенного к первой линии ( $Z_1$ ), «коэффициент отражения», определяемый отношением  $V_{\text{отр}}/V_{\text{пад}}$ , равен

$$\frac{V_{\text{отр}}}{V_{\text{пад}}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

а «коэффициент пропускания»

$$\frac{V_{\text{пр}}}{V_{\text{пад}}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

24. 8. Электрические поля внутри волноводов, описанных в гл. 24 «Лекций», обладают тем свойством, что проекция вектора напряженности электрического поля на направление распространения волны равна нулю, т. е. электрическое поле поперечное. Кроме того, могут существовать бегущие волны, у которых равна нулю проекция напряженности магнитного поля на направление распространения (так называемые поперечные магнитные волны). Для волновода в форме прямоугольного параллелепипеда (см. «Лекции», вып. 6, стр. 227, фиг. 24.3 и 24.4) векторный потенциал поперечной магнитной волны имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_z \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i(\omega t - k_z z)},$$

где

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

- а) Убедитесь, что магнитное поле, найденное с помощью этого потенциала, действительно поперечно, и покажите,

что электрическое поле  $\mathbf{E}$  и магнитное поле  $\mathbf{B}$  удовлетворяют волновому уравнению и соответствующим граничным условиям.

*Примечание.* Мы полагаем, что  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , где  $\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/c^2) (d\varphi/dt)$ .

- б) Покажите, что поперечная магнитная волна не распространяется, если

$$\omega < c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

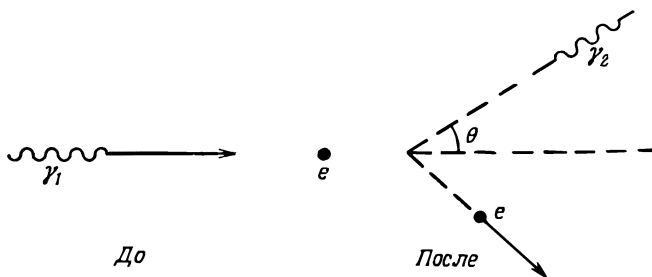
### К главе 25. Электродинамика в релятивистских обозначениях

(Единицы измерения выбраны так, что  $c = 1$ .)

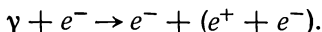
25. 1. Запишите в 4-векторной форме выражения

$$(\varphi^2 - \mathbf{A}^2), \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} - \rho\varphi).$$

25. 2. Комpton-эффект состоит в том, что фотон, налетая на покоящийся электрон, рассеивается на нем, как частица на частице. Выразите энергию рассеянного фотона через энергию падающего фотона и угол отклонения его направления распространения от первоначального.



25. 3. Позитрон может быть создан в результате бомбардировки покоящегося электрона фотоном:



Какова минимальная энергия фотона, необходимая для осуществления этого процесса? При решении задачи пользуйтесь, где это возможно, 4-векторами и их инвариантными комбинациями.

25. 4. На покоящуюся частицу массы  $m$  налетает другая частица с массой  $M$  и импульсом  $p$ . В результате полностью неупругого соударения частицы сливаются, образуя новую

частицу. Какова масса и скорость этой частицы? Сравните ваш результат с тем, который получается в нерелятивистском приближении.

*К главе 26. Лоренцевы преобразования полей*

(Единицы измерения выбраны так, что  $c = 1$ .)

26. 1. Распишите подробно и вычислите выражение

$$\nabla_{\mu} F_{\mu\nu}.$$

26. 2. Найдите 4-вектор, пространственные компоненты которого совпадают с компонентами вектора

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Каков физический смысл временной и пространственных компонент этого 4-вектора?

26. 3. Покажите, что  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$  и  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$  инвариантны относительно преобразований Лоренца. Убедитесь, что если векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  образуют острый угол в какой-нибудь системе координат, то этот угол будет острым во всех других системах координат. Для какого важного физического явления оба инварианта равны нулю?

26. 4. Пусть  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — напряженности электрического и магнитного полей в некоторой точке пространства в данной системе координат. Определите скорость другой системы координат, в которой электрическое и магнитное поля параллельны. Систем координат, обладающих таким свойством, много. Действительно, если найдется хотя бы одна такая система координат, то указанные векторы будут параллельны и во всех других системах координат, движущихся с постоянной скоростью относительно найденной в направлении, общем для векторов  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$ . Поэтому удобно и в то же время достаточно рассмотреть систему координат, вектор скорости которой перпендикулярен к векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

26. 5. В гл. 26 «Лекций» (вып. 6) 4-мерный потенциал  $A_{\mu}$ , создаваемый движущейся с постоянной скоростью заряженной частицей, был найден путем перехода от системы координат, где частица покоится, к лабораторной системе координат. Напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  электрического и магнитного полей с помощью  $A_{\mu}$  определялись согласно общим формулам.

Найдите  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , исходя из известного их вида в системе координат, где заряд покоится, и перейдя к движущейся системе координат.

26. 6. Покажите, что электрическое и магнитное поля заряда, движущегося с постоянной скоростью, могут быть представлены в виде

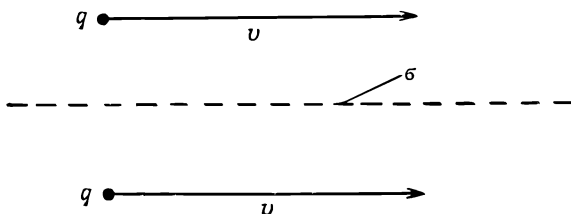
$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1 - v^2}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \frac{1 - v^2}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки, где в данный момент находится заряд, в точку наблюдения, а  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ .

По очень длинному прямому проводу (не обладающему сопротивлением) течет ток  $I$ , создаваемый электронами, движущимися со скоростью  $\mathbf{v}$ . Полная плотность зарядов в каждой точке провода равна нулю благодаря наличию положительно заряженных ионов.

- а) Найдите поля вне провода в системе координат, где провод покоится.  
 б) Найдите те же поля в системе координат, движущейся вместе с электронами. В «Лекциях» электрическое поле в такой системе координат было найдено другим методом [см. вып. 5, стр. 274, выражение (13.28)].
26. 8. Два электрона с одинаковыми скоростями  $\mathbf{v}$  движутся параллельно друг другу по обе стороны от бесконечной положительно заряженной плоскости на расстоянии  $a$  от нее; плотность покоящихся поверхностных зарядов равна  $\sigma$ .
- а) При какой величине  $\sigma$  расстояние между электронами будет оставаться равным  $2a$ ?  
 б) Сравните величину  $\sigma$ , которая получается для электронов с энергией 500 Мэв, с той, которая будет в случае медленно движущихся электронов.

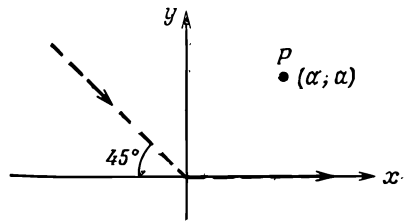


26. 9. Пусть  $f_\mu$  — 4-вектор силы, действующей на частицу, а  $u_\mu$  — 4-вектор ее скорости. Покажите, что

$$f_\mu u_\mu = 0.$$

- 26.10. Частица с зарядом  $q$  движется с постоянной скоростью в плоскости  $xu$  вдоль траектории, изображенной на рисунке штриховой линией (в начале координат частица рассеивается). Величина скорости частицы вдоль всей траектории остается постоянной. В момент времени  $t = t_1$  частица находится в точке  $x = a, y = 0$ .

- а) Найдите электрическое поле в точке  $P$  ( $x = y = a$ ) при  $t = t_1$ , если  $v/c = 0,5$  ( $c$  — скорость света).  
 б) Как изменился бы ваш ответ, если бы до рассеяния в начале координат частица двигалась вдоль оси  $y$ ?



### К главе 27. Энергия поля и его импульс

27. 1. Методом, использованным в «Лекциях» (вып. 6, стр. 292) при выводе выражения (27.11), представьте в ином виде выражения

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

27. 2. Выразите в мегатоннах ( $Mt$ ) энергию магнитного поля Земли, заключенную во всем пространстве, внешнем по отношению к Земле ( $1 Mt$  — энергия, освобожденная при взрыве 1 млн. тонн тринитротолуола, т. е.  $4,2 \cdot 10^{15}$  Дж). Предположите, что магнитное поле Земли — это поле диполя с напряженностью на экваторе примерно около  $\frac{2}{3} \text{ гс}$  ( $\frac{2}{3} \cdot 10^{-4}$  вебер/м<sup>2</sup>).

Как вы считаете, может ли водородная бомба в  $1 Mt$ , взорванная высоко над поверхностью Земли, существенно исказить магнитное поле Земли?

27. 3. Вычислите поток вектора Пойнтинга  $\mathbf{S}$  через поверхность длинного прямолинейного провода, сопротивление единицы длины которого равно  $R$ . Сравните ваш результат с омическими потерями.  
 27. 4. Длинный коаксиальный кабель изготовлен из двух идеально проводящих концентрических цилиндров. Один

конец кабеля подсоединен к электрической батарее, напряжение на клеммах которой равно  $V$ . К другому концу кабеля присоединено сопротивление  $R$ . Следовательно, ток, протекающий по кабелю, равен  $I = V/R$ . С помощью вектора Пойнтинга вычислите скорость потока энергии.

27. 5. Средняя мощность радиоволн, излучаемых широкоэмитальной станцией, составляет примерно  $10 \text{ кВт}$ .
- Чему равна величина вектора Пойнтинга на поверхности Земли в точках, удаленных от станции на  $10 \text{ км}$ ? На таком расстоянии излучаемые волны можно считать плоскими. Разумно предположить, что вся мощность излучается  $1/4\lambda$  антенной, помещенной над идеально проводящей плоскостью.
  - Найдите максимальные значения напряженностей электрического и магнитного полей.
27. 6. Поля, соответствующие наименьшей по частоте поперечной электрической волне в волноводе прямоугольного сечения (см. фиг. 24.6, вып. 6 «Лекций», стр. 230), имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - k_z z),$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_x E_0 \frac{k_z}{\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - k_z z) - \mathbf{e}_z E_0 \frac{\pi}{\omega a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - k_z z).$$

- Покажите, что приведенное выше решение удовлетворяет граничным условиям задачи.
  - Вычислите вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}$  и плотность энергии  $U$ .
  - Вычислите средний поток энергии через поверхность, перпендикулярную оси  $z$ .
  - Вычислите среднюю плотность энергии в волноводе.
  - Используя результаты пунктов (в) и (г), вычислите среднюю скорость распространения энергии. Покажите, что эта скорость совпадает с групповой скоростью [см. формулу (24.27), вып. 6, стр. 232].
27. 7. а) Найдите плотность потока энергии, излучаемой диполем с осциллирующим дипольным моментом  $p \cos \omega t$ . *Примечание.* Следует принять во внимание только члены, убывающие с расстоянием по закону  $1/r$ .
- Путем интегрирования по поверхности сферы большого радиуса, центр которой совпадает с диполем, покажите, что средняя излучаемая мощность равна

$$\frac{1}{3} \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^4}{c}.$$

27. 8. Плоская электромагнитная волна, падая на свободный электрон, заставляет его осциллировать. Найдите отно-

шение энергии, излучаемой электроном в единицу времени, к плотности потока энергии падающей электромагнитной волны. Частота волны предполагается малой. Поэтому влиянием магнитного поля  $\mathbf{B}$  волны на движение электрона можно пренебречь.

27. 9. Частица пыли в Солнечной системе испытывает действие двух сил: силы притяжения к Солнцу и планетам и силы светового давления, пропорциональной ее поперечному сечению. Существует такой размер частицы, при котором эти силы уравниваются друг друга. Предполагая, что частица имеет форму шарика и поглощает весь падающий на нее свет, найдите радиус частицы, отвечающий ее равновесию в поле этих двух сил. Объяснение того факта, что «хвосты» комет направлены в сторону от Солнца, покоится на предположении о существовании такого равновесия и о том, что «хвост» кометы состоит из частиц малого размера, возможно даже из молекул газа. Разумно ли такое объяснение? Мощность, излучаемая Солнцем, равна  $4 \cdot 10^{26}$  вт, его масса  $2 \cdot 10^{30}$  кг.

- 27.10. На полый тороид, средний радиус которого равен  $R$ , а радиус поперечного сечения  $r$  ( $r \ll R$ ), намотано  $N$  витков проволоки. В момент времени  $t = 0$  по проволоке пропускается ток, сила которого нарастает со временем по линейному закону

$$I(t) = Kt.$$

- Найдите магнитное поле и энергию, запасенную в тороиде к моменту времени  $t$ .
- Найдите направление и величину вектора Пойнтинга в любой внутренней точке тороида в момент времени  $t$ .
- Используя вектор Пойнтинга, найдите скорость изменения со временем энергии электромагнитного поля внутри тороида в произвольный момент времени. Убедитесь в правильности вашего ответа, используя решение к пункту (а) задачи.

### К главе 28. Электромагнитная масса

28. 1. Предполагая, что энергия покоя электрона совпадает с его электростатической энергией и что заряд электрона равномерно распределен по объему сферы, вычислите радиус этой сферы. Как изменится результат, если заряд считать равномерно распределенным по поверхности сферы?



28. 2. Хорошо известно, что электроны, кроме заряда и массы, обладают еще и собственным моментом количества движения (спином) и магнитным моментом, которые связаны соотношением

$$\frac{\text{Момент количества движения}}{\text{Магнитный момент}} = \frac{m}{q}.$$

Это соотношение выполняется с точностью до 0,1%. Будем предполагать, что вся масса электрона электромагнитная, т. е.  $m_{э. м.} = 2e^2/3ac^2$  [см. вып. 6, стр. 309, формула (28.4)].

- а) В центре однородно заряженной сферической оболочки радиуса  $a$  и с полным зарядом  $q$  поместите магнитный диполь с магнитным моментом  $\mu$  и покажите, что момент количества движения электромагнитного поля равен

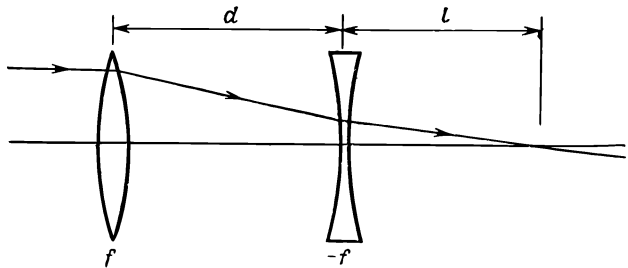
$$L = \frac{2}{3} \frac{q\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{a}.$$

- б) Определите отношение момента количества движения к магнитному моменту и сравните это отношение с величиной  $m/q$ .
- в) Считая, что  $\mu_z$  электрона равно  $\hbar q/2m$ , вычислите максимальную скорость электрона на поверхности, обуславливающую данное значение магнитного момента. Приведите необходимые, с вашей точки зрения, пояснения. Величина  $(4\pi\epsilon_0 \hbar c/q^2) = 1/\alpha$  равна 137.

### К главе 29. Движение зарядов в электрическом и магнитном полях

29. 1. Заряженная частица (заряд  $q$ , масса покоя  $m_0$ ) в момент времени  $t = 0$  покоится в начале координат. Затем на нее начинает действовать постоянное электрическое поле, направленное вдоль оси  $x$ .
- а) Вычислите релятивистскую скорость и координаты частицы как функции времени.
- б) Как изменится ваш ответ, если в начальный момент частица имела скорость  $v_0$ , направленную вдоль оси  $y$ ?
29. 2. В циклотроне протоны движутся в однородном магнитном поле по круговым траекториям. Найдите зависимость «циклотронной частоты» и угловой скорости протонов от  $q$ ,  $B$ ,  $m$  для протонов низкой энергии. Как изменится значение циклотронной частоты при увеличении энергии? При каком изменении энергии частота изменится на 1%?

29. 3. В момент времени  $t = 0$  частица массы  $m$  с зарядом  $q$  покоится в начале координат. На частицу действует однородное электрическое поле  $\mathbf{E}$ , направленное по оси  $y$ , и однородное магнитное поле  $\mathbf{B}$ , направленное по оси  $z$ .
- Найдите последующее движение частицы, т. е. ее координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , предполагая движение нерелятивистским. Какое условие на  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  накладывает это предположение?
  - Какой характер будет иметь движение в том случае, если  $E/B > c$ ?
  - Пусть разность потенциалов между двумя параллельными пластинами, одна из которых совпадает с плоскостью  $xz$  ( $y = 0$ ), а другая находится на расстоянии  $d$  ( $y = d$ ), равна  $V_0 = E \cdot d$ , и между пластинами приложено магнитное поле, параллельное пластинам. Пусть кинетическая энергия электронов, вылетающих из отрицательно заряженной пластины, равна нулю. При каком значении напряженности магнитного поля испущенные электроны не будут достигать другой пластины?
29. 4. Принцип фокусировки частиц в неоднородном поле может быть продемонстрирован с помощью следующей оптической модели:



Даже при одинаковых по модулю фокусных расстояниях линз существуют условия, когда такая система будет фокусировать.

- Определите зависимость  $l$  от  $d$  для света, падающего вдоль оптической оси.
- При каких условиях изображение будет действительным, при каких — мнимым?

*К главе 32. Показатель преломления  
плотного вещества*

32. 1. В «Лекциях» рассматривалось распространение волн в веществе, состоящем из неполярных частиц. Было показано, что квадрат показателя преломления при низких частотах равен диэлектрической проницаемости. Будет ли этот вывод верен для других (изотропных) веществ?
32. 2. На частоте примерно 6 МГц ионосфера становится прозрачной. В рамках модели свободных электронов оцените плотность электронов в ионосфере.
32. 3. К металлу в течение долгого времени приложено постоянное электрическое поле, а затем оно мгновенно выключается. Используя модель свободных электронов, покажите, что время релаксации (т. е. время, в течение которого скорость дрейфа электронов падает в  $e$  раз) равно  $\tau$ , где  $\tau$  — среднее время между столкновениями.
32. 4. Внутри металла существуют решения уравнений Максвелла, имеющие вид плоских волн:

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kx)},$$

где  $k$  — комплексное число. Для низких частот

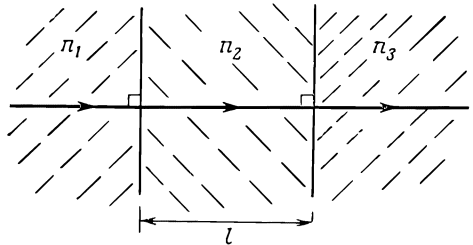
$$k = (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2c_0 c^2}}.$$

- а) Напишите выражение для магнитного поля такой волны.
- б) Какой угол образуют векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  для произвольного  $z$ ?
- в) Какова разность фаз векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ ?  
[Если момент времени  $t_1$  соответствует максимальной величине  $\mathbf{E}$ , а  $t_2$  — максимальной величине  $\mathbf{B}$ , то разность фаз определяется как  $\pm \omega(t_1 - t_2)$ .]

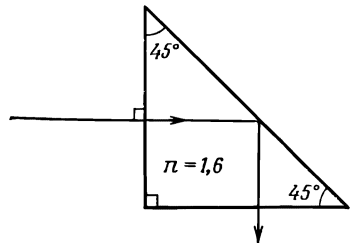
32. 5. При выводе выражения (32.50) «Лекций» (вып. 7, стр. 66) предполагалось, что в металле переход от вещественных значений  $n^2$  к мнимым в ультрафиолетовой области очень резкий. На опыте же столь резкого перехода не наблюдается. Покажите, что с помощью более удачной аппроксимации  $n^2$  теорию можно согласовать с экспериментом.

*К главе 33. Отражение от поверхности*

33. 1. а) Определите коэффициент пропускания для плоской электромагнитной волны, проходящей через трехслойный диэлектрик, показанный на рисунке.  
 б) Покажите, что в случае  $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$  и  $l = \lambda_2/4$  коэффициент пропускания равен единице. (Покрываются такого рода используются для «просветления» оптики в хороших фотокамерах и биноклях.)  
 в) Какова толщина  $l$  для обычного бинокля, т. е. для оптического диапазона длин волн?  
 г) Одну ли сторону линзы можно просветлять? Важно ли, какая сторона покрыта пленкой? Почему?



33. 2. Луч света с длиной волны  $4500 \text{ \AA}$  (в пустоте) падает на призму и полностью отражается на угол  $90^\circ$  относительно первоначального направления. Показатель преломления призмы 1,6. Вычислите расстояние от длинной стороны призмы, на котором напряженность электрического поля уменьшается в  $e$  раз по сравнению с ее значением на поверхности. Предполагается, что свет поляризован так, что вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен к плоскости падения. Изменится ли ваш ответ, если  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости падения?



*К главе 34. Магнетизм вещества*

34. 1. Заряженная частица движется в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю  $\mathbf{B}$ . Покажите, что если  $\mathbf{B}$  меняется медленно, магнитный момент орбитального движения частицы остается постоянным. Что мы понимаем под словом «медленно»?

*К главе 35. Парамагнетизм и магнитный резонанс*

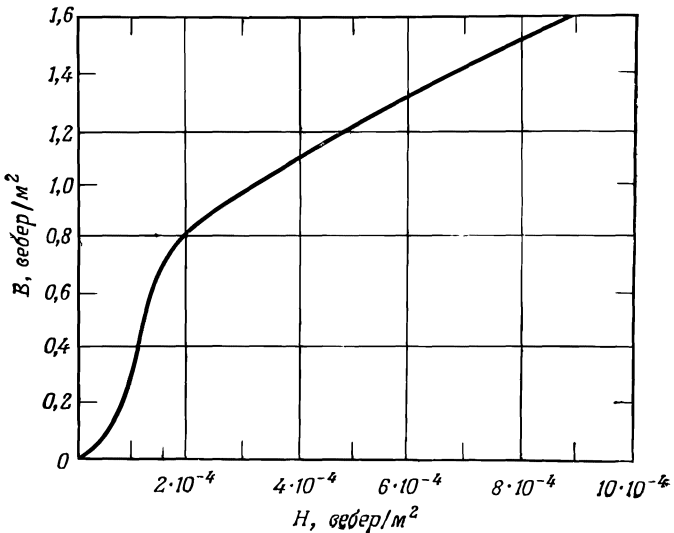
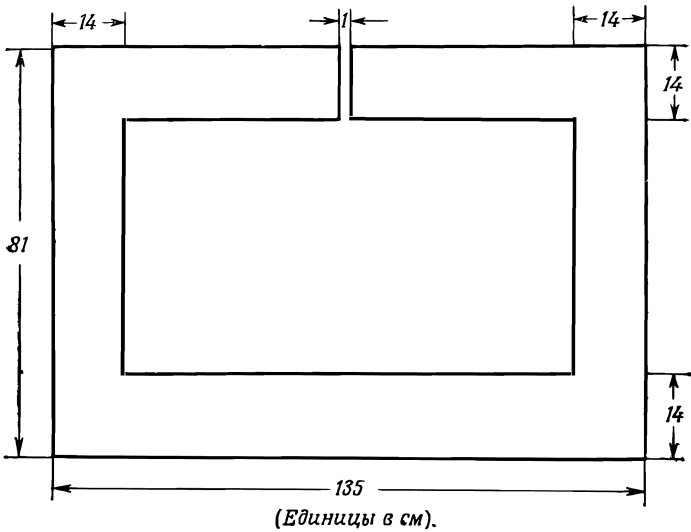
35. 1. В циклотроне, рассчитанном на низкие энергии, период обращения протонов по круговой орбите составляет 0,13 мксек. Ядерный магнитный резонанс для протона в магнитном поле циклотрона наступает при частоте 21 МГц. Определите по этим данным  $g$ -фактор протона.
35. 2. Выведите формулу (35.9) способом, указанным в гл. 35 (вып. 7, стр. 123). Находится ли этот вывод в противоречии с утверждением, содержащимся в гл. 34 (вып. 7, стр. 104), о том, что в рамках классической физики парамагнетизм отсутствует?
35. 3. В  $1 \text{ см}^3$  парамагнитной соли содержится  $10^{22}$  атомов с магнитным моментом в один магнетон Бора каждый. Соль помещается в однородное магнитное поле напряженностью  $10\,000 \text{ гс}$  ( $1 \text{ вебер/м}^2$ ). Выразите в процентах избыток параллельных полю спинов при комнатной температуре и температуре жидкого гелия.
35. 4. Следуя выводу, приведенному в гл. 35, для спина  $1/2$ , найдите квантовомеханическое выражение для парамагнитной восприимчивости частиц со спином 1.

*К главе 36. Ферромагнетизм*

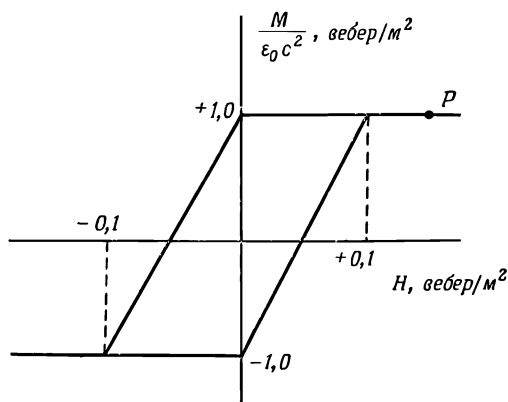
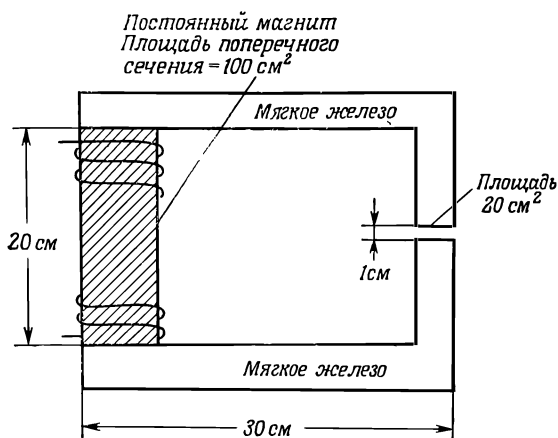
36. 1. Шар радиусом  $a$  однородно намагничен так, что его полный магнитный момент равен  $4/3\pi a^3 M$ , где  $M$  — намагниченность. Каковы должны быть поверхностные токи, создающие магнитное поле вне шара (тех же размеров), которое совпадает с полем, создаваемым намагниченным шаром. Покажите, что найденное распределение токов обладает таким же полным магнитным моментом.
36. 2. Сердечник магнита изготовлен из мягкого железа и обмотан 2150 витками проволоки, через которую течет ток силой 5 а. Кривая зависимости  $B$  от  $H$  для материала каркаса приведена на нижнем рисунке. Оцените величину магнитного поля в воздушном зазоре магнита. (Все размеры в сантиметрах.)

Каковы те главные эффекты, которыми следует пренебречь при решении задачи?

*Примечание.* Так как эмпирическая зависимость  $B$  от  $H$  носит нелинейный характер, не нужно смущаться, что задача не решается аналитически и точно.



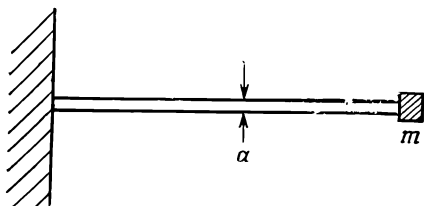
36. 3. Система состоит из постоянного магнита и двух полюсов, изготовленных из мягкого железа. Пропусканием сильного тока по внешней обмотке брусок намагничивается до точки  $P$  на кривой зависимости  $M$  от  $H$ . Найдите напряженность магнитного поля в зазоре после выключения тока, предполагая, что магнитная проницаемость мягкого железа бесконечна, и пренебрегая утечкой магнитного потока на краях зазора



36. 4. Очень длинный железный стержень в форме цилиндра однородно намагничен так, что вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  направлен по оси цилиндра. Найдите  $B$  и  $H$  внутри стержня, пренебрегая краевыми эффектами. Чему будет равна магнитная индукция  $\mathbf{B}$  в центре игольчатой полости, если ее вырезать вдоль оси стержня?

## К главе 38. Упругость

38. 1. В ракетной технике необходимы конструкции, которые обладают максимальной прочностью при минимальном весе.
- Сравните радиусы двух цилиндрических стержней из алюминия и из стали, обладающих одинаковой жесткостью и длиной. (Жесткость определяется как отношение приложенной поперек стержня силы к результирующему смещению.)
  - Сильно ли отличаются массы этих стержней?
38. 2. Алюминиевый стержень квадратного сечения одним концом заделан, а к свободному его концу прикреплена масса  $m$ . Найдите собственную частоту колебаний такой системы, если площадь сечения стержня равна  $a^2$ , масса его во много раз меньше массы  $m$ ; размерами самой массы  $m$  можно пренебречь.



38. 3. В начале курса (вып. 4, стр. 395) скорость звука в жидкости определялась как производная давления по плотности. Покажите, что для продольных волн в твердом теле (плоские волны сжатия) фазовая скорость определяется выражением

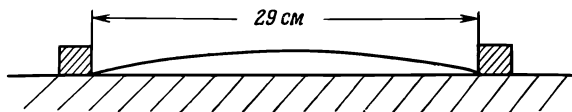
$$v_{\text{прод}}^2 = \frac{(1 - \sigma) Y}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)\rho},$$

где  $\sigma$  — отношение Пуассона;  $Y$  — модуль Юнга. Эта формула справедлива лишь для продольной волны в «безграничной» среде. В такой волне частицы движутся параллельно направлению распространения. Поперечное же смещение частиц в продольной волне отсутствует в отличие от того, что имеет место, скажем, при сжатии стержня, когда поперечные размеры стержня увеличиваются. Каковы, по вашему мнению, должны быть размеры тела, чтобы приведенное выше выражение для фазовой скорости было справедливо?

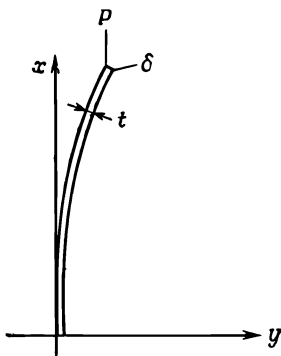
38. 4. Стальная линейка длиной  $L = 30$  см, шириной  $a = 1,5$  см и толщиной  $b = 0,08$  см концами упирается в две планки, прибитые к столу на расстоянии  $l = 29$  см одна от другой, как показано на рисунке.



- а) Какой кривой описывается форма изогнутой линейки?  
 б) Какова сила, с которой линейка упирается в планки?



38. 5. Нижний конец вертикального стержня заделан, а к его верхнему свободному концу приложена сила. Длина стержня равна  $L$ . Поперечное сечение стержня имеет форму прямоугольника со сторонами  $t$  (толщина) и  $\delta$  (ширина). Определите силу, приводящую к показанной на рисунке деформации стержня.



### К главе 40. Течение «сухой» воды

40. 1. а) Докажите справедливость сделанного в гл. 40 (вып. 7) утверждения о том, что в невязкой жидкости давление одинаково во всех направлениях.  
 б) В качестве математического упражнения докажите весьма полезное векторное тождество, использованное в гл. 40:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}),$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = (\nabla \times \mathbf{v}).$$

40. 2. Жидкость вращается в цилиндре кругового сечения с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найдите форму воронки, образующейся на поверхности жидкости, если на расстоянии  $r$  от оси частица жидкости вращается со скоростью  $v = \omega r$ . Покажите, что циркуляция жидкости, отнесенная к единице площади, т. е.  $\text{rot } \mathbf{v}$ , равна удвоенной угловой скорости вращения жидкости.

40. 3. Шар массой  $m$  и радиусом  $a$  движется с постоянной скоростью в «сухой» воде. Покажите, что сумма кинетических энергий шара и жидкости равна

$$\frac{1}{2} \left( m + \frac{M}{2} \right) v^2,$$

где  $M$  — масса жидкости, вытесненная шаром.

Чему равен суммарный импульс шара и жидкости?

### К главе 41. Течение «мокрой» воды

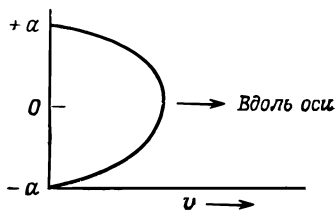
41. 1. Если шар радиусом  $a$  движется в вязкой жидкости равномерно и достаточно медленно, так что поток обтекающей жидкости можно считать ламинарным, то сила, заставляющая его двигаться, равна вязкой силе трения, действующей со стороны жидкости на шар. Хотя эту силу вы можете определить точно, представляет интерес найти для нее выражение из соображений размерностей, перечислив все параметры, от которых эта сила может зависеть. Прodelайте это. Можете ли вы качественно обосновать, почему параметры входят в найденное выражение так, а не иначе?
41. 2. Медленный поток вязкой жидкости в цилиндрической трубке можно считать ламинарным, причем профиль скоростей потока выглядит примерно так, как представлено на рисунке. Покажите, что если  $r$  — расстояние от оси трубки,  $\eta$  — коэффициент вязкости, а  $(P_1 - P_2)/L$  — перепад давления на единице длины трубки, то профиль скоростей в жидкости описывается выражением

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{(P_1 - P_2)}{L} (a^2 - r^2).$$

По аналогии с законом Ома пропускную способность трубки  $Q$  можно связать с перепадом давления  $\Delta P = P_1 - P_2$  соотношением

$$\Delta P = QR,$$

где  $R$  — сопротивление трубки. Найдите сопротивление  $R$  для трубок радиусом  $a$  и длиной  $L$ . Как вы думаете, проведение подобной аналогии лишь простая игра слов или есть основания считать такие аналогии полезными? Что является аналогом конденсатора?



41. 3. Дно широкого бассейна покрыто тонким слоем воды (любой «несжимаемой» жидкости с вязкостью  $\eta$ ). На поверхности воды плавает тонкая деревянная доска, «дно» которой находится на расстоянии  $d$  от дна бассейна. Все остальные размеры доски во много раз больше  $d$ . Доска движется горизонтально с малой скоростью  $v$ . Чему равна скорость диссипации энергии в единице объема в воде вблизи середины доски?

## Вып. 8

## КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА (I)

## К главе 1. Амплитуды вероятности

1. 1. В этой главе описан мысленный эксперимент по интерференции электронов на двойной щели. По интерференционной картине, приведенной на фиг. 1.1 «Лекций» (вып. 8, стр. 11), можно оценить длину волны  $\lambda$ , связанную с амплитудными функциями  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Обозначим расстояние между центрами щелей буквой  $a$ .
  - а) Чему равна  $\lambda$ ?
  - б) Используя кривые для  $P_1$  и  $P_2$ , рассчитайте ожидаемую величину  $P_{12}$  в центре полосы, в первом боковом максимуме и первых двух минимумах интерференционной картины. Сравните полученные результаты с кривой  $P_{12}$ .
1. 2. Рассмотрите эксперимент по интерференции электронов на двойной щели, описанный в предыдущей задаче, предположив, что расстояния от электронной пушки до щелей и от щелей до экрана очень велики по сравнению с промежутком между щелями, а ширина щелей много меньше этого промежутка. Дайте ответ (по возможности количественный) на следующие вопросы:
  - а) Что произойдет с интерференционной картиной  $P_{12}$ , если электронную пушку сдвинуть вверх на расстояние  $D$ ?
  - б) Как изменится интерференционная картина, если расстояние между щелями удвоить?
  - в) Что случится, если первую щель сделать вдвое шире второй?
1. 3. Монохроматический свет, поляризованный в вертикальной плоскости, падает на пленку — поляририд, «ось пропускания» которой образует с вертикалью угол  $\theta$ . Чему будет равно отношение интенсивности света, прошедшего через пленку, к интенсивности падающего света? А что сделает поляририд с отдельным падающим фотоном?

1. 4. Пучок электронов с энергией  $20 \text{ кэВ}$  проходит через тонкую поликристаллическую золотую фольгу, а затем падает на фотопластинку. Области почернения на пластинке имеют форму концентрических колец с центрами на оси пучка. Почему? Рассчитайте диаметр колец, если расстояние от фольги до пластинки равно  $10 \text{ см}$ .
1. 5. Вернемся к обычному интерференционному опыту с двойной щелью (см. фиг. 1.1 «Лекций», вып. 8, стр. 11). Если  $a_1$  и  $a_2$  — два комплексных числа, равные амплитудам вероятности нахождения электронов соответственно в щелях 1 и 2, то как выглядит формула для относительной интенсивности распределения электронов на экране в зависимости от  $x$  — расстояния от центральной точки? Считайте  $x$  приближенно малой величиной; ответ должен выражаться через расстояния между щелями и от щелей до экрана.
1. 6. В дифракционном опыте (схема которого приведена на рисунке) частицы, испускаемые источником, имеют импульс  $p_0$ , массу  $m$  и скорость  $v$ .
- а) Чему равно расстояние  $a$  между центральным максимумом и его ближайшим соседом? Считайте

$$L \gg d, \quad L \gg a.$$

- б) Внешнее воздействие меняет фазу для верхнего пути на  $\delta\varphi_1$ , а для нижнего пути на  $\delta\varphi_2$ . Покажите, что центральный максимум смещается при этом на расстояние  $S$ , определяемое выражением

$$S = + (\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2) \frac{L}{d} \frac{\hbar}{p_0}.$$

Таким образом, если величина  $(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2)$  для всех путей одинакова, то на расстояние  $S$  смещается вся дифракционная картина и мы можем сказать, что на расстояние  $S$  отклоняются все частицы.

- в) Предположим, что в области  $A$  частицы обладают небольшой потенциальной энергией, которая зависит только от вертикальной координаты. Тогда импульс частиц на высоте  $x$  над центральной линией [обозначим его  $p(x)$ ] будет несколько отличаться от  $p(0)$  — своего значения на центральной линии. Покажите, что

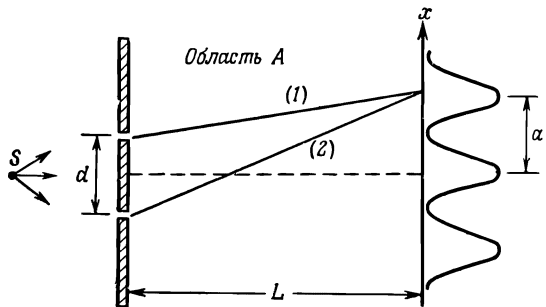
$$p(x) = p(0) + \frac{m}{p(0)} (V(0) - V(x)),$$

или, когда  $V(x)$  меняется с расстоянием медленно,  $p(x) = p(0) + Fx/v$ , где  $F = -dV/dx$ .

- г) При условиях, описанных в пункте (в), импульсы при движении по прямым (1) и (2) будут отличаться друг от друга (как и длины волн). Покажите, что разность фаз для верхнего и нижнего путей равна

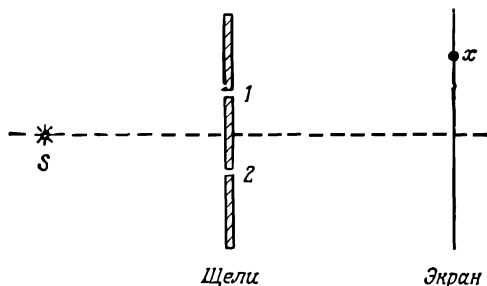
$$(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2) = \frac{d}{2v} \frac{F}{\hbar} L.$$

(Заметим, что среднее вертикальное расстояние между двумя этими прямыми равно  $d/2$ .) Покажите, что интерференционные полосы смещаются вверх на величину  $1/2 T^2 (F/m)$ , где  $T = L/v$  — время пролета (в классическом смысле) от щели до экрана. Поясните смысл результата.



1. 7. Электроны со спином  $1/2$  испускаются источником  $S$ , помещенным перед экраном с двумя щелями, как показано на рисунке. Предположим, что электрон, достигший щели, проходит через нее с амплитудой  $\alpha$ , если его спин направлен вверх, и с амплитудой  $\beta$ , если его спин направлен вниз. Предположим далее, что различить, через какую щель электрон прошел, невозможно.
- Если все электроны испускаются «спином вверх», рассчитайте распределение интенсивностей на экране в точке  $x$ , выразив ее через  $\alpha$ ,  $\beta$  и амплитуды  $\langle x|s \rangle$  (см. вып. 8, стр. 12, 13).
  - Как отличается это распределение от того случая, когда все электроны испускаются «спином вниз», при прочих равных условиях?

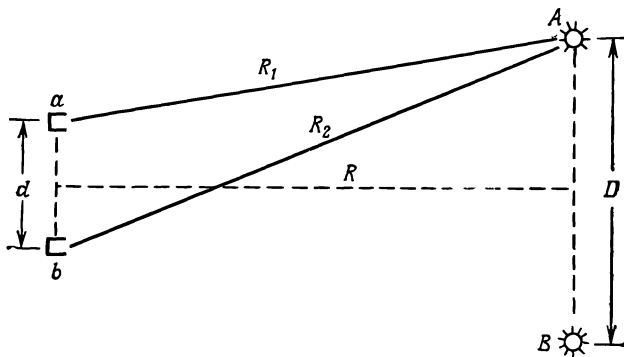
- в) Если направление спинов случайно, а все остальные условия опыта сохраняются, то чем будет отличаться интерференционная картина от случая (а)?



1. 8. Сколь это ни удивительно, но большие интерференционные эффекты можно наблюдать даже в том случае, если одна из «интерферирующих возможностей» имеет не очень большую вероятность. Покажите, что в эксперименте по дифракции на двух отверстиях, даже когда вероятность проникнуть через одно из них в 100 раз меньше, чем через другое, дифракционный максимум все еще на 50% выше минимума.
1. 9. Расстояние до ближайших к Земле звезд столь велико, что их диаметр определить нельзя даже при помощи лучших современных телескопов, поскольку их угловое разрешение больше «угловых размеров» звезд. Диаметр звезд впервые определил Майкельсон, используя оптический интерферометр. Но точности этого метода едва хватает для самых близких звезд. В 1956 г. Браун и Твисс предложили новый метод для таких измерений, названный ими «методом корреляции интенсивностей» [Nature, 178, 1046 (1956)]. Они опробовали его на звезде Сириус. Для этого они взяли два параболических рефлектора (авторы использовали зеркала от старых прожекторов), в фокусе каждого из которых был установлен фотоумножитель. Выходы умножителей соединялись коаксиальным кабелем с электронной схемой, которая регистрировала среднее значение от произведения токов в обоих умножителях (так называемую «корреляционную функцию»). По поведению этого произведения в зависимости от расстояния между зеркалами определялся угловой диаметр звезды. В то время многие физики утверждали, что этот метод не годится, поскольку свет — это фотоны, а каждый фотон попадает либо на одно зеркало, либо на другое, и, следовательно, никакой корреляции двух токов наблю-

даться не может. Вы можете опровергнуть этот аргумент, рассматривая следующий идеализированный эксперимент. Два небольших источника света, скажем две лампочки  $A$  и  $B$ , помещаются на больших расстояниях от фотонных счетчиков  $a$  и  $b$ . Геометрические условия опыта показаны на рисунке. Счетчики  $a$  и  $b$  включены в «схему совпадений», которая регистрирует  $p_{12}$  — количество случаев в единицу времени, когда фотоны регистрируются *одновременно* (т. е. в течение одного малого промежутка времени  $\tau$ ) в обоих детекторах. Пусть  $\langle a|A \rangle$  — амплитуда появления фотона, испущенного источником  $A$ , в детекторе  $a$  в течение данного промежутка времени, определяемого разрешающей способностью схемы. Тогда  $\langle a|A \rangle = ce^{i\alpha_1}$ , где  $c$  — комплексная постоянная, а  $\alpha_1 = kR_1$  ( $R_1$  — расстояние от  $A$  до  $a$ ,  $k$  — волновое число. Аналогично,  $\langle b|A \rangle = se^{i\alpha_2}$ , где  $\alpha_2 = kR_2$ , а  $R_2$  — расстояние от  $A$  до  $b$ . Покажите, что скорость счета совпадений пропорциональна  $2 + \cos 2k(R_2 - R_1)$ .

Как использовать этот результат для определения  $D$ , если  $R$  известно? Пренебрегайте тем фактом, что реальный процесс есть «наложение» таких простых процессов, поскольку свет приходит из всех областей поверхности звезды, а не только из крайних, диаметрально противоположных точек.



## К главе 2. Тожественные частицы

2. 1. Радиопередатчик излучает сигнал мощностью 1000 кВт на частоте 1 МГц.
- Какова энергия (в эв) каждого излученного кванта?
  - Сколько квантов излучается за каждый период колебаний электромагнитного поля? (Высокая степень



когерентности этих квантов возможна, поскольку они являются бозе-частицами.)

2. 2. Внутри полости в абсолютно черном теле величина интенсивности излучения  $I(\omega)\Delta\omega$  в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + \Delta\omega$  на единицу объема дается формулой Планка.
- а) Как ведет себя  $I(\omega)$  при малых  $\omega$ ? При больших  $\omega$ ?
  - б) При какой частоте на единичный интервал частот приходится максимальная энергия?
  - в) При какой длине волны на единичный интервал длин волн приходится максимальная энергия?
  - г) Оцените температуру на поверхности Солнца, предполагая, что максимум интенсивности его излучения приходится на середину видимого спектра.
2. 3. Оцените напряженность магнитного поля, которая требуется для того, чтобы выстроить спины обоих электронов в атоме гелия в одном направлении. (Приближенно рассматривайте атом гелия как гармонический осциллятор с основной частотой, соответствующей видимому свету. У атома гелия «в основном состоянии» оба электрона находятся на самом нижнем уровне, и их спины направлены в противоположные стороны. Согласно принципу запрета Паули, для того чтобы направления спинов электронов совпали, одному из них придется перейти на следующий уровень.)
2. 4. До открытия нейтронов предполагалось, что ядра состоят из протонов и электронов. Покажите, что в таком случае атом  $N^{14}$  (атом азота, масса ядра которого примерно в 14 раз больше массы протона) был бы бозе-частицей. Опытные факты (спектр молекулы азота) показывают, что этот атом есть ферми-частица. Это было первое свидетельство в пользу существования новой ядерной частицы. Покажите, как нейтронная гипотеза решает эту задачу.
2. 5. Система атомов находится в тепловом равновесии с излучением. Каждый атом имеет два возбужденных состояния с энергиями  $\Delta E$  и  $2\Delta E$ , причем переходы между основным и наивысшим возбужденным состояниями (частота излучения  $\omega = 2\Delta E/\hbar$ ) запрещены.
- $\Delta E$  { \_\_\_\_\_ Второй уровень энергии ( $N_2$  атомов).  
 \_\_\_\_\_ Первый уровень энергии ( $N_1$  атомов).  
 $\Delta E$  { \_\_\_\_\_ Уровень основного состояния ( $N_0$  атомов).
- а) Выразите отношения  $N_1/N_0$  и  $N_2/N_1$  через среднее число фотонов  $\bar{n}(\omega)$  в данном состоянии.

- б) Получите простое выражение для  $\bar{n}(\omega)$ , учитывая, что фотоны являются бозонами. Искомое выражение должно содержать только  $\Delta E/kT$ .
- в) Найдите приближенные выражения для  $\bar{n}(\omega)$  в двух предельных случаях:

$$\hbar\omega \gg kT,$$

$$\hbar\omega \ll kT.$$

2. 6. В лазере большое число атомов одновременно переводится в возбужденное состояние. Потом появление небольшого количества света определенного типа индуцирует лавинообразное излучение, в которое дают вклад все возбужденные атомы, что приводит к образованию очень большого числа фотонов с совершенно одинаковой длиной волны, испускаемых строго в одном направлении. Можно ли надеяться, что в один прекрасный день кто-нибудь создаст подобное же устройство, излучающее нейтрино (частицы с массой, равной нулю, и спином  $1/2$ )?
2. 7. Покажите, что для двух нетождественных невзаимодействующих частиц вероятность того, что одна переместится из  $a$  в  $b$ , в то время как другая переместится из  $c$  в  $d$ , есть произведение двух сомножителей  $P_{ab}$  и  $P_{cd}$ , где  $P_{ab}$  — вероятность, что первая частица в отсутствие второй частицы переместится из  $a$  в  $b$ , а  $P_{cd}$  — вероятность, что вторая частица в отсутствие первой переместится из  $c$  в  $d$ . Является ли существенным обстоятельством то, что частицы нетождественны?
2. 8. Дейтрон является бозе-частицей со спином единица; таким образом, пучок дейтронов может находиться в одном из трех состояний с проекциями спина  $+1, 0, -1$ . Производится опыт, в котором дейтроны рассеиваются на дейтронах. Как зависит вероятность регистрации дейтронов от угла рассеяния  $\theta$  (угол между направлениями движения дейтрона до и после столкновения в системе центра масс)? Предположим, что направление спина в процессе рассеяния не меняется, а  $f(\theta)$  — это амплитуда отклонения на угол  $\theta$ .
2. 9. Пусть  $f_1(\theta)$  — амплитуда рассеяния  $\pi$ -мезона на протоне, а  $f_2(\theta)$  — на нейтроне. Как выразить *вероятность* того, что  $\pi$ -мезон рассеется на ядре гелия на угол  $\theta$  через  $P_1$  и  $P_2$  — вероятности рассеяния на протоне и на нейтроне? Рассмотрите два случая:
- а) отдача протона или нейтрона после рассеяния разрушает ядро;

б) отдача настолько слаба, что ядро остается «неповрежденным».

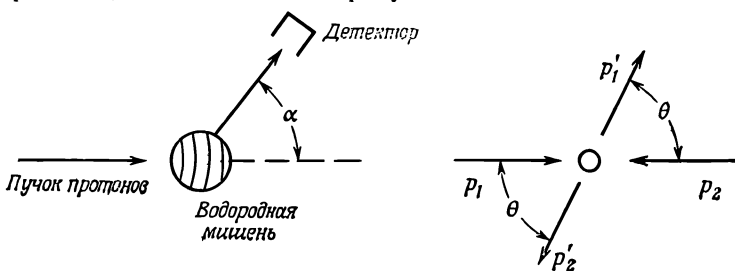
Можете ли вы сказать, в каком случае рассеяние сильнее? Ваши ответы должны зависеть от предположений, сделанных при описании процесса (а).

2.10. Предположим, что в эксперименте по рассеянию пучок нейтронов падает на нейтронную мишень. Детектор установлен с таким расчетом, чтобы он регистрировал нейтроны, рассеявшиеся на угол  $\theta$  в системе центра масс;  $f$  — амплитуда рассеяния частицы на этот угол без изменения спинового состояния;  $g$  — амплитуда рассеяния на тот же угол с «переворотом» спина (за счет обмена направлениями спинов с частицей мишени). Если предположить, что  $f$  и  $g$  не зависят от  $\theta$ , то какова будет вероятность, что детектор зарегистрирует нейтрон, если:

- спины обоих нейтронов (и рассеиваемого и рассеивающего) направлены вдоль оси  $+z$ ;
- спины нейтронов пучка выстроены вдоль положительного направления оси  $z$ , а спины нейтронов мишени — вдоль отрицательного;
- падающий пучок не поляризован, а мишень поляризована в направлении  $+z$ ;
- и пучок и мишень не поляризованы;
- как изменится ответ на вопрос (а), если мишень будет состоять из поляризованных протонов при равенстве амплитуд нейтрон-нейтронного и нейтрон-протонного рассеяния?

Считайте, что детектор одинаково эффективно регистрирует и нейтроны, и протоны.

2. 11. Пучок нерелятивистских протонов проходит через тонкую мишень из жидкого водорода, а потом, как показано на рисунке, рассеянные протоны регистрируются под некоторым углом  $\alpha$  к падающему пучку. Процесс рассеяния протона на протоне можно анализировать в системе центра масс, как показано на рисунке.



Два протона ( $p_1$  и  $p_2$ ) движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями; после соударения два протона ( $p'_1$  и  $p'_2$ ) разлетаются вдоль прямой, которая составляет угол  $\theta$  с первоначальным направлением. Если выбрать в качестве оси  $z$  направление, перпендикулярное плоскости рассеяния, то для каждого протона проекция спинового момента на эту ось может иметь значение  $J_z$ , равное  $+\hbar/2$  или  $-\hbar/2$ . Будем говорить, что в первом случае спин направлен «вверх», а во втором — «вниз». Предположим, что спины обоих протонов направлены вверх и что  $f(\theta)$  есть амплитуда рассеяния протона  $p_1$  на угол  $\theta$  с попаданием в детектор. Поскольку мы не можем сказать, *какой* протон зарегистрирован счетчиком, то амплитуда того, что *какой-то* протон вылетит под углом  $\theta$ , равна  $f(\theta) - f(\pi - \theta)$ . Знак *минус* появляется потому, что протоны — ферми-частицы. Поэтому вероятность зарегистрировать протон под углом  $\theta$  равна

$$|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2.$$

Предположим теперь, что спин протона  $p_1$  направлен вверх, а спин  $p_2$  — вниз, амплитуда рассеяния частицы  $p_1$  в направлении детектора *без переворота* спина равна  $f'(\theta)$ , а *с переворотом* спина  $g(\theta)$ ; амплитуда рассеяния зависит от относительной ориентации спинов.

В этом случае амплитуду появления в детекторе протона со спином, направленным вверх, можно записать в виде  $f'(\theta) + g(\pi - \theta)$ .

- а) Какова связь между  $\theta$  и  $\alpha$ ?
- б) Какова амплитуда появления в детекторе протона со спином вниз, если до рассеяния спины сталкивающихся протонов были направлены в разные стороны?
- в) Предположим, что «обычный» пучок неполяризованных протонов рассеивается на обычной неполяризованной мишени и что детектор не реагирует на поляризацию. Чему равна *вероятность* рассеяния на угол  $\theta$ ?
- г) Покажите, что при  $f' = f$  и  $g = 0$  рассеяние протонов с хаотически ориентированными спинами представляет собой смесь «чисто фермионного» рассеяния с амплитудой  $f(\theta) - f(\pi - \theta)$  и «чисто бозонного» рассеяния, амплитуда которого равна  $f(\theta) + f(\pi - \theta)$ , т. е. что

$$P = A |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + B |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2.$$

Вычислите  $A$  и  $B$ .

**2.12.** Предположим, что  $N$  электронов находятся в очень большом ящике объемом  $V$  в состоянии с наименьшей

возможной энергией. Покажите, что в пренебрежении взаимодействием между электронами каждый уровень в ящике занят двумя электронами, причем импульс, соответствующий каждому уровню,  $\hbar k = p$ , меньше величины  $p_{\text{макс}}$ , определяемой соотношением

$$N = \int_0^{p_{\text{макс}}} V \cdot 2 \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Чему равна энергия  $U$  всех электронов? Свяжите эту внутреннюю энергию  $U$  с объемом ящика и найдите таким образом давление этого так называемого вырожденного электронного газа. Покажите, что объем и давление связаны соотношением  $PV^\gamma = \text{const}$ , и найдите  $\gamma$ .

- 2.13. Материя в звездах, известных под названием «белые карлики», сжата так сильно, что к ней применима теория, рассмотренная в последней задаче. Если  $\rho$  — плотность вещества звезды, то  $\rho/2M_p$  — число протонов в  $1 \text{ м}^3$  этого вещества ( $M_p$  — масса протона; мы предполагаем, что ядра содержат примерно столько же протонов, сколько нейтронов). В уравнении к задаче 2.12 положим  $N/V = \rho/2M_p$ . Уравнения равновесия звезды из такого вещества, равновесия, поддерживаемого гравитационным притяжением, можно найти в книгах по астрофизике, и они записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} P &= A\rho^{5/3}, \\ \frac{dP}{dr} &= -\frac{G\rho M(r)}{r^2}, \\ \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho. \end{aligned}$$

Можете ли вы объяснить вид этих уравнений и вывести формулу или указать численное значение для  $A$ ? Считайте, что все давление создается вырожденным электронным газом, а присутствие нуклонов практически не сказывается (кстати, почему?).

### К главе 3. Спин единица

3. 1. Докажите высказанное в гл. 3 «Лекций» (вып. 8) утверждение, что если прибор  $C$  можно разделить на две части  $A$  и  $B$ , то

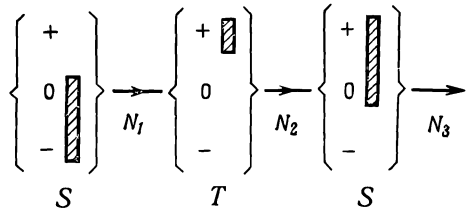
$$\langle \chi | C | \varphi \rangle = \sum_k \langle \chi | B | k \rangle \langle k | A | \varphi \rangle.$$

3. 2. Три «усовершенствованных» прибора Штерна — Герлаха, описанные в гл. 3, которые разделяют пучок на компоненты, соответствующие различным значениям проекции спина (но без *пространственного* разделения пучка), устанавливаются последовательно друг за другом, и через них пропускается пучок частиц со спином 1. Первая и третья установки ориентированы в одном и том же направлении, а средняя устанавливается под произвольным углом. В обозначениях, которые использовались в гл. 3, это будет выглядеть так:

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}$$

$S \qquad T \qquad S$

- а) В установке  $T$  открыта одна щель. Будет ли распределение пучка по трем состояниям в конечном состоянии  $S$  зависеть от входного состояния, т. е. от пропорций, в которых смешаны состояния  $+S$ ,  $0S$  и  $-S$  в начальном пучке. Почему?
- б) А если две щели в установке  $T$  открыты?
- в) А если все три щели в  $T$  открыты?
3. 3. Тройной «усовершенствованный» эксперимент Штерна — Герлаха проводится с частицами со спином 1 по следующей схеме:



Все три прибора расположены на одной прямой, но средний прибор  $T$  повернут на  $90^\circ$  относительно двух других. Пучок частиц со спином 1 падает слева. Пучок, который выходит из первого прибора  $S$ , имеет интенсивность  $N_1$  частиц в секунду.

- а) Чему равна интенсивность пучка  $N_2$  на выходе из прибора  $T$ ?
- б) Какова интенсивность пучка  $N_3$  на выходе из последнего прибора  $S$ ?
- в) Каковы будут значения  $N_2$  и  $N_3$ , если заслонку из прибора  $T$  удалить?

3. 4. Рассмотрим последовательность «усовершенствованных» приборов Штерна — Герлаха  $S$ ,  $T$  и  $S'$ , через которые проходит пучок частиц со спином 1. (Прибор  $T$  повернут вокруг оси  $x$  на  $90^\circ$  по отношению к  $S$  и  $S'$ .)

а) Если из прибора  $S$  выходит  $N_0$  частиц, найдите, какое число частиц следует ожидать на выходе прибора  $S'$  в состояниях  $|+S'\rangle$  и  $|0S'\rangle$ . (Обозначим соответствующие значения  $N_{+S'}$  и  $N_{0S'}$ .)

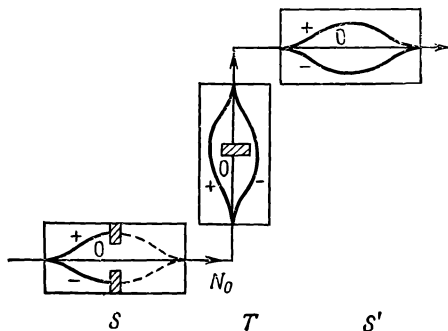
б) Предположим, что мы имеем «прозрачные детекторы», которые можно помещать в пучки  $+$  и  $-$  прибора  $T$ . Свойство этих детекторов состоит в том, что при прохождении частицы через такой детектор он сигнализирует об этом, не меняя спинового состояния частицы. Кроме того, импульс частицы не изменяется сколько-нибудь заметно в том смысле, что ее траектория внутри установки одинакова как при наличии детектора, так и без него.

Если детекторы установлены в позициях  $+$  и  $-$  прибора  $T$  (позиция  $0$  блокирована), каковы будут ожидаемые числа отсчетов  $N_{+T}$ ,  $N_{-T}$ ,  $N_{+S'}$  и  $N_{0S'}$ , если из прибора  $S$  вылетает  $N_0$  частиц?

в) Как изменится результат для  $N_{+S'}$  в описанном эксперименте, если после его проведения обнаружится, что числа отсчетов  $N_{+T}$  и  $N_{-T}$  не регистрировались?

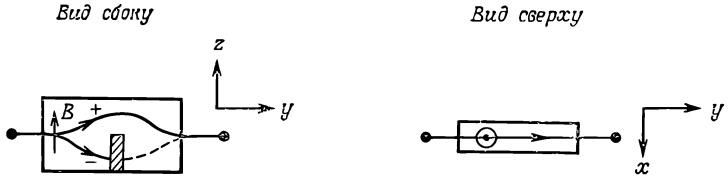
г) Если эффективность каждого детектора равна 50% (т. е. в половине случаев пролетающая через детектор частица не взаимодействует с ним), чему будут тогда равны значения  $N_{+S'}$  и  $N_{0S'}$ ?

д) Чему будут равны  $N_{+S'}$  и  $N_{0S'}$ , если блокировки состояний  $+S$  и  $-S$  удалены и  $N_0$  частиц выходит из  $S$  (детекторы из прибора  $T$  удалены)? Считайте пучок неполяризованным.



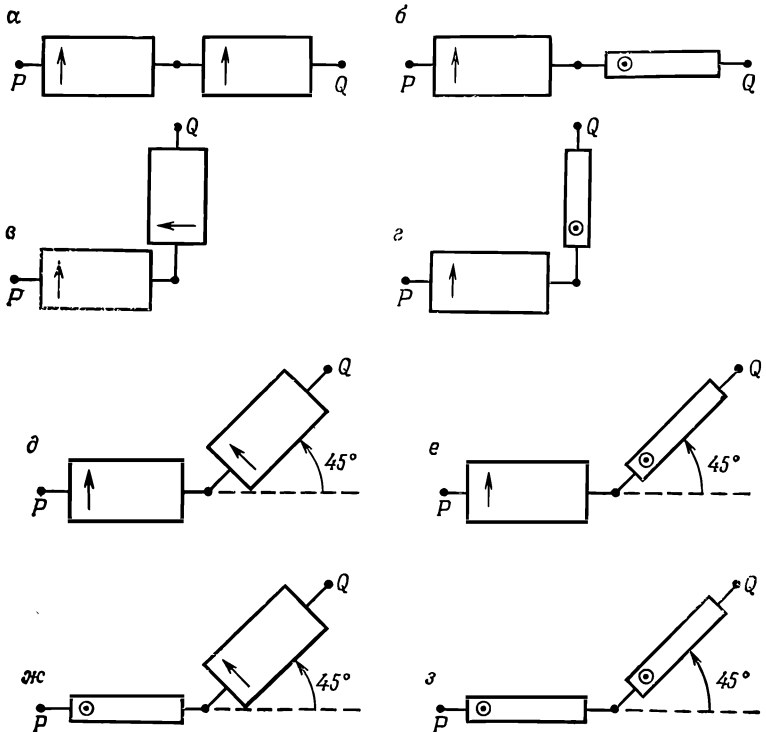
К главе 4. Спин одна вторая

4. 1. Представьте себе, что пучок атомов со спином  $1/2$  фильтруется двумя «усовершенствованными» приборами Штерна — Герлаха, установленными один за другим. Предполагается, что каждый прибор пропускает только один пучок, как изображено на фиг. 1.



Фиг. 1.

На фиг. 2 приведено несколько вариантов относительного расположения приборов. Пусть в прибор  $P$  попадает  $N$



Фиг. 2.



неполяризованных атомов. Сколько атомов должно появиться в точке  $Q$ ?

4. 2. В некий прибор попадает  $N$  частиц со спином  $1/2$ , причем амплитуды для направления спина вверх и вниз вдоль оси  $z$  равны соответственно  $a$  и  $b$ . Покажите, что вероятность обнаружения этой частицы в любой точке внутри прибора равна  $|aX + bY|^2$ , где  $X$  и  $Y$  — некоторые комплексные постоянные, характеризующие прибор. Как будет выражаться эта вероятность через  $X$  и  $Y$ , если:
- 1) спин влетевшей частицы направлен вверх? вниз?
  - 2) спин направлен вдоль оси  $+x$ ?  $-x$ ?
  - 3) спин направлен вдоль оси, направление которой определяется полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$ ?

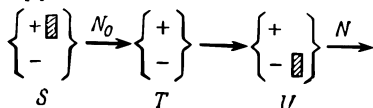
Представить себе, что спиновое состояние падающих частиц определяется «волей случая», можно несколькими способами:

- а) для решения вопроса о том, в положительную или отрицательную сторону оси  $z$  будет направлен спин данного электрона, каждый раз бросается монета;
- б) делается то же самое, но вдоль оси  $x$ ;
- в) спин каждого электрона ориентируется в некотором направлении  $\theta, \varphi$ , но это направление каждый раз выбирается случайно, так что потом приходится все усреднять по телесному углу  $\sin \theta d\theta d\varphi/4\pi$ .

Покажите, что вероятность обнаружения частицы одна и та же для всех трех видов определения понятия «случайная ориентация».

Предположим, что частицы со спином  $1/2$  вылетают из отверстия в стенке, а перед этим направление их спина определяется одним из трех указанных способов. Можете ли вы придумать какой-нибудь способ, при помощи которого, находясь по «эту» сторону стенки, можно определить, какой из трех методов в действительности использовался?

4. 3. Три прибора Штерна — Герлаха установлены друг за другом в последовательности, показанной на фиг. 1.

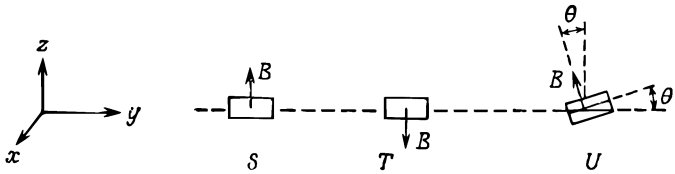


Фиг. 1.

Выразите  $N$  (число атомов со спином  $1/2$ , выходящих из прибора  $U$ ) через  $N_0$  (число атомов, выходящих из  $S$ ) и величины типа  $\langle +T | +U \rangle$  и т. д.

Затем рассмотрите ту же самую последовательность приборов, но для случая, когда поля  $B$  ориентированы согласно схеме, приведенной на фиг. 2. В частности,

- I) поле  $B$  прибора  $T$  повернуто антипараллельно полю  $B$  прибора  $S$ ;
- II) поле  $B$  прибора  $U$  образует угол  $\theta$  с осью  $z$ .



Фиг. 2.

- а) Получите явные выражения для  $\langle +T | -S \rangle$  и  $\langle -T | -S \rangle$ .
- б) Найдите явный вид  $\langle +U | -S \rangle$ , используя для упражнения *только* таблицы преобразований при вращениях вокруг осей  $z$  и  $y$ .
- в) Рассмотрите результат случая (б) для предельных значений

$$\theta = 0,$$

$$\theta = \pi.$$

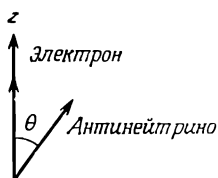
Объясните ответ при  $\theta = \pi$ , сравнивая его с  $\langle +T | -S \rangle$  для случая (а).

4. 4. Призма из кальцита расщепляет пучок света, направленный вдоль оси  $z$ , на два пучка  $x$  и  $y$ . Отдельный фотон, падающий на эту призму, характеризуется определенной амплитудой попадания в один из этих пучков  $x$ ,  $y$ . Такой же образец кальцита, но перевернутый, можно использовать для соединения этих лучей снова в один и т. д., аналогично тому, как это делается с частицами в приборе Штерна — Герлаха. Ось другой призмы  $T$  можно располагать под углом  $\theta$  в плоскости  $x - y$ , переводя пучок в состояния  $x'$ ,  $y'$  или  $xT$ ,  $yT$ . Получите амплитуды  $\langle xT | xS \rangle$ ,  $\langle yT | yS \rangle$  и т. д., используя свои знания классической теории поляризации света, считая, что при большом числе фотонов в пучке интенсивность будет хорошо описываться этими классическими результатами. Рассматривайте повороты только вокруг оси  $z$ , поскольку свет нельзя «остановить». (Повороты вокруг других осей можно описывать скорее по их действию на направление распространения света, а не на поляризацию; в этом смысле свет, хотя он и является системой с двумя состояниями, очень сильно

отличается от электрона, который тоже представляет собой систему с двумя состояниями.)

4. 5. Найдите все четыре элемента матрицы  $\langle j|A|i\rangle$ , где индексы  $i$  и  $j$  могут принимать значения  $x$  и  $y$ , для следующих приборов, через которые пропускается свет:
- $x, y$  — анализатор из кальцита и такой же синтезатор, причем луч  $y$  блокирован;
  - тот же прибор, повернутый на угол  $\theta$ ;
  - поляририд, ось которого направлена по оси  $x$ ;
  - поляририд, ось которого образует с осью  $x$  угол  $\theta$ ;
  - анализатор и синтезатор из кальцита, между которыми имеется слой стекла, сдвигающий фазу луча  $x$  на угол  $\varphi$ ;
  - анализатор и синтезатор из кальцита, причем оба луча проходят через одно и то же стекло;
  - анализатор и синтезатор, повернутые на  $45^\circ$ , а также слой стекла в луче  $x$ , увеличивающий фазу на  $90^\circ$ ;
  - пластинка толщиной  $\lambda/4$ ;
  - пластинка из двоякопреломляющего вещества, причем оптическая ось параллельна оси  $x$  (получите общую формулу для слоя этого вещества произвольной толщины);
  - раствор сахара, который поворачивает плоскость поляризации вправо на угол  $\theta$ ;
  - устройство, которое расщепляет исходный луч на  $x$  и  $y$ , приводит луч  $x$  в плоскость  $y$  (пропуская его через раствор сахара, который поворачивает плоскость поляризации на  $90^\circ$ ) и снова соединяет оба луча в один.
  - Покажите, что с помощью прибора, описанного в пункте (л), можно устроить вечный двигатель.

4. 6. Согласно теории бета-распада, в одном из частных случаев этого ядерного превращения (в том, который называется «разрешенный ферми-переход» и происходит без изменения момента количества движения и четности ядра) электрон, движущийся вдоль оси  $z$  со скоростью  $v$ , испускается со спином вдоль оси  $z$  с амплитудой  $A \sqrt{1 - v/c} \sin \theta/2$  и со спином против оси  $z$  с амплитудой  $A \sqrt{1 + v/c} \cos \theta/2$ . (Здесь  $A$  — некоторая константа,  $\theta$  —



углом, образуемый с осью  $z$  направлением испускания нейтрино. Так уж случилось, что спин антинейтрино всегда ориентирован вдоль направления его движения.)

- а) Чему равна вероятность того, что спин направлен вверх по оси  $z$ ? А вниз?
- б) Рассчитайте вероятность того, что спин направлен вдоль оси  $+x$  (нейтрино вылетает в плоскости  $xz$ )? Вдоль направления оси  $-x$ ?
- в) Вдоль направлений  $\pm y$ ? (Строго говоря, это относится к системе координат, движущейся вместе с электроном.)
- г) Если антинейтрино, как обычно, не регистрируется (т. е. по всем направлениям его испускания производится усреднение), каков будет ответ на вопрос (а)?

### К главе 5. Зависимость амплитуд от времени

5. 1. Частица со спином 1 и магнитным моментом  $\mu$  в магнитном поле, направленном по оси  $z$ , может находиться в состояниях  $+$ ,  $0$  и  $-$ , энергии которых равны  $-\mu B$ ,  $0$  и  $+\mu B$  соответственно. Покажите методами квантовой механики, что в однородном магнитном поле пучок таких частиц расщепится на три, и найдите законы, по которым эти пучки отклоняются, полагая отклонение малым. Ответ должен выражаться через протяженность области, в которой действует поле, начальный импульс частицы и т. д. Затем покажите, что такая частица будет «прецессировать» (в квантовомеханическом смысле), используя при этом коэффициенты, приведенные в § 7 гл. 3 (вып. 8), и рассуждения гл. 5 (вып. 8). Предложите по крайней мере два независимых способа экспериментального определения величины  $\mu$ .

### К главе 6. Гамильтонова матрица

6. 1. Пучок частиц со спином  $1/2$  и магнитным моментом  $\mu$  проходит через фильтр Штерна — Герлаха, пропускающий лишь частицы в состоянии  $|+\rangle$  со спином, направленным вдоль положительного направления оси  $z$ . Затем частицы проводят время  $T$  в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ , параллельном оси  $x$ . Покинув это поле, они попадают во второй фильтр Штерна — Герлаха, который пропускает лишь частицы в состоянии  $|-\rangle$  (спином вниз) по отношению к оси  $z$ . Считайте, что  $\mu$  и  $\mathbf{J}$  параллельны.
  - а) Каково минимальное значение  $B_0$ , при котором все частицы пройдут через второй фильтр?
  - б) Если частицы находятся в магнитном поле только половину времени, чему равна вероятность того, что они пройдут через второй фильтр?

6. 2. Пучок частиц со спином  $1/2$  и магнитным моментом  $\mu$  проходит через прибор Штерна — Герлаха, пропускающий только частицы в состоянии  $|+\rangle$  со спином, направленным вдоль положительного направления оси  $z$ . Затем пучок попадает в магнитное поле, направленное под углом  $45^\circ$  к оси  $z$  в плоскости  $x - z$ . Какова вероятность того, что по истечении времени  $T$  эти частицы будут обнаружены в состояниях с  $J_x = \hbar/2$  или  $J_y = \hbar/2$ ? Векторы  $\mu$  и  $\mathbf{J}$  снова считайте параллельными.
6. 3. В момент времени  $t = 0$  спин частицы направлен вдоль оси  $+z$  (величина спина  $1/2$ ). Частица помещена внутрь прибора, который задает постоянную амплитуду переворота спина частицы в единицу времени, равную  $iA/\hbar$ , т. е.  $H_{12} = H_{21} = -A$ , где  $A$  — положительная константа. Кроме того,  $H_{11} = H_{22}$  и их можно положить равными нулю.
- Чему равна вероятность обнаружить частицу в момент времени  $T$  в состоянии  $+z$ ?
  - Найдите две линейные комбинации амплитуд состояний  $+$  и  $-$ , которые соответствовали бы стационарным состояниям. Чему равны энергии этих стационарных состояний?
  - В любой момент времени  $T$  существует направление, вдоль которого спин направлен вверх с вероятностью единица. Найдите это направление.
  - Можете ли вы придумать физический прибор для реализации рассмотренного эффекта?

### К главе 7. Аммиачный мазер

7. 1. В гл. 7 «Лекций» (вып. 8) рассчитывалась вероятность перевода молекулы аммиака из состояния  $|II\rangle$  в состояние  $|I\rangle$  при помощи облучения ее радиоволнами с очень короткой длиной волны; состояние  $|II\rangle$  имеет меньшую энергию, чем состояние  $|I\rangle$ , поэтому такой переход соответствует поглощению энергии излучения. Попробуйте развить эти идеи и применить их к вычислению вероятности индуцировать излучение молекулы аммиака. Как относится вероятность излучения к вероятности поглощения? Как эта вероятность связана с коэффициентами Эйнштейна  $A_{mn}$  и  $B_{mn}$ , которые были определены в вып. 4, стр. 314? Найдите интенсивность спонтанного излучения молекулы аммиака.
7. 2. Протоны с магнитным моментом  $\mu$ , находящиеся в водном образце, помещены в однородное магнитное поле. Амплитуда поля постоянна, а направление изменяется со вре-

менем (проводится эксперимент по ядерному магнитному резонансу — ЯМР):

$$\begin{aligned} B_x &= B \sin \theta \cos \omega t, \\ B_y &= -B \sin \theta \sin \omega t, \\ B_z &= B \cos \theta. \end{aligned}$$

В начальный момент  $t = 0$  спины всех протонов направлены вдоль магнитного поля (находятся в состоянии  $+1/2$ ). Предположим, что  $\theta$ , полярный угол в сферических координатах, *очень мал*. Каково должно быть значение  $\omega$ , чтобы наблюдался резонанс? Какова вероятность того, что частица имеет спин, направленный *вниз* в момент времени  $t$ , если частота  $\omega$  имеет резонансное значение?

### К главе 8. Другие системы с двумя состояниями

8. 1. Частица со спином  $1/2$  помещена в сильное магнитное поле  $\mathbf{V}_0$ . В направлении, перпендикулярном  $\mathbf{V}_0$ , приложено осциллирующее магнитное поле  $2B_n \cos \omega t$ , причем  $B_n \ll V_0$ . Если спин частицы первоначально был ориентирован антипараллельно вектору  $\mathbf{V}_0$ , какова вероятность того, что в момент времени  $T$  спин будет направлен параллельно этому вектору?

### К главе 9. Еще системы с двумя состояниями

9. 1. Покажите, что спиновые матрицы Паули можно рассматривать как компоненты вектора  $\boldsymbol{\sigma}$ , для которого справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma} &= 2i\boldsymbol{\sigma}, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдите произведение  $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ .

9. 2. Молекула двуокиси углерода имеет линейную структуру (ОСО) и с легкостью присоединяет лишний электрон, превращаясь тем самым в отрицательный ион. Предположим, что этот электрон будет иметь энергию  $E_0$ , если присоединится к атому кислорода, и энергию  $E_c$ , если к атому углерода. Ни одна из этих энергий, однако, не будет соответствовать стационарному состоянию, поскольку всегда существует небольшая вероятность перехода лишнего электрона с кислорода на углерод и обратно. (Мы

будем считать вероятность того, что электрон «перепрыгнет» непосредственно с одного атома кислорода на другой, пренебрежимо малой.)

- а) Получите значения энергии уровней иона  $\text{CO}_2$ , выразив их через  $E_0$ ,  $E_C$  и еще один параметр.
- б) Дайте физическое описание каждого стационарного состояния для случая, когда значения энергий  $E_0$  и  $E_C$  совпадают.

9. 3. В молекуле метана  $\text{CH}_4$  атомы водорода располагаются в вершинах тетраэдра, а единственный атом углерода — в центре тетраэдра. В ионе метана не хватает электрона на одной из этих четырех связей, а вместо него остается «дырка», которая может «перескакивать» с одной связи на другую. Это пример системы с четырьмя состояниями. Опираясь на соображения симметрии, сведите к минимуму число различных матричных элементов гамильтониана и предскажите число различных энергетических уровней, которые должны наблюдаться у электронной оболочки иона метана. Колебательным и вращательным взаимодействием атомов пренебрегите. Выразите расстояние между уровнями через минимально возможное число матричных элементов.

9. 4. Рассмотрим шесть атомов, расположенных по окружности на равных расстояниях друг от друга. Добавим лишний электрон и обозначим базисные состояния символами  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ , ...,  $|6\rangle$ , где  $|1\rangle$  обозначает, что этот добавочный электрон находится в атоме 1, и т. д. Предположим далее, что этот электрон может перескакивать со «своего» атома лишь на один из двух соседних, но не дальше.

Покажите, что  $|I\rangle$  — это стационарное состояние, если амплитуды  $C_i = \langle i|I\rangle$  (где  $|i\rangle$  —  $i$ -е базисное состояние) все равны  $(1/\sqrt{6}) \exp(-iE_I t/\hbar)$ . Найдите  $E_I$ . Сколько еще существует стационарных состояний у такой системы?

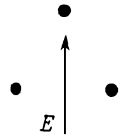
Можно показать, что если  $\psi$  — стационарное состояние, то амплитуды  $C_i = \langle i|\psi\rangle$  связаны между собой следующим образом (при надлежащем выборе постоянной  $\delta$ ):

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 e^{i\delta}, & C_5 &= C_4 e^{i\delta}, \\ C_3 &= C_2 e^{i\delta}, & C_6 &= C_5 e^{i\delta}, \\ C_4 &= C_3 e^{i\delta}, \end{aligned}$$

Чему равны эти «надлежащим образом» выбранные значения  $\delta$ ? Постройте диаграмму уровней рассматриваемой системы и найдите расстояния между уровнями.

9. 5. Молекула состоит из трех одинаковых атомов, расположенных в вершинах равностороннего треугольника. В отрицательном ионе такой молекулы есть дополнительный электрон, способный перескакивать с каждого из трех атомов на любой другой.

а) Пусть матричный элемент такого перехода равен  $-A$ . Рассчитайте расстояние между уровнями молекулярного иона.



- б) Ион помещен в электрическое поле, направление которого совпадает с плоскостью иона, а по отношению к его вершинам поле направлено так, как показано на рисунке. Если напряженность поля такова, что потенциальная энергия электрона, расположенного «в вершине» треугольника, на  $\epsilon A = 0,01 A$  больше, чем в двух других вершинах, как изменятся расстояния между уровнями?

### К главе 10. Сверхтонкое расщепление в водороде

10. 1. Рассчитайте величины расщеплений уровня атома водорода с  $j = 1$ , помещенного в межзвездное пространство, где напряженность магнитного поля составляет  $10^{-5}$  гс, на поверхности Земли (примерно 0,5 гс) и в самом сильном магнитном поле, которое можно получить в лабораторных условиях (порядка 100 000 гс). Ответ выразите через частоту и через длину волны.



*К главе 11. Распространение в кристаллической решетке*

11. 1. Рассмотрим бесконечную цепочку атомов, расположенных друг от друга на равных расстояниях  $b$  (координата атома  $n$  равна  $x = bn$ ), и предположим, что электрон может находиться в каждом из атомов в двух состояниях  $i$  и  $j$  с различными энергиями  $E_i$  и  $E_j$ , т. е. набор базисных состояний можно записать следующим образом:

$$|\text{электрон на атоме } x_n \text{ в состоянии } i\rangle = |x_n, i\rangle,$$

$$|\text{электрон на атоме } x_n \text{ в состоянии } j\rangle = |x_n, j\rangle.$$

Предположим далее, что электрон может перескакивать со своего атома на ближайший соседний с амплитудами:

$$-\frac{A_{ii}}{i\hbar} \text{ для перехода с } |x_n, i\rangle \text{ на } |x_{n+1}, i\rangle \text{ или } |x_{n-1}, i\rangle,$$

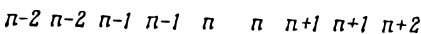
$$-\frac{A_{jj}}{i\hbar} \text{ для перехода с } |x_n, j\rangle \text{ на } |x_{n+1}, j\rangle \text{ или } |x_{n-1}, j\rangle,$$

$$-\frac{A_{ji}}{i\hbar} \text{ для перехода с } |x_n, i\rangle \text{ на } |x_{n+1}, j\rangle \text{ или } |x_{n-1}, j\rangle,$$

$$-\frac{A_{ij}}{i\hbar} \text{ для перехода с } |x_n, j\rangle \text{ на } |x_{n+1}, i\rangle \text{ или } |x_{n-1}, i\rangle.$$

Рассмотрим случай, когда  $A_{ij} = A_{ji} = B$  и  $A_{jj} = A_{ii} = A$ . С помощью процедуры, описанной в гл. 11 «Лекций», найдите допустимые значения энергии такой системы. Опишите зонную структуру в предельных случаях  $|E_i - E_j| \ll 2B$  и  $|E_i - E_j| \gg 2B$ . Сравните свой ответ с решением, найденным в гл. 11.

11. 2. Рассмотрим бесконечную цепочку, состоящую из атомов двух типов  $a$  и  $b$ :



Пусть амплитуда обнаружения электрона на  $n$ -м атоме типа  $a$  будет  $C_n^a$ , а на  $n$ -м атоме типа  $b$  — будет  $C_n^b$ . Предположим, что энергия электрона в атоме  $a$  равна  $E_0 + \Delta E$ , а в атоме  $b$  равна  $E_0 - \Delta E$ ; допустим еще, что матричный элемент гамильтониана для перехода между ближайшими соседями равен  $-A$ . Расстояние между атомами равно  $c$ . Рассчитайте и приближенно начертите график зависимости энергии стационарного состояния от волнового числа  $k$ . (Для каждого заданного значения  $k$  получатся два значения энергии.) Какие ограничения следует наложить на значения  $k$ , чтобы учесть каждое состояние ровно один раз?

11. 3. Рассмотрим рассеяние на примеси (см. пример, приведенный в гл. 11, вып. 9). Пусть атом под номером  $n = 0$  отличается от всех остальных. Положим  $H_{00} = E_0$ ,  $H_{01} = H_{10} = H_{0(-1)} = H_{(-1)0} = -B$ , где  $B \neq A$ . Найдите  $\beta$  и  $\gamma$  и убедитесь в том, что  $|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ .

11. 4. В предыдущей задаче, как и в примере, приведенном в гл. 11 (вып. 9),  $\beta = \gamma - 1$ . Легко проверить также, что в любом более общем случае, являющемся комбинацией этих двух, равенство  $\beta = \gamma - 1$  также справедливо. Следовательно, в общем случае одномерного рассеяния существует «закон сохранения числа частиц»

$$|\beta|^2 + |1 + \beta|^2 = 1.$$

а) Покажите, что для его выполнения необходимо, чтобы

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\beta}{1 + \beta} \right) = 0.$$

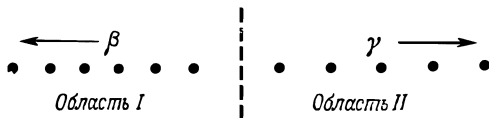
б) Покажите, что  $\beta$  можно записать следующим образом:

$$\beta = ie^{i\eta} \sin \eta,$$

где  $\eta$  — вещественное число. Величина  $\eta$  называется «сдвигом фазы при рассеянии» и содержит информацию как о фазе, так и об амплитуде рассеянной волны. (Это утверждение в трехмерном случае справедливо так же, как и в одномерном.)

11. 5. Рассмотрим одномерный аналог поверхности раздела, где бесконечный кристалл претерпевает изменение своих свойств. Пусть частица падает слева, как в гл. 11. Пусть в области  $I$  значения параметров равны  $E_0$ ,  $-A$ ,  $b$ , а в области  $II$  равны  $E'_0$ ,  $-A'$ ,  $b'$ . Аналог амплитуд  $A$  и  $A'$  для атомов, расположенных по обе стороны линии

раздела, обозначим буквой  $B$ . Предположим, что  $A$ ,  $A'$  и  $B$  — вещественные числа.



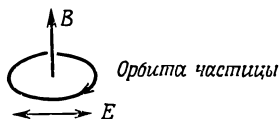
- а) Покажите, что  $\gamma = \frac{B}{A'}(1 + \beta)$  в разрыве между атомами  $n = 0$  и  $n = +1$ .
- б) Выразите  $\beta$  через  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $kb$ ,  $k'b'$ .  
Покажите, что  $|\beta| = 1$  при мнимом ( $k'b'$ ). Каков физический смысл этого результата? При каких значениях ( $E - E'_0$ ) получается полное отражение?
- в) Проверьте закон сохранения числа частиц, показав, что

$$|\beta|^2 + |\gamma|^2 \frac{v'_g/b'}{v_g/b} = 1,$$

где  $v_g$  и  $v'_g$  — групповые скорости в разных областях. Как вы объясните появление множителя при  $|\gamma|^2$ ?

### К главе 12. Полупроводники

12. 1. Ниже приведена обычная схема проведения экспериментов по циклотронному резонансу.



$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$  — статическое магнитное поле, направленное по оси  $z$ . Переменное электрическое поле  $E = E_0 \cos \omega t$  направлено по оси  $x$ .

Частота циклотронного резонанса  $\omega_c$  определяется по максимуму поглощаемой мощности поля  $E$ . Элементарное решение задачи о движении частицы в однородном магнитном поле дает

$$\omega_c = \frac{qB_0}{m^*},$$

где  $m^*$  — эффективная масса. Предположим, что эффективная масса не зависит от направления, по которому движется частица.

Уравнение движения электрона (или дырки) в полупроводнике имеет вид

$$m^* \left( \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} \right) = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})),$$

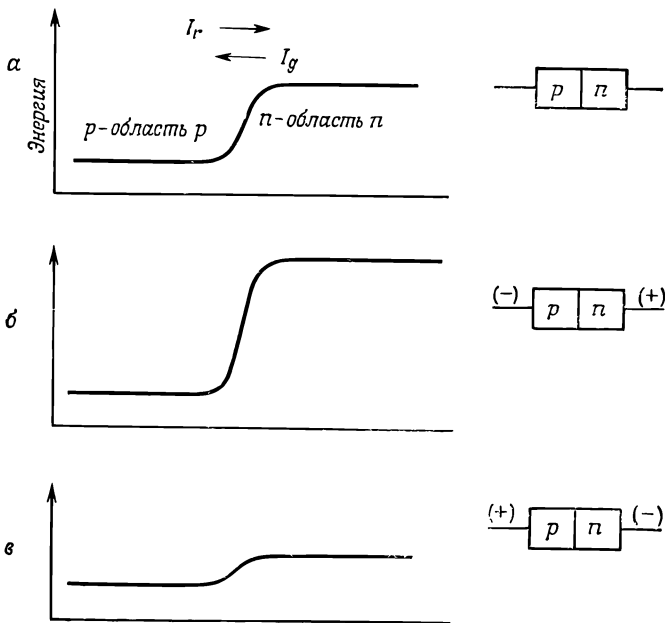
где  $\tau$  — среднее время между столкновениями (см. «Лекции», вып. 7, гл. 32).

Пусть  $v_x = v_0 e^{i\omega t}$ , а  $E_x = E_0 e^{i\omega t}$ . Покажите, что

$$\frac{v_x}{E_x} = \frac{q\tau}{m^*} \left[ \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_c^2 - \omega^2)\tau^2 + 2i\omega\tau} \right].$$

Поглощаемая мощность пропорциональна  $\text{Re}\{v_x/E_x\}$ . Почему? Как получить сразу обе величины  $\tau$  и  $m^*$  из данных по циклотронному резонансу? Обратите внимание на то, что для наблюдения резонанса необходимо, чтобы  $\omega_c\tau > 1$ . Что это означает физически?

12. 2. На рисунке представлена типичная энергетическая диаграмма для дырок в  $p$ — $n$ -переходе (например, в полупроводниковом диоде) в отсутствие внешнего напряжения. В равновесном состоянии в этом случае имеется ток «тепловых дырок»  $I_g$ . Эти дырки диффундируют из области  $n$  в область  $p$ , и «ток рождения» в точности равен «току рекомбинации дырок»  $I_r$ , который течет из



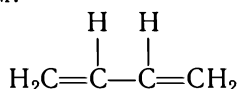
области  $p$  в область  $n$ . Если приложить «обратное напряжение» или «прямое напряжение» к  $p-n$ -переходу, то энергетическая диаграмма изменится (см. фиг. б и в). Рассмотрите эти три случая и покажите, что выражение для результирующего дырочного тока имеет вид

$$I \text{ (дырка)} = I_g (e^{qV/kT} - 1).$$

А какое выражение получится для полного тока? ( $V$  — напряжение, приложенное к  $p-n$ -переходу.)

### К главе 13. Приближение независимых частиц

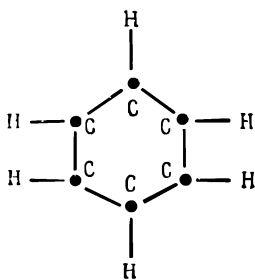
13. 1. Структуру молекулы бутадиена можно изобразить следующим образом:



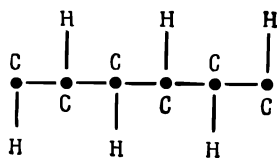
Мысленно удалим четыре электрона, осуществляющие двойные связи, а затем будем добавлять их по одному. Такую задачу можно рассматривать с помощью модели независимых частиц.

В частности, эту систему можно рассматривать как совокупность четырех потенциальных ям с энергиями  $E_0$  и матричными элементами гамильтониана  $-A$ . Чему равна длина волны излучения, испускаемого молекулами бутадиена при переходе с первого возбужденного уровня на основной? Считайте, что  $A = 1 \text{ эв}$ . В однократно ионизованной молекуле бутадиена имеется только три электрона из двойных связей. Что вы можете сказать о распределении этих электронов в молекуле?

13. 2. Нужно оценить энергию, необходимую для разрыва бензольного кольца, и рассчитать разность энергий двух конфигураций, показанных на рисунке. Используйте для этой



а



б

оценки метод молекулярных орбиталей в приближении независимых частиц. Ответ выразите в эВ на молекулу, используя тот факт, что при переходе с первого возбужденного состояния на основное молекулы бензола испускают излучение с длиной волны 2000 Å.

13. 3. К ферромагнитному веществу при очень низких температурах применимы те рассуждения о спиновых волнах, которые приведены в гл. 13 «Лекций» (вып. 9). В частности, для любого состояния  $K$  с энергией  $E_K \approx K^2 b^2 A$  существует определенная вероятность (ее можно найти из термодинамических соображений) обнаружить несколько атомов в состояниях «спином вниз», если при нулевой температуре все атомы находились в состояниях «спином вверх». Покажите, что среднее число атомов со спинами, направленными вниз, пропорционально  $1/(e^{E_K/kT} - 1)$ . Если распространить эти рассуждения на трехмерный случай, то  $E_K \approx Ab^2(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)$  и полное число атомов «спином вниз» в единице объема определяется выражением

$$\frac{\text{Число атомов спином вниз}}{\text{Объем}} = \int \frac{d^3K/(2\pi)^3}{e^{E_K/kT} - 1}.$$

Докажите это. В пределе при  $T \rightarrow 0$  намагниченность выходит на насыщение и принимает значение  $M_{\text{насыщ}}$ . Покажите, что при низких температурах справедлив закон

$$\frac{M}{M_{\text{насыщ}}} = 1 - \text{const } T^{3/2} = 1 - 2 \left( \frac{kT}{4\pi A} \right)^{3/2} \left[ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} \right].$$

Вычислите интеграл, разложив подынтегральное выражение в ряд.

#### К главе 14. Зависимость амплитуд от места

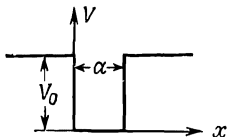
14. 1. Рассмотрим одномерное движение частицы с массой  $m$  в прямоугольной потенциальной яме. Для простоты предположим, что  $V_0 \rightarrow \infty$ .
- а) В стационарном состоянии с наименьшей энергией  $E_0$ :  $\psi_0(x, t) = u_0(x) e^{-iE_0 t/\hbar}$ .

Мы должны считать, что  $u_0(x) = 0$  во всех точках вне ямы (т. е. уже при  $x = -\varepsilon$  или  $x = a + \varepsilon$ ). Почему?

- б) Решите уравнение Шредингера внутри ямы, используя граничное условие, приведенное в пункте (а).

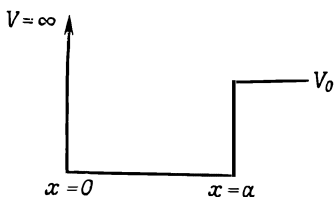
Найдите  $E_0$  и изобразите зависимость  $u_0(x)$ . Нормировать  $u_0(x)$  не нужно.

- в) Найдите разность энергий первого возбужденного и основного состояний.



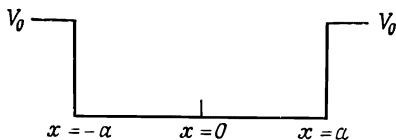
- г) Для самого нижнего состояния изобразите грубо вероятность обнаружить у частицы значение импульса в интервале от  $p$  до  $p + dp$ . Точного интегрирования не требуется, о нормировке тоже не беспокойтесь. Но масштаб по оси импульсов укажите.

14. 2. Рассмотрим движение частицы с массой  $m$  в одномерной потенциальной яме, которая изображена на фиг. 1.



Фиг. 1.

- а) Найдите такое значение  $V_0$ , при котором энергия частицы в основном состоянии отличается на 10% от энергии основного состояния при  $V_0 \rightarrow \infty$ .



Фиг. 2.

- б) Пусть  $V_0$  — значение, найденное в пункте (а). Не пускаясь в длинные вычисления, найдите энергию первого возбужденного состояния в яме, изображенной на фиг. 2 и определяемой следующими условиями:

б) Пусть  $V_0$  — значение, найденное в пункте (а). Не пускаясь в длинные вычисления, найдите энергию первого возбужденного состояния в яме, изображенной на фиг. 2 и определяемой следующими условиями:

$$\begin{aligned} V &= V_0, & x < -a, \\ V &= 0, & -a < x < +a, \\ V &= V_0, & x > a. \end{aligned}$$

14. 3. Рассмотрим следующую одномерную задачу. Частица массы  $m$  находится в прямоугольной потенциальной яме:

$$\begin{aligned} V &= V_0, & |x| > a, \\ V &= 0, & |x| < a. \end{aligned}$$

Ниже приведены два равенства. Покажите, что их можно получить, потребовав, чтобы волновые функции, являющиеся решениями уравнения Шредингера, удовлетворяли необходимым граничным условиям. Речь идет о таких равенствах:

$$\alpha \operatorname{ctg} \alpha a = -\beta$$

или

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha a = +\beta,$$

где

$$\alpha = \left( \frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{1/2}, \quad \beta = + \left[ \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \right]^{1/2}.$$

Если  $V_0 a^2 = 4\hbar^2/2m$ , оцените значения энергии основного и первого возбужденного состояний. Нанесите на график волновые функции этих состояний. Сколько всего существует связанных состояний, если  $V_0 a^2 < (\pi^2 \hbar^2/8m)$ ?

14. 4. В гл. 14 «Лекций» (вып. 9) был найден разброс по импульсам для случая, когда волновая функция имеет гауссову форму. В общем случае, однако, пространственная протяженность волнового пакета не останется постоянной, а будет увеличиваться:

$$\varphi(x, t) = K e^{-[a(t)x^2 + c(t)]}.$$

Используя уравнение Шредингера, покажите, что для свободной частицы

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_0} + \frac{2i\hbar}{m} t.$$

Чему равно  $c(t)$ ? Если волновая функция описывает электрон, первоначально находившийся внутри области шириной 1 Å, то какова будет ширина этой «области локализации» через 1 сек? Преобразуем волновую функцию в импульсное представление, т. е. найдем вероятность обнаружения частицы с заданным значением импульса  $p$ . Как изменяется со временем ширина распределения вероятностей для импульсов? Покажите, что найденный таким образом «разброс по импульсам» согласуется с «разбросом по скоростям», который можно непосредственно получить из временной зависимости координатной волновой функции.

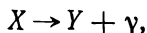
### К главе 16. Момент количества движения

16. 1. Некоторое возбужденное состояние атома имеет спин 1 и может «разрядиться», испустив фотон и перейдя в состояние со спином, равным нулю. Рассмотрим



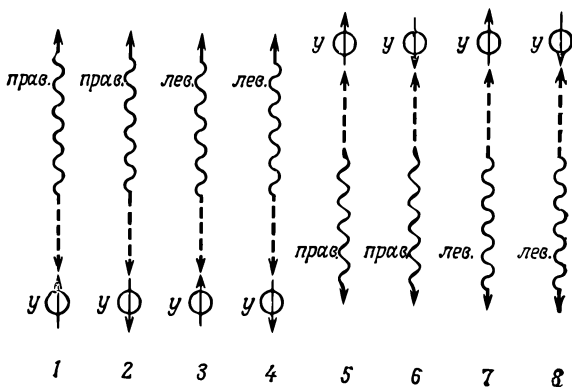
возбужденный атом, у которого проекция момента на ось  $z$  равна нулю. Пусть  $A(\theta)$  — амплитуда испускания фотона с правой круговой поляризацией в малый интервал телесных углов  $\Delta\Omega$  в направлении, образующем с осью  $z$  угол  $\theta$ . Как  $A(\theta)$  зависит от  $\theta$ ?

16. 2. Частица  $X$ , имеющая спин  $1/2$ , распадается по схеме

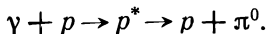


где частица  $Y$  имеет спин  $1/2$  и положительную четность. Если спин частицы  $X$  направлен вдоль оси  $z$ , то продукты распада, движущиеся вдоль оси  $z$ , могут получаться в восьми состояниях, представленных на рисунке. Волнистая и штрихованная линии со стрелками указывают соответственно направление движения фотона и частицы  $Y$ , а стрелка у  $Y$  — направление спина этой частицы.

- Какие амплитуды конечных состояний обязательно равны нулю?
- Рассчитайте угловое распределение частиц  $Y$ , поляризованных вдоль направления своего движения, если распадающиеся частицы  $X$  поляризованы вдоль оси  $z$ .
- Рассчитайте угловое распределение всех частиц  $Y$  независимо от их поляризации.
- Тщательные эксперименты не обнаружили в этом распаде каких-либо отклонений от изотропного углового распределения. Какой физической причиной это можно объяснить?



16. 3. На синхротроне исследуется реакция



Значком  $p^*$  обозначено возбужденное состояние протона, которое распадается на протон и  $\pi^0$ -мезон. Известно, что в определенном интервале энергий фотона состояние  $p^*$  имеет полный момент  $3/2$ .

Предположим, что пучок фотонов, обладающих правой круговой поляризацией и энергией, лежащей в упомянутом интервале, падает вдоль оси  $z$  на мишень, состоящую из неполяризованных протонов. Угловое распределение этой реакции можно анализировать, рассуждая следующим образом. Фотон и протон образуют  $p^*$  в состоянии  $|j = 3/2, m = +1/2\rangle$  с амплитудой  $a$  и в состоянии  $|3/2, +3/2\rangle$  — с амплитудой  $b$ . Возбужденное состояние распадается на  $\pi^0$ -мезон с нулевым спином и протон, движущиеся в противоположных направлениях. Пусть  $f$  — амплитуда вылета протона вдоль оси  $z$  со спином, направленным вверх, а  $g$  — со спином, направленным вниз. Объясните, почему для состояния  $p^*$  разрешенными являются только значения  $m = +3/2$  и  $m = +1/2$ , а для конечного состояния — только значения  $m' = +1/2$  и  $m' = -1/2$  ( $m'$  обозначает проекцию на направление испускания). Выразите угловое распределение  $\pi^0$ -мезонов через  $a$ ,  $b$  и  $\theta$ . Полагайте  $f = g$ .

16. 4. Рассмотрим упругое рассеяние  $\pi^+$ -мезонов на неполяризованной протонной мишени. Мезоны имеют спин 0; четность сохраняется. Предполагается, что в рассеянии доминирует процесс, при котором протон переходит в возбужденное состояние с  $j = 3/2$ , поглощая мезон. (Момент  $j = 3/2$  получается за счет сложения спина протона и орбитального момента.) Затем мезон испускается снова, а протон переходит в основное состояние. Покажите, что из такого предположения следует угловое распределение рассеянных мезонов, пропорциональное  $(1 + 3 \cos^2 \theta)$ .

16. 5. Основное состояние атома имеет спин, равный нулю, и положительную четность. Спин первого возбужденного состояния равен единице, а четность неизвестна. Пусть некоторое количество атомов находится в первом возбужденном состоянии, и все они имеют проекцию момента  $m = 1$  на ось  $z$ . Рассмотрим фотоны, которые испускаются этими атомами при переходе в основное состояние.

- а) Можно ли определить четность возбужденного состояния, если измерять угловое распределение испускаемых фотонов, не обращая внимания на их поляризацию?
- б) Покажите, что эту неизвестную четность можно определить, измеряя угловые распределения фотонов, поляризованных вдоль направлений  $x'$  и  $y'$ . (Ось  $z'$  выбирается в направлении движения фотона и располагается в плоскости  $x - z$ .)

## **РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ**



## Вып. 1

СОВРЕМЕННАЯ НАУКА О ПРИРОДЕ ●  
ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

## К главе 1. Атомы в движении

- 1.1. а) Известно, что грамм-молекула любого вещества содержит  $A$  молекул ( $A = 6,02 \cdot 10^{23}$  — число Авогадро) и при нормальных условиях занимает в газообразном состоянии объем  $v_0 = 22,4$  л =  $= 22\,400$  см<sup>3</sup>. Следовательно, в 1 см<sup>3</sup> газообразного воздуха содержится  $n_v$  «молекул»:

$$n_v = \frac{A}{v_0} = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3},$$

Плотность газообразного и жидкого воздуха равна соответственно

$$\rho_v = m n_v \text{ и } \rho_{ж} = m n_{ж},$$

где  $m$  — масса «молекулы воздуха», а  $n_{ж}$  — число «молекул» в 1 см<sup>3</sup> жидкого воздуха, поэтому

$$\frac{\rho_{ж}}{\rho_v} = \frac{n_{ж}}{n_v} \text{ и } n_{ж} = \frac{\rho_{ж}}{\rho_v} n_v = 2,7 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}.$$

- б) Зная плотность воздуха, вычисляем массу «молекулы» воздуха

$$m = \frac{\rho_v}{n_v} = 3,7 \cdot 10^{-23} \text{ г.}$$

- в) Представим себе молекулу воздуха в виде твердого шарика радиусом  $r$ . Ясно, что молекулы столкнутся, если их центры подойдут на расстояние, меньшее или равное  $2r$ . За единицу времени молекула пролетает путь, равный ее средней скорости  $v$ . При этом она сталкивается со всеми молекулами, центры которых окажутся в «захватываемом» ею объеме  $\pi(2r)^2 v$ , т.е. испытывает  $4\pi r^2 n_0 v$  столкновений ( $n_0$  — число молекул в 1 см<sup>3</sup> воздуха при нормальных условиях).

Считая для оценки, что между двумя последовательными столкновениями молекула проходит равные расстояния  $\lambda$  (это и есть средняя длина свободного пробега) и что все молекулы одинаковы, находим

$$\lambda = \frac{v}{(2r)^2 \pi n_0 v} = \frac{1}{4\pi r^2 n_0}.$$

Полагая  $r \approx 10^{-8}$  см, а  $n_0 = n_v$ , получаем  $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$  см. От давления зависит число частиц в 1 см<sup>3</sup>, которое при сравнительно малых давлениях просто пропорционально давлению, так что можно написать  $n = c p$  ( $c$  — коэффициент пропорциональности) и  $\lambda = 1/(4\pi r^2 c p)$ , откуда  $\lambda p = \text{const}$ . Поэтому для длины свободного

пробега молекулы при разных давлениях, но при одной и той же температуре газа имеем

$$\lambda_0 p_0 = \lambda_1 p_1$$

Таким образом, давление, при котором длина свободного пробега составляет 1 м, равно

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} p_0 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ атм,}$$

если положить, что  $\lambda_0 = \lambda$ , а  $p_0 = 1 \text{ атм}$ .

- 1.2.** Предположим, что объем древней капли был равен примерно 1 см<sup>3</sup>, т. е. что капля содержала около  $N \approx 3 \cdot 10^{22}$  молекул. Естественно предположить, что за огромный промежуток времени, прошедший от палеозойской эры до наших дней, молекулы капли равномерно распределились по всей имеющейся на Земле воде. В этом случае студент-геолог проглотил  $n = (v/V)N$  молекул нашей капли, где  $v$  — объем выпитой им воды, а  $V$  — объем всей воды на Земле. Оценим  $V$ .

Будем считать, что вода покрывает равномерно весь земной шар слоем толщиной  $d \approx 3 \text{ км}$ . В этом случае

$$V = 4\pi R_3^2 d \approx 1,5 \cdot 10^{24} \text{ см}^3,$$

где  $R_3$  — радиус Земли. Эта оценка очень хорошо совпадает с расчетами ученых количества воды на земном шаре, а именно с величиной  $1,45 \cdot 10^{24} \text{ см}^3$ . Положив  $v = 150 \text{ см}^3$  (три четверти стакана), получим  $n = 3$ .

- 1.3.** Рассмотрим сначала, как происходит испарение, если стакан накрыть крышкой и откачать из-под нее весь воздух. Пока пара под крышкой мало, жидкость будет интенсивно испаряться. Но одновременно с процессом испарения, т. е. с тем, что из воды все время вылетают молекулы воды, какое-то число молекул пара возвращается в воду, т. е. конденсируется. При этом по мере увеличения плотности пара таких молекул становится все больше и больше. Через некоторое время в стакане устанавливается динамическое равновесие: число вылетающих из воды молекул становится равным числу молекул, возвращающихся обратно. Если убрать крышку и откачивать пары, вода будет только испаряться, причем число вылетающих молекул останется таким же, как и тогда, когда стакан был накрыт: ведь процесс испарения зависит только от движения молекул в воде, число же возвращающихся в воду молекул зависит от количества водяных паров в воздухе над стаканом.

Оценим количество вылетающих из воды молекул в единицу времени при равновесии. Проще вычислять не это число, а равное ему число конденсирующихся молекул пара. Пусть в единице объема воздуха над крышкой содержится  $n$  молекул водяного пара. Число  $n$  зависит только от температуры воздуха, оно измерено экспериментально; существуют таблицы зависимости  $n$  от температуры. За промежуток времени  $t$  поверхности воды достигнут только те молекулы пара (средняя скорость молекул  $v$ ), которые находились в начальный момент времени не дальше, чем  $v_b t$  ( $v_b$  — вертикальная скорость молекулы) и двигались к жидкости, а не в обратную сторону. Другими словами, поверхности воды достигает половина тех молекул, которые находятся в объеме  $S v_b t$  над стаканом ( $S$  — площадь поперечного сечения стакана).

Какое же значение выбрать для  $v_b$ ? Ведь молекулы могут двигаться к жидкости под произвольными углами при одном и том же

абсолютном значении скорости. Ясно, что это должна быть усредненная по всем направлениям вертикальная скорость молекулы. Делая небольшую ошибку по сравнению с точным расчетом, мы примем ее равной половине самой скорости молекулы. Следовательно, в единицу времени конденсируется примерно  $(1/4)nSv$  молекул пара.

Как уже отмечалось, число испаряющихся молекул при снятой крышке будет таким же, как и при закрытой крышке. Но число конденсирующихся молекул зависит от того, сколько молекул пара содержится в единице объема воздуха над поверхностью жидкости. Будем считать, что влажность воздуха близка к нормальной.

Влажностью (относительной) называют отношение числа содержащихся в воздухе молекул водяного пара в данный момент времени к максимально возможному (т. е. числу молекул пара в единице объема при равновесии). Нормальной считается влажность около  $60 \div 80\%$ . Мы положим, что влажность воздуха  $50\%$ , т. е. в единице объема воздуха содержится  $n/2$  молекул водяного пара. В этом случае, как следует из предыдущего рассмотрения, в воду из пара должны конденсироваться  $(1/8)nSv$  молекул. Однако так было бы лишь при условии, что над водой находятся только водяные пары, а не смесь воздуха с паром. При наличии воздуха молекулы из воды отлетают без столкновений только на длину свободного пробега  $\lambda$  (это расстояние  $\sim 3 \cdot 10^{-5}$  см; см. задачу 1.1), дальше они движутся от поверхности жидкости с очень малой скоростью (по сравнению с тепловой). Поэтому число конденсирующихся молекул определяется не плотностью пара на большом расстоянии от воды, а плотностью пара на расстоянии порядка длины свободного пробега. Считая, что плотность пара в перпендикулярном направлении воды направлением меняется линейно, а на расстоянии примерно  $1$  см она равна уже  $n/2$ , находим, что плотность водяных паров на расстоянии  $\lambda$  приблизительно равна

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{2} (1 - \lambda) = n \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right).$$

Таким образом, с поверхности воды в единицу времени испаряется около  $(1/8)n\lambda Sv$  молекул воды. После этого рассмотрения мы можем ответить на поставленные в задаче вопросы.

- а) В стакане воды содержится  $n_{ж}Sh$  молекул воды, где  $n_{ж} = 3 \cdot 10^{22}$  см<sup>-3</sup> — число молекул воды в 1 см<sup>3</sup> (см. задачу 1.1), а  $h$  — высота стакана, которую примем равной  $10$  см. Вся вода испарится за время

$$\frac{8n_{ж}h}{\lambda nv} \approx 1,2 \cdot 10^6 \text{ сек} \approx 14 \text{ суток}$$

(при  $t = 25^\circ\text{C}$ ,  $v = 600$  м/сек,  $n = 10^{18}$  см<sup>-3</sup>).

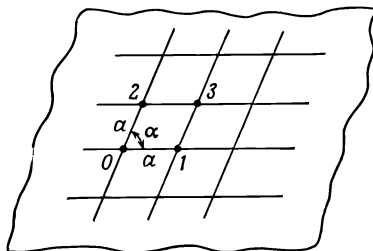
- б) С площадки в  $1$  см<sup>2</sup> каждую секунду испаряется  $n\lambda v/8 \approx 10^{18}$  молекул.  
 в) В среднем за год должно испариться количество воды, равное среднегодовому количеству осадков. Конечно, полученное нами число в п. (а) превышает количество осадков, так как для расчетов мы выбрали такие условия атмосферы, когда преобладает процесс испарения.

**1.4.** Хотя атомы и находятся в непрерывном движении, это еще не означает, что они в среднем изменяют свое относительное расположение. В частности, атом, колеблющийся около своего положения равновесия в кристаллической решетке, в среднем покоится в нем, так что



кристаллические тела не меняют своей формы до тех пор, пока амплитуда колебания составляющих их частиц мала по сравнению с расстояниями между ближайшими атомами. При достаточно сильном нагревании эта амплитуда становится столь большой, что атомы уже больше не «привязаны» к определенному месту, — наступает процесс плавления, и твердое тело меняют форму.

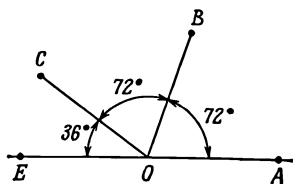
- 1.5. Рассмотрим часть грани кристалла. Расположение атомов в кристалле таково, что каждый атом окружен определенным образом расположенными другими атомами. Это означает, что атомы одного сорта расположены в так называемых эквивалентных точках, т.е. точках,



Фиг. 1.

окружение которых совершенно одинаково. Минимальное расстояние между эквивалентными точками  $a$  называется *периодом решетки*. На фиг. 1 эквивалентные точки — это точки  $0, 1, 2, 3$ . Ближайшие эквивалентные точки образуют некоторую плоскую фигуру — «ячейку» (на рисунке это ромб с вершинами в точках  $0, 1, 2, 3$ ), а если рассматривать весь кристалл, а не его грани, то — объемную фигуру. При формировании кристалла нарастает все больше и больше ячеек, поэтому форма грани кристалла зависит от геометрической формы ячейки. Разумеется, скорость роста кристалла в разных направлениях различна, так что внешние грани кристалла не являются просто повторением формы ячейки. Но совершенно ясно, что углы между сторонами грани кристалла равны углам между сторонами ячейки, поэтому для ответа на поставленный в задаче вопрос нам достаточно указать, что не может существовать ячеек в форме правильного пятиугольника.

Приведем доказательство от противного. Пусть ячейка кристалла — правильный пятиугольник, а  $O$  и  $A$  — эквивалентные точки



Фиг. 2.

(фиг. 2). Очевидно, эквивалентной должна быть и точка  $E$  (если эквивалентная точка находится на расстоянии  $a$  от  $O$  при перемещении вправо, то должна быть эквивалентная точка и при перемещении влево на то же расстояние). Другие эквивалентные точки можно построить, последовательно поворачивая отрезок  $OA$  на угол  $2\pi/5 = 72^\circ$ . После первого поворота получим точку  $B$ , а после второго — точку  $C$ . Но расстояние  $EC < a$ , что противоречит исходному предположению (расстояние между эквивалентными точками не меньше, чем  $a$ ). Таким образом, грань кристалла не может быть правильным пятиугольником. Можно строго показать, что аналогичное построение непротиворечиво только в том случае, если ячейки кристалла имеют форму параллелограмма или правильного треугольника и шестиугольника.

- 1.6. Бесперывно ударяясь о стенки сосуда, молекулы газа действуют на них с некоторой силой. Действительно, если сделать одну из стенок

сосуда подвижной, то, чтобы удержать ее под градом ударов молекул в неизменном положении, нужно приложить к ней определенную силу. Величина этой силы, отнесенная к единице площади стенки, и есть давление газа. Понятно, что давление будет тем больше, чем больше молекул ударяется о единичную площадку поверхности стенки и чем энергичнее каждый удар. Если плотность газа не особенно велика, то число ударяющихся о стенку молекул просто пропорционально плотности. Сила же удара молекулы о поршень зависит от скорости молекулы: чем быстрее движется молекула, тем сильнее она наносит удар. С другой стороны, понятно, что при данной плотности газа к поршню подлетает и ударяется о него тем больше молекул, чем больше их скорость. Таким образом, мы видим, что от скорости молекул зависит и число ударов о поршень, и сила удара. Поэтому зависимость давления газа от средней скорости молекул — нелинейная. Точный расчет показывает, что давление газа пропорционально среднему квадрату скорости, а не средней скорости.

- 1.7. Теплота, действительно, есть не что иное, как движение молекул, но движение хаотическое, беспорядочное. Когда тело в целом покоем, его молекулы тем не менее могут обладать большой энергией хаотического движения. При этом мы говорим, что тело сильно нагрето (обладает высокой температурой). Если продолжать нагревать тело, т. е. дальше увеличивать его температуру, то средняя скорость беспорядочного хаотического движения молекул будет возрастать.

Молекулы холодного, но быстро движущегося бейсбольного мячика наряду с хаотической скоростью обладают еще и скоростью направленного движения, одинаковой для всех молекул, которая характеризует энергию движения мячика как целого, а не его внутреннее состояние. Скорость же беспорядочного движения молекул холодного мячика меньше, чем нагретого.

- 1.8. Как бы ни были отполированы трущиеся поверхности машины, они никогда не будут совершенно гладкими. В действительности эти поверхности можно представить себе покрытыми (хотя и очень маленькими) бугорками, ступеньками и т. п. При движении таких поверхностей относительно друг друга происходит множество микроскопических ударов, неровности сминают друг друга. В результате таких беспорядочных ударов в конце концов увеличивается скорость хаотического движения молекул (в § 2 «Лекций», вып. 1, показано, что при ударе молекулы о движущуюся ей навстречу поверхность скорость молекулы увеличивается). А это означает, что трущиеся тела нагреваются.
- 1.9. Кусок резины состоит из длинных перекрывающихся цепочек атомов, которые беспорядочно ориентированы в пространстве. При растягивании резины, т. е. когда к ней приложена некоторая внешняя сила, часть этих цепочек вытягивается вдоль внешней силы. При этом «ориентирующиеся» цепочки атомов сталкиваются с другими молекулами резины и заставляют их двигаться быстрее, подобно тому как вдвигаемый в сосуд с газом поршень заставляет двигаться быстрее молекулы газа. Поэтому температура куска резины при его растяжении увеличивается, т. е. резина нагревается.
- 1.10. Резина с подвешенным на ней грузом растянута. Это значит, что некоторые молекулярные цепочки атомов расположены вдоль направления растяжения. В то же время все молекулы (цепочки) участвуют в беспорядочном тепловом движении и непрерывно сталкиваются друг с другом. В результате таких столкновений первоначально

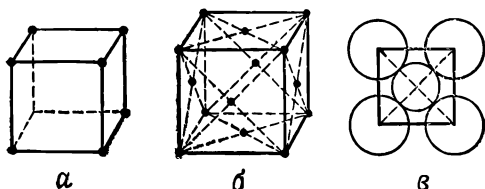
ориентированные цепочки атомов стремятся снова запутаться с остальными молекулами. Но этому мешает приложенная внешняя сила. При нагревании резины скорость движения молекул увеличивается, усиливается бомбардировка ориентированных цепей, что приводит к более сильному их запутыванию. Последнее означает, что длина натянутой резины при нагревании уменьшается.

- 1.11. Чтобы поместить в ящик максимальное число шариков их нужно упаковывать аккуратно, т. е. в определенном порядке. Пусть этот порядок таков, что центры восьми ближайших шариков располагаются в вершинах куба. Сторона куба равна, очевидно, диаметру шарика  $d$ . На каждый куб приходится по одному шарiku, поскольку внутрь куба попадает  $1/8$  часть каждого из восьми шариков, центры которых находятся в вершинах (фиг. а). Так как объем шара равен  $(4\pi/3)(d^3/8) \approx 0,52 d^3$ , то объем, занимаемый шариками, составляет 52% общего объема. Более плотной является упаковка, при которой «основная ячейка» упаковки представляет собой куб с шариками, занимающими не только вершины, но и центр куба. В этом случае соприкасаются шарики, находящиеся в вершинах и центре куба, поэтому удвоенный диаметр шарика равен пространственной диагонали куба, т. е. сторона куба равна  $2d/\sqrt{3}$ . Это больше, чем в предыдущем случае, однако теперь на один куб приходится уже два шарика, и, как легко подсчитать, шарики занимают 68% общего объема. Однако существует способ еще более плотной упаковки: кроме вершин шарики следует поместить в центры граней куба (фиг. б). При этом шарик, находящийся в центре грани, соприкасается с шариками, занимающими вершины (фиг. в). Стало быть, длина ребра куба равна  $d\sqrt{2}$ . На один куб в этом случае приходится 4 шарика, поскольку вклад от шариков, расположенных в центрах граней, составляет три шарика (каждый шарик, расположенный в центре грани, находится наполовину внутри куба, а граней у куба шесть). Следовательно, теперь шарики занимают 73% общего объема. Мы разобрали случаи упаковки, когда основная ячейка является кубической. Существует еще способ плотной упаковки с основной ячейкой, представляющей собой правильную гексагональную призму, причем плотность шариков в такой упаковке та же самая, что и в последнем случае «гранецентрированной» основной ячейки (подробнее см. «Лекции», вып. 7, стр. 10—12).

Определим, сколько шариков можно поместить в сосуде. Число основных ячеек в объеме  $V$  равно  $V/(d\sqrt{2})^3$ , а максимальное число шариков  $4V/(d\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} V/d^3$ . Коэффициент упаковки, т. е. отношение занимаемого шариками объема ко всему объему сосуда, равен

$$\frac{N}{V} \frac{\pi d^3}{6} = \frac{\sqrt{2} \pi}{6} \approx 0,74$$

Он примерно на 20% превосходит коэффициент упаковки при случайном заполнении сосуда шариками.



## К главе 4. Сохранение энергии

- 4.1. Треугольник  $ACB$  — равнобедренный, поэтому из соображений симметрии натяжения участков  $AC$  и  $CB$  проволоки одинаковы:

$$T_1 = T_2 = T.$$

Для наглядности представим себе, что груз весом  $W$  уравновешен при помощи другого грузика, который подвешен на маленьком блоке, как показано на рисунке. Вопрос о натяжении проволоки сводится, таким образом, к вопросу о величине веса грузика, поскольку натяжение проволоки равно весу грузика. Обозначим поэтому вес грузика также через  $T$ .

Предположим теперь, что грузик  $T$  поднялся на небольшую высоту  $h$ . При этом груз  $W$  опустится на расстояние  $H$ , а проволока  $BC$  повернется на малый угол  $\Delta\alpha$ . Размеры проволок  $AC$  и  $BC$  и расстояние  $AB$  между точками крепления таковы, что угол  $ACB$  прямой. Следовательно,  $H = CC' \sin 45^\circ = h/\sqrt{2}$  (угол  $\Delta\alpha$  очень мал, поэтому  $CC'$  можно считать продолжением  $AC$ ).

Согласно закону сохранения энергии, увеличение потенциальной энергии грузика  $T$  равно уменьшению потенциальной энергии груза  $W$ , т. е.  $Th = WH$ , откуда

$$T = \frac{H}{h} W = \frac{W}{\sqrt{2}} \approx 35,5 \text{ кг}.$$

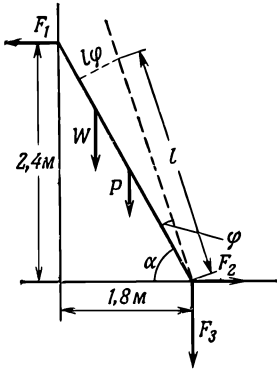
Разумеется, задачу можно было решить без введения дополнительного грузика весом  $T$ , что мы сделали просто для наглядности. В таком случае рассуждения должны быть следующими. Рассмотрим виртуальное перемещение системы, состоящее, например, в повороте проволоки  $BC$  на небольшой угол  $\Delta\alpha$ . Участок  $AC$  при этом растянется на длину  $CC'$ , а груз  $W$  опустится на высоту  $H = CC' \cdot \sin 45^\circ$ . Работа сил натяжения складывается из работы силы натяжения на участке  $AC$ , равной  $T \cdot CC'$  ( $CC'$  — продолжение линии  $AC!$ ), и работы силы натяжения на участке  $BC$ . Последняя при данном выборе виртуального перемещения равна нулю, так как малое перемещение  $CC'$  перпендикулярно  $BC$  и, следовательно, перпендикулярно рассматриваемой силе натяжения. Поэтому из принципа виртуальных работ

$$T \cdot CC' = WH,$$

откуда снова  $T = W \sin 45^\circ = W/\sqrt{2}$ .

- 4.2. Введем следующие обозначения:  $F_1$  — сила давления роликов на вертикальную стену;  $F_2$  и  $F_3$  — горизонтальная и вертикальная составляющие силы давления лестницы на землю. Очевидно, что  $F_1$  направлена влево,  $F_2$  — направо, а  $F_3$  — вниз. Силы, приложенные к лестнице, равны по величине  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  и направлены в противоположных направлениях.

Рассмотрим следующие виртуальные перемещения лестницы. Пусть она сместится вниз параллельно самой себе на расстояние  $y$ . Неважно, что в действительности лестница так двигаться не может, ведь это перемещение воображаемое. В результате указанного перемещения потенциальная энергия лестницы и груза уменьшится на  $(W + P)y$ , а сила  $F_3$  совершит работу  $F_3 y$ . Из закона сохранения энергии следует равенство этих двух величин, так что  $(W + P)y = F_3 y$  и, следовательно,  $F_3 = W + P = 36 \text{ кГ}$  ( $P$  — вес лестницы).



Выберем теперь другое виртуальное перемещение, состоящее в переносе лестницы параллельно себе в горизонтальном направлении, скажем, вправо, на расстояние  $x$ . Аналогично предыдущему случаю можно написать  $F_1 x = F_2 x$ , откуда  $F_1 = F_2$ . Чтобы найти численные значения этих сил, необходимо иметь еще одно уравнение. Его можно получить, записав закон сохранения энергии при виртуальном повороте лестницы на небольшой угол вокруг оси, проходящей через нижний конец лестницы. Пусть  $\alpha$  — угол, который образует лестница с

Землей, а  $\varphi$  — тот малый угол, на который повернется лестница (по часовой стрелке). Точка, расположенная на расстоянии  $l$  от оси вращения, опишет дугу длиной  $l\varphi$ . Так как угол  $\varphi$  мал, можно считать, что стягивающая дугу хорда имеет ту же длину и образует угол  $\alpha$ , но с вертикальной стенкой (т. е. хорда перпендикулярна лестнице). Поэтому рассматриваемая точка при виртуальном повороте сместится вверх на величину  $l\varphi \cos \alpha$  и вправо — на  $l\varphi \sin \alpha$ .

Используя только что полученный результат, убеждаемся в том, что при повороте на малый угол  $\varphi$  потенциальная энергия лестницы с грузом увеличится на  $(1/2)PL\varphi \cos \alpha + (3/4)WL\varphi \cos \alpha$ , а сила  $F_1$  совершит работу  $F_1 l\varphi \sin \alpha$  ( $L$  — длина лестницы). Из закона сохранения энергии имеем

$$F_1 L \varphi \sin \alpha = \frac{1}{2} PL \varphi \cos \alpha + \frac{3}{4} WL \varphi \cos \alpha,$$

откуда

$$F_1 = \frac{(P/2 + 3W/4) L \cos \alpha}{L \sin \alpha}.$$

По условию задачи  $L \cos \alpha = 1,8 \text{ м}$ ,  $L \sin \alpha = 2,4 \text{ м}$ , так что  $F_1 = 18 \text{ кГ}$ .

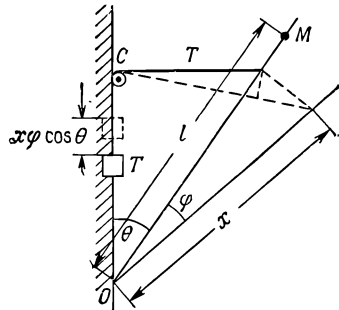
- 4.3. Уравновесим стержень подъемного устройства грузом  $T$ , подвешенным на малом блоке в точке  $C$ . При виртуальном повороте стержня по часовой стрелке на малый угол  $\varphi$  вокруг нижнего конца точка  $M$  стержня, расположенная на расстоянии  $l$  от оси вращения, опустится вниз на расстояние  $l\varphi \sin \theta$  и сместится вправо на  $l\varphi \cos \theta$  (см. предыдущую задачу). Поэтому при таком перемещении потенциальная энергия стержня и груза  $W$  уменьшится на  $(W + w/2)L\varphi \sin \theta$ , а

груз  $T$ , как видно из рисунка, поднимется на высоту  $x\varphi \cos \theta$ , т. е. его потенциальная энергия увеличится на  $Tx\varphi \cos \theta$ . Из закона сохранения энергии имеем

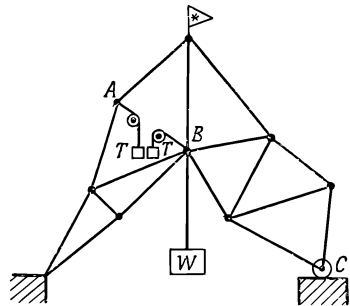
$$\left( W + \frac{w}{2} \right) L\varphi \sin \theta = Tx\varphi \cos \theta,$$

откуда

$$T = \frac{L}{x} \left( W + \frac{w}{2} \right) \operatorname{tg} \theta.$$



- 4.4. а) Представим себе, что стержень  $AB$  фермы удален. Тогда под действием груза  $W$  шарнир  $B$  пойдет вниз направо, а шарнир  $A$  — вверх налево. Ясно поэтому, что стержень  $AB$  будет растянут. Однако и удалив стержень, мы тоже можем удержать ферму в равновесии, подвесив два равных груза на неподвижных блоках так, как это показано на рисунке. Если длина  $AB$  увеличивается, грузы поднимаются и их потенциальная энергия возрастает. Чтобы потенциальная энергия всей системы оставалась неизменной, груз  $W$  должен опуститься. Следовательно, при нагревании стержня  $AB$  груз  $W$  опускается.



- б) Вес рассматриваемых нами грузиков равен силе растяжения стержня  $T$  (ферма находится в равновесии). Если увеличить длину  $AB$  на величину  $x$ , грузы поднимутся вверх, причем сумма изменений высот грузов также равна  $x$ , а груз  $W$  опустится на  $y$ . Поэтому  $Tx = Wy$ , т. е.  $T = (y/x)W$ .

- 4.5. Пусть груз  $w$  опустится вниз на расстояние  $y$ . Потенциальная энергия груза при этом уменьшится на  $wy$ . Посмотрим, как изменится потенциальная энергия тележки весом  $W$ . Прежде всего заметим, что, когда груз  $w$  опускается на расстояние  $y$ , ось подвижного блока, на котором он висит, опускается на вдвое меньшее расстояние. Так как тележка связана с грузом при помощи двух подвижных блоков, она переместится вверх по наклонной плоскости на расстояние, в 4 раза меньшее, чем то, на которое опустится груз  $w$ , т. е. на величину  $y/4$ . По вертикали тележка поднимется на высоту  $(y/4) \sin \theta$ ; следовательно, ее потенциальная энергия увеличится на  $(1/4)Wy \sin \theta$ . Из закона сохранения энергии имеем  $(1/4)Wy \sin \theta = wy$ , откуда  $W = 4w/\sin \theta$ .

- 4.6. Повернем катушку на угол  $\varphi$  против часовой стрелки вокруг ее оси. При этом центр тяжести катушки поднимется на  $x = r\varphi$ , а нитка, на которой подвешен груз  $W$ , смотается с катушки на длину  $y = R\varphi$ ,

т. е. груз  $W$  опустится на расстояние  $y - x$ . Из закона сохранения энергии имеем  $W(y - x) = \omega x$ , откуда

$$W = \frac{x}{y - x} \omega = \frac{r}{R - r} \omega.$$

- 4.7. По условию задачи  $F_1/F_2 = R$ , где  $F_1$  и  $F_2$  — силы, которые необходимо приложить к цепи для перемещения груза  $W$  вверх и вниз соответственно. Используем принцип виртуальной работы для этих двух случаев.

Предположим сначала, что, выбирая верхнюю часть ведущей цепи ворота с силой  $F_1$ , мы повернули верхний блок на полный оборот против часовой стрелки. Очевидно, при этом мы протянули  $n$  звеньев цепи, или же  $n/N$  м, поскольку длина одного звена цепи равна  $1/N$  м. Посмотрим теперь, что происходит с грузом  $W$ . Правая часть цепи, на которой висит подвижный блок, поднялась на  $n$  звеньев, зато левая опустилась на  $n - 1$  звено, так что груз  $W$  поднялся на высоту  $[n - (n - 1)]/2N$  м. Если обозначить через  $X$  работу сил трения при одном обороте верхнего блока, то из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{n}{N} F_1 = X + \frac{W}{2N}.$$

Чтобы повернуть верхний блок на один оборот по часовой стрелке, необходимо протянуть  $n - 1$  звено [или  $(n - 1)/N$  м] нижней части ведущей цепи ворота с силой  $F_2$ . При этом груз  $W$  опустится на расстояние  $[n - (n - 1)]/2N$  м. Так как по предположению сила трения не зависит от направления движения груза и поскольку каждый раз мы рассматриваем один полный оборот верхнего блока, работа сил трения в этом случае та же, что и в предыдущем, т. е. равна  $X$ . Согласно закону сохранения энергии,

$$X = \frac{n - 1}{N} F_2 + \frac{W}{2N}.$$

Таким образом, для неизвестных сил  $F_1$  и  $F_2$  и работы сил трения получаем следующую систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} F_1 &= X + \frac{W}{2N}, \\ \frac{n - 1}{N} F_2 &= X - \frac{W}{2N}, \\ \frac{F_1}{F_2} &= R. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$F_1 = \frac{WR}{n(R - 1) + 1}$$

и

$$F_2 = \frac{W}{n(R - 1) + 1}.$$

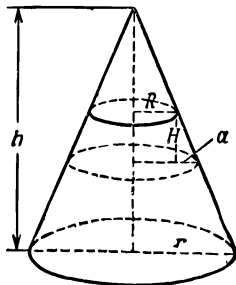
- 4.8. Выберем такое виртуальное перемещение цепи, при котором она опускается на малое расстояние  $H$  вниз по вертикали параллельно самой себе. Потенциальная энергия ее при этом уменьшится на  $WH$ . Радиус же цепи при таком перемещении увеличится на  $a$ . Легко сооб-

разить, что увеличение радиуса цепи и ее смещение вниз связаны соотношением  $a/H = r/h$ . Если натяжение цепи обозначить через  $T$ , то виртуальная работа сил натяжения при рассматриваемом виртуальном перемещении цепи равна

$$[2\pi(R + a) - 2\pi R] T = 2\pi a T$$

( $R$  — радиус цепи). Но виртуальная работа силы  $T$  равна изменению потенциальной энергии цепи, т. е.  $2\pi a T = WH$ . Отсюда следует

$$T = \frac{WH}{2\pi a} = \frac{Wh}{2\pi r}.$$



- 4.9. Повернем раму вокруг шарниров  $P$  и  $P'$  против часовой стрелки на небольшой угол  $\varphi$ . При таком повороте участок рамы  $AA'CD$  опустится вниз параллельно самому себе на расстояние  $AP \cdot \varphi$ , а часть  $BB'GH$  таким же образом поднимется вверх на высоту  $PB \cdot \varphi$ . Так как противовес  $\omega_c$  уравнивает раму в отсутствие грузов, изменение его потенциальной энергии при любом изменении положения рамы равно по величине изменению потенциальной энергии самой рамы. В силу закона сохранения энергии должны быть равными также изменения потенциальной энергии грузов  $W_1$  и  $W_2$ , т. е.  $W_1 AP \cdot \varphi = W_2 BP \cdot \varphi$ . Учитывая, что  $AP = (1/2)BP$ , находим  $W_2 = (1/2)W_1 = 0,25 \text{ кг}$ .

- 4.10. Очевидно, вниз будет двигаться груз по той наклонной плоскости, которая образует больший угол с горизонталью. Нетрудно убедиться в том, что, пройдя расстояние  $D$  вдоль наклонной плоскости, левый груз поднимется вверх на высоту  $D \sin \theta$ , а правый опустится вниз на расстояние  $D \sin \theta$ . Грузы при этом будут двигаться с некоторой скоростью  $v$ . Из закона сохранения энергии изменение потенциальной энергии грузов равно их кинетической энергии (вначале грузы покоились). Поскольку кинетическая энергия каждого груза равна  $Wv^2/2g$ , а изменение потенциальной энергии грузов есть  $WD(\sin \varphi - \sin \theta)$ , получаем

$$2 \frac{Wv^2}{2g} = WD(\sin \varphi - \sin \theta),$$

откуда

$$v^2 = gD(\sin \varphi - \sin \theta).$$

- 4.11. Поскольку углы наклона плоскостей к горизонту одинаковы, грузы начнут двигаться так, что больший из них будет опускаться. При смещении на расстояние  $D$  потенциальная энергия грузов уменьшается на  $(W_1 - W_2)D \sin \theta$  (см. предыдущую задачу), а их кинетическая энергия станет равной  $(W_1 + W_2)v^2/2g$ . Из закона сохранения энергии

$$\frac{W_1 + W_2}{2g} v^2 = (W_1 - W_2) D \sin \theta,$$

откуда

$$v^2 = 2g \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} D \sin \theta.$$



- 4.12. Пусть уровень воды в баке уменьшится на небольшую величину  $\Delta h$ . Это значит, что небольшая масса воды  $\Delta m = \rho \Delta h$  ( $\Delta h \cdot A$  — объем вытекшей жидкости, а  $\rho$  — ее плотность) вытекла из сосуда через отверстие  $a$  с некоторой скоростью  $v$ . Так как площадь отверстия мала по сравнению с площадью поперечного сечения сосуда ( $a \ll A$ ), скоростью изменения уровня жидкости в сосуде можно пренебречь. Изменение потенциальной энергии жидкости равно  $\Delta mgH$ , а изменение ее кинетической энергии есть  $\Delta mv^2/2$ .

Из закона сохранения энергии имеем

$$\Delta mgH = \frac{\Delta mv^2}{2},$$

откуда  $v = \sqrt{2gH}$ . Таким образом, в принятом приближении скорость вытекания жидкости не зависит ни от площади поперечного сечения сосуда, ни от сечения отверстия, а только от высоты уровня жидкости над отверстием.

Учтем теперь скорость изменения уровня жидкости в сосуде, которую обозначим через  $v_1$ . В этом случае изменение кинетической энергии жидкости равно

$$\frac{\Delta mv^2}{2} - \frac{\Delta mv_1^2}{2}$$

(а не  $\Delta mv^2/2$ , как мы считали раньше). Через поперечное сечение сосуда в единицу времени протекает жидкость объемом  $v_1 A$ , а через сечение  $a$  за то же время вытекает объем  $va$ . Поскольку жидкость практически несжимаема, эти объемы должны быть одинаковыми:  $v_1 A = va$ , откуда  $v_1 = (a/A)v$ .

Учитывая это, изменение кинетической энергии жидкости запишем как  $(\Delta m/2)v^2[1 - (a/A)^2]$ , а закон сохранения энергии в виде  $(\Delta m/2)v^2[1 - (a/A)^2] = \Delta mgH$ . Из последнего выражения находим скорость вытекания жидкости из сосуда:

$$v = \frac{\sqrt{2gH}}{1 - (a/A)^2}.$$

Таким образом, мы видим, что скорость вытекания жидкости из отверстия в баке не зависит от ее плотности. Это утверждение аналогично утверждению о том, что тела любой массы в поле тяжести падают с одним и тем же ускорением, т. е. в одни и те же моменты времени обладают равными скоростями.

- 4.13. I. Пусть стороны треугольника равны  $d_1$ ,  $d_2$  и  $L$ , а угол между сторонами  $d_1$  и  $d_2$  равен  $\alpha$ . Тогда, как известно,  $L^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos \alpha$ . Увеличим угол  $\alpha$  на небольшую величину  $\Delta \alpha$ . Сторона, лежащая против этого угла, станет равной  $L_1$ , т. е. увеличится на небольшую величину  $\Delta L = L_1 - L$ . Но по той же теореме косинусов  $L_1^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos(\alpha + \Delta \alpha)$ . Вспоминая, что  $\cos(\alpha + \Delta \alpha) = \cos \alpha \cos \Delta \alpha - \sin \alpha \sin \Delta \alpha$  и что для малых углов  $\cos \Delta \alpha \approx 1$ ,  $\sin \Delta \alpha \approx \Delta \alpha$ , находим

$$L_1^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2(\cos \alpha - \Delta \alpha \sin \alpha).$$

Вычитая  $L^2$  из  $L_1^2$ , получаем

$$L_1^2 - L^2 = 2d_1d_2 \Delta \alpha \sin \alpha.$$

С другой стороны,

$$L_1^2 - L^2 = (L_1 - L)(L_1 + L) = 2L \Delta L, \quad (L_1 + L_2 \approx 2L).$$

Сравнивая эти выражения для разности квадратов сторон, получаем приведенную в условии задачи формулу

$$\Delta L = \frac{d_1 d_2}{L} \sin \alpha \cdot \Delta \alpha.$$

II. Катеты  $a$  и  $b$  и гипотенуза  $c$  прямоугольного треугольника по теореме Пифагора связаны соотношением  $c^2 = a^2 + b^2$ . Увеличим длины катетов на небольшие отрезки  $\Delta a$  и  $\Delta b$ , длина гипотенузы треугольника при этом также увеличится и станет равной  $c + \Delta c$ . Согласно теореме Пифагора  $(c + \Delta c)^2 = (a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2$  или  $c^2 + 2c\Delta c = a^2 + 2a\Delta a + 2b\Delta b + b^2$ . Записывая последнее равенство, мы пренебрегли квадратами малых величин  $(\Delta a)^2$ ,  $(\Delta b)^2$  и  $(\Delta c)^2$  по сравнению с членами типа  $a^2$  и  $a\Delta a$ . Вычитая  $c^2$  из  $(c + \Delta c)^2$ , находим

$$2c \Delta c = 2a \Delta a + 2b \Delta b.$$

Отсюда

$$c \Delta c = a \Delta a + b \Delta b.$$

- 4.14. Пронумеруем бревна, как показано на рисунке. Рассмотрим такое виртуальное перемещение бревен, при котором бревно 3 смещается вверх по кузову, в результате чего бревно 2 проваливается между бревнами 1 и 3. Пусть центр бревна 3 сместился на небольшое расстояние  $BB' = \Delta x$ . Центр бревна 2 при этом займет положение  $C'$ , причем можно считать, что бревно 2 сначала перемещается перпендикулярно кузову на расстояние  $CK = \Delta y$ , а затем вправо параллельно кузову на расстояние  $KC' = LL' = (AB' - AB)/2 = \Delta x/2$ . При таких перемещениях центр бревна 3 поднимется вверх на расстояние  $\Delta h_3 = \Delta x \sin \theta$ , а центр бревна 2 опустится вниз на величину  $\Delta h_2 = \Delta y \cos \theta - (\Delta x/2) \sin \theta$ . Но изменение потенциальной энергии бревен при таких перемещениях должно равняться нулю, откуда следует  $\Delta h_2 = \Delta h_3$  (здесь учтено, что массы всех бревен одинаковы). Подставляя вместо  $\Delta h_2$  и  $\Delta h_3$  их значения, получаем

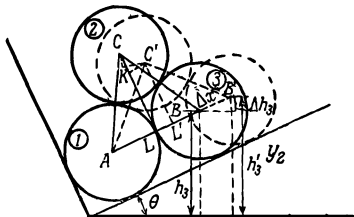
$$\Delta y \cos \theta - \frac{\Delta x}{2} \sin \theta = \Delta x \sin \theta,$$

или

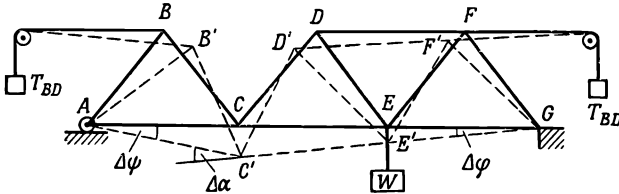
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{3} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Вычислим  $\Delta y$ . Из прямоугольных треугольников  $ACL$  и  $AC'L'$  следует, что  $CL = \sqrt{3} R$ , а  $C'L' = \sqrt{(2R)^2 - [R + (\Delta x/2)]^2} \approx \sqrt{3} R^2 - R \Delta x = \sqrt{3} R \sqrt{1 - (\Delta x/3R)} \approx \sqrt{3} R (1 - \Delta x/6R)$ . При вычислении  $C'L'$  мы пренебрегли, как и в предыдущей задаче, членами типа  $\Delta x^2$ ; при извлечении корня квадратного мы использовали приближенную формулу  $\sqrt{1+x} \approx 1 + (1/2)x$ , справедливую при  $x \ll 1$ .

Таким образом,  $\Delta y = CL - C'L' = \Delta x/2 \sqrt{3}$ , а  $\operatorname{tg} \theta = (1/3 \sqrt{3})$  ( $\theta \approx 11^\circ$ ).



- 4.15. а) Гибкими связями можно заменить те стержни, которые растянуты. Чтобы выяснить, сжат данный стержень или растянут, удобно воспользоваться следующим простым приемом. Представим, например, что стержень  $AB$  фермы удален. Тогда груз  $W$  пойдет вниз, а точка  $B$  начнет перемещаться к точке  $A$ . Стержень  $AB$  препятствует такому движению, следовательно, он сжат. Удалим стержень  $AC$ . Груз  $W$  снова начнет двигаться вниз, а шарниры  $A$  и  $C$  разведутся. Стало быть, стержень  $AC$  растянут. Удаляя последовательно каждый стержень фермы, можно убедиться, что стержни  $BC$ ,  $AC$ ,  $CE$ ,  $EG$ ,  $ED$  и  $EF$  растянуты, т. е. их можно заменить гибкими связями. Все остальные стержни сжаты.
- б) Удалим стержень  $BD$ . Чтобы ферма осталась в равновесии, к ней нужно на двух блоках подвесить два груза каждый весом  $T_{BD}$ ,



как показано на рисунке ( $T_{BD}$  — усилие в стержне  $BD$ ). Рассмотрим следующее виртуальное перемещение. Представим себе, что ферма переломилась в шарнире  $C$ , в результате чего часть фермы  $GFDC$  повернулась как целое на небольшой угол  $\Delta\varphi$  вокруг шарнира  $G$ , а часть  $ABC$  — на угол  $\Delta\psi$  вокруг шарнира  $A$ . Углы  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\psi$  считаем очень малыми, чтобы можно было пренебречь смещением точки  $A$ .

При таком перемещении фермы груз  $W$  опустится вниз на расстояние  $EE' = EG \cdot \Delta\varphi$ , а подвешенные на блоках грузики поднимутся вверх. Как видно из рисунка, сумма высот подъема грузов равна  $BD - B'D' = \Delta BD$ . Чтобы найти эту величину, удобно воспользоваться формулой, доказанной в п. 1 задачи 4.13; для этого нужно лишь определить изменение угла  $BCD$ :

$$\Delta\alpha = \angle BCD - \angle B'C'D'.$$

Легко убедиться в том, что  $\Delta\alpha = \Delta\varphi + \Delta\psi$ . Но  $CC' = CG\Delta\varphi = AC\Delta\psi$ , так что  $\Delta\psi = (CG/AC)\Delta\varphi = 2\Delta\varphi$ , поэтому  $\Delta\alpha = 3\Delta\varphi$ .

Таким образом,

$$\Delta BD = \frac{(BC)^2}{BD} \sin(\angle BCD) \cdot \Delta\alpha = \frac{12}{5} BC \Delta\varphi,$$

поскольку  $\sin(\angle BCD) = 24/25$ . (Все стороны треугольника  $BCD$  известны, так что синус нетрудно вычислить.)

Из закона сохранения энергии имеем  $T_{BD}\Delta BD = WEG\Delta\varphi$ , откуда

$$T_{BD} = \frac{EG \cdot \Delta\varphi}{\Delta BD} W = \frac{1}{2} W.$$

- 4.16. Если стержень находится в равновесии, то, повернув его на малый угол  $\Delta\varphi$  около точки  $P$ , мы должны обнаружить, что потенциальная энергия не изменилась. Это означает, что потенциальная энергия одного из кусков увеличивается, а другого уменьшается, в точности компенсируя это увеличение. Поскольку потенциальная энергия однородного стержня зависит от высоты его середины, нужно

определить, как изменятся высоты средин кусков при повороте на угол  $\Delta\varphi$  (см. рисунок). Из рисунка видно, что (для удобства треугольники  $BB'B''$  и  $CC'C''$  нарисованы отдельно) середина куска весом  $2W$  опустится на величину  $B'B'' = BB' \sin \alpha_1$ , а середина куска весом  $W$  поднимется на  $C'C'' = CC' \sin \alpha_2$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы между линиями, соединяющими середины первого и второго кусков с точкой подвеса  $P$ , и вертикалью. Таким образом,

$$2WB'B' \sin \alpha_1 = WCC' \sin \alpha_2.$$

Но  $BB' = CC'$  ( $BB' = PB \cdot \Delta\varphi$ ,  $CC' = PC \cdot \Delta\varphi$ , а  $PB = PC$ ), поэтому

$$2 \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2.$$

Заметим далее, что угол наклона  $\alpha$  стержня к горизонтали равен углу, который образует перпендикуляр к стержню с вертикалью, и что  $\alpha_1 = \alpha_0 - \alpha$ , а  $\alpha_2 = \alpha_0 + \alpha$ . Пользуясь формулами для синуса суммы и разности углов, находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Определим  $\operatorname{tg} \alpha_0$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{CD}{PD} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Окончательно получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{6\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \alpha \approx 5^\circ 30'.$$

- 4.17. Пусть в положении равновесия нить, соединяющая грузы  $W_1$  и  $W_2$ , образует угол  $\alpha$  с большим катетом; натяжение нити обозначим через  $T$ . Предположим, что груз  $W_2$  сдвинулся на небольшое расстояние  $\Delta x_2$  вниз по проволоке, а груз  $W_1$  остался неподвижным. При таком виртуальном перемещении груз  $W_2$  опустится по вертикали на расстояние  $\Delta x_2 \cos 30^\circ$ , а нить растянется на величину  $\Delta l = \Delta x_2 \cos(90^\circ - \alpha)$ . В силу принципа виртуальных перемещений

$$W_2 \Delta x_2 \cos 30^\circ = T \Delta x_2 \cos(90^\circ - \alpha),$$

или

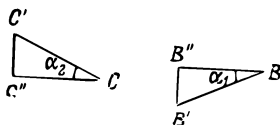
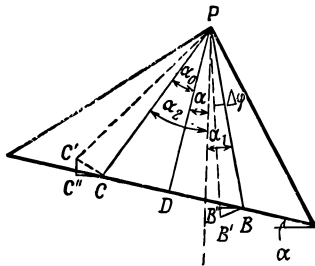
$$\frac{\sqrt{3}}{2} W_2 = T \sin \alpha.$$

Сместим теперь вниз по проволоке груз весом  $W_1$  на расстояние  $\Delta x_1$ , а второй оставим неподвижным. Те же рассуждения приведут нас к уравнению

$$W_1 \Delta x_1 \cos 60^\circ = T \Delta x_1 \cos \alpha,$$

откуда

$$\frac{1}{2} W_1 = T \cos \alpha.$$

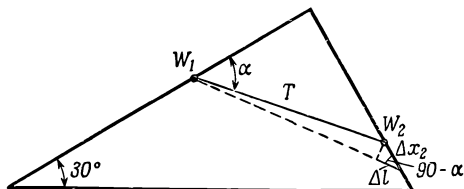


Решая полученные два уравнения для  $\alpha$  и  $T$ , нетрудно найти

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \frac{W_2}{W_1} = 3\sqrt{3}$$

(т. е.  $\alpha \approx 79^\circ$ ), а сама сила натяжения нити

$$T = \sqrt{W_1^2 + W_2^2} = 265 \text{ Г.}$$



## К главе 6. Вероятность

- 6.1. Как было показано в § 3 гл. 6 «Лекций» (вып. 1), при случайных блужданиях молекула, сделав  $N$  «шагов», отклонится от первоначального положения в среднем на расстояние  $D = \sqrt{N} l$ , где  $l$  — длина одного шага (в нашем случае это просто длина свободного пробега молекулы). Заметим, что используемая нами формула для пройденного расстояния (среднего квадратичного отклонения) отличается от формулы (6.10) «Лекций» (вып. 1, стр. 113) тем, что в ней явно фигурирует длина одного шага (в «Лекциях» же длина шага принята равной единице и поэтому явно в формулу не входит).

Итак, чтобы удалиться на расстояние  $D$ , молекула должна сделать  $N = D^2/l^2$  шагов. Каждый шаг совершается за промежутки времени  $\tau = l/\langle v \rangle$  ( $\langle v \rangle$  — средняя скорость молекулы), т. е. за время между двумя последовательными столкновениями молекулы. Поэтому для преодоления расстояния 1 см молекуле понадобится время

$$T = N\tau = \frac{D^2}{l\langle v \rangle} \approx 3 \text{ сек.}$$

- 6.2. Число существенно различных способов, которыми можно вынуть 3 шарика из 6, равно  $C_6^3 = 20$ . Из всех этих способов только одним способом можно вынуть все три шарика одного цвета (нужно, чтобы все шарики были красными) и, как легко подсчитать, шестью способами — шарики разного цвета (три возможности — белый шарик, первый зеленый шарик, один из трех красных; другие три способа — белый шарик, второй зеленый шарик и один из трех красных шариков). Иными словами, это число есть не что иное, как произведение  $C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ , так как из определенного количества шариков разного цвета (1, 2 и 3 соответственно) нам нужно выбрать по одному каждого цвета. Вероятность же некоторого события есть отношение числа благоприятствующих данному событию исходов к полному числу исходов (испытаний). Поэтому вероятность того, что все шарики окажутся одного цвета, равна  $1/20$ ; вероятность же того, что все три шарика окажутся разного цвета, равна  $6/20 = 3/10$ .

6.3. Обозначим через  $p$  расстояние от центра шарика до оси, проходящей через центр неподвижной сферы параллельно скорости шарика (так называемое *прицельное расстояние*). Как видно из рисунка,  $p = (a + b) \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между направлением скорости шарика и радиусом сферы, проведенным в точку попадания шарика, т. е. угол падения. Введем угол рассеяния  $\chi$  — угол между начальной и конечной скоростями шарика. Учитывая, что угол падения  $\alpha$  равен углу отражения  $\beta$ , находим  $\chi = \pi - 2\alpha$ .

Итак, угол рассеяния целиком определяется углом падения, т. е. в конечном итоге *прицельным расстоянием*. Если посмотреть со стороны движущихся шариков, то точки попадания шариков с одним и тем же прицельным расстоянием образуют окружность радиусом  $p$  (см. фиг. б и в). Шарики с несколько меньшим прицельным расстоянием  $p - \Delta p$  отклоняются на больший угол  $\chi + \Delta \chi$ . Очевидно, что все шарики, попавшие на заштрихованное кольцо, отклоняются на углы, лежащие между  $\chi$  и  $\chi + \Delta \chi$ . Если  $\Delta p$  мало, то площадь этого кольца равна  $2\pi p \Delta p$ , а число шариков, попадающих на него в единицу времени, равно  $n \cdot 2\pi p \Delta p$ , где  $n$  — плотность падающего потока, т. е. число шариков, проходящих в единицу времени через единичную площадку, расположенную нормально к потоку. Естественно предположить, что поток шариков однороден, т. е. что плотность потока не зависит от  $p$ . Выразим теперь  $\Delta p$  через  $\chi$  и  $\Delta \chi$ . Так как  $\alpha = (\pi - \chi)/2$ , то

$$\Delta p = (a + b) \left[ \cos \left( \frac{\chi}{2} \right) - \cos \left( \frac{\chi + \Delta \chi}{2} \right) \right] = \frac{a + b}{2} \sin \left( \frac{\chi}{2} \right) \cdot \Delta \chi.$$

Мы учли здесь то обстоятельство, что при малых  $\Delta \chi$   $\sin(\Delta \chi/2) \approx \Delta \chi/2$ , а  $\cos(\Delta \chi/2) \approx 1$ . Таким образом, число частиц, рассеянных в единицу времени на углы от  $\chi$  до  $\chi + \Delta \chi$ , равно

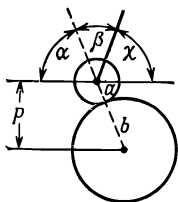
$$n \pi (a + b)^2 \sin \left( \frac{\chi}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\chi}{2} \right) \cdot \Delta \chi.$$

Если сечение потока шариков равно  $S$ , то доля шариков, рассеянных на углы от  $\chi$  до  $\chi + \Delta \chi$ , равна

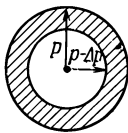
$$\frac{1}{S} \pi (a + b)^2 \sin \left( \frac{\chi}{2} \right) \cos \left( \frac{\chi}{2} \right) \cdot \Delta \chi = \frac{1}{S} \Delta \sigma (\chi, \Delta \chi).$$

Величину  $\Delta \sigma$  называют *сечением рассеяния*. Имеем

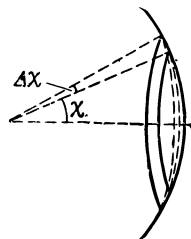
$$\Delta \sigma (\chi, \Delta \chi) = \frac{\pi (a + b)^2}{2} \sin \chi \cdot \Delta \chi.$$



а



б



Эту формулу полезно записать в несколько ином виде. Представим себе сферу единичного радиуса и отложим из центра этой сферы векторы, изображающие скорости рассеянных шариков. Тогда векторы,

отвечающие шарикам, рассеянным в интервале углов от  $\chi$  до  $\chi + \Delta\chi$ , «пронизуют» нашу сферу по кольцу, показанному на рисунке. Средний радиус этого кольца приблизительно равен  $\sin \chi$ , а площадь (для малых  $\Delta\chi$ )  $2\pi \sin \chi \cdot \Delta\chi$ . Обозначив эту площадь через  $\Delta\Omega$ , запишем

$$\Delta\sigma(\Delta\Omega) = \frac{(a+b)^2}{4} \Delta\Omega.$$

Наш результат можно выразить словами: сечение рассеяния в направлениях, лежащих в некотором телесном угле, пропорционально величине этого угла. Заметим, что полное сечение рассеяния  $\sigma$  на все углы ( $\Omega = 4\pi$ ) равно  $\pi(a+b)^2$ , что вполне естественно: шарики рассеиваются сферой только в том случае, когда  $p \leq a+b$ .

### К главе 7. Теория тяготения

- 7.1. Элементы орбиты Луны приведены в условии задачи. Для спутника же расстояния от центра Земли в перигее и апогее равны соответственно

$$r_c^p = R_3 + 225 \text{ км} = 6\,603 \text{ км},$$

$$r_c^a = R_3 + 710 \text{ км} = 7\,088 \text{ км}$$

( $R_3 = 6378$  км — радиус Земли).

Для определения периода спутника  $T_c$  воспользуемся третьим законом Кеплера:  $T_c^2/T_L^2 = a_c^3/a_L^3$ , где  $a_c$  и  $a_L$  — большие полуоси орбит спутника и Луны соответственно, а  $T_L$  — период обращения Луны.

Выразим длину большой полуоси орбиты через  $r^p$  и  $r^a$ , воспользовавшись для этого формулами, приведенными на стр. 17:

$$r^p = a - c, \quad r^a = a + c,$$

откуда

$$a = (r^p + r^a)/2.$$

Подставляя  $a$  в формулу для отношения периодов, находим

$$T_c^2 = \left( \frac{r_c^p + r_c^a}{r_L^p + r_L^a} \right)^3 T_L^2.$$

В нашем случае это дает  $T_c = 1,55$  час.

- 7.2. а) Так как спутник движется по круговой орбите радиусом  $R$ , то, сместившись на  $x$  в горизонтальном направлении, он одновременно переместится на расстояние  $s$  по вертикали. Выпишем формулу, связывающую  $s$  и  $x$  (см. «Лекции», вып. 1, подпись к рис. 7.4, стр. 129):

$$\frac{x}{s} = \frac{2R - s}{x} \approx \frac{2R}{x}$$

( $s$  считаем малым, т. е. считаем, что прошло очень небольшое время с того момента, как спутник побывал в точке  $A$ ). Таким образом,

$$s = \frac{x^2}{2R}.$$

Длина дуги  $AB$  равна  $vt$  ( $v$  — скорость спутника). Но если эта длина мала, то можно считать, что и  $x \approx vt$ ; следовательно,

$$s = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

С другой стороны, формула пути для равноускоренного движения имеет вид:  $s = at^2/2$ . Сравнивая эти две формулы, видим, что центростремительное ускорение спутника  $a_c = v^2/R$ .

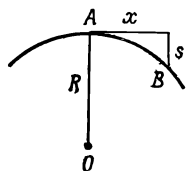
- б) Если положить  $a = GM/R^2$ , то

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \quad \text{и} \quad v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Период обращения есть время, за которое тело совершает один оборот, так что  $T = 2\pi R/v$ , или

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{v^2} = \frac{4\pi^2}{GM} R^3.$$

Найденное выражение для  $T$  соответствует третьему закону Кеплера: квадрат периода пропорционален кубу большой полуоси орбиты (в нашем случае круговой орбиты — ее радиусу) (см. § 2 гл. 7 «Лекций», вып. 1, стр. 125).



- 7.3. а) Будем считать, что Луна вращается вокруг Земли по круговой орбите радиусом  $R_{\text{Л}} = 380\,000$  км с периодом  $T_{\text{Л}} = 27,3$  суток, а Земля вращается вокруг Солнца по такой же орбите с параметрами  $R_{\text{З}} = 149\,500\,000$  км;  $T_{\text{З}} = 365,25$  суток.

Воспользуемся формулой для периода обращения спутника, полученной в предыдущей задаче:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3.$$

Записав периоды обращения Луны и Земли и взяв их отношение, получим

$$\frac{T_{\text{Л}}^2}{T_{\text{З}}^2} = \frac{R_{\text{Л}}^3}{R_{\text{З}}^3} \frac{M_{\text{С}}}{M_{\text{З}}},$$

где  $M_{\text{С}}$  и  $M_{\text{З}}$  — масса Солнца и Земли соответственно, откуда

$$\frac{M_{\text{С}}}{M_{\text{З}}} = \frac{T_{\text{Л}}^2}{T_{\text{З}}^2} \frac{R_{\text{З}}^3}{R_{\text{Л}}^3} = 3,3 \cdot 10^5.$$

- б) Рассмотрев аналогично движение Луны вокруг Земли и спутника Юо вокруг Юпитера, получим

$$\frac{M_{\text{Юо}}}{M_{\text{З}}} = \left( \frac{T_{\text{Л}}}{T_{\text{Юо}}} \right)^2 \left( \frac{R_{\text{Юо}}}{R_{\text{Л}}} \right)^3 = 318;$$



здесь  $M_{\text{Ю}}$  — масса Юпитера, а  $T_{\text{Ю}}$  и  $R_{\text{Ю}}$  — период обращения и радиус орбиты спутника Юпитера Ио.

- 7.4. Пусть массы  $M_1$  и  $M_2$  вращаются по круговым орбитам с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  соответственно, причем  $r_1 + r_2 = R$  ( $R$  — постоянное расстояние между массами). Вращаясь вокруг неподвижной точки (их общего центра масс), эти тела все время находятся на одной прямой, соединяющей данные массы и проходящей через неподвижную точку вращения. Поэтому периоды обращения обоих тел одинаковы и равны  $T$ .

Рассмотрим движение одного тела, например первого. Сила притяжения, действующая на него со стороны второго тела, равна

$$F^{(1)} = \frac{GM_1M_2}{R^2}.$$

Как было показано в задаче 7.2, под действием этой силы тело движется с центростремительным ускорением

$$\alpha_{\text{ц}}^{(1)} = \frac{v_1^2}{r_1}.$$

Учитывая, что период обращения  $T = 2\pi r_1/v_1$  и что  $F^{(1)} = M_1\alpha_{\text{ц}}^{(1)}$  (см. § 3 гл. 7 «Лекций», вып. 1), получаем

$$F^{(1)} = M_1 \frac{(2\pi)^2 r_1^2}{T^2 r_1} = G \frac{M_1 M_2}{R^2},$$

откуда

$$\frac{(2\pi)^2 r_1}{T^2} = \frac{GM_2}{R^2}.$$

Аналогично можем написать для второго тела:

$$\frac{(2\pi)^2 r_2}{T^2} = \frac{GM_1}{R^2}.$$

Складывая два последних выражения и учитывая, что  $r_1 + r_2 = R$ , находим

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}.$$

Полученная формула показывает, что период обращения тел зависит только от расстояния между ними и их суммарной массы (а не массы каждого из тел или же отношения их масс).

Перейдем теперь к случаю эллиптических орбит. Речь идет в сущности о трех эллипсах: по эллипсам движутся оба тела (легкое — по большому, тяжелое — по малому), и, кроме того, относительное движение тел также происходит по эллипсу (см. «Лекции», вып. 1, гл. 7). Все три эллипса подобны друг другу, т. е. обладают одним и тем же эксцентриситетом. Если учесть также, что центр масс системы остается неподвижным (он лежит в общем фокусе орбит обоих тел), а расстояния от центра масс до тел обратно пропорциональны их массам, то мы придем к выводу, что расположение тел и их орбит такое, как показано на рисунке.

Обозначим через  $v_1$  и  $v_2$  скорости тел  $M_1$  и  $M_2$  в тот момент времени, когда они находятся в апогее. Как видно из рисунка,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1 + c_1}{a_2 + c_2} = \frac{a_1(1 + e)}{a_2(1 + e)} = \frac{a_1}{a_2}$$

(индексами 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к эллипсам, по которым движутся массы  $M_1$  и  $M_2$  соответственно).

Чтобы получить для эллиптических орбит те же выражения, что и для круговых, вспомним, что эллипс можно получить из окружности, если изменить масштаб вдоль одной из осей координат. Ускорение тела при движении его по окружности было вычислено в «Лекциях» (вып. 1, гл. 7, подпись к рисунку 7.4, стр. 129). Чтобы получить ускорение тела (например,  $M_1$ ) в интересующем нас случае, представим себе, что его орбита получена из круговой увеличением масштаба в «вертикальном направлении» в  $a_1/b_1$  раз. Величина  $x$  при этом не изменится, а  $s$  увеличится и станет равным  $s_1 = (a_1/b_1)s$ .

Подставив в соотношение  $x^2 = 2Rs$  (справедливое для окружности) их значения после увеличения масштаба  $x_1 = x$ ,  $s_1 = (a_1/b_1)s$  и  $R = b_1$  («горизонтальные» размеры не изменились, поэтому малая полуось эллипса равна радиусу исходной окружности), получим

$$x^2 = 2 \frac{b_1^2}{a_1} s_1$$

Таким образом, радиус кривизны эллипса в точке пересечения с большой полуосью равен  $b_1^2/a_1$ . Считая, что в течение очень малого промежутка времени первое тело движется по круговой орбите этого радиуса, можно написать

$$\frac{v_1^2 a_1}{b_1^2} = \frac{GM_2}{(a + c)^2} = \frac{GM_2}{a^2(1 + e)^2}$$

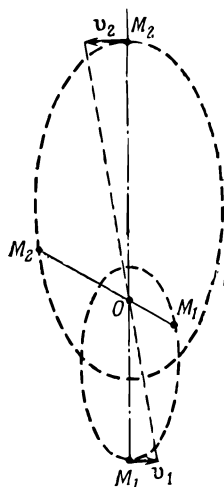
(здесь  $a$  и  $c$  — параметры орбиты относительного движения тел:  $a = a_1 + a_2$ ,  $c = c_1 + c_2$ ). Аналогично для второго тела:

$$\frac{v_2^2 a_2}{b_2^2} = \frac{GM_1}{a^2(1 + e)^2}$$

Складывая последние два равенства и выражая  $v_2$  через  $v_1$ , получаем

$$\frac{v_1^2(1 + e)}{a_1^2(1 - e)} = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}$$

Остается лишь выяснить, какое отношение имеет к периоду обращения величина, стоящая в левой части этого равенства. Заметим прежде всего, что площадь которую за единицу времени «замещает» радиус-вектор тела  $M_1$  (проведенный из точки 0), равна



$(1/2)v_1(a_1+c_1) = (1/2)v_1a_1(1+e)$ . Хотя фактически мы вычислили скорость изменения «заметаемой» площади для того момента, когда тело  $M_1$  находится в апогее, эта скорость, согласно второму закону Кеплера, не изменится при движении тела по орбите. Поэтому величина  $(1/2)v_1a_1(1+e)T$  (здесь  $T$  — период обращения) равна площади орбиты тела  $M_1$ . Площадь эллипса легко вычислить, если сообразить, что при увеличении масштаба по одной из осей площадь фигуры увеличивается во столько же раз, что и масштаб. Поэтому площадь эллипса равна

$$\pi b_1^2 \frac{a_1}{b_1} = \pi a_1 b_1 = \pi a_1^2 \sqrt{1-e^2}.$$

Теперь нетрудно убедиться, что

$$T = \frac{2\pi a_1}{v_1} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \text{ а } T^2 = \frac{(2\pi)^2 a^3}{G(M_1 + M_2)}.$$

- 7.5. Как было показано в предыдущей задаче, квадрат периода обращения двух тел вокруг их центра масс дается выражением

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}$$

(здесь  $R$  — большая полуось относительного движения двух звезд).

Применяя эту формулу к движению двух звезд  $a$  и  $b$  и к системе Солнце — Земля, можно написать

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_a + M_b)} \text{ и } T_3^2 = \frac{(2\pi)^2 R_3^3}{G(M_C + M_3)}$$

(здесь  $R_3$  и  $T_3$  — большая полуось зсмой орбиты и период обращения Земли). Беря отношение этих периодов и пренебрегая массой Земли по сравнению с массой Солнца, получаем

$$\frac{M_a + M_b}{M_C} = \left(\frac{R}{R_3}\right)^3 \left(\frac{T_3}{T}\right)^2.$$

Но  $T_3 = 1 \text{ год}$ ;  $R_3 = 1 \text{ А. Е.}$  (по определению астрономической единицы длины), так что

$$\frac{M_a + M_b}{M_C} = \frac{R^3}{T^2}.$$

- 7.6. а) Предположим, что плоскость орбиты системы Сириуса перпендикулярна направлению на Землю. В этом случае из рис. 7.7 «Лекций» (вып. 1, стр. 132) можно определить величину большой полуоси орбиты Сириуса  $B$  (в угловых единицах). Она оказывается равной примерно  $7,30''$ . Из того же рисунка можно заключить, что период обращения системы около  $45 \text{ лет}$ .

В предыдущей задаче было показано, что при орбитальном движении различных тел можно установить соотношение

$$\frac{M_a + M_b}{M_C} = \left(\frac{R}{R_3}\right)^3 \left(\frac{T_3}{T}\right)^2$$

(обозначения те же, что и в задаче 7.5).

Отсюда суммарная масса двойной звезды Сириуса равна

$$M_a + M_b = \left(\frac{R}{R_3}\right)^3 \left(\frac{T_3}{T}\right)^2 M_C \approx 3,7 M_C.$$

- б) Это значение массы есть ее нижний предел, так как если плоскость орбиты не перпендикулярна направлению на Землю, то ее большая полуось в действительности больше ее видимого с Земли размера. Масса двойной звезды пропорциональна кубу большой полуоси, так что минимальной величине полуоси соответствует минимальное же значение массы.

- 7.7. Орбитальная скорость планеты такова, что за равные промежутки времени  $\tau$  ее радиус-вектор «заметает» равные площади (второй закон Кеплера). Рассмотрим движение Земли вблизи перигея и апогея за такие малые интервалы времени  $\Delta t$ , чтобы ее траекторию можно было считать прямолинейной. Тогда «заметаемые» площади представляют собой треугольники с основаниями  $v_{\min} \Delta t$  и  $v_{\max} \Delta t$  и высотами  $r_a$  и  $r_p$  соответственно, так что

$$(1/2) v_{\min} \Delta t \cdot r_a = (1/2) v_{\max} \Delta t \cdot r_p.$$

Отсюда

$$\gamma = \frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{r_a}{r_p}.$$

Но для эллипса  $r_a = a(1+e)$ , а  $r_p = a(1-e)$ ; следовательно,  $\gamma = (1+e)/(1-e) \approx 1+2e$  (поскольку  $e \ll 1$ ). Это дает  $\gamma \approx 1,0334$ .

- 7.8. а) По данным о появлении кометы находим ее период  $T$  обращения вокруг Солнца. Он равен  $T \approx 76$  лет. Пользуясь третьим законом Кеплера найдем для большой полуоси  $a$  орбиты кометы:

$$\left(\frac{a}{a_3}\right)^3 \left(\frac{T_3}{T}\right)^2 = 1,$$

где  $a_3$  и  $T_3$  — большая полуось орбиты и период обращения Земли.

Если измерять  $a$  в А.Е., а  $T$  в годах, то

$$a = T^{2/3} \approx 18 \text{ А.Е.}$$

Для расстояний в апогее и перигее имеем

$$r_a = a + c, \quad r_p = a - c,$$

что дает

$$r_a = 2a - r_p = 35,4 \text{ А.Е.}$$

- б) В предыдущей задаче было показано, что отношение максимальной и минимальной скоростей  $\gamma$  равно отношению расстояний в апогее и перигее. Таким образом,

$$\gamma = \frac{r_a}{r_p} = 59.$$

- 7.9. В задаче 7.4 было показано, что период обращения двух тел вокруг их общего центра масс равен

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)},$$

где  $R$  — расстояние между телами;  $M_1$  и  $M_2$  — их массы, а  $G$  — постоянная в законе тяготения.

Применив эту формулу к системе Земля — Луна, найдем массу Луны:

$$M_{\text{Л}} = \frac{(2\pi)^2 R_{\text{Л}}^3}{GT_{\text{Л}}^2} - M_{\text{З}}$$

( $T_{\text{Л}}$  — период обращения Луны вокруг Земли,  $M_{\text{З}}$  — масса Земли,  $M_{\text{Л}}$  — масса Луны,  $R_{\text{Л}}$  — расстояние от Земли до Луны).

Достижения современной ракетной техники дают нам еще один способ определения массы Луны. Запустим искусственный спутник Луны и определим его период обращения  $T$  и большую полуось его орбиты  $R$ . Тогда можно написать (см. задачу 7.2)

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{GM_{\text{Л}}}, \text{ т. е. } M_{\text{Л}} = \frac{(2\pi)^2 R^3}{GT^2}$$

(мы пренебрегли массой искусственного спутника по сравнению с массой Луны). Или, чтобы исключить  $G$  (см. задачу 7.3):

$$\frac{T^2}{T_{\text{Л}}^2} = \frac{R^3}{R_{\text{Л}}^3} \frac{M_{\text{З}}}{M_{\text{Л}}}, \text{ откуда } M_{\text{Л}} = \frac{R^3}{R_{\text{Л}}^3} \frac{T_{\text{Л}}^2}{T^2} M_{\text{З}}.$$

- 7.10. Тело массой  $m$ , расположенное на поверхности Земли, притягивается к ней с силой

$$F = G \frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^2}.$$

Но  $F = mg_{\text{З}}$ , где  $g_{\text{З}}$  — ускорение свободного падения на Земле. Приравняв эти два выражения, получаем

$$mg_{\text{З}} = G \frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^2} \text{ и } g_{\text{З}} = \frac{GM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^2}.$$

Аналогично

$$g_{\text{Л}} = \frac{GM_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}^2}$$

( $M_{\text{Л}}$ ,  $R_{\text{Л}}$ ,  $g_{\text{Л}}$  — масса, радиус и ускорение свободного падения на Луне). Сравнивая  $g_{\text{Л}}$  и  $g_{\text{З}}$ , находим

$$g_{\text{Л}} = \frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} \left( \frac{R_{\text{З}}}{R_{\text{Л}}} \right)^2 g_{\text{З}} \approx 1,67 \text{ м/сек}^2.$$

Иными словами, ускорение свободного падения на Луне примерно в 6 раз меньше, чем на Земле, поэтому и вес тел на Луне тоже в 6 раз меньше, чем на Земле.

- 7.11. Пусть лаборатория, где производится эксперимент, расположена в точке  $C$  Земли. На тела, находящиеся в лаборатории, действуют силы притяжения Земли и Луны, причем эти силы вычитаются, если Луна находится в точке  $A$ , и складываются, если Луна находится в точке  $B$ . Ускорение свободного падения для этих двух случаев равно

$$g_1 = \frac{GM_3}{R_3^2} - \frac{GM_L}{(R - R_3)^2},$$

$$g_2 = \frac{GM_3}{R_3^2} + \frac{GM_L}{(R + R_3)^2},$$

где  $R$  — расстояние от центра Земли до Луны.

Очевидно, что  $g_1$  и  $g_2$  — минимальное и максимальное значения ускорения  $g$ , которые оно принимает в течение суток.

Таким образом, самое большое изменение ускорения свободного падения тел за счет изменения положения Луны равно

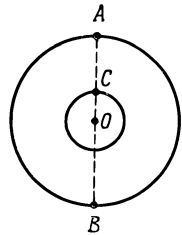
$$\Delta g = g_2 - g_1 = \frac{GM_L}{(R + R_3)^2} + \frac{GM_L}{(R - R_3)^2} \approx \frac{2GM_L}{R^2}$$

(мы учли, что  $R_3 \ll R$ ).

Среднее ускорение свободного падения равно  $GM_3/R_3^2$ . Таким образом,

$$\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{M_L}{M_3} \left( \frac{R_3}{R} \right)^2 \approx 10^{-5}.$$

Следовательно, величину  $g$  нужно измерять с точностью не меньшей, чем до пятого знака, чтобы уловить ее «суточный ход» из-за наличия лунного притяжения.



## К главе 8. Движение

- 8.1. Известно [формула (8.9) «Лекций», вып. 1, стр. 156], что ускорение есть производная скорости по времени:  $a = dv/dt$ . Стало быть, нужно подобрать такую функцию  $v_x(t)$ , чтобы ее производная была постоянной и равной  $a$ . Нетрудно убедиться в том, что  $v_x(t) = at + c$ , где  $c$  — некоторая постоянная величина (ее производная равна нулю!). Физический смысл постоянной легко выяснить, если положить  $t = 0$  в формуле для  $v_x(t)$ . Тогда  $c = v_x(0) \equiv v_{0x}$ .

Вспомним теперь, что  $v = dx/dt$ , и подберем  $x(t)$  так, чтобы получилась нужная производная.

Очевидно,  $x(t) = at^2/2 + v_{0x}t + d$ . Снова, полагая  $t = 0$ , убеждаемся, что здесь  $d = x(0) = x_0$ .

- 8.2. Из полученного в предыдущей задаче выражения для скорости найдем  $t = (v_x - v_{0x})/a$ . Подставляя это выражение в формулу для  $x$ , получаем

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a(x - x_0).$$

8.3. Для движений вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  можно непосредственно написать

$$\begin{aligned}v_x &= v_{0x} + a_x t, & x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \\v_y &= v_{0y} + a_y t, & y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2, \\v_z &= v_{0z} + a_z t, & z &= z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2.\end{aligned}$$

Последнее выражение в задаче 8.2 имеет вид ( $a \equiv a_x$ )

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0).$$

Обобщая его на случай движения вдоль осей  $y$  и  $z$ , имеем

$$\begin{aligned}v_y^2 &= v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0), \\v_z^2 &= v_{0z}^2 + 2a_z(z - z_0).\end{aligned}$$

Складывая равенства для всех трех компонент и учитывая формулу (8.16) «Лекций» (вып. 1, стр. 158), получаем

$$v^2 = v_0^2 + 2[a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) + a_z(z - z_0)].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, можно записать в компактной форме, если ввести скалярное произведение  $(\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{r})$  вектора ускорения  $\mathbf{a}$  с компонентами  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  и вектора  $\Delta \mathbf{r}$  с компонентами  $x - x_0$ ,  $y - y_0$ ,  $z - z_0$  (см. § 7 гл. 11 «Лекций», вып. 1). При этом выражение для квадрата скорости примет вид

$$v^2 = v_0^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{r})$$

8.4. Обозначим расстояние, которое пролетит снаряд по горизонтали, через  $S$ , а максимальную высоту его полета — через  $H$ . В начальный момент времени ( $t = 0$ ) имеем  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , а  $v_{0x} = v \cos \theta$ ,  $v_{0y} = v \sin \theta$ . Используя результаты задачи 8.3, находим

$$\begin{aligned}x &= v_{0x} t, \\y &= v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2\end{aligned}$$

(здесь учтено, что  $a_y = -g$ ).

Если из этих двух уравнений исключить время  $t$ , то получим уравнение траектории снаряда:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g x^2}{2v_{0x}^2} = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g x^2}{2v \cos^2 \theta}.$$

Кривая, задаваемая полученным уравнением, является параболой, обращенной вершиной вверх и проходящей через начало координат (при  $x = 0$  получаем  $y = 0$ ).

Очевидно, расстояние  $S$  по оси  $x$  соответствует  $y = 0$ ; отсюда можно найти момент падения снаряда на землю:

$$v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = 0,$$

что дает

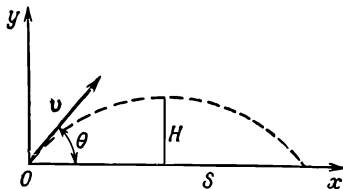
$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g}.$$

Решению  $t_1 = 0$  соответствует начальное положение  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Значит,

$$S = v_{0x}t_2 = \frac{2v^2}{g} \cos \theta \sin \theta = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}.$$

Из симметрии параболы следует, что максимальная высота достигается снарядом в момент времени  $t' = t_2/2$ , откуда

$$H = v_{0y}t' - \frac{1}{2}gt'^2 = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta.$$



8.5.  $\theta = \pi/4 = 45^\circ$ .

8.6. Запишем выражение для пройденного пути при ускоренном движении автомобиля:  $s(t) = v_0t + at^2/2$ , где  $v_0$  — скорость автомобиля в начале ускоренного движения,  $a$  — его ускорение.

Учитывая, что к моменту времени  $t_1 = 16$  сек автомобиль прошел путь  $s_1 = 0,1$  мили, а к  $t_2 = 16 + 8 = 24$  сек — путь  $s_2 = 0,2$  мили, записываем два уравнения для  $a$  и  $v_0$ :

$$0,1 = 16v_0 + \frac{1}{2} a (16)^2,$$

$$0,2 = 24v_0 + \frac{1}{2} a (24)^2.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$a = \frac{0,1}{192} \text{ миль/сек}^2 = 0,8 \text{ м/сек}^2,$$

$$v_0 = \frac{0,1}{48} \text{ миль/сек} = 3,3 \text{ м/сек}.$$

(1 сухопутная миля равна 1600 м.) Используя эти значения  $a$  и  $v_0$ , находим скорость автомобиля в момент времени  $t_2$ :

$$v_{t_2} = v_0 + at_2 = 22,5 \text{ м/сек} \approx 81 \text{ км/час}$$

8.7. а) В промежуток времени от  $t_0 = 0$  до  $t_1 = 50$  сек, т.е. во время работы двигателя, ракета двигалась с ускорением  $2g$ . Следовательно, в этом интервале времени скорость ракеты определяется формулой

$$v = 2gt.$$



Графиком этой зависимости является прямая (отрезок  $OA$ ; см. фиг. а), тангенс угла наклона которой к оси  $t$  определяется как

$$\frac{v_A}{t_A} = 2g.$$

С момента времени  $t_1 = 50$  сек и дальше до падения на землю ракета движется с ускорением  $-g$ , так что

$$v = 100g - g(t - 50).$$

График этой функции — тоже прямая (справа от точки  $A$ ), но модуль тангенса угла ее наклона к оси  $t$  равен  $g$ , т. е. в два раза меньше, чем для отрезка  $OA$ .

- б) Так как вертикальная скорость обращается в нуль в наивысшей точке траектории, моменту времени  $t_B$  соответствует максимальная высота полета ракеты. Таким образом,

$$H_{\max} = \frac{1}{2} 2gt_1^2 + 100g(t_B - 50) - \frac{1}{2} g(t_B - 50)^2 \approx 75\,000 \text{ м.}$$

Этот результат легко можно получить из графика функции  $v(t)$ . Как было показано в § 4 гл. 8 «Лекций» (вып. 1), пройденный телом путь есть  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum v(t_i) \Delta t$ . Какой смысл произведения  $v(t_i) \Delta t$ ? Это есть не что иное, как площадь прямоугольника с основанием  $\Delta t$  и высотой  $v(t_i)$  (см. рис. б). Поэтому, если мы возьмем предел суммы площадей в интервале времен от  $t_1$  до  $t_n$ , то получим площадь фигуры, ограниченной осью  $t$ , кривой  $v(t)$  и двумя вертикалями, проведенными в точках  $t_1$  и  $t_n$ . В нашем случае  $H_{\max}$  есть площадь треугольника  $OAB$ , т. е.

$$H_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 1000 = 75\,000 \text{ м.}$$

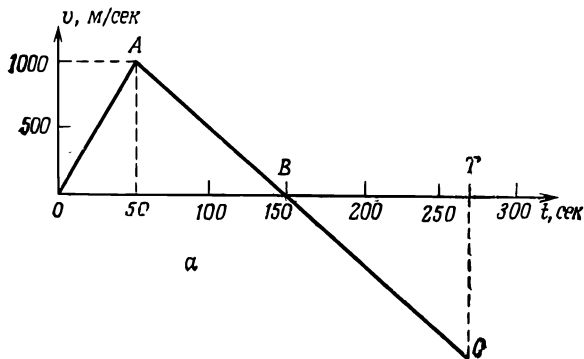
- в) С высоты  $H_{\max}$  (с момента времени  $t_B$ ) ракета свободно падает вниз. Поверхности Земли она достигает через  $t'$  сек, причем

$$t' = \sqrt{\frac{2H_{\max}}{g}} = 122,5 \text{ сек.}$$

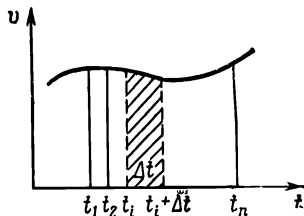
Полное время движения ракеты

$$T = t_B + t' = 272,5 \text{ сек.}$$

Таким образом, график скорости заканчивается в точке  $C$ , соответствующей моменту  $T$  падения ракеты на Землю.



а



б

- 8.8. Обозначим ускорение тележки при движении с ракетным двигателем через  $a_1$ , а с авиационным — через  $a_2$ . Пусть  $2S$  — проходимый тележкой путь в обоих случаях. Тележка с ракетным двигателем первую половину пути проходит за время  $t_1$ , определяемое из уравнения

$$S = \frac{1}{2} a_1 t_1^2, \quad \text{т. е.} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2S}{a_1}}.$$

Вторую половину пути она проходит за время  $t_2$ :

$$S = v(t_1) t_2,$$

где  $v(t_1)$  — скорость тележки в конце первой половины пути. т. е.  $v(t_1) = a_1 t_1$ , откуда

$$S = a_1 t_1 t_2 \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{S}{a_1 t_1} = \sqrt{\frac{S}{2a_1}}.$$

Тележка с реактивным двигателем проходит все расстояние за время  $t$ , такое, что

$$2S = \frac{1}{2} a_2 t^2, \quad \text{т. е.} \quad t = \sqrt{\frac{4S}{a_2}}.$$

По условию задачи  $t = t_1 + t_2$ , так что

$$\sqrt{\frac{4S}{a_2}} = \sqrt{\frac{2S}{a_1}} + \sqrt{\frac{S}{2a_1}}.$$

Отсюда находим

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{8} = 1,125.$$

- 8.9. Угол, под которым должна быть выпущена мина, чтобы пройти возле края обрыва, определим по формуле (см. задачу 8.4)

$$\sin 2\alpha = \frac{Sg}{v_0^2}.$$

Зная, что  $S = 8100$  м,  $v_0 = 300$  м/сек, получаем  $\sin 2\alpha = 0,882$  и  $\alpha_1 = 31^\circ$ ,  $\alpha_2 = 59^\circ$ . Очевидно, чем больше будет угол, под которым выпущена мина, тем ближе она упадет к основанию обрыва, поэтому в интересующем нас случае следует выбрать больший из углов, т. е.  $\alpha_2$ .

Рассмотрим теперь движение мины за краем обрыва. Скорость мины вблизи края обрыва направлена под углом  $\alpha = 59^\circ$  к горизонту, но в отличие от начального положения ее вертикальная составляющая направлена не вверх, а вниз. Следовательно, до падения на землю мина пролетит по горизонтали расстояние  $S_{\text{мин}} = v_0 t \cos \alpha$  ( $t$  — время движения за краем обрыва). Вычислим  $t$ . Поскольку вертикально вниз мина движется с начальной скоростью  $v_0 \sin \alpha$  и ускорением  $g$ , то  $h = v_0 t \sin \alpha + g t^2 / 2$  ( $h$  — высота обрыва). Подставляя вместо  $h$ ,  $v_0$  и  $\alpha$  их численные значения, находим  $t = 0,408$  сек,  $S_{\text{мин}} \approx 63$  м.

- 8.10. а) Известно, что  $\theta = S/R$ . По определению  $\sin \theta = AC/R$ , а  $\cos \theta = OC/R$ . При малых углах  $\theta$  дугу  $AB$  можно заменить перпендикуляром  $AC$ , а  $OC$  — радиусом  $R$ . В этом случае  $\sin \theta \approx S/R = \theta$  и  $\cos \theta \approx R/R = 1$ .

Оценим погрешность, которую мы допускаем, полагая  $\cos \theta \approx 1$ .

$$\cos \theta = \frac{OC}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - AC^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{R}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{AC}{R}\right)^2.$$

Но  $AC/R$  — малая величина порядка  $\theta$ . Значит, мы пренебрегаем членами  $\sim \theta^2$  по сравнению с 1. Поэтому говорят, что при малых углах приведенные нами формулы справедливы с точностью до членов первого порядка малости.

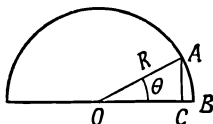
- б) Вычисление производных  $\sin x$  и  $\cos x$  ясно из приводимых ниже формул:

$$\begin{aligned} \frac{d \sin x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \cos x \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d \cos x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} = -\sin x. \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что  $\sin \Delta x \approx \Delta x$ , а  $\cos \Delta x \approx 1$ .



- 8.11. а) Пусть тело в момент времени  $t$  окажется в точке  $M(x, y)$  окружности. Обозначим через  $\varphi$  угол между радиусом, проведенным в эту точку, и положительным направлением оси  $x$ . Как видно из рисунка, координаты этой точки  $M$  записываются следующим образом.

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi.$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получаем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

откуда

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R \frac{d\varphi}{dt}.$$

Производную  $d\varphi/dt$  (скорость изменения угла со временем) назовем угловой скоростью  $\omega$ .

Таким образом,  $v = \omega R$ , или  $\omega = v/R$ . Поскольку  $v$  не зависит от времени, то и  $\omega$  не зависит от времени, так что  $\varphi = \omega t$ . Вообще говоря, следовало бы написать  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ , но по усло-

вию задачи  $\varphi = 0$  при  $t = 0$ , т.е.  $\varphi_0 = 0$ . Следовательно,

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t,$$

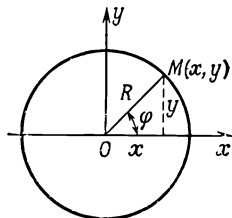
$$v_x = -R\omega \sin \omega t, \quad v_y = R\omega \cos \omega t$$

и

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2 \sin \omega t.$$

б) Сравнивая выражения для  $x$  и  $a_x = \ddot{x}$  и  $y$  и  $a_y = \ddot{y}$ , убеждаемся, что

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$



8.12. Координату  $x$  камешка удобно представить в виде суммы  $x' + x''$ , где  $x'$  — координата относительно оси колеса, а  $x''$  — координата оси колеса (см. рисунок). Аналогично представляем и координату  $y$ . Выражения для  $x'$  и  $y'$  получены в предыдущей задаче (мы должны лишь заменить в соответствующих формулах  $\omega t$  на  $-\omega t$ , поскольку если колесо катится в положительном направлении оси  $x$ , оно вращается по часовой стрелке, а в предыдущей задаче рассмотрено вращение против часовой стрелки). Таким образом,

$$x' = R \cos(-\omega t + \varphi_0),$$

$$y' = R \sin(-\omega t + \varphi_0).$$

В начальный момент времени  $t = 0$  камешек касается земли, поэтому  $\varphi_0 = -\pi/2$  (углы отсчитываются от оси  $x!$ ), так что

$$x' = R \cos\left(-\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -R \sin \omega t,$$

$$y' = R \sin\left(-\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -R \cos \omega t.$$

Правильность этих соотношений можно проверить, подставив в них  $t = 0$ . Как и должно быть, получаем  $x' = 0$  и  $y' = -R$ .

Центр колеса движется вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$ , поэтому  $x'' = vt$ , а  $x = vt - R \sin \omega t$ . Найдем  $v_x$ -компоненту скорости камешка:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v - R\omega \cos \omega t.$$

В моменты соприкосновения с землей ( $\omega t = 2\pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) скорость камешка должна быть равной нулю (по условию задачи проскальзывание отсутствует), поэтому

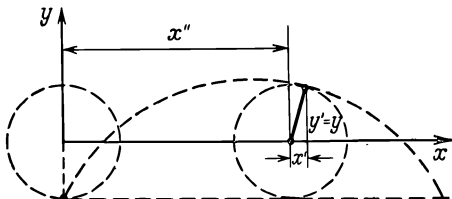
$$v - \omega R = 0, \quad \text{и} \quad \omega = \frac{v}{R}.$$

В итоге получаем то, что называют кинематическими уравнениями движения:

$$x = vt - R \sin \frac{v}{R} t,$$

$$y = -R \cos \frac{v}{R} t.$$

Если исключить из этих уравнений время, то получим зависимость  $y(x)$ , которая изображается кривой, называемой циклоидой (см. ри-



сунк). Дифференцируя полученные выше выражения для  $x$  и  $y$  по времени, находим

$$v_x = v - v \cos \left( \frac{v}{R} t \right),$$

$$v_y = v \sin \left( \frac{v}{R} t \right)$$

и

$$a_x = \frac{v^2}{R} \sin \left( \frac{v}{R} t \right),$$

$$a_y = \frac{v^2}{R} \cos \left( \frac{v}{R} t \right),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{R}.$$

## К главе 9. Динамические законы Ньютона

- 9.1. Поскольку сила перпендикулярна скорости, то она не может изменить модуль скорости, а может лишь изменить ее направление. Так как модуль скорости постоянен, то постоянна и сама сила ( $F = \beta v$ ). Эта сила вызывает ускорение (в направлении, перпендикулярном к  $v$ ), величина которого определяется из соотношения  $ma = \beta v$ , т. е.  $a = \beta v/m$ .

В § 4 гл. 7 «Лекций» (вып. 1) рассматривалось такого рода движение с постоянной по величине скоростью и постоянным ускорением, перпендикулярным скорости. Было показано (см. задачу 7.2), что это есть движение по окружности с радиусом  $R = v^2/a = mv/\beta$ . Сама окружность расположена в плоскости  $xy$ , поскольку и скорость, и сила постоянно находятся в этой плоскости.

- 9.2. При вычислении радиусов кривизны воспользуемся формулой для ускорения, перпендикулярного скорости:

$$a_{\perp} = \frac{v^2}{R}.$$

Далее

$$a_{\perp} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Таким образом, в дополнение к величинам, приведенным в табл. 9.2 «Лекций» (вып. 1, стр. 174), следует вычислить также величины  $dv/dt$  и  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ . Проведя указанные вычисления, находим для радиуса кривизны орбиты:

$$R = 0,664 \quad \text{при } t = 0,$$

$$R = 0,650 \quad \text{при } t = 0,82,$$

$$R = 0,665 \quad \text{при } t = 2,086.$$

- 9.3. а) Мяч влетел в окно горизонтально; это означает, что в этот момент времени он находился в наивысшей точке своей траектории. Максимальная же высота подъема определяется по формуле (см. задачу 8.4)

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{\sin^2 \alpha}} = 14,5 \text{ м/сек.}$$

- б) В наивысшей точке скорость горизонтальна, а ускорение равно  $g$  (ускорение свободного падения) и направлено вертикально; следовательно, оно перпендикулярно скорости. Поэтому

$$g = \frac{v_x^2}{R} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{R},$$

откуда

$$R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 2,46 \text{ м.}$$

Определим теперь радиус кривизны в произвольный момент времени  $t$ .

Обозначив через  $a_{\perp}$  и  $a_{\parallel}$  компоненты ускорения, перпендикулярную и параллельную скорости, запишем

$$a_{\perp} = \sqrt{g^2 - a_{\parallel}^2}.$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} + mgy \right) = 0,$$

т. е.

$$v \frac{dv}{dt} = -g \frac{dy}{dt} = -gv_y.$$

Вспоминая, что  $a_{\parallel} = dv/dt$ , находим

$$a_{\parallel} = -\frac{gv_y}{v}$$

и

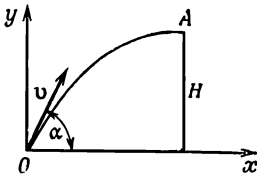
$$a_{\perp} = \frac{gv_x}{v}.$$

Так как  $a_{\perp} = v^2/R$ ,

$$R = \frac{v^2}{a_{\perp}} = \frac{v^3}{gv_x}.$$

Далее,  $v_x = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ ,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ , поэтому в произвольный момент времени

$$R = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2 - 2gv_0 t \sin \alpha)^{3/2}}{gv_0 \cos \alpha}.$$



- 9.4. Все величины в системе  $M'K'C'A'$  будем обозначать буквой со штрихом. Без штриха будем обозначать те же величины в системе  $MKCA$ . Очевидно,

$$v' = \frac{dl'}{dt'} = \frac{\lambda}{\tau} \frac{dl}{dt} = \frac{\lambda}{\tau} v,$$

$$a' = \frac{d}{dt'} \frac{dl'}{dt'} = \frac{\lambda d^2 l}{\tau^2 dt^2} = \frac{\lambda}{\tau^2} a,$$

$$E' = \frac{m'v'^2}{2} = \frac{1}{2} \mu m \left( \frac{\lambda}{\tau} \right)^2 v^2 = \mu \left( \frac{\lambda}{\tau} \right)^2 E,$$

$$F' = m'a' = \mu m \frac{\lambda}{\tau^2} a = \frac{\mu \lambda}{\tau^2} F,$$

$$(l' = \lambda l, m' = \mu m, t' = \tau t).$$

- 9.5. В системе единиц  $M'K'C'A'$  сила тяготения запишется в виде

$$F' = G' \frac{M'_1 M'_2}{R'^2},$$

где  $G'$  — гравитационная постоянная. Следовательно,

$$G' = \frac{F'R'^2}{M'_1 M'_2} = \frac{\lambda^3}{\mu \tau^2} \frac{FR^2}{M_1 M_2} = \frac{\lambda^3}{\mu \tau^2} G.$$

[При получении этой формулы был использован результат предыдущей задачи:  $F' = (\mu \lambda / \tau^2) F$ .]

- 9.6. Заметим прежде всего, что величины  $GM_{\odot}$  в произвольной штрихованной системе единиц и в системе МКСА связаны между собой соотношением

$$G'M'_{\odot} = \frac{\lambda^3}{\mu\tau^2} G\mu M_{\odot} = \frac{\lambda^3}{\tau^2} GM_{\odot}$$

(здесь  $\lambda$  и  $\tau$  — коэффициенты, переводящие соответственно единицы длины и времени из системы МКС в штрихованную).

В системе МКС  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  ньютон·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>,  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  кг, поэтому  $GM_{\odot} = 13,34 \cdot 10^{19}$  м<sup>3</sup>/сек<sup>2</sup>. Вычислим  $\lambda$  и  $\tau$ .

За единицу длины в рассматриваемой системе единиц берется длина большой полуоси орбиты Земли, т.е. расстояние, равное  $14,9 \cdot 10^9$  м. Следовательно, в А.Е. длина  $l'$  выражается через длину  $l$  как

$$l' = \frac{l}{14,9 \cdot 10^{10}} \quad (\text{т. е. } \lambda^{-1} = 14,9 \cdot 10^{10}).$$

Аналогично,  $\tau^{-1} = 3,15 \cdot 10^7$  (число секунд в году). Таким образом,

$$G'M'_{\odot} = 3 \cdot 10^{-19} GM_{\odot} \approx 40 \text{ (А. Е.)}^3 / (\text{лет})^2.$$

Величину  $G'M'_{\odot}$  можно вычислить и другим способом, если вспомнить выражение для периода обращения планеты, полученное нами в задаче 7.4:

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}.$$

Применяя эту формулу для системы Солнце — Земля и пренебрегая массой Земли по сравнению с массой Солнца, получаем

$$GM_{\odot} = \frac{(2\pi)^2 R^3}{T^2}.$$

Но  $R = 1$  А.Е., а  $T = 1$  год, так что  $G'M'_{\odot} = (2\pi)^2 \approx 40 \text{ (А. Е.)}^3 / (\text{лет})^2$ .

- 9.7. В модели Солнечной системы все расстояния измеряются числами, в  $k$  раз меньшими, чем в «натуральной» системе. Представим себе, что это изменение чисел произошло не вследствие реального уменьшения размеров системы, а в результате перехода к новой системе единиц, такой, что  $l' = kl$ . Но тогда и все единицы, размерность которых включает длину, также претерпят определенные изменения. В частности, плотность  $\rho = m/l^3$  станет равной

$$\rho' = \frac{m'}{l'^3} = \frac{1}{k^3} \frac{m'}{l^3}.$$

По условию задачи  $\rho' = \rho$ . Это значит, что нужно взять новую единицу измерения не только для длины, но и для массы тела. Причем, очевидно,  $m' = k^3 m$ .

Как было показано в задаче 7.4, период обращения  $T$  планеты вокруг Солнца выражается через суммарную массу  $M$  Солнца и планеты и большую полуось орбиты  $R$ , так что

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{GM}.$$



В новой системе единиц

$$T'^2 = \frac{(2\pi)^2 R'^3}{G'M'} = \frac{(2\pi)^2 R^3}{GM} = T^2.$$

Здесь мы использовали доказанное в предыдущей задаче соотношение

$$G'M' = \frac{k^3}{\tau^2} GM.$$

(Роль величины  $\lambda$ , фигурирующей в задаче 9.6, у нас играет  $k$ , а  $\tau = 1$ .) Таким образом, мы убеждаемся, что периоды обращения «планет» в изготовленной модели будут такими же, как и в реальной Солнечной системе.

- 9.8. Изменение потенциальной энергии при движении грузов равно изменению потенциальной энергии маленького грузика (насколько одна масса  $M$  опустится, настолько другая поднимется), т. е.  $\Delta u = mgh$ . Если тела в начальный момент покоились, то это изменение потенциальной энергии равно кинетической энергии всей системы в момент, когда подхватывается грузик:

$$mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} mv^2,$$

откуда

$$g = \frac{2M + m}{2mh} v^2.$$

- 9.9. Нагрузка  $N$  на подвес, а следовательно, и на мачту и гондолу при таком способе перевозки марсиан определяется равенством

$$N = T_1 + T$$

( $T$  — натяжение нити,  $T_1$  — нагрузка на ось неподвижного блока);  $T_1$  равна сумме натяжений нити с одной и другой стороны неподвижного блока, т. е.  $T_1 = 2T$ , так что  $N = 3T$ .

Запишем уравнения движения обоих марсиан:

$$\frac{P}{g} a_2 = P - 2T,$$

$$\frac{F}{g} a_1 = F - T$$

(здесь  $g$  — ускорение свободного падения на Марсе). Так как веревка нерастяжима, то  $a_1$  и  $a_2$  связаны между собой. Очевидно, что при смещении оси подвижного блока вниз на  $x_2$  груз  $F$  поднимется на расстояние  $2x_2$ , т. е.  $x_1 = -2x_2$  (грузы смещаются в противоположные стороны). Дважды дифференцируя по времени это соотношение, называемое уравнением связи, получаем

$$a_1 = -2a_2.$$

Требуется решить уравнения движения совместно с полученным уравнением для ускорения.

После простых подстановок имеем

$$-\frac{P}{2g} a_1 = P - 2 \left( F - \frac{F}{g} a_1 \right) = P - 2F + \frac{2F}{g} a_1,$$

откуда

$$a_1 = \frac{2F - P}{2F + P/2} g = \frac{4F - 2P}{4F + P} g.$$

Таким образом,

$$T = F - F \frac{4F - 2P}{4F + P} = \frac{3FP}{4F + P},$$

а нагрузка на гондолу

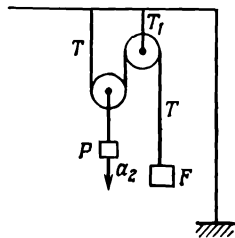
$$N = \frac{9FP}{4F + P}.$$

В нашем случае  $P = 90$  кг и  $F = 60$  кг, поэтому для  $N$  получаем 147 кг.

Выигрыш в нагрузке на гондолу равен

$$\Delta N = (F + P) - N = 3 \text{ кг}.$$

Гондольер Джузеппе мог бы получить значительно больший выигрыш в нагрузке, если бы поменял влюбленных местами. Нетрудно подсчитать, что в этом случае  $N = 116$  кг, а  $\Delta N = 34$  кг, т. е. выигрыш в нагрузке увеличился бы примерно в 11 раз по сравнению с предыдущим случаем. Правда, в этом случае Паоло будет двигаться вниз с ускорением, в три раза превышающим то, с каким двигалась Франческа при первом способе перевозки, так что Джузеппе придется изрядно поработать, чтобы успеть переправить молодых марсиан на противоположный берег канала.



9.10. Вес гири  $A$  на Луне меньше 1 кг, поэтому камень  $B$  на блоке перетянет гирю. Запишем уравнения движения:

$$m_B a = m_B g_L - T,$$

$$m_A a = -m_A g_L + T$$

( $g_L$  — ускорение свободного падения на Луне,  $T$  — натяжение нити), откуда

$$(m_B + m_A) a = (m_B - m_A) g_L.$$

Кроме того, известно, что камень  $B$  растягивает пружину на Луне так же, как гирия  $A$  растягивает ее на Земле. Это означает, что  $m_A g = m_B g_L$ , т. е.  $g_L = (m_A/m_B) g$  ( $g$  — ускорение свободного падения на Земле).

Подставляя это значение  $g_L$  в выражение для  $a$ , после несложных преобразований получаем квадратное уравнение для  $m_B$ :

$$am_B^2 - m_A (g - a) m_B + m_A^2 g = 0.$$

Отсюда находим

$$m_B = 5,75 \text{ кг}.$$

Второе решение квадратного уравнения  $m_B = 1,34$  кг отбрасываем, поскольку известно, что  $g/g_D \approx 6$ , поэтому должно быть и  $m_B/m_A \approx 6$ .

- 9.11. а) Чтобы найти ускорение лифта, запишем уравнение движения системы как целого:

$$(M_1 + M_2) a = F - (M_1 + M_2) g,$$

откуда

$$a = \frac{F}{M_1 + M_2} - g.$$

- б) На груз  $M_1$  действуют две силы: натяжение нити и сила веса, причем  $M_1 a = T - M_1 g$  (масса  $M_1$  движется вверх с тем же ускорением  $a$ , что и лифт), т. е.

$$T = M_1 (a + g) = \frac{M_1}{M_1 + M_2} F.$$

- в) После обрыва нити на массу  $M_1$  действует только сила тяжести, так что она движется вниз с ускорением  $g$ . Ускорение же лифта по-прежнему направлено вверх; величину его найдем из нового уравнения движения

$$M_2 a_2 = F - M_2 g,$$

т. е.

$$a_2 = \frac{F}{M_2} - g.$$

- г) Мы убедились, что тело  $M_1$  движется вниз с ускорением  $g$ , а лифт поднимается вверх с ускорением  $a_2$ . Значит, относительно лифта тело движется по направлению к полу с ускорением

$$a_1 = g + a_2 = \frac{F}{M_2}.$$

Путь  $S$  тело пройдет за время  $t$ , так что  $S = a_1 t^2 / 2$ , откуда

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a_1}} = \sqrt{\frac{2SM_2}{F}}.$$

- 9.12. Обозначим массу маляра через  $M_1$ , а массу кресла через  $M_2$ . Запишем уравнения движения маляра и кресла:

$$M_1 a = T - M_1 g + P,$$

$$M_2 a = T - M_2 g - P;$$

здесь  $P$  — сила давления маляра на кресло.

Вычитая нижнее уравнение из верхнего, находим

$$a = \frac{2P - (M_1 - M_2)g}{M_1 - M_2} = \frac{1}{3} g.$$

Складывая затем уравнения движения, находим

$$2T = (M_1 + M_2)(a + g) = \frac{4}{3}(M_1 + M_2)g \approx 112 \text{ кг}.$$

Это и есть полная нагрузка на блок:

$$N = 2T = 112 \text{ кг}.$$

- 9.13. Если груз  $M_2$  не опускается и не поднимается, то это означает, что его вес  $M_2g$  равен натяжению нити. Найдем ускорение груза  $M_1$ :

$$M_1 a = T = M_2 g, \text{ т. е. } a = \frac{M_2}{M_1} g.$$

Определим теперь силу  $F$ . Так как  $M$ ,  $M_1$  и  $M_2$  движутся как одно целое, то

$$F = (M + M_1 + M_2) a = \frac{(M + M_1 + M_2) M_2}{M_1} g.$$

- 9.14. Массы  $M$  и  $m$  движутся вправо как одно целое, поэтому  $(M+m)a = 2T$ , где  $a$  — ускорение горизонтального движения, а  $T$  — натяжение нити. Грузик  $m$  движется вертикально вниз с ускорением  $a_1$ , уравнение его движения имеет вид

$$m a_1 = m g - T.$$

Из рисунка, приведенного в условии задачи, видно, что при смещении рамы вправо на расстояние  $x$  грузик  $m$  опустится вниз на расстояние  $y = 2x$ , что дает  $a_1 = 2a$ .

Таким образом,

$$(M + m) a = 2T \quad \text{или} \quad (M + m) a_1 = 4T.$$

Из двух уравнений движения находим

$$a_1 = \frac{4m}{M + 5m} g.$$

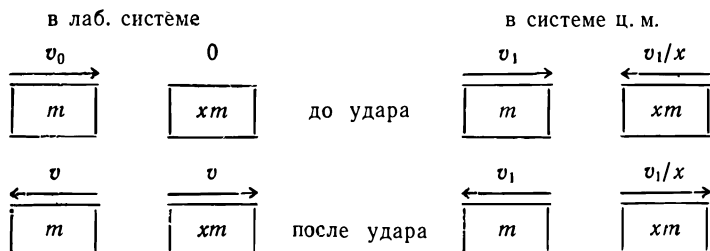
Время движения грузика

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{M + 5m}{2m} \frac{a}{g}} \approx 1 \text{ сек.}$$

## К главе 10. Закон сохранения импульса

- 10.1. Пусть масса движущегося тела  $m$ , его скорость до соударения  $v_0$ , а масса покоящегося тела  $xm$  (т.е. искомое отношение масс тел обозначено через  $x$ ).

Рассмотрим сначала процесс столкновения двух тел не в неподвижной относительно Земли системе координат (будем называть ее лабораторной, или лаб. системой), а в системе центра масс (системе ц. м.):



В этой системе сумма импульсов тел равна нулю (т.е. в момент столкновения массы  $m$  и  $xm$  можно рассматривать как одно

покоящееся тело). Отсюда сразу вытекает, что скорости тел  $m$  и  $xm$  обратно пропорциональны массам. Так как процесс абсолютно упругий, величины скоростей тела до и после удара одинаковы. Система ц. м. движется относительно Земли (т. е. относительно лаб. системы) с некоторой скоростью  $v_{ц}$ . Процесс столкновения в лаб. системе изображен на схеме слева. Столкновение в системе ц. м. можно наблюдать, если, скажем, сесть в машину, движущуюся вправо со скоростью  $v_{ц}$ . При этом вид из машины будет такой:

$$\begin{array}{cc} \frac{v_0 - v_{ц}}{\boxed{m}} & \frac{v_{ц}}{\boxed{xm}} & \text{до удара,} \\ \frac{v + v_{ц}}{\boxed{m}} & \frac{v - v_{ц}}{\boxed{xm}} & \text{после удара.} \end{array}$$

Сравнивая эту картину с тем, что было сказано о столкновении в системе ц. м. ранее, получаем

$$v_1 = v_0 - v_{ц},$$

$$v_{ц} = \frac{1}{x} v_1,$$

$$v_1 = v + v_{ц}$$

и

$$\frac{1}{x} v_1 = v - v_{ц}.$$

Вычитая из третьего уравнения четвертое и деля получившееся выражение на второе уравнение, находим

$$\frac{v_1 - v_1/x}{v_1/x} = 2,$$

откуда  $x = 3$ .

- 10.2.** Рассмотрим сначала случай, когда скорости сталкивающихся тел одинаковы и равны  $v$ . После столкновения тела разлетаются с меньшими скоростями ( $v - \Delta v$ ). Согласно условию,

$$\frac{(m/2) v^2 - (m/2) (v - \Delta v)^2}{(m/2) v^2} = f,$$

или

$$\frac{v^2 - (v - \Delta v)^2}{v^2} = f.$$

откуда

$$v - \Delta v = v\sqrt{1-f} \approx v\left(1 - \frac{1}{2}f\right),$$

т. е.

$$\Delta v = \frac{vf}{2}.$$

Обратимся теперь к случаю, когда одно из тел покоится, а другое движется со скоростью  $v$ . Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью  $v/2$  в том же направлении, что и налетающее тело (в систему ц. м.). Тем самым мы свели задачу к предыдущей, с той лишь разницей, что скорости сталкивающихся тел теперь уже не  $v$ , а  $v/2$ . Соответственно

$$\Delta v = \frac{vf}{4},$$

т. е. после столкновения тела разлетаются со скоростями

$$\frac{v}{2} - \frac{vf}{4}.$$

Переходя в неподвижную систему координат, убеждаемся, что покоившееся прежде тело движется со скоростью

$$v - \frac{vf}{4} \approx v,$$

а налетевшее — с малой скоростью  $vf/4$  в том же направлении, что и до столкновения.

- 10.3.** Двигаясь по орбите, спутник в единицу времени сталкивается с молекулами воздуха, занимающими объем  $vS$  ( $v$  — скорость спутника,  $S$  — площадь его поперечного сечения). Масса этого объема воздуха  $m_1 = \rho Sv$ , где  $\rho$  — плотность воздуха.

Изменение количества движения спутника за этот же промежуток времени  $\Delta p = m(v - v')$  равно, очевидно, изменению количества движения массы  $m_1$  воздуха, т. е.

$$\Delta p = m_1 v = \rho S v^2.$$

(До столкновения средняя скорость молекулы воздуха относительно Земли равна нулю, после столкновения — скорости спутника  $v$ .)

Но изменение количества движения тела в единицу времени есть просто сила, действующая на тело. Таким образом, тормозящая сила  $F_{\text{торм}} = \rho S v^2$ , т. е. пропорциональна квадрату скорости спутника. Найдем ее величину.

Для стационарной орбиты

$$\frac{mv^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2},$$

откуда

$$v^2 = \frac{GM}{R+h}$$

( $M$  и  $R$  — масса и радиус Земли,  $G$  — постоянная тяготения).

Если тело находится на поверхности Земли, то, очевидно,

$$mg = \frac{GMm}{R^2} \text{ и } GM = gR^2.$$

Подставляя это значение  $GM$  в выражение для скорости спутника, получаем

$$v^2 = \frac{gR^2}{R+h} \approx gR \left(1 - \frac{h}{R}\right).$$

Здесь мы воспользовались приближенной формулой:  $1/(1+x) \approx 1-x$  при  $x \ll 1$ . Таким образом,

$$F_{\text{торм}} = \rho g S R \left(1 - \frac{h}{R}\right) \approx 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ ньютон}$$

( $\rho = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}^3$ ,  $S = 0,5 \text{ м}^2$ ,  $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$ ,  $h = 0,2 \cdot 10^6 \text{ м}$ ).

Как видно из формулы, связывающей высоту и скорость спутника, скорость спутника по мере уменьшения его высоты увеличивается. Может показаться странным, что действие силы торможения приводит к увеличению скорости. Однако дело состоит в том, что при наличии торможения скорость спутника уже не перпендикулярна направлению силы тяжести, т. е. появляется составляющая силы тяжести, изменяющая величину скорости спутника. Ускоряющее действие этой составляющей превосходит тормозящее действие силы торможения. (Подробнее об этом см. в решении задачи 14.18.)

- 10.4. а) Можно считать, что в самом начале движения масса ракеты остается все время постоянной и равной  $M_0$ , т. е. можно пренебречь массой истекающих газов по сравнению с начальной массой ракеты. Кроме того, можно считать скорость газов относительно Земли постоянной и равной  $v_0$ , так как скорость ракеты очень мала. Если вначале ракета покоилась, то количество движения ракеты вместе с топливом равно нулю. За время  $t$  из ракеты выбрасывается  $r_0 t$  кг газа со скоростью  $v_0$ , а сама ракета начинает двигаться со скоростью  $v$  в противоположном направлении. Из закона сохранения количества движения  $v_0 r_0 t = M_0 v$  имеем  $v = (v_0 r_0 / M_0) t$ . Ускорение же ракеты равно

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0 r_0}{M_0}.$$

- б) Силой тяги называется произведение массы ракеты на ускорение. Как было показано в п. (а), это ускорение равно  $v_0 r_0 / M_0$ , откуда  $F = v_0 r_0$ . Следовательно, расход топлива для создания необходимой силы тяги есть

$$r_0 = \frac{F}{v_0} = \frac{9,8 \cdot 10^5 \text{ ньютон}}{2 \cdot 10^3 \text{ м/сек}} = 490 \text{ кг/сек.}$$

Мы здесь рассматривали силу тяги и расход топлива только в начальный момент времени. Ниже будет показано, что при постоянной относительной скорости истечения газов  $v_0$  сила тяги тоже постоянна, т. е. полученный результат справедлив в любой момент времени.

- в) Пусть  $M$  — масса ракеты, а  $v$  — ее скорость в произвольный момент времени  $t$ . За промежуток времени  $dt$  из ракеты будет выброшено  $r_0 dt$  газов со скоростью (относительно Земли)  $v - v_0$ , в результате чего скорость ракеты возрастет на  $dv$ . Согласно закону сохранения количества движения,

$$Mv = (v - v_0) r_0 dt + (v + dv) (M - r_0 dt),$$

откуда следует

$$M \frac{dv}{dt} = r_0 v_0.$$

В левой части полученного уравнения стоит произведение массы ракеты в данный момент времени на ее ускорение  $dv/dt$ , следовательно, в правой части стоит сила  $F$ . Как видим, при постоянных  $r_0$  и  $v_0$  она также постоянна. Найдем теперь скорость ракеты в

произвольный момент времени. Учитывая, что  $M(t) = M_0 - r_0 t$ , находим

$$\frac{dv}{v_0} = \frac{r_0 dt}{M_0 - r_0 t}.$$

Интегрируя правую и левую части, получаем зависимость скорости ракеты от времени:

$$\frac{v}{v_0} = -\ln(M_0 - r_0 t) + C.$$

Интеграл, стоящий в правой части, можно найти в математическом справочнике. Во всяком случае, пользуясь приближенной формулой  $\ln(1+x) \approx x$  при  $x \ll 1$ , можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{d \ln x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln[x(1 + \Delta x/x)] - \ln x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \Delta x/x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

После этого нетрудно убедиться, что производная  $[-\ln(M_0 - r_0 t)]$  равна подынтегральной функции, так что интеграл вычислен правильно.

Постоянная  $C$  определяется из начальных условий. Если при  $t = 0$  ракета покоилась, то  $C = \ln M_0$ . Поэтому

$$v = v_0 \ln \frac{M_0}{M_0 - r_0 t} = v_0 \ln \frac{M_0}{M}.$$

- 10.5.** Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью  $v_{ц. м}$ . В этой системе скорости тел с массами  $m_1$  и  $m_2$  будут соответственно  $v_1 - v_{ц. м}$  и  $v_2 - v_{ц. м}$ . По определению системы ц. м.

$$m_1(v_1 - v_{ц. м}) + m_2(v_2 - v_{ц. м}) = 0,$$

откуда

$$v_{ц. м} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

- 10.6.** Пусть имеется  $n$  тел с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$  и скоростями  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . В системе, движущейся со скоростью  $v_{ц. м}$ , скорости тел соответственно равны  $v_1 - v_{ц. м}, v_2 - v_{ц. м}, \dots, v_n - v_{ц. м}$ , а сумма их импульсов равна нулю:

$$m_1(v_1 - v_{ц. м}) + m_2(v_2 - v_{ц. м}) + \dots + m_n(v_n - v_{ц. м}) = 0.$$

Собирая члены, содержащие  $v_{ц. м}$ , и перенося их в правую часть, после несложных преобразований получаем

$$v_{ц. м} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$



- 10.7. Скорости тел в неподвижной (лабораторной) системе координат обозначим через  $v_1$  и  $v_2$ , а в системе центра масс  $v'_1$  и  $v'_2$ , причем  $v'_1 = v_1 - v_{ц.м}$  и  $v'_2 = v_2 - v_{ц.м}$ . Кинетическая энергия этих тел в лаб. системе равна

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{ц.м}^2 + v_{ц.м} (m_1 v'_1 + m_2 v'_2).$$

Сумма первых двух членов есть кинетическая энергия  $T_{ц.м}$  тел в системе ц. м., а коэффициент при  $v_{ц.м}$  равен сумме импульсов частиц в системе ц. м. и, следовательно, по определению системы ц. м. обращается в нуль. Таким образом,

$$T = T_{ц.м} + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{ц.м}^2.$$

- 10.8. В случае произвольного числа тел формула для кинетической энергии записывается в виде, аналогичном формуле, приведенной в решении задачи 10.7. По причине, указанной в решении задачи 10.7, коэффициент при  $v_{ц.м}$  равен нулю. Следовательно,

$$T = T_{ц.м} + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) v_{ц.м}^2 = T_{ц.м} + \frac{1}{2} M v_{ц.м}^2,$$

где

$$T_{ц.м} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2,$$

а  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  — масса всей системы.

- 10.9. Пусть скорость нейтрона до удара была  $v$ . Если масса нейтрона  $m$ , то масса ядра  $C^{12}$  равна примерно  $12m$ . Закон сохранения количества движения дает

$$mv = 12mv_2 - mv_1,$$

или

$$v_2 = \frac{v + v_1}{12}$$

(где  $v_1$  — значение скорости нейтрона после столкновения, а  $v_2$  — скорость ядра). Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} (12m) v_2^2 + \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $v_2$ , находим

$$13v_1^2 + 2vv_1 - 11v^2 = 0,$$

откуда

$$v_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 11 \cdot 13v^2}}{13} = \frac{-v + 12v}{13} = \frac{11}{13} v.$$

Для  $v_1$  мы выбираем положительное решение квадратного уравнения, так как заранее знаем, что нейтрон полетит назад. Направления же скоростей нейтрона и ядра после удара уже фактически учтены нами при записи закона сохранения импульса.

Для отношения кинетических энергий нейтрона до и после столкновения получаем

$$\frac{E'}{E} = \frac{(m/2)v_1^2}{(m/2)v_2^2} = \left(\frac{11}{13}\right)^2 \approx 0,72.$$

- 10.10. Найдем в первую очередь начальную скорость бруска  $v_1$ . При этом можно воспользоваться законом сохранения импульса: пока брусок не отклонился, горизонтальные силы отсутствуют и поэтому импульс бруска с попавшей в него пулей равен начальному импульсу пули:

$$(M + m)v_1 = mv, \text{ откуда } v = \frac{M + m}{m} v_1.$$

В точке наивысшего подъема кинетическая энергия бруска и пули  $(M + m)v_1^2/2$  переходит в потенциальную энергию  $(M + m)gh$ , где  $h$  — высота подъема бруска, поэтому  $v_1^2 = 2gh$ . Выразим  $h$  через  $x$  и  $L$ . Как видно из рисунка, треугольники  $AOC$  и  $AA'B$  подобны и  $h/x = x/2L$ , т. е.  $h = x^2/2L$ .

Следовательно,

$$v_1^2 = \frac{x^2 g}{L}, \text{ а } v = \frac{M + m}{m} x \sqrt{\frac{g}{L}}.$$



## К главе 11. Векторы

- 11.1. а)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  
 б)  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  
 в)  $a_x = 3$ ,  
 г)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = 3$ ,  
 д)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 3$ ,  
 е)  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 9\mathbf{b} - 3\mathbf{c} = 15\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ .

- 11.2. а) Велосипедиста обдувают два потока воздуха: встречный, движущийся со скоростью его собственного движения  $v$ , и косой — со скоростью  $v_1$  (см. нижнюю половину рисунка). Очевидно, что если ветер дует откуда-то с северо-востока, то скорость потока воздуха направлена куда-то на юго-запад. Естественно, велосипедист ощущает суммарный результат действия этих двух потоков, так что ему кажется, что ветер дует под углом  $\alpha$ . Для неподвижного наблюдателя направление ветра составляет угол  $\varphi = \alpha + \beta$  с направлением движения велосипедиста. Угол  $\beta$  найдем, принимая во внимание, что  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} + \mathbf{v}_1$ , т. е.  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  образуют треугольник.

Для треугольника скоростей имеем

$$\frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v}{\sin \beta}, \text{ откуда } \sin \beta = \frac{v}{v_1} \sin \alpha = 0,431,$$

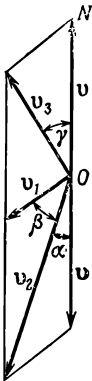
т. е.

$$\beta = 25^\circ 30'.$$

Таким образом,

$$\varphi = \alpha + \beta = 40^\circ 30'.$$

- б) Если велосипедист движется на юг, то угол  $\gamma$  между кажущимся направлением ветра и направлением движения велосипедиста (см. верхнюю часть рисунка) удовлетворяет соотношению



$$\frac{v_1}{\sin \gamma} = \frac{v}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)]} = \frac{v}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)},$$

откуда

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\sin \gamma \cos (\alpha + \beta) + \cos \gamma \sin (\alpha + \beta)}{\sin \gamma},$$

или

$$\operatorname{ctg} \gamma = \left[ \frac{v}{v_1} - \cos (\alpha + \beta) \right] \frac{1}{\sin (\alpha + \beta)} = 1,39,$$

т. е.  $\gamma = 35^\circ 40'$ .

- 11.3. Выберем систему координат так, чтобы ось  $x$  была направлена строго на восток, а ось  $y$  — на север. Предположим далее, что второй корабль в начальный момент времени находится в начале координат  $O$ , а вектор его скорости  $v_2$  образует угол  $\alpha$  с осью  $OX$ . Очевидно, первый корабль находится в точке  $B$ , расположенной на оси  $y$  на расстоянии 6 миль от точки  $O$ , а его скорость направлена параллельно оси  $x$ .

В таком случае изменение координат кораблей со временем дается выражениями

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1 t, & y_1 &= 6, \\ x_2 &= v_2 t \cos \alpha, & y_2 &= v_2 t \sin \alpha. \end{aligned}$$

Квадрат расстояния между двумя кораблями в произвольный момент времени равен

$$r^2 = (r_1 - r_2)^2 = (v_1 - v_2 \cos \alpha)^2 t^2 + (6 - v_2 t \sin \alpha)^2.$$

В условии задачи дано, что минимальное расстояние между кораблями равно 3 мили. Значит,  $r^2$  как функция времени  $t$  имеет минимум при некотором значении времени  $t = t_{\text{мин}}$ . Но в этот момент времени производная от  $r^2$  обращается в нуль:

$$\left. \frac{dr^2}{dt} \right|_{t=t_{\text{мин}}} = 0;$$

следовательно,

$$2(v_1 - v_2 \cos \alpha)^2 t_{\text{мин}} - 2(6 - v_2 t_{\text{мин}} \sin \alpha) v_2 \sin \alpha = 0,$$

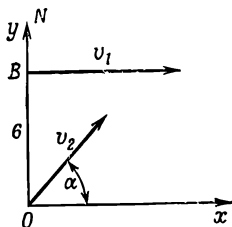
откуда

$$t_{\min} = \frac{6v_2 \sin \alpha}{v_1^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha + v_2^2}.$$

Наконец, подставляя вместо  $v_1$  и  $v_2$  их численные значения и учитывая, что  $r^2(t_{\min}) = 9$ , находим

$$6^2 \cdot 26 \cos^2 \alpha - 27 \cdot 30 \cos \alpha = 0,$$

откуда  $\cos \alpha_1 = 0$  ( $\alpha_1 = 90^\circ$ ) и  $\cos \alpha_2 = 0,866$  ( $\alpha_2 = 30^\circ$ ). При меньшем значении угла  $\alpha_2 = 30^\circ$  второй корабль пересечет курс первого (т. е. попадет на линию  $y = 6$ ) в момент времени  $t_2 = 6/v_2 \sin \alpha_2 = 6/13$  час. На восток при этом второй корабль уйдет на расстояние  $S_2 = v_2 t_2 \cos \alpha_2 \approx 11,8$  мили, а первый — на расстояние  $S_1 = v_1 t_2 \approx 7$  миль. Значит, второй корабль в рассматриваемом случае прошел бы перед носом первого корабля, и, следовательно, это значение угла должно быть исключено по условию задачи. Таким образом, второй корабль движется курсом строго на север. Он окажется на минимальном расстоянии от первого через  $t_{\min} = 0,17$  час  $\approx 10$  мин от начального момента времени.



- 11.4. Можно считать, что произвольная точка  $M$  колеса участвует в двух движениях: равномерном со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$  и вращательном вокруг центра колеса с угловой скоростью  $\omega = v/R$  (см. задачу 8.12). Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  радиус-вектор точки  $M$  направлен под углом  $\varphi_0$  к оси  $x$ . Действуя так же, как и в решении задачи 8.12, находим координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  в произвольный момент времени  $t$ :

$$x = vt + R \cos(\omega t - \varphi_0),$$

$$y = -R \sin(\omega t - \varphi_0).$$

Компоненты скорости точки  $M$  найдем, дифференцируя по времени выражения для координат:

$$v_x = v - R\omega \sin(\omega t - \varphi_0) = R\omega [1 - \sin(\omega t - \varphi_0)],$$

$$v_y = -R\omega \cos(\omega t - \varphi_0).$$

Вектор скорости есть

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}.$$

Будем считать, что в момент времени  $t$  точка  $M$  занимает положение, указанное на рисунке, а колесо соприкасается с горизонтальной поверхностью в точке  $A$ . Очевидно,

$$\mathbf{r}_M = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \text{а} \quad \mathbf{r}_A = vt\mathbf{i} - R\mathbf{j}.$$

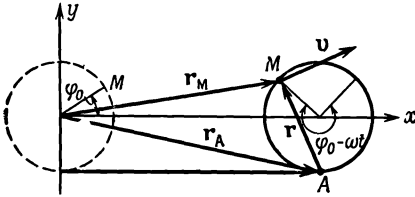
Проведем вектор  $\mathbf{r}$  из точки касания  $A$  в точку  $M$ . Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A = \mathbf{i}R \cos(\omega t - \varphi_0) + \mathbf{j}R [1 - \sin(\omega t - \varphi_0)].$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что скалярное произведение  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$  (т.е. скорость точки  $M$  направлена перпендикулярно вектору  $\mathbf{r}$ ), а

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \omega r.$$

Положение точки на ободе колеса определяется выбором угла  $\varphi_0$ , а его конкретное значение при вычислениях мы нигде не использовали (ср. с задачей 8.12), следовательно, точка  $M$  произвольна. Но в таком случае полученный результат означает, что движение колеса в любой момент времени эквивалентно «чистому» вращению колеса с угловой скоростью  $\omega$  вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку соприкосновения колеса с горизонтальной плоскостью в тот же момент времени.



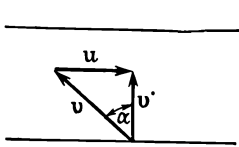
- 11.5. При движении против течения реки скорость лодки равна  $v - u$ , а по течению  $v + u$ . Поэтому время  $t_V$  равно

$$t_V = \frac{d}{v - u} + \frac{d}{v + u} = \frac{2vd}{v^2 - u^2}.$$

При движении поперек реки скорость лодки должна быть направлена под некоторым углом  $\alpha$  к направлению на противоположный берег (иначе лодка не попадет в нужную точку). Как видно из рисунка, скорость лодки поперек реки  $v' = \sqrt{v^2 - u^2}$ ; следовательно, время движения в поперечном направлении

$$t_A = \frac{2d}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Наконец, по озеру расстояние  $2d$  лодка пройдет за время  $t_L = 2d/v$ . Таким образом,



$$\frac{t_V}{t_A} = \frac{v}{\sqrt{v^2 - u^2}} \quad \text{и} \quad \frac{t_A}{t_L} = \frac{v}{\sqrt{v^2 - u^2}},$$

т. е.

$$\frac{t_V}{t_A} = \frac{t_A}{t_L}.$$

- 11.6. Обозначим скорость плывущего человека буквой  $v$ , скорость реки через  $u$ , а скорость идущего человека через  $v_1$ . Чтобы попасть на противоположный берег в точку  $B$ , плывя под некоторым углом к течению, человеку потребуется время (см. решение предыдущей задачи)

$$t_1 = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Если же он будет плыть перпендикулярно течению, то на противоположный берег он попадет за время  $t'_2 = d/v$ , но течением его снесет в точку  $C$ , которая находится ниже точки  $B$  на расстоянии  $BC = ut'_2$ .

Пешком это расстояние человек пройдет за время

$$t''_2 = \frac{BC}{v_1} = \frac{u}{v_1} t'_2,$$

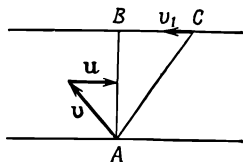
поэтому полное время движения человека вторым способом равно

$$t_2 = t'_2 + t''_2 = \left(1 + \frac{u}{v_1}\right) \frac{d}{v}.$$

Следовательно,

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1 v}{(u + v_1) \sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Подставляя сюда значения скоростей, убеждаемся, что  $t_1/t_2 > 1$ .

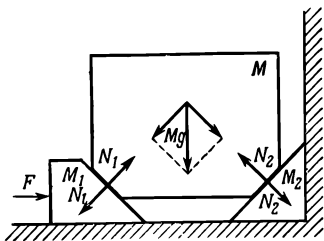


- 11.7. Запишем сначала уравнение движения для клина  $M_1$ . На этот клин действуют две силы: сила  $F$  и сила давления  $N_1$  со стороны груза  $M$ , горизонтальная проекция которой равна  $N_1/\sqrt{2}$  и направлена против движения (фиг. 1). Итак,

$$M_1 a_1 = F - \frac{1}{\sqrt{2}} N_1.$$

Обратимся теперь к грузу  $M$ . Он скользит вверх по поверхности клина  $M_2$  (т. е. под углом  $45^\circ$  к горизонту), и поэтому в уравнение движения груза входят лишь силы, действующие вдоль этого направления. Таких сил две:  $N_1$  и проекция силы тяжести  $Mg/\sqrt{2}$ . Имеем

$$Ma = N_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} Mg.$$

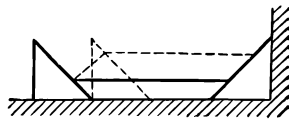


Фиг. 1.

Найдем теперь связь между  $a$  и  $a_1$ . Как видно из фиг. 2, смещение груза  $M$  (изображена лишь нижняя кромка этого груза) вдоль поверхности клина  $M_2$  в  $\sqrt{2}$  раз меньше смещения клина  $M_1$  по горизонтали. Следовательно,  $a = a_1/\sqrt{2}$ . Полученные уравнения запишем в виде системы

$$M_1 a_1 = F - \frac{1}{\sqrt{2}} N_1,$$

$$Ma_1 = -Mg + \sqrt{2} N_1.$$



Фиг. 2.

Умножая первое из этих уравнений на 2 и складывая правые и левые части, находим

$$a_1 = \frac{2F - Mg}{2M_1 + M} = 2g.$$

Имеем далее

$$a = \frac{a_1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} g.$$

Нетрудно также найти силу  $N_2$ ; поскольку отсутствует движение перпендикулярно поверхности  $M_2$ ,

$$N_2 = \frac{Mg}{\sqrt{2}} \approx 272 \text{ кг}.$$

Таким образом:

а) клин  $M_1$  движется горизонтально с ускорением  $2g$ , направленным к неподвижной стенке;

б) груз  $M$  движется вверх вдоль неподвижного клина  $M_2$  с ускорением  $\sqrt{2} g$ ;

в) сила давления клина  $M_2$  на груз  $M$  равна  $272 \text{ кг}$ .

- 11.8. Пусть точка  $M$  движется по окружности радиусом  $R$  с постоянной скоростью  $v$ . Время одного оборота, т. е. период движения,  $\tau = 2\pi R/v$ . К точке  $M$  приложены две силы: сила тяжести  $mg$ , направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити  $T$ , направленная вверх по нити. Очевидно, центростремительная сила  $F_c = mg + T$ ; она направлена по радиусу горизонтальной окружности. Как видно из рисунка, модуль ее равен  $F_c = mg \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между нитью и вертикалью, т. е. вызываемое этой силой центростремительное ускорение равно по величине  $g \operatorname{tg} \alpha$ . С другой стороны, как известно, это ускорение равно  $v^2/R$ ; следовательно,

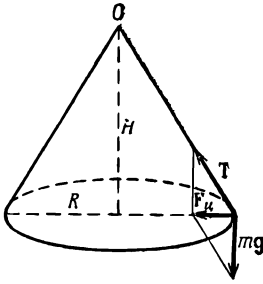
$$v^2/R = g \operatorname{tg} \alpha \text{ и } v^2 = gR \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом,

$$\tau = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}},$$

так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H}.$$



- 11.9. а) Пусть имеется  $n$  тел с массами  $m_1, \dots, m_n$  и скоростями  $v_1, \dots, v_n$ . В системе ц. м. эти скорости соответственно равны  $v_1 - v_{ц. м.}, \dots, v_n - v_{ц. м.}$ . По определению системы ц. м.

$$m_1 (v_1 - v_{ц. м.}) + \dots + m_n (v_n - v_{ц. м.}) = 0,$$

откуда

$$v_{ц. м.} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i v_i.$$

- б) Обозначим через  $v'_1, \dots, v'_n$  скорости тел в системе ц. м. Тогда  $v_1 = v'_1 + v_{ц. м.}, \dots, v_n = v'_n + v_{ц. м.}$  представляют собой скорости

тел в неподвижной системе координат. Кинетическая энергия в этой системе

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v'_i + v_{ц.м.})^2 = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} v_{ц.м.}^2 \sum_{i=1}^n m_i + v_{ц.м.} \sum_{i=1}^n m_i v'_i.$$

Но

$$\sum_{i=1}^n m_i v'_i = 0, \text{ а величина } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 = T_{ц.м.}$$

есть кинетическая энергия тел в системе ц.м.; следовательно,

$$T = T_{ц.м.} + \frac{1}{2} M v_{ц.м.}^2 \quad \left( M = \sum_{i=1}^n m_i \right).$$

Таким образом, кинетическая энергия системы материальных точек в лабораторной системе координат равна ее кинетической энергии в системе ц.м. плюс кинетическая энергия центра масс, рассматриваемого как материальная точка массой  $M$ , движущаяся со скоростью  $v_{ц.м.}$

**11.10.** Закон сохранения количества движения в векторной форме для данного случая имеет вид

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v},$$

откуда

$$\mathbf{v} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = 2(j + k) \text{ м/сек.}$$

**11.11.** Кинетическая энергия частиц до столкновения равна

$$T_{ц.м.} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2,$$

где  $v'_1$  и  $v'_2$  — скорости первой и второй частиц в системе ц.м. Обратим внимание, что вычисленная нами в предыдущей задаче скорость  $\mathbf{v}$  есть фактическая скорость центра масс  $v_{ц.м.}$

Следовательно,

$$v'_1 = v_1 - v = 3i - 3k \text{ м/сек,}$$

$$v'_2 = v_2 - v = -2i + 2k \text{ м/сек,}$$

$$T_{ц.м.} = 30 \text{ Дж.}$$

**11.12.** Выберем систему координат, в которой ось  $y$  направлена на север, а ось  $x$  — на восток. В этой системе координат скорости первого тела до и после удара равны

$$\mathbf{v}_1 = 6j \text{ м/сек, } \mathbf{u}_1 = 2i + 2j \text{ м/сек.}$$



- а) Скорость  $u_2$  более тяжелого тела после столкновения определим, пользуясь законом сохранения импульса:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

откуда

$$u_2 = \frac{m_1 (v_1 - u_1)}{m_2} = -1 + 2j \text{ м/сек.}$$

Величина этой скорости

$$u_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ м/сек.}$$

- б) Учитывая, что

$$v_{ц. м} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 2j \text{ м/сек.}$$

находим скорости тел до и после столкновения в системе ц. м.:

$$v'_1 = 4j \text{ м/сек.}, \quad u'_1 = 2i \text{ м/сек.},$$

$$v'_2 = -2j \text{ м/сек.}, \quad u'_2 = -1 \text{ м/сек.}$$

Кинетическая энергия до удара в системе ц. м. равна

$$T_{ц. м} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 12 \text{ Дж},$$

а после удара

$$T'_{ц. м} = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = 3 \text{ Дж.}$$

Таким образом, потеря энергии

$$\Delta T = T_{ц. м} - T'_{ц. м} = 9 \text{ Дж},$$

и относительная потеря энергии  $\Delta T/T = 3/4$ .

- в) Согласно п. (б), более легкое тело в системе ц. м. имело скорость до удара  $4j$ , а после удара  $2i$ . Это значит, что до удара оно двигалось вдоль оси  $y$ , а после удара — вдоль оси  $x$ . Следовательно в системе ц. м. оно отклонилось на угол  $90^\circ$  (более точно — на угол  $-90^\circ$ ).

11.13. Пусть  $v$  скорость налетающей частицы. Найдем  $v_{ц. м}$ :

$$v_{ц. м} = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2}.$$

Начальные скорости частиц в системе ц. м. равны  $v'_1 = v/2$  и  $v'_2 = -v/2$ .

После абсолютно упругого соударения скорости частиц в системе ц. м. остаются прежними по величине ( $u'_1 = u_2 = v/2$ ), но линия относительного движения поворачивается. Чтобы перейти к лаб системе координат, нужно прибавить к векторам  $u'_1$  и  $u'_2$  вектор  $v_{ц. м}$ . Соответствующее построение приведено на рисунке. Так как  $BC = AC = CD$ , через точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  можно провести окружность с центром в точке  $C$ . Следовательно, угол  $BAD$  прямой (как вписанный угол, опирающийся на диаметр). Этот же результат можно получить и с

помощью вычислений. Пусть вектор  $u'_1$  образует угол  $\alpha$  с осью  $x$ . Тогда

$$u'_1 = i \frac{v}{2} \cos \alpha + j \frac{v}{2} \sin \alpha,$$

а

$$u'_2 = -i \frac{v}{2} \cos \alpha - j \frac{v}{2} \sin \alpha$$

( $u_2$  образует угол  $\pi + \alpha$  с осью  $x$ ).

В лаб. системе

$$u_1 = i \frac{v}{2} \cos \alpha + j \frac{v}{2} (1 + \sin \alpha)$$

и

$$u_2 = -i \frac{v}{2} \cos \alpha + j \frac{v}{2} (1 - \sin \alpha).$$

Теперь легко убедиться, что  $u_1 \cdot u_2 = 0$ , откуда следует, что векторы  $u_1$  и  $u_2$  перпендикулярны друг другу.

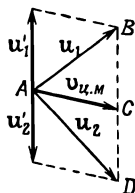
Приведем также другое решение, при котором не нужно переходить в систему ц. м. Из закона сохранения импульса имеем

$$v = u_1 + u_2.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$v^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 \cdot u_2$$

и вычтем из получившегося соотношения другое равенство, являющееся следствием закона сохранения энергии, а именно  $v^2 = u_1^2 + u_2^2$ , находим  $u_1 \cdot u_2 = 0$ , т. е. векторы  $u_1$  и  $u_2$  перпендикулярны друг другу.



**11.14.** Уравнение движения для обоих шариков одно и то же:  $\ddot{\mathbf{r}} = g\mathbf{k}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор любого из шариков. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{k},$$

где  $\mathbf{c}_1$  и  $\mathbf{c}_2$  — некоторые, не зависящие от времени, векторы. Они-то как раз и будут разными для разных шариков. Легко найти, что  $\mathbf{c}_1$  равен радиусу-вектору частицы при  $t = 0$ , т. е.  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}(0)$ , а  $\mathbf{c}_2$  — начальной скорости частицы  $\mathbf{v}(0)$ .

Действительно, подставляя  $t = 0$  непосредственно в общее решение, убеждаемся в справедливости первой части данного утверждения, а после подстановки этого же значения  $t$  в выражение для скорости  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{c}_2 + g t \mathbf{k}$  — второй его части. Следовательно,

$$\mathbf{r}_a(t) = 7(1+t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 4,9(1+t^2)\mathbf{k} \text{ м,}$$

$$\mathbf{r}_b(t) = 7(7-t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 4,9(1+t^2)\mathbf{k} \text{ м.}$$

- 11.15. Будем действовать по схеме, описанной в условии к задаче 11.13. Выберем ось  $x$  в направлении движения первой частицы, а ось  $y$  — перпендикулярно к ней вверх.

Очевидно, в лаб. системе скорости частиц равны

$$v_1 = v_1 i, \quad v_2 = 0, \quad \text{а} \quad v_{ц.м.} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4} v_1 i.$$

Скорости частиц до соударения в системе ц. м.

$$v'_1 = \frac{3}{4} v_1 i, \quad v'_2 = -\frac{1}{4} v_1 i.$$

Поскольку соударение абсолютно упругое, в системе ц. м. скорости частиц по величине остаются прежними, но линия относительного движения поворачивается на некоторый угол.

Чтобы понять, на какой именно угол поворачивается эта линия, рассмотрим отдельно движение второй частицы в лаб. системе и в системе ц. м.

В системе ц. м. частица движется со скоростью  $v'_2 = v_{ц.м.}$  вдоль оси  $x$  (см. рисунок в условии задачи, стр. 31). С той же по величине скоростью она движется и после столкновения, только под некоторым углом к оси  $x$ , т. е.  $u'_2 = v_{ц.м.}$ . В лаб. системе  $u_2 = u'_2 + v_{ц.м.}$ , причем угол между  $u_2$  и осью  $x$  по условию задачи равен  $45^\circ$ . Таким образом, треугольник  $OAB$  равнобедренный с углами при основании, равными  $45^\circ$ ; следовательно, угол  $OAB = 90^\circ$ .

Итак, линия относительного движения в системе ц. м. повернулась на угол  $90^\circ$ . Это значит, что вектор  $u'_1$  также направлен по оси  $y$ , но противоположно  $u'_2$ :

$$u'_1 = \frac{3}{4} v_1 j.$$

В лаб. системе

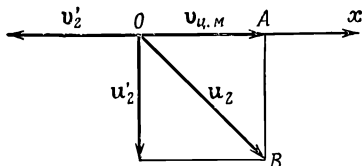
$$u_1 = \frac{1}{4} v_1 i + \frac{3}{4} v_1 j,$$

так что

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = 3,$$

т. е.

$$\theta_1 = 71^\circ 30'.$$



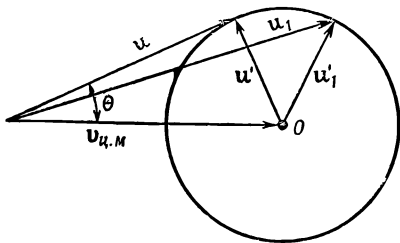
- 11.16. Пусть скорость тяжелой частицы до соударения  $v$ , а после соударения  $u$ . В системе ц. м. [ $v_{ц.м.} = Mv/(M+m)$ ] эти скорости будут  $v'$  и  $u'$ , причем

$$u' = v' = \frac{M}{M+m} v.$$

Направление вектора  $u'$  может быть произвольным, так что конец этого вектора описывает окружность радиусом  $mv/(M+m) < v_{ц.м.}$

Поскольку  $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}_{ц.м.}$ , простым геометрическим построением легко найти различные значения вектора  $\mathbf{u}$ , например  $\mathbf{u}_1$ . Как видно из рисунка, угол отклонения налетающей частицы (направление начальной скорости  $\mathbf{v}$  совпадает с направлением  $\mathbf{v}_{ц.м.}$ ) максимален в том случае, когда вектор  $\mathbf{u}$  направлен по касательной к окружности. При этом

$$\sin \theta = \frac{u'}{v_{ц.м.}} = \frac{m}{M}.$$



11.17. Выполнив для частицы массой  $m$  такое же построение, как и в предыдущей задаче [только теперь  $v_{ц.м.} = mv/(M+m)$ , а  $u' = Mv/(M+m)$ , так что  $u' > v_{ц.м.}$ ], с учетом того, что угол между  $\mathbf{v}_{ц.м.}$  и  $\mathbf{u}$  равен  $90^\circ$ , определим  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}_{ц.м.}$ . Построим теперь на этом же рисунке  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}'_1$  — скорости более тяжелой частицы в системе ц. м. и в исходной, причем, очевидно, скорость  $\mathbf{u}'_1$  направлена противоположно  $\mathbf{u}'$ , а ее величина  $u'_1 = v_{ц.м.} = mv/(M+m)$ . С конца вектора  $\mathbf{v}_{ц.м.}$  параллельно  $AO$  проведем отрезок  $BD$  и определим его длину. Треугольники  $BDC$  и  $AOC$  подобны, поэтому

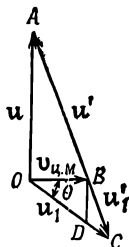
$$\frac{BD}{OA} = \frac{u'_1}{u' + u'_1} = \frac{m}{m+M}.$$

Но  $OA = \sqrt{u'^2 - v_{ц.м.}^2} = v [\sqrt{M^2 - m^2}/(M+m)] = v \sqrt{(M-m)/(M+m)}$ , так что

$$BD = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}} \cdot \frac{m}{M+m} v.$$

Наконец, вычисляем тангенс «угла отдачи»  $\theta$ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{BD}{OB} = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}} = \sqrt{\frac{1-(m/M)}{1+(m/M)}}.$$



11.18. Задача решается так же, как и предыдущая, с тем лишь отличием, что скорости частиц после столкновения  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{u}'_1$  теперь уже не равны  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{u}'_1$  — их скоростям до столкновения. Скорости в системе ц. м. после соударения найдем из соотношения

$$\frac{1}{2} m u'^2 + \frac{1}{2} M u_1'^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 (m v'^2 + M v_1'^2),$$

которое вытекает из условия задачи  $\Delta T/T = 1 - \alpha^2$ . Учитывая, что  $mu' = Mu'_1$  и  $mv' = Mv'_1$ , находим

$$u' = \alpha v', \quad u'_1 = \alpha v'_1$$

Следовательно, отношение  $BD/OA$  остается тем же, что и в предыдущей задаче, но длина  $OA$  меняется. В нашем случае

$$OA = v \sqrt{(\alpha^2 M^2 - m^2)} / (M + m).$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{\alpha^2 M^2 - m^2}}{M + m} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - (m/M)^2}{1 + (m/M)}}.$$

Если  $\alpha = 1$  (абсолютно упругое соударение), этот результат переходит в результат предыдущей задачи. При уменьшении  $\alpha$  уменьшается  $\operatorname{tg} \theta$ , а при  $\alpha = (m/M)$  он обращается в нуль. Если  $\alpha < m/M$ , полученная нами формула теряет смысл. Это и понятно: при столь малых значениях  $\alpha$   $u'_m < v_{ц.м.}$ , поэтому рассеяние на прямой угол становится невозможным.

11.19. Если радиус-вектор частицы со временем меняется по закону

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j} \left( t + \frac{1}{2} t^2 \right) - \mathbf{k} \frac{4}{\pi^2} \sin \left( \frac{\pi}{2} t \right) \text{ м},$$

то скорость частицы равна

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j}(1 + t) - \mathbf{k} \frac{2}{\pi} \cos \left( \frac{\pi}{2} t \right) \text{ м/сек},$$

а ускорение

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{j} + \mathbf{k} \sin \left( \frac{\pi}{2} t \right) \text{ м/сек}^2.$$

а) В момент времени  $t = 0$ .

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{2}{\pi} \mathbf{k} \text{ м/сек},$$

$$\mathbf{a}(0) = \mathbf{j} \text{ м/сек}^2, \quad T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \left( 1 + 1 + \frac{4}{\pi^2} \right) \text{ дж} \approx 1,2 \text{ дж}.$$

В момент времени  $t = 1$

$$\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \frac{3}{2} \mathbf{j} - \frac{4}{\pi^2} \mathbf{k} \text{ м},$$

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \text{ м/сек}.$$

$$\mathbf{a}(1) = \mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ м/сек}^2, \quad T = \frac{1}{2} (1 + 4) \text{ дж} = 2,5 \text{ дж}.$$

б) Силу, действующую на частицу, находим из уравнения движения

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k} \sin \left( \frac{2}{\pi} t \right) \text{ ньютон}.$$

- в) Радиус кривизны траектории определяется (см. решение задачи 9.3) как  $R = v^2/a_{\perp}$ . В нашем случае  $v^2 = 1 + (1+t)^2 + (2/\pi)^2 \cos^2 \pi t/2$ ; дифференцируя по  $t$ , получаем

$$2v \frac{dv}{dt} = 2va_{\parallel} = 2(1+t) - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

В момент времени  $t = 1$

$$v = \sqrt{5} \text{ м/сек}, \quad a_{\parallel} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ м/сек}^2,$$

$$a = \sqrt{2} \text{ м/сек}^2, \quad a_{\perp} = \sqrt{a^2 - a_{\parallel}^2} = \sqrt{\frac{6}{5}} \text{ м/сек}^2.$$

Таким образом,

$$R = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \text{ м} \approx 4,6 \text{ м}.$$

- 11.20. Используя решение задачи 11.14, можем сразу написать

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{k}$$

(ось  $z$  направлена вертикально вверх).

- 11.21. Рассмотрим на земной поверхности точку  $A$  с координатами  $\lambda_1$  и  $\varphi_1$ . Из начала прямоугольной системы координат (выбранной так, как указано в примечании к условию задачи, стр. 32) проведем в точку  $A$  радиус-вектор и найдем его компоненты:

$$x_A = R \cos \lambda_1 \cos \varphi_1, \quad y_A = R \cos \lambda_1 \sin \varphi_1, \quad z_A = R \sin \lambda_1,$$

т. е.  $\mathbf{r}_A = iR \cos \lambda_1 \cos \varphi_1 + jR \cos \lambda_1 \sin \varphi_1 + kR \sin \lambda_1$ , где  $R$  — радиус Земли.

Аналогично, для другой точки  $B$  с угловыми координатами  $(\lambda_2, \varphi_2)$  имеем

$$\mathbf{r}_B = i R \cos \lambda_2 \cos \varphi_2 + j R \cos \lambda_2 \sin \varphi_2 + k R \sin \lambda_2.$$

Длина дуги большого круга  $S_{AB}$ , проходящего через рассматриваемые точки, равна  $R\Phi$ , где  $\Phi$  — угол между векторами  $\mathbf{r}_A$  и  $\mathbf{r}_B$ . Этот угол найдем, вычислив скалярное произведение векторов  $\mathbf{r}_A$  и  $\mathbf{r}_B$ :

$$\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B = R^2 \cos \Phi,$$

откуда

$$\cos \Phi = \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{R^2}.$$

С другой стороны,

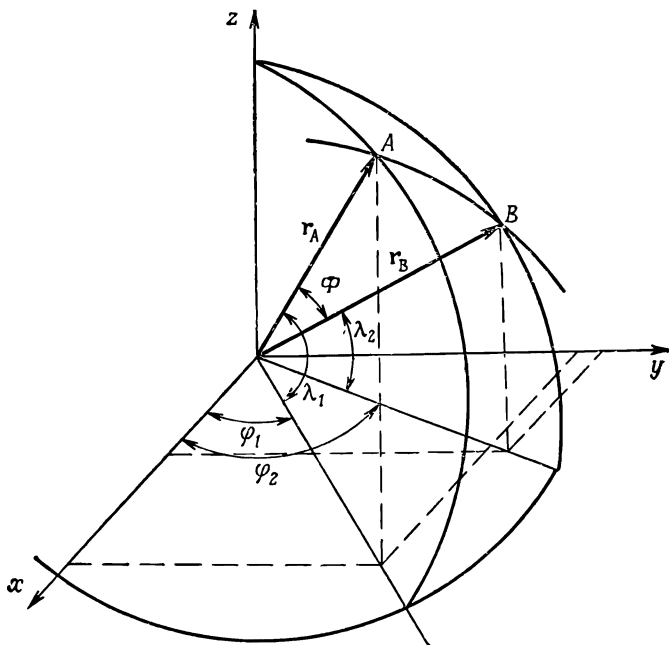
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B &= R^2 (\cos \lambda_1 \cos \varphi_1 \cos \lambda_2 \cos \varphi_2 + \\ &+ \cos \lambda_1 \sin \varphi_1 \cos \lambda_2 \sin \varphi_2 + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2) = \\ &= R^2 [\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\cos \Phi = \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2$$

и

$$S_{AB} = R \arccos [\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2].$$



- 11.22. На рисунке схематически показано и отмечено цифрами *I*, *II*, *III* положение Луны в новолуние, первую четверть и полнолуние.

Рассмотрим движение Луны относительно Земли. Будем считать, что вокруг Земли Луна движется по круговой орбите, поэтому ее ускорение всегда направлено по радиусу орбиты к Земле.

Величина этого ускорения равна

$$a_{\text{Л}} = \frac{v^2}{R_{\text{Л}}} = \frac{4\pi^2 R_{\text{Л}}}{T_{\text{Л}}^2},$$

где  $R_{\text{Л}}$  — расстояние от Земли до Луны, а  $T_{\text{Л}}$  — период обращения Луны.

В решении задачи 7.3 было показано, что

$$\left(\frac{T_{\text{Л}}}{T_{\text{З}}}\right)^2 = \left(\frac{R_{\text{Л}}}{R_{\text{З}}}\right)^3 \frac{M_{\text{С}}}{M_{\text{З}}},$$

( $T_{\text{З}}$  — период обращения Земли вокруг Солнца,  $R_{\text{З}}$  — расстояние от Земли до Солнца, а  $M_{\text{З}}$  и  $M_{\text{С}}$  — массы Земли и Солнца).

Учитывая это, находим

$$a_{Л} = \frac{4\pi^2}{T_3^2} \left( \frac{R_3}{R_{Л}} \right)^3 \frac{M_3}{M_{С}} R_{Л} \approx 0,27 \text{ см/сек}^2.$$

Двигаясь вместе с Землей по круговой орбите вокруг Солнца, Луна обладает еще одним центростремительным ускорением, направленным по радиусу к Солнцу, величиной

$$a_3 = \frac{4\pi^2}{T_3^2} R_3 \approx 0,60 \text{ см/сек}^2;$$

здесь мы пренебрегли  $R_{Л}$  по сравнению с  $R_3$ . Таким образом, результирующее ускорение Луны по отношению к Солнцу в любой момент времени равно  $a = a_{Л} + a_3$ . Поэтому

$$a_{I} = a_3 - a_{Л} = 0,33 \text{ см/сек}^2$$

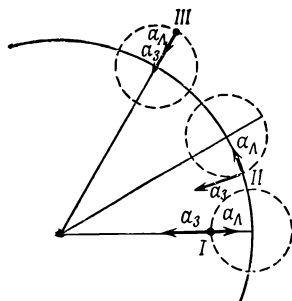
(направлено к Солнцу),

$$a_{II} = \sqrt{a_3^2 + a_{Л}^2} \approx 0,66 \text{ см/сек}^2$$

(направлено под углом  $\alpha$  к линии Луна — Солнце, причем  $\operatorname{tg} \alpha = a_{Л}/a_3 = 0,45$ ,  $\alpha = 24^\circ 13'$ ),

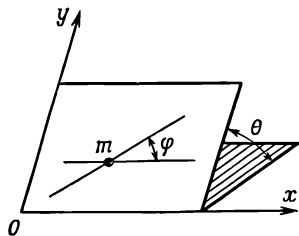
$$a_{III} = a_3 + a_{Л} = 0,87 \text{ см/сек}^2$$

(направлено к Солнцу).

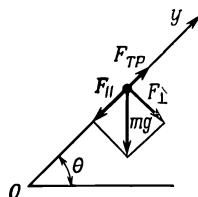


## К главе 12. Характеристики сил

12.1. Кирпич расположен на плоскости так, как показано на фиг. 1. Чтобы нагляднее изобразить силы, действующие на тело, нарисуем наклонную плоскость в другой проекции (фиг. 2). Единственной внешней, или «активной», силой, действующей на тело, является сила веса  $mg$ ,



Фиг. 1



Фиг. 2.

направленная вертикально вниз. Ее можно разложить на составляющие  $F_{\parallel}$  и  $F_{\perp}$  вдоль и перпендикулярно наклонной плоскости. Первая влияет на движение вдоль оси  $y$ , а вторая уравновешивается



реакцией  $N$  плоскости:  $N = F_{\perp}$ . Из треугольника сил находим

$$F_{\parallel} = mg \sin \theta, \quad F_{\perp} = mg \cos \theta$$

- а) При движении тела вверх по наклонной плоскости (т. е. в положительном направлении оси  $y$ ) уравнение движения имеет вид

$$ma_y = -mg \sin \theta - F_{\text{тр}}$$

Но

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \theta,$$

так что

$$a_y = -g \sin \theta - \mu g \cos \theta = -g \cos \theta (\mu + \operatorname{tg} \theta).$$

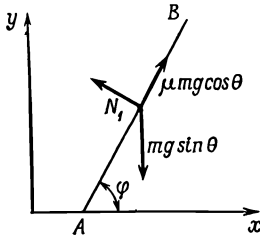
- б) При движении вниз

$$ma_y = -mg \sin \theta + \mu g \cos \theta = mg \cos \theta (\mu - \operatorname{tg} \theta),$$

откуда

$$a_y = g \cos \theta (\mu - \operatorname{tg} \theta),$$

т. е. если  $\mu \geq \operatorname{tg} \theta$ , то скользить по наклонной плоскости только под действием силы тяжести кирпич не может.



Фиг. 3.

в) Нарисуем для удобства плоскость  $xy$  так, чтобы она совпадала с плоскостью страницы (см. фиг. 3). Составляющая силы  $F_{\parallel}$  направлена вертикально вниз, а  $F_{\perp}$  — перпендикулярно рисунку за страницу.

Если кирпич скользит вниз по  $AB$ , то сила трения направлена вверх по  $AB$ , как показано на фиг. 3. Кроме того, к кирпичу приложена со стороны линейки сила  $N_1$ , равная  $mg \sin \theta \cos \varphi$  и направленная перпендикулярно линии  $AB$ . Следовательно,

правленная перпендикулярно линии  $AB$ . Следовательно,

$$a_x = \mu g \cos \theta \cos \varphi - g \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi =$$

$$= g(\mu \cos \theta - \sin \theta \sin \varphi) \cos \varphi,$$

$$a_y = -g \sin \theta + \mu g \cos \theta \sin \varphi + g \sin \theta \cos^2 \varphi =$$

$$= g(\mu \cos \theta - \sin \theta \sin \varphi) \sin \varphi$$

В этом случае скольжение вниз только под действием силы тяжести становится невозможным уже при  $\mu \geq \operatorname{tg} \theta \sin \varphi$ .

Аналогично при движении кирпича вверх по  $AB$ :

$$a_x = -g(\mu \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi) \cos \varphi,$$

$$a_y = -g(\mu \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi) \sin \varphi.$$

- 12.2. а) Пусть кирпич движется вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью  $v_0$ . Уравнение его движения имеет вид

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2,$$

где  $a_1 = g(\sin \theta + \mu \cos \theta)$  (см. предыдущую задачу).

Через промежуток времени  $t_1 = v_0/a_1 \approx 0,45$  сек (в этот момент времени его скорость  $v = v_0 - a_1 t_1$  обратится в нуль) он достигнет наивысшей точки и пройдет по наклонной плоскости путь

$$S = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{v_0^2}{2a_1} \approx 0,68 \text{ м.}$$

- б) Двигаясь вниз по наклонной плоскости с ускорением  $a_2 = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$  (см. предыдущую задачу) и нулевой начальной скоростью, кирпич пройдет тот же путь  $S$  за время  $t_2$ . Очевидно,

$$S = \frac{1}{2} a_2 t_2^2,$$

так что

$$t_2 = \sqrt{\frac{2S}{a_2}} \approx 0,65 \text{ сек.}$$

Полное время движения кирпича равно  $t_1 + t_2 = 1,1$  сек.

- в) Кирпич теряет энергию на преодоление силы трения, поэтому изменение его кинетической энергии равно работе силы трения на пути  $2S$ :  $\Delta T = 2S\mu mg \cos \theta \approx 2,3$  дж. Этот же результат можно получить, вычислив непосредственно изменение кинетической энергии кирпича:

$$\Delta T = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_{t_2}^2 = \frac{m}{2} [v_0^2 - (a_2 t_2)^2] \approx 2,3 \text{ дж.}$$

- 12.3.** Рассмотрим сначала случай, когда сила  $\mathbf{H}$  направлена к склону. Вес  $\mathbf{W}$  и приложенную внешнюю силу  $\mathbf{H}$  разлагаем на две составляющие: нормальную наклонной плоскости и параллельную ей. Как видно из рисунка (где показано разложение только силы  $\mathbf{H}$ ),

$$H_{\parallel} = H \cos \alpha, \quad H_{\perp} = H \sin \alpha$$

и

$$W_{\parallel} = W \sin \alpha, \quad W_{\perp} = W \cos \alpha$$

При достаточно большой силе  $H$  груз  $W$  может начать двигаться только вверх по наклонной плоскости, так как  $H_{\parallel}$  направлено вверх по плоскости, а в отсутствие силы  $H$  груз  $W$  покоится ( $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ ). Непосредственно перед началом движения, когда к телу приложена сила  $H^{\text{мин}}$ , разность  $H_{\parallel}^{\text{мин}} - W_{\parallel}$  должна равняться силе трения. Последнюю получим, умножив силу нормального давления  $H_{\perp}^{\text{мин}} + W_{\perp}$  на коэффициент трения  $\mu$ . Итак,

$$H_{\parallel}^{\text{мин}} - W_{\parallel} = \mu (H_{\perp}^{\text{мин}} + W_{\perp}),$$

или

$$H^{\text{мин}} \cos \alpha - W \sin \alpha = \mu (H^{\text{мин}} \sin \alpha + W \cos \alpha),$$

откуда

$$H^{\text{мин}} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{1 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha} W = \frac{3\mu}{2 - \mu^2} W \quad (\mu = 2 \operatorname{tg} \alpha).$$

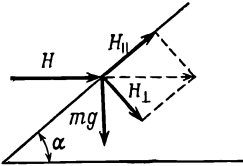
Найдем теперь минимальное значение силы  $H$ , направленной от наклонной плоскости и способной привести тело в движение. В этом случае тело  $W$  начнет двигаться вниз; для минимальной силы записываем уравнение

$$H^{\min} \cos \alpha + W \sin \alpha = \mu (-H^{\min} \sin \alpha + W \cos \alpha),$$

откуда

$$H^{\min} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha} W = \frac{\mu}{2 + \mu^2} W$$

Так как  $3/(2 - \mu^2)$  всегда больше, чем  $1/(2 + \mu^2)$ , во втором случае сила, приводящая в движение тело весом  $W$ , меньше.



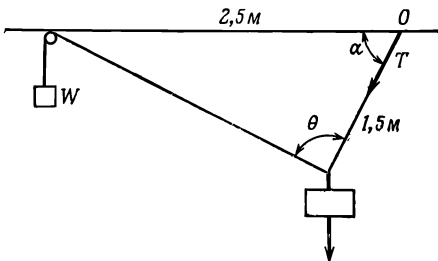
- 12.4. В точке  $O$  горизонтальная составляющая натяжения нити  $T \cos \alpha$  уравнивается силой трения, которая непосредственно перед началом скольжения кольца равна  $\mu T \sin \alpha$ . Таким образом,  $T \cos \alpha = \mu T \sin \alpha$ , откуда  $\operatorname{tg} \alpha = 1/\mu = 4/3$ . После простых вычислений находим также, что  $\sin \alpha = 4/5$ ,  $\cos \alpha = 3/5$ . По теореме синусов:

$$\frac{2,5}{\sin \theta} = \frac{1,5}{\sin [180^\circ - (\alpha + \theta)]}, \text{ откуда } \operatorname{ctg} \theta = 0, \text{ т. е. } \theta = 90^\circ.$$

Векторная сумма всех сил, действующих на груз весом  $1 \text{ кг}$ , равна нулю (груз еще не движется!), поэтому и сумма проекций всех сил на любое направление тоже равна нулю. Спроектируем сперва все силы на направление перекинутой через блок нити, натяжение которой, очевидно, равно  $W$ :

$$W - mg \cos \alpha = 0, \text{ т. е. } W = \frac{3}{5} \text{ кг} = 0,6 \text{ кг}.$$

Аналогично, проецируя силы на направление нити длиной  $1,5 \text{ м}$ , находим  $T = (4/3) \text{ кг} = 0,8 \text{ кг}$ .



- 12.5. Пусть  $N$  — давление одной части замка на другую. Непосредственно перед началом движения  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . Поскольку части замка не движутся, сумма вертикальных проекций сил, действующих на часть  $A$ , так же, как и горизонтальных, действующих на часть  $B$ , равна нулю:

$$\begin{aligned} \frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{\mu N}{\sqrt{2}} - mg &= 0, \\ -\frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{\mu N}{\sqrt{2}} + F &= 0, \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$N = \frac{\sqrt{2} mg}{1 - \mu}, \quad F = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} mg.$$

- 12.6. В системе, связанной с тележкой, на «неосторожного молодого человека» действует, кроме силы тяжести, псевдосила, равная  $-ma$ , где  $a$  — ускорение тележки (мы знаем, что его величина  $g \sin \alpha$ ). Вертикальная составляющая ускорения равна  $g \sin^2 \alpha$ , поэтому весы будут показывать вес  $mg(1 - \sin^2 \alpha) = mg \cos^2 \alpha$ . Так как этот вес составляет  $3/4$  «настоящего» веса, то

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \alpha = 30^\circ.$$

- 12.7. Ускорение груза массой  $M_2$  обозначим через  $a_2$ ; направим его вертикально вверх. Ускорение  $a_1$  груза  $M_1$  (которое лежит в наклонной плоскости) связано с ускорением  $a_2$ , как мы уже знаем, соотношением  $a_1 = 2a_2$  (см., например, задачи 9.9, 9.14 и 4.5).

Составим уравнения движения грузов  $M_1$  и  $M_2$ :

$$M_1 a_1 = M_1 g \sin \theta - \frac{T}{2},$$

$$M_2 a_2 = -M_2 g + T,$$

где  $T$  — натяжение нити, на которой подвешен груз  $M_2$ , или

$$4M_1 a_2 = M_1 g - T,$$

$$M_2 a_2 = -M_2 g + T,$$

откуда

$$a_2 = \frac{M_1 - M_2}{4M_1 + M_2} g = \frac{1}{9} g$$

и

$$T = \frac{5M_1 M_2}{4M_1 + M_2} g \approx 222 \text{ кг}.$$

Натяжение нити, прикрепленной к грузу  $M_1$ , равно, очевидно  $T/2 \approx 111 \text{ кг}$ .

- 12.8. Рассмотрим движение брусков непосредственно перед тем, как они начнут проскальзывать относительно друг друга. Запишем уравнение движения обоих брусков вместе, обозначив через  $\mu_1$  коэффициент трения второго бруска о первый, а через  $\mu_2$  — бруска о наклонную плоскость:

$$(m_1 + m_2) a = F - (m_1 + m_2) g \sin \alpha - \mu_2 (m_1 + m_2) g \cos \alpha;$$

здесь  $\alpha$  — угол, который образует наклонная плоскость с горизонтом, причем  $\sin \alpha = 5/13$ ,  $\cos \alpha = 12/13$ .

Вверх по наклонной плоскости верхний брусок заставляет двигаться только сила статического трения между брусками, равная (непосредственно перед началом проскальзывания)  $\mu_1 m_1 g \cos \alpha$ . Под ее действием брусок движется с тем же самым ускорением  $a$ , что и нижний, поэтому

$$m_1 a = \mu_1 m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha,$$

откуда

$$a = g(\mu_1 \cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{13} g \approx 0,75 \text{ м/сек}^2$$

Наконец, величина силы  $F$ , соответствующая этому значению  $a$ , равна

$$F = \left( \frac{1}{13} + \sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha \right) (m_1 + m_2) g \approx 200 \text{ Г.}$$

- 12.9. Пусть угол  $\theta$  и коэффициент трения  $\mu$  таковы, что куб, предоставленный сам себе, начинает скользить. При этом изменение его потенциальной энергии (за счет опускания ц.м.) окажется больше работы силы трения: за счет этой разницы и появляется кинетическая энергия у куба. Ясно, что в положении, когда силы трения едва хватает, чтобы удержать куб, изменение потенциальной энергии при (воображаемом) небольшом смещении куба будет как раз равно работе силы трения. Как видно из рисунка, высота ц.м. куба равна  $h = (l/\sqrt{2}) \cos(45^\circ - \theta)$  ( $l$  — длина ребра куба), а расстояние от нижнего ребра до стенки  $x = l \cos \theta$ .

Если угол  $\theta$  уменьшился на величину  $\Delta\theta$ , то уменьшение потенциальной энергии куба равно

$$mg \Delta h = mg \frac{dh}{d\theta} \Delta\theta = \frac{mgl}{\sqrt{2}} \sin(45^\circ - \theta) \Delta\theta,$$

а работа силы трения равна  $F_{\text{тр}} \Delta x = \mu N l \sin \theta \Delta\theta$ , где  $N$  — сила давления куба на пол. Если угол  $\theta$  такой, что куб все-таки не движется, то  $N = mg$  (сумма проекций действующих на куб сил на любое направление должна быть равна нулю). Таким образом,

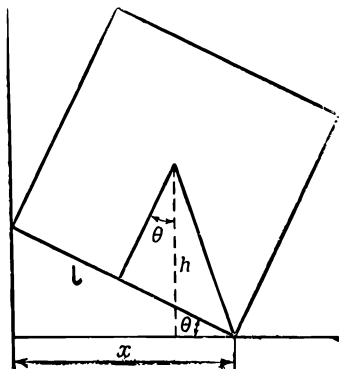
$$\frac{mgl}{\sqrt{2}} \sin(45^\circ - \theta) = \mu mgl \sin \theta,$$

откуда

$$\text{tg } \theta = \frac{1}{1 + 2\mu}.$$

Проверим, насколько разумен наш ответ. Предположим, что угол  $\theta$  очень мал. Ясно, что в этом случае нужно очень большое трение, чтобы удержать куб от скольжения. Это видно и из нашей формулы

(при  $\theta \rightarrow 0$   $\mu \rightarrow \infty$ ). Если  $\theta = 45^\circ$ , куб балансирует на нижнем ребре и нужна очень маленькая сила со стороны стенки и соответственно очень маленькая сила трения, чтобы его удержать (при  $\theta = 45^\circ$   $\mu = 0$ ). Наконец, если  $\mu = 1$ , куб будет в равновесии при  $\theta = 18^\circ 30'$ .



12.10. Обозначим через  $N_1$  и  $N_2$  силы нормального давления, возникающие в местах верхнего и нижнего контактов кронштейна со столбом, а через  $F_{\text{тр}}^{(1)}$  и  $F_{\text{тр}}^{(2)}$  — силы трения в этих же контактах. Поскольку кронштейн находится в равновесии, проекции всех сил на горизонтальное и вертикальное направления равны нулю. Поэтому

$$N_1 = N_2,$$

$$50P + P = F_{\text{тр}}^{(1)} + F_{\text{тр}}^{(2)}$$

( $P$  — вес кронштейна).

Непосредственно перед тем, как кронштейн начнет соскальзывать по столбу, силы трения (направленные вверх, что учтено при записи второго уравнения) равны

$$F_{\text{тр}}^{(1)} = 0,3N_1 \quad \text{и} \quad F_{\text{тр}}^{(2)} = 0,3N_2.$$

Учитывая это и вводя обозначение  $N_1 = N_2 = N$ , вместо системы двух уравнений получаем  $51P = 0,6N$ .

Еще одно уравнение для  $P$  и  $N$  находим, используя принцип виртуальных перемещений.

Поворачивая кронштейн как целое на малый угол  $\Delta\varphi$ , например, вокруг точки  $O$ , убеждаемся (см. задачи к гл. 4), что любая точка кронштейна, расположенная на расстоянии  $l$  от оси вращения, при этом смещается влево на расстояние  $l \cos \varphi \Delta\varphi$  и вниз — на  $l \sin \varphi \Delta\varphi$ . Но  $l \cos \varphi$  — расстояние до данной точки от оси вращения по вертикали, а  $l \sin \varphi$  — расстояние по горизонтали, поэтому закон сохранения энергии при выбранном виртуальном перемещении записывается в виде

$$50PX \Delta\varphi + 15P \Delta\varphi + 3N \Delta\varphi - 22N \Delta\varphi = 0,$$

или

$$50PX + 15P = 19N.$$

Из системы двух уравнений

$$50PX + 15P = 19N,$$

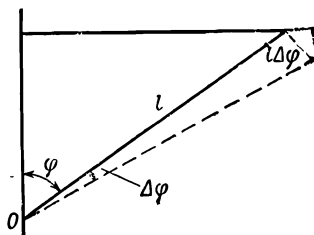
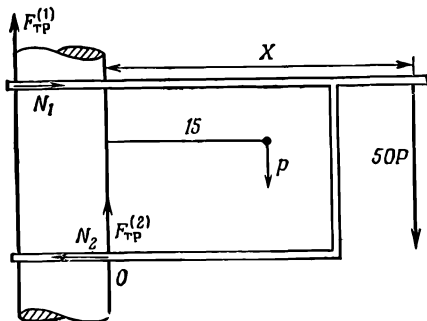
$$51P = 0,6N$$

находим

$$\frac{50X + 15}{51} = \frac{19}{0,6},$$

откуда

$$X = 32 \text{ см.}$$



- 12.11. а) Если веревка подвинется вправо на расстояние  $S$ , то при этом будет выполнена работа  $\Delta TS$ . Эта работа должна равняться работе сил трения:

$$\Delta TS = F_{\text{тр}} S,$$

откуда  $\Delta T = F_{\text{тр}}$ .

Но  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , где  $N$  — сила нормального давления. Из рисунка видно, что

$$N = 2T \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = T \Delta\theta$$

[при сложении сил мы пренебрегли величиной  $\Delta T$  по сравнению с  $T$  и положили  $\sin(\Delta\theta/2) = \Delta\theta/2$ ]. Таким образом,

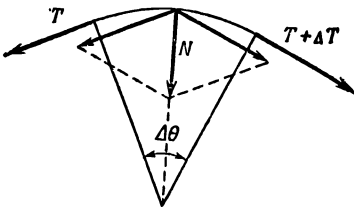
$$\Delta T = \mu T \Delta\theta,$$

или для бесконечно малых углов

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta.$$

- б) Интегрируя полученное в п. (а) уравнение, находим

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\alpha} d\theta \quad \text{и} \quad \ln \frac{T_2}{T_1} = \mu\alpha,$$



где  $T_1$  и  $T_2$  — натяжение на концах веревки, намотанной вокруг столба на конечный угол  $\alpha$ , так что

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\alpha}.$$

- 12.12. Перейдем в систему координат, жестко связанную с пластиной. В этой системе на тело действует псевдосила  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Разложим ее на две составляющие:  $F_{\parallel}$  вдоль пластины и  $F_{\perp}$  перпендикулярно к ней. Они равны соответственно (см. рисунок)

$$F_{\parallel} = F \cos \theta, \quad F_{\perp} = F \sin \theta.$$

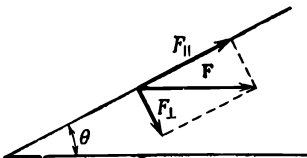
Уравнение движения в выбранной нами системе координат имеет вид (ось  $x$  направлена вверх по пластине)

$$m\ddot{x} = F_{\parallel} - mg \sin \theta,$$

т. е.

$$\ddot{x} = a \cos \theta - g \sin \theta.$$

Путь  $S$  тело проходит за время (начальная скорость тела равна нулю)



$$t = \sqrt{\frac{2S}{a \cos \theta - g \sin \theta}} \approx 2,16 \text{ сек.}$$

- 12.13. а) В гл. 12 «Лекций» (вып. 1) показано, что на заряд  $q$ , помещенный в электрическое поле напряженностью  $E$ , действует сила  $F$ , равная  $qE$ , причем  $F$  измеряется в *ньютон*ах, а  $q$  — в *кулон*ах. Отсюда

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \text{ньютон/кулон}$$

(символ  $[A]$  означает размерность физической величины  $A$ ). Однако и *ньютон* и *кулон* являются производными единицами. В международной системе единиц МКСА 1 *ньютон* = 1 кг·м/сек<sup>2</sup>, а 1 *кулон* = 1 а·сек (а — основная единица силы тока), поэтому

$$[E] = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{а} \cdot \text{сек}^3.$$

- б) На заряд  $q$ , движущийся в магнитном поле со скоростью  $v$ , действует сила

$$F = qvB \quad (B \text{ — магнитная индукция}),$$

откуда

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = (\text{ньютон} \cdot \text{сек})/(\text{кулон} \cdot \text{м}) = \text{кг}/(\text{а} \cdot \text{сек}^2).$$

- в) Размерность отношения  $E$  к  $B$  есть

$$\frac{[E]}{[B]} = [v] = \text{м/сек}.$$

Обратите внимание, что так называемая скорость дрейфа частиц в скрещенном электрическом и магнитном полях равна как раз этому отношению (подробнее см. «Лекции», вып. 6, стр. 343 или задачу 12.16).

- г) Для гравитационного поля  $C$ :

$$F = mC \quad \text{и} \quad [C] = \frac{[F]}{[m]} = \text{ньютон/кг} = \text{м/сек}^2.$$

- 12.14. Пусть частица движется в плоскости  $xy$ , а магнитная индукция направлена по оси  $z$ . На частицу действует сила, компоненты которой (см. § 4 гл. 12 «Лекций», вып. 1)

$$F_x = qv_y B, \quad F_y = -qv_x B, \quad F_z = 0.$$

Легко видеть, что  $F \perp v$  (так как  $F \cdot v = 0$ ) и

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = qvB.$$

Как было показано в задаче 9.1, под действием такой силы частица равномерно движется по круговой орбите в плоскости  $xy$ , причем радиус орбиты равен  $R = mv/qB$ .

- 12.15. Поскольку частица движется равномерно по круговой орбите, то время одного оборота  $T$  найдем по формуле

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

(в предыдущей задаче показано, что  $R = mv/qB$ ).

При ускорении частицы в циклотроне необходимо точно знать время  $T$ , чтобы правильно выбрать частоту ускоряющего электриче-



ского поля. Период колебаний этого поля должен совпадать с периодом обращения частицы (так называемое условие резонанса, или синхронизма).

- 12.16. а) Уравнение движения частицы в электромагнитном поле записывается в виде [см. формулу (12.11) «Лекций», вып. 1, стр. 229]

$$m\ddot{x} = qv_y B_z = q\dot{y}B_z,$$

$$m\ddot{y} = qE_y - qv_x B_z = qE_y - q\dot{x}B_z,$$

$$m\ddot{z} = 0.$$

- б) Применяя преобразования Галилея

$$x' = x - \frac{E_y}{B_z} t, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

так что

$$\dot{x}' = \dot{x} - \frac{E_y}{B_z}, \quad \dot{y}' = \dot{y}, \quad \dot{z}' = \dot{z}$$

и

$$\ddot{x}' = \ddot{x}, \quad \ddot{y}' = \ddot{y}, \quad \ddot{z}' = \ddot{z},$$

получаем следующие уравнения движения в штрихованной системе:

$$m\ddot{x}' = q\dot{y}' B_z,$$

$$m\ddot{y}' = -q\dot{x}' B_z,$$

$$m\ddot{z}' = 0.$$

Как следует из уравнений движения (см. задачу 12.14), в штрихованной системе координат частица будет двигаться по круговой орбите в плоскости  $x'y'$  радиусом  $R = mv'/qB_z$ .

Из преобразований Галилея видно, что штрихованная система координат движется в положительном направлении оси  $x$  нештрихованной системы со скоростью  $v_d = E_y/B_z$ . (Скорость  $v_d$  называют скоростью дрейфа.) Значит, в нештрихованной системе координат частица движется по циклоиде (ср. с задачей 8.12).

## К главе 14. Работа и потенциальная энергия

- 14.1.  $\mathbf{F} = 1,5y \mathbf{i} + 3x^2 \mathbf{j} - 0,2(x^2 + y^2) \mathbf{k}$  ньютон. При  $t = 0$   $\mathbf{r}_0 = 2 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$  м, а  $\mathbf{v}_0 = 2 \mathbf{j} + \mathbf{k}$  м/сек; следовательно,

а)  $\mathbf{F}_0 = 4,5 \mathbf{i} + 12 \mathbf{j} - 2,6 \mathbf{k}$  ньютон,

б)  $\mathbf{a}_0 = 4,5 \mathbf{i} + 12 \mathbf{j} - 2,6 \mathbf{k}$  м/сек<sup>2</sup>,

в)  $T_0 = \frac{mv_0^2}{2} = 2,5$  дж,

г)  $\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = 21,4$  дж/сек.

- 14.2. Приблизительно можно положить для  $t = 0,01$  сек:

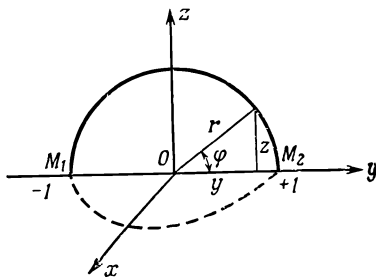
а)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot 0,01 = 2,00 \mathbf{i} + 3,02 \mathbf{j} + 0,01 \mathbf{k}$  м,

б)  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 \cdot 0,01 = 0,045 \mathbf{i} + 2,12 \mathbf{j} + 0,97 \mathbf{k}$  м/сек,

в)  $T = T_0 + \frac{dT}{dt} \cdot 0,01 = 2,71$  дж (или  $T = \frac{mv^2}{2} = 2,71$  дж).

- 14.3. а) Работа силы  $\mathbf{F}$  при перемещении на  $d\mathbf{S}$  равна  $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ . Поэтому при перемещении частицы вдоль оси  $y$   $dx = dz = 0$ , и работу совершает только  $y$ -компонента силы. Но  $F_y = 3x^2 = 0$  ( $x = 0$  при движении вдоль оси  $y$ ); следовательно, и работа силы  $\mathbf{F}$  равна нулю.
- б) В этом случае нужно принимать во внимание только  $y$ - и  $z$ -компоненты силы  $\mathbf{F}$ , так как перемещение перпендикулярно оси  $x$ . Однако  $F_y = 0$  ( $x = 0$  для всех точек плоскости  $yz$ ), поэтому работа силы  $\mathbf{F}$  равна

$$W = \int_{M_1}^{M_2} F_z dz = -0,2 \int_{M_1}^{M_2} y^2 dz.$$



Как видно из рисунка,  $z = \sin \varphi$ ,  $y = \cos \varphi$ , точке  $M_1$  соответствует значение угла  $\varphi = \pi$ , а точке  $M_2$  — значение  $\varphi = 0$ ; следовательно (учтите, что  $dz = \cos \varphi d\varphi$ ),

$$W = -0,2 \int_{\pi}^0 \cos^3 \varphi d\varphi = -0,2 \left[ \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{\varphi=\pi}^{\varphi=0} = 0.$$

Однако это еще не означает, что сила  $\mathbf{F}$  консервативна. Можно найти такие траектории частицы, для которых работа силы  $\mathbf{F}$  не равна нулю. Например, если частица перемещается из точки  $M_1$  в точку  $M_2$  по окружности единичного радиуса в плоскости  $xy$ , то работа силы  $\mathbf{F}$  равна

$$\begin{aligned} W &= \int_{M_1}^{M_2} F_x dx + \int_{M_1}^{M_2} F_y dy = 1,5 \int_{M_1}^{M_2} y dx + 3 \int_{M_1}^{M_2} x^2 dy = \\ &= 1,5 \int_{\pi}^0 \cos^2 \psi d\psi - 3 \int_{\pi}^0 \sin^3 \psi d\psi = \\ &= 1,5 \left[ \frac{1}{2} \psi + \frac{1}{4} \sin 2\psi \right]_{\psi=\pi}^{\psi=0} + 3 \left[ \cos \psi - \frac{1}{3} \cos^3 \psi \right]_{\psi=\pi}^{\psi=0} = 1,6 \text{ Дж} \end{aligned}$$

[теперь уже  $x = \sin \psi$ ,  $y = \cos \psi$ ,  $dx = \cos \psi d\psi$  и  $dy = -\sin \psi d\psi$ , а угол  $\psi$  лежит в плоскости  $xy$ ].

Таким образом, работа при перемещении частицы из точки  $(0, -1, 0)$  в точку  $(0, 1, 0)$  зависит от пути перемещения; следовательно, поле силы  $\mathbf{F}$  неконсервативно.

- 14.4. 1. а) Кинетическая энергия частицы в конце пути равна работе, совершаемой силой  $\mathbf{F}$ . Следовательно,

$$\frac{mv^2}{2} = \int_0^3 (3 + 4x) dx = 27 \text{ Дж},$$

откуда

$$v = 3 \text{ м/сек.}$$

б) Из уравнения движения  $ma = F_x$  находим

$$a = \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} x \right) \text{ м/сек}^2.$$

Следовательно, ускорение частицы в конце пути  $a = 2,5 \text{ м/сек}^2$ .

в) Мощность равна изменению кинетической энергии в единицу времени, т. е.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = F \cdot v = 45 \text{ вт.}$$

2. В этом случае удобнее непосредственно проинтегрировать уравнение движения  $ma = 3 + 4t$ , откуда

$$v = \frac{3}{m} t + \frac{4}{2m} t^2 = \frac{1}{2} t + \frac{1}{3} t^2 \text{ м/сек}$$

(здесь учтено, что  $v = 0$  при  $t = 0$ ). Следовательно, при  $t = 3 \text{ сек}$

$$v = 4,5 \text{ м/сек,} \quad a = \frac{3 + 4t}{m} = 2,5 \text{ м/сек}^2,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = F \cdot v = 67,5 \text{ вт.}$$

14.5. Как было показано в «Лекциях» (вып. 1), поле и потенциал вне сферической оболочки равны полю и потенциалу точечного заряда, помещенного в центр сферы и равного по величине полному заряду оболочки. (Внутри оболочки поле равно нулю, т. е. потенциал не меняется от точки к точке.) Итак,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

где  $R$  — радиус оболочки,  $q$  — ее полный заряд. Находим далее

$$q = 4\pi\epsilon_0 \varphi R = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ кулон.}$$

14.6. Пусть  $A$  и  $B$  — радиусы соответственно внешней и внутренней сферы. Пользуясь результатом предыдущей задачи и принципом суперпозиции, вычислим потенциал на поверхности внешней сферы. Заряды, расположенные на внутренней сфере, создают на внешней сфере потенциал  $q/4\pi\epsilon_0 A$  ( $q$  — заряд внутренней сферы), а заряды, расположенные на самой внешней сфере, — потенциал  $-q/4\pi\epsilon_0 A$  (напомним, что заряды сфер равны по величине и противоположны по знаку). Таким образом, потенциал внешней сферы равен нулю.

Займемся теперь внутренней сферой. Потенциал, создаваемый на ней ее собственными зарядами, равен  $q/4\pi\epsilon_0 B$ , а зарядами внешней сферы равен  $(-q)/4\pi\epsilon_0 A$ . Итак, разность потенциалов между сферами равна потенциалу внутренней сферы, так что

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right)$$

и

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{AB}{A - B} \phi.$$

14.7.

$$v_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ в} \quad (R_3 = 6370 \text{ км}).$$

14.8. Мощность  $P$  связана с силой  $F$  и скоростью  $v$  соотношением  $P = Fv$ , так что  $F = P/v$ .

Из уравнения движения  $ma = F$  ( $m$  — масса автомобиля) имеем

$$a = \frac{F}{m} = \frac{P}{mv} = 7,2 \text{ м/сек}^2.$$

14.9. Масса всего кабеля  $m = ML$ . В начальный момент времени центр тяжести кабеля находился на расстоянии  $L/4$  от оси блока, в конечный — на расстоянии  $L/2$ .

Таким образом, изменение потенциальной энергии кабеля равно

$$gML \frac{L}{2} - gML \frac{L}{4},$$

т. е.

$$\Delta U = \frac{1}{4} ML^2 g.$$

Изменение кинетической энергии  $\Delta E$  кабеля с учетом того, что вначале он покоился, равно

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} MLv^2.$$

(Разумеется, все точки кабеля движутся с одной и той же скоростью  $v$ .)

Из закона сохранения энергии имеем  $\Delta U = \Delta E$ , откуда

$$\frac{1}{4} ML^2 g = \frac{1}{2} MLv^2 \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{gL}{2}}.$$

14.10. Пусть вода вырывается из наконечника со скоростью  $v$ . Зная высоту подъема воды и угол наклона наконечника к горизонту, можно найти начальную скорость струи.

Действительно,  $H_{\text{макс}} = (v^2/2g) \sin^2 \alpha$ , откуда

$$v^2 = \frac{2gH}{\sin^2 \alpha} = 8gH$$

(здесь учтено, что  $\alpha = 30^\circ$ ).

В единицу времени из шланга выбрасывается масса воды  $m = \rho Sv$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения наконечника, а  $\rho$  — плотность воды. Полезная работа мотора в единицу времени затрачивается на поднятие этой массы воды из резервуара на высоту  $h$  и на выбрасывание ее из шланга со скоростью  $v$ . Она равна

$$P_n = mgh + \frac{1}{2} mv^2 = \rho g v S (h + 4H).$$

Мощность мотора  $P$ , очевидно, равна

$$P = \frac{P_n}{\eta},$$

где  $\eta$  — коэффициент полезного действия, т. е.

$$P = \frac{\rho g v S}{\eta} (h + 4H).$$

Подставляя численные значения входящих в формулу для  $P$  величин, получаем  $P = 25$  квт.

- 14.11. Работа  $W$ , затрачиваемая атлетом на каждый бросок, равна  $mv^2/2$ , где  $m$  — масса спортивного снаряда, а  $v$  — его начальная скорость. Таким образом, для вычисления  $W$  необходимо найти  $v$ .

Обозначим через  $S$  дальность полета снаряда. Как видно из рисунка,  $S = S_0 + S_1$ , где  $S_0$  — дальность полета снаряда, если бы он был брошен со скоростью  $v$  с поверхности Земли, а  $S_1$  — горизонтальная дальность полета из точки  $B$  до соприкосновения снаряда с землей. Имеем

$$S_0 = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v^2}{g}$$

(здесь учтено, что  $\alpha = 45^\circ$ ), а  $S_1$  вычислим, рассматривая отдельно движение снаряда из точки  $B$ . Из закона сохранения энергии следует, что  $v_B = v$  (сопротивлением воздуха пренебрегаем) и что вектор  $v_B$  направлен под углом  $45^\circ$  к горизонту. Поэтому  $S_1 = (v/\sqrt{2}) t$ , где  $t$  — время падения снаряда из точки  $B$  на землю, которое определяется из уравнения

$$h = \frac{v}{\sqrt{2}} t + \frac{1}{2} g t^2.$$

Положительное решение этого квадратного (относительно  $t$ ) уравнения записывается в виде

$$t = \frac{-\sqrt{2} v + \sqrt{2v^2 + 8gh}}{2g}.$$

Таким образом,

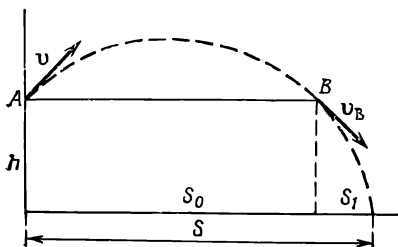
$$S_1 = \frac{-v^2 + v\sqrt{v^2 + 4gh}}{2g} \quad \text{и} \quad S = \frac{v^2 + v\sqrt{v^2 + 4gh}}{2g}.$$

Из последнего соотношения выражаем  $v^2$  через  $S$  и  $h$ :

$$v^2 = \frac{gS^2}{S + h}.$$

Следовательно, искомая работа

$$W = \frac{m}{2} \frac{gS^2}{S + h}.$$



Подставляя в это выражение соответственно массы ядра, диска и копья и дальности их полета, находим работу, затраченную спортсменами при рекордных бросках этих снарядов:

$$W_{\text{я}} = 647 \text{ дж}, \quad W_{\text{д}} = 588 \text{ дж}, \quad W_{\text{к}} = 328 \text{ дж},$$

или

$$W_{\text{я}} : W_{\text{д}} : W_{\text{к}} = 2 : 1,8 : 1.$$

- 14.12. При равномерном движении автомобиля по горизонтальному участку дороги вся мощность двигателя  $P_1$  уходит на преодоление сил трения, поэтому  $P_1 = F_{\text{тр}}v$ , откуда  $F_{\text{тр}} = P_1/v$ .

При движении под углом  $\alpha$  к горизонту мощность двигателя расходуется как на преодоление сил трения, так и на преодоление сил тяжести. Следовательно, развиваемая мотором сила тяги

$$F = W \sin \theta + F_{\text{тр}}$$

( $W$  — вес автомобиля), а его мощность

$$P = Fv = Wv \sin \theta + P_1.$$

При максимальном угле уклона мотор развивает максимально возможную мощность ( $P_{\text{макс}} = 85 \text{ л. с.}$ ). Таким образом,

$$\sin \theta_{\text{макс}} = \frac{P_{\text{макс}} - P_1}{Wv} = 0,30 \text{ и } \theta_{\text{макс}} \approx 17^\circ 30'.$$

- 14.13. Разобьем все сферическое тело на большое число тонких слоев и проследим действие этих слоев на частицу массой  $m$ , расположенную на расстоянии  $r$  от центра тела. В § 4 гл. 13 «Лекций» (вып. 1, стр. 246) было показано, что если масса  $m$  находится вне шарового слоя, то потенциальная энергия массы  $m$  такова, как если бы вся масса слоя собралась в его центре. Если  $r > R$ , то масса  $m$  является внешней по отношению ко всем слоям сферического тела; следовательно, ее потенциальная энергия  $W$  такова, как если бы вся масса тела собралась в его центре, т. е.

$$W = - \frac{GMm}{r}.$$

Потенциал  $\Psi$  гравитационного поля массы  $M$  связан с энергией  $W$  частицы  $m$  в этом поле соотношением  $W = m\Psi$ , а с напряженностью  $C(r)$  этого поля — соотношением  $\int C(r) dr = -\Psi(r)$  [см. «Лекции», вып. 1, стр. 260, формула (14.7)].

Поэтому в рассматриваемом случае  $\Psi(r) = -GM/r$ , а напряженность  $C(r) = GM/r^2$  и направлена к центру сферы.

Если  $r < R$ , то масса  $m$  окажется внешней по отношению ко всем слоям, радиусы которых меньше  $r$ , и внутренней по отношению ко всем остальным слоям.

Поэтому потенциальная энергия массы  $m$  состоит из двух членов:  $W_1$  и  $W_2$ ;  $W_1$  — потенциальная энергия по отношению к внутренним слоям, она равна

$$- \frac{1}{r} \left\{ GM \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)^{-1} \frac{4}{3} \pi r^3 m \right\} = - \frac{GMmr^2}{R^3};$$

$W_2$  — потенциальная энергия массы  $m$  по отношению к тем слоям, внутри которых она находится.

Рассмотрим отдельно один шаровой слой радиусом  $r_1$  и толщиной  $dr_1$ . Потенциальная энергия тела  $m$  по отношению к этому слою  $dW'$  постоянна и равна (см. § 5 гл. 14 «Лекций»)

$$dW' = -\frac{Gm dm'}{r_1},$$

где  $dm' = \frac{4\pi r_1^2 dr_1}{(4/3)\pi R^3} M$  — масса шарового слоя, т. е.

$$dW' = -\frac{3GmM}{R^3} r_1 dr_1.$$

Полную энергию массы  $m$  по отношению ко всем внешним слоям найдем, проинтегрировав  $dW'$  по всем слоям:

$$W_2 = \int_r^R dW' = -\frac{3GmM}{R^3} \int_r^R r_1 dr_1 = -\frac{3}{2} \frac{GmM}{R^3} (R^2 - r^2).$$

Таким образом, энергия тела  $m$  внутри массы  $M$  равна

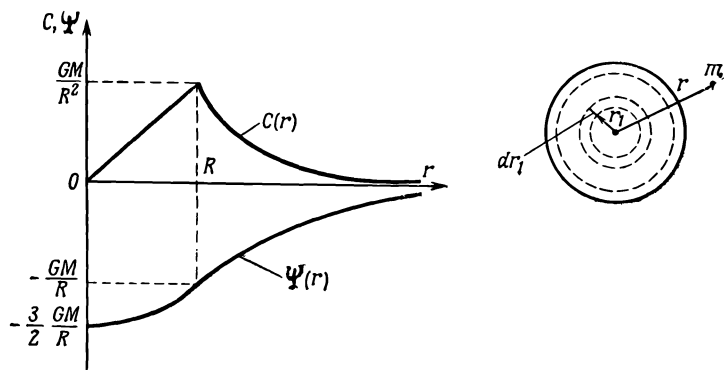
$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2} \frac{GmM}{R^3} (r^2 - 3R^2).$$

Отсюда нетрудно получить потенциал и напряженность гравитационного поля внутри тела:

$$\Psi(r) = -\frac{3}{2} \frac{GM}{R} + \frac{GM}{2R^3} r^2,$$

$$C(r) = \frac{GM}{R^3} r.$$

Снова для напряженности поля  $C(r)$  мы указали только ее модуль, направлена она, как и для массы вне сферы, к центру сферы. Для удобства изображения на рисунке приведены модуль напряженности (кривая над осью  $r$ ) и потенциал (кривая под осью  $r$ ) гравитационного поля.



- 14.14. Скорость груза  $m$  непосредственно перед падением его на чашку весов, определенная из закона сохранения энергии, равна  $v = \sqrt{2gh}$ . Скорость  $v_1$  чашки с грузом после удара найдем из закона сохранения количества движения

$$mv = (m + m_1) v_1, \text{ откуда } v_1 = \frac{m}{m + m_1} v$$

( $m_1$  — масса чашки весов).

В наинижней точке (расположенной на  $h_1$  ниже первоначального положения чашки) полная кинетическая и потенциальная энергии чашки и груза перейдут в потенциальную энергию растянутой пружины:

$$\frac{m + m_1}{2} v_1^2 + (m + m_1) gh_1 = \frac{1}{2} k (h_1 + l_0)^2 - \frac{1}{2} kl_0^2,$$

где  $k$  — упругость пружины, а  $l_0$  — ее удлинение перед падением груза на чашку,  $l_0 = m_1g/k = 1,6$  см.

После несложных преобразований полученное уравнение приводится к виду

$$h_1^2 - 2h_0h_1 - \frac{2m}{m + m_1} h_0h = 0$$

(здесь введено обозначение  $h_0 = mg/k = 3,2$  см). Решая это уравнение, находим

$$h_1 = h_0 + \sqrt{h_0 \left( h_0 + \frac{2m}{m + m_1} h \right)} \approx 10,1 \text{ см.}$$

Таким образом, груз  $m$  опустится вниз на расстояние  $h + h_1 = 19,1$  см.

- 14.15. Пусть к пружине приложена сила  $F_0$ . Величина растяжения пружины  $x_0$  определяется из условия  $kx_0 = F_0$ .

Растянем теперь пружину на величину  $x$  относительно нового положения равновесия. Сила, приложенная к пружине, равна теперь  $k(x + x_0) = kx + kx_0 = F_0 + kx$ . Видно, что добавочная сила, растягивающая пружину на расстояние  $x$  из нового положения равновесия, такая же, как если бы пружина растягивалась на  $x$  из ненапряженного состояния. Отсюда следует, что жесткость пружины осталась неизменной.

- 14.16. Если тележка проходит верхнюю точку петли «на пределе», почти не касаясь путевого полотна, сила давления на нее со стороны полотна, естественно, равна нулю. Таким образом, в этой точке на тележку действует только сила тяжести  $mg$ . Ускорение тележки в высшей точке равно  $g = v^2/R$ , поэтому ее скорость в этой точке равна  $\sqrt{gR}$ . Если тележка начала движение с высоты  $H$  над петлей без начальной скорости, то из закона сохранения энергии следует

$$mgH = \frac{mv^2}{2}, \text{ т. е. } H = \frac{1}{2} R.$$

- 14.17. Пусть тело срывается в точке сферы, радиус-вектор которой образует угол  $\alpha$  с вертикалью. В этой точке сила нормального давления тела на сферу равна нулю. Поэтому проекция ускорения свободного падения на этот радиус-вектор ( $g \cos \alpha$ ) равна центростремительному ускорению.



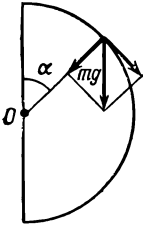
Таким образом,

$$\frac{v^2}{R} = g \cos \alpha.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha).$$

Решая совместно эти два уравнения, получаем  $\cos \alpha = 2/3$ .



Таким образом, тело сорвется в точке, отстоящей от вершины сферы по вертикали на расстоянии  $(1/3)R$ . По дуге сферы тело пройдет при этом путь  $S = \alpha R = 0,85R$ .

- 14.18. Поместим начало системы координат в фокус эллипса (там же находится масса  $M$ ), а ось  $x$  направим вдоль его большой оси. Полная энергия тела массой  $m$ , равная сумме его кинетической и потенциальной энергий, т.е.  $E = mv^2/2 - GmM/r$ , сохраняется. Следовательно,  $E$  — константа, не зависящая ни от времени, ни от  $r$ . Поэтому удобно вычислить ее для таких положений тела  $m$ , в которых его радиус-вектор и скорость особенно просто выражаются через параметры эллипса.

Такими положениями являются апогей и перигей, отмеченные точками  $A$  и  $P$  на рисунке. Для них  $r_A = a(1 + e)$ ,  $r_P = a(1 - e)$ . Скорости  $v_A$  и  $v_P$  перпендикулярны оси  $x$  (так как они направлены по касательной к эллипсу). Кроме того, как было показано в задаче 7.7, в соответствии со вторым законом Кеплера эти скорости связаны между собой соотношением

$$v_A r_A = v_P r_P.$$

Таким образом,

$$E_A = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{GmM}{a(1+e)},$$

$$E_P = \frac{mv_P^2}{2} - \frac{GmM}{a(1-e)},$$

$$v_A r_A = v_P r_P, \quad E_A = E_P = E,$$

откуда следует,

$$E(r_A^2 - r_P^2) = -GmM(r_A - r_P),$$

т. е.

$$E = -\frac{GmM}{2a}.$$

Теперь мы можем более детально изучить движение спутника из задачи 10.3 под действием силы торможения  $F = \rho Sv^2$ . Пусть в на-

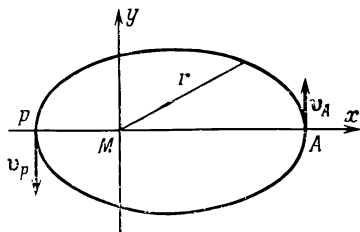
чальный момент времени  $t = 0$  спутник находится на стационарной орбите радиусом  $r_0 = R + h$  (обозначения те же, что и в задаче 10.3) и движется со скоростью  $v_0 = \sqrt{gR} (R/r_0)$

Полная энергия спутника на произвольной круговой орбите, как было только что показано, равна

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{2r}.$$

Но изменение энергии (за счет трения) спутника в единицу времени равно мощности сил трения; следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = -\rho S v^2 v = -\rho S v^3.$$



Считая, что орбита спутника незначительно отличается от круговой, можно положить  $mv^2/r = GmM/r^2$  или  $mv^2 = GmM/r$ , так что  $E = -mv^2/2$ . Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \rho S v^3,$$

откуда

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{\rho S}{m} dt \text{ и } -\frac{1}{v} = \frac{\rho S}{m} t + C.$$

Константу интегрирования  $C$  найдем из начальных условий:  $C = -1/v_0$ . Окончательно

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = \frac{\rho S}{m} t.$$

Таким образом, вследствие «торможения» скорость спутника уменьшается, а увеличивается (для любого  $t > 0$   $v > v_0$ ). Оценим изменение модуля скорости за один период  $T = 2\pi r_0/v_0$ . После несложных преобразований, используя данные задачи 10.3, находим

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{v - v_0}{v_0} = \frac{2\pi\rho S r_0/m}{1 - 2\pi\rho S r_0/m} \approx \frac{2\pi\rho S r_0}{m} = 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

Эта оценка показывает, что использованное нами приближение квазистационарности орбиты спутника вполне оправдано.

- 14.19. а) Эллипс можно получить из окружности радиусом  $b$ , если увеличить масштаб вдоль одной из осей координат в  $a/b$  раз (см. задачу 7.4). При увеличении масштаба вдоль одной из осей площади фигур увеличиваются во столько же раз, поэтому площадь эллипса равна

$$\pi b^2 \frac{a}{b} = \pi a b$$

( $a$  — длина большой полуоси).

- б) Вычислим скорость планеты в апогее (см. решение задачи 14.18):

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{GmM}{a(1+e)} = -\frac{GmM}{2a},$$

откуда

$$v_A^2 = \frac{GM}{a} \frac{1-e}{1+e}.$$

Действуя далее так же, как в задаче 7.4, находим

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 a^3}{GM}.$$

- в) Используя результат задачи 14.18, выразим длину большой полуоси орбиты через полную энергию и массу планеты:

$$a = \frac{GM}{2} \frac{m}{|E|}.$$

Подставляя ее в формулу для периода, получаем

$$T^2 = \frac{\pi^2 G^2 M^2}{2} \left( \frac{m}{|E|} \right)^3.$$

Отсюда и следует утверждение, что орбиты всех тел, у которых на единицу массы приходится одинаковая энергия, соответствуют равным периодам обращения (период зависит только от отношения  $m$  к  $|E|$ ).

- 14.20. Уменьшение кинетической энергии корабля по мере его удаления от Земли происходит за счет увеличения его потенциальной энергии, т. е.

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{v_2}{2} = \frac{GM}{R} - \frac{GM}{r}.$$

Здесь  $v_0$  и  $v$  — скорости корабля соответственно около Земли ( $R \approx 6500$  км) и на расстоянии  $r \approx 10^8$  км.

Если бы корабль покинул Землю со второй космической скоростью  $v_1$ , то на очень больших расстояниях от Земли он двигался бы с очень маленькой скоростью, т. е.

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{GM}{R}.$$

Таким образом,

$$v^2 = v_0^2 - v_1^2 + 2 \frac{GM}{r} = v_0^2 - v_1^2 + v_1^2 \frac{R}{r} \approx 23,8 \text{ (км/сек)}^2,$$

т. е.

$$v \approx 4,88 \text{ км/сек.}$$

- 14.21. Обозначим через  $v$  скорость космического корабля относительно Солнца в момент прекращения работы двигателей, а через  $v'$  — его скорость «на выходе». Потенциальная энергия корабля обусловлена притяжением Земли и Солнца. Когда корабль находится около Земли, его потенциальная энергия равна

$$-\frac{GmM}{R} - \frac{GmM_\odot}{R_1},$$

где  $m$ ,  $M$  и  $M_\odot$  — массы соответственно корабля, Земли и Солнца;  $R$  — радиус Земли;  $R_1$  — радиус земной орбиты, которую для простоты будем считать круговой.

Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R} + \frac{GM_{\odot}}{R_1} + \frac{v'^2}{2}.$$

Заметим, что

$$\frac{GM}{R} = \frac{1}{2} v_1^2,$$

где  $v_1$  — вторая космическая скорость (см. предыдущую задачу), а из условия стационарности земной орбиты следует

$$v_0^2 = \frac{GM_{\odot}}{R_1},$$

где  $v_0$  — орбитальная скорость Земли.

Таким образом,  $v^2 = v_1^2 + 2v_0^2 + v'^2$ , откуда  $v = 47$  км/сек. Скорость корабля относительно Земли будет минимальной, когда он запущен в направлении орбитального движения Земли. Тогда

$$v_{\text{мин}} = v - v_0 = 17 \text{ км/сек.}$$

**14.22.** Скорость корабля относительно Земли максимальна, если корабль запущен по касательной к орбите Земли в направлении, противоположном движению Земли. В этом случае  $v_{\text{макс}} = v + v_0 = 77$  км/сек.

**14.23.** Период обращения планеты вокруг Солнца зависит только от величины большой полуоси эллипса орбиты. Из того, что периоды обращения Земли и космического корабля совпадают, следует равенство больших полуосей орбит Земли и корабля.

Величиной большой полуоси полностью определяется и другая характеристика планеты — полная энергия на единицу массы (см. задачу 14.18). Поэтому, когда Земля и космический корабль находятся на одинаковых расстояниях от Солнца (и, следовательно, имеют по отношению к Солнцу одну и ту же потенциальную энергию на единицу массы), их скорости относительно Солнца одинаковы по величине.

Заметим, что мы не учли в этих рассуждениях притяжения корабля Землей. Будем считать для начала, что корабль берет старт не с Земли, а из некоторой периферийной точки «околоземного пространства», где потенциал тяготения Солнца начинает превышать потенциал тяготения Земли. Оценим, насколько такая точка удалена от Земли. Потенциал Солнца ( $-GM_{\odot}/R_1$ ) и потенциал Земли ( $-GM/R$ ) становятся равными, если  $R = R_1 M/M_{\odot}$ . Поскольку  $M/M_{\odot} \approx 2,5 \times 10^{-5}$ , если удалиться от Земли, скажем, на десяти тысячную радиуса земной орбиты, потенциал Солнца будет превышать потенциал Земли (а «с точки зрения Солнца» Земля и корабль будут по-прежнему в одном и том же месте!).

Существуют четыре варианта запуска. Два из них показаны на рисунках *a* и *б*, два других отличаются от приведенных направлением движения корабля по орбите. Рассчитаем вариант (*a*) (как более экономный). Так как корабль в перигее подходит очень близко к Солнцу, его скорость при пересечении земной орбиты (которую здесь и далее считаем круговой) практически параллельна линии, проходящей через фокусы орбиты корабля. Найдем угол  $\alpha$ . Из прямоугольного треугольника *OAK* (на рисунке *в*)  $\cos \alpha = (a - r_p)/a = 0,99$  ( $a$  —

большая полуось орбиты корабля, равная радиусу орбиты Земли). Из треугольника  $ABC$  находим  $BC = v'$  — скорость запуска корабля из периферии околоземного пространства. Учтя, что  $AB = AC = v_0$  ( $v_0$  — орбитальная скорость Земли), имеем

$$v'^2 = 2v_0^2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = 2v_0^2 (1 - \sin \alpha).$$

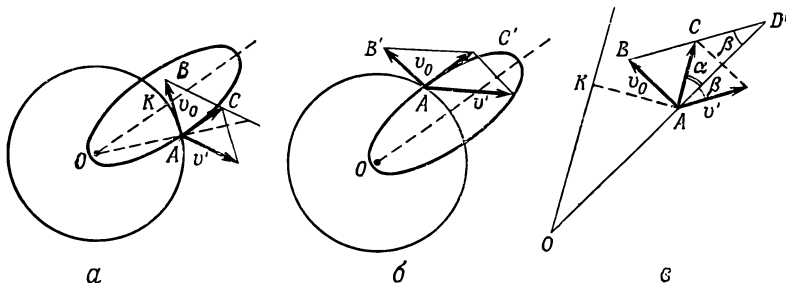
Вспомня, что  $v_0 = 30$  км/сек, находим

$$v' = 39,2 \text{ км/сек.}$$

Угол  $\beta$ , под которым запущен корабль относительно линии Земля — Солнце, найдем из треугольника  $ABD$  (замечая, что  $\angle ABC = \beta + \alpha$ ):

$$\beta = \frac{90 - \alpha}{2} = 41^\circ.$$

Учтем теперь, что корабль стартует с поверхности Земли. Вспомня задачу 14.21, находим, что истинная скорость запуска  $v = \sqrt{v'^2 + v_1^2}$ , где  $v_1$  — вторая космическая скорость. Итак,  $v \approx 42$  км/сек.



- 14.24. Представим себе сначала, что в сферическом теле нет никакой полости. Ускорение свободного падения в точке  $P$  равно в этом случае

$$a_0 = \frac{G\rho}{(R+x)^2} \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Выделим теперь внутри тела часть вещества, занимающую тот же объем и положение, что и фигурирующая в условии полость. Согласно принципу суперпозиции, ускорение в точке  $P$  можно представить в виде суммы двух членов: ускорения, обусловленного веществом в выделенном объеме:

$$a' = \frac{G\rho}{\left(x + \frac{5}{4}R\right)^2} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R}{4}\right)^3,$$

и ускорения  $a$  (именно это ускорение вызывается притяжением тела и полости). Поскольку все три ускорения направлены вдоль одной прямой  $PC$ , то

$$a = a_0 - a' = \frac{G\rho}{(x+R)^2} \frac{4\pi}{3} R^3 \left[ 1 - \left(8 + \frac{2R}{x+R}\right)^{-2} \right].$$

## К главе 15. Специальная теория относительности

- 15.1. Так как уравнения, связывающие  $x', y', z', t'$  с  $x, y, z, t$ , линейны, выразить нештрихованные координаты через штрихованные не представляет труда. Имеем

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right),$$

где введены обозначения  $\beta = u/c$ ,  $\gamma = (\sqrt{1 - \beta^2})^{-1}$ .

Эти формулы можно было получить и не решая уравнений, а просто заменив в исходных преобразованиях Лоренца  $u$  на  $-u$  и поменяв местами координаты  $x, y, z, t$  и  $x', y', z', t'$  (поскольку система  $x, y, z$  движется относительно  $x', y', z'$  со скоростью  $-u$ ).

- 15.2. Рассмотрим работу «световых часов» в неподвижной и движущейся системах координат. Для наблюдателя, который движется вместе с часами, луч света от одного конца стержня до другого и обратно проходит за промежуток времени  $t = 2L/c$ , где  $L$  — длина стержня.

Как же представляется работа этих часов для неподвижного наблюдателя? Прежде всего ему кажется, что длина стержня не  $L$ , а  $L' = L\sqrt{1 - u^2/c^2}$  ( $u$  — скорость движения часов). Если время движения светового сигнала от одного конца стержня до другого в направлении движения стержня равно  $t_1$ , то за это время сам прибор сместится на расстояние  $ut_1$ , и свет пройдет расстояние не  $L'$ , а  $L' + ut_1$ , так что  $ct_1 = L' + ut_1$  и  $t_1 = L'/(c - u)$ . Для прохождения света от одного конца стержня до другого против движения самого стержня требуется время  $t_2$ , причем  $ct_2 = L' - ut_2$  и  $t_2 = L'/(c + u)$ . Общее время движения света

$$t' = t_1 + t_2 = \frac{2L'}{c(1 - u^2/c^2)} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Таким образом, свету понадобится большее время, чтобы пройти из конца в конец движущийся стержень, нежели неподвижный стержень, т. е. движущиеся часы будут отставать по сравнению с неподвижными. Обратим внимание, что это отставание точно такое же, как и в случае, когда часы ориентированы поперек движения (см. § 4 гл. 15 «Лекций», вып. 2, стр. 292).

- 15.3. С точки зрения земного наблюдателя, время жизни мюона такое, что за это время, двигаясь со скоростью  $u$ , он успевает пройти путь  $l$ , поэтому

$$t = \frac{l}{u} = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}$$

Время жизни мезона  $\tau$  в его собственной системе координат составляет

$$\tau = t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 2,33 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$$

пройденный же им путь (вернее, толщина слоя «прошедшей» мимо него атмосферы) равен

$$D = \tau u = l \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 0,7 \text{ км.}$$

- 15.4. а) Для производства энергии  $E$  необходимо превратить в энергию вещество массой  $m = E/c^2$ . В нашем случае  $m = 86 \text{ кг}$ .  
 б) В каждом акте синтеза двух атомов дейтерия в гелий выделяется энергия

$$\varepsilon = (2M_{\text{H}^2} - M_{\text{He}^4}) c^2 = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$$

$$(1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}),$$

т. е. в энергию превращается вещество массой  $0,0155 \text{ а.е.м.}$  Но как раз два атома дейтерия входят в молекулу тяжелой воды, масса которой равна  $20,0294 \text{ а.е.м.}$ , поэтому можно сказать, что только  $0,77 \cdot 10^{-3}$  часть тяжелой воды превращается в энергию. Отсюда следует, что годовое потребление тяжелой воды равно  $M = (86/0,77) 10^3 \text{ кг}$ , а ее ежесекундный расход  $M/\tau = 3,5 \text{ г/сек}$  ( $\tau$  — число секунд в году).

- 15.5. Если  $W$  — мощность солнечного излучения, поглощаемая каждым квадратным метром земной атмосферы, то энергия, выделяемая на Солнце в  $1 \text{ сек}$ , равна  $E = 4\pi D^2 W$ , где  $D$  — расстояние от Земли до Солнца. Следовательно, выделяемой в единицу времени энергии соответствует масса  $m = E/c^2$ . Реакция образования гелия из обычного водорода заключается в том, что четыре атома водорода ( $m_{\text{H}} = 1,0081 \text{ а.е.м.}$ ) объединяются в атом гелия ( $m_{\text{He}} = 4,0039 \text{ а.е.м.}$ ). Хотя при этом образуются две частицы с массой покоя, отличной от нуля, они в дальнейшем также превращаются в излучение (позитроны, встречаясь с электронами, «пропадают», образуя  $\gamma$ -кванты). Поэтому можно утверждать, что часть массы водорода

$$k = \frac{4m_{\text{H}} - m_{\text{He}}}{4m_{\text{H}}} = 7,1 \cdot 10^{-3}$$

отвечает энергии, выделившейся в результате реакции. Таким образом, в  $1 \text{ сек}$  на Солнце «сгорает» масса водорода

$$M = \frac{m}{k} = \frac{4\pi D^2 W}{k c^2} = 6,25 \cdot 10^8 \text{ т,}$$

что составляет примерно  $3 \cdot 10^{-17}\%$  массы Солнца.

- 15.6. Сила и импульс в релятивистской механике связаны между собой таким же образом, как и в ньютоновской,  $F = d(mv)/dt$ , только масса в релятивистском случае не постоянна, а выражается через массу покоя как  $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , т. е. зависит от скорости дви-

жения частицы. Итак,

$$F = \frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 \left[ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} + \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \right] \frac{dv}{dt} = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt}.$$

Дифференцируя функцию  $x(t)$ , находим

$$v = \frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{c^2 b^2}{(b^2 + c^2 t^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, действующая на частицу сила  $F = m_0 c^2/b$  постоянна.

- 15.7. а) Единица длины *световой год* — это то расстояние, которое свет проходит за один год; она равна  $ct$ , где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/сек — скорость света, а  $t = 3,15 \cdot 10^7$  — число секунд в году. Поэтому

$$g = 9,8 \frac{\tau}{c} \frac{\text{свет. год}}{\text{год}^2} = 1,03 \frac{\text{свет. год}}{\text{год}^2}.$$

- б) Сила тяжести, которую чувствуют космонавты, — это сила, прижимающая их к кораблю. Корабль, конечно, действует на них с такой же силой. Согласно условию задачи, эти силы постоянны и, таким образом, движение всех предметов внутри корабля — это движение под действием постоянной силы. Такое движение изучалось в предыдущей задаче. Поэтому, чтобы сразу использовать результаты этой задачи, представим силу в нашем случае в виде  $F = m_0 c^2/b$ . Константу  $b$  определим из условия  $F = m_0 g$ . Вычисления будем проводить в такой системе единиц, где расстояния измеряются *световыми годами*, а время — *годами*. В этой системе единиц скорость света равна 1 *свет. год/год*. Результаты вычислений дают

$$b = \frac{c^2}{g} = 0,97 \text{ свет. года};$$

скорость корабля в конце 5-го года движения

$$v = \frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \Big|_{t=5} = 0,98 \frac{\text{свет. год}}{\text{год}} = 0,98 c;$$

пройденное им расстояние

$$x = (\sqrt{b^2 + c^2 t^2} - b^2)_{t=5} = 4,15 \text{ свет. года}.$$

## К главе 16. Релятивистская энергия и релятивистский импульс

- 16.1. Рассмотрим систему координат  $x, y, z, t$  и штрихованную систему  $x', y', z', t'$ , движущуюся относительно исходной со скоростью  $u$  в положительном направлении оси  $x$ . Формулы, приведенные в решении задачи 15.1, для связи нештрихованных координат со штрихованными запишем в виде

$$x = \gamma (x' + \beta ct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma \left( t' + \frac{\beta}{c} x' \right),$$



где  $\beta = u/c$ ,  $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2}$ . Беря дифференциалы от правых и левых частей этих соотношений, получаем преобразования Лоренца в дифференциальной форме:

$$dx = \gamma(dx' + \beta c dt'), \quad dy = du', \quad dz = dz', \\ dt = \gamma\left(dt' + \frac{\beta}{c} dx'\right).$$

Разделив  $dx$  на  $dt$ , получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta c dt'}{dt' + (\beta/c) dx'} = \frac{(dx'/dt') + \beta c}{1 + (\beta/c)(dx'/dt')}.$$

Но  $dx/dt = v_x$  — скорость в неподвижной системе координат, а  $dx'/dt' = v_{x'}$  — скорость в движущейся системе координат, поэтому

$$v_x = \frac{v_{x'} + u}{1 + uv_{x'}/c^2}.$$

Аналогично

$$v_y = \frac{v_{y'} \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + uv_{x'}/c^2}, \quad v_z = \frac{v_{z'} \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + uv_{x'}/c^2}.$$

Если  $v_{x'} = 0$ , то получаем формулу (16.7), приведенную в «Лекциях» (вып. 2, стр. 291) для  $v_y$ .

- 16.2. Чтобы найти величину скорости в движущейся системе координат, выразим дифференциалы штрихованных координат через дифференциалы нештрихованных координат:

$$dx' = \gamma(dx - \beta c dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \gamma[dt - (\beta/c) dx].$$

Разделив  $dx'$  на  $dt'$ , найдем скорость в подвижной системе координат:

$$v_{x'} = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}.$$

(Конечно, эту формулу можно написать сразу, изменив только знак скорости  $u$  в соответствующей формуле предыдущей задачи и поменяв местами  $v_x$  и  $v_{x'}$ .)

Вычислим дифференциал  $dv_{x'}$ :

$$dv_{x'} = \frac{1 - u^2/c^2}{(1 - uv_x/c^2)^2} dv_x.$$

Разделив  $dv_{x'}$  на  $dt'$  и учитывая, что  $a_{x'} = dv_{x'}/dt'$ , а  $a_x = dv_x/dt$ , получим

$$a_{x'} = \frac{(1 - u^2/c^2)^{3/2}}{(1 - uv_x/c^2)^3} a_x.$$

- 16.3. Из треугольника скоростей (см. «Лекции», вып. 2, стр. 294) следует, что скорости  $v$ ,  $w$  и  $u$  связаны между собой соотношением  $v^2 = u^2 + w^2(1 - u^2/c^2)$ ; поэтому

$$m_w = \frac{m_0}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - [u^2 + w^2(1 - u^2/c^2)]/c^2}}.$$

Чтобы доказать приведенную в тексте формулу, остается только внимательно проделать следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \frac{m_w}{m_0} &= \frac{\sqrt{1 - (u^2 c^2 + w^2 c^2 - w^2 u^2)/c^4}}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2 (c^2 - w^2) - u^2 (c^2 - w^2)}{c^2 (c^2 - w^2)}} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

- 16.4. Рассмотрим неупругое столкновение частиц в такой системе координат, в которой они налетали бы друг на друга с одинаковой скоростью  $w$ . Очевидно, эта система координат сама движется с той же скоростью  $w$  в направлении движущейся частицы. Так как в неподвижной системе скорость налетающей частицы равна  $4c/5$ , то

$$\frac{2w}{1 + w^2/c^2} = \frac{4c}{5}.$$

Мы могли бы решить это уравнение относительно  $w$  и убедиться, что  $w = c/2$ , но мы не будем этого делать, так как в § 3 гл. 16 «Лекций» (вып. 2, стр. 290) было показано, что в результате сложения двух скоростей по  $c/2$  каждая получаем скорость, равную  $4c/5$ . Поэтому  $w = c/2$ .

В выбранной таким образом движущейся системе координат образовавшаяся составная частица неподвижна, а ее масса равна  $M_0 = 2m_w = 4m_0/\sqrt{3}$ . Таким образом, составная частица с массой покоя  $M_0$  движется в исходной системе координат со скоростью  $c/2$ .

- 16.5. В системе координат, в которой протоны ускорителя и мишени налетают друг на друга с одинаковыми скоростями, скорость протонов  $w$  определяется из следующего условия:  $2m_p/\sqrt{1 - w^2/c^2} = 4m_p$ , откуда  $w = \sqrt{3} c/2$ . Скорость протонов в лаб. системе координат (в этой системе частицы мишени покоятся) равна

$$v = \frac{2w}{1 + w^2/c^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7} c$$

Кинетическая энергия налетающих протонов есть разность между их полной энергией и энергией покоя, т. е.

$$E_{\text{кин}} = (m_{vp} - m_p) c^2 = 6 m_p c^2 \approx 5630 \text{ Мэв} = 5,63 \text{ Гэв}.$$

## К главе 17. Пространство-время

- 17.1. Из соотношения между энергией и импульсом  $E^2 - p^2 = m^2$  (в системе единиц, где  $c = 1$ ) следует, что  $E \approx p$ , так как  $E$  и  $p$  намного больше  $m$ . Из определения же релятивистского импульса частицы найдем

$$v^2 = \frac{1}{1 + (m_p/p)^2} \approx 1 - \left(\frac{m_p}{p}\right)^2 = 1 - 10^{-20}$$

(здесь учтено, что  $m_p/p \ll 1$  и использована приближенная формула  $1/(1+x) \approx 1-x$ ). Таким образом, скорость протона такой большой энергии отличается от скорости света только в 20-м знаке! Поэтому,

с точки зрения земного наблюдателя, такой протон пересечет Галактику по диаметру за  $10^5$  лет. С точки зрения протона такое путешествие займет всего

$$\tau = \frac{10^5 \text{ лет}}{\sqrt{1 - v^2}} \approx 10^{-5} \text{ лет} \approx 315 \text{ сек} \approx 5 \text{ мин.}$$

- 17.2. Здесь нужны только вычисления. Масса покоя электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-28}$  г,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/сек, поэтому  $m_e c^2 = 81,99 \cdot 10^{-15}$  дж. Посмотрев в справочник, можно убедиться, что  $1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  дж, так что

$$m_e c^2 = \frac{81,99}{1,6} \cdot 10^4 \text{ эв} = 0,511 \text{ Мэв.}$$

- 17.3. Из закона сохранения импульса следует, что трехмерные импульсы  $\mu$ -мезона  $p_\mu$  и нейтрино  $p_\nu$  равны по величине и направлены в противоположные стороны. Из закона сохранения энергии вытекает, что сумма полной энергии мезона и нейтрино равна энергии покоя  $\mu$ -мезона, т. е.  $E_\nu + E_\mu = m_\pi$  (в системе единиц, где  $c = 1$ ).

Так как  $E_\nu = p_\nu$  (масса покоя нейтрино равна нулю) и

$$E_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2}, \text{ то } \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} + p_\mu = m_\pi.$$

Отсюда

$$p_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = 29,8 \text{ Мэв.}$$

Кинетическую энергию  $\mu$ -мезона найдем как разность его полной энергии и энергии покоя:

$$T_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} - m_\mu = 4,1 \text{ Мэв.}$$

Кинетическая энергия нейтрино равна его полной энергии и равна импульсу:

$$T_\nu = E_\nu = p_\nu = 29,8 \text{ Мэв.}$$

- 17.4. В задаче 12.14 было показано, что заряженная частица в магнитном поле  $B$  движется по окружности радиусом  $R$ , причем  $R = mv/qB$ . Этот результат сохраняется и в релятивистском случае, поскольку при таком движении меняется только направление скорости, а не ее величина.

Так как  $mv = p$ , то  $p = qBR$ . Здесь  $q$  измеряется в кулонах,  $B$  — в вебер/м<sup>2</sup>,  $R$  — в метрах, а  $p$  — в кг·м/сек. Учитывая, что  $1 \text{ вебер/м}^2 = 10^4 \text{ гс}$ , заряд частицы равен  $q = Ze$ , а  $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  кулон и  $1 \text{ кг} \cdot \text{м/сек} = (1,6/c) \cdot 10^{-25} \text{ Мэв}$ , получаем  $p = 3 \cdot 10^{-2} ZBR$ . В этой формуле единицы измерения физических величин следующие:  $[P]$  — Мэв,  $[B]$  — гауссы,  $[R]$  — метры,  $Z$  — безразмерная величина.

- 17.5. а) Радиус магнита циклотрона должен быть не меньше радиуса кривизны траектории частицы предельной энергии в данном магнитном поле. Используя результаты предыдущей задачи, имеем  $R = 10^2 p / 3ZB$ . Импульс релятивистской частицы равен  $\sqrt{E^2 - m_0^2}$ , а ее полная энергия  $E$  есть сумма кинетической энергии  $T$  и энер-

гии покоя  $m_0$ :  $E = T + m_0$ , поэтому

$$p = \sqrt{T(T + 2m_0)} \quad \text{и} \quad R = \frac{\sqrt{T(T + 2m_0)}}{3ZB} \cdot 10^2 \text{ м} = 1,85 \text{ м}.$$

- б) Частота ускоряющего электрического поля должна совпадать с частотой обращения частицы (см. задачу 12.15), т. е.

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi m}{3 \cdot 10^{-2} ZB}.$$

В этом выражении  $m$  измеряется в *Мэв*,  $B$  — в гауссах, а время — в метрах. Таким образом, частота ускоряющего поля в конце ускорения равна

$$\nu = \frac{3 \cdot 10^{-2} ZB}{2\pi m} \text{ с сек}^{-1}.$$

Но  $m = m_0/\sqrt{1 - v^2}$ , а

$$v = \frac{p}{E} = \frac{\sqrt{T(T + 2m_0)}}{T + m_0} = \frac{1}{2},$$

так что  $m = 2m_0/\sqrt{3}$  и, следовательно,

$$\nu = 0,13 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}.$$

- в) В начале ускорения частиц частота электрического поля должна быть

$$\nu_0 = \frac{3 \cdot 10^{-2} ZB}{2\pi m_0} \text{ с сек}^{-1},$$

поэтому изменение частоты в процессе ускорения равно

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = 13\%.$$

## К главе 18. Двумерные вращения

- 18.1. а) По определению момента силы  $\tau = xF_y - yF_x = 140$  ньютон·м. Но момент мы можем представить также в виде

$$\tau = F \cdot p = F_t \cdot r,$$

где  $p$  — плечо силы, а  $F_t$  — тангенциальная (перпендикулярная  $r$ ) составляющая силы. Из этих двух равенств находим

- б)

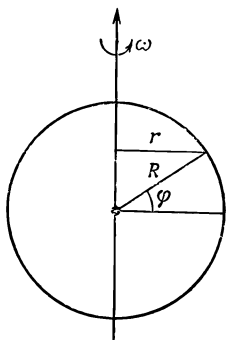
$$p = \frac{\tau}{F} = 2,8 \text{ м}.$$

- в)

$$F_t = \frac{\tau}{r} = \frac{\tau}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 14 \text{ ньютон}.$$

- 18.2. За счет суточного вращения Земли каждая точка земной поверхности приобретает зависящую от широты  $\varphi$  скорость  $v = \omega r = \omega R \cos \varphi$  (см. рисунок), где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли.

В Лос-Анджелесе ( $\varphi_0 = 34^\circ$ , см. географическую карту)  $v_0 = \omega R \cos \varphi_0$ . Широту искомой точки земной поверхности найдем из уравнения



$$R \omega \cos \varphi_0 - R \omega \cos \varphi = 200,$$

откуда

$$\cos \varphi = 0,395, \quad \varphi = 66^\circ 40'$$

- 18.3. Найдем сначала проекции силы на оси координат (ось  $y$  направим вверх по прямой  $OP$ , а ось  $x$  — направо по  $AB$ ). Так как в равновесии сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, имеем

$$F_x + 50 - \frac{50}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$F_y + 50 - \frac{50}{\sqrt{2}} = 0,$$

т. е.

$$F_x = F_y = -50 \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = -14,6 \text{ н.}$$

Учтем теперь, что полный момент силы (будем вычислять его относительно точки  $O$ ) также должен равняться нулю. Прежде всего ясно, что точка приложения силы  $F$  должна лежать слева от точки  $O$ ; необходимо, чтобы сила  $F$  вращала пластинку против часовой стрелки. Приравняв нулю полный момент сил, найдем  $l$  — расстояние от точки  $O$  до точки приложения силы  $F$ :

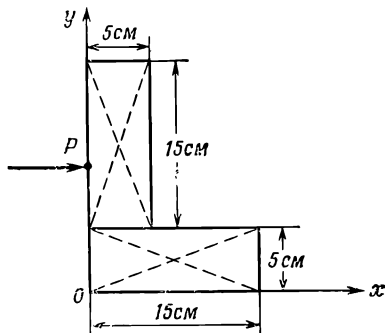
$$F_y \cdot l - 0,1 \cdot 50 = 0, \quad l = \frac{5}{F_y} = 0,34 \text{ м.}$$

Таким образом, удерживающая сила величиной  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \approx \approx 20,5 \text{ н}$  приложена левее точки  $O$  на  $0,34 \text{ м}$  и направлена параллельно силе, приложенной в точке  $O$ .

- 18.4. Уголок не вращается после удара в том случае, если удар произведен по линии, проходящей через его ц.м. (момент количества движения относительно ц.м., переданный при ударе, в этом случае ра-

вен нулю). Поэтому  $OP = y_c$ , где  $y_c$  — ордината центра масс. Поскольку толщина горизонтальной и вертикальной сторон уголка постоянна, центры масс сторон уголка совпадают с их геометрическими центрами. Как видно из рисунка, ордината центра масс горизонтальной стороны  $y_1 = 2,5$  см, а вертикальной  $y_2 = 12,5$  см. Ординату центра масс всего уголка найдем по формуле

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{y_1 + y_2}{2} = 7,5 \text{ см.}$$



18.5. Условия равновесия всей фермы в целом таковы:

$$F_1 + F_2 = W \quad \text{и} \quad F_1 l - F_2 l = 0$$

( $l$  — длина одного стержня). Отсюда

$$F_1 = \frac{W}{3} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{2W}{3}.$$

Стержень  $GF$  испытывает сжатие, а  $EG$  — растяжение. Их нагрузки равны соответственно  $T_1$  и  $T_2$ . Но  $F_2/T_1 = \cos 30^\circ$ , откуда

$$T_1 = \frac{4W}{3\sqrt{3}}.$$

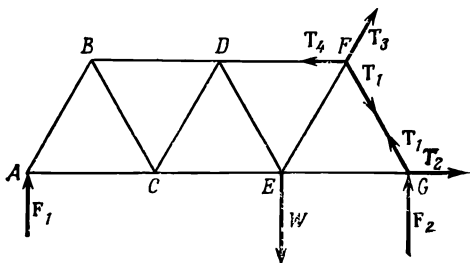
Из равновесия в узле  $F$  имеем  $T_1 + T_3 + T_4 = 0$  ( $T_3$  и  $T_4$  — напряжения в стержнях  $EF$  и  $DF$ ). Проецируя это равенство на вертикальную ось, получаем

$$\frac{\sqrt{3}}{2} T_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} T_1 = 0, \quad \text{т. е.} \quad T_1 = T_3.$$

Приравнявая затем нулю сумму проекций на горизонтальную ось находим

$$T_4 = 2T_1 \cos 60^\circ = \frac{4W}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом, стержень  $FD$  сжат, его напряжение  $4W/3\sqrt{3}$ .



- 18.6. а) Момент инерции стержня в системе координат, ось  $x$  которой направлена вдоль стержня, а начало совпадает с концом стержня, равен

$$J = \int_0^L x^2 dm = \rho \int_0^L x^2 dx,$$

где  $\rho$  — его линейная плотность ( $\rho = M/L$ ), так что

$$J = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2.$$

- б) Если ось проходит не через конец стержня, а через его середину, то вычисление интеграла из п. (а) следует проводить в пределах не от  $O$  до  $L$ , а от  $-L/2$  до  $L/2$ :

$$J_0 = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{1}{12} ML^2.$$

Этот же результат можно получить из теоремы о параллельном переносе оси, относительно которой вычисляется момент инерции:  $J = J_{ц.м} + md^2$  ( $d$  — расстояние между осями, а  $J_{ц.м}$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс). Искомый момент инерции есть как раз  $J_{ц.м}$ , так как центр масс стержня находится на середине  $L$ . Следовательно,

$$J_0 = J_{ц.м} = J - Md^2 = \frac{1}{3} ML^2 - \frac{1}{4} ML^2 = \frac{1}{12} ML^2.$$

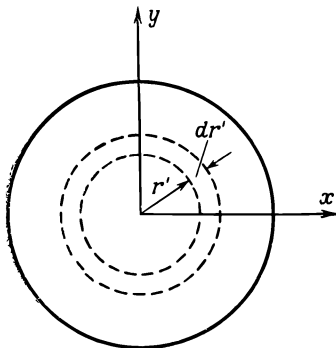
- в) Если цилиндр тонкостенный, то вся его масса  $M$  находится на расстоянии  $r$  от оси вращения, поэтому, согласно определению момента инерции,  $J = Mr^2$ .
- г) Для вычисления момента инерции сплошного цилиндра разобьем его на большое число тонкостенных полых цилиндров. На рисунке показан один такой цилиндр радиусом  $r'$  и толщиной  $dr'$ . Момент инерции этого цилиндра [см. п. (в)]  $dJ = r'^2 dm'$ , где

$$dm' = \frac{M}{\pi r^2 H} 2\pi r' H dr' = \frac{2M}{r^2} r' dr'$$

( $M$  — масса цилиндра,  $H$  — высота цилиндра).

Момент инерции сплошного цилиндра вычисляется как сумма моментов инерции составляющих его тонкостенных цилиндров, т. е.

$$J = \int_0^r dJ = \frac{2M}{r^2} \int_0^r r'^3 dr' = \frac{1}{2} Mr^2.$$



- 18.7. Когда цилиндр поворачивается на угол  $\varphi$  против часовой стрелки груз опускается на расстояние  $r\varphi$ , поэтому линейное ускорение груза  $a$  связано с угловым ускорением цилиндра  $d^2\varphi/dt^2$  соотношением

$$a = \frac{d^2}{dt^2} (r\varphi) = r \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Вращение цилиндра описывается уравнением

$$\frac{dL}{dt} = \tau,$$

или

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \tau = Tr.$$

Здесь  $L = J(d\varphi/dt)$ ,  $J$  — момент инерции цилиндра,  $T$  — натяжение нити. Учитывая, что  $J = Mr^2/2$ , получаем

$$\frac{1}{2} Ma = T.$$

Складывая это уравнение с уравнением движения груза:

$$ma = mg - T,$$

находим

$$a = \frac{m}{m + M/2} g.$$

- 18.8. а) Совместим начало координат с отверстием на столе, а одну из координатных плоскостей, например  $xy$ , — с плоскостью стола. В этой системе координат момент внешних сил равен нулю, поэтому момент количества движения груза сохраняется:  $mr_1v_1 = mr_2v_2$ . Отсюда скорость груза в конечном состоянии

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1.$$

- б) Работа внешней силы равна изменению кинетической энергии груза; следовательно,

$$W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2}.$$

- в) Пусть  $F(r)$  — сила, которую необходимо приложить к нити, чтобы удержать шарик на расстоянии  $r$ . При виртуальном перемещении  $dr$  эта сила выполняет работу [см. п. (б)]

$$F(r) dr = \frac{mv^2}{2} \frac{[(r + dr)^2 - r^2]}{r^2} = \frac{mv^2}{r} dr$$

[здесь мы пренебрегли членом  $\sim (dr)^2$ ]. Сокращая  $dr$ , получаем  $F(r) = mv^2/r$ , что, конечно, и следовало ожидать.

- 18.9. Момент количества движения планеты является суммой двух членов:  $L_1 + L_2$ ;  $L_1$  связан с движением планеты по орбите ( $L_1 = mvR$ ), а  $L_2$  — с ее вращением вокруг своей оси ( $L_2 = J\omega$ ). Учитывая, что для движения по круговой орбите  $v^2/R \sim GM/R^2$  (считаем, что центральное тело очень тяжелое), получаем

$$L_1 = m \sqrt{GMR}.$$



Величина  $L_2$  для всех реальных случаев оказывается гораздо меньше  $L_1$ .

Рассмотрим теперь систему Земля — Луна. Момент количества движения этой системы определяется следующими видами движения: движением Луны относительно ц. м. системы Земля — Луна, вращением Луны вокруг своей оси, движением Земли относительно ц. м. системы и вращением Земли вокруг своей оси.

Вспомним теперь, что период вращения Луны вокруг своей оси равен периоду ее движения по орбите. Следовательно,

$$\frac{L_{1Л}}{L_{2Л}} = \frac{m_Л R^2}{J_Л} \sim \frac{R^2}{r_Л^2},$$

где  $R$  — радиус лунной орбиты, а  $r_Л$  — радиус Луны. Таким образом,  $L_{1Л} \gg L_{2Л}$ , и этой последней величиной можно пренебречь. Далее, поскольку периоды обращения Земли и Луны вокруг центра масс системы одинаковы, а расстояние до него обратно пропорционально массам, имеем

$$L_{1З} = \frac{m_Л}{m_З} L_{1Л} \approx 5 \cdot 10^{-3} L_{1Л}.$$

т. е. вклад орбитального движения Земли в момент количества движения также очень мал. Оценим теперь вклад от вращения Земли вокруг своей оси. Имеем

$$L_{2З} = J_З \omega_З = \frac{2}{5} m_З r_З^2 \omega_З.$$

Учитывая, что  $m_З \approx 80 m_Л$ ,  $r_З \approx 6 r_Л$ ,  $\omega_З = \omega_Л / 28$ , убеждаемся, что

$$\frac{L_{2З}}{L_{1Л}} \approx 0,1.$$

Следовательно, момент количества движения системы Земля — Луна равен приблизительно (считаем, что ось вращения Луны перпендикулярна плоскости ее орбиты):

$$L = L_{1Л} + L_{2З} = m_Л \sqrt{G m_З R} + J_З \omega_З.$$

Из-за приливов, тормозящих вращение Земли, длина суток медленно увеличивается, т. е. уменьшается угловая скорость вращения, а с ней и момент количества движения Земли  $L_{2З}$ . Так как полный момент количества движения системы Луна — Земля должен оставаться постоянным, момент количества движения Луны  $L_{1Л}$  должен медленно возрастать, компенсируя уменьшение  $L_{2З}$ .

Увеличение  $L_{1Л}$  (см. выражение для этой величины) возможно только в случае увеличения расстояния между Луной и Землей.

Энергия системы Земля — Луна состоит из кинетической и потенциальной энергий орбитального движения Луны и кинетической энергии вращения Земли (мы опять пренебрегли кинетической энергией вращения Луны и движения Земли по орбите как малыми величинами).

Как следует из решения задачи 14.18, полная энергия Луны равна

$$- \frac{G m_З m_Л}{2R}.$$

а энергия вращения Земли вокруг своей оси

$$\frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 = 0,2m_3 r_3^2 \omega_3^2.$$

Полная энергия рассматриваемой системы

$$0,2m_3 r_3^2 \omega_3^2 - \frac{Gm_3 m_{\text{Л}}}{2R}$$

положительна, в чем можно убедиться, подставив вместо букв соответствующие числа. В предельном случае (далеком будущем), когда Земля полностью перестанет вращаться вокруг своей оси ( $\omega_3 = 0$ ), полная энергия системы Земля — Луна станет отрицательной ( $-Gm_3 m_{\text{Л}}/2R_0$ , где  $R_0$  — расстояние между Луной и Землей при  $\omega_3 = 0$ ) или, в крайнем случае, при  $R_0 \rightarrow \infty$  обратится в нуль. Это означает, что полная механическая энергия системы Земля — Луна уменьшается по мере удаления Луны от Земли. Это и понятно, ведь часть механической энергии вследствие приливного трения превращается в теплоту.

- 18.10.** Когда подвешиваются грузы  $W_1$  и  $W_2$ , силы, действующие в шарнирных соединениях  $AA'$  и  $BB'$ , изменяются. Нас будут интересовать только эти добавки. Силы, которые действовали в шарнирных соединениях раньше, как раз такие, чтобы рама с грузом  $W_c$  оставалась в равновесии, поэтому, рассматривая только добавки, мы можем не учитывать ни веса рамы, ни груза  $W_c$ . Выясним условие равновесия планки  $AB$ . Суммарный момент силы, действующей на эту планку,

$$F_A \cdot AP - F_B \cdot PB = 0.$$

Здесь  $F_A$  и  $F_B$  — вертикальные составляющие силы в шарнирах  $A$  и  $B$  (момент горизонтальных составляющих сил равен нулю). Аналогично

$$F_{A'} \cdot A'P' - F_{B'} \cdot P'B' = 0.$$

Складывая эти уравнения, находим

$$(F_A + F_{A'}) \cdot AP = (F_B + F_{B'}) \cdot PB.$$

Из условия равновесия углов  $ACD$  и  $BGH$  имеем

$$F_A + F_{A'} = W_1,$$

$$F_B + F_{B'} = W_2,$$

откуда

$$W_2 = \frac{AP}{PB} W_1 = 0,25 \text{ кг}.$$

- 18.11.** По условию задачи машина должна отключаться, когда  $AC$  достигнет значения  $\sim \sqrt{2} \cdot 30 \text{ см}$ , т. е. когда угол  $\alpha = 45^\circ$ . В системе координат, вращающейся вместе с регулятором, массы  $M$  находятся в равновесии. На каждую из них действует центробежная псевдосила  $F$  и реакции стержней  $T_1$  и  $T_2$  (направление сил показано на рисунке).

Используем условие равновесия массы  $M$ . Из равенства нулю суммы горизонтальных составляющих сил получаем

$$F = \frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}}.$$

Из равенства нулю суммы вертикальных составляющих сил:

$$Mg = \frac{T_1}{\sqrt{2}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}}.$$

Наконец, условие равновесия массы  $C$  записывается в виде

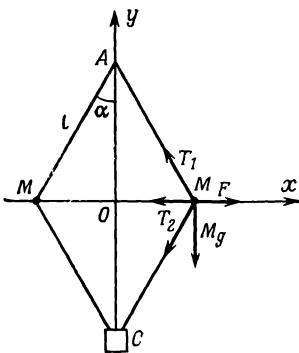
$$mg = \sqrt{2} T_2.$$

Из этих трех уравнений находим

$$F = (M + m)g \quad \text{или} \quad 4\pi^2 n^2 M \frac{l}{\sqrt{2}} = (M + m)g.$$

Таким образом,

$$M = \frac{g}{2\sqrt{2}\pi^2 n^2 l - g} m \approx 1,7 \text{ кг.}$$



- 18.12. Мощность, необходимая для вращения вала, равна мощности сил трения, т. е.

$$P = F_{\text{тр}} v,$$

где  $v$  — скорость масс  $m$ ,  $v = \omega r$ .

Сила трения каждой колодки равна произведению коэффициента трения на величину силы, прижимающей колодку к цилиндру, т. е.

$$F_{\text{тр}} = \mu m \omega^2 r.$$

Таким образом,

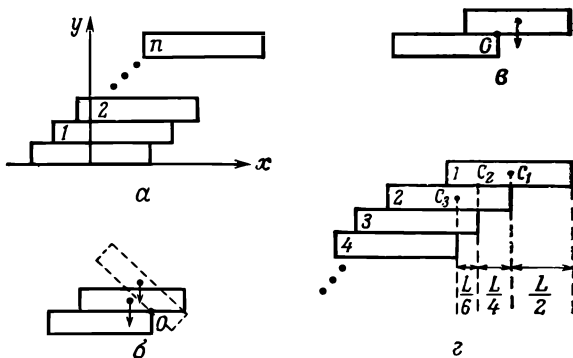
$$P = \mu m \omega^3 r^2.$$

- 18.13. Поместим начало системы координат в середину основания нижнего бруска. Обозначим через  $x_1, x_2, \dots, x_n$  координаты центров масс соответствующих брусков (см. фиг. а). Очевидно, что сооружение из брусков опрокинется, когда координата  $x_0$  центра масс всей системы брусков, лежащих на нижнем бруске, выйдет за его основание, т. е. когда  $x_0 \geq L/2$  (знак равенства соответствует неустойчивому равновесию).

Поясним это, рассмотрев условие равновесия двух брусков, установленных друг на друге. Пусть сначала бруски расположены так,

как это показано на фиг. б. Повернем верхний брусок относительно точки  $O$  на малый угол  $\Delta\varphi$  по часовой стрелке и отпустим его. Как будет двигаться брусок дальше?

Сила веса бруска создает относительно точки  $O$  вращающий момент  $\tau = mg [(L/2) - l]$  ( $m$  — масса бруска,  $l$  — длина выступающей части торца), который стремится повернуть брусок в исходное положение. Это и означает, что в положении, показанном на фиг. б,



брусок находится в равновесии. По мере стремления  $l$  к  $L/2$  величина вращающего момента убывает. Наконец,  $\tau = 0$  при  $l = L/2$ . Теперь достаточно отклонить верхний брусок на бесконечно малый угол, чтобы брусок начал вращаться по часовой стрелке; это означает, что верхний брусок находится в положении неустойчивого равновесия. Разумеется, при  $l > L/2$  (см. фиг. в) возникает вращающий момент  $\tau = mg(l - L/2)$ , опрокидывающий верхний брусок.

Вычислим координаты центра масс всех брусков, лежащих на нижнем. Очевидно,

$$x_1 = \frac{L}{a}, \quad x_2 = 2 \frac{L}{a}, \quad \dots, \quad x_n = n \frac{L}{a}.$$

Следовательно, координата центра масс системы этих брусков равна

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) = \\ &= \frac{1}{n} \frac{L}{a} (1 + \dots + n) = \frac{1}{n} \frac{L}{a} \frac{n+1}{2} n = (n+1) \frac{L}{2a}. \end{aligned}$$

Неустойчивое равновесие наступит при  $x_0 = L/2$ , откуда

$$n = a - 1.$$

Следовательно, максимальное число брусков, которые можно уложить указанным способом, равно  $a$ .

Рассмотрим теперь очень интересный случай, когда длина свешивающейся части бруска не постоянна, а зависит от его положения в кладке. Начнем рассмотрение с самого верхнего бруска.

Как мы выше установили, для того чтобы верхний брусок не опрокинулся, он может быть сдвинут относительно нижнего бруска самое большее на длину  $L/2$  (см. рис. г). Чтобы два верхних бруска не упали, их общий центр масс  $C_2$  не должен выступать дальше, чем

на  $L/2$  от конца третьего бруска и т. д. Найдем, на какую длину  $x$  второй брусок может быть сдвинут относительно третьего.

Поместим начало системы координат над торцом третьего бруска и направим ось  $x$  вправо. Тогда для положения центра масс двух верхних брусков  $x^{(2)}$  имеем

$$x^{(2)} = \frac{m_1 x + m_2 (x - L/2)}{m_1 + m_2} = x - \frac{L}{4}.$$

На пределе равновесия  $x^{(2)} = 0$ , поэтому  $x = L/4$ .

Поместим теперь начало координат над торцом четвертого бруска. Считая, что третий брусок выступает от торца четвертого бруска на расстояние  $y$ , найдем для ц. м. трех брусков:

$$x^{(3)} = \frac{(m_1 + m_2) y + m_3 (y - L/2)}{m_1 + m_2 + m_3} = y - \frac{L}{6}.$$

Из условия  $x^{(3)} = 0$  имеем  $y = L/6$ .

По способу вычисления  $x^{(3)}$  ясно, что от торца предыдущего бруска четвертый брусок будет выступать на  $L/8$ , пятый — на  $L/10$  и т. д. Сколько бы брусков мы ни складывали, величина их взаимного смещения не обращается в нуль, т. е. такая кладка содержит бесконечное число брусков.

Максимальное расстояние  $S$ , на которое выступает самый верхний брусок над самым нижним, равно

$$S = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{6} + \frac{L}{8} + \dots = \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right),$$

причем число членов суммы бесконечно.

Сравним два ряда:

$$\Sigma_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

и

$$\Sigma_2 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \dots$$

Сумма  $\Sigma_2$  заведомо бесконечно велика (это видно из самой конструкции ряда); в то же время каждый ее член не больше соответствующего члена  $\Sigma_1$ , следовательно, сумма  $\Sigma_1$  тем более расходится. Но  $\Sigma_1$  и есть сумма, стоящая в выражении для  $S$ ; значит, верхний брусок смещен на бесконечно большое расстояние относительно нижнего.

## К главе 19. Центр масс; момент инерции

19.1. Энергия, затраченная механизмом  $K$ , равна изменению кинетической энергии вращения системы, т. е.

$$E = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2,$$

где  $I_0$  и  $I_1$  — моменты инерции «квадратной» и «крестообразной» систем, а  $\omega_1$  — конечная угловая скорость вращения. Момент инерции

системы складывается из моментов инерции стержней и момента инерции внутреннего механизма.

Пользуясь теоремой о параллельном переносе оси, находим, что момент инерции одного стержня относительно оси  $O$  равен в начальном состоянии  $(4/3)ML^2$ , а в конечном  $(1/3)ML^2$ . Поэтому

$$I_0 = \frac{32}{3} ML^2 + \frac{40}{3} ML^2 = 24ML^2$$

и

$$I_1 = \frac{8}{3} ML^2 + \frac{40}{3} ML^2 = 16ML^2.$$

Конечную угловую скорость вращения  $\omega_1$  находим из закона сохранения момента количества движения (механизм, складывающий стержни, — внутренних!)

$$I_1 \omega_1 = I_0 \omega_0,$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{I_0}{I_1} \omega_0 = \frac{3}{2} \omega_0.$$

Таким образом, затраченная механизмом  $K$  энергия равна

$$E = \frac{9}{8} I_1 \omega_0^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = 6ML^2 \omega_0^2.$$

- 19.2. а) Пусть нить закручена на угол  $\theta$ . Чтобы удержать ее в этом положении, к нити нужно приложить внешние силы, момент которых  $\tau$  был бы равен упругому моменту нити с обратным знаком, т. е.  $\tau = k\theta$ .

При дальнейшем закручивании нити на малый угол  $\Delta\theta$ , как было показано в гл. 18 «Лекций» (вып. 2, стр. 320), внешние силы совершают работу  $\Delta W = \tau \cdot \Delta\theta$ . Нить, закрученная на фиксированный угол  $\theta_0$ , обладает, таким образом, потенциальной энергией  $U$ , равной по величине работе внешних сил, поворачивающих нить от ненапряженного состояния ( $\theta = 0$ ) до угла  $\theta_0$ , т. е.

$$U = \int_0^{\theta_0} \tau d\theta = \int_0^{\theta_0} k\theta d\theta = \frac{1}{2} k\theta_0^2.$$

- б) В момент разряда конденсатора на рамку действует момент  $\tau = nAB|dq/dt|$ , в результате чего рамка начнет вращаться с угловой скоростью  $\omega = L/I$ , где  $L$  — момент количества движения рамки,  $I$  — ее момент инерции. Величину  $L$  найдем, интегрируя уравнение

$$\frac{dL}{dt} = nAB \left| \frac{dq}{dt} \right|$$

от  $t = 0$  до момента окончания разряда конденсатора, что дает  $L = nABq_0$  ( $q_0$  — первоначальный заряд конденсатора). Когда катушка отклоняется на максимальный угол и останавливается, начальная кинетическая энергия рамки

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I} = \frac{n^2 A^2 B^2 q_0^2}{2I}$$

переходит в потенциальную энергию некоторого устройства, позволяющего катушке совершать крутильные колебания. Независимо от конкретного механизма этого устройства (то ли катушка висит на нити, то ли на ее ось насажены какие-то пружинки и т. п.) его потенциальная энергия в любом случае равна  $k\theta^2/2$ . Поэтому

$$\frac{1}{2} k\theta_{\max}^2 = \frac{n^2 A^2 B^2 q_0^2}{2I}, \quad \text{откуда} \quad \theta_{\max} = \frac{nABq_0}{\sqrt{kI}},$$

т. е. максимальный угол поворота рамки пропорционален начальной заряду конденсатора.

- 19.3.** Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее частей. Поэтому момент инерции проволоки, вычисленный относительно оси, проходящей через точку  $A$ , не зависит от угла  $\theta$  и равен  $ML^2/12$ .
- 19.4.** Для моментов инерции пластинки относительно осей, проходящих через точки  $A$  и  $B$ , можем написать

$$I_A = I_C + Mr_1^2, \quad I_B = I_C + Mr_2^2,$$

откуда

$$I_B = I_A - Mr_1^2 + Mr_2^2 = I_A + M(r_2^2 - r_1^2).$$

Приведенное в условии задачи равенство выполняется, если  $r_3^2 = r_2^2 - r_1^2$ , т. е. когда  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  образуют прямоугольный треугольник, причем гипотенузой является  $r_3$ .

- 19.5.** Объем тела вращения равен произведению длины окружности, описываемой центром масс плоской фигуры при вращении, на площадь этой фигуры. В нашем случае

$$V = 2\pi R \cdot \pi R^2 = 2\pi^2 R^3,$$

так как центр масс однородного круга лежит в его геометрическом центре.

- 19.6.** Энергия, затрачиваемая на достижение данной угловой скорости  $\omega_0$  из неподвижного состояния, равна кинетической энергии вращающегося тела. Эта энергия тем меньше, чем меньше момент инерции тела (значение  $\omega_0$  фиксировано!).

Для любого тела  $I = I_{ц.м} + Md^2$ , где  $I_{ц.м}$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс;  $d$  — расстояние от этой оси до параллельной ей оси вращения. Очевидно, что минимальному значению момента инерции отвечает  $d = 0$ . Таким образом, ось вращения должна проходить через центр масс, который находится на расстоянии  $M_2L/(M_1 + M_2)$  от того конца невесомого стержня, на котором закреплена масса  $M_1$ .

- 19.7.** Пусть диск с прижатыми грузиками вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ . Его момент количества движения  $L_0$  равен  $[MR^2/2 + 2mR^2] \cdot \omega_0$ .

В момент срыва нитей с крючков  $H$  и  $H'$  диск вращается с угловой скоростью  $\omega_1$ , определяемой из закона сохранения момента количества движения:

$$\left(\frac{MR^2}{2} + 2mR^2\right) \omega_0 = \left[\frac{MR^2}{2} + 2m(R+l)^2\right] \omega_1,$$

т. е.

$$\omega_1 = \frac{MR^2 + 4mR^2}{MR^2 + 4m(R+l)^2} \omega_0.$$

После отделения грузиков диск продолжает вращаться с той же угловой скоростью  $\omega_1$ , так что угловая скорость диска уменьшается в  $n$  раз, если

$$\frac{MR^2 + 4mR^2}{MR^2 + 4m(R+l)^2} = \frac{1}{n}, \quad \text{т. е.} \quad l = R \left[ \sqrt{n + \frac{M}{4m}(n-1)} - 1 \right].$$

- 19.8. В неподвижной системе координат  $x, y$  на тело действует сила  $F$ . Тело будет двигаться в этой системе координат в соответствии с уравнениями движения  $m\ddot{x} = F_x$  и  $m\ddot{y} = F_y$ . При повороте системы координат на угол  $\theta = \omega t$  координаты преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x} \cos \omega t - x \omega \sin \omega t + \dot{y} \sin \omega t + y \omega \cos \omega t, \\ \ddot{x}' &= \ddot{x} \cos \omega t + \ddot{y} \sin \omega t - 2\dot{x}\omega \sin \omega t + \\ &+ 2\dot{y}\omega \cos \omega t - x\omega^2 \cos \omega t - y\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{y}' &= -\dot{x} \sin \omega t - x \omega \cos \omega t + \dot{y} \cos \omega t - y \omega \sin \omega t, \\ \ddot{y}' &= -\ddot{x} \sin \omega t + \ddot{y} \cos \omega t - 2\dot{x}\omega \cos \omega t - 2\dot{y}\omega \sin \omega t + \\ &+ x\omega^2 \sin \omega t - y\omega^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Компоненты силы в штрихованной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} F'_x &= m\ddot{x}' = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta + 2m\dot{y}'\omega + m\omega^2 x', \\ F'_y &= m\ddot{y}' = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta - 2m\dot{x}'\omega + m\omega^2 y'. \end{aligned}$$

Первые два члена в каждом выражении являются компонентами истинной силы  $F$  в повернутой системе координат, третьи слагаемые — компонентами силы Кориолиса, и последние — центробежной силы.

Из выражения для компонент центробежной силы мы видим, что по величине она равна  $m\omega^2 r'$  и направлена по радиусу-вектору частицы. Сила Кориолиса равна  $2m\omega \sqrt{\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2} = 2m\omega v'$ , т. е. она пропорциональна скорости и направлена перпендикулярно вектору скорости, поскольку  $F_k \cdot v' = 0$ .

- 19.9. Уравнение движения для центра масс шара записывается в виде

$$Ma = -\mu g M,$$

откуда  $a = -\mu g$  и  $v_{ц.м} = v - \mu g t$  ( $v$  — начальная скорость шара).

Для вращательного движения

$$I \frac{d\omega}{dt} = \mu g MR.$$



Поскольку  $I = 2MR^2/5$  (см. «Ленции», вып. 2, стр. 338, только в приведенной там таблице «сферу» нужно заменить «шаром»), имеем

$$\omega = \frac{5}{2} \frac{\mu g t}{R}.$$

Скорость той точки шара, которая соприкасается с плоскостью, равна  $v_{ц.ш.} = \omega R$ . Когда эта скорость обращается в нуль, шар начинает катиться без проскальзывания. Это произойдет через промежуток времени  $t_k$  от начала движения, равный

$$t_k = \frac{2}{7} \frac{v}{\mu g}.$$

Расстояние, пройденное шаром за это время,

$$S = vt_k - \frac{1}{2} at_k^2 = \frac{12}{49} \frac{v^2}{\mu g},$$

а его скорость к этому моменту  $v_{tk} = v - \mu g t_k = 5v/7$ .

- 19.10.** Вес  $W$  валика разложим на две составляющие: силу нормального давления его на вал  $P$ , равную  $F_1 = Mg \sin \theta$ , и перпендикулярную к ней  $F_2 = Mg \cos \theta$ .

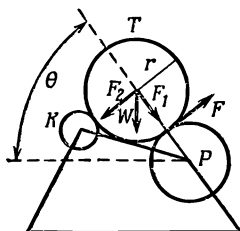
Контакт между передающим валиком  $T$  и барабаном  $K$  не будет теряться в том случае, если «сила тяги»  $F$ , приложенная со стороны печатного вала  $P$  к валику  $T$  (как раз и обуславливающая вращение валика  $T$ ), меньше или равна  $F_2$ , т. е.

$$F \leq Mg \cos \theta$$

(знак равенства соответствует нулевому давлению  $T$  на  $K$ ).

Уравнение вращательного движения для валика  $T$ , когда он не давит на барабан  $K$ , имеет вид  $IA_1 = Fr$ , или  $(Mr^2/2)A_1 = Mgr \cos \theta$  (здесь через  $A_1 = d\omega/dt$  обозначено угловое ускорение валика  $T$ ), так как

$$I = \frac{1}{2} Mr^2, \quad \text{откуда} \quad A_1 = \frac{2g}{r} \cos \theta.$$



Линейные ускорения точек обода  $T$  и  $P$  одинаковы, так что  $A_1 r = AR$ , откуда ( $A$  — угловое ускорение вала  $P$ )

$$A = A_1 \frac{r}{R} = \frac{2g}{R} \cos \theta,$$

где  $R$  — радиус вала  $P$ .

- 19.11.** Обозначим массу первой секции через  $m$ , тогда массы соответствующих квадрантов равны

$$m_1 = m, \quad m_2 = 2m, \quad m_3 = 3m \quad \text{и} \quad m_4 = 4m.$$

Поскольку каждая из секций однородна, то центры масс их расположены одинаково относительно самих секций. Если координаты центров масс секций  $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$ , то положение центра масс всего тела вычисляется по формулам

$$X = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4}{10} \quad \text{и} \quad Y = \frac{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4}{10}.$$

Из соображений симметрии ясно, что центры масс каждой из секций лежат на биссектрисе соответствующего прямого угла на одинаковых расстояниях от начала координат.

Обозначим координаты центра масс первой секции через  $a$ :

$$x_1 = y_1 = a.$$

Очевидно, в этом случае

$$x_2 = a, \quad y_2 = -a,$$

$$x_3 = -a, \quad y_3 = a,$$

$$x_4 = -a, \quad y_4 = -a.$$

Таким образом,

$$X = -0,4a. \quad Y = -0,2a.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки  $(O, O)$  и  $(X, Y)$ , записывается в виде

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y},$$

откуда получаем искомое уравнение

$$y = \frac{1}{2} x.$$

- 19.12. Пусть  $M$  — масса диска с отверстием,  $m$  — масса вырезанной части диска,  $x$  — абсцисса центра масс диска с отверстием. Поскольку центр масс сплошного диска расположен в его центре, то

$$\frac{Mx - m(R/2)}{M + m} = 0,$$

откуда

$$x = \frac{m}{2M} R = \frac{1}{2} \frac{(R/2)^2}{R^2 - (R/2)^2} R = \frac{1}{6} R = 1,67 \text{ см.}$$

- 19.13. Выберем систему координат, как рекомендовано в условии задачи. Так как проволока расположена симметрично относительно оси  $x$ , то, очевидно,  $y_{ц. м} = 0$ . По определению центра масс

$$x_{ц. м} = \frac{\int x \, dm}{\int dm};$$

эта формула является обобщением приведенной в «Лекциях» формулы

$$x_{ц. м} = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i}.$$

Масса проволоки бесконечно малой длины  $dl$  равна  $\rho dl$ , где  $\rho = M/L$  — масса единицы длины проволоки, поэтому

$$x_{ц. м} = \frac{1}{L} \int x \, dl.$$

Вычислять такой интеграл в прямоугольной системе координат довольно громоздко. Эти вычисления значительно упрощаются, если заметить, что для произвольной точки проволоки, радиус-вектор

которой образует угол  $\varphi$  с осью  $y$ ,  $x = R \sin \varphi$ , а  $y = R \cos \varphi$ ,  $dl = R d\varphi$  (см. рисунок). Чтобы учесть все точки проволоки, угол  $\varphi$  должен пробегать значения от  $(\pi - \alpha)/2$  до  $(\pi + \alpha)/2$ , где  $\alpha = L/R$  — угол между радиусами-векторами концов проволоки.

Таким образом,

$$x_{ц. м} = \frac{R^2}{L} \int_{(\pi-\alpha)/2}^{(\pi+\alpha)/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{2R^2}{L} \sin \frac{\alpha}{2} = R \left( \frac{2R}{L} \right) \sin \left( \frac{L}{2R} \right).$$

Этот же результат может быть получен из теоремы Паппа (см. «Лекции», вып. 2, стр. 333, 334). При вращении проволоки вокруг оси  $y$  получается шаровой пояс площадью

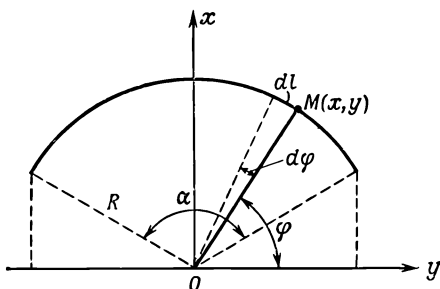
$$2\pi R \cdot 2R \cos \left( \frac{\pi - \alpha}{2} \right) = 4\pi R^2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Центр масс проволоки описывает окружность длиной  $2\pi x_{ц. м}$ , так что

$$2\pi x_{ц. м} L = 4\pi R^2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$x_{ц. м} = R \left( \frac{2R}{L} \right) \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = \frac{L}{R}.$$



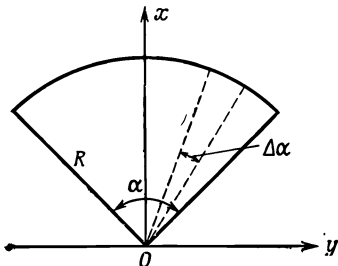
- 19.14. Разобьем сектор на большое число секторов с вершинами в точке  $O$  и очень малым центральным углом  $\Delta\alpha$ . Каждый такой сектор с большой точностью можно рассматривать как равнобедренный треугольник, центр масс которого лежит на его высоте, на расстоянии  $2R/3$  от вершины.

Таким образом, задача о нахождении центра масс дуги окружности радиусом  $2R/3$  и углом раствора  $\alpha$ , т. е. к предыдущей задаче. В такой же системе координат, как и в задаче 19.13,  $y_{ц. м} = 0$ , а

$$x_{ц. м} = \frac{2}{3} R \left( 2 \frac{2}{3} \frac{R}{L} \right) \sin \frac{L}{2(2R/3)}.$$

Учитывая, что  $L = (2/3) R\alpha$ , находим

$$x_{ц. м} = \frac{4}{3} \frac{R}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}.$$



- 19.15. а) Определим положение центра масс, получившегося после склеивания тела. Как было показано в предыдущей задаче, центр масс сектора лежит на его биссектрисе на расстоянии  $(4R/3\alpha) \sin(\alpha/2)$  от центра окружности. (В нашем случае это расстояние равно  $\sqrt{3}$  см, поскольку  $R = \pi$  см и  $\alpha = 2\pi/3$ .) Биссектриса сектора массой  $2M$  направлена горизонтально, поэтому координаты центра масс этого тела  $x_2 = -\sqrt{3}$  см,  $y_2 = 0$ . Биссектриса сектора массой  $M$  образует угол  $30^\circ$  с вертикалью, так что координаты  $x_1$  и  $y_1$  центра масс этого сектора равны

$$x_1 = \sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см}, \quad y_1 = -\sqrt{3} \cos 30^\circ = -\frac{3}{2} \text{ см}.$$

Следовательно, координатами центра масс тела, получившегося после склеивания двух частей, являются

$$X = \frac{Mx_1 + 2Mx_2}{M + 2M} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см}$$

$$Y = \frac{My_1 + 2My_2}{M + 2M} = -\frac{1}{2} \text{ см}.$$

Рассмотрим силы, действующие на тело. Это сила тяжести, приложенная в центре масс тела, силы давления пола и стенки  $P$  и  $N$  и сила трения о пол  $F_{\text{тр}}$ . Эти силы приложены в точках соприкосновения тела со стенкой и полом и направлены так, как показано на рисунке. Поскольку тело находится в равновесии, геометрическая сумма всех сил равна нулю; сумма моментов этих сил, например относительно точки  $O$ , также равна нулю. Это дает

$$P = 3Mg, \quad N = F_{\text{тр}} \quad \text{и} \quad \pi F_{\text{тр}} = -X \cdot 3Mg,$$

откуда

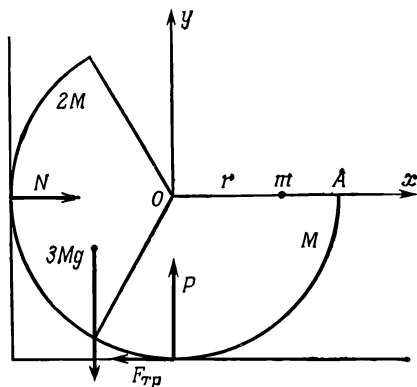
$$N = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} Mg.$$

- Поскольку  $M = 1$  кг, тело давит на стенку с силой  $3\sqrt{3}/2\pi$  кг.
- б) Если на линии  $OA$  на расстоянии  $r$  от точки  $O$  поместить тело массой  $m$ , то система останется в равновесии до тех пор, пока будут равны друг другу моменты сил тяжести составного тела и шарика относительно точки соприкосновения тела и пола:

$$mgr = 3XMg,$$

что дает

$$r = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{M}{m}.$$



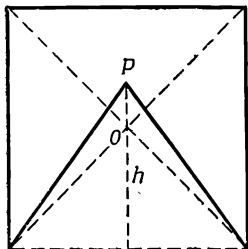
- 19.16. Поскольку вся фигура, подвешенная в точке  $P$ , находится в равновесии независимо от ее положения, точка  $P$  является ее центром масс.

Пусть высота вырезанного треугольника равна  $h$ . Его центр масс находится на расстоянии  $2h/3$  от  $P$ . Центр масс полученной фигуры и вырезанного треугольника расположен в точке  $O$ , следовательно (см. задачу 19.12),

$$\left(a^2 - \frac{ah}{2}\right) \left(h - \frac{a}{2}\right) = \frac{ah}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{h}{3}\right).$$

Из этого соотношения получаем квадратное уравнение для  $h$ :

$$2h^2 - 6ah + 3a^2 = 0,$$



откуда

$$h = \frac{a(3 \pm \sqrt{3})}{2}.$$

Так как по смыслу задачи  $h < a$ , в качестве решения выбираем меньший корень квадратного уравнения, т. е.  $h = 0,63 a$ .

- 19.17. а) На катушку действует сила тяжести, направленная вертикально вниз, и сила натяжения  $T$  вдоль нити. Катушка не будет раскачиваться, если нет горизонтальных сил, т. е. если нить вертикальна.
- б) Запишем уравнения движения катушки: для поступательного

$$2Ma = 2Mg - T,$$

для вращательного

$$I\varepsilon = Tr;$$

здесь  $a$  — ускорение центра масс катушки,  $\varepsilon$  — ее угловое ускорение,  $M$  — масса одного диска,  $T$  — натяжение нити. Учитывая, что  $\varepsilon = a/r$  и  $I = MR^2$ , уравнения движения перепишем в виде

$$2Ma = -T + 2Mg,$$

$$MR^2a = Tr^2,$$

откуда

$$a = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2}\right)^{-1} g.$$

- 19.18. а) Запишем закон сохранения момента количества движения

$$(I_0 + mR^2) \omega_0 = (I_0 + mr^2) \omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2} \omega_0.$$

б) Изменение кинетической энергии системы равно

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(I_0 + mR^2)\omega_0^2 + \frac{1}{2}(I_0 + mr^2)\omega^2 = \\ & = \frac{1}{2}\omega_0^2(I_0 + mR^2)\left[\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2} - 1\right]. \end{aligned}$$

С другой стороны, чтобы удержать вращающееся с угловой скоростью  $\omega$  тело массой  $m$  на расстоянии  $x$  от оси вращения, необходимо приложить к нити силу

$$F = m\omega^2 x = \left(\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mx^2}\right)^2 m\omega_0^2 x.$$

Работа этой силы при изменении  $x$  от  $R$  до  $r$  равна

$$\begin{aligned} W &= \int_R^r F dx = (I_0 + mR^2)^2 m\omega_0^2 \int_R^r \frac{x dx}{(I_0 + mx^2)^2} = \\ &= \frac{1}{2}\omega_0^2(I_0 + mR^2)\left[\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2} - 1\right], \end{aligned}$$

т. е. разности кинетических энергий системы в конечном и начальном состояниях.

в) В системе координат, вращающейся вместе со столом, радиальная скорость тележки увеличивается благодаря действию центробежной силы, так что в этой системе кинетическая энергия тележки в точке  $R$  равна вычисленной в п. (б) работе  $W$ , т. е.

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = W,$$

откуда

$$v_r^2 = \frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2}(R^2 - r^2)\omega_0^2.$$

## К главе 20. Вращение в пространстве

20.1. Векторное произведение двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + \\ &+ (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Используя свойства детерминанта, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x + c_x & b_y + c_y & b_z + c_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}; \end{aligned}$$

$$(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha a_x & \alpha a_y & \alpha a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \alpha (\mathbf{a} \times \mathbf{b});$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}); \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} (a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z) + \dots = \\ &= \mathbf{i} [b_x (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x (a_y b_y + a_z b_z + a_x b_x) + \\ &+ a_x b_x c_x - a_x b_x c_x] + \dots = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Все эти соотношения можно доказать, записав векторы в компонентной форме и тщательно проделав соответствующие математические выкладки.

- 20.2. Направим ось  $z$  вдоль вектора  $\boldsymbol{\omega}$  (т. е. вдоль оси вращения твердого тела), а начало координат поместим в произвольной точке на оси вращения. Вычислим векторное произведение  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки  $P$  тела) в этой системе координат:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}.$$

Полученный вектор лежит в плоскости  $xy$  и перпендикулярен вектору  $\mathbf{r}'(x, y)$ , модуль его равен  $\omega \sqrt{y^2 + x^2} = \omega r'$ . Поскольку  $\mathbf{r}'$  — расстояние от точки  $P$  до оси вращения, вычисленное векторное произведение есть не что иное, как скорость точки  $P$  твердого тела, т. е.  $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ .

- 20.3. Пусть тело повернется на некоторый очень малый угол  $\Delta\theta_1$  вокруг оси  $l$ , проходящей через начало координат. Введем вектор  $\Delta\theta_1$ , величина которого равна  $\Delta\theta_1$ , а направление совпадает с осью вращения, т. е.  $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_1 \cdot \mathbf{n}_1$  ( $\mathbf{n}_1$  — единичный вектор вдоль оси вращения). Очевидно, что при таком повороте радиус-вектор  $\mathbf{r}$  произвольной точки  $M$  станет равным  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ . Величина приращения ра-

днуса-вектора равна (см. рисунок)  $r \sin \alpha \cdot \Delta\theta_1$ , причем вектор  $\Delta\mathbf{r}$  направлен перпендикулярно  $\mathbf{r}$  и оси вращения (т. е.  $\Delta\theta_1$ ). Отсюда, вспоминая определение векторного произведения, записываем

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\theta_1 \times \mathbf{r}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\theta_1 \times \mathbf{r}.$$

Если произведен еще один поворот на малый угол  $\Delta\theta_2$  вокруг другой оси, проходящей через начало координат, то новый радиус-вектор той же точки  $M$  (обозначим его  $\mathbf{r}''$ ) может быть выражен через  $\mathbf{r}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' + \Delta\theta_2 \times \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\theta_1 \times \mathbf{r} + \Delta\theta_2 \times (\mathbf{r} + \Delta\theta_1 \times \mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{r} + (\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) \times \mathbf{r}. \end{aligned}$$

В последнем выражении отброшены бесконечно малые величины второго порядка.

Таким образом, два последовательных поворота на углы  $\Delta\theta_1$  и  $\Delta\theta_2$  вокруг разных осей эквивалентны одному повороту на угол

$$\Delta\theta = \sqrt{\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2 + 2 \Delta\theta_1 \Delta\theta_2 \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)}$$

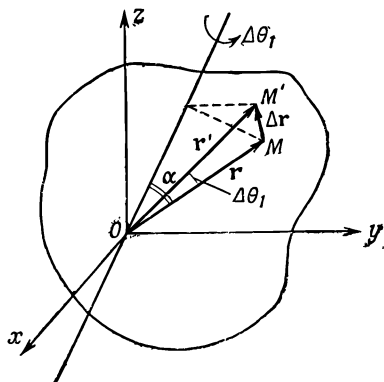
вокруг оси, направление которой совпадает с направлением вектора  $\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$ . Аналогично для  $N$  поворотов на малые углы  $\Delta\theta_i$  имеем

$$\Delta\theta = \sum_{i=1}^N \Delta\theta_i.$$

Рассматривая угловую скорость как вектор, направленный вдоль оси вращения, модуль которого равен изменению угла в единицу времени, записываем  $\omega_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta_i}{\Delta t}$ . Поэтому вращение тела с не-

сколькими угловыми скоростями относительно различных осей эквивалентно вращению с одной угловой скоростью

$$\begin{aligned} \omega &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta\theta_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^N \omega_i. \end{aligned}$$



20.4. Обозначим через  $\mathbf{r}'$  координаты частиц в системе ц. м. Очевидно,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{\text{ц. м}} + \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_{\text{ц. м}} + \mathbf{v}'_i.$$



Момент количества движения системы частиц равен

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i (\mathbf{R}_{ц. м} + \mathbf{r}'_i) \times (\mathbf{v}_{ц. м} + \mathbf{v}'_i) = \\ &= \sum_i m_i \mathbf{R}_{ц. м} \times \mathbf{v}_{ц. м} - \mathbf{v}_{ц. м} \times \sum_i m_i \mathbf{r}'_i + \\ &+ \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i + \mathbf{R}_{ц. м} \times \sum_i m_i \mathbf{v}'_i. \end{aligned}$$

Поскольку по определению центра масс системы  $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$  и  $\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 0$ , получаем

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{ц. м} + M \mathbf{R}_{ц. м} \times \mathbf{v}_{ц. м}.$$

Это выражение по структуре совпадает с выражением, полученным в решении задачи 11.9: момент количества движения системы материальных точек в лаб. системе координат равен ее моменту количества движения в системе ц. м. плюс момент количества движения центра масс, рассматриваемого как материальная точка массой  $M$ , движущаяся со скоростью  $\mathbf{v}_{ц. м}$  относительно лаб. системы координат.

- 20.5. а) Объем  $V$  параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту:  $V = SH$ .

Обозначим угол между сторонами  $A$  и  $B$  основания через  $\alpha$ . Величина площади основания равна

$$S = A \cdot B \sin \alpha = | \mathbf{A} \times \mathbf{B} |.$$

Вектор  $\mathbf{S} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  направлен перпендикулярно векторам  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , т. е. его направление совпадает с нормалью к основанию.

Если угол между  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{C}$  равен  $\theta$ , то

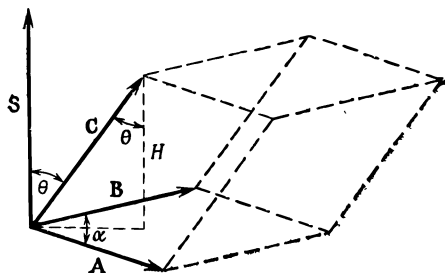
$$V = SH = SC \cos \theta = | \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) |.$$

- б) Параллелепипед определен тремя векторами:

$$\mathbf{a} = 10\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Следовательно, его объем равен абсолютной величине детерминанта, составленного из компонент этих векторов:

$$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 406 \text{ единиц объема.}$$



- 20.6. Центр масс системы из двух стержней расположен в точке  $O$ , лежащей в середине отрезка  $O_1O_2$  ( $O_1, O_2$  — центры масс каждого стержня, совпадающие с геометрическими центрами стержней). После удара в точку  $C$  стержни придут в движение, которое можно разложить на два: поступательное движение системы как целого со скоростью  $v$  по линии удара и вращательное вокруг центра масс  $O$  с некоторой угловой скоростью  $\omega$ . Пусть  $m$  и  $l$  — масса и длина каждого из стержней, а  $p$  — переданный в результате удара импульс. Из закона сохранения импульса  $2mv = p$  следует, что скорость поступательного движения системы равна  $v = p/2m$ , а из закона сохранения момента количества движения  $I\omega = pDC$ , что  $\omega = (3pl/4I) \times (DC = 3l/4)$ , где  $I$  — момент инерции стержней относительно центра масс системы.

Из прямоугольного треугольника  $O_1AO_2$  легко найти, что

$$OO_1 = \frac{1}{2} O_1O_2 = \frac{l}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$I = 2 \left( \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{8} \right) = \frac{5}{12} ml^2 \quad \text{и} \quad \omega = \frac{9}{5} \frac{p}{ml}.$$

Линейные скорости центров масс стержней  $O_1$  и  $O_2$ , возникающие за счет вращательного движения, одинаковы по величине и равны

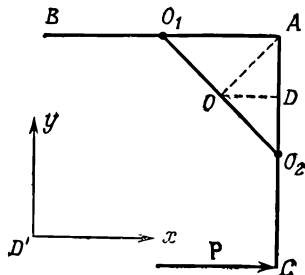
$$u = \omega O_1O = \frac{9}{10\sqrt{2}} \frac{p}{m}$$

и направлены перпендикулярно линии  $O_1O_2$ . В системе координат, показанной на рисунке, скорость поступательного движения имеет только  $x$ -составляющую, а вращательные скорости точек  $O_1$  и  $O_2$  образуют угол  $45^\circ$  с осями координат. Результирующие скорости центров масс стержней  $v_1$  и  $v_2$  равны векторной сумме скорости центра масс системы в целом и скорости, приобретенной центрами масс стержней за счет вращательного движения. Имеем

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v - \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{20} \frac{p}{m}, & v_{1y} &= -\frac{u}{\sqrt{2}} = -\frac{9}{20} \frac{p}{m}; \\ v_{2x} &= v + \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{19}{20} \frac{p}{m}, & v_{2y} &= \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{9}{20} \frac{p}{m}. \end{aligned}$$

Отношение модулей скоростей равно

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}}{\sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2}} \approx 0,43.$$



- 20.7. Направим ось  $y$  вдоль вектора угловой скорости маховика (т. е. по оси вращения). Введем также другую систему координат  $x'y'$ , ось  $y'$  которой перпендикулярна плоскости диска, а  $x'$  лежит в этой плоскости. Компоненты угловой скорости в этой системе

$$\omega_{x'} = \omega \sin \alpha, \quad \omega_{y'} = \omega \cos \alpha, \quad \omega_{z'} = 0$$

( $\alpha$  — угол между осью вращения и осью  $y'$ ). Компоненты момента количества движения в штрихованной системе координат равны

$$L_{x'} = I_{x'} \omega_{x'} = \frac{MR^2}{4} \omega \sin \alpha,$$

$$L_{y'} = I_{y'} \omega_{y'} = \frac{MR^2}{2} \omega \cos \alpha,$$

$$L_{z'} = 0$$

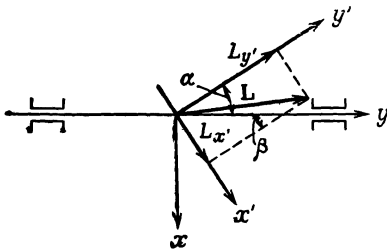
( $M$  — масса диска,  $R$  — его радиус).

При вычислении момента инерции диска относительно оси  $x'$  мы воспользовались тем, что  $I_{y'} = I_{x'} + I_{z'}$ . В силу симметрии диска  $I_{x'} = I_{z'}$ , так что  $I_{x'} = I_{y'}/2 = MR^2/4$ .

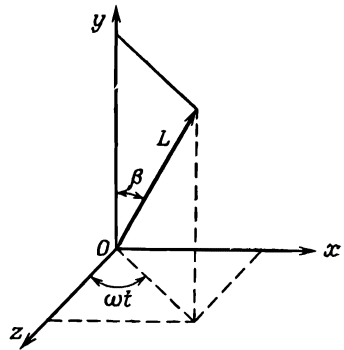
Вектор момента количества движения образует с осью  $y$  угол  $\beta$ , причем

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{L_{x'}}{L_{y'}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Поскольку углы  $\alpha$  и  $\beta$  малы, можно положить  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \approx \alpha - \beta$ , а  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ , так что  $\alpha - \beta = \alpha/2$ , откуда  $\beta = \alpha/2$ . В нештрихованной



Фиг. 1.



Фиг. 2.

системе координат вектор момента количества движения  $\mathbf{L}$  вращается вокруг оси  $y$  с угловой скоростью  $\omega$ . Следовательно, его  $x$ - и  $z$ -компоненты меняются со временем по закону (фиг. 2)

$$L_z = \beta L \cos \omega t, \quad L_x = \beta L \sin \omega t,$$

где

$$L = \sqrt{L_{x'}^2 + L_{y'}^2} = \frac{MR^2}{4} \sqrt{5} \omega.$$

Значит, на маховик действует момент сил  $\tau = dL/dt$ , компоненты которого

$$\tau_x = \frac{dL_x}{dt} = \beta\omega L \cos \omega t,$$

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = -\beta\omega L \sin \omega t,$$

$$\tau_y = 0,$$

а модуль равен

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2} = \beta\omega L = \frac{MR^2 \sqrt{5}}{8} \omega^2 \alpha \approx 30 \text{ ньютон} \cdot \text{м}.$$

Момент пары сил, возникающий в подшипниках, как раз и равен вычисленному моменту.

20.8. Силы притяжения тел массой  $m$  к телу массой  $M$  определяются выражением

$$F_1 = \frac{GmM}{R_1^2} = \frac{GmM}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta} \approx \frac{GmM}{R^2 \left(1 - 2\frac{r}{R} \cos \theta\right)} \approx \frac{GmM}{R^2} \left(1 + 2\frac{r}{R} \cos \theta\right)$$

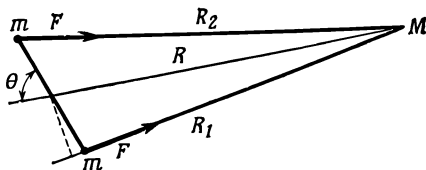
и

$$F_2 = \frac{GmM}{R_2^2} = \frac{GmM}{R^2 + r^2 + 2Rr \cos \theta} \approx \frac{GmM}{R^2} \left(1 - 2\frac{r}{R} \cos \theta\right).$$

При получении приближенных выражений мы пренебрегли  $r^2$  по сравнению с  $R^2$  и учли, что  $(r/R)\cos \theta \ll 1$ , воспользовавшись соотношением  $1/(1 \pm x) \approx 1 \mp x$  при  $x \ll 1$ . Вращающий момент  $\tau$  равен разности моментов сил  $F_1$  и  $F_2$  относительно точки  $O$ , так что  $\tau = F_1 r \sin \theta - F_2 r \sin \theta$  (плечи обеих сил приближенно равны  $r \sin \theta$ ).

Подставляя вместо  $F_1$  и  $F_2$  их значения, получаем

$$\tau = \frac{2GmMr^2}{R^3} \sin 2\theta.$$



Обратите внимание, что момент равен нулю при двух положениях масс: когда  $\theta = 0$  (и, следовательно, момент силы притяжения каждой массы  $m$  равен нулю) и когда  $\theta = \pi/2$ , т.е. когда модули сил  $F_1$  и  $F_2$  равны друг другу и их моменты взаимно компенсируются.

20.9. Сплюснутость Земли при вычислении действующего на нее момента сил можно приближенно учесть, заменив Землю двумя точечными массами, находящимися на некотором расстоянии друг от друга. Далее, воспользовавшись конечным результатом предыдущей задачи, найдём отношение вращательных моментов, создаваемых Солнцем

и Луной:

$$\frac{\tau_C}{\tau_L} = \frac{M_C}{M_L} \left( \frac{R_L}{R_C} \right)^3 \approx 0,47,$$

где  $M_L$  и  $M_C$  — массы Луны и Солнца, а  $R_L$  и  $R_C$  — расстояния от Земли до Луны и Солнца соответственно.

- 20.10. а) Перепишем таблицу удельной плотности в более удобной форме, отсчитывая расстояния от центра Земли, а не от ее поверхности и принимая средний радиус Земли равным 6370 км:

$R$ , км	370	1370	2870	3470	4370	5370	5970	6170	6270	6340	6370
		11,5		5,7						3,0	
$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	17,1	16,8	10,2	9,4	5,2	4,7	3,6	3,5	3,4	3,3	2,6

Землю представим себе состоящей из нескольких шаровых слоев, плотность внутри каждого из которых постоянна и равна полусумме плотностей, соответствующих внутреннему и внешнему радиусам слоя. Там, где имеется разрыв плотности, большее значение ее будем приписывать внутренней части слоя, а меньшее — внешней.

Момент инерции шарового слоя с постоянной плотностью  $\rho$  и внешним и внутренним радиусами  $r_1$  и  $r_2$  найдем, вычитая из момента инерции шара радиусом  $r_1$  момент инерции шара радиусом  $r_2$ . Таким образом,

$$I = \frac{2}{5} M_1 r_1^2 - \frac{2}{5} M_2 r_2^2 = \frac{8}{15} \pi \rho (r_1^5 - r_2^5),$$

или для  $i$ -го слоя

$$I_i = \frac{8}{15} \pi \bar{\rho}_i (r_i^5 - r_{i-1}^5), \quad r_0 = 0.$$

Полный момент инерции Земли равен сумме моментов инерции шаровых слоев, так что

$$I = \sum_{i=1}^{11} I_i = 8,1 \cdot 10^{37} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

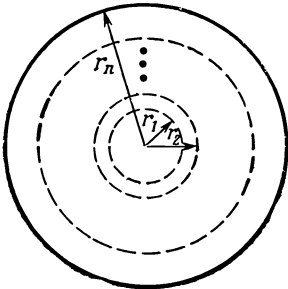
- б) Момент количества движения Земли  $L$  равен

$$L = I\omega = \frac{2\pi I}{\tau} \approx 5,9 \cdot 10^{33} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек}$$

( $\tau = 8,64 \cdot 10^4$  сек — период обращения Земли вокруг своей оси).

- в) Кинетическая энергия Земли

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2 \approx 2,1 \cdot 10^{29} \text{ Дж}.$$



- 20.11. 1. Согласно формуле, полученной в задаче 10.8, кинетическая энергия катящегося тела складывается из кинетической энергии движения его центра масс и кинетической энергии тела в системе ц. м. Так как тело скатывается по наклонной плоскости без скольжения и в силу симметрии тела относительно оси вращения, его центр масс находится на этой оси, движение тела в системе ц. м. представляет собой чистое вращение, угловая скорость которого  $\omega = v/r$  ( $v$  — скорость тела в произвольный момент времени). Таким образом, кинетическая энергия тела

$$T = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где  $I$  — момент инерции тела относительно оси вращения.

Величину скорости  $v$  центра масс в нижней точке наклонной плоскости определим из закона сохранения энергии

$$Mgh = \frac{Mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2r^2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + I/r^2}}.$$

2. Применим эту формулу для частных случаев, перечисленных в условии задачи.

а) Сфера:

$$I = \frac{2}{3} Mr^2, \quad v = \sqrt{\frac{6}{5} gh}.$$

б) Диск:

$$I = \frac{1}{2} Mr^2, \quad v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}.$$

в) Диск массой  $M_1$  и радиусом  $R_1$ , насаженный на вал массой  $m_2$  и радиусом  $R_2$ :

$$I = \frac{M_1 R_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2},$$

$$v = \sqrt{\frac{4(M_1 + m_2)gh}{3M_1 + m_2 \left[ 2 + \left( \frac{r_2}{R_1} \right)^2 \right]}}.$$

- 20.12. а) Центр масс однородного стержня находится в его середине, т. е. на расстоянии  $L/2$  от конца. Центр масс системы из стержня и куска замазки находится посредине отрезка, соединяющего кусок замазки и точку  $O$ , т. е. на расстоянии  $L/4$  от линии удара.

Стержень до удара покоился, поэтому

$$v_{ц. м} = \frac{Mv}{M + M} = \frac{v}{2}.$$

Из закона сохранения импульса следует, что скорость центра масс после удара не изменилась, т. е. осталась равной  $v/2$ .

- б) Момент количества движения системы относительно ее центра масс до удара равен  $MvL/4$ .

- в) Момент количества движения системы после столкновения равен  $I\omega$ , где  $I$  — момент инерции относительно центра масс, причем

$$I = \frac{1}{12} ML^2 + 2M \frac{L^2}{16} = \frac{5}{24} ML^2,$$

- а  $\omega$  — угловая скорость вращения относительно центра масс. Из закона сохранения момента количества движения

$$\frac{1}{4} MvL = \frac{5}{24} ML^2\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{6}{5} \frac{v}{L}.$$

- г) Так как скорость центра масс равна  $v/2$ , кинетическая энергия системы после удара

$$T_k = \frac{1}{2} (2M) \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{2}{5} Mv^2.$$

Изменение кинетической энергии при ударе

$$\Delta T = \frac{1}{2} Mv^2 - T_k = 0,2T_n$$

( $T_n = Mv^2/2$  — начальная кинетическая энергия системы).

- 20.13. Пусть  $I$  и  $\omega$  — момент инерции и угловая скорость вращения Земли до таяния льда, а  $I + \Delta I$  и  $\omega + \Delta\omega$  — те же величины после того, как лед растаял. Из закона сохранения момента количества движения следует, что

$$I\omega = (I + \Delta I) (\omega + \Delta\omega),$$

или, поскольку  $\omega = 2\pi/T$ ,

$$\frac{I}{T} = \frac{I + \Delta I}{T + \Delta T}.$$

Таким образом,

$$\Delta T = \frac{\Delta I}{I} T.$$

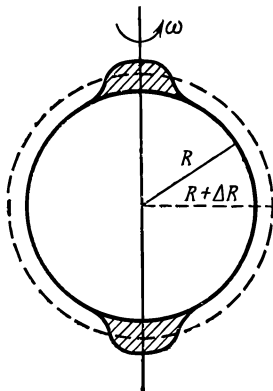
Изменение момента инерции Земли  $\Delta I$  произошло за счет того, что вода, сосредоточенная ранее (в виде льда) вблизи оси вращения (и поэтому дававшая очень малый вклад в момент инерции Земли), растаяв, распределилась по шаровому слою радиусом  $R$  и толщиной  $\Delta R$ . Момент инерции такого слоя (см. задачу 20.10)

$$\begin{aligned} \Delta I &= \frac{8}{15} \pi \rho [(R + \Delta R)^5 - R^5] \approx \\ &\approx \frac{8}{3} \pi \rho R^4 \Delta R. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta T = \frac{8}{3} \frac{\pi \rho R^4}{I} T \Delta R.$$

Учитывая, что для воды  $\rho = 1 \text{ г/см}^3 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ , а период вращения Земли вокруг своей оси  $T = 8,64 \cdot 10^4 \text{ сек}$ , получаем  $\Delta T \sim 1 \text{ сек}$ .



- 20.14. а) Скорость центра масс найдем из закона сохранения импульса  $Mv_0 = J$ , откуда  $v_0 = J/M$ . Определим угловую скорость вращения  $\omega$  вокруг центра масс из закона сохранения момента количества движения

$$Jr = \frac{ML^2}{12} \omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{12Jr}{ML^2}.$$

Скорость точки  $A$  непосредственно после удара равна сумме скоростей двух движений: поступательного вместе с центром масс со скоростью  $v_0$  и вращательного относительно центра масс с угловой скоростью  $\omega$ . Следовательно,

$$v_A = -\frac{\omega L}{2} + v_0 = -\frac{12Jr}{ML^2} + \frac{J}{M} = \frac{J}{M} \left(1 - \frac{6r}{L}\right).$$

- б) Если  $v_A = 0$ , то для расстояния  $OP = r$  получим уравнение

$$1 - \frac{6r}{L} = 0,$$

откуда

$$r = \frac{L}{6}.$$

Очевидно,

$$AP = AO + OP = \frac{L}{2} + \frac{L}{6} = \frac{2}{3}L.$$

## К главе 21. Гармонический осциллятор

- 21.1. а) Пусть  $C$  — центр масс тела, а через точку  $O$  проходит ось вращения. В положении равновесия точки  $O$  и  $C$  находятся на одной вертикали. Уравнение движения тела имеет вид

$$\frac{dL}{dt} = \tau,$$

где  $L$  — момент количества движения, а  $\tau$  — момент внешних сил.

В нашем случае нужно учесть только силу тяжести (приложенную в точке  $C$ ), момент которой относительно точки  $O$  равен  $-Mgd \sin \theta$ . Момент количества движения тела равен  $I\omega$ , так что

$$\frac{d}{dt} I\omega = -Mgd \sin \theta.$$

Но  $\omega = d\theta/dt$ , поэтому после дифференцирования по времени получим

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgd \sin \theta = 0.$$

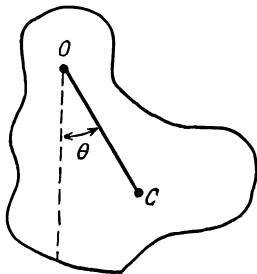
Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение, описывающее изменение угла  $\theta$  со временем.



б) Если предположить, что  $\theta$  мало, т. е.  $\sin \theta \approx \theta$ , получим

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgd\theta = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} \theta = 0.$$

В § 2 гл. 21 «Лекций» (вып. 2, стр. 363) было показано, что такое дифференциальное уравнение описывает колебания с периодом  $T = 2\pi/\omega$ , где  $\omega^2 = Mgd/I$ . Следовательно, период малых колебаний тела



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}.$$

21.2. В найденном в предыдущей задаче выражении для периода колебаний положим  $I = I_C + Md^2$ . Тогда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + Md^2}{Mgd}}.$$

а) Найдем  $d$ , соответствующее данному значению периода. Решая квадратное уравнение

$$d^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2} d + \frac{I_C}{M} = 0,$$

находим

$$d_1 = \frac{gT^2}{8\pi^2} + \sqrt{\frac{g^2T^4}{64\pi^4} - \frac{I_C}{M}}$$

и

$$d_2 = \frac{gT^2}{8\pi^2} - \sqrt{\frac{g^2T^4}{64\pi^4} - \frac{I_C}{M}}.$$

Следует рассмотреть оба решения квадратного уравнения, поскольку они оба имеют физический смысл в силу того, что

$$\frac{gT^2}{8\pi^2} > \sqrt{\frac{g^2T^4}{64\pi^4} - \frac{I_C}{M}}.$$

б) Складывая  $d_1$  и  $d_2$ , получаем

$$d_1 + d_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2}, \quad \text{откуда} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{g}}.$$

в) Период минимален при таком значении  $d$ , при котором минимально выражение

$$\frac{I_C + Md^2}{Mgd}$$

(подкоренное выражение в формуле для периода). Условие минимума имеет вид

$$\left(\frac{I_C + Md^2}{Mgd}\right)' = 0$$

(штрих означает дифференцирование по  $d$ ), т. е.

$$\frac{2Md Mgd - (I_C + Md^2) Mg}{M^2 g^2 d^2} = 0.$$

Отсюда

$$d_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{I_C}{M}}.$$

Подставляя это выражение в формулу для периода колебаний, получаем минимальное значение периода

$$T_{\text{мин}} = 2\pi \sqrt{\frac{2d_{\text{мин}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{I_C}{M}}.$$

21.3. Из того факта, что пружина под действием силы тяжести, создаваемой грузом массой  $m$ , удлиняется на  $A$ , находим ее коэффициент жесткости  $k = mg/A$ .

Когда на пружине неподвижно висят два груза общей массой  $2m$ , ее длина  $l_0$  определяется условием

$$k(l_0 - D) = 2mg, \text{ так что } l_0 = D + 2A.$$

Поместим начало координат в точку  $l_0$ , а ось  $x$  направим вертикально вниз. В этом случае уравнение движения грузиков примет вид

$$2m\ddot{x} = -kx, \text{ или } \ddot{x} + \frac{g}{2A}x = 0.$$

Дифференциальное уравнение такого типа, как известно, описывает колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2A}{g}}, \quad \omega^2 = \frac{g}{2A}.$$

Легко убедиться в том, что решением этого уравнения является функция

$$x(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t,$$

где  $B_1$  и  $B_2$  — постоянные, определяемые из начальных условий.

Систему координат мы выбрали таким образом, что  $x = x_0 = -A$  при  $t = 0$ . Начальную скорость  $v_0$  находим, учитывая сохранение импульса при ударе

$$mv = 2mv_0,$$

откуда

$$v_0 = \frac{v}{2}$$

( $v$  — скорость тела, упавшего с высоты  $A$ , т. е.  $v = \sqrt{2gA}$ ). Таким образом,

$$v_0 = \sqrt{\frac{gA}{2}}.$$

Скорость грузовиков в произвольный момент времени найдем, дифференцируя  $x(t)$  по времени:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -B_1\omega \sin \omega t + B_2\omega \cos \omega t.$$

Теперь нетрудно убедиться, что начальным условиям задачи соответствуют постоянные  $B_2 = -B_1 = A$ , т. е. решение уравнения движения имеет вид

$$x = A(\sin \omega t - \cos \omega t).$$

Амплитуда колебаний, т. е. максимальное отклонение точки от положения равновесия, достигается в тот момент времени  $t_1$ , когда скорость колеблющихся грузов равна нулю:

$$v(t_1) = A\omega(\sin \omega t_1 + \cos \omega t_1) = 0,$$

что дает

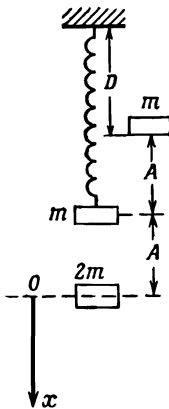
$$\sin \omega t_1 = -\cos \omega t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$x_{\text{макс}} = A\sqrt{2}.$$

Максимальная высота подъема над первоначальным положением равновесия (находящимся на расстоянии  $A$  вверх от начала координат) равна

$$H = x_{\text{макс}} - A = A(\sqrt{2} - 1).$$



21.4. а) Частицы  $A$  и  $B$  движутся вдоль прямой по закону

$$x_A = a \sin \omega_A t, \quad x_B = a \sin \omega_B t,$$

где  $a$  — амплитуда колебаний частиц.

В момент времени  $t = 0,350$  сек расстояние между ними

$$r = x_B - x_A = a(\sin \omega_B t - \sin \omega_A t) = 2,17 \text{ см.}$$

б) Относительная скорость  $V$  по отношению к  $A$

$$v_{BA} = \dot{r} = \dot{x}_B - \dot{x}_A = a(\omega_B \cos \omega_B t - \omega_A \cos \omega_A t) = 50 \text{ см/сек.}$$

21.5. В задаче 21.1 получено уравнение малых колебаний твердого тела

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} \theta = 0,$$

где  $d$  — расстояние от оси вращения до центра масс тела,  $I$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку под-

веса Из него следует, что

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}.$$

Если масса единицы длины проволоки равна  $\rho$ , то масса всего каркаса  $M = \rho(\pi R + 2R) = \rho R(2 + \pi)$  ( $R$  — радиус полуокружности  $ACB$ ), а

$$I = \pi\rho R \cdot R^2 + 2\rho R \frac{(2R)^2}{12} = \rho R^3 \left( \frac{2}{3} + \pi \right).$$

Центр масс полуокружности  $ACB$  лежит на перпендикуляре к диаметру  $AB$ , проходящем через точку подвеса  $P$  на расстоянии (см. задачу 19.13)

$$d_1 = R \left( \frac{2R}{L} \right) \sin \left( \frac{L}{2R} \right) = \frac{2R}{\pi} \quad (L = \pi R),$$

а центр масс диаметра  $AB$  располагается в точке подвеса. Следовательно,

$$d = \frac{\pi\rho R d_1}{\pi\rho R + 2\rho R} = \frac{\pi}{2 + \pi} d_1 = \frac{2R}{2 + \pi}.$$

Таким образом,

$$T = 2\pi \sqrt{\left( \frac{2}{3} + \pi \right) \frac{R}{2g}} \approx 2 \text{ сек}$$

- 21.6. Обозначим жесткость пружины через  $k$ . Период колебания пластинки массой  $m$  совместно с грузиком массой  $m_1$  равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_1}{k}}.$$

Учитывая, что  $T = \pi/3$ , находим

$$k = 36(m + m_1).$$

Удлинение пружины после того, как с пластинки снят груз  $m_1$  и положен груз  $m_2$ , равно

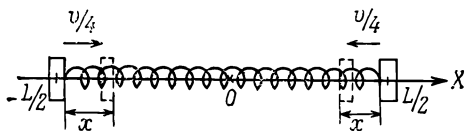
$$d = \frac{m_2 - m_1}{36(m + m_1)} g \approx 21,8 \text{ см}$$

- 21.7. После удара центр масс всей системы будет двигаться вправо со скоростью  $v_{ц. м.}$ , определяемой из закона сохранения количества движения

$$\frac{1}{4} Mv = 2Mv_{ц. м.}, \quad \text{откуда} \quad v_{ц. м.} = \frac{1}{8} v.$$

Сразу после удара частица массой  $M$  покоится, а слипшиеся частицы (их масса тоже  $M$ ) движутся со скоростью  $v_{10} = v/4$ , скажем, вправо. Поэтому в системе ц. м. частицы (массой  $M$  каждая), расположенные на концах пружины, движутся навстречу друг другу с равными скоростями  $v/4 - v/8 = v/8$ . Следовательно, в дальнейшем рассматриваемые частицы в системе ц. м. будут совершать гармонические колебания около положений равновесия, расположенных в точках  $-L/2$  и  $L/2$  для левой и правой масс соответственно.

Пусть каждая из масс сдвинется на расстояние  $x$  из положения равновесия, как показано на рисунке. Длина пружины при этом уменьшится на  $2x$ ; следовательно, на каждую частицу будет дейст-



вовать сила  $-2kx$ , так что уравнение движения одной из масс принимает вид

$$M\ddot{x} + 2kx = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}.$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  находим из начальных условий при  $t = 0$ :  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = v/4$ , откуда  $A = 0$  и  $B = \dot{x}_0/\omega$ .

Таким образом,

$$x = \frac{1}{4} v \sqrt{\frac{M}{2k}} \sin \sqrt{\frac{2k}{M}} t.$$

Как следует из полученного закона движения, каждая масса совершает колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{2k}}$$

и амплитудой

$$a = \frac{v}{4} \sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

Двигаться частицы будут в «противофазе», т. е. либо навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями и ускорениями, либо в противоположные стороны.

- 21.8. Из условия задачи следует, что действующая на частицу сила прямо пропорциональна  $r$  — расстоянию от центра Земли — и направлена к центру, поэтому  $m\ddot{r} + kr = 0$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности в выражении, определяющем зависимость силы от расстояния. Таким образом, частица совершает колебания вокруг центра Земли с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

где  $\omega^2 = k/m$ .

Замечая, что на поверхности Земли сила притяжения равна весу тела, находим константу  $k = mg/R$ . Очевидно, сквозь Землю по диаметру тело пройдет за время  $t = T/2$ .

Используя найденное значение  $k$ , получаем

$$t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 2500 \text{ сек} \approx 42 \text{ мин.}$$

- 21.9. Обозначим через  $n$  число бактерий в колонии. Скорость роста населения колонии равна  $dn/dt$ . По условию

$$\frac{dn}{dt} = \alpha n, \quad \alpha - \text{коэффициент пропорциональности.}$$

Это и есть дифференциальное уравнение роста колонии. Из него следует, что население колонии растет со временем по закону  $n = n_0 e^{\alpha t}$ , где  $n_0$  — население колонии в момент времени  $t = 0$ .

- 21.10. Поместим начало координат в положение равновесия, а оси координат направим, как показано на рисунке. Колебания в точке подвеса будем характеризовать координатой  $x$ , а самого маятника — углом  $\varphi$ . Как видно из рисунка, в произвольный момент времени

$$x_M = x + l \sin \varphi,$$

$$y_M = l \cos \varphi,$$

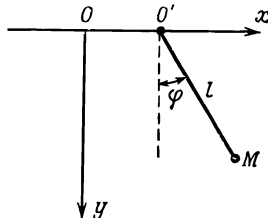
где  $l$  — длина маятника.

Запишем уравнение движения маятника в системе координат, движущейся вместе с точкой подвеса. В этой системе на тело массой  $m$  действует также псевдосила  $-m\ddot{x}$ , поэтому

$$l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi - m\ddot{x} l \cos \varphi.$$

Учитывая, что  $l = ml^2$ , получаем

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{\ddot{x}}{l} \cos \varphi.$$



Предположим, что  $\varphi$  мало, т. е.  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ . В этом приближении (приближении малых колебаний) уравнение для  $\varphi$  имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = \frac{a\omega^2}{l} \sin \omega t,$$

где учтено, что по условию задачи

$$x = a \sin \omega t \quad \left( \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad a = 1 \text{ см} \right).$$

Удобно вернуться к переменной  $x_M$ , используя соотношения

$$\frac{x_M - x}{l} = \sin \varphi \approx \varphi$$

и

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_M - \ddot{x}}{l}.$$

Для этой переменной

$$\ddot{x}_M + \omega_0^2 x_M = a\omega^2 \sin \omega t, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Мы пришли к такому же дифференциальному уравнению для  $x_m$ , как и в § 5 гл. 21 «Лекций» (вып. 2, стр. 368), только в правой части вместо функции  $\cos \omega t$  имеем  $\sin \omega t$ . Поэтому будем искать решение в виде  $x_m = C \sin \omega t$  ( $C$  — амплитуда колебаний).

Подставляя это выражение  $x_m$  в уравнение колебаний, получаем

$$-C\omega^2 \sin \omega t + C\omega_0^2 \sin \omega t = a\omega^2 \sin \omega t,$$

откуда

$$C = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a.$$

Учитывая, что  $\omega = 2\pi/T$ , находим

$$C = \frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2} a \approx 4,76 \text{ см.}$$

Теперь оценим, насколько правильным является выбранное нами приближение малых колебаний. Для этого надо сравнить полученную амплитуду колебаний с длиной нити маятника. По условию задачи период колебаний его равен 1 сек, поэтому

$$l = \frac{gT^2}{4\pi} \approx 25 \text{ см} \quad \text{и} \quad \frac{C}{l} \approx 0,19.$$

Но синус максимального угла отклонения равен как раз  $C/l$ , т. е. в условиях нашей задачи  $\sin \varphi \leq 0,19$ . При таких значениях синусов ошибка, возникающая при замене  $\sin \varphi$  самим углом  $\varphi$ , не превышает 1%, так что приближение малых колебаний приемлемо.

## К главе 22. Алгебра

- 22.1. а) Вычислим квадрат модуля комплексного числа  $u + iv$ , воспользовавшись правилами, сформулированными в кратком введении к задачам гл. 22:

$$(u + iv)(u - iv) = [(ac - bd) + i(ad + bc)][(ac - bd) - i(ad + bc)].$$

Отсюда следует, что

$$u^2 + v^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Извлекая квадратный корень из правой и левой частей этого соотношения, приходим к искомому ответу.

- б) Так как по условию задачи  $u = ac - bd$  и  $v = ad + bc$ , то

$$\frac{v}{u} = \frac{ad + bc}{ac - bd} = \frac{d/c + b/a}{1 - \frac{d}{c} \frac{b}{a}} = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

- 22.2. Покажем, что любое комплексное число  $u + iv$  можно представить в виде  $u + iv = Re^{i\varphi}$ , где  $R = \sqrt{u^2 + v^2}$  — модуль этого числа, а  $\varphi = \operatorname{arctg}(v/u)$  — фаза комплексного числа. Для этого воспользуемся формулой (А) (стр. 58) и запишем

$$u + iv = Re^{i\varphi} = R \cos \varphi + iR \sin \varphi.$$

Отсюда следует, что  $u = R \cos \varphi$  и  $v = R \sin \varphi$ . Возводя в квадрат эти соотношения и складывая результаты, получаем  $R = \sqrt{u^2 + v^2}$ .

С другой стороны, ясно, что  $v/u = \operatorname{tg} \varphi$ , т. е.  $\varphi = \operatorname{arctg}(v/u)$ . По условию задачи  $u + iv = (a + ib)(c + id)$ , где

$$\begin{aligned} a + ib &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \operatorname{arctg}(b/a)} \equiv \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\alpha}, \\ c + id &= \sqrt{c^2 + d^2} e^{i \operatorname{arctg}(d/c)} \equiv \sqrt{c^2 + d^2} e^{i\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u + iv = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\alpha} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} e^{i\beta} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} e^{i(\alpha + \beta)}.$$

Из полученного соотношения ясно, что

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}, \\ \frac{v}{u} &= \operatorname{tg}(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

- 22.3. Требуемые соотношения нетрудно получить, если воспользоваться формулой (А) (стр. 58) и записать

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta, \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая левые и правые части этих соотношений, находим требуемый ответ.

- 22.4. Проверяемое соотношение можно получить, если числитель и знаменатель левой части умножить на комплексное число  $c - id$ .
- 22.5. Приведенные в условии задачи соотношения непосредственно следуют из формулы (А), если в ней положить  $\theta$  равным чисто мнимому числу  $i\theta$ , а также вспомнить, что для любого угла сумма квадратов косинуса и синуса равна единице.

- 22.6. Запишем

$$\frac{d}{dx} (e^{ax}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{a(x+\Delta x)} - e^{ax}}{\Delta x} = e^{ax} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{a\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Так как приближенно  $e^{a\Delta x} \approx 1 + a\Delta x + \dots$ , то получаем требуемый ответ.

- 22.7. а) Приведенный бесконечный ряд является следствием более общей формулы

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} \frac{df}{dx} \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} \Big|_{x=0} x^3 + \dots,$$

поскольку любая производная от экспоненты  $e^x$  равна самой функции.

- б) Представление  $\cos x$  и  $\sin x$  в виде бесконечных рядов непосредственно следует из формулы (А) (стр. 58) и приведенного ряда для  $e^x$ , если вместо  $x$  взять  $ix$  и выделить вещественную и мнимую части.

- 22.8. Единицу можно представить в виде  $1 = e^{2\pi im}$ , где  $m$  — любое целое число. Корни заданного уравнения представляют собой комплексные числа  $e^{2\pi im/n}$ . Всего существует  $n$  различных корней. Их можно получить, придавая  $m$  любое из  $n$  целых значений от 0 до  $n-1$ .



22.9. Запишем  $e^{in\theta}$  в виде

$$\begin{aligned} e^{in\theta} &= \cos n\theta + i \sin n\theta = (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \\ &= \cos^n \theta + in \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \\ &+ \dots + i^n \sin^n \theta. \end{aligned}$$

Приравнявая по отдельности в этом соотношении вещественные и мнимые части, получаем требуемую формулу.

22.10. а) Перемножая функции и приравнявая по отдельности вещественные и мнимые части соотношения

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= \cos(\theta+\varphi) + i \sin(\theta+\varphi) = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi), \end{aligned}$$

находим известные тригонометрические формулы

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\sin(\theta+\varphi) = \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi.$$

б) В результате перемножения получается вектор в комплексной плоскости, длина которого равна произведению модулей, т. е.  $A \cdot B$ , а его направление составляет угол  $\theta + \varphi$  с действительной осью.

22.11.  $\log_{11} 2 = 0,28906$ ,  $\log_{11} 7 = 0,81146$ .

### К главе 23. Резонанс

23.1. Пусть приложено напряжение вида  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ . Введем комплексное напряжение  $\hat{V} = V_0 e^{i\omega t}$ , так что  $V(t) = \operatorname{Re} \hat{V}$ .

а) Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} = V_0 e^{i\omega t}.$$

Интегрируя, находим

$$\hat{I} = \frac{V_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = \frac{\hat{V}}{i\omega L} \equiv \frac{\hat{V}}{\hat{Z}_L}.$$

Следовательно, комплексный импеданс индуктивной цепи равен

$$\hat{Z}_L = i\omega L.$$

б) В этом случае уравнение имеет вид

$$\frac{d\hat{q}(t)}{C} = V_0 e^{i\omega t},$$

т. е.  $\hat{q}(t) = V_0 C e^{i\omega t}$ . Отсюда находим

$$\hat{I} = \frac{d\hat{q}}{dt} = i\omega C V_0 e^{i\omega t} = i\omega C \hat{V} \equiv \frac{\hat{V}}{\hat{Z}_C}.$$

Следовательно, комплексный импеданс емкостной цепи равен

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

- 23.2. а) Рассмотрим цепь, показанную на фиг. 1. Введем комплексное напряжение  $\hat{V} = V_0 e^{i\omega t}$  и комплексный заряд  $\hat{q}(t)$  на обкладках конденсатора. Тогда, используя решение задачи 23.1, можно написать дифференциальное уравнение для определения стационарного тока:

$$\frac{\hat{q}(t)}{C} + L \frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{V} = V_0 e^{i\omega t},$$

где  $\hat{I} = d\hat{q}/dt$ .

Продифференцировав обе части этого уравнения по времени, получим уравнение для комплексного тока:

$$\frac{\hat{I}}{C} + L \frac{d^2\hat{I}}{dt} = i\omega V_0 e^{i\omega t} = i\omega \hat{V}.$$

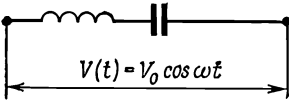
Будем искать решение этого уравнения в виде  $\hat{I} = I e^{i\omega t}$ . Выполнив необходимое дифференцирование, мы найдем соотношение между  $\hat{I}$  и  $\hat{V}$ :

$$\left( \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \right) \hat{I} = \hat{V}.$$

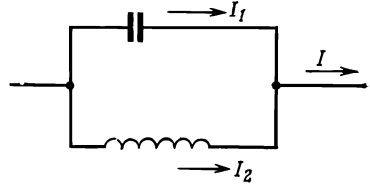
Отсюда следует, что импеданс цепи  $\hat{Z} = \hat{V}/\hat{I}$  в случае последовательного соединения равен

$$\hat{Z} = \frac{1}{i\omega C} + i\omega L.$$

- б) При параллельном соединении конденсатора и катушки индуктивности электрическая цепь имеет вид, показанный на фиг. 2. В этом



Фиг. 1.



Фиг. 2.

случае, очевидно, выполняется условие равенства потенциалов на катушке индуктивности и конденсаторе:

$$\hat{V} = \frac{\hat{q}}{C} = L \frac{d\hat{I}_2}{dt},$$

где  $\hat{I}_2$  — комплексный ток через индуктивность. Суммарный ток через цепь равен  $I = I_1 + I_2$ , где  $I_1$  — ток через конденсатор. Учтывая тот факт, что

$$I_1 = \frac{dq}{dt},$$

и полагая  $\hat{I}_1 = I_1 e^{i\omega t}$ ,  $\hat{I}_2 = I_2 e^{i\omega t}$ , находим

$$\hat{I}_1 = i\omega C \hat{V}, \quad \hat{I}_2 = \frac{\hat{V}}{i\omega L}.$$

Следовательно,

$$\hat{I} = \hat{V} \left( i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \right).$$

Отсюда

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \left( i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \right)^{-1}.$$

При последовательном соединении при  $\omega \rightarrow \infty$  сопротивление цепи обусловлено индуктивностью, а при  $\omega \rightarrow 0$  — емкостью. При частоте  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  имеет место «резонанс»: импеданс цепи обращается в нуль.

При параллельном соединении ситуация противоположна случаю (а): при  $\omega \rightarrow \infty$  сопротивление носит в основном емкостный характер (ток течет через конденсатор), а при  $\omega \rightarrow 0$  сопротивление цепи связано с наличием индуктивности.

При частоте  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  наступает резонанс: импеданс цепи обращается в бесконечность.

- 23.3. а) Упругая сила, действующая на тело массой  $m$ , равна  $-kx$ , а сила трения равна  $-m\gamma v = -m\gamma(dx/dt)$ . Поскольку ускорение тела равно  $d^2x/dt^2$ , уравнение движения тела имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - m\gamma \frac{dx}{dt}.$$

Поделим обе части этого уравнения на массу  $m$  и перенесем все члены уравнения в левую часть, затем, используя обозначение  $\omega_0^2 = k/m$ , получим искомое уравнение.

- б) Будем искать решение сформулированного уравнения в экспоненциальном виде  $x = e^{\alpha t}$ . Выполняя необходимые дифференцирования и сокращая уравнение на  $e^{\alpha t}$ , находим квадратное уравнение для определения  $\alpha$ :

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2 = 0.$$

Два корня этого уравнения равны

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

(Здесь учтено, что  $\gamma < 2\omega_0$ .) С учетом найденного запишем общее решение уравнения движения:

$$x(t) = \operatorname{Re} (C_1 e^{\alpha_1 t} + D_1 e^{\alpha_2 t}),$$

где  $C_1$  и  $D_1$  — комплексные постоянные интегрирования. Представляя эти постоянные в виде  $C_1 = C e^{i\theta_1}$  и  $D_1 = D e^{i\theta_2}$  (где  $C$  и  $D$  — модули комплексных чисел  $C_1$  и  $D_1$ ) и определяя вещественную часть  $x$ , находим

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} \left[ C \cos \left( \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} t + \theta_1 \right) + D \sin \left( \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} t + \theta_2 \right) \right].$$

Воспользовавшись формулой для косинуса суммы углов (см. решение задачи 22.10), найдем, что решение можно представить в искомом виде, если вместо произвольных постоянных  $C, D, \theta_1$  и  $\theta_2$  ввести новые две вещественные постоянные  $A$  и  $B$ , связанные с ними соотношениями

$$A = C \cos \theta_1 + D \cos \theta_2, \quad B = -(C \sin \theta_1 + D \sin \theta_2).$$

в) В этом случае  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  вещественны и общее решение уравнения движения имеет вид

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} \left[ A e^{-t \sqrt{(\gamma^2/4) - \omega_0^2}} + B e^{+t \sqrt{(\gamma^2/4) - \omega_0^2}} \right].$$

23.4. Следует рассмотреть два случая:

а)  $\gamma < 2\omega_0$ . Для определения  $A$  и  $B$  здесь имеем два уравнения:

$$x_0 = A \quad \text{и} \quad v_0 = -\frac{\gamma}{2} A + B \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Решая эти уравнения, находим

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0 + (\gamma x_0/2)}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}.$$

б)  $\gamma > 2\omega_0$ . Из двух уравнений, получаемых из начальных условий

$$x_0 = A + B \quad \text{и} \quad v_0 = -\frac{\gamma}{2} [A + B] + [B - A] \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2},$$

находим

$$A = \frac{1}{2} \left[ x_0 - \frac{v_0 + (\gamma x_0/2)}{\sqrt{(\gamma^2/4) - \omega_0^2}} \right],$$

$$B = \frac{1}{2} \left[ x_0 + \frac{v_0 + (\gamma x_0/2)}{\sqrt{(\gamma^2/4) - \omega_0^2}} \right].$$

23.5. Обозначим через  $\hat{I}_1$  и  $\hat{I}_2$  комплексные токи, протекающие через точки  $A$  и  $B$ . Тогда, очевидно,

$$\hat{I}_1 \cdot 2R = \hat{I}_2 \left( R' + \frac{1}{i\omega C} \right) = \hat{V}_{\text{вх}}.$$

Определив токи, найдем

$$\hat{V}_A = \hat{I}_1 R = \frac{\hat{V}_{\text{вх}}}{2}, \quad \hat{V}_B = \hat{I}_2 R' = \frac{\hat{V}_{\text{вх}} R'}{R' + (1/i\omega C)}.$$

Кроме того,

$$\hat{V}_{AB} = \hat{V}_A - \hat{V}_B = \frac{\hat{V}_{\text{вх}}}{2} - \frac{\hat{V}_{\text{вх}} R'}{R' + (1/i\omega C)} = -\frac{\hat{V}_{\text{вх}}}{2} \frac{R' + (i/\omega C)}{R' - (i/\omega C)}.$$

Поскольку мы можем записать комплексное число в виде (см. задачу 22.1)

$$R' \pm \frac{i}{\omega C} = e^{\pm i\varphi} \sqrt{R'^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}},$$

где  $\varphi = \operatorname{arctg}(1/\omega CR')$ , то

$$\frac{R' + (i/\omega C)}{R' - (i/\omega C)} = e^{2i\varphi}.$$

Таким образом, найденное выражение для разности потенциалов  $\hat{V}_{AB}$  можно представить в виде произведения модуля комплексного числа, равного  $V_{\text{вх}}/2$ , на фазовый множитель. Фаза разности потенциалов  $\hat{V}_{AB}$  при этом равна

$$2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega CR'}\right) + \pi.$$

Так как при изменении  $x$  от 0 до  $\infty$  функция  $\operatorname{arctg} x$  меняется в пределах от 0 до  $\pi/2$ , то, меняя  $R'$  (в пределах от 0 до  $\infty$ ), можно менять фазу  $\hat{V}_{AB}$  от  $\pi$  до 0.

- 23.6. а) Введем комплексную э. д. с.  $\hat{V}_{\text{вх}} = V_0 e^{i\omega t}$ , так что  $V_{\text{вх}} = \operatorname{Re} \hat{V}_{\text{вх}}$ . Полный импеданс цепи  $A$  равен  $\hat{Z} = R + (1/i\omega C)$ , а полный импеданс цепи  $B$  равен  $i\omega L + R'$ . Следовательно,

$$\hat{I}_A(t) = \frac{\hat{V}_{\text{вх}}}{R + (1/i\omega C)}, \quad \hat{I}_B(t) = \frac{\hat{V}_{\text{вх}}}{R' + i\omega L}.$$

Очевидно, что

$$\hat{V}_A(t) = \hat{I}_A(t) \frac{1}{i\omega C} = \frac{\hat{V}_{\text{вх}}(t)}{1 + i\omega CR},$$

$$\hat{V}_B(t) = \hat{I}_B(t) R' = \frac{\hat{V}_{\text{вх}}(t)}{1 + i\omega L/R'}.$$

Если  $\hat{V}_A(t) = \hat{V}_B(t)$ , то  $i\omega CR + 1 = i\omega(L/R') + 1$ . Отсюда следует, что должно выполняться соотношение

$$CRR' = L.$$

- б) Определяя вещественную часть найденных выражений для  $\hat{I}_A$  и  $\hat{I}_B$ , находим

$$I_A(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t + \varphi_A)}{\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}}, \quad I_B(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t - \varphi_B)}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L^2}},$$

где

$$\varphi_A = \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega CR}, \quad \varphi_B = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R'}.$$

## К главе 24. Переходные решения

- 24.1. Если направить ось  $x$  вдоль направления движения тела, то уравнение движения запишется в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} = 0.$$

Если искать решение этого уравнения в форме  $x = Ae^{\alpha t}$ , то легко найти, что  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = -\gamma$ . Следовательно, общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$x(t) = A + Be^{-\gamma t}.$$

Задавая начальные условия

$$x(0) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0,$$

находим

$$x(t) = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}),$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\gamma t}.$$

Так как

$$x = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}), \quad \text{то} \quad e^{-\gamma t} = 1 - \frac{\gamma x}{v_0}.$$

Следовательно,

$$v(x) = v_0 - \gamma x.$$

- 24.2. Для заряда  $q(t)$  на обкладках конденсатора можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Поскольку напряжение на конденсаторе связано с зарядом соотношением  $q(t)/C = V(t)$ , можно написать

$$CR \frac{dV}{dt} + V = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию  $V(0) = V_0$ , имеет вид

$$V(t) = V_0 e^{-t/RC}.$$

- 24.3. Введя вынуждающую силу  $F_0$ , уравнение движения тела вдоль оси  $x$  можно записать в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} = F_0,$$

или

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{F_0}{m}.$$

- а) Для установившегося движения скорость тела должна быть постоянной, т. е.  $dv/dt = 0$ . Отсюда

$$v_{\text{стац}} = \frac{F_0}{m\gamma}.$$

- б) Попытаемся найти решение неоднородного уравнения

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{F_0}{m}$$

в виде суммы решения однородного уравнения  $\dot{v} + \gamma v = 0$  и любого решения неоднородного уравнения. В качестве последнего можно выбрать

$$v_{\text{стац}} = \frac{F_0}{m\gamma} = \text{const}.$$

Так как общее решение однородного уравнения имеет вид  $v = Ae^{-\gamma t}$ , где  $A$  — произвольная константа, то

$$v(t) = \frac{F_0}{m\gamma} + Ae^{-\gamma t}.$$

Непосредственной проверкой мы убеждаемся, что получили самое общее решение исходного уравнения.

- в) Если тело в начальный момент времени  $t = 0$  покоилось, то  $v(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ . Используя первое из этих условий, находим

$$v(t) = \frac{F_0}{m\gamma} (1 - e^{-\gamma t}).$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$x(t) = \frac{F_0}{m\gamma} t + \frac{F_0}{m\gamma^2} e^{-\gamma t} + B.$$

Учитывая, что  $x(0) = 0$ , находим

$$B = -\frac{F_0}{m\gamma^2}.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{F_0}{m\gamma} \left[ t - \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \right].$$

- 24.4. Для мгновенного значения заряда на обкладках конденсатора можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

Обозначим  $\omega^2 = 1/LC$ . Тогда написанное выше уравнение приобретает вид уравнения гармонического колебания:  $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ . Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Начальное условие состоит в том, что при  $t = 0$   $V_0 = q(0)/C$  и ток равен нулю, т. е.  $dq/dt = 0$ . Определяя из этих условий константы  $A$  и  $B$ , находим

$$q(t) = V_0 C \cos \omega t.$$

- а) Так как в каждый момент времени напряжение на конденсаторе равно  $V(t) = q(t)/C$ , то

$$V(t) = V_0 \cos \omega t, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- б) Используя этот результат, находим, что запасенная в конденсаторе электростатическая энергия, равная  $CV^2/2$ , и энергия магнитного поля в катушке, равная  $LI^2/2$ , изменяются со временем по законам

$$\frac{1}{2} CV_0^2 \cos^2 \omega t \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} CV_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Сумма названных выше энергий, как нетрудно видеть, равна  $(1/2) CV_0^2$  — энергии, первоначально запасенной в конденсаторе.

- 24.5. После того как цепь разомкнута, ток будет течь через  $LC$ -контур. При этом задача становится эквивалентной задаче 24.4, но с другими начальными условиями. Именно, в данной задаче

$$q(t=0) = 0 \quad \text{и} \quad I(t=0) = \left. \frac{dq(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{V_0}{R}.$$

Мгновенное значение заряда на обкладках конденсатора можно представить в виде (см. решение задачи 24.4)

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

где  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . С учетом начальных условий находим напряжение на конденсаторе в любой момент времени  $V(t) = q(t)/C$ :

$$V(t) = \frac{V_0}{\omega RC} \sin \omega t = \frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Из этого выражения видно, что максимальное напряжение на конденсаторе (амплитуда напряжения) равно

$$\frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

- 24.6. а) Уравнение движения тела до включения замедлителя имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi \text{ сек}^{-1}.$$

После включения замедлителя уравнение движения имеет другой вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \gamma \frac{dx}{dt} = 0$$

Общее решение последнего уравнения найдено в гл. 24 «Лекций» (вып. 2). Как следует из этого решения, амплитуда колебаний тела уменьшается со временем по закону  $\exp(-\gamma t/2)$ , причем новый период колебания равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}}.$$

За 10 полных циклов, т. е. за время

$$t_0 = \frac{20\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}},$$

по условию задачи амплитуда колебаний уменьшается в 2 раза, т. е. справедливо соотношение  $1/2 = \exp(-\gamma t_0/2)$ . Отсюда находим

$$\gamma = \sqrt{\frac{4\pi^2}{1/4 + (10\pi/\ln 2)^2}} \approx \frac{\ln 2}{5} \text{ сек}^{-1} \ll \omega_0.$$



Следовательно, в системе единиц МКС

$$5 \frac{d^2 x}{dt^2} + 0,693 \frac{dx}{dt} + 20\pi^2 x = 0.$$

б) Так как  $\gamma \ll \omega_0$ , то

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0 [1 - (\gamma^2/8\omega_0^2)]} \approx T_0 \left( 1 + \frac{\gamma^2 T_0^2}{32\pi^2} \right) = 1,006 \text{ сек.}$$

в) Если амплитуда уменьшается в 4 раза, то  $\exp(-t_1\gamma/2) = 1/4$ , т. е.  $t_1 \approx (4 \ln 2)/\gamma \approx 20 \text{ сек.}$  Так как период колебания равен  $T \approx T_0 = 1 \text{ сек.}$ , то уменьшение амплитуды колебания в 4 раза произойдет за 20 полных колебаний, а в 10 раз примерно за 33 или 34 полных колебания.

г) Скорость диссипации энергии, т. е. теряемая из-за сопротивления мощность, равна

$$P = \gamma m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Решение уравнения движения имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(\gamma/2)(t-t_0)} \left\{ A \cos \left[ (t-t_0) \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + B \sin \left[ (t-t_0) \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \right] \right\} \approx \\ &\approx e^{-(\gamma/2)(t-t_0)} [A \cos \omega_0 (t-t_0) + B \sin \omega_0 (t-t_0)]. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что  $\gamma \ll \omega_0$ . Нисколько не уменьшая общности вывода, предположим, что в момент включения затухания, т. е. при  $t = t_0$ , тело двигалось таким образом, что  $A = 0$  (ведь начальное состояние тела в условии задачи не фиксировано!). Отсюда

$$P = \gamma m \omega_0^2 e^{-\gamma(t-t_0)} B^2 \cos^2 \omega_0 (t-t_0).$$

Из этого выражения видно, что скорость диссипации энергии была максимальной при  $t = t_0$ . В этот момент времени она была рав-

ной  $\gamma m \omega_0^2 B^2$ . Согласно условию задачи,  $B = 0,2 \text{ м}$ ,  $\gamma = 0,139 \text{ сек}^{-1}$ ,  $m = 5 \text{ кг}$ ,  $\omega_0^2 = 4\pi^2 \text{ сек}^{-2}$ . Отсюда находим  $P = 1,1 \text{ вт}$

**24.7. 1.** Уравнение движения осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \dot{x} = \frac{F(t)}{m},$$

где  $\omega_0^2 = k/m$ .

а) Поскольку при  $t \leq 0$  сила на осциллятор не действовала, то в начальный момент времени он покоился (ведь осциллятор с затуханием!). Общим решением уравнения движения при  $t > 0$  (дей-

ствующая сила постоянна!) является решение

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) + \frac{F_0}{m\omega_0^2},$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Учитывая начальные условия  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , находим

$$A = -\frac{F_0}{m\omega_0^2}, \quad B = -\frac{\gamma F_0}{2m\omega_0^2\omega_1}.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\gamma t/2} \left( \cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right].$$

Мы предполагали выше, что  $\omega_0^2 > \gamma^2/4$ . В противном случае, когда  $\omega_0^2 < \gamma^2/4$  и, следовательно,

$$\omega_1 = i\kappa_1 = i\sqrt{(\gamma^2/4) - \omega_0^2},$$

учитывая, что  $\sin ix = i \operatorname{sh} x$  и  $\cos ix = \operatorname{ch} x$ , общее решение запишем в виде

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\gamma t/2} \left( \operatorname{ch} \kappa_1 t + \frac{\gamma}{2\kappa_1} \operatorname{sh} \kappa_1 t \right) \right].$$

- б) В этом случае общее решение уравнения движения записывается в виде

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t),$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования, которые надлежит определить из начальных условий  $x(0) = 0$  и  $\dot{x}(0) = p_x/m$ . В результате находим

$$x(t) = \frac{p_x}{m\omega_1} e^{-\gamma t/2} \sin \omega_1 t.$$

- в) Найдем вначале частное решение уравнения движения. Будем искать его в виде  $x_1(t) = D \sin \omega_0 t$ . Подставим это выражение в уравнение движения и определим константу  $D$ :

$$D = \frac{F_0}{\gamma m \omega_0}.$$

Тогда общее решение уравнения запишется в виде

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) + \frac{F_0}{\gamma m \omega_0} \sin \omega_0 t$$

Используя начальные условия  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , в рассматриваемом случае находим

$$A = 0, \quad B = -\frac{F_0}{\gamma m \omega_1}.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{F_0}{\gamma m} \left( \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{1}{\omega_1} e^{-\gamma t/2} \sin \omega_1 t \right).$$

2. Будем искать частное решение неоднородного уравнения движения в виде  $x_1(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t$ . Подставляя это выражение в исходное уравнение и приравнивая отдельные коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , находим

$$\begin{aligned} C(\omega_0^2 - \omega^2) + D\omega\gamma &= \frac{F_0}{m}, \\ -C\omega\gamma + D(\omega_0^2 - \omega^2) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$C = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad D = \frac{\omega \gamma F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения движения в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t/2} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) + \\ &+ \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}} \cos \left( \omega t - \arctg \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega \gamma} \right). \end{aligned}$$

За достаточно большое время  $t \gg 2/\gamma$  решение, отвечающее собственным затухающим колебаниям, обратится в нуль, а основными останутся лишь вынужденные колебания. Амплитуда последних имеет резонансную зависимость от частоты. Из приведенного выражения видно, что наибольшей амплитудой обладают колебания с частотой  $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma^2/2)}$ . При этом амплитуда «резонансного» колебания равна  $F_0/m\gamma\omega_1$ .

## К главе 25. Линейные системы

25.1. Согласно условию задачи,

$$V_{\text{вх}}(t) = V_0 + V_2 \cos \omega t,$$

где  $\omega = 2\pi 120 \text{ сек}^{-1}$ . Дифференциальное уравнение, описывающее напряжение на конденсаторе, т. е.  $V_{\text{вых}}(t)$ , имеет вид

$$CR \frac{dV_{\text{вых}}}{dt} + V_{\text{вых}}(t) = V_{\text{вх}}(t) = V_0 + V_2 \cos \omega t.$$

Решение соответствующего однородного уравнения легко найти. Оно имеет вид

$$V_{\text{вых}}(t) = A \exp(-t/RC).$$

Эта часть решения существенна лишь в начальные моменты работы выпрямительного устройства. За времена, большие, чем  $RC$ , она по экспоненциальному закону быстро спадает до нуля, и ею можно в дальнейшем пренебречь.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$V_{\text{ВЫХ}}^{(1)}(t) = V_0 + B \cos \omega t + D \sin \omega t.$$

Подставляя  $V_{\text{ВЫХ}}^{(1)}$  в исходное дифференциальное уравнение и по отдельности приравнивая коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  в обеих частях уравнения, находим

$$V_{\text{ВЫХ}}^{(1)}(t) = \frac{V_2}{1 + C^2 R^2 \omega^2} [\cos \omega t + \omega CR \sin \omega t] + V_0.$$

Из этого выражения видно, что постоянная составляющая напряжения остается той же, но амплитуда переменной составляющей уменьшается:

$$V_2' = \frac{V_2}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Подставляя в это выражение  $R = 10^3 \text{ ом}$ ,  $C = 10 \text{ мкф}$ ,  $\omega = 2\pi \times 120 \text{ сек}^{-1}$ , находим  $V_2' = V_2/7,6$ , т. е. амплитуда переменной составляющей уменьшается в 7,6 раза.

- 25.2. Дифференциальное уравнение, определяющее изменение во времени напряжения на конденсаторе  $V_1(t)$ , имеет вид

$$CR \frac{dV_1}{dt} + V_1(t) = V_{\text{ВХ}}(t)$$

В соответствии со схемой цепи  $V_{\text{ВХ}} = V_1 + V_{\text{ВЫХ}}$ . Следовательно,

$$V_{\text{ВЫХ}} = CR \frac{dV_{\text{ВХ}}}{dt} - CR \frac{dV_{\text{ВЫХ}}}{dt}.$$

Если  $|V_{\text{ВЫХ}}| \ll |V_{\text{ВХ}}|$ , то получим  $V_{\text{ВЫХ}}(t) = CR(dV_{\text{ВХ}}/dt)$ .

- 25.3. Используя уравнение для  $V_{\text{ВЫХ}}$ , найденное в предыдущей задаче, запишем

$$V_{\text{ВЫХ}} + CR \frac{dV_{\text{ВЫХ}}}{dt} = -CRV_0 \omega \sin \omega t.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$V_{\text{ВЫХ}} = A \exp(-t/CR) + \frac{CR\omega V_0}{1 + C^2 R^2 \omega^2} (CR\omega \cos \omega t - \sin \omega t).$$

Из этого выражения видно, что условие  $|V_{\text{ВЫХ}}| \ll |V_{\text{ВХ}}|$ , фигурирующее в предыдущей задаче, сводится к условию  $CR\omega \ll 1$ , т. е.  $T \gg \gg CR$ . Следовательно, уже за время, меньшее одного периода колебаний, первый член в выражении для  $V_{\text{ВЫХ}}$  станет пренебрежимо малым, и выходное напряжение можно представить в виде

$$V_{\text{ВЫХ}} = -CRV_0 \omega \sin \omega t = CR \frac{d}{dt} V_{\text{ВХ}}(t).$$

- 25.4. Простейшей цепью, с помощью которой можно было бы интегрировать входное напряжение, является цепь, показанная на рисунке в условии задачи 25.2, но в которой  $V_{\text{ВХ}}$  и  $V_{\text{ВЫХ}}$  поменялись местами.

В этом случае, используя результат задачи 25.2, можно написать

$$\frac{d}{dt} V_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{CR} V_{\text{вх}}(t),$$

или

$$V_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{CR} \int V_{\text{вх}}(t) dt.$$

- 25.5. а) На тело, сдвинутое на расстояние  $x$  от центральной точки, действуют две упругие силы: со стороны правой пружины сила, равная  $-kx/2$ , и со стороны левой — сила, равная  $-kx/2$ . Суммарная упругая сила, таким образом, равна  $-kx$ . В предположении о постоянстве коэффициента трения  $f$  сила трения равна по величине  $fmg$  (где  $g$  — ускорение свободного падения) и направлена всегда против движения. В отсутствие трения движение тела описывалось бы дифференциальным уравнением  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ , где  $\omega$  — частота колебаний, равная  $\omega = \sqrt{k/m}$ . В течение интервала времени  $0 < t < \pi \sqrt{m/k}$ , т. е. в первый полупериод колебания, тело двигалось бы налево. Если учесть трение, то при движении налево тело испытывало бы действие силы трения, равной  $fmg$ . Уравнение движения для этого временного интервала записывается следующим образом:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = fg \quad (\omega = \sqrt{k/m}).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t + \frac{mfg}{k}.$$

Удовлетворяя начальным условиям  $x(0) = A$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , находим что для  $0 < t < \pi \sqrt{m/k}$

$$x(t) = \left( A - \frac{fmg}{k} \right) \cos \omega t + \frac{mfg}{k}.$$

Из этого решения следует, что в момент времени  $t = \pi/\omega$  тело достигнет крайней левой точки  $x = -[A - (2mfg/k)]$ , остановится, а затем начнет двигаться вправо. Даже без решения уравнения движения в следующий полупериод колебания ясно, что за половину периода сила трения каждый раз приводит к уменьшению амплитуды колебания на величину, равную  $2mfg/k$ .

- б) Если тело  $n$  раз пересечет точку  $x = 0$ , то из вышеприведенного рассуждения следует, что амплитуда колебания тела станет равной

$$A - n \frac{2mfg}{k}.$$

Чтобы размах колебания тела после  $n$  пересечений точки  $x = 0$  оставался больше  $B$ , необходимо выполнение неравенства

$$B \leq A - n \frac{2mfg}{k},$$

т. е. должно быть

$$A \geq B + n \frac{2mfg}{k}.$$

### Вып. 3.

## ИЗЛУЧЕНИЕ • ВОЛНЫ • КВАНТЫ

### К главе 26. Оптика. Принцип наименьшего времени

26.1. Обозначим через  $x$  расстояние от точки  $K$  до стены. Тогда время  $T$ , затраченное на ходьбу, выражается через  $x$  следующим образом:

$$T(x) = \frac{42 - x}{1,5} + \frac{\sqrt{x^2 + 36^2}}{0,9}.$$

Необходимо найти значение  $x = x_0$ , при котором это время минимально. Определим его из условия, чтобы первая производная  $dT/dx$  обращалась в нуль при  $x = x_0$ :

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_0} = 0.$$

Выполняя дифференцирование, получаем квадратное уравнение  $1,8\sqrt{x_0^2 + 36^2} - 3x_0 = 0$ . Его положительный корень  $x = 27$ , что соответствует  $AK = 15$  м.

Решим теперь задачу, используя «закон преломления»

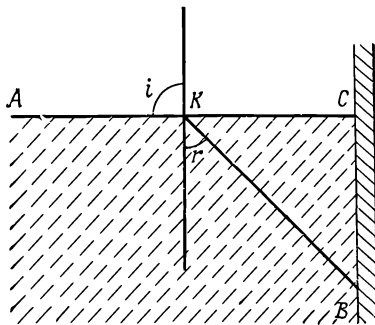
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2},$$

где  $v_1, v_2$  — скорость ходьбы пешехода соответственно по тротуару и по вспаханному полю, углы  $i$  и  $r$  показаны на рисунке. Поскольку  $i = 90^\circ$ ,

$$\sin r = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{5}.$$

Из рассмотрения треугольника  $KBC$  находим

$$KC = BC \operatorname{tg} r = 27 \text{ м}.$$



- 26.2. Обозначим угол, образуемый нормалью к пластине с лучом, через  $\alpha$  (он равен углу падения), угол преломления через  $\beta$ , толщину пластины через  $l$ . Тогда по условию задачи

$$\alpha = \beta + 30^\circ \quad \text{и} \quad n = 1,5 = \frac{\sin(\beta + 30^\circ)}{\sin \beta} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\beta = \operatorname{arccctg}(3 - \sqrt{3}) = 38,26^\circ.$$

Отсюда

а) 
$$PP' = \frac{l \sin 30^\circ}{\cos \beta} = 0,127 \text{ м.}$$

- б) Время прохождения в воздухе  $t = l/c$  ( $c$  — скорость света в воздухе). При наличии пластины полное время прохождения

$$t' = t - \frac{l \cos 30^\circ}{c \cos \beta} + \frac{ln}{c \cos \beta}.$$

Подставляя численные данные, получаем

$$\frac{t - t'}{t} \approx 16\%.$$

- 26.3. Пусть  $b$  — толщина края линзы,  $d$  — ее толщина по оси,  $h = 0,1 \text{ м}$  — ее радиус. Тогда времена прохождения равны: для «периферического» луча

$$t' = \frac{2\sqrt{(SC - b/2)^2 + h^2} + bn}{c},$$

для «центрального» луча

$$t = \frac{2SC + d(n - 1)}{c}.$$

Приравнивая эти времена, получаем соотношение для определения  $d$ . Подставляя в него численные значения, получаем  $d \approx 20 \text{ мм}$ .

- 26.4. В действительности у зеркального изображения меняются местами не «правая и левая рука», а «лицо и затылок» — зеркало выворачивает изображение вдоль оси, перпендикулярной поверхности зеркала, а оси справа налево и сверху вниз не преобразуются вовсе.
- 26.5. Потому что мы видим в таком зеркале изображение, полученное двукратным отражением.
- 26.6. Разберем лишь нетривиальный случай, когда падающий луч испытывает трехкратное отражение. Для этого он должен быть не параллелен ни одной из плоскостей, образующих трехгранный угол. В противном случае он испытывает не больше двух отражений и движется все время в одной плоскости.

Очевидно, справедливы следующие два утверждения:

- а) углы, являющиеся проекциями углов падения и отражения на любую плоскость, перпендикулярную отражающей плоскости, равны между собой;
- б) отраженный и падающий лучи проецируются на отражающую плоскость в одну прямую.

Рассмотрим проекцию хода луча на каждую из граней угла. Из двух высказанных утверждений следует, что это будет лома-

ная линия из трех отрезков, у которой смежные отрезки образуют равные углы с линиями пересечения двух остальных граней угла с рассматриваемой гранью. Следовательно, отрезки этой ломаной, не имеющие общих точек, параллельны. Эти отрезки будут проекциями падающего и выходящего лучей на рассматриваемую плоскость. Две линии, проекции которых на все координатные плоскости параллельны, являются параллельными прямыми, что и доказывает утверждение задачи.

Широкое практическое применение трехгранный отражающий угол находит в так называемых «катафотах» — рифленых стеклах, отражающих падающий свет обратно, в направлении источника. Кроме того, на том же принципе было основано действие уголкового отражателя, установленного на «Луноходе». Этот прибор использовался для определения с большой точностью расстояния до Луны с помощью посланного с Земли и отраженного обратно лазерного луча.

- 26.7. Показатель преломления для перехода луча из оптически более плотной среды в менее плотную  $n_{12} < 1$ . Согласно закону преломления,  $\sin \vartheta_2 = \sin \vartheta_1 / n_{12}$ . Когда  $\sin \vartheta_1$  становится больше  $n_{12}$ , равенство не может выполняться, поскольку  $\sin \vartheta_2$  не может быть больше единицы, и, следовательно, преломления не происходит — свет отражается от границы раздела, как от зеркала (явление «полного внутреннего отражения»).

## К главе 27. Геометрическая оптика

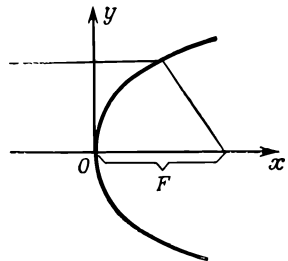
- 27.1. Время распространения осевого луча должно быть равно времени распространения произвольного луча, проходящего через точку с координатами  $x$  и  $y$ , расположенную на преломляющей поверхности. Разность этих времен равна

$$\frac{x}{c} + \frac{n \sqrt{y^2 + (F - x)^2}}{c} - \frac{nF}{c},$$

где  $c$  — скорость света в воздухе.

Приравнивая эту разность нулю, получаем искомое уравнение поверхности. Разрешая его относительно  $y$ , приходим к выражению

$$y = \pm \frac{1}{n} \sqrt{2xFn(n-1) - x^2(n^2-1)}.$$



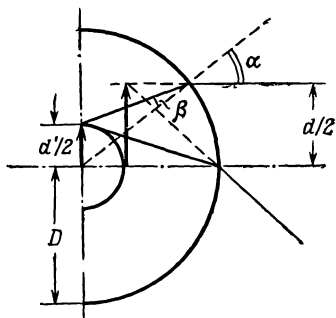
- 27.2. На рисунке показан поперечный разрез капиллярной трубки. Нужно построить изображение радиуса капиллярного отверстия, создаваемое стенкой трубки, которая действует как толстая цилиндрическая линза. Способ построения ясен из чертежа; из закона преломления и рассмотрения треугольников на рисунке вытекают следующие соотношения:

$$d = D \sin \alpha, \quad \sin \alpha = n \sin \beta,$$

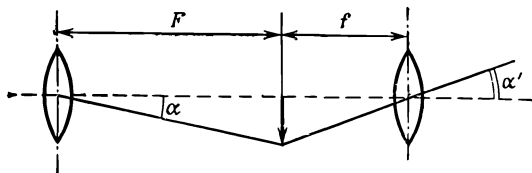
$$\frac{d'}{D} = \frac{\sin \beta}{\sin(180^\circ - \beta - 90^\circ + \alpha)} = \frac{\sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$



Исключая из них  $\alpha$  и  $\beta$ , можно получить довольно громоздкое точное выражение для  $d$  через  $d'$ ,  $D$  и  $n$ . Интересно получить простое приближенное выражение для случая, когда  $d \ll D$ . Тогда углы  $\alpha$  и  $\beta$  (и, следовательно,  $\alpha - \beta$ ) малы, и в точном выражении  $d = nd' \times \cos(\alpha - \beta)$ , следующем из выписанных соотношений, можно положить в первом приближении косинус равным единице. Тогда  $d = nd'$ .



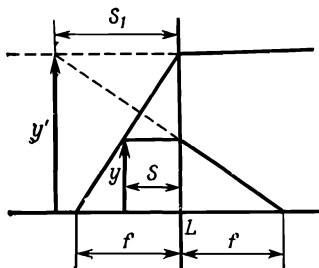
- 27.3. Эта поверхность — эллипсоид вращения с фокусами в точках  $P$  и  $P'$  (см. § 4 гл. 26 «Лекций», вып. 3, стр. 15).
- 27.4. Двукратно применяя формулу для увеличения линзы (см. § 4 гл. 23 «Лекций», вып. 3, стр. 31), находим, что увеличение этой оптической системы (которая является простейшей зрительной трубой) равно  $F/f$ .



- 27.5. Поскольку глаз располагается вплотную за линзой, он может рассматривать лишь *мнимое* изображение, располагающееся по ту же сторону линзы, что и предмет (см. рисунок). В случае мнимого изображения он должен быть расположен, таким образом, *между* фокусом и линзой. В формуле линзы расстояние  $S_1$  от линзы до мнимого изображения нужно брать отрицательным

$$\frac{1}{S} - \frac{1}{S_1} = \frac{1}{f}, \quad S = \frac{fS_1}{S_1 + f},$$

где  $S$  — монотонная функция от  $S_1$ , следовательно, она принимает максимальное и минимальное значения  $S_{\max}$  и  $S_{\min}$  на концах интервала изменения  $S_1$ :



$$S_{\max} = 5 \text{ см} \quad (S_1 = \infty),$$

$$S_{\min} = 4,16 \text{ см} \quad (S_1 = 25 \text{ см}).$$

Эти значения и определяют границы, в которых должен быть помещен рассматриваемый предмет. В первом случае увеличение равно бесконечности, во втором оно составляет около 6.

- 27.6. Пусть  $S = 10$  м — расстояние от предмета до положительной линзы,  $\Delta$  — расстояние между линзами, которые расположены в точках  $O_1$  и  $O_2$  соответственно (см. рисунок).

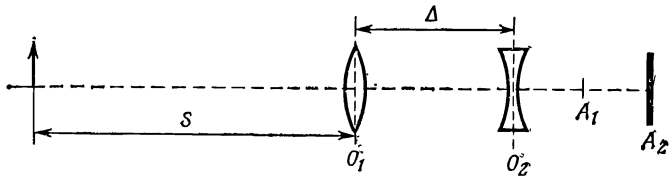
Положительная линза создает изображение предмета в точке  $A_1$ ; это изображение «рассматривается» отрицательной линзой, которая создает изображение предмета в точке  $A_2$ , где и должна быть помещена фотопластика. Нужно найти расстояние  $O_2A_2$ . Для этого можно дважды последовательно применить уравнение линзы в виде  $x \cdot x' = f^2$ . В первом случае  $x_1 = S - f_1$ ,  $x'_1 = O_1A_1 - f_1$ ; отсюда определяем

$$O_1A_1 = f_1 + x'_1 = f_1 + \frac{f_1^2}{x_1} = 30,93 \text{ см},$$

$$O_2A_1 = 3,43 \text{ см}.$$

Во втором случае  $x_2 = -f_2 - O_2A_1 \approx 6,57$  см. Искомое расстояние

$$O_2A_2 = x'_2 - f_2 = \frac{f_2^2}{x_2} + 10 \text{ см} \approx 25,22 \text{ см}.$$



- 27.7. В обоих случаях нужно найти величину  $x'$  — расстояние от главного фокуса до изображения;  $x' = f^2/x$ , где  $f$  — фокусное расстояние, а  $x$  — расстояние до Луны или спутника. В случаях (а) и (б) соответственно получаем значения (расстояние до Луны считаем равным 380 000 км)

$$x' = 6,73 \cdot 10^{-2} \text{ мм и } 80 \text{ мм}.$$

- 27.8. Из определения главных плоскостей оптической системы следует их важное свойство: если точка находится в главной плоскости на расстоянии  $y$  от оптической оси, то ее изображение получается в другой главной плоскости на том же расстоянии от оптической оси. Этим свойством главных плоскостей мы и воспользуемся для решения задачи. Построение изображения точки, расположенной в главной плоскости, показано на рисунке. Очевидны следующие соотношения:

$$y = f \operatorname{tg} \varphi = F \operatorname{tg} \Phi, \quad y' = (D - f) \operatorname{tg} \varphi = (f' + x) \operatorname{tg} \Phi.$$

Из уравнения линзы для  $L'$  следует также

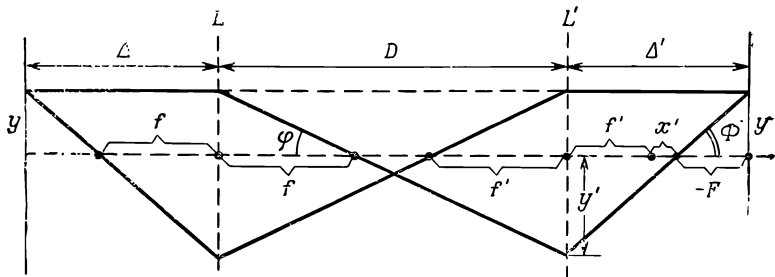
$$f'^2 = x' (D - f - f').$$

Исключая отсюда углы  $\varphi$  и  $\Phi$ , а также расстояние  $x$ , получаем

$$F = \frac{f f'}{D - f - f'}, \quad \Delta' = f' + x' + F = \frac{f' D}{D - f - f'}.$$

Из аналогичного рассмотрения для линзы  $L$ :

$$\Delta = \frac{|D|}{D - f - f'}.$$



### К главе 28. Электромагнитное излучение

- 28.1. а)  $A = re^{i\varphi/2} + re^{-i\varphi/2} = r \cos(\varphi/2) + ir \sin(\varphi/2) + r \cos(\varphi/2) - ir \sin(\varphi/2) = 2r \cos(\varphi/2) = |A|$  — вещественное число, равное с точностью до знака своему модулю. Геометрическая интерпретация: складываются два вектора длины  $r$ , один из которых образует с осью  $x$  угол  $\varphi/2$ , другой  $-\varphi/2$ .
- б) Воспользуемся общей формулой суммы произвольного числа членов геометрической прогрессии (эта формула выполняется и для комплексных чисел). Первый член прогрессии  $r$ , показатель  $e^{i\varphi}$ , полное число членов  $N$ :

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} r e^{in\varphi} = r \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}},$$

$$|A| = r \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}.$$

Геометрическая интерпретация: складываются  $N$  векторов длины  $r$ , первый из которых направлен по оси абсцисс, а каждый последующий повернут относительно предыдущего на угол  $\varphi$ .

### К главе 29. Интерференция

- 29.1. Если обозначить амплитуду поля, создаваемого первой антенной через  $A_1$ , то аналогичная величина для второй антенны есть  $A_2 = \sqrt{2} A_1$ . Разность фаз между двумя антеннами в зависимости от угла  $\theta$ , отсчитываемого от направления «на восток», равна  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi d \sin \theta / \lambda = \pi \sin \theta$  в нашем случае. Тогда по общей формуле

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

и

$$I = I_0 [1 + 2 + 2\sqrt{2} \cos(\pi \sin \theta)].$$

Для направлений, указанных на рис. 29.5 в «Лекциях» (вып. 3, стр. 54), имеем

$$I(0) = 5,83 I_0, \quad I(30^\circ) = 3 I_0, \quad I(90^\circ) = 0,17 I_0.$$

- 29.2. При указанной частоте расстояние между соседними излучателями равно четверти длины волны, и, следовательно, полная разность фаз между ними в зависимости от угла равна  $\Delta\varphi = (\pi/2) (1 - \sin \theta)$ . Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату модуля амплитуды, можно воспользоваться результатом задачи 28.1 (б). Подставив в него  $N = 4$  и возводя в квадрат, находим

$$I = |A|^2 = \frac{\sin^2 [\pi (1 - \sin \theta)]}{\sin^2 [\pi (1 - \sin \theta)/4]}.$$

- 29.3. На рисунке схематически изображен радиотелескоп с расстоянием между чашами (приемниками) 1 и 2, равным  $d$ . Телескоп регистрирует сигналы от удаленного источника. Малое изменение углового положения источника приводит к фазовому сдвигу  $\Delta\varphi$  между сигналами, поступающими в приемники. Этот сдвиг по общей формуле связан с углом  $\Delta\theta$  следующим образом:

$$\Delta\varphi = \frac{d \sin \theta \cdot \Delta\theta \cdot 2\pi}{\lambda}$$

( $\lambda$  — длина волны радиоизлучения). Сигналы равной амплитуды  $A$  от двух приемников смешиваются (векторно складываются), поэтому интенсивность  $I$  выходного сигнала

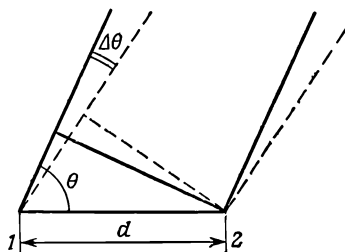
$$I = 2A^2 (1 + \cos \Delta\varphi) = 4A^2 \cos^2 \left( \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \approx 4A^2 \left[ 1 - \frac{(\Delta\varphi)^2}{4} \right].$$

По условиям задачи минимально регистрируемое колебание интенсивности равно 10%, что соответствует  $(\Delta\varphi)^2/4 = 0,1$ . Отсюда, полагая  $\sin \theta \approx 1$ , находим

$$\Delta\varphi = \sqrt{0,4} = 0,63 = 2\pi \frac{480}{0,5} \Delta\theta.$$

Следовательно,

$$\Delta\theta \approx 10^{-4} \text{ рад} = 21''.$$

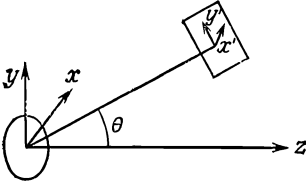


- 29.4. Круговое движение можно представить как сумму двух гармонических колебаний во взаимно перпендикулярных направлениях с разностью фаз  $\pi/2$  (см. § 1 гл. 33 «Лекций», вып. 3, стр. 119). Компоненты электрического поля в плоскости, перпендикулярной лучу (см. рисунок; оси  $x$  и  $x'$  параллельны друг другу), в соответствии с формулой (29.3) «Лекций» (вып. 3, стр. 51) записываются в виде

$$E_{y'} = -q \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \frac{a\omega^2 \cos [\omega (t - r/c)]}{4\pi\epsilon_0 r c^2},$$

$$E_{x'} = -q \frac{a\omega^2 \cos [\omega (t - r/c) - \pi/2]}{4\pi\epsilon_0 r c^2}.$$

В плоскости орбиты  $E_y' = 0$ , и интенсивность излучения пропорциональна  $\cos^2[\omega(t-r/c) - \pi/2]$ . На оси орбиты вектор электрического поля сохраняет свою длину и равномерно вращается, поэтому интенсивность от времени не зависит и вдвое превышает среднюю интенсивность в плоскости орбиты на том же расстоянии от источника.



- 29.5. Амплитуда излучения в направлении, образующем угол  $\pi/2 - \theta$  к линии диполей в экваториальной плоскости, имеет вид (в комплексной форме; см. решение задачи 28.1)

$$A = r(1 + e^{i\Delta\Phi_2}) \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\Phi_1}.$$

Здесь  $N$  — число диполей в каждой линии;  $r$  — амплитуда каждого диполя;  $\Delta\Phi_1 = \pi \sin \theta$  — сдвиг фаз между соседними диполями в каждой линии;  $\Delta\Phi_2 = (\pi/2)(1 - \sin \theta)$  — сдвиг фаз между соответствующими диполями в разных линиях. Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей; следовательно, интенсивность равна

$$I \sim |A|^2 = \frac{2r^2 \sin^2 \Phi_2 \cdot \sin^2 N \Delta\Phi_1}{\sin^2 \Delta\Phi_1}.$$

Распределение интенсивности, получающееся для одного ряда диполей, в случае двойного ряда диполей «модулируется» множителем

$$2 \sin^2 \left[ \frac{\pi}{2} (\sin \theta - 1) \right].$$

- 29.6. Ускорение каждого из электронов равно  $a\omega^2 \cos(\omega t - \Phi_0)$ , и все электроны можно рассматривать как осцилляторы, излучающие в фазе. Если  $\rho$  — число электронов на единицу длины проволоки и их полное число равно  $L\rho$ , то искомое поле вычисляется по общей формуле

$$E = \frac{-q_e L \rho a \omega^2 \cos[\omega(t-r/c) + \Phi_0]}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \sin \theta.$$

- 29.7. В этом случае вектор напряженности электрического поля излучения лежит в вертикальной плоскости и длина его пропорциональна  $\sin \theta$  (см. рисунок в условии задачи). Следовательно, интенсивность излучения на заданном расстоянии от источника, пропорциональная среднему квадрату напряженности, может быть записана в виде  $I = C \sin^2 \theta$  ( $C$  — подлежащая определению постоянная).

Константу  $C$  при заданном значении  $R$  можно найти, приравняв полный поток излучения через сферу радиусом  $R$  в единицу времени (т. е. интеграл от  $I$  по сфере) полной мощности передатчика:

$$\int I dS = 2\pi R^2 C \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = C \frac{8\pi}{3} R^2 = 0,5 \text{ вт}.$$

При  $R = \sqrt{2} \cdot 2,5 \cdot 10^4 \text{ м}$   $C = 0,5 \text{ вт} \cdot 3 / (8\pi R^2) = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ вт/м}^2$ .  
По условиям задачи  $\theta = 45^\circ$ , поэтому искомая интенсивность равна

$$I(45^\circ) = \frac{C}{2} = 0,25 \cdot 10^{-10} \text{ вт/м}^2.$$

### К главе 30. Дифракция

30.1. Разрешающая способность связана с порядком спектра и числом линий решетки  $n$  соотношением  $\lambda/\delta\lambda = mn$ . По условиям задачи  $m = 1$ ,  $\Delta\lambda = 5,90 \text{ \AA}$ ,  $\lambda = 5900 \text{ \AA}$ . Отсюда  $n = 1000$ , что при плотности линий  $600/\text{мм}$  соответствует длине решетки  $1,7 \text{ мм}$ .

30.2. Угловая разрешающая способность глаза  $\theta = 1,22 \lambda/L$ , где  $\lambda$  — длина волны света, а  $L$  — диаметр зрачка. Приравнивая эту величину углу  $l/R$ , под которым интервал между фарами  $l$  виден с расстояния  $R$ , получаем

$$R = \frac{lL}{1,22\lambda} = 8,3 \text{ км.}$$

Сложный спектральный состав белого света затрудняет разрешение двух источников — «изображения» их, соответствующие длинноволновой части спектра, сливаются раньше.

30.3. а) Щель спектрографа параллельна оси, вокруг которой поворачивается решетка, поэтому независимо от угла ее поворота длина изображения щели на экране  $P$  (а это и есть ширина спектральной полосы) определяется увеличением системы из двух линз, которое равно  $F_2/F_1$ . Следовательно,

$$h' = \frac{hF_2}{F_1}.$$

(Не путать ширину *полосы* с шириной *линии* в спектре.)

б) Условие, при котором максимум интенсивности для заданной длины волны соответствует направлению, совпадающему с осью  $C_2$ , т. е. углу выхода точно  $\theta_d$ , имеет вид

$$\lambda = \frac{d}{m} |\sin \theta_d - \sin \theta_i| = \frac{1}{Nm} |\sin \theta_d - \sin \theta_i| = 10^7 \text{ \AA}$$

( $m$  — порядок спектра,  $\lambda$  — длина волны).

в) Искомое расстояние равно  $D = F_2 \Delta\theta_d$ , где  $\Delta\theta_d$  — разность между углами, которые соответствуют максимумам с разницей длин волн  $1 \text{ \AA}$  при фиксированном угле  $\theta_i$ . Дифференцируя соотношение  $\sin \theta_d = \sin \theta_i + m\lambda/d$ , получаем  $\cos \theta_d \Delta\theta_d = m\Delta\lambda/d$ . Отсюда при  $\Delta\lambda = 1 \text{ \AA}$  получаем  $D = F_2 m N \cdot 10^{-7} / \cos \theta_d$ .

г) Решение аналогично случаю (а) с той разницей, что *ширина* изображения щели в отличие от длины меняется при поворотах решетки и линзы  $C_2$  пропорционально  $\cos \theta_i / \cos \theta_d$ . Следовательно,

$$w' = \frac{wF_2 \cos \theta_i}{F_1 \cos \theta_d}.$$

30.4. а)  $\sin \theta_i = -\sin \theta_d = \sin \theta$  и условие максимума имеет вид  $2 \sin \theta = m\lambda/d$ . Подставляя численные значения, получаем  $\sin \theta \approx 0,788$ ,  $\theta \approx 51,96^\circ$ .

- б) Искомые линии содержатся в спектрах других порядков  $m_i$ , и их длины волн связаны с длиной волны  $\lambda$  из п. (а) соотношениями  $\lambda_i = 5\lambda/m_i$ . В пределах видимого спектра укладываются три такие линии, соответствующие  $m_i = 7, 6, 4$  с длинами волн  $\lambda_i = 3750, 4375$  и  $6560$  А.
- в) Линию  $5250$  А можно отделить от остальных трех, подобрав соответствующий фильтр. Общий способ получения сразу спектра высокого порядка состоит в обеспечении значительной начальной разности фаз, соответствующей нескольким длинам волн, между соседними штрихами решетки. Он реализуется в решетках со ступенчатым профилем (см. решение задачи 30.6).
- г) Используя решение задачи 30.3 (в) и подставляя в полученное там выражение для  $D$  угол  $\theta$ , вычисленный в п. (а) данной задачи, получаем  $D = 11,2$  мн (в предположении, что из указанных в условии размеров *длине* решетки соответствует  $25$  см).
- д)  $\delta\lambda = \lambda/mn$ , где  $n$  — полное число линий на решетке. Отсюда  $\delta\lambda = 0,007$  А.

30.5. Разрешающая способность характеризует то уширение спектральной линии, которое создается дифракционной решеткой. Нельзя, конечно, различить две спектральные линии, расстояние между которыми гораздо меньше, чем это уширение, но длину волны *уединенной* линии определяют по положению *максимума* интенсивности, а ошибка при измерении положения максимума может быть во много раз меньше, чем это уширение.

30.6. а) Прежде всего должны быть в фазе лучи, рассеянные разными «осцилляторами», принадлежащими поверхности одной ступеньки, т. е. от каждой из них свет для получения максимальной интенсивности должен отражаться по закону «угол падения равен углу отражения». Кроме того, должны находиться в фазе лучи от соседних ступенек. Следовательно, для направления, в котором решетка «блестит», должны выполняться два условия:

$$\varphi = \theta_b, \quad (1)$$

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (2)$$

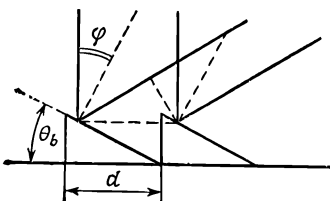
где  $m$  — порядок спектра. При значительной величине угла равенство (2) может выполняться лишь для достаточно высоких порядков.

- б) Искомый угловой интервал можно определить, используя равенство (2). Он равен изменению, которое испытывает угол  $\varphi$ , когда при фиксированном  $m$  длина волны  $\lambda$  пробегает весь интервал значений  $\Delta\lambda$ , соответствующий видимому спектру. Дифференцируя (2), получаем

$$2d \Delta\varphi \cos \varphi = m \Delta\lambda.$$

Подставляя сюда  $\varphi = \theta_b$ , имеем

$$\Delta\varphi = \frac{m \Delta\lambda}{2d \cos \theta_b}.$$



- 30.7. При каждом отражении амплитуда волны умножается на  $R$ , а фаза при каждом пересечении зазора увеличивается на  $2\pi D/\lambda$ . Амплитуда волны, прошедшей извне в зазор, испытавшей  $2n$  отражений и  $2n$  раз пересекшей зазор между поверхностями, дается выражением

$$A_n = TA_0 (R e^{i2\pi D/\lambda})^{2n}.$$

Суммарная амплитуда волны, падающей на правую поверхность,

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \frac{TA_0}{1 - R^2 e^{i4\pi D/\lambda}},$$

а полная интенсивность равна  $A^2$ . Следовательно, отношение интенсивности прошедшего света к начальной интенсивности

$$\frac{I}{I_0} = \frac{T^2 |A|^2}{A_0^2} = \frac{T^4}{|1 - R^2 e^{i4\pi D/\lambda}|^2}.$$

При  $R \approx 1$ , как видно из полученного выражения, для тех длин волн, при которых фаза экспоненты равна четному числу  $\pi$ , интенсивность прошедшего света может быть близка к единице. На этом свойстве и основано использование интерферометра как узкополосного оптического фильтра. Полученный результат может показаться парадоксальным: уже в результате первого отражения от границы зазора отражается доля начальной интенсивности, равная  $R^2$ , а согласно полученной формуле, свет проходит через интерферометр почти целиком. Однако в действительности противоречия нет — волна, отраженная от правой границы зазора, интерферирует вне зазора с волной, отраженной от левой границы, и гасит ее, т. е. фактически отражения почти не происходит.

### К главе 31. Как возникает показатель преломления

- 31.1. Воспользовавшись формулой для показателя преломления

$$1 - n = \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

(см. «Лекции», формула (31.19), вып. 3, стр. 93) и считая  $\omega_0 \ll \omega$ , находим

$$1 - n = 6,5 \cdot 10^{-7}.$$

Экспериментально найденное значение составляет

$$1 - n = 8,4 \cdot 10^{-6}.$$

- 31.2. Порядка  $10^6 \text{ см}^{-3}$ .

- 31.3. б) При  $\omega = \omega_0$  вещественная  $n'$  и мнимая  $n''$  части показателя преломления равны  $n' = 1$  и  $n'' = Nq^2/2\varepsilon_0 m\gamma\omega$ . Поскольку интенсивность световой волны пропорциональна  $E^2$ , то, используя формулу, приведенную в п. (а) условия данной задачи, находим

$$I = I_0 \exp(-Nq^2 z / \varepsilon_0 m \gamma \omega).$$



- 31.4. а) Здесь удобно воспользоваться выражением для напряженности электрического поля

$$E(t) = - \frac{qa(t - r/c) \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 cr},$$

созданного зарядом  $q$  на расстоянии  $r$  от него в момент времени  $t$ , в направлении  $\theta$  от оси движения заряда (см. «Лекции», формула (29.1), вып. 3, стр. 49). Здесь  $a(t)$  — ускорение заряда, равное, очевидно,  $-\omega^2 x_0 \cos \omega t$ . Следовательно,

$$E(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 \cos[\omega(t - r/c)]}{r} \sin \theta.$$

Поскольку плотность потока энергии в электромагнитной волне равна  $\epsilon_0 c E^2$ , то мощность  $S$ , излучаемая через единицу поверхности на расстоянии  $r$  под углом  $\theta$ , равна

$$S = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2 \cos^2[\omega(t - r/c)]}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta.$$

Чтобы найти полную энергию  $P$ , излучаемую в единицу времени электроном, усредним  $S$  за период движения ( $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ ) и умножим  $S$  на площадь, приходящуюся на элемент телесного угла  $d\Omega$ , т. е. на  $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . Интегрируя затем по  $\phi$  от 0 до  $2\pi$  и по  $\theta$  от 0 до  $\pi$ , находим

$$P = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

- б) По определению константа затухания  $\gamma_R = P/W$ , где  $W$  — энергия, запасенная за одно колебание. Отсюда

$$\gamma_R = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{2}{m\omega^2 x_0^2} = \frac{q^2 \omega^2}{6\pi m \epsilon_0 c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{mc^3}.$$

- в) Из равенства  $\lambda = 2\pi c/\omega$  находим

$$|\Delta\lambda| = \frac{2\pi c |\Delta\omega|}{\omega^2} = \frac{2\pi c}{\omega^2} \gamma_R = \frac{q^2}{3\pi m \epsilon_0 c^2} = \frac{4\pi r_0}{3} = 0,74 \cdot 10^{-3} \text{ \AA} \left( r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ м} \right).$$

## К главе 32. Радиационное затухание. Рассеяние света

- 32.1. Работа радиационной силы в единицу времени, усредненная за один период колебаний  $2\pi/\omega$ , дается выражением

$$W_P = \frac{\omega}{2\pi} \frac{2e^2}{3\pi c^3} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{d^3x}{dt^3} \frac{dx}{dt} dt.$$

В нашем случае

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi).$$

Подставляя это выражение под интеграл и проведя интегрирование, убеждаемся, что средняя работа радиационной силы трения равна

средней энергии, измеряемой за это же время (см. предыдущую задачу).

- 32.2. Рассмотрим слой единичной площади и бесконечно малой толщины  $dx$ , расположенный перпендикулярно падающему свету. Тогда изменение интенсивности  $dI$  света в этом слое равно произведению самой интенсивности на вероятность того, что свет рассеется в этом объеме, где располагается  $N dx$  рассеивающих центров. Суммарная эффективная площадь рассеяния равна сумме эффективных сечений рассеяния всех центров в слое (поскольку  $dx$  бесконечно малая величина, элементарные площадки  $\sigma$  не перекрываются друг с другом), т. е.  $N\sigma dx$ . Вероятность рассеяния в выделенном слое равна отношению площади  $N\sigma dx$  к единичной площади поверхности слоя, т. е. численно равна  $N\sigma dx$ . Отсюда

$$dI = -IN\sigma dx, \text{ или } \frac{dI}{dx} = -IN\sigma.$$

Интегрируя получившееся уравнение с учетом граничного условия  $I|_{x=0} = I_0$ , находим

$$I = I_0 e^{-N\sigma x}.$$

- 32.3. Выражение для показателя преломления света имеет следующий вид [см. «Лекции», формула (31.19), вып. 3, стр. 93]:

$$n - 1 = \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} = 2\pi Nc^2 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Возводя обе части этой формулы в квадрат и поделив левую и правую части получающегося выражения на соответственно левую и правую части выражения для  $\sigma$ , получаем соотношение, из которого требуемый результат вытекает непосредственно.

- 32.4. Воспользуемся результатами задач 32.2 и 32.3. Для воздуха  $n - 1 = 0,000292$ ; при атмосферном давлении число молекул в единице объема  $N = 6 \cdot 10^{23} / 22\,400 = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Толщина атмосферы, приведенная к постоянному давлению 1 атм, равна  $h \approx 10 \text{ км}$ . Интенсивность солнечного излучения, прошедшего в атмосфере путь  $x$ ,

$$I(x) = I_0 e^{-N\sigma x} = I_0 e^{-\frac{2(n-1)^2}{3\pi N} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 x}. \quad (1)$$

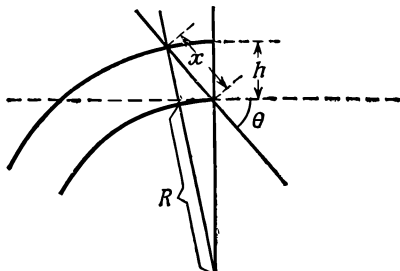
Зависимость  $x$  от угла  $\theta$ , под которым Солнце стоит над горизонтом можно определить геометрически (см. рисунок). Поскольку  $h \ll R$  ( $R$  — радиус Земли) мы имеем

$$x \approx h / \sin \theta.$$

Подставляя в это выражение соответствующие углы из условия задачи, получаем

$$\text{а) } x(90^\circ) = h, \quad \text{б) } x(10^\circ) = 5,620h.$$

Таким образом, из выражения (1) находим  $I(90^\circ)/I_0 \approx 78\%$ ,  $I(10^\circ)/I_0 \approx 24\%$ .



- 32.5.** Проверить поперечность излучения и поляризовать его можно при рассеянии на свободных электронах (см. § 2 гл. 33 «Лекций», вып. 3, стр. 121).
- 32.6.** Для проведения расчетов необходимо сделать конкретизирующие предположения о распределении электронов в околосолнечном пространстве. Для требуемой оценки можно предположить, что они равномерно заполняют сферу радиусом вдвое больше солнечного. Свет, рассеянный в  $K$ -короне свободными электронами, равномерно излучается во все стороны и определяет яркость свечения короны. Если считать, что каждый квант света рассеивается не больше чем один раз, то на расстоянии, равном солнечному радиусу, рассеивается доля полного солнечного излучения, равная

$$r' = 1 - e^{-N_e \sigma R}; \quad (1)$$

здесь  $N_e$  — искомая плотность электронов, а  $\sigma = 8\pi/3(e^2/mc^2)^2 = 6,25 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$  — томсоновское сечение рассеяния. Этот рассеянный свет излучается сферой, радиус которой вдвое, а поверхность вчетверо больше поверхности Солнца. Поэтому отношение ее яркости к яркости солнечного диска (яркость в данном случае определяется количеством квантов, испускаемых единицей площади поверхности в единицу времени) равно  $r = r'/4$ . Поскольку для рассеянного излучения величина  $N_e \sigma R$  и, следовательно, показатель экспоненты в выражении (1) малы, то можно воспользоваться приближенной формулой  $e^{-x} \approx 1 - x$ . Тогда, приравняв  $r$  численному значению из условия задачи, получаем  $r = 10^{-8} = N_e \sigma R/4$ . Подставляя  $R = 7 \cdot 10^{10} \text{ см}$ , вычисляем

$$N_e = \frac{4r}{\sigma R} = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{6,25 \cdot 10^{-25} \cdot 7 \cdot 10^{10}} \approx 10^6 \text{ см}^{-3}.$$

- 32.7.** В гл. 31 «Лекций» получено выражение, связывающее количество энергии излучения, проходящего в 1 сек через 1 м<sup>2</sup> поверхности, со средней напряженностью поля излучения в этой точке:  $S = \epsilon_0 c (E)^2$  ( $S$  имеет размерность  $\text{вт/м}^2$ , а  $E$  —  $\text{в/м}$ ). Используя формулу для джоулева тепла  $Q = V^2/R$ , убеждаемся, что величина  $\epsilon_0 c$  имеет размерность обратного сопротивления (проводимости). Численное значение  $1/\epsilon_0 c = 377 \text{ ом}$ .
- 32.8.** Пока размер частицы  $R$  меньше длины волны  $\lambda$ , все рассеивающие атомы излучают с близкими фазами, а интенсивность рассеянного света и сечение рассеяния примерно пропорциональны  $N^2$  ( $N$  — число атомов в частице) т. е.

$$\sigma \sim N^2 \sim R^6.$$

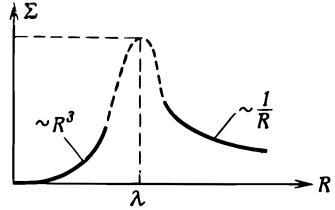
Тогда сечение рассеяния *единицей массы*  $\Sigma = \sigma n \sim R^3$  ( $n \sim 1/R^3$  — число частиц в единице массы). При  $R > \lambda$  ситуация меняется — внутрь непрозрачной частицы больших размеров свет не проникает, он рассеивается и поглощается лишь атомами, расположенными на поверхности. В этом случае суммарное сечение поглощения и рассеяния примерно равно поперечному сечению частицы:  $\sigma = \pi R^2$ , а  $\Sigma \sim 1/R$ . Такой случай схематически показан на рисунке. Значит, эффективность рассеяния единицей массы достигает максимума при-

мерно при  $R = \lambda$  и при этом  $\sigma \approx \pi\lambda^2$ . Для оценки можно воспользоваться этим приближенным соотношением. По условиям задачи  $N_1\sigma x = \ln 100$ , где  $N_1$  — число частиц в единице объема, а  $x$  — расстояние до звезды. Искомая масса на единицу площади дается выражением

$$M = N_1 x m = \frac{m \ln 100}{\sigma},$$

где  $m$  — масса одной частицы. Подставляя сюда  $m = (\frac{4}{3})\pi\lambda^3\rho$ ,  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$  (плотность льда) и  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$  (видимый свет), получаем

$$M = 3 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^2.$$



- 32.9. а) Сечение рассеяния определяется как отношение полной энергии, излучаемой рассеивающим телом в 1 сек, к энергии луча, излучаемой радиолокационной станцией и падающей на 1 м<sup>2</sup> рассеивающего тела в 1 сек. Все электроны проволоки вследствие ее малой длины можно считать колеблющимися в фазе; тогда можно воспользоваться результатами задачи 29.6, где было получено выражение для поля излучения на больших расстояниях  $r$  от проволоки под углом  $\theta$  к ее оси. Перепишем полученное там выражение в обозначениях данной задачи:

$$E = -q_e \frac{N\chi E_{\parallel} \omega^2}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \Phi_0 \right] \sin \theta.$$

Интенсивность излучения  $S = \epsilon_0 (E^2)$ . Интегрируя ее по сфере радиусом  $r$  (см. § 2 гл. 32 «Лекций», вып. 3, стр. 106) и подставляя затем среднее по времени значение квадрата косинуса, равное 0,5, получаем среднюю энергию, излучаемую по всем направлениям:

$$P = \frac{N^2 \chi^2 \omega^4 q_e^2 E_{\parallel}^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Относя ее к среднему потоку энергии в радиолокационном луче  $P_{\rho} = \epsilon_0 c E_0^2 / 2$ , получаем выражение для сечения:

$$\sigma = \frac{N^2 \chi^2 \omega^4 q_e^2}{6\pi\epsilon_0^2 c^4} \left( \frac{E_{\parallel}}{E_0} \right)^2.$$

- б) Мы имеем

$$E_{\parallel} = E_0 \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол между проволокой и направлением падающей волны. В этом случае

$$\alpha \sim \cos^2 \theta.$$

## К главе 33. Поляризация

- 33.1. Если начальный пучок неполяризован, то при начальной амплитуде  $A_0$  амплитуда волны после прохождения последовательных поляроидов становится равной  $A_0/\sqrt{2}$ ,  $A_0 \cos \theta/\sqrt{2}$  и  $A_0 \cos \theta \sin \theta/\sqrt{2}$  соответственно. Поэтому окончательная интенсивность

$$I = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\theta.$$

- 33.2. Выберем ось  $x$  вдоль оси первого поляроида и примем амплитуду неполяризованного светового пучка за единицу. Тогда после прохождения первого поляроида для составляющих амплитуд по осям имеем

$$A_x^{(1)} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad A_y^{(2)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

После прохождения второго поляроида

$$A_x = \left( \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) \alpha,$$

$$A_y = \left( \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \cos \theta \right) \varepsilon.$$

Окончательная интенсивность прошедшего света

$$I = I_0 (A_x^2 + A_y^2) =$$

$$= I_0 \left[ \frac{1}{2} (\alpha^4 + \varepsilon^4) \cos^2 \theta + \alpha^2 \varepsilon^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \varepsilon^2) \alpha \varepsilon \sin (2\theta) \right].$$

- 33.3. При падении света под углом Брюстера прошедший и отраженный лучи взаимно перпендикулярны, т. е.  $\sin r = \cos i$ . Следовательно,

$$\frac{\sin i}{\sin r} \equiv n = \frac{\sin i}{\cos i} = \operatorname{tg} i,$$

что и требовалось доказать.

- 33.4. Из решения задачи 29.4 следует, что в случае (а) излучение поляризовано по кругу, а в случае (б) оно линейно поляризовано в плоскости орбиты. Там же были получены формулы для интенсивности,

- 33.5. Сдвиг фаз вычисляется по формуле

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d,$$

где  $d$  — расстояние, пройденное светом. Полагая  $\varphi = \pi/2$  и производя вычисления, находим

$$d = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

- 33.6. Используя формулы Френеля для интенсивности отраженных волн с различными поляризациями, получаем для неполяризованного света

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} (|b|^2 + |B|^2) = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}$$

( $i = 80^\circ$  по условию задачи). Зная коэффициент преломления воды  $n = 1,66$ , находим  $r = 48^\circ$ . Для этих численных значений  $I/I_0 = 35\%$ . При  $r = 90^\circ$ , т. е. для касательных лучей полученное выражение дает  $I/I_0 = 1$ .

- 33.7. а) Доля отраженного света при нормальном падении на поверхность равна

$$\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} = 17\%.$$

б) Угол Брюстера  $\varphi = \text{arctg } n = 67,5^\circ$ .

- 33.8. Рассмотрим общий случай, когда плоскость поляризации падающего света с амплитудой  $A$  образует с осью угол  $\theta$ . Тогда амплитуда обыкновенной компоненты  $A_o = A \cos \theta$ , а необыкновенной  $A_e = A \sin \theta$ . Сдвиг фаз между компонентами на выходе равен

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 0,01 \cdot 1,67 \cdot 10^{-2}}{4,1 \cdot 10^{-4}} \approx 0,8\pi.$$

Таким образом, вектор амплитуды вышедшей волны можно записать в виде

$$\mathbf{A} = iA_o \cos \omega t + kA_e \cos(\omega t - 0,8\pi)$$

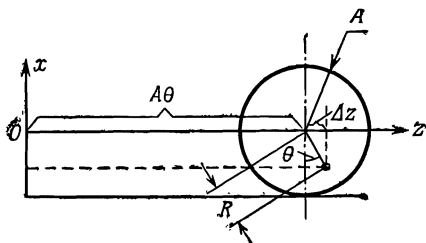
— эллиптически поляризованный свет (см. «Лекции», фиг. 33.2, вып. 3, стр. 119).

- 33.9. Оценить показатель преломления можно, отражая от обсидиановой пластинки свет, поляризованный в плоскости падения, и меняя угол падения. Резкий спад интенсивности отраженного света будет замечен, когда угол падения станет равным углу Брюстера для обсидиана, а тангенс этого угла как раз равен показателю преломления (см. «Лекции», гл. 33, вып. 3, стр. 126).

### К главе 34. Релятивистские явления в излучении

- 34.1. Смещение точки по вертикали равно  $x = -R \cos \theta$  (см. рисунок). Горизонтальное смещение складывается из смещения, вызванного поступательным движением и равного  $A\theta$  (диск катится без скольжения), и смещения  $\Delta z = R \sin \theta$  в результате вращательного движения. Таким образом,

$$z = A\theta + R \sin \theta.$$



Искомое ускорение находим двукратным дифференцированием  $x$  по  $t_2$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dx}{d\theta} / \frac{dt}{d\theta}.$$

Найдем  $dx/d\theta$  и  $dt/d\theta$ :

$$\frac{dx}{d\theta} = R \sin \theta, \quad \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{c} \frac{dz}{d\theta} \frac{A + R \cos \theta}{c}.$$

Аналогично

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left( \frac{d}{d\theta} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right) / \frac{dt}{d\theta} = c^2 \frac{AR \cos \theta + R^2}{(A + R \cos \theta)^3}.$$

- 34.2. В полученном в предыдущей задаче выражении для ускорения заменим  $R \cos \theta$  на  $-x$ , а  $A$  на  $cR/v$ . В результате имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{c^2 x (1 - vR/xc)}{R^2 (1 - vx/cR)^3}.$$

- 34.3. Интенсивность излучения пропорциональна квадрату поля, а оно в свою очередь пропорционально «запаздывающему» ускорению частицы. Это ускорение фактически вычислено в предыдущей задаче (см. § 2 гл. 34 «Лекций», вып. 3). Полагая  $x = R$  и скорости равными  $+v$  и  $-v$ , получаем

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \left| \frac{d^2x}{dt^2}(v) / \frac{d^2x}{dt^2}(-v) \right|^2 = \left( 1 + \frac{v}{c} \right)^4 / \left( 1 - \frac{v}{c} \right)^4.$$

- 34.4. Выберем ось  $x$  неподвижной системы координат по направлению движения Земли, а ось  $y$  — по направлению луча (предполагая, что оно перпендикулярно оси  $x$ ). Оси движущейся системы координат, связанной с Землей, обозначим  $x'$  и  $y'$  соответственно, направив их параллельно осям  $x$  и  $y$ . Проекции волнового вектора света звезды в неподвижной системе по условию равны  $k_x = 0$ ,  $k_y = \omega/c$ . Скорость движущейся системы относительно неподвижной равна  $v$ . Согласно преобразованию Лоренца,

$$k_{x'} = \frac{k_x + \omega v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad k_{y'} = k.$$

Следовательно, в системе координат, связанной с Землей, волновой вектор образует с осью  $y$  угол, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_{x'}}{k_{y'}} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

отсюда получаем для угла aberrации  $\sin \theta = v/c$ .

- 34.5. Масса покоя электрона  $m_e = 0,5 \text{ Мэв} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Гэв}$ . Следовательно, при энергии  $1 \text{ Гэв}$  значение  $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/2000$ . Отсюда  $(c - v)/c \approx (1/8) \cdot 10^{-6}$ .

- 34.6. Звезда приближается со скоростью примерно  $500 \text{ км/сек}$ .

- 34.7. Ответ:  $600 \text{ мкм}$ .

- 34.8. Непосредственное наблюдение aberrации позволяет вычислить скорость Земли по орбите из соотношения  $\operatorname{tg} \varphi = v/c$  ( $\varphi$  — угол aberrации). Отсюда  $v = \operatorname{ctg} \varphi = 30 \text{ км/сек}$ . Приравняв центробежную силу силе солнечного притяжения, получим

$$G = \frac{m_3 m_C}{R^2} = \frac{v^2}{R} m_3.$$

Масса Земли  $m_3$  сокращается. Подставляя значения солнечной массы и гравитационной постоянной  $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}$ , получаем

$$R = \frac{G m_C}{v^2} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ км.}$$

- 34.9. а) Сила гравитационного притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца. Сила светового давления пропорциональна импульсу, переданному частице за единицу времени поглощенным излучением, а импульс в свою очередь — энергии излучения на единицу площади, т. е. интенсивности ( $\sim L^{-2}$ ). Таким образом, силы светового давления и притяжения одинаково зависят от  $L$ , и их отношение, следовательно, постоянно.
- б) Если обозначить интенсивность солнечного излучения через  $W$ , то сила светового давления, т. е. импульс, переданный в единицу времени, равен

$$F = \frac{dP}{dt} = Wc\pi R^2.$$

Приравнивая эту величину силе притяжения

$$F_g = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho v^2}{L},$$

где  $L$  — радиус земной орбиты, а  $v$  — скорость движения Земли по ней, вычисленные в предыдущей задаче, получаем

$$R = \frac{3}{4} \frac{WcL}{\rho v^2} = \frac{0,6}{\rho} \text{ мк},$$

если выражать  $\rho$  в  $\text{г}/\text{см}^3$ .

### К главе 38. Соотношения между волновой и корпускулярной точками зрения

- 38.1. В § 3 гл. 32 «Лекций» (вып. 3, стр. 109) при классическом рассмотрении были получены выражения для ширины спектральной линии

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c \Delta\omega}{\omega^2} = \frac{\lambda}{Q}$$

и для «времени жизни» возбужденного состояния свободного атома (времени, в течение которого энергия убывает в  $e$  раз за счет излучения)

$$\Delta T = \frac{Q}{\omega}$$

(здесь  $Q$  — классическая величина радиационного затухания). Если записать энергию возбужденного состояния в соответствии с квантовыми представлениями как  $E = \hbar\omega$ , то с помощью вышеприведенных соотношений получаем квантовое соотношение неопределенностей для энергии и времени:

$$\Delta E \cdot \Delta T = \hbar \Delta\omega \cdot \Delta T = \frac{\hbar\lambda\omega^2}{2\pi c Q} \cdot \frac{Q}{\omega} = \hbar.$$

Заметим далее, что «неопределенность положения» фотона  $\Delta x$  есть по смыслу длина отвечающего ему волнового пакета, равная  $c\Delta T$ .



Неопределенность импульса  $\Delta p$  связана с шириной спектральной линии  $\Delta\lambda$  и равна  $\Delta p = (\hbar/\lambda^2)\Delta\lambda$  (поскольку  $p = \hbar/\lambda$ ). Таким образом,

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar \frac{c \Delta T \Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{\hbar}{\pi} = \hbar.$$

- 38.2. В задачу об определении радиуса электронной орбиты входят следующие константы: постоянная Планка  $\hbar$ , масса электрона  $m$  и константа, характеризующая силу притяжения между электроном и протоном; в качестве такой величины возьмем  $e^2$  ( $e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$ ). Размерности этих констант соответственно: энергия  $\times$  время, масса, энергия  $\times$  длина. Вспоминая размерность энергии, нетрудно убедиться, что единственной комбинацией этих констант, имеющей размерность длины, является  $\hbar^2/m_e^2 = a_0$ . Это и есть боровский радиус. Используя соотношение неопределенностей  $\Delta p \cdot \Delta x = \hbar$  и считая, что точность локализации электрона в атоме  $\Delta x \approx a_0$ , получаем  $\Delta p \approx \hbar/a_0$ . Кинетическая энергия, соответствующая такому импульсу,

$$\Delta E = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{a_0^2 2m} = \frac{\hbar^2 m^2 e^4}{\hbar^4 2m} \approx 20 \text{ эв.}$$

Эта энергия по порядку величины равна искомой энергии ионизации.

- 38.3. Частоты  $\omega_i$ , соответствующие трем перечисленным линиям с длинами волн  $\lambda_i$ , равны  $\omega_i = 2\pi c/\lambda_i$ . Согласно комбинационному принципу Ритца (см. § 5 гл. 38 «Лекций», вып. 3, стр. 234), из этих трех частот можно скомбинировать другие, равные разностям или суммам исходных. Поскольку исходные линии соответствуют ультрафиолетовой области, а искомые — видимой и инфракрасной областям, то частоты искомым линий должны быть меньше исходных, следовательно, их разностями. Соответствующие длины волн удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_k} \quad (\lambda_k > \lambda_i)$$

и равны 4860, 6560 и 18 800 Å.

К главе 39. Кинетическая теория газов

39.1.

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad \text{и} \quad TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const.}$$

39.2. Процесс сжатия воздуха можно считать адиабатическим. Следовательно, используя результат предыдущей задачи, можно написать соотношение

$$T_1 P_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2 P_2^{(1-\gamma)/\gamma},$$

где индексами 1 и 2 помечены температура и давление воздуха до и после сжатия. Из этого соотношения следует

$$T_2 = T_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 145^\circ \text{C.}$$

- 39.3. а) В первом процессе газ, расширяясь, не совершает никакой работы. Следовательно, его энергия, а потому и температура остаются постоянными, т. е.  $T = T_0$ . Так как  $V = 2V_0$ , из закона идеального газа следует, что  $P = P_0/2$ .
- б) Во втором процессе (адиабатическом) газ совершает работу. Для гелия  $\gamma = 5/3$ . Следовательно, в конечном состоянии

$$P = P_0 \cdot 2^{-5/3}, \quad T = T_0 \cdot 2^{-2/3}, \quad V = 2V_0,$$

где  $P_0$ ,  $V_0$ ,  $T_0$  — давление, объем и температура газа гелия в исходном состоянии.

- 39.4. а) Рассмотрим два горизонтальных сечения цилиндра: на высотах  $h$  и  $h + dh$ . Разность давлений на этих высотах равна весу жидкости или газа в столбике высотой  $dh$  и единичной площадью, взятому с противоположным знаком (ясно, что давление уменьшается с высотой):

$$dP = P(h + dh) - P(h) = -\rho(h) g dh.$$

Отсюда и следует искомое уравнение.

- б) Плотность воздуха связана с давлением и температурой соотношением

$$\rho(h) = \frac{\mu P(h)}{TR},$$

которое следует из закона идеального газа  $PV = NkT$ . Следовательно, получаем уравнение

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{\mu g P}{RT}.$$

Интегрируя, находим  $P = P_0 \exp(-\mu gh/RT)$ , где  $P_0$  — давление у поверхности Земли, т. е. при  $h = 0$ .

- 39.5. а) Поскольку для адиабатической атмосферы справедливо соотношение  $P\rho^{-\gamma} = P_0\rho_0^{-\gamma}$ , где  $P_0$  и  $\rho_0$  — давление и плотность атмосферы на поверхности Земли, то, согласно решению задачи 39.1, справедливо и соотношение

$$TP^{1-\gamma/\gamma} = T_0 P_0^{(1-\gamma)/\gamma},$$

откуда

$$T = T_0 \left( \frac{P}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Дифференцируя левую и правую части этого соотношения по высоте и учитывая уравнение  $dP/dh = -\rho(h)g$  (см. решение задачи 35.4), находим

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{T_0 \rho_0}{P_0} g \frac{(\gamma-1)}{\gamma}.$$

Согласно закону идеального газа,  $\rho_0 T_0 / P_0 = \mu / R$ , где  $\mu$  — молекулярный вес,  $R$  — газовая постоянная. Таким образом, окончательно находим

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\mu g (\gamma-1)}{R\gamma}.$$

Так как для воздуха  $\mu = 29$ ,  $\gamma = 1,4$ , то  $dT/dh = 9,75$  К/км.

- б) Атмосфера может находиться в механическом равновесии (в ней не будет происходить макроскопических движений), не находясь при этом в тепловом равновесии. Зависимость давления газа от высоты, найденная в п. (а) решения задачи 39.4, являющаяся условием механического равновесия, может иметь место и при непостоянной температуре в атмосфере. В связи с этим возникает вопрос, при каких же условиях такое равновесие будет устойчивым?

Если условие устойчивости не выполняется, в атмосфере возникнут течения, стремящиеся перемешать газ атмосферы и выровнять ее температуру, т. е. возникает так называемая конвекция. Чтобы выяснить условие устойчивости атмосферы, предположим, что два элемента газа (оба единичной массы), находившиеся на разных высотах (разность высот  $\Delta h$ ), поменялись местами. Если при этом энергия системы уменьшится, это значит, что такой обмен выгоден и первоначальное распределение неустойчиво. Напротив, если энергия системы в целом увеличится, первоначальное распределение устойчиво. Переходя к вычислению энергии, заметим, во-первых, что потенциальная энергия, обусловленная силой тяжести, не меняется — обмениваются местами элементы одинаковой массы. Далее, при обмене местами элементов совершается работа, равная  $P\Delta V$ ,  $\Delta V$  — разность объемов элементов газа. Эта работа идет на изменение энергии газа, окружающего выделенные нами элементы. Кроме того, за счет разности температур меняется

и энергия самих выделенных элементов  $U$ , и, следовательно, полное изменение энергии равно

$$\Delta U + P \Delta V.$$

Таким образом, условие устойчивости атмосферы можно записать в виде

$$\frac{dU}{dh} + P \frac{dV}{dh} > 0,$$

или, если воспользоваться формулой  $U = PV/(\gamma - 1)$ ,

$$\frac{V}{(\gamma - 1)} \frac{dP}{dh} + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} P \frac{dV}{dh} \geq 0.$$

Используя далее закон идеального газа  $V = RT/\mu P$ , получаем

$$P \frac{dV}{dh} = \frac{R}{\mu} \frac{dT}{dh} - V \frac{dP}{dh}.$$

Подставляя последнее соотношение в левую часть приведенного выше неравенства и учитывая тот факт, что  $dP/dh = -\rho g$ , находим

$$\frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{R}{\mu} \frac{dT}{dh} + V \rho g \geq 0.$$

Отсюда следует условие устойчивости атмосферы относительно конвекции:

$$\frac{dT}{dh} \geq - \frac{V \rho g \mu}{R} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} = - \frac{\mu g (\gamma - 1)}{R \gamma}.$$

- 39.6. Работа, затрачиваемая при изотермическом процессе на сжатие от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ , равна

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = - NkT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = P_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = 10^5 \text{ Дж}.$$

- 39.7. При адиабатическом сжатии идеального газа выполняется соотношение  $PV^\gamma = \text{const}$ . Следовательно,

$$P_A = P_0 \cdot 2^{3/2}, \quad P_B = P_0 \cdot 2^{1/2}.$$

- 39.8. Работу, необходимую для адиабатического сжатия, легко найти, если учесть, что  $P_0 V_0^\gamma = P V^\gamma$ :

$$R = - \int_{V_0}^{V_0/2} P dV = - P_0 V_0^\gamma \int_{V_0}^{V_0/2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} [2^{(\gamma-1)} - 1].$$

Поэтому

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{(\gamma_B - 1)}{(\gamma_A - 1)} \frac{(2^{(\gamma_A - 1)} - 1)}{(2^{(\gamma_B - 1)} - 1)} = 1,13.$$

39.9. Для конечного состояния системы можно написать уравнения

$$PV_1 = N_1 k T_1 \quad \text{и} \quad PV_2 = N_2 k T_2 = (N - N_1) k T_2,$$

где  $N$  — полное число молекул газа. Число  $N$  нетрудно найти, если написать уравнение идеального газа для исходного состояния системы:  $N = P_0(V_1 + V_2)/kT_0$ , где  $P_0$  и  $T_0$  — начальное давление и температура системы. Подставляя во второе из написанных уравнений выражение для  $N_1$ , полученное из первого уравнения  $N_1 = PV_1/kT_1$ , сразу находим

$$P = P_0 \frac{T_2}{T_0} \frac{(V_1 + V_2)}{[V_2 + (T_2/T_1) V_1]} = 842 \text{ мм рт. ст.}$$

39.10. Обозначим через  $P_1$ ,  $N_1$  и  $P_2$ ,  $N_2$  давления и числа молекул в большом и малом резервуарах после нагрева до температуры  $T = 162^\circ \text{C} = 435 \text{ К}$ . По условию задачи  $P_1 - P_2 = P_0 = 800 \text{ мм рт. ст.}$  Обозначим через  $N$  полное число молекул газа. Очевидно,  $N = N_1 + N_2 = PV_1/kT_0$ , где  $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$  — атмосферное давление,  $T_0 = 17^\circ \text{C} = 290 \text{ К}$  — начальная температура. Для конечного состояния можно написать два уравнения:

$$(P_0 + P_2) V_1 = N_1 k T$$

и

$$P_2 V_2 = N_2 k T = (N - N_1) k T = N k T - N_1 k T.$$

Решая эту систему уравнений относительно  $P_2$ , находим

$$P_2 = \frac{N k T - P_0 V_1}{V_1 + V_2} = \frac{V_1}{(V_1 + V_2)} \left( P \frac{T}{T_0} - P_0 \right) = 200 \text{ мм рт. ст.}$$

39.11. Обозначим через  $N$  начальное число молекул четырехоксида азота. Так как молекулярный вес  $\text{N}_2\text{O}_4$  равен 92, очевидно, что  $N = 0,9 N_0/92$ . Число молекул в сосуде после испарения и диссоциации равно  $PV/kT$ . Пусть доля диссоциировавших молекул составляет  $x$ , т. е. в сосуде имеется  $2xN$  молекул  $\text{NO}_2$  и  $(1-x)N$  молекул  $\text{N}_2\text{O}_4$ . Отсюда

$$2xN + (1-x)N = PV/kT,$$

и

$$x = \frac{PV}{NkT} - 1.$$

Подставляя численные значения, находим, что доля диссоциировавших молекул  $\text{N}_2\text{O}_4$  составляет около 13%.

39.12. Тепло  $Q = 8,31 \text{ вт} \cdot \text{ч}$ , сообщенное телу при постоянном давлении, можно представить в виде

$$Q = \frac{5}{2} R (T_2 - T_1).$$

Следовательно,

$$а) \quad T_2 = T_1 + \frac{2Q}{5R} = 1740 \text{ К}.$$

б) В конечном состоянии газа  $P_1 V_2 = R T_2$ . Учитывая, что в начальном состоянии  $P_1 V_1 = R T_1$ , находим  $V_2/V_1 = T_2/T_1 = 5,8$ . Работа, совершенная газом, равна

$$W = P_1 (V_2 - V_1) = R (T_2 - T_1) = \frac{2}{5} Q = 3,32 \text{ вт} \cdot \text{ч}.$$

Энергия газа равна

$$U = \frac{3}{2} RT_2 = 21\,700 \text{ дж.}$$

### К главе 40. Принципы статистической механики

40.1. Пусть в единицу времени о каждую сторону крылышка ударяется  $\nu$  молекул. После удара о зачерненную сторону молекула уносит энергию  $\Delta\epsilon$ , которую следует определить из условия  $\Pi = \Delta\epsilon \cdot \nu$ . Если через  $\bar{v}$  обозначить среднюю скорость молекул газа, то уносимый молекулами импульс  $\Delta p$  связан с  $\Delta\epsilon$  простым соотношением

$$\Delta\epsilon = \frac{\bar{p} \Delta p}{m} = \bar{v} \Delta p.$$

Разность сил, действующих на рассматриваемое крылышко, равна изменению импульса крылышка за единицу времени. Следовательно,  $F = \Delta p \cdot \nu = \Pi / \bar{v}$ . Разумеется, при строгом решении задачи следовало бы учесть, что изотропно отскакивающие молекулы уносят различные значения импульса, так как они вылетают под разными углами с поверхности. Однако при этом мы получили бы численный коэффициент, который был бы порядка единицы. Столь же нестрого определим среднюю скорость молекул как скорость, удовлетворяющую соотношению:  $m\bar{v}^2/2 = \bar{\epsilon} = 3kT/2$ , т. е.  $\bar{v} = \sqrt{3kT/m}$ .

Окончательно находим

$$F \approx \frac{\Pi}{\sqrt{3kT/m}}.$$

40.2. Пусть поверхность сосуда совпадает с плоскостью  $yz$ , а ось  $x$  перпендикулярна ей. Тогда число частиц в единице объема  $dn_{v_x}$ , проекции скоростей которых на ось  $x$  заключены в интервале  $v_x$ ,  $v_x + dv_x$ , дается выражением

$$dn_{v_x} = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x,$$

где  $n_0$  — число частиц газа в единице объема. Ясно, что из этих частиц только те достигнут за единицу времени поверхности сосуда, т. е. плоскости  $yz$ , которые расположены от нее не далее расстояния, численно равного  $v_x$ , т. е. их число равно

$$v_x n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x.$$

Следовательно, полное число частиц, которые за единицу времени достигнут поверхности сосуда, равно

$$\nu = \int_0^{\infty} n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} v_x e^{-mv_x^2/2kT} dv_x = \frac{n_0 \bar{v}}{4},$$

где  $\bar{v} = (8kT/\pi m)^{1/2}$  — средняя тепловая скорость молекулы газа.

Скорость  $\bar{v}$  дается распределением Максвелла:

$$\bar{v} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2kT} dv.$$

Следовательно, можно записать

$$v = n_0 \pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2kT} dv.$$

Перейдем в получившемся интеграле к новой переменной  $\epsilon = mv^2/2$  — энергии частиц:

$$v = \frac{2n_0\pi}{m^2} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \epsilon e^{-\epsilon/kT} d\epsilon.$$

Из последнего выражения видно, что величину

$$dv_{\epsilon} = n_0 \frac{2\pi}{m^2} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \epsilon e^{-\epsilon/kT} d\epsilon$$

можно интерпретировать как число молекул, которые достигают единичной площадки поверхности сосуда в единицу времени, если их энергия заключена в пределах  $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$ .

а) Используя последний результат, находим, что число молекул, достигших единичной площадки поверхности сосуда с энергией больше тепловой, т. е. с  $\epsilon > \bar{\epsilon} = (3/2) kT$ , равно

$$\frac{2\pi n_0}{m^2} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{(3/2)kT}^{\infty} \epsilon e^{-\epsilon/kT} d\epsilon = \frac{\bar{v} n_0}{4} \frac{5}{2} e^{-3/2}.$$

Следовательно, искомая доля молекул равна  $(5/2) \exp(-1,5) = 0,55$ .  
 б)  $(11/2) \exp(-4,5) = 0,061$ .

40.3. Теплоемкость при постоянном объеме определяется как производная от внутренней энергии газа по температуре:  $C_V = dU/dT$ .

а) Так как внутренняя энергия 1 моля одноатомного газа равна  $U = (3/2) RT$ , то  $C_V = (3/2) R = 12,4 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$ .

б) Для двухатомного газа  $U = (7/2) RT$  и  $C_V = (7/2) R = 29,1 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$ .

40.4. Законы сохранения массы, импульса и энергии требуют, чтобы потоки этих величин слева и справа от сетки равнялись друг другу (с учетом выделяемого сеткой тепла).

Проще всего записать закон сохранения массы. Если  $j$  — плотность потока массы, то величина  $jA$  равна массе газа, проходящей через поперечное сечение трубы в единицу времени. Пусть  $\rho$  и  $\rho'$  — плотности газа перед и за сеткой. Согласно закону сохранения массы,

$$j = \rho v = \rho' v'.$$

Найдем далее выражение для потока импульса. В газе, который как целое покоится, плотность потока импульса, очевидно, равна

$$nm \langle v_x^2 \rangle,$$

где  $n$  — число молекул газа в единице объема, а скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по максвелловскому распределению скоростей. Действительно, импульс одной молекулы в направлении к сетке (выберем его за направление оси  $x$ ) равен  $mv_x$ , а поток импульса  $mv_x^2$ . Если умножить  $mv_x^2$  на  $n$ , то получаемая при этом величина равна плотности потока импульса в направлении оси  $x$ , обусловленного всеми частицами, компонента скорости которых равна  $v_x$ . Поскольку в газе частицы распределены по скоростям, величину  $\rho v_x^2$  ( $\rho = mn$ ) следует усреднить. При этом получаем естественный результат: плотность потока импульса равна  $P$  — давлению газа [см. § 2 гл. 39 «Лекций», формула (39.5), вып. 4, стр. 244]. Если же газ как целое движется со скоростью  $v$  в направлении оси  $x$ , то простое обобщение формулы для плотности потока импульса приводит к выражению

$$\rho \langle (v_x + v)^2 \rangle = P + \rho v^2 = P + jv.$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что  $\langle v_x \rangle = 0$ .

Учтем далее, что на выходе из трубы газ приобретает давление окружающего воздуха. Тогда закон сохранения импульса можно записать в виде

$$A j v' = A j v - F$$

где  $F$  — сила тяги: в соответствии с третьим законом Ньютона величина  $-F$  есть импульс, переданный газу в единицу времени. Таким образом,

$$F = A j (v - v').$$

Запишем теперь закон сохранения энергии. Для этого, рассуждая по аналогии, найдем выражение для плотности потока энергии:

$$\begin{aligned} \rho \left\langle \left[ \frac{(v_x + v)^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2} \right] (v_x + v) \right\rangle &= \\ = \frac{\rho}{2} \langle (v_x + v)^3 \rangle + \frac{\rho}{2} \langle (v_y^2 + v_z^2) v_x \rangle + \frac{\rho v}{2} \langle v_y^2 + v_z^2 \rangle. \end{aligned}$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} \langle (v_y^2 + v_z^2) v_x \rangle &= 0, \quad \langle v_x^3 \rangle = 0, \\ \langle (v_y^2 + v_z^2) \rangle &= 2 \langle v_x^2 \rangle, \end{aligned}$$

имеем

$$\frac{3\rho v}{2} \langle v_x^2 \rangle + \frac{\rho v^3}{2} + \rho v \langle v_x^2 \rangle = \left( \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) j.$$

Внимательно взглядевшись в наши выкладки, мы видим, что слагаемое  $(3/2)P/\rho$  есть не что иное, как  $U$  — энергия единицы массы газа, который как целое покоится. Как отмечалось в «Лекциях», множитель  $3/2$  появляется лишь в рассматривавшемся выше случае одноатомного газа. В общем случае его нужно заменить на  $1/(\gamma - 1)$ , где  $\gamma$  — газовая постоянная. Если это сделать, то закон сохранения энергии в данной задаче с учетом того, что сетка не оказывает сопротивления потоку газа, запишется в виде

$$\left[ \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{v^2}{2} \right] j + \frac{q}{A} = \left[ \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho'} + \frac{v'^2}{2} \right] j'.$$



Используя записанный выше закон сохранения массы и вводя обозначение  $\gamma P/\rho = \gamma PT/\mu = c_s^2$ , где  $c_s$  — скорость звука, из закона сохранения энергии получаем квадратное уравнение для  $v'$ :

$$\frac{2c_s^2}{(\gamma - 1)v} (v' - v) + v'^2 - v^2 - \frac{2q}{jA} = 0.$$

Решая его, находим

$$a) \quad v' = \sqrt{\left(v + \frac{c_s^2}{(\gamma - 1)v}\right)^2 + \frac{2q}{jA}} - \frac{c_s^2}{(\gamma - 1)v}.$$

б) Из закона идеального газа имеем  $T'/T = \rho/\rho' = v'/v$  и, следовательно,

$$T' = T \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{c_s^2}{(\gamma - 1)v^2}\right)^2 + \frac{2q}{jAv^2}} - \frac{c_s^2}{(\gamma - 1)v^2} \right].$$

в) Сила тяги, развиваемая такой трубой, очевидно, равна

$$F = Aj(v - v') = -Aj \left[ \sqrt{\left(v + \frac{c_s^2}{(\gamma - 1)v}\right)^2 + \frac{2q}{jA}} - \left(v + \frac{c_s^2}{(\gamma - 1)v}\right) \right].$$

40.5. Основной характеристикой, определяющей достоинства двигателя, является его к. п. д. Он равен отношению полезной мощности, развиваемой двигателем, к скорости полных энергетических затрат. Если реактивный двигатель развивает силу тяги  $F$ , а скорость полета  $v$ , то, очевидно, полезная мощность, развиваемая им, равна  $Fv$ . С другой стороны, полная затраченная в единицу времени энергия равна  $q = GH$ , где  $G$  — расход горючего в единицу времени, а  $H$  — теплотворная способность горючего. Если для силы тяги воспользоваться выражением, полученным в задаче 40.4, то

$$\begin{aligned} \text{К. п. д.} &= \frac{Fv}{q} = \\ &= \frac{Ajv^2}{q(\gamma + 1)} \left[ \left(\frac{c_s^2}{v^2} - 1\right) - \sqrt{\left(\frac{c_s^2}{v^2} - 1\right)^2 - \frac{2(\gamma^2 - 1)q}{jAv^2}} \right]. \end{aligned}$$

При достаточно малых скоростях и величинах  $q$  можно разложить подкоренное выражение по  $q$ . При этом оказывается, что к. п. д. двигателя не зависит от  $q$  и определяется только скоростью полета:

$$\text{К. п. д.} \approx \frac{v^2(\gamma - 1)}{c^2}.$$

Так как, согласно условию задачи  $\gamma = 9/7$  и, кроме того, при нормальных условиях  $c = 340$  м/сек, то, принимая скорость  $v$  равной обычной крейсерской скорости полета реактивных самолетов, т. е. примерно 800 км/час, находим к. п. д.  $\approx 12\%$ .

$$40.6. \quad б) \quad y_m = e^{-1} = 0,368.$$

$$40.7. \quad h_{\oplus} = 8,8 \text{ км}, \quad h_{\ominus} = 113 \text{ км}.$$

### К главе 41. Броуновское движение

- 41.1. а)  $T = 11\,600$  К.  
 б)  $kT = 0,025$  эв.  
 в)  $\lambda = 12\,395 \cdot 10^{-8}$  см = 1,24 мкм.

41.2. а) 
$$I = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \sim T^4.$$

- б) Для новой переменной  $x = \hbar\omega/kT$  условие  $dI/d\omega = 0$  записывается следующим образом:  $x = 3[1 - \exp(-x)]$ . Численное решение этого уравнения дает  $x_m = 2,822$ . Следовательно,  $\omega_m = 2,822 kT/\hbar \sim T$ .

- 41.3. Из условия задачи 41.2 находим

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\exp(\hbar\omega/kT_1) - 1}{\exp(\hbar\omega/kT_2) - 1}.$$

Так как заданная длина волны отвечает  $\hbar\omega/k = 4,64 \cdot 10^4$  К, то

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \exp\left[\frac{\hbar\omega}{k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = e^{11,6}.$$

### К главе 42. Применения кинетической теории

- 42.1. 1 эв/атом = 96 520 дж/г·моль.

- 42.3.  $\Delta n/n = (W/kT)(\Delta W/W)$ , где  $\Delta W/W = 3\%$  — относительная ошибка в определении теплоты возгонки. Следовательно, ошибка при расчете плотности паров ртути в  $W/kT = 2,4$  раз больше, т. е.  $\sim 7\%$ .

- 42.4. При температурах  $T < 300^\circ\text{C}$  наличие свободных электронов в Si объясняется ионизацией примесных центров. При  $T > 300^\circ\text{C}$  наступает так называемая собственная проводимость: все примесные атомы уже ионизованы, а экспоненциальное уменьшение сопротивления связано с термическим отрывом электронов проводимости от атомов кремния. На этот отрыв требуется большая энергия, чем для отрыва электрона от примесного атома. В этом случае доля ионизованных атомов мала и из формулы (42.8) «Лекций» можно найти, что число электронов и ионизованных атомов одинаково и пропорционально  $\exp(-W/2kT)$ . Так как сопротивление обратно пропорционально числу свободных электронов, то  $\rho \sim \exp(W/2kT)$ . Используя график, приведенный в условии задачи, можно при  $T > 300^\circ\text{C}$  приближенно оценить  $W$  — энергию, необходимую для отрыва электрона от атома (она называется шириной запрещенной зоны для полупроводников). Определенная таким способом величина  $W$  оказывается приблизительно равной 1,2 эв, что хорошо согласуется с другими данными о ширине запрещенной зоны в Si.

### К главе 43. Диффузия

- 43.1. Длина свободного пробега равна  $l = 1/n\sigma_c$ . Если молекулы рассматривать как твердые шарики, то сечение столкновения  $\sigma_c = \pi d^2$ . Согласно закону идеального газа, число молекул в единице объема газа равно  $n = P/kT$ , где  $P$  — давление газа. Следовательно,

$l = kT/\pi Pd^2$ . Средняя скорость молекулы в идеальном газе  $\bar{v} = (8kT/\pi m)^{1/2}$ . Следовательно,  $\tau = l/\bar{v} = \sqrt{mkT}/\sqrt{8\pi Pd^2}$ . Отсюда при нормальных давлении и температуре для молекул кислорода ( $m = 5,35 \cdot 10^{-27}$  кг,  $n = 2,68 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>) имеем

$$l = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}, \quad \tau = 2 \cdot 10^{-10} \text{ сек.}$$

43.2. Вероятность того, что молекула пройдет путь  $L$  без столкновений, равна  $\exp(-L/l)$ . Из  $N$  молекул путь  $L$  пройдут без столкновения  $N \exp(-L/l)$  молекул. Если, как это дано в условии задачи,  $N \exp(-L/l) < 1/2$ , то  $L > l \ln(2N) \approx 56 l$ .

43.3. При решении задачи можно рассуждать так: для одной молекулы, на которую в среднем в газе приходится внутренняя энергия  $U = kT/(\gamma - 1)$  имеется 6 равноправных направлений движения. Поэтому через выделенную плоскость в одном направлении в среднем будет проходить поток энергии, равный  $Q_+ = (1/6)n\bar{v}U(-l)$ , а в противоположном — поток энергии  $Q_- = (1/6)n\bar{v}U(+l)$  ( $n$  — число молекул в единице объема,  $\bar{v}$  — средняя скорость молекулы в газе). Кроме того, мы считаем, что все молекулы, летящие к выделенной плоскости, испытывают последние столкновения на расстоянии  $l$  от площадки (и приобретают энергию, равную средней тепловой), а дальше движутся без столкновений.

Результирующий поток энергии через единицу поверхности плоскости равен (в отсутствие конвекции потоки  $n\bar{v}$  слева и справа одинаковы)

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{dE}{dt} &= Q = Q_+ - Q_- = \frac{1}{6} n\bar{v} [U(-l) - U(l)] = \\ &= \frac{n\bar{v}k}{6(\gamma - 1)} [T(-l) - T(l)] = -\frac{n\bar{v}k}{6(\gamma - 1)} \frac{dT}{dx} 2l \end{aligned}$$

(молекулы, находящиеся на расстояниях  $-l$  слева и  $+l$  справа от выделенной плоскости).

Из того факта, что  $(1/A)(dE/dt) = -\kappa(dT/dx)$ , следует

$$\kappa = \frac{n\bar{v}kl}{3(\gamma - 1)} = \frac{1}{3} C\bar{v}l,$$

где

$$C = \frac{nk}{(\gamma - 1)}$$

— теплоемкость единицы объема газа. Множитель  $1/3$  в формуле для  $\kappa$  (равно как и в формуле для коэффициента диффузии для газа [см. «Лекции», формула (43.27) вып. 4]) получен в результате приблизительного расчета и не заслуживает особого доверия. По этой причине он опущен в формуле (43.42) «Лекций» (вып. 4) и в условии задачи.

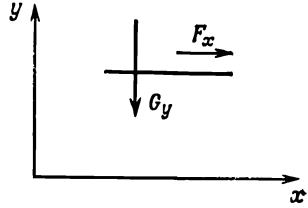
43.4. Будем рассуждать так же, как и при решении задачи 43.3, заменяя  $U$  на  $m v_x$  — импульс упорядоченного движения частиц газа. Поток импульса через площадку, перпендикулярную оси  $y$ , равен

$$G_y = \frac{1}{6} n\bar{v} [m v_x(-l) - m v_x(l)] = -\frac{1}{3} m n\bar{v} l \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Легко сообразить (см. рисунок), что на площадку будет действовать сила в направлении оси  $x$ , причем  $F_x = -G_y$ . Таким образом, в соответствии с нашим рассмотрением

$$\eta = \frac{1}{3} m n \bar{v} l.$$

По поводу коэффициента  $1/3$  см. замечания в решении 43.3.



- 43.5. Рассуждая так же, как и при решении задачи 43.3, найдем результирующий поток энергии между заданными поверхностями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{dE}{dt} = Q &= \frac{1}{6} n \bar{v} U(0) - \frac{1}{6} n \bar{v} U(d) = \\ &= \frac{1}{6} \frac{n \bar{v} k}{(\gamma - 1)} [T(0) - T(d)] = \frac{n \bar{v} k}{6(\gamma - 1)} \Delta T. \end{aligned}$$

Отличие этого результата от полученного в задаче 43.3 состоит в том, что в ответ не входит средняя длина свободного пробега. Если формально попытаться ввести «градиент температуры» следующим образом:  $\Delta T/d$ , то полученный результат отвечает замене  $2l$  на  $d$  в выражении для  $\eta$ , полученном в решении задачи 43.3.

Переносимый поток импульса между плоскостями, расположенными на расстоянии  $d \ll l$  друг от друга и скользящими относительно друг друга со скоростью  $\Delta v$ , найдем, используя подход, изложенный в решении задачи 43.4, заменив лишь  $2l(\partial v_x / \partial y)$  на  $\Delta v$ :

$$\frac{F}{A} = \frac{m n \bar{v}}{6} \Delta v.$$

- 43.6. Подвижность иона массой  $m$  в газе определяется его средней скоростью  $\bar{v}$  и длиной свободного пробега  $l$ :

$$\mu = \frac{l}{m \bar{v}}.$$

По условию задачи средние скорости ионов одинаковы во всех газах, так как температура газов одна и та же.

Если  $n_A$  и  $n_B$  — плотности числа молекул в исходных газах  $A$  и  $B$ , то можно написать соотношения

$$\frac{1}{\mu_A} = m \bar{v} \sigma_A n_A, \quad \frac{1}{\mu_B} = m \bar{v} \sigma_B n_B,$$

где  $\sigma_A$  и  $\sigma_B$  — полные сечения рассеяния иона на молекулах сортов  $A$  и  $B$ .

В смеси газов, в единице объема которой содержится  $n_A$  молекул сорта  $A$  и  $n_B$  молекул сорта  $B$  и, следовательно, суммарная плотность числа частиц составляет  $n_A + n_B$ , величина, обратная длине свободного пробега иона, равна  $1/l = n_A \sigma_A + n_B \sigma_B$ . В этом нетрудно убедиться, если рассуждать точно так же, как при получении выражения для  $l$  в случае однокомпонентного газа. Поэтому подвижность

нона в заданной смеси газов может быть найдена из соотношения

$$\frac{1}{\mu} = m\bar{v} (\sigma_A n_A + \sigma_B n_B).$$

Отсюда находим, что  $\mu^{-1} = \mu_A^{-1} + \mu_B^{-1}$  и, следовательно,

$$\mu = \frac{\mu_A \mu_B}{\mu_A + \mu_B}.$$

### К главе 44. Законы термодинамики

44.1. Процесс  $AB$  протекает при  $V = \text{const}$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= \int_{T_A}^{T_B} \frac{dQ}{T} = \frac{kN}{(\gamma-1)} \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = \\ &= \frac{kN}{(\gamma-1)} \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{kN}{(\gamma-1)} \ln \frac{P_B}{P_A} = \Delta S_{DC}. \end{aligned}$$

Процесс  $BC$  протекает при  $P = \text{const}$ . В этом случае

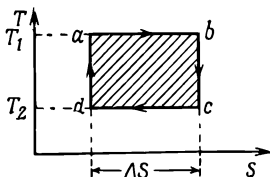
$$\Delta S_{BC} = \frac{kN\gamma}{(\gamma-1)} \ln \frac{T_C}{T_B} = \frac{kN\gamma}{(\gamma-1)} \ln \frac{V_C}{V_B} = \Delta S_{AD}.$$

а) Из полученных выражений видно, что изменение энтропии в процессах  $ABC$  и  $ADC$ , действительно, одно и то же и равно

$$\begin{aligned} \Delta S_{ABC} = \Delta S_{ADC} &= \frac{kN}{(\gamma-1)} \ln \frac{P_B}{P_A} + \frac{kN\gamma}{(\gamma-1)} \ln \frac{V_C}{V_B} = \\ &= \frac{kN}{(\gamma-1)} \left[ \ln \frac{P_B}{P_A} + \gamma \ln \frac{V_C}{V_B} \right] = \frac{kN}{\gamma-1} \ln \left( \frac{P_C V_C^\gamma}{P_A V_A^\gamma} \right). \end{aligned}$$

б) Поскольку, согласно условию задачи,  $kN = R$ , то  $\Delta S_{ABD} = \Delta S_{ADC} = 3,7 R = 30,8 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ .

44.2. Идеальный цикл Карно, показанный на диаграмме  $P-V$  в «лекциях» (см. фиг. 44.6, вып. 4, стр. 343), на диаграмме  $T-S$  имеет вид, представленный на рисунке.



Величина  $\Delta S$  равна изменению энтропии при изотермическом процессе:

$$\Delta S = \Delta S_{ab} = \int_a^b \frac{dQ_1}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_a^b P dV = Nk \ln \frac{V_b}{V_a}.$$

Из уравнения адиабаты в переменных  $V, T$  (см. решение задачи 39.1) можно получить следующее соотношение:

$$V_b = V_c \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad V_d = V_a \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Таким образом,

$$\Delta S = Nk \ln \left[ \frac{V_c}{V_a} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} \right] = Nk \left( \ln \frac{V_c}{V_a} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1} \right).$$

44.3. Для цикла Карно

$$К. п. д. = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{873 - 293}{873} = 66,3\%.$$

44.4. а) Из уравнения адиабаты в переменных  $V, T$  (см. решение задачи 39.1) следует, что

$$V_b = V_c \left( \frac{T_c}{T_a} \right)^{1/(\gamma-1)} = 8,8 \text{ л},$$

$$V_d = V_c \left( \frac{T_a}{T_c} \right)^{1/(\gamma-1)} = 12,3 \text{ л}.$$

б) В соответствии с решением задачи 44.2 для изотермического процесса мы имеем

$$Q_{ab} = RT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} = 1270 \text{ дж}.$$

в)  $Q_{cd} = RT_2 \ln \frac{V_d}{V_c} = -\frac{T_2}{T_1} Q_{ab} = -952 \text{ дж}.$

г)  $К. п. д. = (T_1 - T_2)/T_1 = 25\%.$

д)  $\Delta S_{ab} = Q_{ab}/T_1 = 0,11 \text{ дж/К} = -\Delta S_{cd}.$

44.5. Поскольку процесс расширения является изотермическим (см. решение задачи 44.2), то

$$\Delta S = Nk \ln \frac{V_2}{V_1} = Nk \ln \frac{P_1}{P_2} = \frac{M}{\mu} R \ln \frac{P_1}{P_2},$$

где  $P_1$  — начальное давление,  $P_2$  — давление атмосферы. Отсюда

$$\frac{\Delta S}{M} = \frac{R}{\mu} \ln \frac{P_1}{P_2} = 11 \text{ кдж/К} \cdot \text{кг}.$$

### К главе 45. Примеры из термодинамики

45.1. Если через  $R_\odot$  обозначить радиус Солнца, то полная интенсивность излучаемой Солнцем энергии равна  $4\pi R_\odot^2 \sigma T^4$ . На расстоянии 1 А.Е., равном расстоянию от Земли до Солнца, ( $L = 1 \text{ А.Е.} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$ ), на площадь  $\pi r^2$  ( $r$  — радиус медной сферы) падает излучение с энергией

$$\pi r^2 \frac{4\pi R_\odot^2 \sigma T^4}{4\pi L^2} = \frac{\pi r^2 R_\odot^2 \sigma T^4}{L^2}.$$

Поскольку  $R_\odot = L\alpha/2$ , где  $\alpha$  — угол, под которым виден диаметр Солнца с Земли, а интенсивность энергии, излучаемой медной

сферой с температурой  $T_1$ , равна  $4\pi r^2 \sigma T_1^4$ , то из условия теплового баланса

$$\frac{\pi}{4} r^2 \alpha^2 \sigma T^4 = 4\pi r^2 \sigma T_1^4$$

находим

$$T_1 = \frac{T \sqrt{\alpha}}{2} = 270 \text{ К.}$$

45.2. Максимальную температуру данной области Земли определяем из условия:  $1395 \text{ вт/м}^2 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ вт/м}^2 \cdot \text{К}^4 \cdot T^4$ . Отсюда  $T = 122^\circ \text{С}$ .

45.3. Черное тело радиусом  $r$  излучает в единицу времени энергию, равную  $4\pi r^2 \sigma T^4$ . Эта энергия, конечно, поглощается оболочкой. Тонкая зачерненная с обеих сторон оболочка излучает энергию как с внутренней, так и с внешней своей поверхности. Полная энергия, излучаемая оболочкой в единицу времени, равна  $8\pi R^2 \sigma T_1^4$ .

В условиях теплового равновесия оболочка столько же получает энергии, сколько и излучает, т. е.

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = 8\pi R^2 \sigma T_1^4.$$

Отсюда

$$T_1^4 = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 T^4.$$

Скорость охлаждения определяется интенсивностью излучаемой телом энергии в единицу времени. В отсутствие оболочки черное тело в единицу времени излучает энергию  $4\pi r^2 \sigma T^4$ . При наличии оболочки скорость охлаждения всей системы, а следовательно, и тела, будет определяться излучаемой энергией в окружающее пространство с внешней стороны оболочки, т. е.  $4\pi R^2 \sigma T_1^4$ . Отношение интенсивностей излучения энергии с оболочкой и без нее равно  $R^2 T_1^4 / r^2 T^4 = 1/2$ . Следовательно, экран вдвое уменьшает скорость охлаждения тела.

45.4. Давление газа в центре Солнца можно определить из уравнения идеального газа  $P_r = nkT$ , где  $n$  — число частиц в единице объема. Концентрации протонов и электронов на Солнце в предположении об его электронейтральности нужно положить равными  $n/2$ . Поскольку плотность газа  $\rho = (m_p + m_e)(n/2) \approx (1/2)m_p \cdot n$  ( $m_p$  и  $m_e$  — массы протона и электрона), то  $P_r = 2\rho RT/\mu_p$ . Полагая  $\rho = 80 \text{ г/см}^3$  и  $\mu_p = 1$ , для заданной температуры в центре Солнца находим  $P_r = 1,7 \cdot 10^{16} \text{ ньютон/м}^2$ . Радиационное давление  $P_{\text{рад}} = (4/3)\sigma T^4/c = 7,2 \cdot 10^{14} \text{ ньютон/м}^2$ .

45.5. В соответствии с уравнением Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dT}{dP_{\text{пар}}} = \frac{TV_G}{L},$$

где  $V_G$  — объем газа, а  $L$  — скрытая теплота испарения воды массой  $V_G \rho_G$ . Давление пара с высотой падает по закону  $dP_{\text{пар}}/dz = -\rho g$  ( $\rho$  — плотность воздуха). Следовательно, изменение темпе-

ратуры кипения с ростом высоты (полагаем на поверхности Земли  $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$ ) происходит по закону

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dT}{dP_{\text{пар}}} \frac{dP_{\text{пар}}}{dz} = - \frac{TV_{\text{г}}\rho g}{L} = 3,1 \text{ К/км.}$$

- 45.6. Поскольку внутренняя энергия идеального газа не зависит от объема, т. е.  $U = C_V T$ , то превышение  $C_P$  над  $C_V$  связано с той работой, которую совершает расширяющийся газ, когда его нагревают при постоянном давлении. Имеем

$$C_P \Delta T = \Delta Q = \Delta U + P \Delta V = C_V \Delta T + P \Delta \left( \frac{RT}{P} \right).$$

Отсюда сразу получаем  $C_P - C_V = R$ .

- 45.7. Из уравнения Клапейрона — Клаузиуса  $L = \Delta VT(dP/dT)$ , где  $\Delta V = V_{\text{пар}} - V_{\text{вода}} \approx V_{\text{пар}} = 206 \text{ м}^3/\text{кг}$ . Из таблиц физических величин находим  $dP/dT = 45 \text{ ньютон/м}^2 \cdot \text{К}$ . Отсюда  $L = 2,5 \cdot 10^9 \text{ кдж/кг}$  (это значение совпадает с табличным).

- 45.8. Когда абсолютно черное тело, т. е. тело, поглощающее всю падающую на него энергию, находится в равновесии с излучением, то оно поглощает столько же энергии, сколько и излучает, т. е.  $\sigma T^4$  (на единицу поверхности). Следовательно, поток энергии излучения на черное тело равен  $\sigma T^4$ . Но такой же поток энергии будет падать и на единицу поверхности тела, находящегося в равновесии с излучением, но поглощающего только долю  $A$  падающего излучения. Поскольку такое тело поглощает столько энергии, сколько и испускает (в случае теплового равновесия), то излучаемая им энергия равна  $A\sigma T^4$ . Если же тело не находится в равновесии с излучением, то испускаемая им плотность потока энергии по-прежнему будет равна  $A\sigma T^4$ .

- 45.9. а) Если  $L$  — скрытая теплота плавления массы вещества, то

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_L - V_G)},$$

где  $V_L$  — объем, занимаемый массой жидкости, а  $V_G$  — объем, занимаемый той же массой твердого вещества (см. «Лекции», вып. 4, стр. 368). Поскольку  $L > 0$ , то при  $V_G > V_L$  (если вещество при замерзании расширяется)  $dP/dT < 0$ , или  $dT/dP < 0$ , т. е. температура замерзания должна понижаться с увеличением давления.

- б) Если пренебречь зависимостью величин  $L$ ,  $V_L$  и  $V_G$  от температуры и малой сжимаемостью жидкости и твердого тела (т. е., кроме того, считать  $V_L$  и  $V_G$  не зависящими от давления), то уравнение Клапейрона — Клаузиуса можно проинтегрировать. Записав это уравнение в виде

$$\frac{dT}{T} = \frac{V_L - V_G}{L} dP,$$

найдем после интегрирования

$$T = T_0 e^{P(V_L - V_G)/L},$$

где  $T_0$  — постоянная интегрирования. Определим  $T_0$  из условия, что при нормальном давлении  $P_0 = 1 \text{ атм}$  температура таяния льда равна  $0^\circ \text{С}$ , т. е.  $273 \text{ К}$ :

$$T = (273 \text{ К}) \exp [(P - P_0)(V_L - V_G)/L].$$



Оценим далее давление  $P$ , которое оказывает лезвие конька на лед. Длина конька примерно равна 40 см, а ширина лезвия 2 мм. При этом площадь лезвия конька оказывается равной 8 см<sup>2</sup>. Принимая средний вес человека равным 80 кг и считая, что этот вес распределен по площади одного конька, находим  $\Delta P = P - P_0 = 9 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2 = 8,8 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$ . Из таблиц физических величин находим  $\Delta V = V_G - V_L = 8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3/\text{г}$  и  $L = 335 \text{ дж/г}$ . Таким образом,

$$T \approx (273 \text{ К}) \left[ 1 - \frac{(P - P_0)(V_G - V_L)}{L} \right].$$

Отсюда самая низкая температура льда, при которой он мог бы расплавиться под лезвием конька, равна

$$t^\circ \text{ С} = (-273 \text{ К}) \frac{\Delta P \Delta V}{L} = -0,06^\circ \text{ С}.$$

Из этого расчета видно, что катание по льду на коньках вовсе не связано с плавлением льда под коньком.

### К главе 47. Звук. Волновое уравнение

47.1. Поскольку  $\mu_{\text{H}_2} = 2$ ,  $\mu_{\text{He}} = 4$ ,  $\gamma_{\text{H}_2} = 7/5$ ,  $\gamma_{\text{He}} = 5/3$ , то

$$\frac{c_{\text{He}}}{c_{\text{H}_2}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\text{He}} \mu_{\text{H}_2}}{\gamma_{\text{H}_2} \mu_{\text{He}}}} = 0,78.$$

47.2. Частота звука, издаваемого свистком, пропорциональна скорости звука (см. гл. 49 «Лекций», вып. 4), а последняя  $\sim \sqrt{T}$ . Следовательно, искомая температура по шкале Кельвина в 4 раза выше температуры жидкого воздуха, т. е. равна 372 К = 99° С.

47.3. Резонансная частота пропорциональна скорости звука (см. гл. 49 «Лекций», вып. 4). Поэтому при заполнении резонансных полостей гелием частоты звука увеличатся в

$$\sqrt{\frac{\gamma_{\text{He}} \mu_{\text{возд}}}{\gamma_{\text{возд}} \mu_{\text{He}}}} = 2,9 \text{ раза}$$

( $\gamma_{\text{He}} = 5/3$ ,  $\gamma_{\text{возд}} = 7/5$ ,  $\mu_{\text{возд}} = 29$ ,  $\mu_{\text{He}} = 4$ ). Тональность пения будет на две октавы выше.

47.4. Изменение давления  $\Delta P$  в звуковой волне связано с изменением плотности  $\Delta \rho$  соотношением  $\Delta P = c_s^2 \Delta \rho$ , где  $c_s$  — скорость звука.

а)  $\Delta \rho_m = \Delta P_m / c_s^2 \approx 10^{-8} \text{ г/см}^3$ .

б) В плоской волне  $\Delta \rho = \Delta \rho_m \exp[ik(x - c_s t)]$  и  $\Delta \rho = -\rho_0 (\partial \chi / \partial x)$ .

Таким образом, учитывая, что  $\rho_0 = \gamma P / c_s^2$ , находим

$$\chi_m = \frac{\Delta \rho_m}{\rho_0} \frac{c_s}{\omega} = \frac{\Delta P_m}{\gamma P} \frac{c_s}{\omega} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ см} = 2500 \text{ \AA}.$$

47.5. Частоты колебания резины пропорциональны корню квадратному из отношения натяжения  $T$  к линейной плотности  $\sigma$  (см., например, решение задачи 47.6) и обратно пропорциональны ее длине, т. е.  $\omega \sim$

$\sim (1/L) \sqrt{T/\sigma}$ . Поскольку  $T \sim L$ ,  $\sigma \sim 1/L$ , то ясно, что частоты колебаний такой резины не зависят от ее длины. Поэтому высота звука такой «струны» в любой момент времени одна и та же. Иначе обстоит дело для скрипичной струны, поскольку для струны  $\sigma = \text{const}$  и  $L = \text{const}$ . Поэтому с увеличением натяжения струны (настройка) звук получается более высокой частоты.

47.6. Рассмотрим участок струны длиной

$$\Delta l = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx dx$$

и напомним для него уравнение движения вдоль оси  $y$ . Очевидно, масса такого участка равна  $\sigma dx$  ( $\sigma$  — линейная плотность массы), а ускорение  $d^2y/dt^2$ . Равнодействующую сил, действующих на выделенный участок, найдем, проецируя силы натяжения в точках  $x$  и  $x + dx$  на ось  $y$ . На концах отрезка эти проекции равны величине  $T$ , умноженной на синусы углов, которые составляют касательные к струне в этих точках с осью  $x$ . В силу малости углов синусы приближенно равны тангенсам этих углов, т.е.  $dy/dx$ . Следовательно, равнодействующая сил для участка струны, направленная в поперечном к струне направлении, равна

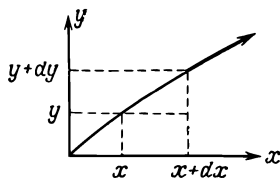
$$T \frac{dy}{dx} \Big|_{x+dx} - T \frac{dy}{dx} \Big|_x = T dx \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Уравнение движения выделенного участка струны запишется в виде

$$\sigma dx \frac{d^2y}{dt^2} = T dx \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Сокращая на  $dx$  обе части получившегося уравнения и вводя обозначение  $v^2 = T/\sigma$ , находим искомое волновое уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2y}{dt^2}.$$



47.7. Выполнив простое дифференцирование, получим уравнение

$$\left(\frac{\omega^2}{v^2} - k^2\right) A e^{i(\omega t - kx)} = 0,$$

которое при  $A \neq 0$  выполняется лишь при условии, что  $\omega = vk$ .

## К главе 48. Биения

48.1. По определению  $v_{\text{фаз}} = \omega/k$ , где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновой вектор. Согласно условию задачи,  $v_{\text{фаз}} = \sqrt{g/k}$ . Следовательно,  $\omega = \sqrt{gk}$   
Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_{\text{фаз}}.$$

Если  $\lambda = 10^3$  м, то  $v_{\text{фаз}} = 39,5$  м/сек.

48.2. Для заданной волны  $\omega = kv_{\text{фаз}} = \sqrt{gk + Tk^3/\rho}$ . Отсюда

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\lambda (g + 12\pi^2 T/\rho \lambda^2)}{4\pi \sqrt{(\lambda g/2\pi) + (2\pi T/\lambda \rho)}}.$$

48.3. а)  $v_{\text{фаз}} = \left( \frac{2\pi T}{\lambda \rho} + \frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2} = 24,4 \text{ см/сек.}$

б)  $v_{\text{фаз}} = 17,8 \text{ см/сек.}$

48.4. Для искомой волны  $dv_{\text{фаз}}/d\lambda = 0$ . Из этого уравнения следует

$$-\frac{2\pi T}{\rho \lambda^2} + \frac{g}{2\pi} = 0;$$

отсюда

$$\lambda_{\text{мин}} = 2\pi \sqrt{\frac{T}{\rho g}} = 1,5 \text{ см}$$

и

$$\omega_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{4\pi g}{\lambda_{\text{мин}}}} = 90,6 \text{ сек}^{-1}.$$

48.5. Благодаря эффекту Доплера (см. § 6 гл. 34 «Лекций», вып. 3) частота звука, регистрируемая от какого-либо источника, зависит как от скорости источника звука, так и от скорости наблюдателя. Если наблюдатель покоится, а источник звука движется со скоростью  $v$  на него или от него (последнему случаю отвечает знак минус в приведенной ниже формуле), то частота регистрируемого звука равна

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 \mp v/c_s} \approx \omega_0 \left( 1 \pm \frac{v}{c_s} \right) = \omega_0 \pm \omega_0 \frac{v}{c_s} = \omega_0 \pm \Delta\omega,$$

где  $\omega_0$  — частота звука, испускаемого покоящимся источником. Так как  $\omega_0 = 340 \text{ гц}$ ,  $c_s = 340 \text{ м/сек}$ ,  $v = 5 \text{ м/сек}$ , то  $\Delta\omega = 5 \text{ гц}$ .

Машинист движется вместе с источником звука. Поэтому он слышит звук частотой  $\omega_0 = 340 \text{ гц}$ . Однако частота эха, которое он услышит, равна  $350 \text{ гц}$ . Действительно, скалы достигает звук, испущенный движущимся к скале источником. Частота его равна  $\omega_0 + \Delta\omega$ . Как известно, при отражении частота не меняется. Если учесть, что машинист движется к скале со скоростью  $v$ , то частота вернувшегося к нему эха равна  $\omega_0 + 2\Delta\omega$ .

Человек, стоящий на земле около последнего вагона, услышит гудок частотой  $\omega_0 - \Delta\omega = 335 \text{ гц}$ , так как источник звука удаляется от него со скоростью  $v$ . Эхо, имеющее частоту звука, испущенного движущимся к скале гудком, придет к человеку с частотой, равной  $\omega_0 + \Delta\omega = 345 \text{ гц}$ . Так как частоты гудка и эха различаются, то при их интерференции возникнут биения звука с частотой биений  $10 \text{ гц}$ . Такие биения отметит и машинист, и человек, стоящий на земле возле последнего вагона.

## К главе 49. Собственные колебания

49.1. Обозначим через  $x$  и  $y$  смещения грузов  $m_1$  и  $m_2$  в горизонтальном направлении. Очевидно, сила, действующая на тело массой  $m_1$  со стороны левой пружины, равна  $-k_1x$ , а со стороны правой  $k(y-x)$ . На тело массой  $m_2$  слева действует сила  $-k(y-x)$ , а справа —

сила, равная  $-k_2y$ . Следовательно, уравнения движения тел можно написать в виде

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} &= -k_1x + k(y - x), \\ m_2\ddot{y} &= -k(y - x) - k_2y. \end{aligned}$$

С учетом того, что  $k_1/m_1 = k_2/m_2 = \omega_0^2$ , эту систему дифференциальных уравнений можно привести к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m_1}\right)x - \frac{k}{m_1}y &= 0, \\ \ddot{y} + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m_2}\right)y - \frac{k}{m_2}x &= 0. \end{aligned}$$

**49.2.** Будем искать решение полученной в предыдущей задаче системы уравнений в виде  $x = Ae^{i\omega t}$  и  $y = Be^{i\omega t}$ . Выполняя необходимые дифференцирования и сокращая уравнения на  $e^{i\omega t}$ , имеем

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m_1}\right)A + \frac{k}{m_1}B &= 0, \\ \frac{k}{m_2}A + \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m_2}\right)B &= 0. \end{aligned}$$

Введя обозначение  $\lambda = \omega^2 - \omega_0^2$ , запишем эту систему однородных уравнений в виде

$$\begin{aligned} \left(\lambda - \frac{k}{m_1}\right)A + \frac{k}{m_1}B &= 0, \\ \frac{k}{m_2}A + \left(\lambda - \frac{k}{m_2}\right)B &= 0. \end{aligned}$$

Отличное от нуля решение этой системы уравнений существует только в том случае, когда детерминант, составленный из коэффициентов этой системы уравнений, обращается в нуль, т. е. если

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & \lambda - \frac{k}{m_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим квадратное уравнение, имеющее два вещественных решения:  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = k(m_1^{-1} + m_2^{-1})$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_0^2, \\ \omega_2^2 &= \omega_0^2 + k(m_1^{-1} + m_2^{-1}). \end{aligned}$$

Подставляя  $\omega_1^2$  в систему уравнений, находим, что  $A = B$ . Для частоты  $\omega_2$  получим другое соотношение между  $A$  и  $B$ :

$$B = -\frac{m_1}{m_2}A.$$

Таким образом, произвольное решение уравнений движения тел имеет вид

$$\begin{aligned}x &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}, \\y &= A_1 e^{i\omega_1 t} - \frac{m_1}{m_2} A_2 e^{i\omega_2 t}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что линейные комбинации координат  $x$  и  $y$

$$\xi = \dot{x} - y, \quad \eta = \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2}$$

являются нормальными координатами системы, так как они удовлетворяют уравнениям гармонических колебаний

$$\ddot{\xi} + \omega_2^2 \xi = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{\eta} + \omega_1^2 \eta = 0.$$

- 49.3. а) Трехмерное волновое уравнение, описывающее распространение волн со скоростью распространения  $v$ , имеет вид

$$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Подставляя в это уравнение заданную функцию  $f(x, y, z, t)$  и выполняя простые дифференцирования ( $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ ), получаем уравнение

$$\left[ \pi^2 \left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) - \frac{\omega^2}{v^2} \right] f = 0$$

которое при  $A \neq 0$  удовлетворяется, если

$$\omega^2 = v^2 \pi^2 \left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right).$$

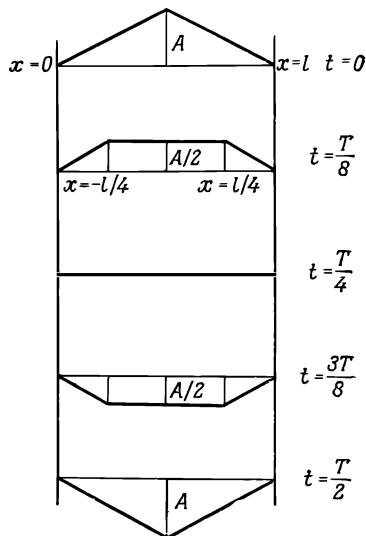
- б) Решение тривиально, так как при заданных  $x$ ,  $y$  и  $z$  один из синусов обращается в нуль.  
в) Временная зависимость заданной функции определяется множителем  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$  (см. краткое введение к условиям задач к гл. 22, «Алгебра»). Следовательно, вещественная часть функции осциллирует во времени как косинус, а мнимая — как синус.

- 49.4. Согласно условию задачи,

$$\omega = \omega_0 \sqrt{l^2 + \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{9}},$$

где  $\omega_0 = \pi/a$ . Наименьшая частота колебаний, очевидно, равна  $\omega_0/3$ . Десять искоемых частот, измеренных в единицах  $\omega_0/3$ , равны 1; 1,665; 2,05; 2,22; 2,78; 3,33; 3,50; 3,76; 3,93; 4,04; 4,33.

- 49.5. Пусть  $f(x)$  — функция, описывающая начальную форму оттянутой струны, а  $T$  — полный период колебаний. Представим себе начальную форму струны как суперпозицию двух горбов, описываемых функциями  $f(x)/2$  и движущихся с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях. Тогда отражение каждого горба от соответствующего закрепленного конца струны можно описать так, как это изложено в § 1 гл. 49 «Лекций» (вып. 4). На рисунке показаны найденные таким построением положения струны в моменты времени  $t = 0, T/8, T/4, 3T/8$  и  $T/2$ .



## К главе 50. Гармоники

- 50.1. а) Поскольку, с одной стороны,  $f(\pi/2) = 1$ , а с другой,

$$f(\pi/2) = (4/\pi) \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right),$$

то отсюда следует искомый ответ.

- б) Воспользуемся «теоремой об энергии» [см. «Лекции», формула (50.23), вып. 4, стр. 447]. В рассматриваемом случае  $T = 2\pi$ . Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 2\pi = \pi \frac{16}{\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right).$$

Разделив правую часть на численный множитель, стоящий перед суммой ряда, получим требуемый результат.

- в) Эту задачу можно решить по крайней мере двумя способами:

1. Сдвинем прямоугольную волну на  $-\pi/2$ . Вычисляя коэффициенты Фурье-разложения аналогично тому, как это было сделано в «Лекциях» (вып. 4, стр. 446), и используя «теорему об энергии», находим, что сумма квадратов обратных четных чисел равна  $\pi^2/24$ . Сумма квадратов обратных нечетных чисел найдена в п. (б) задачи и равна  $\pi^2/8$ . Складывая два ряда, находим, что сумма заданного ряда равна  $\pi^2/6$ .

2. Второй способ решения. Обозначим сумму данного ряда через  $A$  и перепишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \frac{A}{4}. \end{aligned}$$

Поскольку  $(1 + 1/9 + 1/25 + \dots) = \pi^2/8$ , то из предыдущего выражения имеем

$$A = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

50.2. Заданная функция имеет вид

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ \frac{2\pi - x}{\pi}, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Используя формулу Фурье-разложения

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

для заданной функции получаем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1],$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin nx dx = 0.$$

Следовательно,

$$g(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right).$$

50.3. а) Воспользуемся «теоремой об энергии» (см. «Лекции», вып. 4, стр. 447):

$$\int_0^T f^2(t) dt = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае  $T = 2\pi$ ,  $b_n = 0$  и

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 2\pi/3, \text{ находим}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{4} + \pi \frac{16}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right).$$

Нетрудно видеть, что отсюда следует искомый ответ.  
 б) Рассмотрим ряд

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

Представим этот ряд в виде

$$\begin{aligned} I &= \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) + \frac{1}{2^4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) + \frac{I}{2^4}. \end{aligned}$$

Решая это простое уравнение, находим

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2^4}{2^4 - 1} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) = \frac{\pi^4}{96} \cdot \frac{2^4}{(2^4 - 1)} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**50.4.** Задача легко решается, если вспомнить, что при  $q < 1$

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots$$

Следовательно,

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots$$

Поэтому

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots) dx.$$

Если проинтегрировать почленно и в  $n$ -м члене ( $n$  — любое) сделать замену переменной интегрирования  $u = nx$ , то мы придем к результату

$$I = \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots\right) \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du.$$

Так как (см. решение задачи 50.3) сумма ряда, стоящего перед интегралом, равна  $\pi^4/90$ , а сам интеграл равен 6, то отсюда следует искомый результат.

**50.5.** Заданная функция  $h(x)$  на интервале  $0 \leq x \leq 2\pi$  имеет вид  $h(x) = x/2\pi$ . Определяя коэффициенты фурье-разложения, находим

$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$



50.6. а) Так как  $V(t) = V_0 \sin \omega t$ , то  $T = 2\pi/\omega$  и

$$\bar{V} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} V_0 \sin \omega t \, dt = \frac{2V_0}{\pi}.$$

б) Разложим функцию в ряд Фурье. Он имеет вид

$$V(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) \, dt = \frac{2V_0}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T V(t) \cos n\omega t \, dt.$$

Амплитуда второй гармоники

$$a_2 = \frac{2V_0}{T} \int_0^T |\sin \omega t| \cos 2\omega t \, dt = \frac{8V_0}{3\pi}.$$

50.7. а)  $V_{\text{вх}}(t) = V_0 \sin \omega t$ . Представляя  $\sin^3 \omega t$  в виде

$$\sin^3 \omega t = \frac{1}{4} (-\sin 3\omega t + 3 \sin \omega t),$$

находим

$$V_{\text{вых}}(t) = \left( V_0 + \frac{3eV_0^2}{4} \right) \sin \omega t - \frac{eV_0^3}{4} \sin 3\omega t.$$

Следовательно, искажение волны определяется изменением амплитуды основной гармоники и появлением третьей гармоники. Эффект выпрямления отсутствует.

б) Пусть  $V_{\text{вх}}(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$ , причем  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Возведем это выражение в куб:

$$V_{\text{вх}}^3(t) = A^3 \sin^3 \omega_1 t + 3A^2 B \sin^2 \omega_1 t \sin \omega_2 t + \\ + 3AB^2 \sin \omega_1 t \sin^2 \omega_2 t + B^3 \sin^3 \omega_2 t.$$

Члены, содержащие синусы в кубе, можно разложить по гармоникам, используя решение в п. (а) этой задачи. Остальные члены разложим по синусам и косинусам. Например,

$$\sin^2 \omega_1 t \sin \omega_2 t = \frac{1}{2} [\sin \omega_2 t - \cos 2\omega_1 t \sin \omega_2 t] = \\ = \frac{1}{2} \sin \omega_2 t - \frac{1}{4} \sin (2\omega_1 + \omega_2) t - \frac{1}{4} \sin (\omega_2 - 2\omega_1) t.$$

Используя это разложение, окончательно находим

$$\begin{aligned}
 V_{\text{вых}}(t) = & \left( A + \frac{3eA^3}{4} + \frac{3eAB^2}{2} \right) \sin \omega_1 t + \\
 & + \left( B + \frac{3eB^3}{4} + \frac{3eA^2B}{4} \right) \sin \omega_2 t - \frac{eA^3}{4} \sin 3\omega_1 t - \\
 & - \frac{3eA^2B}{4} \sin (2\omega_1 + \omega_2) t + \frac{3eA^2B}{4} \sin (2\omega_1 - \omega_2) t - \\
 & - \frac{3eAB^2}{4} \sin (\omega_1 + 2\omega_2) t - \frac{3eAB^2}{4} \sin (\omega_1 - 2\omega_2) t - \frac{eB^3}{4} \sin 3\omega_2 t.
 \end{aligned}$$

Таким образом, помимо изменения амплитуд колебания основных гармоник, кубическая нелинейность приводит к появлению новых колебаний с частотами  $3\omega_1$ ,  $2\omega_1 \pm \omega_2$ ,  $\omega_1 \pm 2\omega_2$ ,  $3\omega_2$ . Эффект выпрямления отсутствует.

## ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

## К главе 1. Электromагнетизм

- 1.1. а) Силы гравитационного притяжения и электрического отталкивания одинаково зависят от расстояния  $r$  между протонами. Условие равенства этих сил записывается в виде

$$Gm^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0},$$

где  $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$  — гравитационная постоянная,  $q_e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ кулон}$  — заряд электрона. Отсюда  $m = q_e / \sqrt{4\pi\epsilon_0 G} = 1,86 \cdot 10^{-9} \text{ кг}$  и  $m/m_p = 1,1 \cdot 10^{18}$  ( $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ).

- б) Если  $Z$  — атомный номер ядра,  $n = 9,41 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$  — число атомов в 1 г меди (полагая копейку медной), то искомая сила равна  $F = 10^{-4} n^2 Z^2 q_e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2$ , где  $r$  — расстояние между копейками. Подставляя численные значения, находим  $F = 1,7 \cdot 10^{13} \text{ ньютон}$ . Тело такого веса напоминало бы, скажем, гору высотой 700 м и диаметром основания около 1,5 км.

- 1.2. Радиусы тяжелых атомных ядер хорошо описываются формулой  $R = R_0 A^{1/3}$ , где  $R_0 = 1,25 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ ,  $A$  — атомный вес. Оценим приближенно требуемую работу как энергию электростатического отталкивания двух соприкасающихся равномерно заряженных шаров-ядер с атомным весом  $A$  и атомным номером  $Z$ . Эта энергия примерно равна энергии электростатического взаимодействия двух точечных зарядов  $Zq_e$ , расположенных на расстоянии  $2R$ :

$$E = \frac{(Zq_e)^2}{8\pi\epsilon_0 R_0 A^{1/3}}.$$

Следовательно, работа, которую необходимо затратить на преодоление электростатического отталкивания при образовании ядра урана  $\text{U}^{238}$  из двух одинаковых половинок (ядер с  $A = 119$  и  $Z = 46$ ), приближенно равна  $E_U = 4 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 250 \text{ Мэв}$  ( $2,8 \cdot 10^7 \text{ квт} \cdot \text{ч/кг}$ ). Для двух ядер дейтерия ( $A = 2$ ,  $Z = 1$ ), сливающихся в ядро гелия,  $E_{\text{He}} = 7,6 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,47 \text{ Мэв}$  ( $3,1 \cdot 10^8 \text{ квт} \cdot \text{ч/кг}$ ). Однако последний результат менее точен, поскольку использованное выше выражение для радиуса ядра является неверным для самых легких ядер. Более точную оценку работы сил электростатического отталкивания можно получить, вычислив электростатические энергии ядра и его половинок в предположении о том, что ядра являются равномерно заряженными шарами. Читателю предлагается вычислить эти энергии в задаче 8.1 к гл. 8 вып. 5 (см. решение задачи 8.1). Однако результат более точной оценки отличается лишь множителем порядка

единицы от полученного в данной задаче. Работа при этом равна разности электростатических энергий ядра и удвоенной энергии ядра-половинки.

- 1.3. Искомую скорость через концентрацию электронов  $n$ , площадь поперечного сечения проволоки  $S$  и заряд электрона  $q_e$  можно выразить следующим образом:  $v = I/nq_eS$ . Если считать, что концентрация электронов в меди совпадает с числом атомов в единице объема ( $A = 64$ ,  $\rho = 8960 \text{ кг/м}^3$ ), то  $v = 0,42 \text{ м/с}$ . Отсюда  $v^2/c^2 = 2 \cdot 10^{-20}$ .
- 1.4. Движение можно считать нерелятивистским. Это следует из того, что, несмотря на относительно большое значение отношения  $v/c = 1/3$ , величина

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,95$$

близка к единице. Это оправдывает принятое приближение. Уравнение движения частицы

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

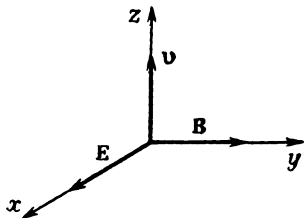
запишем в компонентной форме:

$$m\dot{v}_x = qE_x - qv_zB, \quad m\dot{v}_y = 0, \quad m\dot{v}_z = qv_xB.$$

По условию задачи движение частицы происходит только вдоль оси  $z$ . Следовательно,  $v_x = 0$  и  $qE_x = qv_zB$ . Отсюда следует, что

$$B = \frac{E_x}{v_z} = \frac{3E_x}{c} = 10^{-2} \text{ веббер/м}^2.$$

Заряд частицы и ее масса не входят в последнее выражение. Поэтому, в частности, знак заряда частицы из данного эксперимента установить невозможно.



- 1.5. а) Введя обозначение  $\omega = qB_0/m$ , запишем уравнение движения  $m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  в компонентной форме:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0.$$

Из первого и второго уравнений следует, что  $v_x - \omega y = \text{const}$  и  $v_y + \omega x = \text{const}$ . Используя начальные условия

$$v_x|_{t=0} = v_0, \quad v_y|_{t=0} = 0, \quad y|_{t=0} = 0, \quad x|_{t=0} = 0,$$

находим  $v_x = \omega y + v_0$  и  $v_y = -\omega x$ . Подставляя последнее соотношение в уравнение движения вдоль оси  $x$ , получаем

$$\frac{d^2}{dt^2} x = -\omega^2 x.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

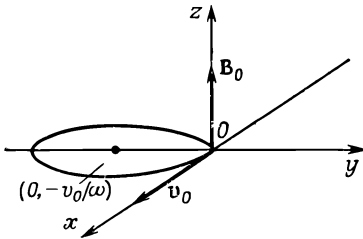
$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Удовлетворяя начальным условиям, находим  $A = v_0/\omega$  и  $B = 0$ . Полученное выражение для  $x$  дифференцируем по времени и находим  $y$  из соотношения  $y = (v_x - v_0)/\omega$ . Окончательное решение задачи записывается в виде

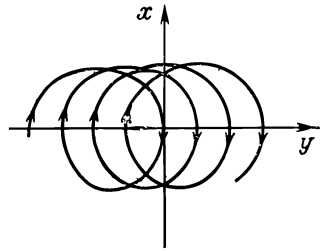
$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad y = \frac{v_0}{\omega} (\cos \omega t - 1), \quad z = 0.$$

Частица движется по окружности радиусом  $v_0$  (фиг. 1) в плоскости  $xy$ , центр которой расположен в точке  $(0, -v_0/\omega)$ . Частота оборотов частицы вокруг центра равна  $\omega = qB/m$ .

- б) В магнитном поле  $B_x = 0, B_y = 0, B_z = B_0 + ax$  частица начнет вначале двигаться по примерно круговой орбите радиусом  $r = mv_0/qB_0$ . Однако в области более сильного поля радиус кривизны траектории будет несколько меньше. При этом орбита уже не будет замкнутой окружностью, а возникнет дрейф вдоль оси  $y$ , как показано на фиг. 2.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

- в) Магнитное поле  $B_x = 0, B_y = 0, B_z = B_0 + ax$  несовместимо с тем уравнением Максвелла, согласно которому циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  по замкнутому контуру в отсутствие электрического поля и токов (в данной задаче  $\mathbf{E} = 0$  и  $\mathbf{j} = 0$ ) должна равняться нулю. Действительно, рассмотрим в плоскости  $xy$  замкнутый контур  $C$  в форме прямоугольной рамки со сторонами  $l$  и  $L$  и вычислим циркуляцию  $\mathbf{B}$  вдоль этого контура. Несложные вычисления приводят к выражению  $\oint_C \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = -a \cdot L \cdot l \neq 0$ , что противоречит упомянутому уравнению Максвелла.

- 1.6. а) Частица движется по окружности радиусом  $a$  вокруг заряда  $Q$ , если сумма силы электростатического притяжения и силы Лоренца равна массе частицы, умноженной на центростремительное ускорение. Поскольку в нашем случае сила Лоренца направлена к началу координат, имеем

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2} + qv_0 B_0 = \frac{mv_0^2}{a},$$

т. е.

$$B_0 = \frac{1}{a^2 q v_0} \left( -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} + mv_0^2 a \right).$$

- б) Сила, с которой магнитное поле действует на частицу, всегда перпендикулярна ее скорости. Поэтому магнитное поле не произво-

дит работы над движущимся зарядом, и закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} = E - U(r),$$

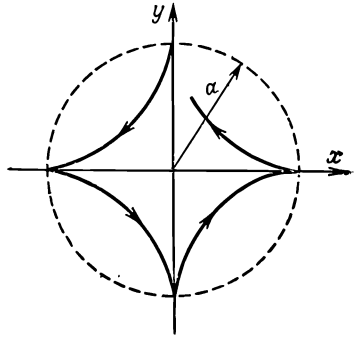
где  $E$  — полная энергия частицы,  $U(r)$  — энергия электростатического взаимодействия. Отсюда видно, что скорость частицы является функцией только расстояния:

$$v(r) = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \right)}.$$

- в) В этом случае полная энергия заряда  $q$  равна  $E = -Qq/4\pi\epsilon_0 a$  и, следовательно,

$$v(r) = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 m} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}.$$

Начав в начальный момент «падать» на заряд  $-Q$ , частица  $q$  отклоняется полем так, как показано на рисунке. Из выражения для  $v(r)$  мы видим, что в точках окружности  $r = a$  скорость частицы обращается в нуль и вновь повторяется исходная ситуация.



## К главе 2. Дифференциальное исчисление векторных полей

- 2.1. а) Условия задачи таковы, что полный поток тепла  $J$  через поверхность цилиндра произвольного радиуса  $a \leq r \leq b$ , коаксиального проволоке, является постоянной величиной. В данной задаче вектор потока тепла  $\mathbf{h}$  направлен по радиусу цилиндра; следовательно, для цилиндра единичной длины и радиусом  $r$  ( $a \leq r \leq b$ ) можно написать соотношение

$$J = h \cdot 2\pi r = \text{const.}$$

Если теперь использовать векторное уравнение потока тепла  $\mathbf{h} = -\kappa \nabla T$  и учесть, что векторы  $\mathbf{h}$  и  $\nabla T$  направлены по радиусу цилиндра, то можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{J}{2\pi r} = -\kappa \frac{dT}{dr}.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$T(r) = -\frac{J}{2\pi\kappa} \ln r + D, \quad (1)$$

где  $D$  — постоянная интегрирования. Величины  $J$  и  $D$  определим из граничных условий:  $T = T_1$  при  $r = a$  и  $T = T_2$  при  $r = b$ . Следовательно,

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(a/b)} \ln \frac{r}{b} + T_2.$$

Искомый градиент температуры в изоляционном покрытии дается выражением

$$(\nabla T)_r = \frac{T_1 - T_2}{\ln(a/b)} \frac{1}{r}.$$

- б) Здесь граничные условия другие, чем в п. (а), т.е. задано  $Q$  — количество тепла, выделяемое током на единице длины медного провода в единицу времени. В стационарных условиях это количество тепла равно полному потоку тепла  $J$  через поверхность провода. Если  $\rho$  — удельное сопротивление, то, согласно закону Ома,

$$Q = \frac{I^2 \rho}{\pi a^2} = -\kappa \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=a} 2\pi a = J,$$

где  $I$  — сила тока, протекающего по проводу. Из этого соотношения находим новое граничное условие

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=a} = -\frac{I^2 \rho}{\kappa 2\pi a^2}.$$

Используя это граничное условие и выражение (1), находим

$$D = T_2 + \frac{J}{2\pi\kappa} \ln b.$$

Следовательно,

$$T(r) = T_2 - \frac{I^2 \rho}{\kappa 2\pi^2 a^2} \ln \frac{r}{b}.$$

Отсюда ( $a = 0,001$  м,  $b = 0,003$  м,  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  ом·м,  $\kappa = 0,16$  вт/м·К)

$$T_1 - T_2 = \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 a^2 \kappa} \ln \frac{b}{a} = 2,4 \text{ К}.$$

- 2.2. а) Как показано в «Лекциях» [см. § 5 гл. 2, вып. 5, формулы (2.38)–(2.40)], компоненты ротора вектора  $\mathbf{A}$  можно записать в виде

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Дивергенция ротора по определению равна величине

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \mathbf{A})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{A})_y + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{A})_z.$$

Подставляя в это выражение компоненты ротора  $\mathbf{A}$  и учитывая тот факт, что порядок вычисления смешанных частных про-

изводных произволен, т. е. что, например,  $\partial^2 A_x / \partial z \partial y = \partial^2 A_x / \partial y \partial z$ , легко убеждаемся в равенстве нулю дивергенции ротора произвольного вектора  $\mathbf{A}$ .

- б) Доказательство удобно провести для каждой компоненты в отдельности. Покажем, например, что

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x = \nabla_x (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 A_x. \quad (1)$$

Согласно определению, левая часть этого соотношения может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{A})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{A})_y &= \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Прибавляя и вычитая в правой части последнего соотношения величину  $\partial^2 A_x / \partial x^2$  и учитывая, что  $\partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y + \partial A_z / \partial z = \nabla \cdot \mathbf{A}$ , убеждаемся в справедливости соотношения (1). Аналогично доказывается это соотношение для компонент  $y$  и  $z$ .

- 2.3. а) Поскольку  $R_x = x$ ,  $R_y = y$ ,  $R_z = z$ , то

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

- б)  $(\nabla \times \mathbf{R})_x = \frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} = 0,$   
 $(\nabla \times \mathbf{R})_y = \frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} = 0,$   
 $(\nabla \times \mathbf{R})_z = \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} = 0.$

- в) Нетрудно убедиться, что если  $\varphi$  — произвольная скалярная функция, а  $\mathbf{A}$  — произвольный вектор, то в любом случае

$$\nabla \cdot \varphi \mathbf{A} = (\nabla \varphi \cdot \mathbf{A}) + \varphi (\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

Это соотношение полезно запомнить. Из него, в частности, следует и требуемое в условии соотношение. Действительно, выбирая в качестве  $\varphi = 1/R^3$  и  $\mathbf{A} = \mathbf{R}$ , а также учитывая, что в соответствии с п. (а)  $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$  и  $\nabla \varphi = -3\mathbf{R}/R^5$ , имеем

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -3 \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})}{R^5} + \frac{3}{R^3} = 0.$$

Вычисление градиента скалярной функции, зависящей только от модуля радиуса-вектора, довольно часто встречается на практике. Поэтому полезно запомнить просто доказываемое соотношение ( $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ):

$$\nabla \varphi(\mathbf{R}) = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \frac{\mathbf{R}}{R}. \quad (1)$$



- г) Искомое соотношение можно получить вычислением в «лоб». Однако в силу того, что вычисление ротора — одна из распространенных операций в физике, полезно доказать вначале гораздо более общее соотношение:

$$\nabla \times \varphi \mathbf{A} = \nabla \varphi \times \mathbf{A} + \varphi (\nabla \times \mathbf{A}),$$

внешне очень похожее на соотношение для  $\nabla \cdot \varphi \mathbf{A}$ , приведенное в п. (в). В том, что оно справедливо, можно убедиться непосредственной проверкой. Искомое соотношение следует из вышеприведенного лишь как частный случай. Действительно, выбирая  $\varphi = -1/R^3$  и  $\mathbf{A} = \mathbf{R}$ , учитывая (1) и тот факт, что  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = 0$  и  $\nabla \times \mathbf{R} = 0$  [см. п. (б) настоящей задачи], находим

$$\nabla \times \left( -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = 0.$$

- д) Результат этого пункта задачи следует как частный случай из соотношения (1).  
 е)  $\varphi = R^2/2$ .
- 2.4 а) Если вычислить дивергенцию левой части уравнения (2), то в соответствии с п. (а) задачи 2.2 дивергенция ротора всегда равна нулю. Совместность уравнений (2) и (3) следует из того, что, как следует из уравнения (3), правая часть получающегося при этом соотношения также обращается в нуль.  
 б) Вычислим дивергенцию левой и правой частей уравнения (4). Согласно п. (а) задачи 2.2, в левой части получим нуль и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

С другой стороны, из уравнения (1) имеем  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ . Отсюда видно, что из уравнения (4) действительно следует уравнение (5).

- в) Возьмем ротор от левой и правой частей уравнения (2). Воспользовавшись соотношением, приведенным в п. (б) задачи 2.2, и уравнением Максвелла (4), получим

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Если теперь использовать уравнение (1), то получим искомое волновое уравнение.

- г) Если аналогичные выкладки проделать, исходя из уравнения (4), то получим искомое волновое уравнение для  $\mathbf{B}$ .  
 д) В силу уравнения (3) вектор  $\mathbf{B}$  всегда может быть представлен как ротор некоторого вектора  $\mathbf{A}$  (называемого векторным потенциалом), так как дивергенция ротора равна тождественно нулю. Тогда из уравнения (2) получаем

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Из этого уравнения видно, что ротор вектора  $\mathbf{E} + (\partial \mathbf{A}/\partial t)$  тождественно обращается в нуль. Это означает, что этот вектор можно записать в виде градиента скалярной функции  $\varphi$  (скалярный потенциал электромагнитного поля), поскольку ротор градиента произвольной скалярной функции  $\varphi$  тождественно обращается в нуль:

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0.$$

В выполнении последнего соотношения нетрудно убедиться непосредственным вычислением. Но и без этого очевидно, что векторное произведение вектора  $\nabla$  на самого себя, каковым и является левая часть этого соотношения, всегда равно нулю.

- 2.5. Поместим начало координат в какую-либо точку на оси вращения тела. Пусть  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, определяющий положение произвольной точки вращающегося тела в произвольный момент времени. Очевидно, скорость этой точки тела в тот же момент времени можно представить в виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R},$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости.

- а) Используя свойство смешанного скалярно-векторного произведения, согласно которому векторы в нем можно циклически переставлять, находим

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = -\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{R}).$$

Если теперь использовать соотношения, приведенные в п. (б) задачи 2.3, то получим требуемый результат.

- б) Вычислим компоненты вектора  $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ , направив ось  $z$  вдоль вектора  $\boldsymbol{\omega}$ . Так как  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})_x = -y\omega$ ,  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})_y = x\omega$ ,  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})_z = 0$ , то

$$(\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}))_x = 0,$$

$$(\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}))_y = 0,$$

$$(\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}))_z = 2\omega.$$

Следовательно, в любой системе координат

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = 2\boldsymbol{\omega}.$$

- 2.6. При операциях с вектором  $\nabla$  следует всегда помнить, что он действует на переменные векторы, стоящие после него. Иными словами, в выражении  $(\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{R}$  в соответствии с правилами дифференцирования мы должны подействовать оператором  $\nabla$  как на вектор  $\mathbf{A}$  (считая постоянным  $\mathbf{R}$ ), так и на вектор  $\mathbf{R}$  (считая постоянным  $\mathbf{A}$ ). В первом случае получаем нуль, т. е.  $\mathbf{R} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0$ , а во втором  $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{R} = \mathbf{A}$ .

- 2.7. Дивергенция  $\nabla \cdot \mathbf{h} = \partial h_x / \partial x = -\kappa (d^2 T / dx^2)$  максимальна в точке  $B$ , поскольку в этой точке кривизна больше, чем в точке  $E$ , и отрицательна. В точке  $D$  кривизна хоть и большая, но положительна, и поэтому  $\nabla \cdot \mathbf{h} < 0$ . Во всех точках  $\nabla \times \mathbf{h} = 0$ .

### К главе 3. Интегральное исчисление векторов

- 3.1. а) Как показано в «Лекциях» (см. § 5 гл. 4, вып. 5, стр. 83), первый закон электромагнетизма позволяет найти поток электрического поля: поток напряженности через любую замкнутую поверхность равен заряду внутри нее, деленному на постоянную  $\epsilon_0$ . Обозначая плотность зарядов в пространстве через  $\rho$ , запишем этот закон в виде

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV.$$

Используя теперь теорему Гаусса, напишем

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV.$$

Это равенство справедливо для произвольной замкнутой поверхности. Следовательно,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ .

Второй закон электромагнетизма гласит: циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  по любому замкнутому контуру равна производной по времени от потока вектора  $\mathbf{B}$  сквозь произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур, т. е.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Используя теорему Стокса, запишем

$$\int \left[ \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right] \cdot \mathbf{n} \, da = 0;$$

отсюда

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}.$$

Так как, согласно третьему закону электромагнетизма, поток вектора  $\mathbf{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю, то

в соответствии с теоремой Гаусса  $\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = 0$ .

Отсюда следует, что  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Наконец, используя четвертый закон электромагнетизма, циркуляцию вектора  $\mathbf{B}$  по контуру можно записать в виде

$$\oint \mathbf{B} \, ds = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da + \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

В соответствии с теоремой Стокса имеем

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \mathbf{j}.$$

- б) Выберем произвольный объем и проинтегрируем по этому объему левую и правую части уравнения  $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$ :

$$\int \nabla \cdot \mathbf{j} \, dV = -\frac{d}{dt} \int \rho \, dV.$$

Если воспользоваться теперь теоремой Гаусса, то это уравнение можно написать в виде

$$\frac{d}{dt} \int \rho \, dV = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой скорость изменения заряда внутри объема, а правая — количество заряда, вытекающего (втекающего) в единицу времени из объема. Следовательно, равенство этих частей выражает закон сохранения заряда: сколько зарядов убыло в объеме, столько их и вытекло из этого объема.

- 3.2. Не создает. Действительно, окружим шар сферической поверхностью произвольного радиуса  $R$  и выберем на этой поверхности произвольный замкнутый контур так, что ограниченная им площадь поверхности сферы равна  $S$ . Согласно четвертому закону электромагнетизма, циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  по контуру может быть представлена в виде [см. решение задачи 3.1]

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da + \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da.$$

Токи и электрическое поле, создаваемое увеличивающимся во времени зарядом шара, являются радиальными. Поэтому написанные выше потоки векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  через поверхность  $S$  составляют лишь долю от потока этих векторов через замкнутую поверхность сферы, равную  $S/4\pi R^2$ . Но, согласно закону Гаусса и закону сохранения заряда,

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{d}{dt} \frac{q(t)}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da.$$

Величина  $q(t)$  в этом соотношении обозначает заряд шара в момент времени  $t$ . Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da + \frac{1}{\epsilon_0} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

и

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Так как контур был выбран произвольным, можно сделать вывод о том, что касательная к сфере составляющая вектора  $\mathbf{B}$  равна нулю. Равенство нулю радиальной составляющей вектора  $\mathbf{B}$  обусловлено тем, что поток вектора  $\mathbf{B}$  через поверхность сферы должен быть равен нулю, а также тем, что в силу сферической геометрии системы радиальная составляющая  $B_r$  одна и та же во всех точках сферы.

- 3.3. а)  $4\pi K$ .

б) Если формально воспользоваться теоремой Гаусса, то в силу равенства  $\nabla \cdot (K/r^3) \mathbf{r} = 0$  [см. п. (в) задачи 2.3] поток вектора  $\mathbf{E}$  через сферическую поверхность оказывается равным нулю, что противоречит результату, полученному в п. (а) нашей задачи. Это противоречие лишь кажущееся, поскольку  $\nabla \cdot K(\mathbf{r}/r^3) = 0$  только для  $\mathbf{r} \neq 0$ . В точке  $\mathbf{r} = 0$   $\nabla \cdot \mathbf{E}$  обращается в бесконечность, и применение теоремы Гаусса требует осторожности. Правильнее в этом случае было бы поступить так: в качестве объема интегрирования нужно выбрать объем, заключенный между двумя концентрическими сферическими поверхностями вокруг точечного заряда: одна из них имеет произвольный радиус  $r$ , а другая — бесконечно малый радиус. В таком объеме нет зарядов, и применение теоремы Гаусса дает правильный результат. При этом поток вектора  $\mathbf{E}$  через сферическую поверхность радиусом  $r$  оказывается равным потоку (но с обратным знаком) через поверхность с бесконечно малым радиусом. В соответствии с п. (а) последний поток равен  $-4\pi K$ .

в) Циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  равна нулю.

3.4. Применим теорему Гаусса  $\int_S \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{C} dV$ , выбрав в качестве вектора  $\mathbf{C}$  радиус-вектор  $\mathbf{R}$ , т. е.  $\mathbf{C} = \mathbf{R}$ . Учитывая, что  $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$  [см. п. (а) в решении задачи 2.3], находим

$$\int_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} da = 3 \int_V dV = 3V$$

Отсюда следует, что

$$V = \frac{1}{3} \int_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} da. \quad (1)$$

Для сферы в каждой точке поверхности радиус-вектор  $\mathbf{R}$ , определяющий положение элементарной площадки  $da$ , и нормаль к поверхности  $\mathbf{n}$  параллельны. Поэтому  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} da = R da$ . Так как для всех точек сферы радиус  $R$  одинаков, интегрирование в (1) сводится к вычислению суммарной поверхности сферы, которая равна  $4\pi R^2$ . Поэтому из (1) следует хорошо известный результат  $V = (4\pi/3)R^3$ . Для прямоугольного параллелепипеда с длинами ребер  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  интегрирование в (1) нужно выполнить для каждой грани и результаты сложить. Проведем его для грани, перпендикулярной ребру длиной  $l_1$ . Очевидно, что вектор  $\mathbf{n}$  перпендикулярен грани, а вектор  $\mathbf{R}$  образует некоторый угол  $\alpha$  с вектором  $\mathbf{n}$ . Если начало координат выбрать в центре параллелепипеда, то легко сообразить, что  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} da = R \cdot da \cdot \cos \alpha = (a/2) dS$ . Интеграл в (1) сводится к вычислению площади грани, перпендикулярной ребру длиной  $l_1$ , равной  $l_2 \cdot l_3$ . Точно такой результат получается и для других пяти граней параллелепипеда. Поэтому правая часть в (1) оказывается равной  $l_1 l_2 l_3$ , т. е. объему параллелепипеда.

## К главе 4. Электростатика

4.1. Направим ось  $y$  вдоль нити. Тогда заряд, приходящийся на элемент длины нити  $dy$ , равен  $\lambda dy$ , а его расстояние до точки  $P$  равно  $\sqrt{y^2 + r^2}$ . Интегрируя вдоль нити, находим

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\lambda dy}{\sqrt{y^2 + r^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{l_2^2 + r^2} + l_2}{\sqrt{l_1^2 + r^2} - l_1}.$$

а) Пусть  $r \gg l_1, l_2$ , тогда с точностью до малых членов порядка  $l^2/r^2$  находим

$$\Phi \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{l_1 + l_2}{r}.$$

б) Пусть теперь  $r \ll l_1, l_2$ . Тогда с точностью до членов  $r^2/l^2$  получим

$$\Phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{4l_1 l_2}{r^2}.$$

Этот результат можно проверить с помощью теоремы Гаусса, поскольку на малых расстояниях от нити сама нить кажется бесконечной в том смысле, что области вблизи концов нити вносят малый вклад в электрическое поле непосредственно около нити.

Окружим нить гауссовой поверхностью в форме цилиндра единичной длины и произвольного радиуса  $r$  (но достаточно малого!) и учтем, что около нити электрическое поле радиально. Тогда можно написать

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = E_r \int_S da = E_r \cdot 2\pi r = \frac{\lambda}{\epsilon_0}.$$

Отсюда следует, что  $E_r = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$ . Точно такой же результат мы получим, если по найденному выше потенциалу  $\varphi$  определим  $E_r = -\partial\varphi/\partial r$ .

- 4.2. Найдем потенциал  $\varphi$  в точке  $P$ , расположенной на оси диска на расстоянии  $r$  от его центра, разбив диск на кольца шириной  $d\rho$  и средним радиусом  $\rho$ . Отдельные элементы каждого такого кольца одинаково удалены от точки  $P$  на расстояние  $\sqrt{\rho^2 + r^2}$ , поэтому все они дадут одинаковый вклад в  $\varphi$ . Интегрируя по кольцам, т. е. по  $\rho$ , от 0 до  $R$ , находим

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{r^2 + R^2} - r).$$

Отсюда напряженность электрического поля  $E$  равна

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}\right) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

( $\Omega$  — телесный угол, под которым виден диск из точки  $P$ ) и направлена вдоль оси диска.

4.3. а)  $\varphi = \frac{q + q'}{r}$ .

б)

$$E_r = \begin{cases} 0, & r < r_a, \\ \frac{q'}{r^2}, & r_a < r < r_b, \\ 0, & r_b < r < r_c, \\ \frac{q + q'}{r^2}, & r_c < r. \end{cases}$$

в)  $\varphi|_{r=r_a} = \frac{q + q'}{r_c} + \frac{q'}{r_a} - \frac{q'}{r_b}$ .

- г) При  $r > r_c$  в выражении для потенциала появляется слагаемое, спадающее с расстоянием быстрее, чем  $1/r$ , т. е. как  $1/r^2$ . Оно описывает отличие поля от сферически-симметричного. В области  $r_b < r < r_c$  поле по-прежнему равно нулю.

## К главе 5. Применения закона Гаусса

- 5.1. Выберем начало координат в центре сферы. В сферической системе координат элемент поверхности сферы можно записать как  $da = R^2 d\Omega$ , где  $\Omega$  — элемент телесного угла, под которым видна площадка  $da$ . Вообще говоря, потенциал  $\varphi$  зависит от  $r$  и  $\Omega$ , т. е.

$\varphi = \varphi(r, \Omega)$ , где зависимость  $\varphi$  от углов определяется вектором телесного угла  $\Omega$ . Среднее значение потенциала на поверхности сферы радиусом  $R$  дается выражением

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi R^2} \int \varphi(r, \Omega) da = \frac{1}{4\pi} \int \varphi(r, \Omega) d\Omega.$$

Согласно первому закону электромагнетизма, поток напряженности электрического поля  $E = -\nabla \cdot \varphi$  через поверхность сферы равен нулю при отсутствии внутри сферы зарядов, т. е.

$$\begin{aligned} \int \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} da &= \int (\nabla \varphi)_r da = \int \left[ \frac{\partial \varphi(r, \Omega)}{\partial r} \right]_{r=R} \cdot R^2 d\Omega = \\ &= R^2 \left[ \frac{d}{dr} \int \varphi(r, \Omega) d\Omega \right]_{r=R} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\int \varphi(r, \Omega) d\Omega \Big|_{r=R} = \text{const} = \bar{\varphi} \cdot 4\pi.$$

Таким образом, средние значения потенциала на сферических поверхностях любого радиуса одинаковы. Если взять сферу бесконечно малого радиуса, то из-за того, что потенциал слабо меняется на бесконечно малых расстояниях в пространстве, где нет зарядов, значение интеграла можно найти, вынеся из-под интеграла функцию  $\varphi$  в начале координат. При этом  $\int \varphi(r, \Omega) d\Omega = 4\pi\varphi(0)$ . Таким образом,

$$\bar{\varphi} = \varphi(0).$$

5.2. Используя цилиндрическую симметрию задачи, по теореме Гаусса имеем

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L R^2} r;$$

здесь  $Q$  — полный заряд цилиндра,  $R$  — его радиус,  $L$  — его длина. Следовательно, напряженность электрического поля цилиндра линейно зависит от расстояния до оси цилиндра. В случае шара радиусом  $R$  электрическое поле радиально и зависит от  $r$  аналогичным образом:

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r.$$

5.3. Электрические поля  $E_1$  и  $E_2$  в областях выше и ниже пленки однородны и направлены перпендикулярно пластинам. По условию задачи, потенциалы пластин равны. Отсюда следует, что

$$E_1 \frac{d}{3} = E_2 \frac{2d}{3}, \quad \text{т. е.} \quad E_1 = 2E_2.$$

Далее, окружая пленку соответствующей поверхностью, по теореме Гаусса нетрудно показать, что  $E_1 + E_2 = \sigma/\epsilon_0$ , где  $\sigma$  — плотность по-

верхностных зарядов на пленке. Отсюда находим

$$E_1 = \frac{2\sigma}{3\epsilon_0} \quad (\text{у верхней пластины}),$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{3\epsilon_0} \quad (\text{у нижней пластины}).$$

- 5.4. В соответствии с первым уравнением Максвелла имеем  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho(x)/\epsilon_0$ . Из условия задачи ясно, что электрическое поле будет направлено вдоль оси  $x$  и зависеть только от  $x$ . Следовательно, уравнение для  $E(x)$  имеет вид

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем искомый ответ

$$E(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(x) dx.$$

- 5.5. В силу симметрии задачи  $\varphi(x, y, z) = \varphi(x)$ .

а) 
$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{4}{3} kx^{1/2}.$$

Отсюда

$$\sigma|_{x=0} = \epsilon_0 E(0) = 0 \quad \text{и} \quad \sigma|_{x=d} = -\epsilon_0 E(d).$$

Знак минус в последней формуле обусловлен тем, что нормаль к рассматриваемой поверхности коллектора направлена против направления оси  $x$ . Таким образом,

$$\sigma|_{x=d} = \frac{4}{3} kd^{1/2}.$$

- б) Используя результат задачи 5.4, получаем

$$\rho(x) = \epsilon_0 \frac{dE(x)}{dx}$$

(это уравнение Максвелла  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  в одномерном случае). Отсюда, используя результат п. (а) данной задачи, находим

$$\rho(x) = -\frac{4}{9} k\epsilon_0 x^{-2/2}.$$

- 5.6. Искомая сила равна заряду площадки  $dA$ , умноженному на поле, создаваемое всей остальной поверхностью проводника в элементарной площадке  $dA$ . Чтобы вычислить это поле, учтем то, что площадка  $dA$  создает в точках, бесконечно близких к ней, такое же поле, как и бесконечная заряженная плоскость. Величина этого поля равна  $\sigma/2\epsilon_0$  (см. § 6 гл. 5 «Лекций», вып. 5), причем вне и внутри проводника оно направлено от поверхности (считаем, что  $\sigma > 0$ ). Однако полное поле, создаваемое всей остальной поверхностью в площадке  $dA$ , равно  $\sigma/2\epsilon_0$ , откуда сразу же следует формула, приведенная в условии задачи.



- 5.7. Так как напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника связана с плотностью поверхностных зарядов соотношением  $\sigma = \epsilon_0 E$ , то число избыточных зарядов (электронов) равно

$$\Delta n = \frac{\sigma}{q_e} = \frac{\epsilon_0 E}{q_e} \approx 5,5 \cdot 10^8 \text{ м}^{-2}.$$

Расстояние между атомами порядка 2—3 Å ( $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ м}$ ). Поэтому число атомов на единицу площади равно приблизительно  $10^{19} \text{ м}^{-2}$ . Отсюда  $\Delta n/n \approx 2 \cdot 10^{-11}$ .

Сила, испытываемая электроном в поле протона, равна

$$F_1 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Сравним силы  $F_1$  и  $F_2 = q_e E$ . Принимая величину  $a$  равной борovскому радиусу, т. е. 0,5 Å, находим

$$\frac{F_2}{F_1} = \epsilon_0 E \frac{4\pi a^2}{q_e} \approx 2 \cdot 10^{-11}.$$

- 5.8. Если рассматривать ядро как равномерно заряженный шар, то электрическое поле внутри ядра нетрудно найти по теореме Гаусса (см. решение задачи 5.2):

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{r}, \quad r \leq R.$$

Здесь  $R$  — радиус ядра,  $Q$  — полный заряд ядра. Уравнение движения мюона с массой  $\mu$  (нерелятивистское) имеет вид

$$\mu \ddot{r} = - \frac{q_e Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r,$$

или

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0,$$

где введена частота

$$\omega = \sqrt{\frac{q_e Q}{4\pi\epsilon_0 \mu R^3}} = \sqrt{\frac{q_e Q}{4\pi\epsilon_0 \mu R_0^3 A}}.$$

Подставляя сюда  $R_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ ,  $Q = 82 q_e$ ,  $A = 209$ ,  $\mu = 207 m_e$ , находим

$$\hbar\omega = 6,1 \text{ Мэв}.$$

Найденная оценка позволяет интерпретировать наблюдаемое явление как квантовые переходы между уровнями энергии осциллятора с испусканием  $\gamma$ -лучей соответствующей энергии.

- 5.9. Введем по аналогии с электрическим полем напряженность гравитационного поля  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , где  $\phi$  — гравитационный потенциал. Так как законы электростатики и тяготения совпадают по форме, то с помощью теоремы Гаусса можно найти «напряженность» гравитационного поля внутри Земли. Для этого достаточно, например, воспользоваться выражением для  $\mathbf{E}$ , полученным в решении задачи 5.8, заменив в нем  $1/4\pi\epsilon_0$  на гравитационную постоянную  $\gamma$ , а заряд  $q$  на массу  $m$ :

$$\mathbf{E} = - \frac{\gamma M}{R^3} \mathbf{r}, \quad r \leq R,$$

где  $R$  и  $M$  — радиус и масса Земли. Уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{r} = m\mathbf{E} = -m\gamma \frac{M}{R^3} r,$$

или

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0, \text{ где } \omega = \sqrt{\gamma \frac{M}{R^3}} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

( $g$  — ускорение свободного падения). Период колебания

$$T_{\text{кол}} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Для спутника, вращающегося над самой поверхностью Земли, центростремительное ускорение обеспечивается силой гравитации:

$$\frac{mv^2}{R} = mg.$$

Отсюда получаем следующее выражение для линейной скорости:

$$v = \sqrt{gR},$$

и для периода обращения спутника вокруг Земли находим

$$T_{\text{обр}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = T_{\text{кол}},$$

что и требовалось доказать.

- 5.10.** В этой задаче следует воспользоваться математической аналогией задачи об определении стационарного поля температур и задачи электростатики (см. § 4 гл. 3 «Лекций», вып. 5). Если в выражении для  $dT/dr$  заменить потенциал  $\phi$  температурой  $T$ , плотность зарядов  $\rho$  — плотностью источников тепла  $q$ , постоянную  $\epsilon_0$  — теплопроводностью  $\kappa$ , электрическое поле  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  — потоком тепла  $\mathbf{h} = -\kappa\nabla T$ , то оно совпадет с выражением для электрического поля  $E$  внутри равномерно заряженного шара (см. решение задачи 5.8), и, следовательно,

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\kappa R^3} r.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$T(r) = -\frac{Q}{8\pi\kappa R^3} r^2 + D,$$

где  $D$  — постоянная интегрирования, которую следует найти из граничного условия. В качестве последнего можно выбрать  $T(R) = 0$ . Удовлетворяя граничному условию, находим  $D = Q/8\pi\kappa R$  и, следовательно,

$$T(r) = \frac{Q}{8\pi\kappa R^3} (R^2 - r^2).$$

Отсюда температура в центре Земли  $T(0) = Q/8\pi\kappa R = 50\,000$  К. Таким образом, описанная модель не находится в согласии с оценками.

5.11. Выбирая соответствующую симметрии задачи гауссову поверхность в форме цилиндра, получаем

$$E_r = \begin{cases} 0, & r < r_2, \\ \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}, & r_2 < r < r_3, \\ 0, & r_3 < r < r_4, \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r}, & r_4 < r. \end{cases}$$

Интегрируя соотношение  $E_r = -\partial\varphi/\partial r$ , определяем

$$\Delta\varphi = \varphi(r_3) - \varphi(r_2) = \int_{r_3}^{r_2} \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_3}.$$

Из найденных выражений следует:

- 1) при уменьшении  $r_1$  ничего не меняется;
- 2) при увеличении  $r_2 \rightarrow r_3$  электрическое поле  $E$  не меняется, а  $\Delta\varphi$  уменьшается. В пределе  $r_2 \rightarrow r_3$  проводники будут соприкасаться, образуя единый проводник, поле в котором равно нулю, а потенциал всюду постоянный;
- 3) картина поля в пространстве между проводниками изменится. Поскольку поверхности проводников эквипотенциальны, поле  $E$  больше по величине около углов, чем около плоскостей призмы. В среднем поле между проводниками уменьшилось, поскольку уменьшилась средняя плотность заряда на поверхности внутреннего проводника. Соответственно уменьшилась и разность потенциалов между проводниками  $\Delta\varphi$ .

## К главам 6 и 7. Электрическое поле в разных физических условиях

6.1. Полуэллипсы, о которых идет речь в условии задачи, — эквипотенциальные поверхности системы четырех зарядов, изображенных на рисунке. Введение на рисунке трех «изображений» позволяет выполнить обязательное для проводника условие, а именно чтобы вектор напряженности электрического поля в каждой точке проводящих полуэллипсов был им перпендикулярен.

Для решения необходимо найти равнодействующую трех сил:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c.$$

Абсолютные величины сил равны

$$F_a = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4a^2},$$

$$F_b = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4b^2}, \quad F_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4(a^2 + b^2)}.$$

Отсюда находим

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4(a^2 + b^2)} \cos \alpha \right],$$

$$F_y = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4(a^2 + b^2)} \sin \alpha \right].$$

Из рисунка ясно, что

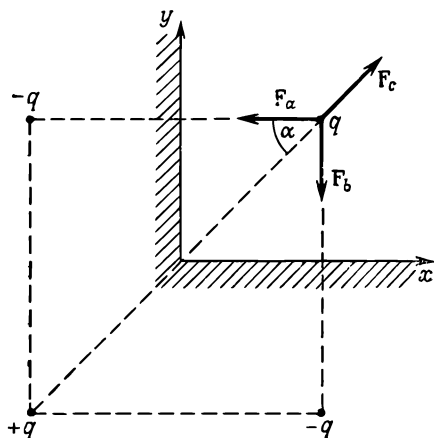
$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Следовательно,

$$F_x = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{a^2} + \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right],$$

$$F_y = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{b^2} + \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right].$$

Равнодействующая сил направлена от заряда  $q$  в угол проводящих полуплоскостей.



6.2. Сила притяжения к электростатическому изображению равна

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4X^2}.$$

Потенциальная энергия заряда равна  $q\varphi$ , причем

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_x^\infty \frac{dX}{4X^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4x}$$

(потенциал на бесконечности принят равным нулю). Кинетическая энергия  $T$  заряда на расстоянии  $x$  от поверхности равна разности потенциальных энергий:

$$T = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x_0} \right].$$

Отсюда видно, что  $T \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ . Это не имеет физического смысла. На самом деле плоскость на бесконечно малых расстояниях от нее нельзя рассматривать как идеально гладкую проводящую плоскость. Необходимо учитывать атомную структуру плоскости.

Оценка при  $x = 1 \text{ \AA}$  и  $x_0 = 1 \text{ см}$  дает

$$T = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x} \approx 3,6 \text{ эв.}$$

Этот ответ (практически не зависящий от  $x_0$ , поскольку  $x_0 \gg x$ ) дает представление о величине «работы выхода» — энергии, которую нужно сообщить электрону, чтобы удалить его из металла.

- 6.3. Обозначим длину, ширину и толщину бруска через  $2a$ ,  $2b$  и  $2c$  соответственно. Пусть  $r$  — расстояние от центра бруска вдоль интересующей нас прямой. Для  $r \gg a$  потенциал  $\varphi$ , создаваемый бруском, такой же, как и для точечного заряда, т. е.

$$\varphi = \frac{8\rho abc}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{или} \quad \ln \frac{\varphi 4\pi\epsilon_0}{8\rho bc} = -\ln \frac{r}{a}.$$

Приближенно можно считать эту формулу справедливой вплоть до  $r = a$ . При меньших  $r$  ( $b < r < a$ ) разумную аппроксимацию  $\varphi$  дает потенциал длинной нити, который запишем в виде

$$\varphi = -\frac{8\rho bc}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a} + D.$$

Постоянную  $D$  выберем из условия непрерывности потенциала при  $r = a$ . Находим  $D = 4\rho bc/2\pi\epsilon_0$ .

Таким образом, при  $b < r < a$

$$\varphi = \frac{8\rho bc}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \ln \frac{r}{a}\right).$$

При  $c < r < b$  хорошее приближение дает формула для бесконечной плоскости

$$\varphi = -\frac{\rho c}{\epsilon_0} r + F.$$

Сравнивая эту формулу с предыдущей при  $r = b$ , получаем

$$F = \frac{\rho bc}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \ln \frac{b}{a}\right).$$

Для  $0 < r < c$  имеем  $\varphi = -(\rho r^2/2\epsilon_0) + G$ , где  $G = -(\rho c^2/2\epsilon_0) + F$ . Мы можем теперь вычислить потенциал в центре бруска

$$\varphi(0) = G = \frac{\rho bc}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{c}{2b} + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \ln \frac{b}{a}\right) \approx 0,6 \cdot 10^5 \text{ в.}$$

Так как  $E_r = -\partial\varphi/\partial r$ , то из найденных выше выражений для  $\varphi$  получим

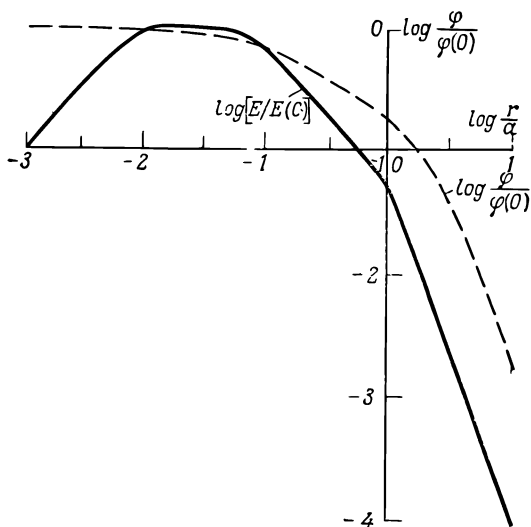
$$E = \frac{8\rho abc}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r \gg a,$$

$$E = \frac{4\rho bc}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad b < r < a,$$

$$E = \frac{\rho c}{\epsilon_0}, \quad c < r < b,$$

$$E = \frac{\rho r}{\epsilon_0}, \quad 0 < r < c.$$

График зависимости  $\log [\varphi/\varphi(0)]$  и  $\log [E/E(0)]$  от  $\log (r/a)$  показан на рисунке.



- 6.4. Заряд, который накопился бы на Земле за время  $t$ , равен  $q = \eta Sq_p t$ , где  $\eta = 1 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  — плотность потока протонов,  $S = 4\pi R^2$  — площадь поверхности Земли,  $R$  — радиус Земли,  $q_p$  — заряд протона. Критический заряд  $q$  Земли, при котором все заряды с кинетической энергией  $E < 4 \cdot 10^9 \text{ эв}$  не будут попадать на Землю, можно найти из очевидного условия

$$\frac{qq_p}{4\pi\epsilon_0 R} = \eta \frac{Stq_p^2}{4\pi\epsilon_0 R} \geq E,$$

откуда

$$t_{\text{крит}} = \frac{E\epsilon_0}{\eta q_p^2 R} \approx 0.1 \text{ года}$$

Земля (по оценкам) существует  $5 \cdot 10^9$  лет. Казалось бы, на Землю уже давно не должно падать ни одного протона. На самом же деле положительный заряд Земли постоянно компенсируется за счет потока электронов, энергия которых слишком мала, чтобы эти электроны можно было отнести к космическим лучам.

- 6.5. Емкость единицы длины цилиндрического конденсатора определяется из соотношения

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

где  $q$  — заряд на единицу длины,  $\varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов цилиндров конденсатора. Используя результаты, полученные при решении задачи 5.11, и считая  $a$  внешним радиусом внутреннего

цилиндра, а  $b$  — внутренним радиусом внешнего, получаем

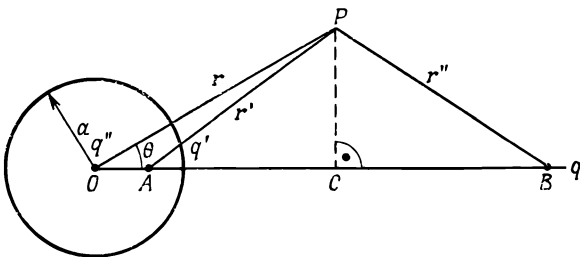
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_a^b E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Следовательно, емкость на единицу длины

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}.$$

Если на внутренней поверхности внешнего цилиндра имеется острый выступ, то емкость конденсатора увеличится. Представим себе, что таких выступов очень много. Это эквивалентно уменьшению отношения  $b/a$  и, естественно, приводит к увеличению емкости в соответствии с полученной формулой. Очевидно, что и появление одного выступа будет вызывать тот же эффект. Если же выступ имеется на внешней поверхности внешнего цилиндра, то он не окажет никакого влияния на емкость конденсатора (поле снаружи конденсатора равно нулю).

- 6.6. а) Чтобы найти поле системы точечный заряд — проводящая сфера, надо поступить следующим образом (см. «Лекции», вып. 5, стр. 125). Необходимо поместить изображение заряда  $q$  величины  $q' = -(a/b)q$  на прямой, проходящей через заряд  $q$  и центр сферы на расстоянии  $a^2/b$  от центра сферы, и, кроме того, в центре сферы поместить заряд  $q'' = -q'$  (см. рисунок)



$$OA = a^2/b,$$

$$OC = r \cos \theta,$$

$$OB = b,$$

$$AC = r \cos \theta - (a^2/b),$$

$$CP = r \sin \theta,$$

$$CB = b - r \cos \theta.$$

Тогда потенциал в точке  $P$  равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r''} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r} \right],$$

где

$$r' = \sqrt{(AC)^2 + (PC)^2} = \sqrt{r^2 - 2\frac{a^2}{b}r \cos \theta + \frac{a^4}{b^2}},$$

$$r'' = \sqrt{(CB)^2 + (PC)^2} = \sqrt{r^2 - 2br \cos \theta + b^2}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2br \cos \theta + b^2}} - \frac{aq/b}{\sqrt{r^2 - 2\frac{a^2}{b}r \cos \theta + \frac{a^4}{b^2}}} + \frac{aq/b}{r} \right].$$

Плотность зарядов на поверхности сферы определяется по формуле

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{ab} - \frac{b^2 - a^2}{a(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^{1/2}} \right].$$

б) В этом случае заряд  $q'' = 4\pi\epsilon_0 Va$ , а сила притяжения к сфере заряда  $q$  дается выражением

$$F = \frac{qq''}{4\pi\epsilon_0 b^2} + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (b - a^2/b)^2} = \frac{qVa}{b^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{ab}{(a^2 - b^2)^2}.$$

6.7. Покажем, что суммарная поверхностная плотность зарядов, создаваемая двумя противоположно заряженными шарами, слабо сдвинутыми друг относительно друга, действительно меняется как  $A \cos \theta$ . Пусть объемная плотность зарядов каждого из шаров по абсолютной величине равна  $\rho$ . Поверхностная плотность при  $\theta = 0$  (см. рисунок), равна  $\rho d$ , а при  $\theta \neq 0$  имеем  $\sigma(\theta) = \rho h(\theta)$ , где  $h(\theta) = d \cos \theta$ . Таким образом,  $\sigma(\theta) = A \cos \theta$ , причем  $A = \rho d$ .

Поскольку поле вне равномерно заряженного шара с плотностью объемных зарядов  $\rho$  равно полю точечного заряда  $q = (4\pi/3)R^3\rho$ , напряженность электрического поля вне сферы равна напряженности электрического поля диполя с дипольным моментом, равным по величине  $p = qd = (4\pi/3)R^3\rho d = (4\pi/3)AR^3$  и направленным по оси  $z$ . Напряженность электрического поля внутри равномерно заряженного шара, как известно, равна

$$\mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0},$$

или

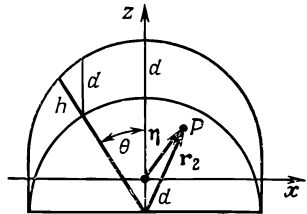
$$E_x = \frac{\rho x}{3\epsilon_0}, \quad E_y = \frac{\rho y}{3\epsilon_0}, \quad E_z = \frac{\rho z}{3\epsilon_0}.$$

Для нашего случая вектор  $\mathbf{E}$  в некоторой точке  $P$ , расположенной внутри сферы, равен

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Расписывая это соотношение в компонентах и принимая во внимание, что  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ ,  $z_1 = z_2 - d$ , находим

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho d}{3\epsilon_0} \mathbf{e}_z = -\frac{A}{3\epsilon_0} \mathbf{e}_z.$$



6.8. а) Угол  $\theta$  определим так же, как в «Лекциях» (вып. 5, стр. 113). Угол  $\varphi_0$  характеризует положение плоскости, проведенной через векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$ . От этого угла не зависит ни потенциал, ни поле. Согласно формуле (6.11) «Лекций» (вып. 5, стр. 113).

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$



Радиальная составляющая напряженности электрического поля

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Тангенциальная составляющая  $E_\theta$  определяется градиентом в перпендикулярном радиусу-вектору направлении. Приращение расстояния на этом пути равно  $dl = r d\theta$  (см. рисунок), поэтому

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}.$$

Поскольку потенциал не зависит от полярного угла, соответствующая компонента напряженности электрического поля  $E_\varphi$  равна нулю.

- б) Угол  $\alpha$  между вектором  $\mathbf{E}$  и прямой, проходящей через начало координат, определяется соотношением (см. рисунок)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta,$$

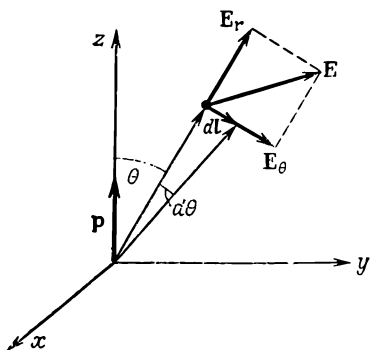
т. е. не зависит от расстояния до диполя.

- в) Из полученных формул находим

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{p}}{r^3} \quad \text{при } \theta = 0$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{p}}{p} \right) \quad \text{при } \theta = \frac{\pi}{4},$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3} \quad \text{при } \theta = \frac{\pi}{2}.$$



- 6.9. а) Потенциал в пространстве при наличии однородного электрического поля можно записать в виде

$$\Phi = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

В случае  $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{p} \parallel \mathbf{e}_z$  имеем

$$\Phi = -E_0 z + \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3} = z \left( \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0 \right).$$

Эквипотенциальную поверхность определим из условия

$$\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0 = 0, \quad \text{откуда} \quad r = \left( \frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}.$$

Если радиус сферы равен  $a$ , то  $p = E_0 a^3 \cdot 4\pi\epsilon_0$ .

- б) Электрическое поле вычисляем по формуле

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \mathbf{E}_0 + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - p r^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3\mathbf{r}z p}{4\pi\epsilon_0 r^5}.$$

На поверхности сферы

$$E = 3E_0 \cos \theta.$$

в) Поле не изменится.

г)  $\sigma = \epsilon_0 E = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$ .

д)  $\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \sigma dS = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0 \mathbf{e}_z$ , где  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ .

е) Полученные результаты могут быть использованы, в частности, для решения задачи о поле и распределении зарядов металлической сферы, помещенной в однородное внешнее электрическое поле.

- 6.10. Соответствующим образом выбирая поверхность, с помощью теоремы Гаусса легко можно найти напряженность электрического поля равномерно заряженной нити:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y}{r^2},$$

где  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  — единичные векторы в плоскости, перпендикулярной нити, направленные вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Найдем выражения для силы  $\mathbf{F}$  и ее момента  $\mathbf{M}$ , действующих на диполь в произвольном электрическом поле напряженностью  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ .

Предположим, что отрицательный заряд диполя расположен в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , а положительный заряд — в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r} + \mathbf{d}$ , так что дипольный момент диполя равен  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ . Тогда суммарная сила, действующая на диполь, может быть представлена как сумма сил, действующих на его заряды:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) - q\mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Считая величину  $\mathbf{d}$  малой, разложим электрическое поле в точке  $\mathbf{r} + \mathbf{d}$  в ряд по  $\mathbf{d}$  и ограничимся линейными по  $\mathbf{d}$  членами разложения:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} dz = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Подставляя этот ряд в выражение для  $\mathbf{F}$ , находим

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

Чтобы вычислить момент сил, действующих на диполь, поступим аналогичным образом. Вспоминая определение момента силы, с точностью до линейных по  $\mathbf{d}$  членов разложения находим

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{r} + \mathbf{d}) \times q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) - \mathbf{r} \times q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \\ &= q\mathbf{d} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (q\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Учитывая найденное выше выражение для силы  $\mathbf{F}$ , окончательно находим

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

а) Выполняя несложное дифференцирование, имеем

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \quad \mathbf{M} = 0.$$

б)

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{M} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r}.$$

В последнем случае момент силы направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через нить и диполь.

- 6.11. Задачу нетрудно решить, если рассматривать данную пластину как плоский конденсатор с бесконечно малым расстоянием  $d$  между его обкладками и с плотностями поверхностных зарядов  $+\sigma$  и  $-\sigma$ , такими, что  $p = N\sigma d$ . Электрическое поле вне такого конденсатора равно нулю, в чем можно убедиться из теоремы Гаусса. Поэтому потенциалы электрического поля по обеим сторонам от пластины постоянны и не зависят от расстояния до этой пластины. Однако величина этих потенциалов различна, причем разность между ними есть не что иное, как разность потенциалов между пластинами конденсатора. Так как напряженность электрического поля внутри плоского конденсатора равна  $\sigma/\epsilon_0$ , то разность потенциалов равна  $\sigma d/\epsilon_0 = p/\epsilon_0$ .

6.12. а) 
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right].$$

б) 
$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{x^2} + \frac{x}{[a^2 + x^2]^{3/2}} \right].$$

- в) Пусть  $x \gg a$ . Тогда с точностью до малых членов порядка  $a^2/x^2$  имеем

$$E_x = -\frac{3qa^2}{8\pi\epsilon_0 x^4}.$$

Следовательно, электрическое поле кольца убывает быстрее поля диполя. Это происходит в силу того, что дипольный момент заряженного кольца равен нулю.

- 6.13. Уменьшение тока при  $t > t_1$  происходит потому, что заряд верхней пластины меняет знак и начинает отталкивать электроны.

Заряд на пластине конденсатора после отсоединения батареи равен  $q = C\varphi$ , где  $C$  — емкость,  $\varphi$  — разность потенциалов между пластинами. Время, в течение которого будет скомпенсирован этот заряд  $q$ , определится из условия  $q = It_1$ . Отсюда

$$t_1 = 1000 \text{ сек.}$$

Ток обратится в нуль, когда разность потенциалов такова, что  $e\varphi_{\text{макс}}$  равно максимальной энергии частиц 1,5 эв. При  $t > t_2$  разность потенциалов постоянна и равна 1,5 в. При увеличении расстояния между пластинами емкость конденсатора падает вдвое. Если это увеличение произошло до того, как конденсатор был полностью заряжен, то после отсоединения батареи заряд на пластинах будет вдвое меньше и, следовательно, время  $t_1$  также вдвое меньше.

Если расстояние между пластинами увеличить после удаления батареи, то как заряд на пластинах, так и время  $t_1$  не изменятся.

- 6.14. а) Для бесконечно длинной палочки напряженность электрического поля нетрудно вычислить по теореме Гаусса:

$$E = \begin{cases} \frac{ar^3}{4\epsilon_0} \frac{r}{r}, & r \leq R, \\ \frac{aR^4}{4\epsilon_0 r} \frac{r}{r}, & r \geq R, \end{cases}$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси палочки. Таким образом,

$$E(0, 0, 0) = 0,$$

$$E(0, 0,005, 0) = \frac{ar^3}{4\epsilon_0} = 0,7 \cdot 10^4 \text{ в/м},$$

$$E(0, 0,01, 0) = \frac{aR^3}{4\epsilon_0} = 5,6 \cdot 10^4 \text{ в/м},$$

$$E(0, 0,02, 0) = \left(\frac{aR^3}{4\epsilon_0}\right) \frac{R}{0,02} = 2,8 \cdot 10^4 \text{ в/м}.$$

- б) Значение потенциала в начале координат можно найти из интегрального выражения

$$\varphi(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r}'|},$$

в котором интегрирование производится по объему палочки. Интегрирование удобно выполнить в цилиндрической системе координат. Именно, разбивая поперечное сечение цилиндра на кольца площадью  $2\pi r dr$ , а длину цилиндра на отрезки  $dx$ , запишем  $|\mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + x^2}$ ,  $dV = 2\pi r dr dx$ . Тогда

$$\varphi(0) = \frac{2\pi a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R r^3 dr \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{a}{\epsilon_0} \int_0^R r^3 \ln \frac{l + \sqrt{4r^2 + l^2}}{-l + \sqrt{4r^2 + l^2}} dr.$$

Поскольку  $l/2r \geq 50$ , разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням отношения  $2r/l$ . Ограничиваясь первыми двумя членами разложения, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \frac{a}{\epsilon_0} \int_0^R r^3 \left( \ln \frac{l}{r} + \frac{r^2}{l^2} + \dots \right) dr = \\ &= \frac{aR^4}{\epsilon_0} \left[ \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \ln \frac{l}{R} + \frac{R^2}{6l^2} \right] \approx \frac{aR^4}{16\epsilon_0} \left[ 1 + 4 \ln \frac{l}{R} \right]. \end{aligned}$$

Точность этого выражения оценим, вычислив поправку  $aR^6/6\epsilon_0 l^2$ . Подставляя численные значения из условия задачи, находим  $\varphi(0, 0, 0) \approx 2350$  в, причем ошибка составляет примерно 0,15 в.

- в) Для того чтобы положительный заряд переместить в начало координат из точки  $(0, 0, l/2)$ , необходимо затратить работу против сил отталкивания внутри самой палочки. Поэтому потенциал в точке  $(0, 0, l/2)$  меньше, чем в центре палочки.

## К главе 7. Электрическое поле в разных физических условиях (продолжение)

- 7.1. а) Потенциал, создаваемый нитями в произвольной точке  $P(x, y)$ , дается выражением

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1)$$

Эквипотенциальные поверхности определяются условием  $r_2/r_1 = \text{const}$ , т. е.

$$\frac{(x - d/2)^2 + y^2}{(x + d/2)^2 + y^2} = \text{const}.$$

Если это уравнение записать иначе, т. е.  $(x - a)^2 + y^2 = R^2$ , то видно, что оно описывает цилиндр вращения. В последнем уравнении  $a$  и  $R$  — некоторые константы, выражающиеся через величины, входящие в исходное уравнение.

- б) Определим емкость, приходящуюся на единицу длины. Для этого вычислим потенциал проводов:

$$\Phi|_{\text{провода}+\lambda} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{d},$$

$$\Phi|_{\text{провода}-\lambda} = +\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{d}.$$

Отсюда

$$\Phi|_{+\lambda} - \Phi|_{-\lambda} = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{d}$$

и

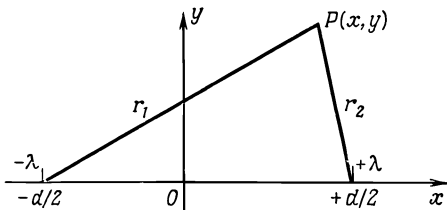
$$C^* = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/r_0)}.$$

в)

$$f(z) = U + iV = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Покажем, что  $\Phi = \text{Re } f(z)$  при  $x, y \gg d$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}}{\sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}} \approx \\ &\approx -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x^2 + y^2) + xd}{(x^2 + y^2) - xd} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(1 + \frac{2xd}{x^2 + y^2}\right) \approx \\ &\approx -\frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2} = -\frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0} \text{Re } \frac{1}{z}. \end{aligned}$$



## К главе 8. Электростатическая энергия

- 8.1. Энергия взаимодействия пары протонов  $p_i$  и  $p_j$  равна  $e^2/r_{ij}$ , где  $r_{ij}$  — расстояние между протонами, которые будем считать точечными. Среднее значение величины  $1/r_{ij}$  при равномерном распределении точек по шару равно  $6/5r$  (см. § 1 гл. 8 «Лекций», вып. 5), а число

пар протонов, очевидно, составляет  $Z(Z-1)/2$ . Следовательно, электростатическая энергия кулоновского взаимодействия протонов в ядре равна  $(3/5)Z(Z-1)(q^2/4\pi\epsilon_0 r)$ .

- 8.2. Энергия заряженного конденсатора емкостью  $C$  определяется формулой  $U = (1/2)CV^2$ , где  $V$  — разность потенциалов на обкладках. Искомая работа равна разности энергий конденсатора до и после поворота ручки настройки:

$$U_1 - U_2 = \frac{C_1 - C_2}{2} V^2 = 4,05 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

- 8.3. Суммарная энергия конденсаторов до их параллельного соединения записывается в виде

$$U_0 = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Поскольку при параллельном соединении конденсаторов их емкости складываются, то энергия системы после соединения равна

$$U_1 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Вычислим разность

$$U_1 - U_0 = - \frac{(q_1 C_2 - q_2 C_1)^2}{2C_1 C_2 (C_1 + C_2)} < 0.$$

Избыток энергии излучается или теряется на тепло в соединительных проводах. Потери энергии не происходит, если  $q_1 C_2 = q_2 C_1$ .

- 8.4. а) Пусть  $\varphi(\mathbf{r})$  — потенциал внешнего электрического поля, в котором в точке  $\mathbf{R}$  помещен диполь, обладающий моментом  $\mathbf{p}$ , т. е. в точке  $\mathbf{R} + \mathbf{r}_1$  имеется заряд  $+q$ , а в точке  $\mathbf{R} + \mathbf{r}_2$  — заряд  $-q$  ( $|\mathbf{r}_1|$  и  $|\mathbf{r}_2| \ll |\mathbf{R}|$ ), так что  $\mathbf{p} = q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ . Энергия зарядов диполя во внешнем поле равна

$$\begin{aligned} U &= q [\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_2)] = \\ &= q [\varphi(\mathbf{R}) + \mathbf{r}_1 \nabla \varphi|_{\mathbf{r}=0} + \dots] - q [\varphi(\mathbf{R}) + \mathbf{r}_2 \nabla \varphi|_{\mathbf{r}=0} + \dots] = \\ &= q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \nabla \varphi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (1)$$

- б) В общем случае момент сил, действующий на диполь, равен (см. решение задачи 6.10)

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \mathbf{R} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}).$$

Отсюда в случае однородного электрического поля следует  $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$  [так как  $(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = 0$ ]. Последнее выражение получается также и другим путем: если ввести угол  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$ , то из выражения (1) получаем, что действующий на диполь момент сил определяется выражением

$$M = \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (-pE \cos \alpha) = pE \sin \alpha$$

и направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$ , т. е.  $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ .

- в) Если диполь создан путем последовательного помещения зарядов в электрическое поле, то его электростатическая энергия

будет отличаться от (1). Действительно, если заряд  $+q$  помещен в точке  $\mathbf{R} + \mathbf{r}_1$  и, следовательно, обладает энергией  $q\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_1)$  то при помещении заряда  $-q$  в точку  $\mathbf{R} + \mathbf{r}_2$  будет затрачена работа

$$-q\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_2) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Таким образом, энергия диполя в этом случае будет меньше, и она равна

$$U = q\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_1) - q\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_2) - \frac{q^3}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{p}|} = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) - \frac{q^3}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{p}|}.$$

Искомая разность энергий равна  $q^3/4\pi\epsilon_0 |\mathbf{p}|$  и имеет смысл энергии взаимодействия зарядов, составляющих диполь.

- 8.5. Электростатическая энергия конденсатора равна  $W = q^2/2C$ , где  $q$  — заряд на обкладках,  $C$  — емкость, равная  $C = \epsilon_0 A/d$  ( $d$  — расстояние между обкладками,  $A$  — их площадь). Искомая сила дается выражением

$$F = -\frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 A},$$

а работа этой силы на расстоянии  $dx$  равна  $-(q^2/2\epsilon_0 A)dx$ .

- 8.6. Разность  $\Delta$  энергий покоя мезонов равна  $\Delta = (m_{\pi^+} - m_{\pi^-})c^2 = 4,6 \text{ Мэв}$ . Если заряд мезонов равномерно «размазан» по объему шара, то собственная электростатическая энергия мезона дается выражением [см. формулу (8.7) в «Лекциях» (вып. 5) и решение задачи 8.1]

$$W = \frac{3}{5} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Из условия  $\Delta = W$  получаем радиус пиона  $a = 2 \cdot 10^{-14} \text{ см}$ . Отсюда видно, что определенный таким образом радиус пиона оказывается меньше характерных размеров ядра.

- 8.7. Когда оболочка не заряжена, то на основании закона Гаусса убеждаемся, что электрическое поле помещенного в начало координат заряда  $q_1$  внутри ( $r \leq a$ ) и вне оболочки ( $r > b$ ) совпадает с хорошо известным электрическим полем точечного заряда  $q_1$ . В самой же оболочке ( $a \leq r \leq b$ ) напряженность электрического поля равна нулю. Очевидно, работа по перемещению заряда из бесконечности в начало координат равна разности энергий, заключенных в поле, одна из которых отвечает заряду в начале координат, а вторая — заряду  $q_1$ , помещенному на бесконечности. (Тот факт, что энергия точечного заряда бесконечна, не приводит к затруднению, поскольку мы вычисляем не сами энергии, а их разность). Искомая работа  $W_1$  дается выражением

$$W_1 = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{a \leq r \leq b} \mathbf{E}^2 dV = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{a-b}{ab}.$$

Когда оболочка имеет заряд  $q_2$ , ситуация несколько иная. В начальном состоянии, когда заряд  $q_1$  находится на бесконечности, энергия, сосредоточенная в поле, равна энергии точечного заряда  $q_1$  плюс энергия в поле, создаваемом сферической оболочкой. Последнее, как

легко убедиться на основании теоремы Гаусса, отлично от нуля лишь при  $r \geq b$  и совпадает с полем точечного заряда  $q_2$ . В конечном же состоянии, когда заряд  $q_1$  расположен в начале координат, величина напряженности электрического поля в пространстве ведет себя следующим образом (разумеется, поле всюду радиально):

$$E = \begin{cases} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r < a, \\ 0, & a \leq r \leq b, \\ \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > b. \end{cases}$$

Следовательно, искомая работа  $W_2$  во втором случае равна

$$\begin{aligned} W_2 &= W_1 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r \geq b} \left[ \left( \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 - \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 - \left( \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \right] dV = \\ &= \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{a-b}{ab} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 b}. \end{aligned}$$

## К главе 10. Диэлектрики

10.1. Для энергии конденсатора можно написать соотношение

$$\kappa_1 \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV_1 + \kappa_2 \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV_2 = \frac{CV^2}{2},$$

где  $V$  — разность потенциалов на обкладках, а интегрирование производится по двум областям конденсатора. Поскольку поле  $E$  в конденсаторе можно считать однородным, то из этого соотношения, если учесть, что  $Ed = V$ , следует

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{2}.$$

10.2. Емкость конденсатора без диэлектрика равна  $C_0 = A\epsilon_0/d$  ( $A$  — площадь пластин,  $d$  — расстояние между ними). Заряд  $Q = C_0 V_0$  ( $V_0$  — разность потенциалов). При вдвижении диэлектрика величина  $Q$  не меняется, емкость же возрастает, причем она определяется выражением (см. решение задачи 10.1 при  $\kappa_1 = 1$ )  $C = A\epsilon_0(1 + \kappa)/2d = C_0(1 + \kappa)/2$ . Энергия конденсатора при этом равна

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C_0 V_0^2}{1 + \kappa}.$$

а) Искомая сила

$$F = - \frac{\partial U}{\partial d} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial d} = - \frac{C_0 V_0^2}{(1 + \kappa)} \frac{1}{d} = - 7,1 \cdot 10^{-8} \text{ ньютон.}$$

б) Дипольный момент единицы объема при этом равен

$$\begin{aligned} P &= (\kappa - 1) \epsilon_0 E = (\kappa - 1) \epsilon_0 \frac{V}{d} = \frac{(\kappa - 1) \epsilon_0}{Cd} Q = \\ &= \frac{(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)} \frac{2\epsilon_0 V_0}{d} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ кулон/м}^2. \end{aligned}$$

в) Меньше.



- 10.3. В отсутствие диэлектрика заряд  $Q$  на пластинах конденсатора и разность потенциалов между обкладками  $\varphi_0$  связаны соотношением  $Q = C_0\varphi_0$ , где  $\varphi_0 = E_1d$  ( $d$  — расстояние между пластинами). При наличии диэлектрика  $Q = C\varphi$ , причем  $E_2 = E_1/\kappa$ . Отсюда  $Q = C[E_1(d-t) + E_1t/\kappa]$ . Поскольку, с другой стороны,  $Q = C_0E_1d$ , то, приравняв выражения для  $Q$ , находим

$$C = C_0 \left[ 1 - \frac{t}{d} \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \right]^{-1}.$$

- 10.4. Вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  в любой точке  $\mathbf{r}$  внутри диэлектрика равен

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Так как  $\mathbf{D} = \kappa\epsilon_0\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ , то

$$\mathbf{P} = (\kappa - 1)\epsilon_0\mathbf{E} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa}\mathbf{D} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Поверхностная плотность зарядов  $\sigma_{\text{пол}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ .

- а) Наведенные на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика заряды  $Q_a$  и  $Q_b$  определяются выражением

$$Q_a = Q_b = 4\pi a^2 \sigma_{\text{пол}}|_{r=a} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

- б)  $\rho_{\text{пол}} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ .

- 10.5. Изменение внутренней энергии конденсатора  $U = Q^2/2C$  (здесь  $Q$  — заряд на пластинах,  $C$  — емкость) в процессе, в котором механические силы вдвигают диэлектрик, изменяя емкость конденсатора, а батарея совершает работу по изменению заряда пластин на величину  $dQ$ , определяется выражением

$$dU = \frac{Q}{C} dQ - \frac{Q^2}{2C^2} dC.$$

Первое слагаемое в данном выражении представляет собой работу, совершаемую электрической батареей при изменении заряда на пластинах конденсатора, а второе — работу механических сил со знаком минус.

Поскольку разность потенциалов на пластинах сохраняется постоянной и равной  $V_0 = Q/C$ , выражение для  $dU$  можно записать в виде

$$dU = V_0 dQ - \frac{V_0^2}{2} dC.$$

- а) Подсчитаем работу, совершаемую электрической батареей. Учитывая, что заряд на пластинах в начальном состоянии равен  $q_0$ , а в конечном состоянии  $\kappa q_0$ , находим

$$\int_{q_0}^{\kappa q_0} V_0 dQ = V_0 \int_{q_0}^{\kappa q_0} dQ = q_0 V_0 (\kappa - 1).$$

- б) Емкость конденсатора в начальном состоянии равна  $q_0/V_0$ , а в конечном  $\kappa q_0/V_0$ . Следовательно, механические силы совершают работу

$$\int_{q_0/V_0}^{\kappa q_0/V_0} \frac{V_0^2}{2} dC = \frac{V_0 q_0}{2} (\kappa - 1).$$

Эта работа, как мы видим, производится над диэлектриком.

- 10.6. В некотором смысле данная задача аналогична п. (б) предыдущей задачи. Над диэлектриком (маслом) совершается механическая работа, которая переходит в потенциальную энергию столбика масла в поле силы тяжести. Эта работа дается выражением

$$W = \frac{V^2}{2} (C_2 - C_1),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — емкости трубки до и после втягивания масла на высоту  $h$ . Так как емкость единицы длины цилиндрического конденсатора  $C_0 = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$  (см. решение задачи 6.5), то

$$W = \frac{V^2}{2} (\kappa - 1) h \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}.$$

Вес столбика втянутого масла равен  $\pi(b^2 - a^2)\rho gh$ . Потенциальная энергия этого столбика в поле силы тяжести равна весу, умноженному на координату его центра тяжести, т. е. на  $h/2$ :

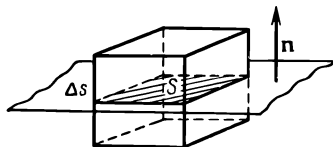
$$\frac{\pi(b^2 - a^2)}{2} \rho gh^2.$$

Из условия равенства работы механических сил и потенциальной энергии находим требуемый результат:

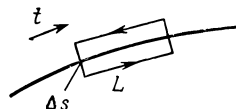
$$h = \frac{2\epsilon_0 V^2 (\kappa - 1)}{(b^2 - a^2) \rho g \ln(b/a)}.$$

- 10.7. Граничные условия на границе раздела двух сред (1) и (2) имеют вид:  $E_{1t} = E_{2t}$ ,  $D_{1n} = D_{2n}$  или  $E_{1n}/\kappa_1 = E_{2n}/\kappa_2$ , где индексами  $n$  и  $t$  помечены нормальные и тангенциальные к поверхности раздела составляющие векторов. Эти граничные условия следуют из уравнений Максвелла  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  и  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ .

Действительно, рассмотрим произвольную поверхность раздела двух сред (фиг. 1). Выберем произвольным образом направление внешней нормали  $\mathbf{n}$  к этой поверхности и условимся обозначать индексами 1 и 2 величины, относящиеся соответственно к нижней и верхней средам.



Фиг. 1



Фиг. 2

Выделим мысленно около рассматриваемой точки поверхности прямоугольную призму с образующими  $\Delta s$ , перпендикулярными поверхности. Пусть эта призма вырезает на поверхности элемент площади  $S$  столь

малый, это его можно считать плоским. По теореме Гаусса поток вектора электрической индукции через поверхность призмы должен равняться нулю, т. е.  $\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = \int \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV = 0$ . При стремлении  $\Delta s$  к нулю поток вектора  $\mathbf{D}$  через боковую поверхность призмы также стремится к нулю. Для потока же через верхнее и нижнее основания призмы получаем

$$(\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}) S - (\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}) S = 0.$$

Отсюда следует искомое граничное условие

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Покажем теперь, что на границе раздела двух сред касательная (тангенциальная) составляющая вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  непрерывна. С этой целью выберем около произвольной поверхности (на фиг. 2 ее сечение плоскостью рисунка показана сплошной линией) контур в виде прямоугольной рамки, боковые стороны  $\Delta s$  которой нормальны к поверхности раздела сред. Выберем размеры этого контура столь малыми, чтобы поверхность раздела двух сред можно было считать плоской. На эту рамку мысленно «напьем» стоксову поверхность. Тогда по теореме Стокса имеем

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \, da = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

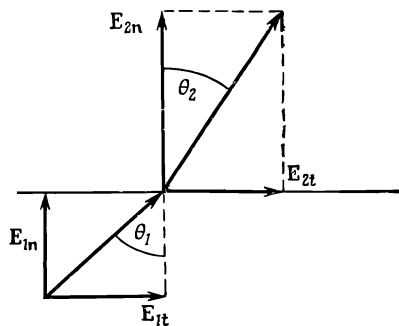
Но при стремлении  $\Delta s$  к нулю вклад в интеграл по контуру от боковых сторон рамки также стремится к нулю. Если длину  $L$  верхней и нижней сторон рамки выбрать достаточно малой, то напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  на этих сторонах рамки можно считать однородной. Отсюда  $(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}) L - (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}) L = 0$ , или  $E_{1t} = E_{2t}$ .

Из фиг. 3 имеем

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}.$$

Отсюда следует, что

$$\kappa_1 \operatorname{ctg} \theta_1 = \kappa_2 \operatorname{ctg} \theta_2.$$



Фиг. 3

## К главе 11. Внутреннее устройство диэлектриков

- 11.1. Представим себе однородно поляризованный шар в виде двух равномерно заряженных шаров, полные заряды которых одинаковы по величине, но противоположны по знаку, а центры сдвинуты друг относительно друга на бесконечно малое расстояние. В решении задач 6.7 было показано, что электрическое поле такой системы совпадает с электрическим полем сферы, плотность поверхностных зарядов на которой меняется в виде  $A \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол, отсчитываемый от оси  $z$  (последнюю следует выбрать вдоль направления вектора поля-

ризации шара). При этом напряженность электрического поля вне этой сферы равна напряженности электрического поля диполя с дипольным моментом  $p = (4\pi/3)Aa^3$ :

$$E = \frac{pr^2 - 3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad r > a.$$

Здесь вектор  $\mathbf{p}$ , очевидно, совпадает с вектором полного дипольного момента равномерно поляризованного шара. Внутри же такого шара поле  $\mathbf{E}$ , согласно решению задачи 6.7, равно

$$E = \frac{A}{3\epsilon_0} \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 a^3}, \quad r \leq a.$$

11.2.  $\rho_{\text{He}} = \frac{(\kappa - 1)}{N} \epsilon_0 E = 2,4 \cdot 10^{-37} \text{ кулон} \cdot \text{м}.$

11.3. Для водяного пара [см. «Лекции», вып. 5, уравнение (11.21)]  $\kappa - 1 = N\rho_0^2/3\epsilon_0 kT$ . Следовательно, температурная зависимость поляризуемости  $\alpha = (\kappa - 1)/N$  имеет вид  $\alpha = A/T$ , где  $A = \rho_0^2/3\epsilon_0 k$ ;  $N$  (число частиц в единице объема) можно найти из уравнения состояния идеального газа  $p = NkT$  ( $p$  — давление пара,  $k$  — постоянная Больцмана). По данным таблицы, приведенной в условии задачи,  $N = 1,138 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Для  $\alpha$  имеем следующую таблицу значений:

$\alpha \cdot 10^{30}$	238	250	269	290
$(1/T) \cdot 10^5$	207	220	236	254

Если построить зависимость  $\alpha = f(1/T)$ , то экспериментальные точки лягутся на прямую, тангенс угла наклона которой равен  $A = 1,12 \cdot 10^{-25}$ . Отсюда  $\rho_0 = \sqrt{3\epsilon_0 kA} = 2 \cdot 10^{-26} \text{ кулон} \cdot \text{м}.$

11.4. Энергетически выгодно, чтобы дипольные моменты располагались в одном направлении вдоль линии, соединяющей атомы. При этом в простом варианте задачи (для пары атомов) можно написать, что  $E = (1/4\pi\epsilon_0)(2p/a^3)$ . Используя затем соотношение  $p = \alpha\epsilon_0 E$ , находим ответ:  $a^3 = \alpha/2\pi$ .

В случае бесконечной цепочки атомов электрическое поле в месте расположения атома кислорода определяется выражением

$$E_O = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\rho_O}{(2na)^3} + \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\rho_{Ti}}{(a + 2na)^3} =$$

$$= \frac{1}{8\pi a^3} (\rho_{O\zeta_1} + 8\rho_{Ti}\zeta_2),$$

где  $\zeta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^3) \approx 1,2$ , а  $\zeta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n + 1)^3$ .

Поменяв атом кислорода на атом титана, получим второе уравнение. Легко сообразить, что

$$\zeta_1 = \zeta_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = \zeta_2 + \frac{1}{8} \zeta_1,$$

откуда  $\xi_2 = (\sqrt{7/8})\xi_1$ . Определим  $\alpha_1 = 8\pi a^3/\xi_1$  и учтем, что  $p_O = \alpha_O E_O$  и  $p_{T1} = \alpha_{T1} E_{T1}$ . Тогда можем написать систему уравнений

$$\begin{aligned}(\alpha_O - \alpha_1) E_O + 7\alpha_{T1} E_{T1} &= 0, \\ 7\alpha_O E_O + (\alpha_{T1} - \alpha_1) E_{T1} &= 0.\end{aligned}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т. е. если

$$(\alpha_O - \alpha_1)(\alpha_{T1} - \alpha_1) - 49\alpha_{T1}\alpha_O = 0.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_1 = \frac{8\pi}{\xi_1} a^3 = \frac{\alpha_O + \alpha_{T1} + \sqrt{(\alpha_O + \alpha_{T1})^2 + 192\alpha_O\alpha_{T1}}}{2}.$$

Заметим, что если положить  $\alpha_O = \alpha_{T1}$ , то наш ответ запишется в виде

$$\alpha_O = \frac{\pi}{\xi_1} a^3.$$

Таким образом, в случае бесконечной цепочки одинаковых атомов необходима примерно в два раза меньшая поляризуемость, чем в случае двух атомов, чтобы система стала сегнетоэлектриком.

- 11.5. В однородном внешнем электрическом поле  $\mathbf{E}$  каждый шарик поляризуется равномерно. Пусть  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации шарика. Внутри шарика равномерная поляризация создает однородное электрическое поле напряженностью  $-\mathbf{P}/3\epsilon_0$  [см. «Лекции», вып. 5, формула (11.24)]. Внутри каждого шарика (их взаимным влиянием друг на друга мы пренебрегаем в соответствии с условием задачи) суммарное электрическое поле  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E} - \mathbf{P}/3\epsilon_0$ . Поскольку  $\mathbf{P} = \epsilon_0(\kappa - 1)\mathbf{E}_i$ , имеем

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\kappa - 1)\mathbf{E} - \frac{\kappa - 1}{3}\mathbf{P},$$

откуда

$$\mathbf{P} = \frac{3(\kappa - 1)}{\kappa + 2}\epsilon_0\mathbf{E}$$

Умножив  $\mathbf{P}$  на объем шара, т. е. на  $(4\pi/3)(d/2)^3$ , получим полный дипольный момент равномерно поляризованного шарика

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi(\kappa - 1)}{\kappa + 2}\left(\frac{d}{2}\right)^3\epsilon_0\mathbf{E}.$$

Так как  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathcal{P}/(3d)^3\epsilon_0$ , то для диэлектрической проницаемости решетки шариков получаем

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi(\kappa - 1)}{6^3(\kappa + 2)}.$$

## К главе 12. Электростатические аналогии

- 12.1. Исходя из электростатической аналогии, нам нужно найти потенциал в центре тонкого равномерно заряженного кольца. Имеем

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a},$$

где  $Q = \rho l a^2 b$  — полный заряд кольца. Переходя к задаче о распределении температуры, вспомним, что мы вычислили разность потенциалов между центром кольца и бесконечно удаленной точкой. Если потенциал на бесконечности равен  $\Phi_0$ , то в центре кольца он равен

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \Phi_0.$$

Переходя к «температурным величинам», находим температуру в центре кольца (при таком переходе  $\Phi \rightarrow T$ ,  $\rho \rightarrow \epsilon_0 S/\chi$ ; см. «Лекции», вып. 5, стр. 242):

$$T = \frac{W}{4\pi\chi a} + T_0.$$

- 12.2. Используя аналогию с электростатической задачей, находим  $T(r) = -(Sr^2/6\chi) + D$ , где  $S = W/(4\pi/3)R^3$  — плотность источников тепла;  $W = 8 \cdot 10^{20} \text{ дж/год}$ ;  $R$  — радиус Земли. Константу  $D$  определим из условия  $T(a) = T_0 = 2500^\circ \text{C}$ , т. е.  $D = T_0 + Sa^2/6\chi$ . Радиус  $a$  можно найти, положив приближенно температуру поверхности Земли равной нулю. Из этого условия следует

$$a = R \sqrt{1 - \frac{8\pi\chi T_0 R}{W}} = 5870 \text{ км.}$$

- 12.3. а) Трехмерный случай:  $\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z r^{n-1}$ . Подставляя это выражение для  $\Phi$  в уравнение  $\Delta\Phi = 0$ , получаем в результате  $\Delta\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-1)(n+2)b_n z r^{n-3} = 0$ . Это уравнение имеет нетривиальное решение при условии, что коэффициенты  $b_1$  и  $b_{-2}$  отличны от нуля. Следовательно,

$$\Phi = b_1 z + \frac{b_{-2} z}{r^3}.$$

- б) Двумерный случай:  $\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z \rho^{n-1}$ . В этом случае  $\Delta\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-1)(n+1)c_n z \rho^{n-3} = 0$ . Следовательно, лишь  $c_1$  и  $c_{-1}$  отличны от нуля, и решение имеет вид

$$\Phi = c_{1z} + c_{-1z}/\rho^2.$$

- 12.4. Задача математически аналогична задаче 7.1. Поэтому для  $T$  можно сразу написать решение, если в задаче 7.1 линейную плотность зарядов положить равной  $\lambda = W\epsilon_0/\chi t$ :

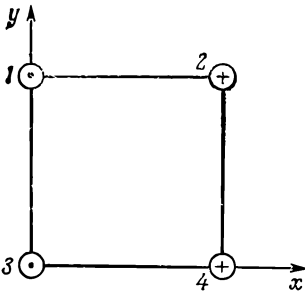
$$T(r) = -\frac{W}{2\pi\chi t} \ln \frac{r_2}{r_1} + D.$$

В этом выражении  $r_2 = \sqrt{[x - (d/2)]^2 + y^2}$  и  $r_1 = \sqrt{[x + (d/2)]^2 + y^2}$  — расстояния от произвольной точки до труб с источниками  $+W$  и  $-W$  соответственно (см. рисунок к решению задачи 7.1). Постоянная  $D = T_0$  определяется из того условия, что в точках, достаточно удаленных от труб, температура равна  $T_0$ . В точке с координатами  $x = 100d$  и  $y = 100d$  имеем  $T = 20,5^\circ \text{C}$ .

## К главе 13. Магнитостатика

13.1. а) Напряженность магнитного поля, создаваемого током, текущим по бесконечному прямому проводу, на расстоянии  $r$  от последнего равна  $\mathbf{B} = (\mathbf{I} \times \mathbf{e}_r) / 2\pi\epsilon_0 c^2 r$ , где  $\mathbf{I}$  — вектор тока, равный по величине силе тока и направленный вдоль тока, а  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор в направлении радиуса-вектора, расположенного в плоскости, перпендикулярной проводу. В центре квадрата компоненты вектора напряженности магнитного поля равны  $B_y = 2I / \pi\epsilon_0 c^2 a = 8 \cdot 10^{-5}$  вебер/м<sup>2</sup>,  $B_x = 0$  (см. рисунок). Следовательно, вектор  $\mathbf{B}$  направлен вертикально вверх.

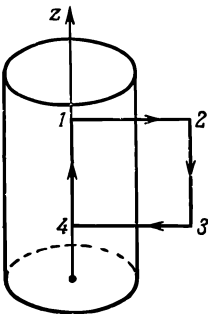
б) Сила, действующая на элемент длины левого нижнего из проводов с током, согласно закону  $d\mathbf{F} = I (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ , дается выражением  $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/dl = I (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B})$ , где  $\mathbf{e}_3$  — единичный вектор в направлении силы тока левого нижнего провода. Вычислим напряженность магнитного поля около левого нижнего провода (исключая, разумеется, поле, создаваемое этим проводом). Нетрудно убедиться,



что компоненты вектора  $\mathbf{B}$  равны  $B_x = B_0/2$ ,  $B_y = 3B_0/2$ , где  $B_0 = I / 2\pi\epsilon_0 c^2 a$ . Следовательно,  $\mathbf{f} = (B_0 I / 2) (-3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ , где  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  — единичные векторы в направлении осей  $x$  и  $y$ . Абсолютная величина этой силы  $|\mathbf{f}| = B_0 I \sqrt{10}/2 = 6,3 \cdot 10^{-4}$  ньютон. Вектор этой силы составляет угол  $161,7^\circ$  с осью  $x$ .

13.2. При вращении цилиндра образуются круговые токи с плотностью

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} P_0 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$



Из соображений симметрии ясно, что в точках, достаточно удаленных от концов цилиндра, магнитное поле направлено вдоль его оси.

Выберем контуры интегрирования, как показано на рисунке и воспользуемся теоремой Стокса. Находим, что вне цилиндра  $\mathbf{B} = 0$ . Поле на оси цилиндра также равно нулю.

$$B(0) = \frac{P_0 \omega a^2}{4\epsilon_0 c^2}.$$

Направление вектора  $\mathbf{B}$  совпадает с направлением угловой скорости.

- 13.3. Плотность токов  $\mathbf{j}$  найдем из условия однородности тока по сечению. Воспользовавшись тем, что циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  по замкнутому контуру равна

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S},$$

получим

$$\text{а) } B = \frac{I r}{2\pi \epsilon_0 c^2 a^2}, \quad 0 < r < a,$$

$$\text{б) } B = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 c^2 r}, \quad a < r < b,$$

$$\text{в) } B = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 c^2 r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}, \quad b < r < c,$$

$$\text{г) } B = 0, \quad r > c$$

- 13.4. Под действием силы Лоренца  $q_e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  электрон движется по окружности. Ее радиус определим из условия, что сила Лоренца равна массе электрона, умноженной на центростремительное ускорение:

$$q_e v_0 B = \frac{m_e v_0^2}{r};$$

здесь  $v_0$  — начальная скорость электрона, определяемая из соотношения  $v_0 = \sqrt{2E/m_e}$ . При  $E = 3 \text{ кэВ}$  получаем  $v_0 = 3,3 \cdot 10^7 \text{ м/сек}$ . В своем движении в узкой части трубки электрон опишет дугу, а затем полетит по касательной к этой дуге (ускорением электрона в электрическом поле пренебрегаем). Из рисунка видно, что максимальный угол отклонения электронов (в предельном случае на половину экрана) определяется длиной узкой части трубки  $l_1$ , вертикальным размером экрана  $D$  и длиной широкой части трубки  $l$ . Можно написать следующее равенство:

$$\frac{D}{2} - a = l \cdot \operatorname{tg} \Phi_{\text{макс}}.$$

Из рисунка также ясно, что  $\sin \Phi_{\text{макс}} = l_1/r$  и  $a = r(1 - \cos \Phi_{\text{макс}})$ . Отсюда следует, что величину  $\Phi_{\text{макс}}$  можно определить из уравнения

$$\operatorname{tg} \Phi_{\text{макс}} = \frac{D}{2l} - \frac{l_1}{l} \operatorname{tg} \frac{\Phi_{\text{макс}}}{2}.$$

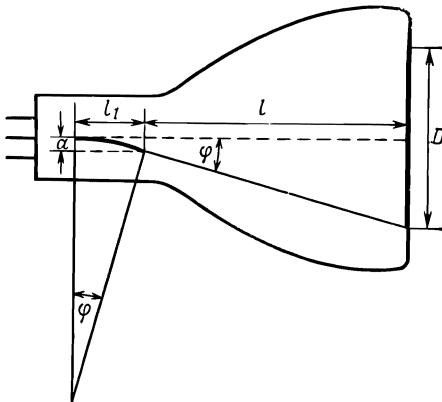
Поскольку  $l_1 \lesssim l$ , то  $\operatorname{tg} \Phi_{\text{макс}} \approx D/2l$ . В таком приближении радиус дуги электрона равен  $r = l_1/\sin \Phi_{\text{макс}} = l_1 \sqrt{1 + (4l^2/D^2)}$ . Следовательно,

$$B = m v_0 / q_e l_1 \sqrt{1 + (4l^2/D^2)}$$

Оценим величину  $B$  для следующих параметров трубки:  $D = 30 \text{ см}$ ,  $l = 30 \text{ см}$ ,  $l_1 = 5 \text{ см}$ . Находим  $B = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ вебер/м}^2$ . Число ампервитков на единицу длины ( $m$ ) соленоида вычисляем по формуле  $B = nI/\epsilon_0 c^2$  [см. «Лекции», вып. 5, формула (13.19)]. Получаем  $nI = \epsilon_0 c^2 B = 2,8 \cdot 10^3 \text{ ампер-витков}$ .



Электрическое поле ускоряет электроны после их отклонения в магнитном поле и, следовательно, увеличивает составляющую скорости по направлению к экрану. Это приводит к уменьшению угла  $\varphi$  между направлением движения электронов и осью трубки. Поэтому,



для того чтобы электроны могли достичь края экрана, магнитное поле должно больше отклонить электронный луч, т. е. быть сильнее. Этого можно добиться увеличением  $nI$ . Следовательно, вычисленные выше значения  $B$  и  $nI$  необходимо увеличить.

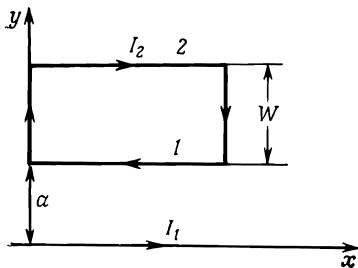
- 13.5. а) При определении силы, действующей на рамку с током, будем исходить из того, что на элемент тока длиной  $ds$  действует сила, равная  $d\mathbf{F} = I_2 ds \times \mathbf{B}$ . Проинтегрируем это выражение по контуру рамки. Ясно, что силы, действующие на участки рамки, перпендикулярные проводу, одинаковы по величине и противоположны по направлению. Их результирующая равна нулю. Сила, реально действующая на рамку, равна сумме сил, действующих на участки, параллельные проводу. Поскольку магнитное поле, создаваемое проводом на расстоянии  $y$  от него, определяется выражением

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I_1}{y} \mathbf{e}_z,$$

то

$$\mathbf{F} = I_2 \left\{ \int_1 ds \times \mathbf{B} + \int_2 ds \times \mathbf{B} \right\} = \frac{I_1 I_2}{2\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{e}_y \frac{wl}{a(a+w)}.$$

Сила, действующая на провод, имеет ту же величину, что и найденная, но противоположное ей направление.



- б) Нетрудно убедиться, что момент сил, действующих на рамку, определяемый выражением

$$\mathbf{M} = I_2 \oint \mathbf{r} \times ds \times \mathbf{B},$$

равен нулю.

- 13.6. Задача легко решается, если рассмотреть два фиктивных тока: один с плотностью  $+j$ , а другой с плотностью  $-j$ , «протекающих» по полости так, чтобы результирующий ток через полость был равен нулю. При этом нетрудно найти магнитное поле на оси полости. Оно равно  $\mathbf{B} = (1/2\epsilon_0 c^2) j \times \mathbf{d}$ , где  $\mathbf{d}$  — радиус-вектор, соединяющий центр сечения стержня с центром сечения полости.

### К главе 14. Магнитное поле в разных случаях

- 14.1. а) Для определения векторного потенциала в точках, удаленных от поверхности пленки на расстояние, гораздо меньшее ее размеров, воспользуемся сформулированным в «Лекциях» (вып. 5, стр. 286) принципом:  $i$ -я компонента векторного потенциала, возникающая от плотности тока  $j$ , точно такая же, как электрический потенциал  $\phi$ , созданный плотностью зарядов  $\rho = j/c^2$ . Поскольку, согласно условию задачи, пленку можно считать неограниченной во всех направлениях, воспользуемся уже решенной задачей о поле равномерно заряженной плоскости. Выберем систему координат, направив ось  $x$  вдоль вектора  $\mathbf{v}$ , а ось  $z$  — перпендикулярно плоскости пленки. В такой системе координат перпендикулярный ток имеет компоненту  $x$ , отличную от нуля; следовательно,  $A_y = A_z = 0$ . Электрическое поле равномерно заряженной плоскости, согласно «Лекциям» (вып. 5, стр. 97), равно

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z,$$

где  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор в направлении оси  $z$ . Интегрируя соотношение  $E_z = -\partial\phi/\partial z$ , находим электрический потенциал  $\phi = -(\sigma/2\epsilon_0)z$  (постоянную интегрирования выбираем равной нулю). Используя сформулированный выше принцип, находим

$$A_x = -\frac{\sigma v}{2\epsilon_0 c^2} z, \quad A_y = A_z = 0.$$

Так как  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , то, проделав необходимое дифференцирование, находим  $B_x = 0$ ,  $B_y = -\sigma v/2\epsilon_0 c^2$ ,  $B_z = 0$ . В векторной форме

$$\mathbf{B} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z)$$

- 14.2. Для решения задачи удобно воспользоваться законом Био — Савара

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} (d\mathbf{s} \times \mathbf{r}).$$

- а) В величину магнитного поля в центре полуокруга прямолинейные участки провода вносят нулевой вклад.  
 б) Поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка и равно  $B = 1/4\epsilon_0 c^2 r$ .  
 в) Магнитное поле, создаваемое всем проводом, равно найденному в п. (б) данной задачи.
- 14.3. Если воспользоваться законом Био — Савара, то магнитные поля, создаваемые витками в точке  $P$  (см. рисунок), можно найти простым интегрированием. Получаем:  $B_{x1} = Ia^2/2\epsilon_0 c^2 r_1^3$  и  $B_{x2} = Ia^2/2\epsilon_0 c^2 r_2^3$ , где  $r_1 = \sqrt{a^2 + [(b/2) - x]^2}$  и  $r_2 = \sqrt{a^2 + [(b/2) + x]^2}$ .

а) Полное поле в точке  $P$  дается выражением

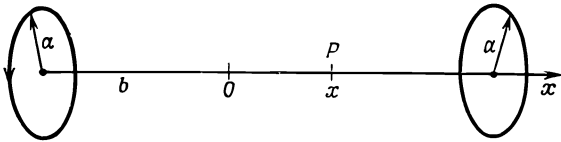
$$B_x = B_{x1} + B_{x2} = \frac{Ia^2}{2\epsilon_0 c^2 r_1^2} \left\{ \left[ a^2 + \left( \frac{b}{2} - x \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[ a^2 + \left( \frac{b}{2} + x \right)^2 \right]^{-3/2} \right\}.$$

б) Считая параметр  $x/r_0$  [где  $r_0 = \sqrt{a^2 + (b^2/4)}$ ] малым, разложим полученное выражение в ряд Тейлора. Нетрудно показать, что

$$B = \frac{Ia^2}{\epsilon_0 c^2 r_0^3} \left[ 1 + \left( \frac{15}{4} \frac{b^2}{r_0^4} - \frac{3}{r_0^2} \right) \frac{x^2}{2} \right].$$

в) Слагаемое с  $x^2$  обращается в нуль при условии  $5b^2/4 = r_0^2$ , т. е. когда  $a = b$ .

г) Если  $a = b$ , то магнитное поле равно  $B = 8I/5^{3/2} a \epsilon_0 c^2$ .

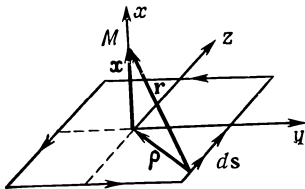


14.4. а) Выберем оси координат, как показано на рисунке. Согласно закону Био — Савара, имеем

$$\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3};$$

здесь интегрирование ведется по всем сторонам рамки. Если представить вектор  $\mathbf{r}$  в виде суммы двух векторов (один из которых направлен вдоль оси  $x$  и имеет длину, равную  $x$ , а другой расположен в плоскости  $yz$ ), то можно написать

$$\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \left( \oint \frac{d\mathbf{s}}{r^3} \times \mathbf{x} \right) + \oint \frac{d\mathbf{s} \times \boldsymbol{\rho}}{r^3} \right].$$



Ясно, что первый интеграл в квадратной скобке равен нулю в силу симметрии рамки, поскольку для любого  $ds$  всегда найдется на рамке другой участок, расположенный на таком же расстоянии  $r$  от точки  $M$ , но с противоположным направлением  $ds$ . Что же касается второго интеграла, то в нем вектор  $d\mathbf{s} \times \boldsymbol{\rho}$  всегда направлен вдоль оси  $x$ , и, следовательно, магнитное поле рамки перпендикулярно плоскости рамки. Из рисунка видно, что  $(d\mathbf{s} \times \boldsymbol{\rho})_x = (a/2) dz$ .

Учитывая, что интеграл по замкнутому контуру в условиях данной задачи равен восьми интегралам вдоль отрезка  $0 \leq z \leq a/2$ ,

для которого  $r^2 = x^2 + z^2 + a^2/4$ , находим

$$B_x = \frac{Ia}{\pi\epsilon_0 c^2} \int_0^{a/2} \frac{dz}{(a^2/4 + x^2 + z^2)^{3/2}}.$$

- Вычислив этот интеграл, получим требуемый в задаче ответ.
- б) В этом пункте задачи требуется фактически найти закон Био — Савара из общего интегрального выражения для векторного потенциала. Для нашей задачи это выражение принимает вид

$$\mathbf{A} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint \frac{d\mathbf{s}}{r}.$$

По соображениям, изложенным в п. (а), векторный потенциал в точке  $M$  равен нулю. Вычислим  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Воспользовавшись соотношениями, приведенными в примечании к задаче, запишем выражение для магнитного поля в произвольной точке наблюдения:

$$\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \nabla \times \left( \oint \frac{d\mathbf{s}}{r} \right) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint \left( \nabla \times \frac{d\mathbf{s}}{r} \right).$$

В последнем интеграле дифференцирование производится по координатам точки наблюдения. При этом дифференцировании вектор  $d\mathbf{s}$  следует считать постоянным. Здесь удобно воспользоваться теми соотношениями, которые были получены в решении задачи 2.3. Получим

$$\nabla \times \frac{d\mathbf{s}}{r} = \left( \nabla \frac{1}{r} \right) \times d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Следовательно, мы приходим к закону Био — Савара, использованному в п. (а).

- 14.5. Чтобы определить напряженность магнитного поля, вычислим вначале векторный потенциал в некоторой точке  $P$  с координатами  $x, y, z$ , расположенной вблизи оси кольца. Выберем оси координат так, чтобы ось  $z$  совпадала с осью кольца. Воспользуемся интегральным выражением для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint \frac{d\mathbf{s}}{r},$$

где  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$ ,  $x'$  и  $y'$  — координаты элемента  $ds$  на кольце  $[(x')^2 + (y')^2 = a^2]$ . Считая  $x, y \ll a$ , приближенно запишем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2xx' - 2yy'} \approx \sqrt{z^2 + a^2} \left( 1 - \frac{xx' + yy'}{z^2 + a^2} \right).$$

В том же приближении, очевидно,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} + \frac{xx' + yy'}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

В силу того, что  $\oint d\mathbf{s} = 0$ , имеем

$$\mathbf{A} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2 (z^2 + a^2)^{3/2}} \oint (xx' + yy') d\mathbf{s}.$$

Поскольку в направлении оси  $z$  токов нет, то  $A_z = 0$ . Учитывая следующие соотношения:

$$\oint x' ds_x = 0, \quad \oint y' ds_x = -\pi a^2,$$

$$\oint x' ds_y = \pi a^2, \quad \oint y' ds_y = 0,$$

находим

$$A_x = -\frac{I\pi a^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 (z^2 + a^2)^{1/2}} y,$$

$$A_y = \frac{I\pi a^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 (z^2 + a^2)^{1/2}} x.$$

Вычисляя напряженность магнитного поля  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , находим окончательно  $B_x = B_y = 0$ :

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{I}{2\epsilon_0 c^2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

- 14.6. Полный заряд проводящей сферы связан с потенциалом  $V$  соотношением  $Q = 4\pi\epsilon_0 Va$ . Поэтому плотность поверхностных зарядов равна  $\sigma = \epsilon_0 V/a$ . Для определения векторного потенциала воспользуемся общим интегральным представлением; однако при этом учтем, что возникающие при вращении сферы токи будут поверхностными и, следовательно, в условиях задачи надо заменить  $j dV$  на  $(\sigma \boldsymbol{\omega} \times da)$  где  $da$  — вектор, по величине равный элементарной площадке  $da$  и направленный перпендикулярно этой площадке. При этом векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\sigma a}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( \boldsymbol{\omega} \times \int \frac{da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right).$$

Преобразуя по теореме Гаусса поверхностный интеграл в объемный, имеем

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{E}_0;$$

здесь вектор  $\mathbf{E}_0$  — напряженность поля равномерно заряженного шара:

$$\mathbf{E}_0 = \begin{cases} \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{r}, & r < a, \\ \frac{a^3}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, & r > a. \end{cases}$$

Отсюда

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\sigma a}{3\epsilon_0 c^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), & r < a, \\ \frac{\sigma a^4}{3\epsilon_0 c^2} \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{r^3}, & r > a. \end{cases}$$

Учитывая, что  $\nabla \times (\omega \times \mathbf{r}) = 2\omega$ , находим магнитное поле  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{2V}{3c^2} \omega, & r < a, \\ \frac{3\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}) - \mu r^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^5}, & r > a; \end{cases}$$

здесь

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{4\pi\epsilon_0}{3} V a^3 \omega.$$

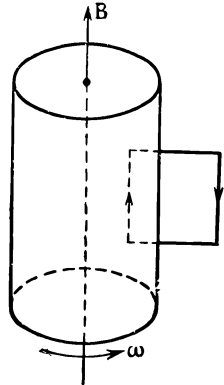
- 14.7. а) Если отрезком проволоки соединить ось цилиндра с его поверхностью, то при движении провода в магнитном поле возникнет сила  $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , которая приведет к появлению зарядов на концах провода. Концы проводов будут заряжаться до тех пор, пока электрическое поле  $\mathbf{E}$  не уравновесит  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , т. е. при  $E(x) = \omega x B$ .

При этом разность потенциалов на концах провода  $V = \int_0^b E(x) \times$

$\times dx = (\omega b^2/2)B$ , где  $b$  — радиус цилиндра. Магнитное поле внутри цилиндра (вне его оно равно нулю) легко найти с помощью теоремы Стокса, выбирая контур интегрирования так, как показано на рисунке:  $B = \lambda\omega/2\pi\epsilon_0 c^2$ . Отсюда ответ:

$$V = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}.$$

- б) Пусть в нашем распоряжении имеется очень чувствительный вольтметр, с помощью которого можно измерять разности потенциалов порядка  $10^{-10}$  в. Из найденного выражения для  $V$  следует, что величина  $V$  тем выше, чем больше  $\lambda$  — заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра. Пусть плотность поверхностных зарядов  $\sigma$  на цилиндре достаточно велика, скажем такая же, как на проводящей сфере радиусом  $a = 1$  м, заряженной до потенциала  $V_0 = 10^8$  в. Тогда  $\sigma = \epsilon_0 V_0/a$  и  $\lambda = 2\pi\epsilon_0 Vb/a$ . Подставляя это значение  $\lambda$  в выражение для  $V$  и учитывая, что  $v = \omega b$ , где  $\omega = 10^{-4}$  сек $^{-1}$ , находим  $b = [(2c^2 a/\omega^2)(V/V_0)]^{1/3} = 1200$  м, что нереально.



К главе 15. Векторный потенциал

15.1. а) На границе раздела двух сред нормальная составляющая магнитного поля должна быть непрерывной (это условие является следствием уравнения  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ). Внутри сверхпроводника  $\mathbf{B} = 0$ , поэтому на его поверхности нормальная составляющая магнитного поля также равна нулю, т. е. поле снаружи сверхпроводника везде касательно к поверхности последнего — магнитные силовые линии огибают сверхпроводник.

б) Магнитное поле в любой точке  $A$ , расположенной над сверхпроводником, можно найти, введя изображение магнитного момента (см. рисунок), такое, что  $|\boldsymbol{\mu}_1| = |\boldsymbol{\mu}_2|$ . Нетрудно убедиться, что при этом выполняется условие равенства нулю нормальной составляющей магнитного поля в любой точке границы раздела. Магнитное поле в произвольной точке  $A$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2;$$

здесь

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{3\mathbf{R}_1(\mathbf{R}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_1) - \boldsymbol{\mu}_1 R_1^2}{R_1^5} \right],$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{3\mathbf{R}_2(\mathbf{R}_2 \cdot \boldsymbol{\mu}_2) - \boldsymbol{\mu}_2 R_2^2}{R_2^5} \right].$$

в) Для определения вращающего момента и равновесных углов  $\theta$  вычислим «механическую» энергию магнитного момента в магнитном поле, создаваемом сверхпроводником:

$$U_{\text{мех}} = -(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{B}_2) = -\frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^3} (3 \cos^2 \theta - \cos 2\theta).$$

Действующий на магнитный диполь вращающий момент равен

$$M = \frac{\partial U_{\text{мех}}}{\partial \theta} = -\frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^3} \sin 2\theta.$$

В векторном виде вращающий момент можно записать следующим образом:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu}_1 \times \mathbf{B}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{3\boldsymbol{\mu}_1 \times \mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0 \cdot \boldsymbol{\mu}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 \times \boldsymbol{\mu}_2) R_0^2}{R_0^5} \right].$$

Определяя равновесные значения  $\theta$  из условия  $\partial U_{\text{мех}}/\partial\theta = 0$ , находим  $\theta = 0, \pi/2, 3\pi/2, \pi$ . Для найденных значений углов энергия магнитного диполя равна

$$U_{\text{мех}}|_{\theta=0} = U_{\text{мех}}|_{\theta=\pi} = \frac{2\mu^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^3};$$

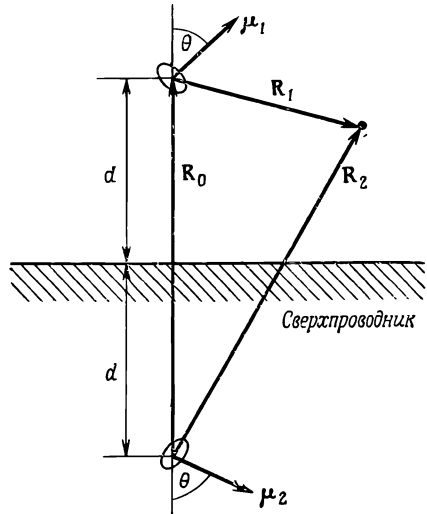
$$U_{\text{мех}}|_{\theta=\pi/2} = U_{\text{мех}}|_{\theta=3\pi/2} = \frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^3}.$$

Следовательно, при  $\theta = \pi/2$  и  $3\pi/2$  равновесие будет устойчивым, а при  $\theta = 0, \pi$  — неустойчивым.

- г) Сила действующая на магнитный диполь, определяется выражением  $F = -\nabla U_{\text{мех}}$ . При фиксированном угле  $\theta$  сила действует в направлении, перпендикулярном поверхности сверхпроводника, и равна по величине

$$F = \frac{3\mu^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^4} (3 \cos^2 \theta - \cos 2\theta)$$

При устойчивом равновесии, т. е. при  $\theta = \pi/2$  и  $3\pi/2$ ,  $F = 3\mu^2/4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^4$ . Сила будет отталкивать диполь от поверхности сверхпроводника



## К главе 17. Закон индукции

- 17.1. Применяя закон индукции и считая поле  $\mathbf{B}$  однородным внутри цилиндра, нетрудно найти величину электрического поля [см. «Лекции», вып. 6, формула (17.3), стр. 53], силовые линии которого представляют собой concentric окружности:

$$E_t = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Мгновенное ускорение следует определить из уравнения движения:  $m_e \mathbf{w} = q_e [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ . Поскольку в начальный момент времени скорость заряда равна нулю, то  $\mathbf{w} = (q_e/m_e) \mathbf{E}_t = -(q_e r/2m_e) (dB/dt)$ . Ускорения в точках  $P_1$  и  $P_3$  одинаковы по величине и равны  $q_e a (dB/dt)/2m_e = 4,4 \cdot 10^7$  м/сек<sup>2</sup>, но противоположны по направлению. В точке  $P_3$  ускорение направлено в правую сторону (см. рисунок в условии задачи) перпендикулярно отрезку  $P_1 P_3$ . Ускорение в точке  $P_2$  равно нулю.



- 17.2. Магнитный поток через полукольцо равен  $\Phi = BS \cos \alpha$ , где  $\alpha = \omega t$  — угол, который образует плоскость полукольца с силовыми линиями,  $\omega$  — угловая скорость вращения,  $S = \pi r^2/2$  — площадь полукольца. Наведенная э. д. с. равна

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{B\pi r^2 \omega}{2} \sin \omega t,$$

а ток в цепи

$$I = \frac{B\pi r^2 \omega}{2R_M} \sin \omega t.$$

Следовательно, амплитуды э. д. с. и тока равны

$$\mathcal{E}_{\text{макс}} = \frac{B\pi r^2 \omega}{2} \text{ и } I_{\text{макс}} = \frac{B\pi r^2 \omega}{2R_M}.$$

- 17.3. При  $R \gg a$  магнитное поле, создаваемое витком ( $I$ ),

$$\mathbf{B} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{R^3},$$

где  $\boldsymbol{\mu} = I\pi a^2 \mathbf{n}_1$ ;  $\mathbf{n}_1$  — единичный вектор нормали к плоскости витка ( $I$ ). Если ввести  $\mathbf{n}_2$  — аналогичный вектор для витка (2), то магнитный поток через второй виток равен

$$\Phi = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_2) = \frac{I(\pi a^2)^2}{R^3} \left[ (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) - \frac{3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_1)(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_2)}{R^2} \right].$$

Пусть в момент времени  $t$  вектор  $\mathbf{n}_2$  составляет угол  $\alpha$  с векторами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{R}$ , а  $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{R}$ . Следовательно, наведенная в витке (2) э. д. с. равна

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{2I}{R^3} (\pi a^2)^2 \omega \sin \omega t.$$

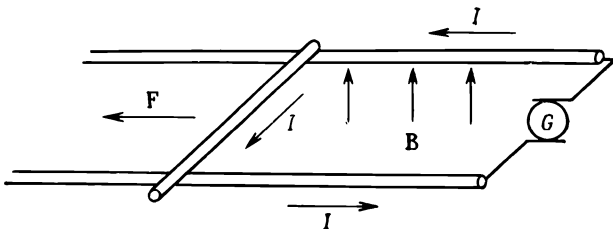
- 17.4. а) Провод движется равноускоренно. Действительно, из закона Ампера сила, действующая на провод, равна  $IBd$ . Решая уравнение движения для провода с начальным условием  $v(t)|_{t=0} = 0$ , получаем  $v(t) = (IBd/m)t$ .
- б) Если цепь обладает сопротивлением  $r_0$ , то, пренебрегая полем, создаваемым током, находим

$$Ir_0 = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}} = \mathcal{E} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathcal{E} - vBd,$$

где  $\mathcal{E}$  — э. д. с., создаваемая электрической батареей.

Так как провод движется равномерно, то действующая на него сила (сила Ампера) равна нулю. Отсюда  $I = 0$  и, следовательно,  $v_{\text{стац}} = \mathcal{E}/Bd$ .

- в) Ток равен нулю.



- 17.5. Электрическая энергия цепи с двумя катушками дается выражением [см. «Лекции», вып. 6, формула (17.38), стр. 71]:

$$U = \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 I_1^2 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 I_2^2 - \mathfrak{M} I_1 I_2,$$

где  $I_1, I_2$  — токи в катушках,  $\mathfrak{M}$  — коэффициент взаимной индукции. Поскольку по условию задачи  $I_1 = I_2 = I$ , то электрическую энергию цепи можно представить в виде  $U = (1/2) \mathcal{L} I^2$ , где  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathfrak{M}$ . Если витки одной катушки перемотать в другую сторону, то изменится знак у  $\mathfrak{M}$ .

- 17.6. а) Напряженность магнитного поля внутри кабеля найдем с помощью теоремы Стокса. При этом учтем, что в силу симметрии задачи силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности. В каждой точке силовой линии радиусом  $r$  напряженность магнитного поля  $B = I/2\pi\epsilon_0 c^2 r$ . Чтобы найти индуктивность кабеля, определим энергию магнитного поля  $U = (\epsilon_0 c^2/2) \int B^2 dV$ , приходящуюся на единицу длины кабеля [см. «Лекции», вып. 6, формула (17.48), стр. 75]. Разделим область между цилиндрами на цилиндрические слои толщиной  $dr$  и учтем, что объем такого слоя, расположенного на расстоянии  $r$  от оси кабеля, равен  $dV = 2\pi r dr$ , после чего найдем

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left( \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \int_a^b \frac{2\pi r dr}{r^2} = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left( \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 2\pi \ln \frac{b}{a}.$$

Приравнявая это выражение величине  $(1/2) \mathcal{L} I^2$ , найдем индуктивность, приходящуюся на единицу длины кабеля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}.$$

- б) В этом случае напряженность магнитного поля  $B$  в области  $a < r < b$  равна напряженности, найденной в п. (а). В области  $0 < r < a$  с помощью теоремы Стокса находим  $B = Ir/2\pi\epsilon_0 c^2 a^2$ . Вычислим далее энергию магнитного поля во внутреннем проводе, приходящуюся на единицу длины. Поступая так же, как и в п. (а), получаем

$$U_1 = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left( \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{2\pi}{4}.$$

Сложим это выражение с величиной  $U$ , найденной в п. (а), и приравняем сумму величине  $(1/2) \mathcal{L} I^2$ . Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right].$$

Сравнивая выражения для  $\mathcal{L}$ , найденные в п. (а) и (б), видим, что если  $b \gg a$ , то результат слабо зависит от распределения тока по сечению центрального провода.

- 17.7. а) Напряженность магнитного поля внутри тороидальной катушки можно найти по теореме Стокса, если в качестве стоксовой поверхности взять поверхность, натянутую на окружность радиусом  $r$ . Для  $b < r < b + a$  имеем

$$B = \frac{NI}{2\pi\epsilon_0 c^2 r};$$

здесь  $N$  — число витков обмотки,  $I$  — сила тока в обмотке. Далее вычислим энергию магнитного поля внутри тороидальной катушки. Интегрируя по объему тороида, получаем

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int B^2 dV = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left( \frac{NI}{2\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 2\pi a \ln \frac{(b+a)}{b}.$$

Приравнявая  $U$  величине  $(1/2)\mathcal{L}I^2$ , окончательно находим

$$\mathcal{L} = \frac{N^2 a}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \left( 1 + \frac{a}{b} \right).$$

- б) Для определения взаимной индуктивности системы, состоящей из тороидальной катушки и прямолинейного провода, вычислим создаваемый проводом магнитный поток  $\Phi_0$  через поперечное сечение тороида. Поскольку напряженность магнитного поля  $B$ , создаваемая прямолинейным проводником на расстоянии  $r$  от него, равна  $B = I_1/2\pi\epsilon_0 c^2 r$  (силовые линии поля  $B$  представляют собой концентрические окружности), то магнитный поток через один виток тороидальной катушки дается выражением

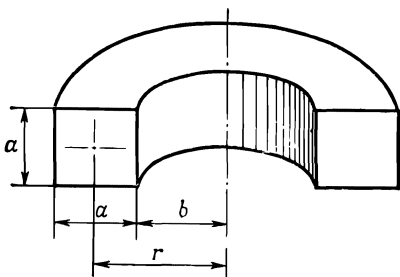
$$\Phi_0 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I_1 a}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \left( 1 + \frac{a}{b} \right),$$

где  $I_1$  — сила тока в проводе. Поскольку в катушке  $N$  витков, поток нужно умножить на  $N$ . Приравнявая поток  $\Phi_0$  величине  $\mathcal{M}I_1$ ,

где  $\mathcal{M}$  — взаимная индуктивность, находим

$$\mathcal{M} = \frac{aN}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \left( 1 + \frac{a}{b} \right).$$

- в) Из п. (а) и (б) следует, что  $\mathcal{L}/\mathcal{M} = N$ .



- 17.8. а) Как показано § 5 гл. 14 «Лекций» (вып. 5, стр. 293), магнитное поле, создаваемое витком с током на большом расстоянии от него, подобно электрическому полю диполя с моментом, перпендикулярным плоскости витка, т. е. магнитное поле, создаваемое витком 1 в центре витка 2, дается выражением

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{3\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}_1}{r^3} \right],$$

где  $\boldsymbol{\mu}_1 = I\pi a^2 \mathbf{n}_1$ , а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, соединяющий центры витков. Так как вблизи витка 2 поле  $\mathbf{B}$  можно считать однородным, магнитный поток вектора  $\mathbf{B}$  через него равен  $\pi a^2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2)$ . Приравнявая последнее выражение величине  $\mathcal{M}_{12}I$ , находим

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{(\pi a^2)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_2)}{r^5} \right], \quad (1)$$

Взаимная индуктивность выражается через углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (см. рисунок в условии задачи) следующим образом:

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{(\pi a^2)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2].$$

- б) Сила взаимодействия витков [см. «Лекции», вып. 6, формула (17.39), стр. 72] равна  $\mathbf{F} = -I^2 \nabla \mathcal{M}_{12}$ . Используя выражение (1), получаем

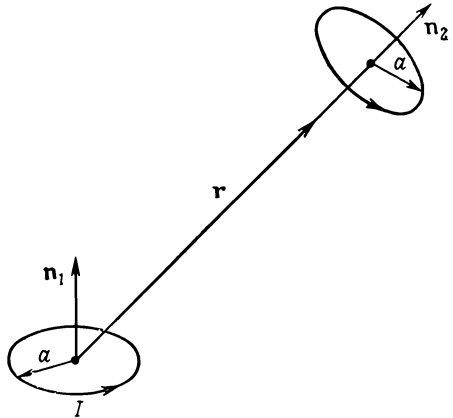
$$\mathbf{F} = \frac{(\pi a^2 I)^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \left[ \left( \frac{3(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)}{r^4} - 15 \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^6} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{3}{r^5} (\mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r})) \right].$$

Составляющая силы, перпендикулярная плоскости рисунка, равна нулю. Проекция  $F_{\parallel}$  и  $F_{\perp}$  силы  $\mathbf{F}$  на линию, соединяющую центры витков, и на перпендикулярную ей ось (на рисунке направим эту ось вверх) соответственно равны

$$F_{\parallel} = \frac{3(\pi a^2 I)^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 r^4} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2],$$

$$F_{\perp} = \frac{3(\pi a^2 I)^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 r^4} \sin(\alpha_1 + \alpha_2).$$

- в) Если изменить направления токов сразу в двух витках, то сила не изменится. При изменении направления тока только в одном витке знак силы меняется, поскольку меняется направление одного из векторов  $\mathbf{n}$  на противоположное.



- 17.9. Чтобы найти напряженность магнитного поля на оси соленоида, создаваемую одним его витком, определим вначале вектор  $\mathbf{B}_0$  на оси. Воспользовавшись результатом задачи 14.5, найдем, что на расстоянии  $z$  от центра витка напряженность магнитного поля на его оси равна

$$B_0 = \frac{I r_2^2}{2\epsilon_0 c^2 (z^2 + r_2^2)^{3/2}}.$$

При этом вектор  $\mathbf{B}_0$  направлен вдоль оси витка. Чтобы найти напряженность магнитного поля в центре соленоида, создаваемого всеми его витками, проинтегрируем найденное выражение по длине соленоида, введя линейную плотность тока  $IN/l$ . Заменяя в приведенном

выше выражении для  $B_0$  силу тока на  $INdz/l$  и интегрируя по  $z$  от  $-l/2$  до  $+l/2$ , находим магнитное поле в центре соленоида:

$$B = \frac{INr_2^2}{2\epsilon_0 c^2 l} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz}{(z^2 + r_2^2)^{3/2}} = \frac{IN}{\epsilon_0 c^2 l} \frac{l/2r_2}{[1 + (l/2r_2)^2]^{1/2}}.$$

Нетрудно видеть, что если длина соленоида становится бесконечно большой, то выражение для  $\mathbf{B}$  переходит в найденное в «Лекциях» (§ 5 гл. 13, вып. 5, стр. 268) выражение для магнитного поля внутри длинного соленоида. В силу того, что  $r_2 \gg r_1$ , поле  $\mathbf{B}$  в окрестности петли (т. е. в области  $0 < r < r_1$ ) можно считать однородным. Вычисляя магнитный поток  $\Phi = B\pi r_1^2$  через петлю, находим

$$\mathfrak{M}_{12} = \frac{N\pi r_1^2}{\epsilon_0 c^2 l} \frac{l/2r_2}{\sqrt{1 + (l/2r_2)^2}}.$$

Вычислим теперь  $\mathfrak{M}_{21}$ . Поскольку размеры витка малы, его можно рассматривать как магнитный диполь. Поле магнитного диполя дается выражением (см. § 5 гл. 14 «Лекций», вып. 5)

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( 3 \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} \right),$$

где  $\boldsymbol{\mu} = I_1 \pi r_1^2 \mathbf{e}_z$ ;  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор вдоль оси соленоида (ее выбираем в качестве оси  $z$ );  $I_1$  — сила тока в витке. Вычислим поток вектора  $\mathbf{B}$  через один виток соленоида, расположенный на расстоянии  $z$  от центра витка:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \int B_z da = \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_0^{r_2} 2\pi\rho d\rho \left[ \frac{z^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right] = \\ &= \frac{I_1 \pi r_1^2}{2\epsilon_0 c^2} \frac{r_2^2}{(r_2^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Далее найдем магнитный поток через все витки соленоида. Для этого просуммируем найденное нами выражение по всем виткам. Вводя плотность витков  $Ndz/l$  и интегрируя по  $z$  от  $-l/2$  до  $+l/2$ , находим

$$\Phi = I_1 \frac{N\pi r_1^2 r_2^2}{2\epsilon_0 c^2 l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz}{(z^2 + r_2^2)^{3/2}} = \mathfrak{M}_{21} I_1.$$

Вычисляя найденный интеграл, получаем выражение для  $\mathfrak{M}_{21}$ , которое, как нетрудно видеть, совпадает с  $\mathfrak{M}_{12}$ , т. е.  $\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{M}_{21}$ .

- 17.10. Если пренебречь магнитным полем, создаваемым проводом, то наведенная в нем э. д. с. равна

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - Bvl.$$

Отсюда  $I = \mathcal{E}/R = -Bvl/R = -10^{-3}$  а. Если не пренебрегать магнитным полем, создаваемым движущимся проводником, ток в цепи

уменьшится. Ответ по величине не изменится, если магнит, создающий поле  $B$ , будет двигаться со скоростью  $v$  в ту же сторону, что и провод, так как в этом случае можно считать, что сопротивление  $R$  движется вправо со скоростью  $v$  и, следовательно, магнитный поток через цепь будет меняться с прежней скоростью. Поскольку размеры цепи уменьшаются со временем, коэффициент самоиндукции также будет уменьшаться.

- 17.11. Механическая сила, действующая между витками, и момент сил, действующий на виток  $B$ , определяются выражениями (см. «Лекции», вып. 6, стр. 72)

$$F = -I_A I_B \frac{\partial \mathfrak{M}_{AB}}{\partial d} \quad \text{и} \quad M = -I_A I_B \frac{\partial \mathfrak{M}_{AB}}{\partial \alpha},$$

где  $d$  — расстояние между центрами витков;  $\alpha$  — угол, который составляет нормаль к витку  $B$  с осью, проходящей через эти центры;  $\mathfrak{M}_{AB}$  — коэффициент взаимной индукции витков. Чтобы найти последний, воспользуемся результатом задачи 17.8 (см. формулу для  $\mathfrak{M}_{12}$ ):

$$\mathfrak{M}_{AB} = -\frac{(\pi a^2)^2}{2\pi \epsilon_0 c^2} \frac{2 \cos \alpha}{d^3}.$$

Найдем далее силу тока в витке  $B$ :

$$I_B = \frac{\mathcal{E}_B}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_{AB}}{\partial t} = -\frac{\mathfrak{M}_{AB}}{R} \frac{dI_A}{dt} = \frac{(\pi a^2)^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{4K_0 t \cos \alpha}{R d^3}.$$

Следовательно,

a)  $M = 4\pi^4 a^8 K_0^2 t^3 \sin 2\alpha / (4\pi \epsilon_0 c^2)^2 d^6 R.$

Если  $\alpha = 0$ , то  $M = 0$ .

b)  $F = 24\pi^4 a^8 K_0^2 t^3 / (4\pi \epsilon_0 c^2)^2 d^7 R.$

Витки притягиваются друг к другу.

- в) Если самоиндукцией витков не пренебрегать, то величина силы тока  $I_B$  будет меньше. Вместе с этим уменьшатся величины  $F$  и  $M$ .  
 г) Ответ к п. (а) не изменится: при  $\alpha = \pi/2$  имеем  $\sin 2\alpha = 0$ , и, следовательно, момент сил, действующих на виток  $B$ , по-прежнему равен нулю. Ответ к п. (б) изменится: при  $\alpha = \pi/2$  имеем  $\cos 2\alpha = 0$ . Следовательно, сила, действующая на виток  $B$ , обратится в нуль.

### К главе 20. Решения уравнений Максвелла в пустом пространстве

- 20.1. а) Волновое уравнение, которому должно удовлетворять электрическое поле  $E$ , имеет вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

Для компоненты  $\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial t^2} = 0.$$

Подставляя в последнее уравнение  $E_\alpha = E_{0\alpha} \exp[i(\omega t - kx)]$  и выполняя дифференцирование, находим  $[k^2 - (\omega^2/c^2)] E_\alpha = 0$ . Так как  $\omega = ck$ , это уравнение выполняется для любого  $\alpha$ .

- б) Представим  $\alpha$ -ю компоненту вектора  $\mathbf{E}_0$ , которая вообще говоря комплексна, в виде  $E_{0\alpha} = E'_{0\alpha} \exp(i\varphi_\alpha)$ , где  $E'_{0\alpha}$  — модуль комплексного числа  $E_{0\alpha}$ , а  $\varphi_\alpha$  — его аргумент. Тогда  $E_\alpha = E'_{0\alpha} \times \times \exp[i(\omega t - kx + \varphi_\alpha)]$ . Следовательно, вещественную часть  $E_\alpha$  можно записать в таком виде:  $E'_{0\alpha} \cos(\omega t - kx + \varphi_\alpha)$ . Найдем далее уравнение движения точки, для которой фаза волны  $\Phi = \omega t - kx$  имеет некоторое фиксированное значение. Очевидно, в этой точке компоненты напряженности электрического поля волны будут иметь определенные значения, равные  $E_\alpha = E'_{0\alpha} \cos(\Phi + \varphi_\alpha)$ . Определяя  $x$ , находим закон движения

$$x = \frac{\omega}{k} t - \frac{\Phi}{k} = ct - \frac{\Phi}{k}.$$

Выбранная точка, таким образом, движется в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $c$ .

- в) Подействуем оператором  $\nabla$  на вектор (умножим скалярно)  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - kx)]$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot \nabla e^{i(\omega t - kx)} = \mathbf{E}_0 \cdot (-ik\mathbf{e}_x) e^{i(\omega t - kx)} = -ik\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{E}.$$

Здесь мы воспользовались правилом, сформулированным в п (в) задачи 2.3 (см. решение задачи 2.3). Следовательно, действие оператора  $\nabla$  на подобные функции сводится к простому умножению их на вектор  $-ik\mathbf{e}_x$ . Действие оператора  $\partial/\partial t$  сводится к умножению таких функций на число  $i\omega$ .

- г) Пусть напряженности электрического и магнитного полей зависят от  $t$  и  $x$  синусоидально. Тогда в комплексном виде можно записать  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - kx)]$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp[i(\omega t - kx)]$ . Подставляя эти выражения в уравнения Максвелла в пустоте

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{E}) &= 0, & (\mathbf{e}_x \times \mathbf{E}) &= \omega \mathbf{B}, \\ (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{B}) &= 0, & \mathbf{e}_x \times \mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Определяя  $\mathbf{E}$  из последнего уравнения и подставляя выражение для  $\mathbf{E}$  во второе уравнение, находим

$$-k\mathbf{e}_x \times (\mathbf{e}_x \times \mathbf{B}) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{B} \quad (1)$$

Поскольку  $\mathbf{e}_x \times (\mathbf{e}_x \times \mathbf{B}) = \mathbf{e}_x (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x)$ , то, учитывая третье из полученных уравнений  $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{B} = 0$ , а также, что  $(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x) = 1$ , из (1) находим

$$[k^2 - (\omega^2/c^2)] \mathbf{B} = 0.$$

Отсюда следует, что  $\omega = ck$ .

- д) Электрическое поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{\pm[i(\omega t + kx)]\}$  описывает волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси  $x$ . Действие оператора  $\nabla$  на подобную функцию сводится к умножению ее на вектор  $\pm ik\mathbf{e}_x$ , а действие оператора  $\partial/\partial t$  — к умножению этой

функции на число  $\pm i\omega$ . При этом уравнения Максвелла и связь между  $\omega$  и  $k$  будут такими же, какими они были найдены в п. (г) данной задачи.

- 20.2. Рассмотрим установившийся процесс. Напряженность электрического поля электромагнитной волны, падающей на зеркало, в неподвижной системе координат можно представить в виде  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ , где векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_0$  перпендикулярны оси  $x$ . На прямой линии  $x = vt$ , где  $v$  — скорость зеркала, должно выполняться условие (на поверхности зеркала тангенциальная составляющая электрического поля равна нулю):  $\mathbf{E} + \mathbf{E}' = 0 = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx) + \mathbf{E}'_0 \cos(\omega' t + k'x)$ . Это возможно лишь при  $\mathbf{E}_0 = -\mathbf{E}'_0$  и  $\omega t - kx = \omega' t + k'x$ . Подставляя  $x = vt$  и  $k = \omega/c$ ,  $k' = \omega'/c$ , получаем

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{v}{c}\right) / \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Этот результат совпадает с тем, который можно получить, используя преобразования Лоренца.

### К главе 21. Решения уравнений Максвелла с токами и зарядами

- 21.1. В соответствии с формулами (21.18) и (21.25) «Лекций» (вып. 6) запишем скалярный и векторный потенциалы

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\mathbf{p} + (r/c)\dot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\mathbf{p}}}{r^3}.$$

Вводя обозначение  $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}(t - r/c) + (r/c)\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$  и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) = \dot{\mathbf{p}}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{x_\alpha}{rc} \dot{\mathbf{p}}_\alpha,$$

находим

$$\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{p}^*}{r^3} - \frac{(\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{c^2 r^5} - \frac{3(\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} \right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{r^3}.$$

Подставляя эти выражения в формулу  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - (\partial\mathbf{A}/\partial t)$  и учитывая, что

$$\frac{r^2 \ddot{\mathbf{p}}}{c^2} - \frac{(\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{c^2} = \frac{1}{c^2} \mathbf{r} \times (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}),$$

находим

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \mathbf{p}^* - \frac{3(\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{c^2} \mathbf{r} \times (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}) \right].$$

Последнее выражение эквивалентно формуле (21.26) «Лекций» (вып. 6, стр. 157).

- 21.2. Обозначим через  $r'_+$  и  $r'_-$  «запаздывающие» радиусы-векторы [ $r'_\pm = x, y, z \mp (d/2) \cos \omega t'$ ] от положительного и отрицательного зарядов. Согласно рисунку, приведенному в условии данной задачи, имеем

$$r'^2_\pm = r^2 + \left(\frac{d}{2} \cos \omega t'\right)^2 \mp rd \cos \theta \cos \omega t',$$



где  $t' = t - r'_\pm/c$ . Напряженность электрического поля, создаваемая зарядами  $+q$  и  $-q$  в точке  $P$  в соответствии с выражением (21.1) (см. «Лекции», вып. 6, стр. 144), имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{e_{r'_+}}{r'^2_+} - \frac{e_{r'_-}}{r'^2_-} \right) - 2 \left( \frac{e_{r'_+}}{cr'^2_+} \frac{dr'_+}{dt} - \frac{e_{r'_-}}{cr'^2_-} \frac{dr'_-}{dt} \right) + \frac{1}{c} \left( \frac{1}{r'_+} \frac{de_{r'_+}}{dt} - \frac{1}{r'_-} \frac{de_{r'_-}}{dt} \right) + \frac{1}{c^2} \left( \frac{d^2e_{r'_+}}{dt^2} - \frac{d^2e_{r'_-}}{dt^2} \right) \right].$$

Воспользуемся тем, что точка  $P$  расположена на расстоянии  $r \gg d$  от диполя. Это позволяет во всех вычислениях ограничиться лишь линейными по  $d$  членами. В таком приближении

$$r'_\pm = r \mp \frac{d}{2} \cos \theta \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$r'_\pm = \mp e_z \frac{d}{2} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + er,$$

$$\frac{dr'_\pm}{dt} = \pm \frac{\omega d}{2} \cos \theta \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{r'_\pm}}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{r'_\pm}{r'_\pm} = \pm \frac{e_z}{r} \frac{d\omega}{2} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \mp \\ &\mp \frac{er}{r} \frac{d\omega}{2} \cos \theta \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2e_{r'_\pm}}{dt^2} &= \pm \frac{e_z}{r} \frac{d\omega^2}{2} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \mp \\ &\mp \frac{er}{r} \frac{d\omega^2}{2} \cos \theta \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]. \end{aligned}$$

Убедимся, что векторы  $de_{r'_\pm}/dt$  и  $d^2e_{r'_\pm}/dt^2$  направлены вдоль  $e_\theta$ . Вычислим произведения

$$e_r \cdot \frac{de_{r'_\pm}}{dt} \quad \text{и} \quad e_r \cdot \frac{d^2e_{r'_\pm}}{dt^2}.$$

Учитывая, что  $e_z \cdot e_r = \cos \theta$ , находим, что эти скалярные произведения равны нулю. Здесь уместно напомнить, что этот результат справедлив лишь в линейном по  $d$  приближении.

Модули векторов  $de_{r'_\pm}/dt$  и  $d^2e_{r'_\pm}/dt^2$  найдем, вычислив скалярные произведения этих векторов на  $e_\theta$ . Учитывая, что  $(e_z \cdot e_\theta) =$

= - sin  $\theta$ , имеем

$$\frac{d\mathbf{e}_{r\pm}}{dt} = \pm \mathbf{e}_\theta \frac{d\omega}{2r} \sin \theta \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$\frac{d^2\mathbf{e}_{r\pm}}{dt^2} = \mp \mathbf{e}_\theta \frac{d\omega^2}{2r} \sin \theta \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right].$$

После несложных преобразований окончательно находим

$$\mathbf{E} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 2\mathbf{e}_r \cos \theta \left[ \frac{1}{r^3} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega}{cr^2} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right] + \mathbf{e}_\theta \sin \theta \left[ \left( -\frac{\omega^2}{c^2r} + \frac{1}{r^3} \right) \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega}{cr^2} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right] \right\}.$$

Определяя из этого выражения  $E_\varphi$ ,  $E_\theta$  и  $E_r$ , приходим к приведенному в условии задачи результату.

- 21.3. В «Лекциях» (§ 5 гл. 14, вып. 5) отмечалось, что электрическое поле статического диполя и поле постоянного магнитного диполя одинаковы по виду, хотя и удовлетворяют разным уравнениям Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \text{ и } \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0 c^2.$$

Это происходит от того, как отмечалось в «Лекциях», что дипольные поля возникают, когда мы находимся далеко от всех токов и зарядов. Тогда в большей части пространства уравнения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  одинаковы: ротор и дивергенция этих полей равны нулю. Но нетрудно убедиться, что подобная симметрия уравнений Максвелла имеет место и в общем случае переменных полей. Действительно, в далеких от зарядов и токов точках пространства уравнения Максвелла одно-

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

и в силу этого обстоятельства имеет место следующая симметрия:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \text{ (электр. диполь)} &\leftrightarrow \mathbf{B} \text{ (магн. диполь)}, \\ \mathbf{B} \text{ (электр. диполь)} &\leftrightarrow -\mathbf{E} \text{ (магн. диполь)}. \end{aligned}$$

Заменяя в выражениях для электрического и магнитного полей осциллирующего диполя, найденных в задаче 21.2, величину  $\rho = \mathbf{e}_z qd \cos \omega t$  на  $\mu = \mathbf{e}_z \pi a^2 i_0 \cos \omega t$ , находим

$$B_\varphi = 0,$$

$$B_\theta = \frac{\pi a^2 i_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sin \theta \left[ \left( -\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{1}{r^3} \right) \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$B_r = \frac{2\pi a^2 i_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cos \theta \left[ \frac{1}{r^3} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$\mathbf{E} = c (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r).$$

21.4. а) Из рисунка, приведенного в условии данной задачи, видно, что

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta, \quad r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta,$$

где для удобства обозначено  $d/2 = a$ . При  $r \gg a$  имеем  $r_{1,2} \approx r \mp a \cos \theta$ . Запишем следующее разложение в ряд по малому параметру  $\omega a/c \ll 1$ :

$$\begin{aligned} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \pm \frac{a\omega}{c} \cos \theta \right] &\approx \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \mp \\ &\mp \frac{a\omega}{c} \cos \theta \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \dots \end{aligned}$$

Учитывая, что при  $r \gg a$

$$(r \mp a \cos \theta)^{-1} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 \pm \left( \frac{a \cos \theta}{r} \right) \right],$$

получаем требуемое выражение для  $\varphi$ .

б) Заметим, что если использовать результат п. (а), то можно записать ( $z = r \cos \theta$ )

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{Q_0 \omega d}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r}.$$

Если воспользоваться уравнением  $\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/c^2) (\partial \varphi / \partial t)$ , которое в задаче сводится к уравнению  $(1/c^2) (\partial \varphi / \partial t) = -(\partial A_z / \partial z)$ , то мы видим, что в написанном выше выражении для  $(1/c^2) (\partial \varphi / \partial t)$  функция, стоящая после оператора  $\partial / \partial z$ , есть не что иное, как  $-A_z$ .

в) Вычисляя  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - (\partial \mathbf{A} / \partial t)$  с помощью найденных в п. (а) и (б) выражений для  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ , находим ( $\rho = Q_0 d$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{\rho}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \cos \theta \left[ \left( \frac{3}{r^3} - \frac{\omega^2}{c^2 r} \right) \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega}{c r^2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \mathbf{e}_r + \left[ \left( \frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{1}{r^3} \right) \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3\omega}{c r^2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \mathbf{e}_z \right\}. \end{aligned}$$

Умножая  $\mathbf{E}$  скалярно на  $\mathbf{e}_r$  и учитывая, что  $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r$ , а  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z$  ( $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$ ), находим выражения для  $E_\varphi$ ,  $E_\theta$  и  $E_r$ , приведенные в условии задачи 21.2. При этом  $c\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}$ .

21.5. а) Интегрируя выражение для  $i = dp/dt$  ( $\rho$  — дипольный момент единицы длины) и полагая константу интегрирования равной нулю, находим

$$\rho = \frac{i_0}{\omega} \cos \left( \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \cos \omega t,$$

Отсюда дипольный момент элементарного диполя длиной  $\Delta z$  равен

$$\Delta p = \left[ \frac{i_0}{\omega} \cos \left( \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \cos \omega t \right] \Delta z.$$

б) Векторный потенциал в волновой зоне дается формулой

$$A_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} i_0 \cos \left( \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r'}{c} \right) \right] dz,$$

$$\text{где } r' = \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}.$$

При  $r \gg \lambda/2$ , т. е. при  $r \gg c/\omega$ , получаем  $r' \approx r - z \cos \theta$ . Далее, запишем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega z}{c} \cos \theta \right] &= \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \times \\ &\times \cos (kz \cos \theta) + \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin (kz \cos \theta), \end{aligned}$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ . Подставляя это выражение в формулу для векторного потенциала, простым интегрированием находим  $A_z$ :

$$A_z = \frac{2i_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{k \sin^2 \theta} \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]}{r}.$$

Нетрудно видеть, что последнее выражение совпадает с найденным в п. (б) задачи 21.4 векторным потенциалом  $A$ , если  $Q_0 d$  заменить величиной

$$p_0 = - \frac{2i_0 \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{k\omega \sin^2 \theta}.$$

Поэтому мы можем воспользоваться решением этой задачи [см. п. (в) задачи 21.4] и найти электрическое поле в волновой зоне:

$$E_\theta = \frac{2i_0}{4\pi\epsilon_0 cr} \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right].$$

Аналогично для магнитного поля находим, что в волновой зоне существенна лишь компонента  $B_\phi$ , причем  $B_\phi = E_\theta/c$ .

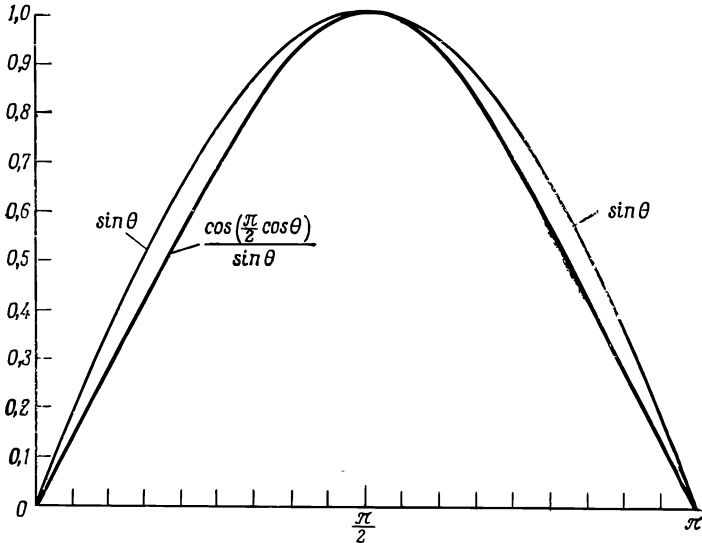
в) Зависимость  $E_\theta$  от угла  $\theta$  имеет вид для антенны

$$E_\theta \sim \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta},$$

для одного диполя

$$E_\theta \sim \sin \theta.$$

Характер этой зависимости для антенны и одного диполя примерно одинаковый (см. рисунок)



21.6. Электрическое и магнитное поля движущегося заряда описываются потенциалами Льеяра — Вихерта

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [R' - (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{R}')/c]}, \quad \mathbf{A} = \frac{q\mathbf{v}'}{4\pi\epsilon_0 c^2 [R' - (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{R}')/c]},$$

где  $\mathbf{R}'$  и  $\mathbf{v}'$  берутся в момент времени  $t' = t - R'/c$ .

а) Поскольку при движении по окружности в любой момент времени  $\mathbf{v} \perp \mathbf{R}$ , то в центре круга имеем

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

б) Аналогично можно написать

$$\mathbf{A} = \frac{q\mathbf{v}'}{4\pi\epsilon_0 c^2 a},$$

где  $\mathbf{v}'(t') = v[t - (a/c)]$ . Принимая за начало отсчета времени момент времени, когда заряд находится в точке  $P$ , находим

$$v'_x = -v \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right), \quad v'_y = v \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right),$$

причем  $\omega = v/a$ . Таким образом,

$$A_x = -\frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right),$$

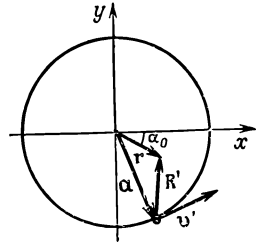
$$A_y = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right).$$

Отсюда, полагая  $t = 0$ , получаем значения  $A_x$  и  $A_y$  в момент времени, когда частица находится в точке  $P$ .

- в) Определим потенциалы в точке, расположенной вблизи центра круга ( $r$  — радиус-вектор этой точки; см. рисунок). Обозначая через  $\alpha_0$  угол между  $r$  и осью  $x$ , запишем

$$R'^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\omega t' - \alpha_0),$$

$$t' = t - \frac{R'}{c}.$$



Наша конечная цель — вычислить производные от потенциалов в начале координат. Поэтому, записывая  $R'$  как функцию от  $t$ ,  $x$  и  $y$ , удержим лишь члены первого порядка по  $r$ :

$$R' \approx a - r \cos\left(\omega t - \frac{v}{c} - \alpha_0\right) = a - x \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - y \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right).$$

Выразим теперь через  $x$ ,  $y$  и  $t$  скалярное произведение  $(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{R}')$ . Как видно из рисунка,  $\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{R}') &= (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}) = vr \sin\left(\omega t - \frac{v}{c} - \alpha_0\right) = \\ &= vx \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - vy \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} R' - \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{R}')}{c} &= a - \left(x - \frac{v}{c} y\right) \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \\ &- \left(y + \frac{v}{c} x\right) \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right). \end{aligned}$$

Теперь у нас есть все, чтобы найти  $\Phi(x, y, t)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[ 1 + \left(\frac{x}{a} - \frac{v}{c} \frac{y}{a}\right) \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y}{a} + \frac{v}{c} \frac{x}{a}\right) \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - (\partial\mathbf{A}/\partial t)$ , вычислим напряженность электрического поля [напомним, что вектор  $\mathbf{A}$  в центре круга найден в п. (б)]. Имеем

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[ \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \frac{v}{c} \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) \right],$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[ \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \frac{v}{c} \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) \right].$$

Легко убедиться, что при  $t = 0$ , т. е. когда заряд находится в точке  $P$ ,  $E_x < 0$  и  $E_y < 0$ . Если бы не было запаздывания, то

вектор  $\mathbf{E}$  был бы направлен из точки  $P$  в центр круга. Здесь же мы получили небольшую компоненту  $E_y$ , причем отрицательную. Таким образом, вектор  $\mathbf{E}$  слегка отклоняется вниз от оси  $x$ . Если бы был справедлив «запаздывающий закон Кулона», вектор  $\mathbf{E}$  также составлял бы с осью  $x$  малый угол, но был бы направлен вверх по оси  $y$ .

Определим теперь векторный потенциал  $\mathbf{A}$ . Для этого необходимо найти  $v'(t, x, y)$ . Имеем

$$\begin{aligned} v'_x &= -v \sin \omega t' = -v \sin \left[ \omega t - \frac{v}{c} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v^2 r}{ac} \cos \left( \omega t - \frac{v}{c} - \alpha_0 \right) \right] \approx -v \sin \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) - \\ &\quad - \frac{v^2 x}{ac} \cos^2 \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) - \frac{v^2 y}{ac} \cos \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) \sin \left( \omega t - \frac{v}{c} \right), \\ v'_y &= v \cos \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) - \left( \frac{v^2 x}{ac} \sin \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) \cos \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{v^2 y}{ac} \sin^2 \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) \right). \end{aligned}$$

Используя эти выражения в формуле для  $\mathbf{A}$ , после несложных вычислений с удержанием лишь членов первого порядка по  $r$  имеем

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} \left\{ -v \sin \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{vx}{2a} \sin 2 \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) - \frac{v^2 x}{ac} - \frac{vy}{c} \sin^2 \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) \right\}, \\ A_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} \left\{ v \cos \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) - \frac{v^2 y}{ac} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{vx}{a} \cos^2 \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) + \frac{vy}{2a} \sin 2 \left( \omega t - \frac{v}{c} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что только  $z$ -компонента магнитного поля отлична от нуля:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 a^2}.$$

Таким образом, магнитное поле в центре круга не зависит от времени. Оно совпадает с полем в центре бесконечно тонкого кругового витка радиусом  $a$ , по которому течет ток  $I = qv/2\pi$  (ср. с решением задачи 14.5).

- г) В нашем случае формула (21.1) для напряженности электрического поля (см. «Лекции», вып. 6, стр. 144) записывается в виде

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{e}_{r'}}{a^2} + \frac{1}{ac} \frac{d\mathbf{e}_{r'}}{dt} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2\mathbf{e}_{r'}}{dt^2} \right].$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_x &= -\cos \left( \frac{v}{a} t - \frac{v}{c} \right), \\ \mathbf{e}'_y &= -\sin \left( \frac{v}{a} t - \frac{v}{c} \right). \end{aligned}$$

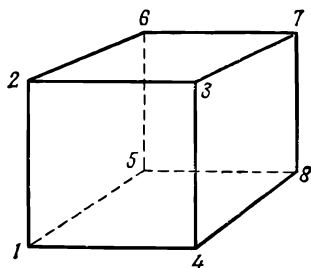
Дифференцируя, получаем для  $E_x$  и  $E_y$  формулы, совпадающие с уже найденными, а магнитное поле дается выражением

$$cB_z = e'_x E_y - e'_y E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 a^2},$$

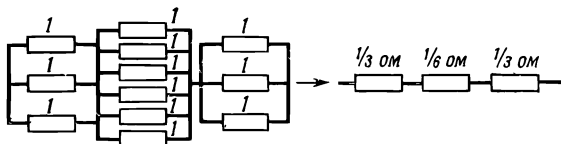
которое опять совпадает с прежним результатом.

### К главе 22. Цепи переменного тока

- 22.1. а) Пусть ток втекает в узел 1 (см. рисунок), а вытекает из узла 7. В силу симметрии системы потенциалы точек 2, 5 и 4 одинаковы.

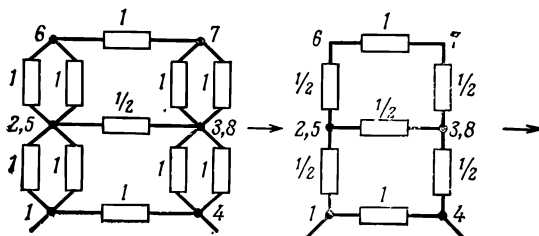


Также равны друг другу потенциалы точек 6, 3 и 8. В итоге получим электрическую схему следующего типа:



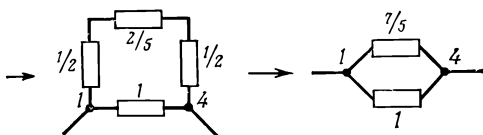
Сопротивление при таком соединении равно  $5/6$  ом.

- б) Пусть проволоки соединены так, что ток втекает в узел 1, а вытекает из узла 4. Тогда одинаковы потенциалы узлов 2 и 5. Объединим эти узлы. Соответственно равны друг другу потенциалы узлов 3 и 8. Их также объединяем. В итоге получим следующую плоскую эквивалентную схему:



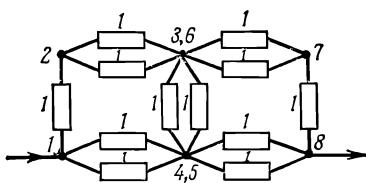


Преобразуем ее следующим образом:

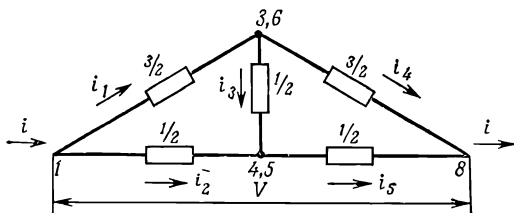


Сопротивление последней схемы равно  $7/12$  Ом.

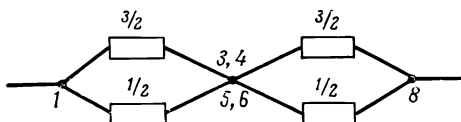
- в) Пусть ток втекает теперь в узел 1, а вытекает из узла 8. В этом случае равны друг другу попарно потенциалы точек 3 и 6, а также 4 и 5. Объединим соответствующие узлы попарно. Получится следующая эквивалентная схема:



Эта цепь может быть представлена в виде мостовой схемы



Сопротивление таких цепей (см. «Лекции», вып. 6, стр. 180) обычно нельзя вычислить, пользуясь лишь формулами для параллельных и последовательных сопротивлений, и приходится использовать правила Кирхгофа (см. § 3 гл. 22 «Лекций», вып. 6). Однако в нашем случае можно обойтись и без правил Кирхгофа, поскольку в силу идентичности левой и правой половин цепи потенциалы в точках 3, 6 и 4, 5 одинаковы, и, следовательно, ток  $i_3 = 0$ . Поэтому эквивалентную схему можно представить в виде



откуда следует, что сопротивление цепи равно  $3/4$  Ом. Другие возможные соединения сводятся к одному из рассмотренных выше.

22.2. а) Найдем полный импеданс цепи:

$$Z(\omega) = i\omega\mathcal{L} \frac{2 - \omega^2 C\mathcal{L}}{1 - \omega^2 C\mathcal{L}}.$$

Если теперь ввести комплексную э. д. с.  $\hat{V} = V_0 e^{i\omega t}$ , то комплексный ток равен

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z(\omega)} = \frac{\hat{V}(1 - \omega^2 C\mathcal{L})}{i\omega\mathcal{L}(2 - \omega^2 C\mathcal{L})}.$$

Выделяя вещественную часть этого выражения, находим силу тока в цепи

$$I = V_0 \frac{1 - \omega^2 C\mathcal{L}}{\omega\mathcal{L}(2 - \omega^2 C\mathcal{L})} \sin \omega t. \quad (1)$$

б) В этом случае каждая из индуктивностей станет равной  $\mathcal{L} + \mathfrak{M}$ , и ответ можно получить, если в выражении (1) заменить  $\mathcal{L}$  формально на  $\mathcal{L} + \mathfrak{M}$ , а  $C$  на  $C/(1 + \omega^2 \mathfrak{M}C)$ . Действительно, если обозначить через  $i_C$  и  $i_{\mathcal{L}}$  токи через параллельно соединенные емкость и индуктивность  $\mathcal{L}$ , так что  $i_C + i_{\mathcal{L}} = I$ , где  $I$  — полный ток в цепи, то

$$\hat{V} = \mathcal{L} \frac{d\hat{I}}{dt} + \mathfrak{M} \frac{d\hat{i}_{\mathcal{L}}}{dt} + \mathcal{L} \frac{d\hat{i}_{\mathcal{L}}}{dt} + \mathfrak{M} \frac{d\hat{I}}{dt},$$

и, следовательно,

$$\hat{V} = i\omega(\mathcal{L} + \mathfrak{M})\hat{I} + i\omega(\mathcal{L} + \mathfrak{M})i_{\mathcal{L}}.$$

С другой стороны, согласно закону Кирхгофа, для напряжений имеем

$$\hat{i}_C \left( -\frac{i}{\omega C} \right) = i\omega\mathcal{L}\hat{i}_{\mathcal{L}} + i\omega\mathfrak{M}\hat{I} = i\omega\mathcal{L}\hat{i}_{\mathcal{L}} + i\omega\mathfrak{M}(\hat{i}_C + \hat{i}_{\mathcal{L}});$$

отсюда

$$-\hat{i}_C \left( \frac{1 + \omega^2 \mathfrak{M}C}{\omega C} \right) = \hat{i}_{\mathcal{L}} \omega(\mathcal{L} + \mathfrak{M}).$$

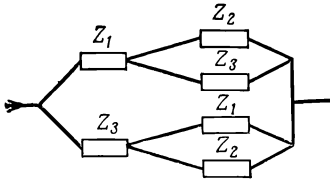
Уравнение такого же типа можно было записать и в п. (а) задачи. Однако мы видим, что наличие взаимной индукции ведет к замене  $C$  на  $C/(1 + \omega^2 \mathfrak{M}C)$ , а  $\mathcal{L}$  на  $\mathcal{L} + \mathfrak{M}$ . Учитывая это, находим комплексный ток в цепи:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}(1 - \omega^2 \mathcal{L}C)}{i\omega(\mathcal{L} + \mathfrak{M})[2 - \omega^2 C(\mathcal{L} - \mathfrak{M})]}.$$

Вещественная часть этого выражения дает нам искомую силу тока в цепи:

$$I(t) = V_0 \frac{(1 - \omega^2 \mathcal{L}C) \sin \omega t}{\omega(\mathcal{L} + \mathfrak{M})[2 - \omega^2 C(\mathcal{L} - \mathfrak{M})]}.$$

22.3. а) Схему можно представить в следующем виде;



$$\begin{aligned} Z_1 &= i\omega\mathcal{L}, \\ Z_2 &= R, \\ Z_3 &= \frac{1}{i\omega C}. \end{aligned}$$

При этом импедансы верхней цепи  $Z'$  и нижней цепи  $Z''$  даются выражениями

$$Z' = \frac{z}{Z_2 + Z_3} \quad \text{и} \quad Z'' = \frac{z}{Z_1 + Z_2},$$

где  $z = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3$ . Полный импеданс цепи равен

$$Z = Z'Z''/(Z' + Z'') = z/(Z_1 + 2Z_2 + Z_3).$$

Подставляя в последнее выражение значения  $Z_i$  с учетом того, что  $R^2 = \mathcal{L}/2C$ , получаем  $Z = R$ .

- б) Если  $|Z'| = |Z''|$  и  $\text{Re } Z' = \text{Re } Z''$ , то энергия, выделяемая на  $Z'$ , равна энергии, выделяемой на  $Z''$ . Из найденных в п. (а) выражений для  $Z'$  и  $Z''$  следует, что должно выполняться равенство  $|Z_2 + Z_3| = |Z_1 + Z_2|$ , т. е.  $\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)} = \sqrt{R^2 + \omega^2 \mathcal{L}^2}$ . Отсюда ясно, что  $\omega^2 = 1/\mathcal{L}C$ .

- 22.4. Введем комплексную э. д. с.  $\hat{V} = E_0 \exp(i\omega t)$ . Будем считать потенциал «нижней» клеммы генератора равным нулю. Тогда потенциал точки  $a$  равен  $\hat{V}_a = \hat{I}(-i/\omega C) \equiv \hat{V}_C$ , а в точке  $b$  потенциал  $\hat{V}_b = \hat{I}R \equiv \hat{V}_R$ , причем  $\hat{I} = \hat{V}/(R - i/\omega C)$ .

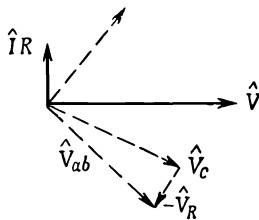
Кроме того,

$$\hat{V}_{ab} = \hat{V}_C - \hat{V}_R = \hat{I} \left( -\frac{i}{\omega C} - R \right) = \hat{V} \left( \frac{-R - i/\omega C}{R - i/\omega C} \right).$$

Числитель и знаменатель дроби, стоящей в скобках, равны по модулю; следовательно, модуль дроби не зависит от частоты.

Проследим теперь зависимость фазы  $\hat{V}_{ab}$  от частоты. При низких частотах напряжение, создаваемое источником, падает в основном на конденсаторах. Это означает, что можно «забыть» про сопротивление  $R$ , т. е. фазы напряжения  $\hat{V}_{ab}$  и э. д. с.  $\hat{V}$  совпадают. Наоборот, при высоких частотах импедансы конденсаторов весьма малы и ими можно пренебречь. Следовательно, потенциал в точке  $a$  будет совпа-

дать с потенциалом нижней клеммы генератора, а в точке  $b$  — с потенциалом верхней клеммы. Напряжение  $\hat{V}_{ab}$  противоположно по фазе э. д. с. Однако на основании сказанного мы не можем решить, увеличивается ли фаза при возрастании частоты от 0 до  $\pi$  или она уменьшается от 0 до  $-\pi$ : разности фаз  $\pi$  и  $-\pi$  эквивалентны. Рассмотрим поэтому вопрос подробнее. Воспользуемся геометрическим способом изображения колебаний (см. § 1 гл. 30 «Лекций»,



вып. 3) и учтем, что ток через конденсатор опережает напряжение по фазе на  $\pi/2$ . При низких частотах существенны импедансы конденсаторов, при этом на верхней диаграмме э. д. с. и ток (напряжение  $\hat{I}R$ ) изображены сплошными векторами, а при частотах, отличных от нуля,

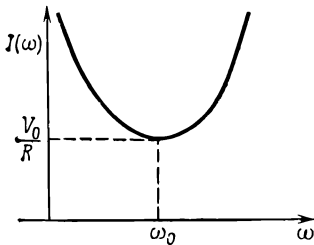
все напряжения в цепи (кроме э. д. с.) изображены векторами в виде штриховых линий. Видно, что при увеличении частоты фаза напряжения  $V_{ab}$  меняется от 0 до  $-\pi$ .

Учтем теперь внутреннее сопротивление генератора. При больших частотах оно приводит к уменьшению напряжения на его клеммах в  $(R + R/5)/R$  раз и, следовательно, к такому же уменьшению напряжения  $V_{ab}$ . При более низких частотах это уменьшение менее заметно (при низких частотах, как уже отмечалось, сопротивления  $R$  роли не играют!). Из тех же соображений следует, что фаза напряжения  $V_{ab}$  остается в первом приближении относительно внутреннего сопротивления неизменной. В этом можно убедиться и путем точных вычислений.

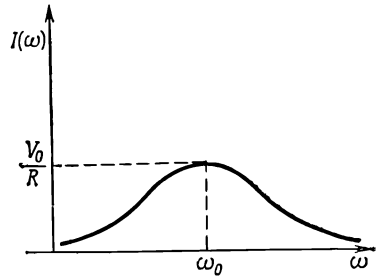
- 22.5. При параллельном соединении импеданс цепи определяется выражением  $Z^{-1} = R^{-1} + i[\omega C - (1/\omega L)]$ . Вводя комплексную э. д. с.  $\hat{V} = V_0 \exp(i\omega t)$  и определяя силу тока в цепи  $I = \hat{V}/Z(\omega)$ , находим выражение для амплитуды силы тока:

$$I_0 = V_0 \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

При  $\omega_0^2 = 1/LC$  наступает «резонанс»: при этом условии сила тока в цепи минимальна и равна (по амплитуде)  $I_{\min} = V_0/R$ . Примерный характер «резонансной» кривой показан на фиг. 1. При малых  $\omega$  ток в цепи течет в основном через индуктивность, а при больших — через емкость. В момент резонанса ток течет лишь через активное сопротивление.



Фиг. 1



Фиг. 2

Определим ширину резонансной кривой подобно тому, как это делалось при анализе механических колебаний (см. гл. 23 «Лекций», вып. 2). Для  $I_0^2$  имеем

$$I_0^2 = V_0^2 \left[ \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 \right] = \frac{V_0^2 C^2}{\omega^2} \left[ \frac{\omega^2}{(RC)^2} + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right],$$

( $\omega_0^2 = 1/LC$ ). Если  $1/RC \ll \omega_0$ , т. е.  $R \gg \sqrt{L/C}$ , эту формулу можно упростить (таким же образом, как и в гл. 23 «Лекций», вып. 2). Тогда

$$I_0^2 = V_0^2 4C^2 \left[ (\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4(RC)^2} \right].$$

Ширину резонансной кривой определим по частотам, при которых  $I_0^2$  в два раза больше, чем в резонансе. Находим  $\Delta\omega = 1/RC$ . При по-

следовательном соединении элементов импеданс цепи  $Z(\omega) = R + i[\omega L - (1/\omega C)]$ , а амплитуда тока

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

В этом случае резонансная кривая показана на фиг. 2. Зависимость  $I_0^2$  от частоты имеет вид

$$I_0^2 = \frac{V_0^2}{\frac{L^2}{\omega^2} \left[ \frac{R^2}{L^2} \omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right]},$$

где опять-таки  $\omega_0^2 = 1/LC$ . При  $R/L \ll \omega_0$  т. е.  $R \ll \sqrt{L/C}$ ,

$$I_0^2 = \frac{V_0^2}{4L^2 \left[ \frac{R^2}{4L^2} + (\omega - \omega_0)^2 \right]}.$$

Ширина резонансной кривой равна  $\Delta\omega = R/L$ . Если  $R = K\sqrt{L/C}$  для параллельного и  $R = (1/K)\sqrt{L/C}$  для последовательного соединения, то ширина резонансной кривой в обоих случаях в  $K$  раз меньше резонансной частоты.

22.6. Представим схему так, как показано на рисунке. При этом

$$Z_1 = i\omega L + R_a, \quad Z_2 = R, \quad Z_3 = R, \quad Z_4 = 1/(i\omega C + R_b^{-1}).$$

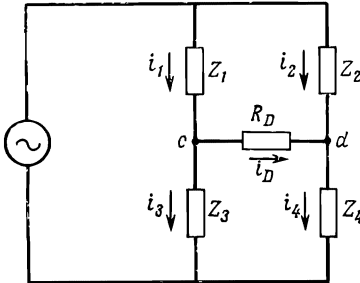
Очевидно,

$$i_1 Z_1 + i_D R_D - i_2 Z_2 = 0,$$

$$i_3 Z_3 - i_4 Z_4 - i_D R_D = 0,$$

$$i_D = i_1 - i_3 = i_4 - i_2.$$

Балансировка моста осуществляется, если  $i_D = 0$ . Отсюда  $i_1 = i_3$  и  $i_2 = i_4$ ; следовательно,  $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$ , т. е.  $(i\omega L + R_a)/(i\omega C + R_b^{-1}) = R^2$ . Определяя вещественную и мнимую части, находим



$$R^2 = \frac{R_a R_b + \omega^2 L C R_b^2}{1 + \omega^2 C^2 R_b^2}, \quad L = C R_a R_b.$$

Из этих выражений следует, что  $R^2 = R_a R_b$  и, следовательно,  $L = C R^2$ .

22.7. В этой задаче условие балансировки моста выводится точно также, как и в задаче 22.6. Здесь надо лишь считать, что

$$Z_1 = r_1, \quad Z_3 = r_2, \\ Z_2 = R_1 - \frac{1}{i\omega C_1}, \quad Z_4 = -\frac{iR_2/\omega C_2}{(R_2 - i/\omega C_2)}.$$

Поскольку баланс наступает, если  $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$ , то

$$r_1 = -\frac{iR_2/\omega C_2}{(R_2 - i/\omega C_2)} = r_2 \left( R_1 - \frac{1}{i\omega C_1} \right).$$

Приравнивая по отдельности вещественные и мнимые части этого уравнения, находим условия баланса:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

и

$$\frac{r_1}{r_2} = \left( \frac{C_2}{C_1} \right) + \left( \frac{R_1}{R_2} \right).$$

22.8. Импеданс цепи дается выражением

$$Z = \frac{R}{1 + i\omega CR} + \frac{i\omega LR}{R + i\omega L}.$$

- а) Пусть  $RC = L/R$ . Тогда  $Z = R$ . Следовательно, амплитуда тока в этом случае не зависит от частоты.  
 б) Падение напряжения на  $RC$ -паре, когда  $RC = L/R$ , дается выражением

$$\hat{U} = Z_1 \hat{I} = \frac{Z_1 V_0}{R} e^{i\omega t},$$

где

$$Z_1 = R/(1 + i\omega CR).$$

Представляя отношение  $Z_1/R$  в виде

$$Z_1/R = e^{-i\varphi} / \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2},$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = \omega CR$ , находим искомую разность фаз

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\omega CR) = \operatorname{arctg}(\omega L/R).$$

22.9. Суммарная емкость  $m$  одинаковых последовательно соединенных конденсаторов равна  $C_{\text{общ}} = C/m$ . Импеданс цепи  $Z$  равен сумме сопротивлений: емкостного  $Z_c = -im/\omega C$ , индуктивного  $Z_l = i\omega L$  и активного сопротивления  $R$ . Если э. д. с. представить в комплексной форме, то из закона Ома следует

$$\hat{U} = \frac{V_0 \exp(i\omega t)}{\{R + i[\omega L - (m/\omega C)]\}}.$$

Вещественную часть силы тока можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \hat{I} = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad \text{где } I_0 = V_0 / \sqrt{R^2 + [\omega L - (m/\omega C)]^2}.$$

а) Следовательно, мощность дается выражением

$$P = I_0^2 R / 2 = V_0^2 R / 2 \{R^2 + [\omega L - (m/\omega C)]^2\}.$$

- б) Мощность, выделяемая на активном сопротивлении, максимальна, когда  $m$  удовлетворяет условию  $\omega L - (m/\omega C) \approx 0$ , т. е. при  $m \approx \omega^2 CL$ . Для заданных значений параметров цепи мощность максимальна при  $m = 2$ .

Падение напряжения на емкости равно  $U_C = IZ_C$ . Максимальное мгновенное напряжение на емкости с учетом выражения для тока  $I_0$  равно  $\text{Re } \hat{U}_C = V_0 m / \omega C \sqrt{R^2 + [\omega L - (m/\omega C)]^2}$ , а на сопротивлении  $R$  равно  $U_R = I_0 R$ . Таким образом,

$$U_R = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 + [\omega L - (m/\omega C)]^2}}.$$

Когда  $m = 2$ ,  $U_R = \text{Re } U_C = 100$  в.

### К главе 23. Полые резонаторы

- 23.1. Представим эквивалентную схему резонансной полости в виде  $LC$ -контура. Будем при этом считать, что вся емкость полости определяется узким зазором, отдавая, разумеется, себе отчет в том, что это лишь некоторое приближение. С другой стороны, предположим, что вся индуктивность полости определяется ее тороидальной частью, причем напряженность магнитного поля во всех точках сечения полости, расположенных на расстоянии  $r$  от ее оси, одинакова. Если зазор рассматривать как плоский конденсатор, то его емкость равна  $C = \epsilon_0 \pi a^2 / d$ . Найдем напряженность магнитного поля, выбрав контур в виде окружности радиусом  $r$ , ось которой совпадает с осью симметрии полости, и воспользуемся тем, что

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \frac{I}{\epsilon_0 c^2},$$

где  $I$  — полный ток, который течет через конденсатор. Имеем  $B = I / 2\pi \epsilon_0 c^2 r$ . Определим энергию магнитного поля  $W = (1/2) L I^2$  в тороидальной части полости:

$$W = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int B^2 dV = \frac{I^2}{2} \frac{(b-a)}{2\pi \epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}.$$

Отсюда находим  $L = [(b-a)/2\pi \epsilon_0 c^2] \ln(b/a)$  и, следовательно, получаем искомое выражение для резонансной частоты

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{2dc^2}{a^2(b-a) \ln(b/a)}}.$$

При охлаждении полости все ее размеры ( $d, a, b$ ) уменьшаются в одинаковое число раз; поэтому резонансная частота не изменится.

### К главе 24. Волноводы

- 24.1. Вывод этих уравнений см. в гл. 24 «Лекций» (вып. 6, стр. 223).

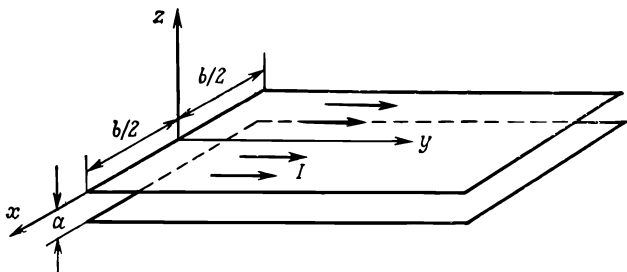
- 24.2. Напряженность магнитного поля бесконечной проводящей плоскости, по которой течет ток, вычислялась в задаче 14.1. Она равна  $B = i/2\epsilon_0 c^2$ , где  $i$  — поверхностная плотность тока. Поскольку в нашем случае  $a \ll b$ , то можно, пренебрегая краевыми эффектами, воспользоваться этой формулой. Тогда поле между пластинами  $B = I/b\epsilon_0 c^2$ , а напряженность магнитного поля вне пластин равна нулю. Энергия

магнитного поля, приходящаяся на единицу длины линии, дается выражением

$$\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int B^2 dV = \frac{I^2 a}{2 (\epsilon_0 c^2)^2 b}.$$

Эта энергия равна  $(1/2)L_0 I^2$ ; следовательно, индуктивность единицы длины  $L_0 = a/\epsilon_0 c^2 b$ . Емкость плоского конденсатора  $C = \epsilon_0 A/d$  ( $A$  — площадь пластин конденсатора, а  $d$  — расстояние между ними). Таким образом, емкость, приходящаяся на единицу длины линии, равна  $C_0 = \epsilon_0 b/a$ . Отсюда импеданс линии

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{a}{\epsilon_0 b c}.$$



- 24.3. Направим ось  $z$  вдоль оси цилиндра. Величина напряженности электрического поля в рассматриваемом случае зависит только от  $z$  и  $r$  ( $r$  — расстояние от оси цилиндра). Зависимость от  $z$  необходима для того, чтобы поле на торцах секции, где оно параллельно проводящей поверхности, обращалось в нуль, а зависимость от  $r$  при фиксированном  $z$  можно найти, используя теорему Гаусса. Имеем  $E = f(z)/r$ , где  $f(z)$  — некоторая подлежащая определению функция от  $z$ . Компоненты напряженности электрического поля равны  $E_x = (x/r^2)f(z)$ ,  $E_y = (y/r^2)f(z)$ . Для каждой из этих компонент справедливо уравнение

$$\Delta E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0,$$

которое после подстановки в него выражения для  $E_x$  сводится к уравнению

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f(z) = 0.$$

Его решениями являются синусы и косинусы. Нам нужно такое решение, которое обращается в нуль при  $z = 0$  и  $z = l$ . Очевидно, такому условию удовлетворяет  $\sin(\pi n z/l)$ , где  $n$  — целое число. Отсюда  $\omega = \pi n c/l$ . Для самой низкой моды  $n = 1$  и  $\omega = \pi c/l$ .

Емкость единицы длины рассматриваемой линии передачи дается выражение (см. решение задачи 6.5)  $C_0 = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$ , а индуктивность единицы длины (см. решение задачи 17.6)  $L_0 = \ln(b/a)/2\pi\epsilon_0 c^2$ . Отсюда частота  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = c/l$ . Эта частота в  $\pi$  раз меньше минимальной собственной частоты резонатора, полученной выше.

- 24.4. Функция  $E_0(x, z)$  должна обращаться в нуль при  $x = 0, a$  и  $z = 0, l$ . Зависимость напряженности электрического поля от координат в прямоугольных сечениях описывается гармоническими функциями, поэтому в случае самой низкой частоты, для которой распределение поля



имеет наиболее простой вид, имеем

$$E_0(x, z) = A \sin(\pi x/a) \sin(\pi z/l).$$

Подставляя величину  $E_y(x, z, t) = E_0(x, z) \exp(i\omega t)$  в уравнение Максвелла

$$\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0.$$

для самой низкой резонансной частоты находим

$$\omega = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}}.$$

- 24.5. а) Напряжение в произвольной точке  $x$  в момент времени  $t$  есть суперпозиция падающей и отраженной волн:

$\hat{V}(x, t) = \hat{V}_{\text{пад}}(x, t) + \hat{V}_{\text{отр}}(x, t) = A_1 \exp[i(\omega t - kx)] + A_2 \exp[i(\omega t + kx)]$ , где  $k = \omega/c$ . При  $x = l$   $V(l, t) = 0$ ; следовательно,  $A_1 \exp(-ikl) + A_2 \exp(ikl) = 0$ , т. е.  $A_2 = -A_1 \exp(-2ikl)$ . При  $x = 0$  получаем  $V(0, t) = V_0 \cos \omega t$ , откуда  $V_0 = A_1 + A_2$ .

Таким образом,

$$A_1 = \frac{V_0 e^{ikl}}{2i \sin(kl)}, \quad A_2 = -\frac{V_0 e^{-ikl}}{2i \sin(kl)}$$

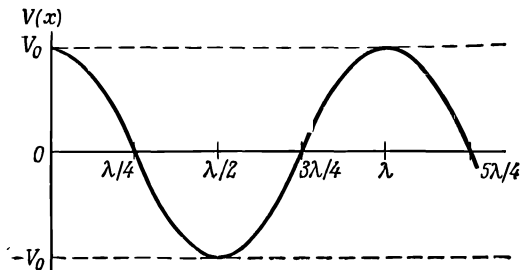
и

$$V_{\text{пад}}(x, t) = \frac{V_0}{2 \sin(kl)} \sin(\omega t - kx + kl),$$

$$V_{\text{отр}}(x, t) = \frac{V_0}{2 \sin(kl)} \sin(\omega t + kx - kl).$$

Обратим внимание на то, что при  $kl = \pi n$  ( $n$  — целое число) амплитуды волн в соответствии с нашими формулами обращаются в бесконечность. С точки зрения физики это означает наступление резонанса — частота источника сравнивается с одной из резонансных частот отрезка кабеля. Амплитуда колебаний при резонансе на самом деле конечна: величина ее определяется омическими потерями, которыми мы пренебрегли.

- б)  $V(x, t) = V_{\text{пад}}(x, t) + V_{\text{отр}}(x, t) = (V_0/\sin kl) \sin[k(t - x)] \cos \omega t$ . При  $t = 5\pi c/2\omega = 5x/4$  ( $\lambda = 2\pi c/\omega$ ) имеем  $V(x, t) = V_0 \cos(\omega x/l) \times \times \cos \omega t$ . Амплитуда напряжения максимальна при  $x = 0, \lambda/2, \lambda$  (см. рисунок).



в) Пользуясь формулой (24.1), приведенной в «Лекциях» (вып. 6, стр. 223), находим для  $I(x)$

$$I(0) = 0, \quad I\left(\frac{l}{2}\right) = -V_0 \sqrt{\frac{C_0}{2L_0}} \sin \omega t,$$

$$I(l) = V_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \sin \omega t.$$

г) Так как поглощение отсутствует, средняя работа, производимая генератором, равна нулю [в этом можно убедиться также, вычислив среднее значение  $I(0)V_0(0)$ ]. Следовательно, средний момент силы также равен нулю.

**24.6.** Как и в предыдущей задаче, запишем напряжение в виде

$$V(x, t) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + A_2 e^{i(\omega t + kx)},$$

где  $k = \omega \sqrt{LC}$ . Для определения  $A_1$  и  $A_2$  имеем два условия:  $V_0 = A_1 + A_2$  при  $x = 0$  и  $V(l)/I(l) = Z_T$  при  $x = l$ . Так как

$$I(l) = I_+(l) + I_-(l) = \frac{V_+(l)}{Z_0} - \frac{V_-(l)}{Z_0} = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-ikl} - A_2 e^{ikl}),$$

то условие при  $x = l$  принимает вид

$$\frac{A_1 e^{-ikl} + A_2 e^{ikl}}{A_1 e^{-ikl} - A_2 e^{ikl}} Z_0 = Z_T,$$

или

$$A_1 \left(1 - \frac{Z_T}{Z_0}\right) e^{-ikl} = -A_2 \left(1 + \frac{Z_T}{Z_0}\right) e^{ikl}.$$

Мы имеем два уравнения для  $A_1$  и  $A_2$ . Найдём сначала эти величины, а затем силу тока при  $x = 0$ :

$$I(0) = I_+(0) + I_-(0) = \frac{1}{Z_0} (A_1 - A_2) = \frac{V_0}{Z_0} \frac{1 + i(Z_T/Z_0) \operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC})}{i \operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC}) + (Z_T/Z_0)}.$$

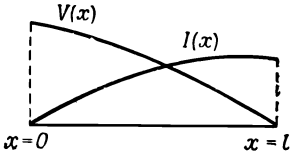
Следовательно,

$$Z_s = \frac{V(0)}{I(0)} = iZ_0 \frac{\operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC}) - i(Z_T/Z_0)}{1 + i(Z_T/Z_0) \operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC})}.$$

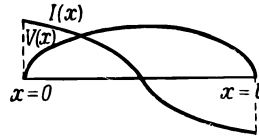
а) если  $Z_T = 0$ , то  $Z_s = iZ_0 \operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC})$ , причём  $Z_s = 0$  при  $\omega l \sqrt{LC} = \pi n$  и  $Z_s = \infty$  при  $\omega l \sqrt{LC} = \pi/2 + \pi n$ .

Частоты, удовлетворяющие этим условиям, отвечают разным собственным модам линии. Рассмотрим только самые низкие моды. Если  $Z_T = 0$ , т. е. линия замкнута накоротко, напряжение на конце линии равно нулю. На фиг. 1 показано распределение амплитуд напряжений и токов, когда  $\omega l \sqrt{LC} = \pi/2$ . Видно, что при  $x = 0$

ток равен нулю, что и означает  $Z_s = \infty$ . Фиг. 2 относится к случаю, когда  $\omega l \sqrt{LC} = \pi$ . В этом случае при  $x = 0$  обращается в нуль напряжение, т. е.  $Z_s = 0$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

- б) Если  $Z_T = \infty$ , то  $Z_s = -iZ_0/\operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC})$ . Проанализируем этот случай аналогично предыдущему (только теперь при  $x = l$  должен обращаться в нуль ток). Можно понять, почему при  $\omega l \sqrt{LC} = (\pi/2) + n\pi$   $Z_s = 0$ , а при  $\omega l \sqrt{LC} = n\pi$   $Z_s = \infty$  (см. фиг. 2).
- в) В случае  $Z_T = Z_0$  имеем  $Z_s = Z_0$ , т. е. линия эквивалентна бесконечной.
- 24.7. На стыке двух передающих линий выполняются следующие условия «сшивки»:  
для токов

$$I_{\text{пад}} + I_{\text{отр}} = I_{\text{пр}},$$

и для напряжений

$$V_{\text{пад}} + V_{\text{отр}} = V_{\text{пр}}.$$

Используя тот факт, что

$$V_{\text{пад}} = Z_1 I_{\text{пад}}, \quad V_{\text{отр}} = -Z_1 I_{\text{отр}}, \quad V_{\text{пр}} = Z_2 I_{\text{пр}},$$

получаем систему уравнений

$$\frac{V_{\text{пад}}}{Z_1} - \frac{V_{\text{отр}}}{Z_1} = \frac{V_{\text{пр}}}{Z_2},$$

$$V_{\text{пад}} + V_{\text{отр}} = V_{\text{пр}}.$$

решая которую, получаем искомый ответ.

- 24.8. а) Найдем компоненты напряженности магнитного поля:

$$B_x = (\nabla \times \mathbf{A})_x = k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(\omega t - kx)},$$

$$B_y = (\nabla \times \mathbf{A})_y = -k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(\omega t - kx)},$$

$$B_z = (\nabla \times \mathbf{A})_z = 0.$$

Магнитное поле действительно поперечно, так как  $B_z = 0$  (волна распространяется вдоль оси  $z$ ). Легко убедиться, что найденное поле  $\mathbf{B}$  удовлетворяет волновому уравнению  $\Delta \mathbf{B} - (1/c^2)(d^2 \mathbf{B}/dt^2) = 0$ . Проверим теперь выполнение граничных условий. Внутри идеального проводника, из которого, как мы считаем, сделаны стенки волновода, переменное магнитное поле должно отсутствовать, иначе возникли бы бесконечно большие индукционные токи.

Силловые линии магнитного поля имеют вид замкнутых петель, поэтому на стенках волновода должны быть отличны от нуля лишь тангенциальные составляющие вектора  $\mathbf{B}$ . Но это так и есть на самом деле, поскольку  $B_z = 0$ .

Определим вектор  $\mathbf{E}$ . С этой целью проинтегрируем уравнение  $\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/c) (\partial\varphi/\partial t)$  и определим потенциал  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{k_z}{\omega} c \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(\omega t - k_x x)}.$$

Поскольку  $\mathbf{E}$  удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

мы имеем

$$E_x = -\frac{k_x k_z}{\omega} c \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(\omega t - k_x x)},$$

$$E_y = -\frac{k_y k_z}{\omega} c \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(\omega t - k_x x)},$$

$$E_z = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \left[ \frac{k_z^2}{\omega} c - i\omega \right] e^{i(\omega t - k_x x)}.$$

Кроме того, электрическое поле удовлетворяет волновому уравнению  $\Delta \mathbf{E} - (1/c^2) (\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2) = 0$ . Согласно граничным условиям, на стенках волновода  $E_y = 0$  (при  $x = 0$  и  $x = a$ ),  $E_x = 0$  (при  $y = 0$  и  $y = b$ ) и  $E_z = 0$ . Написанные выше выражения для компонент напряженности электрического поля удовлетворяют этим условиям.

- б) В этом случае  $k_z$  — мнимая величина, т. е.  $k_z = -i\alpha$ , где  $\alpha$  — вещественное число. Но тогда  $B_x, B_z \sim \exp(-\alpha z)$ , и, следовательно, магнитное поле  $\mathbf{B}$  затухает вдоль оси  $z$ .

### К главе 25. Электродинамика в релятивистских обозначениях

25.1.  $\varphi^2 - A^2 = A_\mu A_\mu$ ;  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} - \rho\varphi = -A_\mu J_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ .

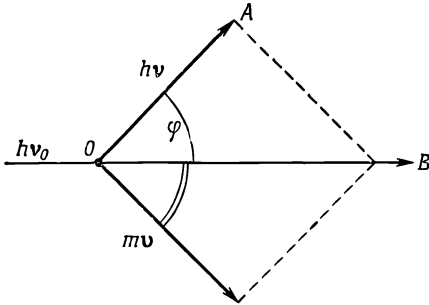
25.2. Начальные условия: электрон покоится (его энергия  $m_0$ , а импульс равен нулю), а фотон движется с энергией  $h\nu_0$  и импульсом  $h\nu_0$ . После их столкновения электрон приобретает энергию  $m$  и импульс  $m\mathbf{v}$ , причем  $m = m_0/\sqrt{1-v^2}$ . Энергию фотона после столкновения обозначим  $h\nu$ , а его импульс  $h\nu$  (считаем  $c = 1$ ). Напишем законы сохранения энергии и импульса:

$$h\nu_0 + m_0 = h\nu + m,$$

$$h\nu_0 = h\nu + m\mathbf{v}.$$

(В релятивистских обозначениях это можно написать как  $\sum_{\text{налет. частицы}} \mathbf{P}_\mu = \sum_{\text{разлет. частицы}} \mathbf{P}_\mu$ ). Из треугольника  $OAB$  находим  $m^2 v^2 = h^2 v_0^2 + h^2 v^2 - 2h^2 v_0 v \cos\varphi$ , а из закона сохранения энергии  $m = h(v_0 - v) +$

+  $m_0$ . Возводя обе части последнего соотношения в квадрат и вычитая затем предыдущее соотношение, путем несложных преобразований находим



$$h\nu = \frac{h\nu_0}{\left[1 + \frac{h\nu_0}{m_0} (1 - \cos \varphi)\right]},$$

где  $\varphi$  — угол отклонения направления распространения фотона от первоначального.

- 25.3. Будем исходить из того факта, что квадрат 4-векторного импульса представляет собой инвариант  $P_\mu P_\mu = \text{inv}$ , т. е.  $E^2 - \mathbf{p}^2 = \text{inv}$ , где  $E$  и  $\mathbf{p}$  — полная энергия и импульс системы. Квадрат четырехмерного импульса системы сохраняется в реакции и не зависит от системы координат. В лаб. системе координат (до реакции)  $p_0 = m_{e^-} + E_\gamma$  ( $E_\gamma$  — энергия фотона), а трехмерный импульс равен импульсу фотона, т. е. по модулю равен  $E_\gamma$ . Квадрат четырехмерного импульса в лаб. системе:  $(E_\gamma + m_e)^2 - E_\gamma^2$ . Запишем четырехмерный импульс в системе ц. м. Трехмерный импульс здесь по определению равен нулю. Временная же компонента равна  $(m_{e^-} / \sqrt{1 - v_1^2}) + (m_{e^+} / \sqrt{1 - v_2^2}) + (m_{e^-} / \sqrt{1 - v_3^2})$ , где  $m_{e^-}$  и  $m_{e^+}$  — соответственно массы электрона и позитрона ( $m_{e^-} = m_{e^+} = m_e$ ). Таким образом,

$$(E_\gamma + m_e)^2 - E_\gamma^2 = \left( \frac{m_{e^-}}{\sqrt{1 - v_1^2}} + \frac{m_{e^+}}{\sqrt{1 - v_2^2}} + \frac{m_{e^-}}{\sqrt{1 - v_3^2}} \right)^2.$$

Порог реакции будет соответствовать нулевым скоростям электронов и позитрона:  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ . Отсюда  $2E_\gamma^{\text{мин}} m_e + m_e^2 = 9m_e^2$ . Следовательно,  $E_\gamma^{\text{мин}} = 4m_e = 2,04 \text{ Мэв}$ .

- 25.4. Обозначим через  $P_\mu$  суммарный 4-вектор импульса частиц  $m$  и  $M$  до соударения в лаб. системе координат. Очевидно,  $P_\mu (\sqrt{p^2 + M^2} + m, \mathbf{p})$ . Обозначим 4-вектор импульса образовавшейся частицы в системе координат, в которой она покоится, через  $P'_\mu$ . Тогда из инвариантности квадрата 4-вектора импульса и из закона сохранения импульса следует, что  $P_\mu^2 = P'^2_\mu$  или

$$(p^2 + M^2 + 2m \sqrt{p^2 + M^2} + m^2) - p^2 = m_1^2.$$

Отсюда находим массу покоя новой частицы:  $m_1^2 = m^2 + M^2 + 2m \times \sqrt{p^2 + M^2}$ . Поскольку импульс частицы  $\mathbf{p}$  до соударения связан с ее

скоростью соотношением  $p = Mv/\sqrt{1-v^2}$ , то окончательно найдем

$$m_1 = \sqrt{m^2 + M^2 + \frac{2mM}{\sqrt{1-v^2}}}.$$

В нерелятивистском случае, т. е. при  $v^2 \ll 1$ ,  $m_1 = m + M$ . Скорость новой частицы в лаб. системе координат связана с импульсом  $p'$  и энергией  $\mathcal{E}'$  частицы соотношением:  $\mathbf{V} = p'/\mathcal{E}'$ . Согласно закону сохранения импульса  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ , а согласно закону сохранения энергии  $\mathcal{E}' = m + \sqrt{p^2 + M^2}$ . Отсюда

$$\mathbf{V} = \frac{M\mathbf{v}}{M + m\sqrt{1-v^2}}.$$

В нерелятивистском случае ( $v^2 \ll 1$ ) получаем известный результат:

$$\mathbf{V} = \frac{M\mathbf{v}}{M + m}.$$

### К главе 26. Лоренцевы преобразования полей

26.1. В четырехмерной форме имеем  $\nabla_\mu F_{\mu\nu} = (1/\epsilon_0) j_\nu$ , где  $j_\nu (\rho, \mathbf{j})$  — 4-вектор плотности тока.

26.2. Искомым вектором является 4-вектор с компонентами  $f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu$  где  $F_{\mu\nu}$  — тензор электромагнитного поля, а  $j_\nu$  — 4-вектор плотности тока. Временная компонента этого вектора  $f_4 = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$  равна работе, производимой в единицу времени электрическим полем в единичном объеме вещества.

Пространственные компоненты дают скорость изменения соответствующих компонент импульса единицы объема; иными словами, — это компоненты суммарной силы, действующей на заряды в единичном объеме.

26.3. Используя соотношения, приведенные в табл. 26.2 «Лекций» (вып. 6, стр. 273), нетрудно показать, что  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}')$  и  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = \mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2$ , т. е. эти величины инвариантны. Поскольку  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$  — инвариант и если векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  образуют острый угол в одной системе координат, т. е. если  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) > 0$ , то и во всех других инерциальных системах этот угол будет острым. Оба рассмотренных инварианта равны нулю для электромагнитной волны в пустоте.

26.4. Выберем систему координат так, что ось  $x$  параллельна вектору  $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ . Система  $K'$  с осями  $x' \| x, y' \| y, z' \| z$  движется с искомой скоростью  $v$ . В системе  $K'$  имеем  $(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}') = 0$ . Распишем это уравнение в компонентах:

$$\begin{aligned} x: \quad E'_y B'_z - E'_z B'_y &= 0, \\ y: \quad E'_x B'_z - E'_z B'_x &= 0, \\ z: \quad E'_x B'_y - E'_y B'_x &= 0. \end{aligned}$$

Выразим в этих уравнениях  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$  через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в системе  $K$  с помощью лоренцевых преобразований [см. соответствующие формулы преобразования в табл. 26.2 «Лекций» (вып. 6, стр. 273)].

Можно показать, что

$$\begin{aligned}(1 + v^2)(E_y B_z - E_z B_y) - v(B_z^2 + B_y^2 + E_z^2 + E_y^2) &= 0, \\ E_x(B_z + vE_y) - B_x(E_z - vB_y) &= 0, \\ E_x(B_y - vE_z) - B_x(E_y + vB_z) &= 0.\end{aligned}$$

Поскольку система  $K$  выбрана так, что  $E_x = 0$  и  $B_x = 0$ , два последних уравнения удовлетворяются автоматически, а из первого уравнения следует, что

$$\frac{v}{1 + v^2} = \frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_x}{E^2 + B^2}.$$

- 26.5. Рассмотрим систему координат  $K'$ , в которой заряд покоится. В этой системе координат  $\mathbf{B}' = 0$ ,  $\mathbf{E}' = q\mathbf{R}'/4\pi\epsilon_0 R'^3$ . Используя формулы лоренцевых преобразований для компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , находим, что в лаб. системе  $K$  [см. табл. 26.2 «Лекций» (вып. 6, стр. 277)]; в формулах этой таблицы нужно только заменить  $v$  на  $-v$ :

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 R'^3}, & E_y &= \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 R'^3 \sqrt{1 - v^2}}, & E_z &= \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 R'^3 \sqrt{1 - v^2}}, \\ B_x &= 0, & B_y &= -\frac{qvz'}{4\pi\epsilon_0 c^2 R'^3 \sqrt{1 - v^2}}, & B_z &= \frac{qvy'}{4\pi\epsilon_0 c^2 R'^3 \sqrt{1 - v^2}};\end{aligned}$$

здесь  $R'^2 = [(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - v^2)]/(1 - v^2)$  [согласно лоренцевым преобразованиям  $x' = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2}$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ ]. Подставляя выражение для  $R'$  в выражения для компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  и вводя обозначение

$$R^{*2} = (x - vt)^2 + (1 - v^2)(y^2 + z^2),$$

находим

$$\mathbf{E} = (1 - v^2) \frac{q\mathbf{r}_p}{4\pi\epsilon_0 R^{*3}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}.$$

Если ввести  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{r}_p \{x - vt, y, z\}$  и  $\mathbf{v}$ , то  $R^{*2} = r_p^2 (1 - v^2 \sin^2 \theta)$ . Следовательно, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}_p}{4\pi\epsilon_0 r_p^3} \frac{(1 - v^2)}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

и

$$\mathbf{B} = \frac{q(\mathbf{v} \times \mathbf{r}_p)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_p^3} \frac{(1 - v^2)}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}.$$

- 26.6. См. решение задачи 26.5.

- 26.7. а) В системе координат  $K$ , жестко связанной с проводом (в которой положительные ионы покоятся), напряженность электрического поля равна нулю в силу электрической нейтральности провода. Магнитное же поле легко найти:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r};$$

здесь  $\mathbf{I}$  — вектор силы тока. [По поводу этого выражения см., например, формулу (13.18) в «Лекциях» (вып. 5, стр. 266).] Если ось  $x$  направить вдоль вектора  $\mathbf{I}$ , то  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  и

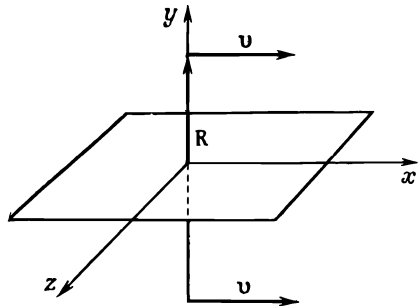
$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2Iz}{r},$$

$$B_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2Iy}{r}.$$

- б) Чтобы найти поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в системе координат  $K'$ , движущейся вместе с электронами (в этой системе координат электроны покоятся, а положительные ионы движутся), воспользуемся формулами лоренцевых преобразований полей (см. табл. 26.2 «Лекций», вып. 6, стр. 277). В результате получаем

$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \mathbf{E}' = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

- 26.8. Вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, из соображений симметрии направлен перпендикулярно этой плоскости. Величину же его можно определить с помощью теоремы Гаусса. Получаем  $\mathbf{E} = (\sigma/2\epsilon_0)\mathbf{e}_y$ , где  $\mathbf{e}_y$  — единичный вектор в направлении оси  $y$  (см. рисунок).



На заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$ , действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

В рассматриваемой лаб. системе координат  $\mathbf{B} = 0$  и, следовательно,  $\mathbf{F} = (\sigma q/2\epsilon_0)\mathbf{e}_y$ . Заряды отталкивают друг друга с силой Кулона

$$f_y = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(1-v^2)^2 \sin^2 \theta}{(1-v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

(см. решение задачи 26.5), где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{v}$  и радиусом-вектором  $\mathbf{R}$ , соединяющим два заряда. По условию задачи  $\theta = \pi/2$ . Поэтому  $f_y = (q^2/4\pi\epsilon_0 a^2) \sqrt{1-v^2}$ . Движущиеся заряды не будут отклоняться от плоскости, если  $F_y = f_y$ . Отсюда следует ответ

$$\sigma = \frac{q}{2\pi a^2} \sqrt{1-v^2}.$$



При малых скоростях зарядов  $\sigma \approx \sigma_0 = q^2/2\pi a^2$ . Поэтому отношение плотности зарядов на поверхности плоскости при релятивистских скоростях электронов к плотности зарядов в нерелятивистском случае равно  $\sigma/\sigma_0 = \sqrt{1-v^2}$ . Так как энергия частицы, движущейся со скоростью  $v$ ,  $\mathcal{E} = me/\sqrt{1-v^2}$ , то  $\sigma = \sigma_0(m/E)$ . Поскольку по условию задачи энергия заряда равна  $500 \text{ Мэв}$ , то учитывая, что  $m_e = 0,5 \text{ Мэв}$ , находим  $\sigma/\sigma_0 = 10^{-3}$ .

- 26.9. Пользуясь выражением  $u_\mu = dx_\mu/ds$ , убеждаемся, что  $u_\mu^2 = 1$ . Кроме того,

$$\dot{f}_\mu u_\mu = u_\mu \frac{dp_\mu}{ds} = m_0 u_\mu \frac{du_\mu}{ds} = \frac{1}{2} m_0 \frac{du_\mu^2}{ds} = 0.$$

- 26.10. а) Прежде всего нужно определить «запаздывающее положение» частицы, т. е. выяснить, на каком этапе движения создается интересующее нас поле. Для этого достаточно ответить на вопрос, какое время больше — затраченное светом для того, чтобы пройти из начала координат в точку  $(a, a)$ , или затраченное частицей для того, чтобы достичь точки  $(a, 0)$ , выйдя тоже из начала координат. Так как  $v/c = 0,5$ , второе время больше, т. е. поле создается зарядом во время его равномерного движения вдоль оси  $x$ .

Электрическое поле равномерно движущегося заряда имеет вид [см., например, решение задачи 26.5 или формулы (26.2), (26.3) и (26.6) «Лекций» (вып. 6, стр. 265, 266):

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2}} \frac{x-vt}{\left[\frac{(x-vt)^2}{(1-v^2)} + y^2 + z^2\right]^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2}} \frac{y}{\left[\frac{(x-vt)^2}{(1-v^2)} + y^2 + z^2\right]^{3/2}},$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2}} \frac{z}{\left[\frac{(x-vt)^2}{(1-v^2)} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}.$$

Согласно условию задачи  $z = 0$ ,  $y = a$ ,  $x = a$ ,  $vt_1 = a$ ,  $v = 1/2$ . (Здесь считается, что  $c = 1$ .) Отсюда

$$E_x = E_z = 0, \quad E_y = q/2 \sqrt{3} \pi \epsilon_0 a^2.$$

- б) Как было выяснено в п. (а), интересующее нас поле определяется движением частицы вдоль оси  $x$ . Оно не зависит от характера движения частицы до прихода ее в начало координат.

## К главе 27. Энергия поля и его импульс

- 27.1. Вычислим  $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ , выполняя дифференцирование как и для произведения функций:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla_A \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \nabla_B \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Индексы  $A$  и  $B$  у  $\nabla$  мы приписали для удобства, чтобы яснее отметить тот факт, что при дифференцировании оператор  $\nabla$  действует

только на соответствующий вектор, а другой вектор при этом считается постоянным. Далее, замечая, что

$$\nabla_A \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla_A) \mathbf{A} - \mathbf{B} (\nabla_A \cdot \mathbf{A}),$$

находим окончательно

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Вычислим теперь  $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  Для  $i$ -й компоненты этого вектора можно написать  $\nabla_i A_k B_k = A_k \nabla_i B_k + B_k \nabla_i A_k$ . Замечая, что  $(\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}))_i = A_k \nabla_i B_k - A_k \nabla_k B_i$ , находим  $A_k \nabla_i B_k = (\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}))_i + ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B})_i$ . Отсюда

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}.$$

- 27.2. Напряженность магнитного поля диполя с магнитным моментом  $\mathbf{M}$  дается выражением

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{M}\mathbf{R})\mathbf{R} - \mathbf{M}R^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^5}.$$

Выберем сферическую систему координат, начало которой совпадает с центром Земли, а ось  $z$  — с направлением вектора  $\mathbf{M}$ . Величину  $M$  можно определить через магнитное поле  $B_0$  у поверхности Земли на экваторе:  $B_0 = M/4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^3$ , где  $R_0$  — радиус Земли. Считая Землю шаром, вычислим энергию внешнего по отношению к Земле магнитного поля по формуле  $W = (\epsilon_0 c^2/2) \int B^2 dV$ . Подставляя в эту формулу выражение для  $\mathbf{B}$  и выполняя интегрирование, можно показать, что  $W = 4\pi\epsilon_0 c^2 B_0^3 R_0^3/3 \approx 10^3$  Мт. Отсюда ясно, что по энергетическим соображениям взрыв водородной бомбы в 1 Мт не может существенно исказить магнитное поле Земли.

- 27.3. Напряженность магнитного поля на поверхности провода  $B = I/2\pi\epsilon_0 c^2 r$ , где  $I$  — сила тока, протекающего по проводу. Напряженность электрического поля найдем, воспользовавшись законом Ома:  $\mathbf{I} = \mathbf{E}/R$ , где  $R$  — сопротивление единицы длины провода. Вычисляя плотность потока энергии, которая равна модулю вектора Пойнтинга, находим  $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = (\epsilon_0 c^2/R) \mathbf{I} \times \mathbf{B}$ . Поток энергии направлен нормально к поверхности провода (внутри провода).

Интегрирование по поверхности провода единичной длины дает

$$\int (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) da = I^2 R.$$

Следовательно, поток вектора Пойнтинга через поверхность прямолинейного провода равен омическим потерям в этом проводе.

- 27.4. Очевидно, что электромагнитное поле будет заключено в пространстве между цилиндрами. Так как цилиндры изготовлены из идеальных проводников, электрическое поле перпендикулярно поверхности цилиндров, т. е. радиально. Магнитное поле  $B$  на расстоянии  $r$  от оси цилиндров определяем по теореме Стокса ( $a < r < b$ ):  $B = I/2\pi\epsilon_0 c^2 r$ . Силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности с центрами на оси цилиндров. Следовательно, вектор Пойнтинга направлен вдоль оси цилиндров. В решении задачи 6.5 вычислена емкость  $C$ , приходящаяся на единицу длины такого кабеля:  $C = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$ . Учтявая, что заряды на цилиндрах связаны с разностью потенциалов  $V$  соотношением  $q = VC$ , и используя теорему

Гаусса, находим, что напряженность электрического поля  $E$  в пространстве между цилиндрами равна  $E = V/r \ln(b/a)$ . Следовательно, для величины вектора Пойнтинга в каждой точке этого пространства получаем

$$|\mathbf{S}| = \epsilon_0 c^2 |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = \frac{IV}{2\pi r^2 \ln(b/a)}.$$

Плотность энергии электромагнитного поля

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} [\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2] = \frac{\epsilon_0 V^2}{2r^2} \left[ \frac{1}{\ln^2(b/a)} + \frac{c^2}{R^2 (2\pi\epsilon_0 c^2)^2} \right].$$

Таким образом, скорость распространения энергии равна

$$v = \frac{|\mathbf{S}|}{W} = \frac{2R}{R^2 C + \mathcal{L}},$$

где  $\mathcal{L} = \ln(b/a)/2\pi\epsilon_0 c^2$  — емкость единицы длины кабеля (см. решение задачи 17.6). Заметим, что в силу того, что  $\mathcal{L}C = 1/c^2$ ,  $v = c$  при  $R = \sqrt{\mathcal{L}/C}$ .

- 27.5. Антенна длиной  $\lambda/4$ , помещенная над идеально проводящей плоскостью, эквивалентна рассмотренной в задаче 21.5 антенне длиной  $\lambda/2$  (мы учли зеркальное отображение антенны длиной  $\lambda/4$ ). Поэтому воспользуемся найденными в решении задачи 21.5 выражениями для напряженностей электрического и магнитного полей на большом расстоянии от антенны (поля над плоскостью):

$$E_\theta = \frac{\alpha}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right].$$

$$B_\varphi = \frac{1}{c} E_\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

В этих выражениях постоянную  $\alpha$  мы должны определить из условий задачи. С этой целью вычислим вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\epsilon_0 c \alpha^2}{r^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right].$$

Тогда мощность, излучаемая антенной, равна среднему по времени потоку вектора Пойнтинга:

$$W = \epsilon_0 c \alpha^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] dt \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta\right)}{\sin^2\theta} 2\pi \sin\theta d\theta.$$

В решении задачи 21.5 отмечалось, что  $\cos[(\pi/2) \cos\theta]/\sin\theta$  хорошо аппроксимируется функцией  $\sin\theta$ . Используя это и учитывая, что  $\cos^2[\omega(t - r/c)] = 1/2$ , находим  $W = (2\pi/3)\epsilon_0 c \alpha^2$ . Следовательно,  $\alpha = \sqrt{3W/2\pi\epsilon_0 c}$ .

- а) На поверхности Земли, т. е. при  $\theta = \pi/2$ , среднее значение по времени вектора Пойнтинга равно

$$\bar{S} = \frac{3W}{2\pi r^2} \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ вт/м}^2.$$

- б) Используя найденное выражение для  $\alpha$ , находим максимальные значения напряженностей электрического и магнитного полей:

$$E_{\theta} \left( r, \theta = \frac{\pi}{2} \right)_{\text{макс}} = \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3W}{2\pi\epsilon_0 c}},$$

$$B_{\varphi} \left( r, \theta = \frac{\pi}{2} \right)_{\text{макс}} = \frac{\alpha}{cr} = \frac{1}{cr} \sqrt{\frac{3W}{2\pi\epsilon_0 c}}.$$

- 27.6. а) Граничные условия требуют, чтобы на стенках волновода обращались в нуль тангенциальные составляющие вектора  $\mathbf{E}$  и нормальные составляющие вектора  $\mathbf{B}$ . Эти условия выполняются, поскольку  $E_y(x=0, a) = 0$ ,  $E_x(y=0, b) = 0$ ,  $B_y(y=0, b) = 0$  и  $B_x(x=0, a) = 0$ .
- б) Вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 c^2 E_0^2 \left[ \mathbf{e}_z \frac{k_z}{\omega} \sin^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos^2(\omega t - k_z z) - \mathbf{e}_x \frac{\pi}{\omega a} \cos \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \frac{1}{2} \sin 2(\omega t - k_z z) \right].$$

Плотность энергии

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos^2(\omega t - k_z z) + \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} \sin^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos^2(\omega t - k_z z) + \frac{c^2 \pi^2}{\omega^2 a^2} \cos^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin^2(\omega t - k_z z) \right].$$

- в) Усредняя выражение для  $S_z$  по времени и по сечению волновода, находим

$$\langle S_z \rangle_{t, x} = \frac{1}{a} \int_0^a \langle S_z \rangle_t dx = \frac{k_z}{\omega} \frac{\epsilon_0 c^2}{4} E_0^2 \mathbf{e}_z.$$

- г) Усредняя  $U$  по времени и по объему волновода, находим среднюю плотность энергии в волноводе:

$$\langle U \rangle_{t, x} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{8} \left[ 1 + \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \frac{c^2 \pi^2}{\omega^2 a^2} \right].$$

Используя соотношение  $k_z = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (\pi^2/a^2)}$  [см. формулы (24.13), (24.16) «Лекций», вып. 6], имеем

$$\langle U \rangle_{t, x} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}.$$

- д) Средняя скорость распространения энергии совпадает с групповой скоростью. Действительно,

$$\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle_{t, x}}{\langle U \rangle_{t, x}} = c^2 \frac{k_z}{\omega} \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z c \sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}} = v_{\text{гр}}$$

[ср. формулу (24.27) «Лекций», вып. 6, стр. 232].

- 27.7. а) Вектор Пойнтинга равен  $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \epsilon_0 c^3 B^2 \mathbf{n}$ . Магнитное поле осциллирующего диполя дается выражением [см., например, формулу (21.23) «Лекций», вып. 6, стр. 155]

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в радиальном направлении. Следовательно,

$$\mathbf{S} = \frac{r^2 \omega^4 \sin^2 \theta \cos^2 \omega t}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \mathbf{n}$$

( $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{n}$ ).

- б) Действительно, средняя по времени излучаемая мощность

$$\mathcal{W} = \oint \overline{\mathbf{S}} \, d\sigma = \frac{r^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

(здесь мы учли, что  $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ ).

- 27.8. Считая, что на электрон действует только электрическое поле волны  $\mathbf{E} = E_0 \exp(i\omega t)$ , из уравнения движения  $m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$  определим дипольный момент колеблющегося электрона. Аналогично предыдущей задаче найдем вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{q^4 E_0^2 \sin^2 \theta}{2(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2 m^3} \mathbf{n}.$$

Если ввести угол  $\theta$  между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{E}$ , то поток излучаемой энергии в элемент  $d\Omega$  телесного угла можно записать в виде

$$dJ = |\mathbf{S}| d\Omega = \frac{q^4 E^2}{2(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 m^2} \sin^2 \theta d\Omega.$$

Разделив этот поток на плотность энергии в падающей волне  $J = (1/2)\epsilon_0 c E_0^2$ , получим дифференциальное сечение рассеяния электромагнитной волны электроном:

$$d\sigma = \frac{dJ}{J} = \left( \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega.$$

Полное сечение рассеяния дается выражением

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2,$$

где  $e^2 = q^2/4\pi\epsilon_0$ .

- 27.9. Сила светового давления на частицу записывается в виде

$$F = \frac{S_1}{S_0} \frac{\mathcal{W}}{c} (1 + \beta),$$

где  $S_1$  — площадь поперечного сечения шарика радиусом  $r$ ;  $S_0 = 4\pi R^2$  ( $R$  — расстояние частицы от Солнца);  $\mathcal{W}$  — энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени;  $\beta$  — коэффициент отражения (по условию задачи  $\beta = 0$ ). Сила гравитационного притяжения равна

$$F_1 = \frac{GMm}{R^2};$$

здесь  $m$  — масса частицы,  $M$  — масса Солнца ( $M = 2 \cdot 10^{30}$  кг),  $G$  — гравитационная постоянная ( $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$  м<sup>3</sup>/кг·сек<sup>2</sup>). В равновесии

будут находиться лишь те частицы, радиус которых удовлетворяет условию  $F_1 = F$ . Отсюда находим

$$r = \frac{3}{16\pi} \frac{W}{GM\rho c}$$

( $\rho$  — плотность массы частицы). Считая  $\rho \approx 1 \text{ г/см}^3$ , оцениваем радиус частицы:  $r_0 \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 6 \text{ \AA}$ . Под действием светового давления частицы радиусом  $r < r_0$  будут отклоняться от Солнца. Таким образом, обычное объяснение происхождения хвостов комет вполне разумно.

- 27.10. а) Учитывая то, что  $r \ll R$ , магнитное поле внутри тороидальной катушки можно приближенно считать однородным по поперечному сечению. Выбрав в качестве контура интегрирования среднюю линию тороида, с помощью теоремы Стокса имеем

$$B = \frac{NKt}{2\pi\epsilon_0 c^2 R}.$$

Выберем в поперечном сечении тороида контур интегрирования в форме окружности радиусом  $\rho$  ( $0 \leq \rho \leq r$ ). Поскольку мы считаем магнитное поле однородным по сечению, магнитный поток через этот контур можно записать в виде

$$\Phi = \pi\rho^2 B = \frac{\pi\rho^2}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{NKt}{R}.$$

Следовательно, э. д. с. в этом контуре

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\pi\rho^2 NK}{2\pi\epsilon_0 c^2 R}.$$

С другой стороны, можно приближенно считать электрическое поле  $E$  одинаковым по величине во всех точках средней линии тороида. Тогда, интегрируя поле вдоль этого контура, находим

$$\mathcal{E} = \int E_t ds = E_t \cdot 2\pi\rho$$

(направление вектора  $E$  в каждой точке контура показано на рисунке, где изображен один виток тороидальной катушки). Таким образом,

$$E_t = - \frac{\rho NK}{2\pi\epsilon_0 c^2 R}.$$

Энергия, запасенная в тороидальной катушке к моменту времени  $t$ , равна

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (E^2 + c^2 B^2) dV = \frac{r^2}{4\epsilon_0 c^2} \frac{N^2 K^2}{R} \left[ t^2 + \frac{r^2}{2c^2} \right].$$

- б) Найдем направление и величину вектора Пойнтинга на поверхности тороида. В п. (а) мы определили величины полей  $E$  и  $B$ . Направления  $E$  и  $B$  таковы, что вектор Пойнтинга  $S$  в любой точке на поверхности тороида нормален к поверхности и направлен внутрь тороида. Кроме того, в любой точке  $E \perp B$ . Следовательно, модуль вектора Пойнтинга

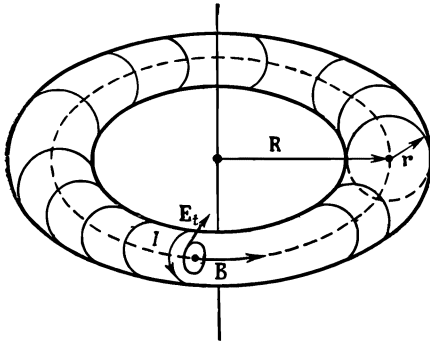
$$S = \epsilon_0 c^2 EB = \frac{rt}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2 R^2} (NK)^2,$$

Отсюда находим полную мощность поглощаемой тороидом энергии, которая равна потоку вектора Пойнтинга через поверхность тороида (последняя приближенно равна  $2\pi r \cdot 2\pi R$ ):

$$\int (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) da = - \frac{\pi r^2 t (NK)^2}{2\pi \epsilon_0 c^2 R}.$$

Этот результат верен, поскольку выполняется условие

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_{\Sigma} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) da.$$



### К главе 28. Электромагнитная масса

28.1. Электростатическая энергия  $U_{\text{эл}}$  равномерно заряженного шара радиусом  $a$  вычислена в «Лекциях» (вып. 5, стр. 154):

$$U_{\text{эл}} = \frac{3q_e^2}{5 \cdot 4\pi\epsilon_0 a} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{a}.$$

Приравнявая  $U_{\text{эл}}$  энергии покоя электрона  $m_e c^2$ , находим

$$a = \frac{3}{5} \frac{e^2}{m_e c^2} = 1,69 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Если заряд распределен равномерно по поверхности шара, то (см. § 1, гл. 28 «Лекций», вып. 6)

$$U_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a}$$

и

$$a = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m_e c^2} = 1,41 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

28.2. Момент количества движения электромагнитного поля определяется выражением

$$\mathbf{L} = \epsilon_0 \int (\mathbf{r} \times \mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV.$$

Согласно условию задачи, электрическое и магнитное поля имеют вид

$$E = \begin{cases} 0, & r < a. \\ \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3}, & r > a. \end{cases} \quad B = \frac{3r(r \cdot \mu) - \mu r^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^5}.$$

Подставим выражения для  $E$  и  $B$  в формулу для  $L$  и проинтегрируем по всему пространству в сферической системе координат. В результате найдем

$$a) L = \frac{2}{3} \frac{q_e \mu}{4\pi\epsilon_0 c^2 a}.$$

$$б) \frac{L}{\mu} = \frac{2}{3} \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} = \frac{m}{q_e}$$

$$[\text{где } m = (2/3) (q_e^2 / 4\pi\epsilon_0 c^2 a)].$$

- в) Будем считать, что заряд электрона равномерно «размазан» по поверхности сферы и что сфера вращается с угловой скоростью  $\omega$ . В этих предположениях задача аналогична задаче 14.6. Если воспользоваться решением последней, положив  $4\pi\epsilon_0 Va = q_e$ , то мы сразу получим искомый результат  $\mu = \omega q_e a^2 / 3$ . Отсюда  $\omega = 3\mu / a^2 q_e$ . Максимальная скорость электрона на поверхности — это его линейная скорость на экваторе сферы:  $v_{\text{макс}} = \omega a = 3\mu / a q_e$ . Так как по условию задачи

$$\mu = \frac{\hbar q_e}{2m} = \frac{3}{4} \frac{q_e a c}{\alpha},$$

то

$$v_{\text{макс}} = \frac{9c}{4\alpha} \gg c.$$

Следовательно, собственный магнитный момент электрона нельзя объяснить с позиций классической физики — как магнитный момент вращающейся твердой сферы с радиусом, равным электромагнитному радиусу электрона, и с зарядом электрона.

## К главе 29. Движение зарядов в электрическом и магнитном полях

29.1. а) Уравнения движения заряда:

$$\frac{dp_x}{dt} = qE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0,$$

т. е.  $p_x = qEt$ ,  $p_y = 0$ .

Следовательно,  $v_y = 0$ , а для  $v_x$  имеем

$$qEt = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - (v_x^2/c^2)}},$$

откуда

$$v_x = \frac{cqEt}{\sqrt{m^2 c^2 + (qEt)^2}}.$$



Таким образом, при малых временах  $v \sim t$ , а при  $t > mc/qE$  частица движется практически равномерно со скоростью, близкой к скорости света. Интегрируя, находим

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{c}{qE} (\sqrt{m^2 c^2 + (qEt)^2} - mc).$$

б) В этом случае

$$p_x = qEt, \quad p_y = p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1 - (v_0^2/c^2)}}.$$

С другой стороны

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2}}}, \quad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2}}},$$

откуда

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{p_y}{p_x} = \frac{p_0}{qEt}.$$

Видно, что  $v_y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Для зависимости  $v_x(t)$  имеем

$$v_x(t) = \frac{qEt}{\sqrt{m^2 c^2 + p_0^2 + (qEt)^2}}.$$

Переход к движению со скоростью, близкой к скорости света происходит теперь через промежуток времени порядка  $\sqrt{(m^2 c^2 + p_0^2)}/qE$ , т. е. несколько позже. Зависимость  $x(t)$  имеет в остальном тот же характер, что и раньше. Что касается зависимости  $y(t)$ , то  $y \sim t$  при малых временах и  $y \sim \ln t$  при  $t \gg \sqrt{m^2 c^2 + (p_0^2/qE)}$ .

**29.2.** В циклотроне протоны движутся в постоянном однородном магнитном поле  $B = \text{const}$ . Направим ось  $z$  в направлении вектора  $\mathbf{B}$ . Уравнения движения имеют вид

$$\dot{p}_x = qv_y B, \quad \dot{p}_y = -qv_x B, \quad \dot{p}_z = 0.$$

При этом энергия протонов  $\mathcal{E} = \text{const}$ , так как  $\mathbf{F} \perp \mathbf{V}$ . Поскольку  $\mathcal{E} = mc^2/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$  и  $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$ , уравнения движения принимают вид

$$\dot{v}_x = \frac{qBc^2}{\mathcal{E}} v_y, \quad \dot{v}_y = -\frac{qBc^2}{\mathcal{E}} v_x.$$

Умножая второе уравнение на мнимую единицу и складывая его с первым, для комплексной скорости  $z = v_x + iv_y$  получаем уравнение  $\dot{z} + i\omega z = 0$ , где частота  $\omega = qBc^2/\mathcal{E} = (qB/m) \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ . Если протоны движутся медленно, то  $v^2 \ll c^2$  и циклотронная частота имеет обычный вид  $\omega = qB/m$ . При увеличении энергии протонов циклотронная частота уменьшается. Так как  $\Delta\omega/\omega = -\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ , то при изменении циклотронной частоты на 1% энергия изменится также на 1%.

- 29.3. а) Движение частицы предполагается нерелятивистским; следовательно, импульс частицы связан с ее скоростью обычным соотношением

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Уравнение движения и начальные условия имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0.$$

Уравнение движения в компонентной форме записывается в виде

$$\ddot{x} = \frac{qB}{m} \dot{y}, \quad \ddot{y} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m} \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0.$$

Из последнего уравнения с учетом начальных условий следует, что  $z(t) = 0$ , т. е. движение происходит в плоскости  $xy$ . Если сложить первые два уравнения, предварительно умножив обе части второго уравнения на мнимую единицу и ввести обозначения  $\omega = qB/m$ ,  $x + iy = \eta$ , то получим одно уравнение  $\ddot{\eta} + i\omega\dot{\eta} = iqE/m$ . Решением этого уравнения является сумма решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения. Решение однородного уравнения  $\ddot{\eta}_0 + i\omega\dot{\eta}_0 = 0$  можно представить в виде  $\eta_0 = C \exp(-i\omega t)$ , где комплексную константу  $C$  можно представить в виде произведения ее модуля на фазовый множитель:  $C = a \exp(i\varphi)$ . В качестве частного решения неоднородного уравнения можно взять  $\eta_1 = qEt/m\omega$ . Таким образом,

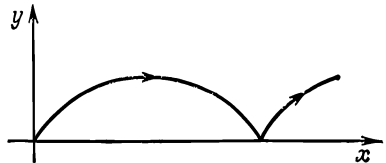
$$\eta = a e^{-i\omega t + i\varphi} + \frac{qE}{m\omega} t \equiv x + iy.$$

Разделяя мнимую и вещественную части и учитывая начальные условия, окончательно находим

$$x = \frac{qE}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t),$$

$$y = \frac{qE}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

Следовательно, траектория в плоскости  $xy$  является циклоидой (см. рисунок). Вычисляя производную  $\dot{x} = (qE/m\omega)(1 - \cos \omega t)$ , мы видим, что предположение о нерелятивистском характере движения справедливо, если  $qE/m\omega \ll c$ , т. е.  $E/Bc \ll 1$ .



- в) Рассмотрим решение  $y(t) = (qE/m\omega^2)(1 - \cos \omega t)$ , найденное в п. (а) нашей задачи. Условие того, что частица не попадает на анод, записывается в виде  $y_{\max} < d$ . Отсюда следует, что должно

выполняться неравенство

$$\frac{2qE}{m\omega^2} < d \quad \text{или} \quad V > \sqrt{\frac{2mc^2E}{qd}}.$$

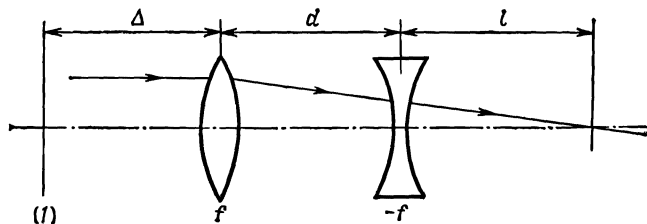
- 29.4. Можно считать, что пучок параллельных лучей, идущий вдоль оптической оси, собирается левой линзой в точку в ее фокусе, а затем эта точка отображается правой линзой. Расстояние от «точки» до рассеивающей линзы равно  $d - f$  (оно отрицательно, если  $f > d$ , т. е. если «точка» расположена правее линзы). Применяя основную формулу линзы (см. § 3 гл. 27 «Лекций», вып. 3), имеем

$$\frac{1}{d-f} + \frac{1}{l} = -\frac{1}{f},$$

откуда

$$l = \frac{f(f-d)}{d}.$$

Изображение действительно, если  $l > 0$ , т. е. если  $f > d$ .



К главе 32. Показатель преломления  
плотного вещества

32.1. То, что квадрат показателя преломления  $n^2$  равен диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , справедливо для любых изотропных сред. В этом можно убедиться, показав, что на соотношение между  $n^2$  и  $\epsilon$  конкретные свойства частиц вещества не влияют.

Уравнения Максвелла в диэлектрике, в котором нет других зарядов, кроме тех, которые связаны в атомах, имеют вид

$$\text{а) } \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}, \quad \text{б) } c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P}/\epsilon_0 + \mathbf{E}),$$

$$\text{в) } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{г) } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Как указывалось в § 3 гл. 32 «Лекций» (вып. 7), эти уравнения допускают волновые решения. Будем искать эти решения в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, & \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \end{aligned}$$

При этом, если ввести вектор электрической индукции  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , то уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{aligned} \text{а) } \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} &= 0, & \text{б) } \epsilon_0 c^2 \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\omega \mathbf{D}, \\ \text{в) } \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B}, & \text{г) } \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Умножая векторно уравнение (в) на  $\mathbf{k}$  и используя уравнение (б), получаем

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D},$$

или

$$\mathbf{D} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{k^2} \right).$$

Так как электрическая волна поляризована в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{k}$ , то  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$  и  $\mathbf{D} = n^2(\omega) \mathbf{E}$ , где  $n^2(\omega) = c^2 k^2 / \omega^2$ . Но, с другой стороны, для волны с частотой  $\omega$  в «линейном» приближении  $\mathbf{D} = \epsilon(\omega) \mathbf{E}$  (это приближение справедливо, если электрические поля в диэлектрике слабы по сравнению с электрическими полями в атомах и молекулах; для лазерного луча, падающего на диэлектрик, возникает необходимость учета нелинейной связи  $\mathbf{D}$  с  $\mathbf{E}$ , т. е. учитывать в разложении  $\mathbf{D}$  относительно  $\mathbf{E}$  члены, квадратичные по  $\mathbf{E}$ , кубические

и т. д.). Следовательно,  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 n^2(\omega)$ . Полагая в этом соотношении  $\omega = 0$  и учитывая, что  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 \kappa$ , находим для всех изотропных веществ

$$\kappa = n^2(0).$$

- 32.2.** Квадрат показателя преломления плазмы в ионосфере дается выражением (см. «Лекции», вып. 7, стр. 67)  $n^2 = 1 - Nq_e^2/m\varepsilon_0\omega^2$ . При  $\omega > \omega_p$ , где  $\omega_p = \sqrt{Nq_e^2/m\varepsilon_0}$  — плазменная частота, ионосфера становится прозрачной, поскольку при этом условии показатель преломления является вещественным числом. Отсюда плотность свободных электронов в ионосфере равна

$$N = \frac{m\varepsilon_0\omega_p^2}{q_e^2} = 1,1 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}.$$

- 32.3.** Электрическое поле, действующее на электроны проводимости, равно среднему полю  $E$ . Следовательно, полагая в уравнении (32.1) «Лекций» (вып. 7, стр. 50)  $\omega_0 = 0$ , для скорости дрейфа электронов  $v_{\text{дрейф}} = \dot{x}$  можно написать следующее уравнение:

$$\frac{dv_{\text{дрейф}}}{dt} = \frac{q_e E}{m} - \frac{v_{\text{дрейф}}}{\tau}.$$

Когда поле  $E$  постоянно действует на электроны проводимости,  $dv_{\text{дрейф}}/dt = 0$ , для скорости дрейфа получаем

$$v_{\text{дрейф}}^{(0)} = \frac{q_e E}{m} \tau$$

[см. формулу (32.39) «Лекций», вып. 7, стр. 63].

Если же в момент времени  $t = 0$  электрическое поле мгновенно выключается, скорость дрейфа электронов изменяется в соответствии с однородным дифференциальным уравнением

$$\frac{dv_{\text{дрейф}}}{dt} = -\frac{v_{\text{дрейф}}}{\tau}.$$

Решая это уравнение, находим

$$v_{\text{дрейф}} = \frac{q_e E}{m} \tau e^{-t/\tau}.$$

Это решение отвечает начальному условию задачи, согласно которому  $v_{\text{дрейф}} = v_{\text{дрейф}}^{(0)}$  при  $t = 0$ . Отсюда видно, что время, за которое величина скорости дрейфа уменьшится в  $e$  раз, в точности равно  $\tau$  — среднему времени между соударениями.

- 32.4.** Из уравнения Максвелла  $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$  находим  $\partial B_x / \partial t = 0$ ,  $\partial B_y / \partial t = ikE_0 \exp[i(\omega t - kz)]$ ,  $\partial B_z / \partial t = 0$ .

Отсюда

a)  $B_x = 0$ ,  $B_y = \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ ,  $B_z = 0$ .

b)  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ .

в) Волновой вектор для рассматриваемых волн можно записать в виде

$$k = (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\varepsilon_0 c^2}} = \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\varepsilon_0 c^2}} e^{-i\pi/4}.$$

Отсюда видим, что разность фаз равна  $-\pi/4$ .

32.5. Более правдоподобную аппроксимацию  $n^2$  можно получить, если воспользоваться выражением для показателя преломления в виде  $n^2 = 1 + (\sigma/\varepsilon_0)/i\omega(1 + i\omega\tau)$  [см. формулу (32.42) «Лекций», вып. 7, стр. 64]. Отсюда замечаем, что  $n^2$  даже для частот  $\omega > \sigma/\varepsilon_0\tau$  имеет мнимую часть.

### К главе 33. Отражение от поверхности

33.1. а) В области 1 распространяются падающая волна, амплитуду которой примем равной единице, и отраженная волна с амплитудой  $b_1$ . В области 2 одна волна с амплитудой  $a_2$  распространяется вправо, а другая волна с амплитудой  $b_2$  — влево. В области 3 имеется лишь прошедшая волна, амплитуду которой обозначим через  $a_3$ . Записывая плоские волны в виде  $E = a \exp \left[ i \left( \omega t \mp \frac{n\omega}{c} z \right) \right]$ , получаем из условий непрерывности на границах раздела тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей (среды считаем немагнитными) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1 + b_1 &= a_2 + b_2, \\ 1 - b_1 &= \frac{n_2}{n_1} (a_2 - b_2), \\ a_2 e^{-i \frac{n_2\omega}{c} l} + b_2 e^{i \frac{n_2\omega}{c} l} &= a_3 e^{-i \frac{n_3\omega}{c} l}, \\ a_2 e^{-i \frac{n_2\omega}{c} l} - b_2 e^{i \frac{n_2\omega}{c} l} &= \frac{n_3}{n_2} a_3 e^{-i \frac{n\omega}{c} l}. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим выражение для квадрата амплитуды прошедшей волны:

$$\begin{aligned} |a_3|^2 &= 16n_1^2 n_2^2 \left[ (n_1 + n_2)^2 (n_2 + n_3)^2 + (n_1 - n_2)^2 (n_2 - n_3)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(n_1^2 - n_2^2)(n_2^2 - n_3^2) \cos \left( 2 \frac{n_2\omega l}{c} \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

б) При  $l = \lambda_2/4 = \pi c/2n_2\omega$  и  $n_2^2 = n_1 n_3$  из системы уравнений, приведенной выше, и из выражения для  $|a_3|^2$  следует, что  $b_1 = 0$ , а  $|a_3|^2 = n_1/n_3$ , т. е. плотность потока энергии в падающей слева на промежуточный слой волне  $|S_1| \sim n_1 E_1^2 = n_1$  равна плотности потока энергии прошедшей волны

$$|S_3| \sim n_3 |a_3|^2 = n_3 \frac{n_1}{n_3} = n_1,$$

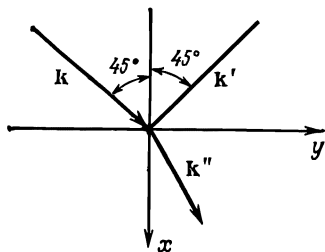
т. е. коэффициент пропускания равен 1.

в) Толщина  $l$  в случае обычного бинокля  $\lambda/4n_2 = 1200 \text{ \AA}$ .

- г) Из предыдущего анализа ясно, что для просветления линзы безразлично, какую ее сторону покрывать. При просветлении должно выполняться соотношение  $n_2^2 = n_1 n_3$ . Просветление осуществляется, как в случае  $n_1 = 1$ ,  $n_2^2 = n_3$  (покрывается внешняя сторона линзы), так и в случае  $n_3 = 1$ ,  $n_2^2 = n_1$  (покрывается внутренняя сторона).

33.2. Выберем систему координат так, как показано на рисунке. Тогда для падающей волны мы можем написать

$$E_1 = E_{01} \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{\omega n_1}{c} y \sin \alpha - \frac{\omega n_1}{c} x \cos \alpha \right) \right].$$



Отраженная и преломленная волны записываются соответственно в виде

$$E_2 = E_{02} \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{\omega n_1}{c} y \sin \beta + \frac{\omega n_1}{c} x \cos \beta \right) \right]$$

и

$$E_3 = E_{03} \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{\omega n_2}{c} y \sin \gamma - \frac{\omega n_2}{c} x \cos \gamma \right) \right].$$

На границе поле  $E$  непрерывно. Поэтому

$$\begin{aligned} E_{01} \exp \left( -\frac{\omega n_1}{c} y \sin \alpha \right) + E_{02} \exp \left( -\frac{\omega n_1}{c} y \sin \beta \right) = \\ = E_{03} \exp \left( -\frac{i \omega n_2}{c} y \sin \gamma \right). \end{aligned}$$

Поскольку  $x$  произвольно, из последнего уравнения следует, что  $\sin \alpha = \sin \beta$ ,  $\sin \alpha / \sin \gamma = n_2 / n_1$ . Отсюда

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha}.$$

По условию задачи  $n_1/n_2 = 1,6$ ,  $\sin^2 \alpha = 0,5$  ( $\alpha = \beta = 45^\circ$ ) и, следовательно,  $\cos \gamma = \pm \sqrt{-0,28} \approx \pm i0,53$ . Подставляя найденное значение  $\cos \gamma$  в выражение для  $E_3$ , получаем ( $n_2 = 1$ )

$$E_3 \sim \exp \left( \pm 0,53 \frac{\omega}{c} z \right) = \exp \left( \pm 0,53 \frac{2\pi z}{\lambda} \right).$$

Верхнему знаку отвечает экспоненциально нарастающее поле, нижнему — убывающее. Оставляя из физических соображений последнее решение, находим, что в воздухе за большой гранью призмы электрическое поле волны убывает в  $e$  раз на расстоянии  $x = 0,3\lambda = 1350 \text{ \AA}$ . Если вектор  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости падения, результат будет точно таким же.

### К главе 34. Магнетизм вещества

34.1. Сила, действующая на частицу в переменном магнитном поле, дается выражением

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Электрическое поле  $\mathbf{E}$  вызвано изменяющимся магнитным полем. Если напряженность электрического поля мала, то частица движется приблизительно по окружности, радиус которой равен  $R = p/qB$  ( $p$  — импульс частицы). Момент количества движения частицы при этом равен  $J = pR = qBR^2$ . Электрическое поле вызывает изменение абсолютной величины импульса:  $dp/dt = qE$ , откуда  $dJ/dt = qER$ . Величину  $E$  можно вычислить, пользуясь теоремой Стокса:

$$E \cdot 2\pi R = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}.$$

Отсюда следует

$$E = -\frac{R}{2} \frac{dB}{dt},$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{qR^2}{2} \frac{dB}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{2B} \frac{dB}{dt}.$$

Наши рассуждения годятся только в том случае, когда частица движется по круговой орбите, т. е. если  $T(dJ/dt)/J = (T/2)(dB/dt)/B \ll \ll 1$ , где  $T$  — период обращения частицы по орбите. Это условие означает, что характерное время изменения поля должно быть во много раз больше периода обращения частицы по орбите.

### К главе 35. Парамагнетизм и магнитный резонанс

35.1. В магнитном поле напряженностью  $B$  протон вращается по круговой орбите с ларморовой частотой  $\omega_L$ , не зависящей ни от радиуса орбиты, ни от скорости частицы (при  $v/c \ll 1$ ), причем  $\omega_L = qB/m_p$ . Выразим величину  $B$  через период обращения  $T = 2\pi/\omega_L$ :

$$B = \frac{2\pi m_p}{qT}.$$

Частота ядерного магнитного резонанса дается выражением (см. § 6 «Лекций», вып. 7, стр. 129)

$$\omega_p = g \frac{q}{2m_p} B = \frac{g}{2} \omega_L.$$

Отсюда

$$g = \frac{2\omega_p}{\omega_L} = 2\nu_p T,$$

где  $\nu_p = \omega_p/2\pi$ . Подставляя численные значения для  $\nu_p$  и  $T$ , приведенные в условии задачи, находим  $g = 5,46$ .



- 35.2. Теорию классического парамагнетизма можно построить аналогично классической теории диэлектрической проницаемости. Энергия магнитного момента  $\mu$  в магнитном поле равна  $-\mu B \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между векторами  $\mu$  и  $\mathbf{B}$ . В статистической физике число моментов, угол наклона которых к оси  $z$  (последняя выбрана совпадающей с вектором  $\mathbf{B}$ ) равен  $\theta$ , приходящееся на единичный телесный угол, вычисляется по формуле

$$n(\theta) = n_0 e^{\mu B \cos \theta / kT}.$$

Считая магнитное поле малым по величине, так что  $\mu B / kT \ll 1$ , разложим в выражении для  $n(\theta)$  экспоненту в ряд и ограничимся первыми двумя членами разложения:

$$n(\theta) = n_0 \left[ 1 + \frac{\mu B \cos \theta}{kT} \right].$$

Интегрируя это выражение по всем телесным углам, получаем, что полное число моментов  $N = 4\pi n_0$ . Полный магнитный момент поделим следующим образом ( $\mathbf{k}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{B}$ ):

$$\mathbf{M} = \int (\mu \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} n(\theta) d\Omega = - \int \mu \cos \theta n(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Вычисляя, находим

$$\mathbf{M} = \frac{N\mu^2}{3kT} \mathbf{B}.$$

Подобная теория классического парамагнетизма не противоречит утверждению о том, что в рамках классической физики парамагнетизм вообще отсутствует. Просто классическая физика не может обосновать существование у каждого атома собственного магнитного момента (спина)  $\mu$ . Наличие его представляет собой чисто квантовый эффект.

- 35.3. Избыток параллельных полю спинов можно найти, используя формулу (35.21) «Лекций» (вып. 7, стр. 125) для магнитного момента единичного объема  $M$ , если поделить  $M$  на магнитный момент одного атома:

$$\frac{N_{\text{изб}}}{N} = \tanh \frac{\mu_0 B}{kT}.$$

При  $T = 300$  К отношение  $\mu_0 B / kT = 2,3 \cdot 10^{-3}$  и, следовательно,  $N_{\text{изб}} / N = \tanh 0,0023 \approx 0,23\%$ . При  $T = 4,2$  К имеем  $\mu_0 B / kT = 0,16$  и  $N_{\text{изб}} / N = 15,9\%$ .

- 35.4. Для решения задачи воспользуемся формулами (35.10) — (35.21) «Лекций» (вып. 7). Введем следующее обозначение:

$$\mu_0 = g \left( \frac{q_e \hbar}{2m} \right).$$

Тогда энергии, соответствующие различным проекциям спина в магнитном поле, равны  $U = -\mu_0 B$  для  $J_z / \hbar = +1$ ,  $U = 0$  для  $J_z / \hbar = 0$  и  $U = +\mu_0 B$  для  $J_z / \hbar = -1$ . Согласно статистической механике,

$$N_{+1} = n_0 \exp(\mu_0 B / kT), \quad N_0 = n_0, \quad N_{-1} = n_0 \exp(-\mu_0 B / kT).$$

Постоянная определяется из условия равенства числа частиц с разными проекциями спина полному числу частиц  $N$ :

$$N = N_{+1} + N_0 + N_{-1} = n_0 \left[ \exp \frac{\mu_0 B}{kT} + \exp \left( -\frac{\mu_0 B}{kT} \right) + 1 \right].$$

Средний магнитный момент в магнитном поле равен

$$M = \mu_0 N \frac{2 \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right)}{1 + 2 \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_0 B}{kT} \right)}.$$

Отсюда при  $\mu_0 B/kT \ll 1$  в силу того, что при  $x \ll 1$ ,  $\operatorname{sh} x \approx x$ ,  $\operatorname{ch} x \approx 1$ , находим

$$M = \frac{2}{3} \frac{N \mu_0^2 B}{kT}.$$

### К главе 36. Ферромагнетизм

36.1. Токи, связанные с намагниченностью ( $\mathbf{j}_{\text{маг}} = \nabla \times \mathbf{M}$ ), отличны от нуля только на поверхности шара. Именно эти токи создают магнитное поле вне и внутри шара. Из симметрии задачи ясно, что токи текут по окружностям, плоскости которых перпендикулярны  $\mathbf{M}$ . Проведем ось  $z$  через центр шара параллельно вектору  $\mathbf{M}$ . Представим себе, что изменение  $\mathbf{M}$  на поверхности происходит не скачком, а непрерывно в некотором слое толщиной  $d$ , и вычислим  $\mathbf{j}$  в этом слое:

$$(\mathbf{j}_{\text{маг}})_x = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad (\mathbf{j}_{\text{маг}})_y = -\frac{\partial M}{\partial x}.$$

Так как ось  $y$  направлена по касательной к поверхности шара, то  $\partial M/\partial y = 0$ . Кроме того,  $\Delta x = d/\sin \theta$ . Следовательно,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{M \sin \theta}{d} \quad \text{и} \quad j_{\text{маг}} = \frac{M \sin \theta}{d}.$$

Плотность поверхностных токов равна

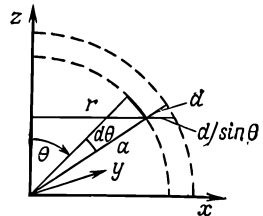
$$(j_{\text{маг}})_y = j_{\text{маг}} d = M \sin \theta.$$

Это соотношение можно также записать в виде  $\mathbf{j} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности шара.

Вычисляя магнитный момент поверхностных токов, находим

$$m = \int \pi r^2(\theta) j \, dS = 2M\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3} a^3 M.$$

Решение данной задачи можно также найти, воспользовавшись решением задачи 14.6 и заменив в нем вектор  $\epsilon_0 V \boldsymbol{\omega}$  на вектор  $\mathbf{M}$ .



36.2. Из теоремы Стокса (в качестве контура выберем среднюю линию магнита) следует

$$\oint \mathbf{H} \, dl = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2},$$

где  $N$  — полное число витков обмотки;  $I$  — сила тока в обмотке. Разделяя контурный интеграл на две части, одна из которых отвечает зазору, а другая — контуру вне его, и предполагая, что поле  $H$  по всему периметру средней линии ярма однородно, после интегрирования находим

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2},$$

где  $H_1$  — поле в зазоре;  $H_2$  — поле в каркасе магнита;  $l_1 = 1$  см — ширина зазора;  $l = 375$  см — периметр средней линии. Граничные условия в зазоре имеют вид  $B_{1n} = B_{2n}$ , причем  $B_{1n} = H_1$ . Выражая  $H_1$  через  $B_{2n}$ , находим уравнение

$$B_{2n} = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2 l_1} - \frac{l_2}{l_1} H_2,$$

которое является уравнением прямой. Построив эту прямую на графике  $B_{2n} = f(H_2)$  (см. стр. 149), можно найти  $H_2$  и  $B_{2n}$ . Тогда поле в зазоре  $H_1 = B_{2n}$  (для указанных параметров магнита эта линейная зависимость имеет вид  $B_{2n} = 1,35$  вебер/м<sup>2</sup> —  $375H_2$ ). Из графика определяем  $H_1 = B_{2n} = 1,17$  вебер/м<sup>2</sup>.

- 36.3.** Обозначим через  $B_1$  и  $B_2$  напряженности магнитного поля в постоянном магните и зазоре. Поскольку зазор узок, то, пренебрегая краевыми эффектами в зазоре и на углах, напомним условие постоянства магнитного потока:

$$B_1 A_1 = B_2 A_2.$$

Здесь  $A_1 = 100$  см<sup>2</sup> — площадь поперечного сечения магнита;  $A_2 = 20$  см<sup>2</sup> — площадь зазора. Отсюда  $B_2 = 5B_1$ . После выключения тока циркуляция магнитной индукции  $H$  по средней линии системы будет равна нулю. Считая поле магнитной индукции однородным и учитывая, что магнитная восприимчивость мягкого железа бесконечна, т. е. в мягком железе  $H = 0$ , запишем

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0,$$

где  $l_1 = 20$  см — длина постоянного магнита, а  $l_2 = 1$  см — ширина зазора. Так как в зазоре  $H_2 = B_2 = 5B_1$ , из последнего уравнения находим

$$4H_1 + B_1 = 0,$$

или, учитывая, что  $H_1 = B_1 - M/\epsilon_0 c^2$ ,

$$\frac{M}{\epsilon_0 c^2} = -5H_1.$$

Если эту прямую линию построить на рисунке, приведенном в условии задачи, рядом с уже построенной кривой  $M - H$  (стр. 150), то она пересечет эту кривую в двух точках, отвечающих  $H_1 = \pm 0,04$  вебер/м<sup>2</sup>. При уменьшении тока система окажется на верхней части кривой  $M - H$ , и, следовательно,  $H_1 = -0,04$  вебер/м<sup>2</sup>. Тогда  $B_1 = -4H_1 = 0,16$  вебер/м<sup>2</sup> и искомая напряженность магнитного поля равна  $B_2 = 5B_1 = 0,8$  вебер/м<sup>2</sup>.

- 36.4.** Магнитное поле такого стержня создается токами намагничивания, текущими по его поверхности (см. § 1 гл. 36 «Лекций», вып. 7). При этом поверхностная плотность токов  $i_{\text{маг}} = M$ . Величина  $B$  находится

так же, как для соленоида:

$$B = \frac{i}{\epsilon_0 c^2} = \frac{M}{\epsilon_0 c^2}.$$

Направление поля  $\mathbf{H}$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{B}$ . Так как  $H = B - M/\epsilon_0 c^2$ , то внутри стержня  $H = 0$ .

Если вырезать игольчатую полость вдоль оси цилиндра, то поле внутри этой полости будет создаваться как уже рассмотренными токами, текущими по поверхности цилиндра, так и токами, текущими по поверхности полости. Плотность этих токов равна  $M$ , а направление их противоположно направлению внешних токов (в одном случае величина  $M$  увеличивается при удалении от оси цилиндра, в другом — уменьшается, поэтому направление вектора  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{M}$  различно). Таким образом, поле внутри полости — это поле, которое на своей оси создают два коаксиальных соленоида с противоположно направленными и равными по величине токами. Поле это равно нулю.

### К главе 38. Упругость

- 38.1. Воспользуемся формулой (38.42) «Лекций» (вып. 7, стр. 204) для отклонения конца стержня длиной  $L$ , жестко заделанного другим концом в стенку:

$$x(L) = \frac{FL^3}{3YI};$$

здесь  $Y$  — модуль Юнга,  $I$  — момент инерции сечения стержня. По определению жесткость равна отношению  $F/x(L) = 3YI/L^3$ . Поскольку по условию задачи алюминиевый и стальной стержни обладают одинаковой жесткостью и имеют одну и ту же длину, можно написать  $Y_{Al}/I_{Al} = Y_{сталь}/I_{сталь}$ . Момент инерции круглого сечения стержня определяется выражением  $I = \pi R^4/4$ , где  $R$  — радиус поперечного сечения. Следовательно, считая, что  $Y_{сталь} = 21 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>,  $Y_{Al} = 7 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>, находим

а)  $R_{Al}/R_{сталь} = (Y_{сталь}/Y_{Al})^{1/4} = 1,32$ .

б) Если  $\rho$  — плотность вещества, то ( $\rho_{Al} = 2,7$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_{сталь} = 7,8$  г/см<sup>3</sup>)

$$\frac{m_{Al}}{m_{сталь}} = \frac{\rho_{Al} R_{Al}^2}{\rho_{сталь} R_{сталь}^2} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{сталь}} \sqrt{\frac{Y_{сталь}}{Y_{Al}}} \approx 0,6.$$

- 38.2. На тело массой  $m$  действуют две силы: вес тела  $P$  и упругая сила  $F$  со стороны стержня, действующая в вертикальном направлении. Уравнение движения этого тела имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}.$$

Спроецируем это уравнение на вертикальную ось (ось  $y$ ):  $m\ddot{y} = F_y - P$ . Используя формулу для отклонения конца стержня, жестко заделанного в стенку, находим силу, с которой незакрепленный конец стержня действует на тело  $m$ :

$$F_y = -\frac{3YI}{L^3} y;$$

здесь  $y$  — вертикальное смещение массы  $m$ ;  $Y$  — модуль Юнга;  $I = a^4/12$  — главный момент инерции сечения стержня. Подставляя

выражение для силы  $F_y$  в уравнение движения, получаем

$$m\ddot{y} = -P - \frac{3YI}{L^2} y.$$

Отсюда находим собственную частоту колебания массы  $m$ :

$$\omega = \left( \frac{3YI}{L^3 m} \right)^{1/2} = \frac{a^2}{2} \left( \frac{Y}{L^3 m} \right)^{1/2}.$$

- 38.3. Рассмотрим массивное тело, поперечные размеры которого много больше длины волны звука. Ударяя по такому телу, можно обнаружить, что оно не раздается во все стороны, а сжимается в направлении удара. В теле побегит продольная волна, в которой частицы тела движутся только в направлении распространения волны. Чтобы найти уравнения, описывающие распространение такого продольного звука, мы фактически можем рассмотреть стержень, который закреплен так, что при сжатии и растяжении его боковые размеры не сокращаются. Пусть площадь поперечного сечения стержня равна  $A$ , а длина  $L$ . Рассмотрим элемент стержня длиной  $\Delta z$ , расположенный на расстоянии  $z$  от его конца. Обозначим через  $u(z, t)$  смещение этого элемента в волне в момент времени  $t$ . При статическом растяжении или сжатии внутреннее напряжение  $F/A$  на всем протяжении стержня одно и то же и пропорционально  $u/L$ , где  $u$  — удлинение стержня. В упругой волне важна местная деформация в точке  $z$ , т. е.  $\partial u(z, t)/\partial z$ . Для стержня без бокового смещения (см. «Лекции», вып. 7, стр. 195) получена формула

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{Y} \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{(1 - \sigma)} \frac{F(z)}{A},$$

где  $F(z)$  — сила, действующая в поперечном сечении на расстоянии  $z$  от начала координат. На одном конце элемента  $\Delta z$  действует сила  $F(z)$ , а на другом  $F(z + \Delta z)$ . Полная сила, действующая на элемент  $\Delta z$ , очевидно, равна

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \frac{dF(z)}{dz} \Delta z = \Delta z \cdot A \frac{(1 - \sigma)Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Согласно закону Ньютона, эта сила равна произведению массы элемента  $\rho \Delta z \cdot A$  ( $\rho$  — плотность тела) на его ускорение  $\partial^2 u(z, t)/\partial t^2$ :

$$\rho \Delta z \cdot A \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = \Delta z \cdot A \frac{(1 - \sigma)Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2}.$$

Сокращая обе части этого равенства на  $\Delta z \cdot A$ , получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} - v_{\text{прод}}^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = 0,$$

где

$$v_{\text{прод}}^2 = \frac{(1 - \sigma)Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)\rho}$$

— квадрат фазовой скорости распространения продольных волн в твердом теле.

- 38.4. Так как расстояние между планками слабо отличается от  $L$ , то изгиб можно считать слабым. Кроме того, как будет ясно из дальнейшего, учет веса линейки массой около 0,3 г несущественно меняет величину действующей вдоль стержня силы внутренних напряжений. Обозна-

чим отклонение линейки от прямой линии между концами через  $y(x)$ , где  $x$  — расстояние от левого конца линейки, а горизонтальную составляющую силы, с которой упоры изгибают линейку, через  $F$ . Тогда форму изогнутой линейки можно изписать уравнением (38.45) «Лекций» (вып. 7, стр. 205):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F}{YI} y,$$

где  $Y$  — модуль Юнга;  $I$  — момент инерции поперечного сечения линейки. Из этого уравнения следует:

а) Форма изогнутой линейки описывается синусоидой:

$$y(x) = K \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Постоянную  $K$  можно определить из условия нормировки на длину линейки:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^l \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx = \\ &= \int_0^l \sqrt{1 + K^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l}} dx. \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что прогиб линейки слабый, т. е. что  $K/l \ll 1$ , вычисляем следующий интеграл:

$$L = \int_0^l \left( 1 + \frac{K^2 \pi^2}{2l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} \right) dx = l + \frac{K^2 \pi^2}{4l}$$

(при интегрировании мы разложили подынтегральное выражение в ряд). Отсюда  $K = (2/\pi) \sqrt{(L - l)I} = 34,2 \text{ мм}$ .

б) Сила, с которой линейка упирается в планки,  $F = \pi^2 YI/l^2$ ; здесь  $I = ab^3/12$ . Если принять для стали  $Y = 2 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2$ , то  $F = 1,47 \text{ кг}$ .

**38.5.** Выберем плоскость изгиба в качестве плоскости  $xy$ . Ось  $x$  параллельна силе  $P$ . Пусть  $\theta$  — угол между касательной к линии стержня и осью  $x$ , а  $s$  — расстояние вдоль кривой. Тогда  $dx/ds = \cos \theta$  и  $dy/ds = \sin \theta$ . При этом кривизна стержня  $1/R$  определяется выражением  $1/R = d\theta/ds$ . С другой стороны, кривизну стержня можно связать с изгибающим моментом силы  $P$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{P}{YI} (\delta - y).$$

Следовательно,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{P}{YI} (\delta - y).$$

Дифференцируя последнее уравнение по  $s$ , получаем исходное уравнение

$$IY \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0.$$

Так как угол  $\theta$  мал, то полагая  $\sin \theta \approx \theta$ , получаем уравнение

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{P}{IY} \theta = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\theta(s) = A \sin \sqrt{\frac{P}{IY}} s + B \cos \sqrt{\frac{P}{IY}} s,$$

где  $A$  и  $B$  — константы. Из граничного условия  $\theta(0) = 0$  (нижний конец стержня жестко заделан) имеем  $B = 0$ . Из условия равенства нулю момента сил внутренних напряжений у свободного конца, т. е. из граничного условия  $\theta'(L) = 0$ , находим

$$\cos \sqrt{\frac{P}{IY}} L = 0,$$

т. е.

$$\sqrt{\frac{P}{IY}} L = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,  $P = \pi^2 IY / 4L^2$ . Учитывая, что  $I = \omega t^3 / 12$ , окончательно находим искомую силу

$$P = \frac{\pi^2 IY \omega t^3}{48L^2}.$$

### К главе 40. Течение «сухой» воды

- 40.1. а) Как показано в гл. 31 «Лекций» (вып. 7), в произвольной точке жидкости  $i$ -я компонента силы, действующей на единичную площадку, перпендикулярную оси  $i$ , определяется тензором внутренних напряжений  $S_{ij}$ . Поскольку в невязкой жидкости нет сдвиговых напряжений, то недиагональные элементы тензора  $S_{ij}$  должны быть равны нулю. В этом можно убедиться, построив в данной точке три единичные площадки, перпендикулярные осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Таким образом, если около этой точки построить элементарную площадку  $da$  с вектором нормали  $\mathbf{n}$ , то сила, действующая на такую площадку, имеет следующие компоненты:

$$dF_x = S_{xx} n_x da,$$

$$dF_y = S_{yy} n_y da,$$

$$dF_z = S_{zz} n_z da.$$

Поскольку проекция силы  $dF$  на площадку  $da$  должна быть равна нулю (отсутствуют касательные напряжения), вектор  $d\mathbf{F}$  должен быть направлен вдоль  $\mathbf{n}$ . Это может быть только при условии, что диагональные элементы тензора  $S_{ij}$  равны друг другу, т. е. если  $S_{xx} = S_{yy} = S_{zz} = p$ . Отсюда

$$d\mathbf{F} = p \mathbf{n} da.$$

Следовательно, какое бы направление вектора  $\mathbf{n}$  мы ни выбрали, всегда сила, действующая на единичную площадку, перпендикулярную этому направлению, нормальна к площадке и равна численно одному и тому же значению  $p$  (давление).

- б) Это тождество следует как частный случай из последнего соотношения, доказанного в решении задачи 27.1:

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}),$$

если положить в нем  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{v}$ .

- 40.2. Направим ось  $z$  вдоль цилиндра, а начало координат выберем в нижней точке воронки. Введем вектор угловой скорости вращения жидкости  $\boldsymbol{\omega}$ , который, очевидно, направлен вдоль оси  $z$ . Тогда вектор скорости частицы жидкости, находящейся на расстоянии  $r$  от оси, можно записать в виде  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор частицы. При этом  $v_x = -\omega y$ ,  $v_y = \omega x$ ,  $v_z = 0$ . Вычислим вектор  $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ . Находим

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0,$$

$$\Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0,$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega,$$

или в векторной форме:  $\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega}$ . Отсюда видно, что в данной задаче  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -2\omega^2 \mathbf{r}$ . Радиус-вектор можно представить в виде  $\mathbf{r} = \nabla (r^2/2)$ . Тогда для любой точки жидкости выполняется уравнение

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \varphi - \omega^2 r^2 = \text{const.}$$

Так как на поверхности жидкости давление постоянно и равно атмосферному, то имеем ( $\varphi = gz$ )

$$\frac{v^2}{2} - gz = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz = \text{const.}$$

Очевидно, в нашей системе координат  $\text{const} = 0$ . Поэтому уравнение поверхности жидкости имеет вид

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2),$$

т. е. поверхность является параболоидом вращения.

- 40.3. В § 5 гл. 12 «Лекций» (вып. 5) решалась задача об обтекании шара «сухой» водой. Скорость сухой воды была найдена равной

$$\mathbf{v} = \nabla v_0 \cos \theta \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) = v_0 \nabla z \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right),$$

где  $v_0$  — скорость воды на бесконечно большом расстоянии от шара,  $\theta$  — угол между радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и вектором скорости  $\mathbf{v}_0$  (ось  $z$  выбрана вдоль вектора  $\mathbf{v}_0$ ). В настоящей задаче мы можем воспользоваться этим решением, если перейдем к системе координат, в которой жидкость вдали от шара покоится. Результат можно записать в виде

$$\mathbf{v} = \frac{a^3}{2r^3} [3\mathbf{r} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}) - v_0 r^2].$$

Кинетическая энергия жидкости  $T_{ж}$  равна интегралу от квадрата этой скорости, умноженному на плотность жидкости по всему пространству вне шара. Математически, как мы видим, задача аналогична



задаче 27.2, где определялась энергия магнитного поля Земли. Воспользовавшись найденным в этой задаче результатом, получим

$$T_{\text{ж}} = M \frac{v_0^2}{4}$$

( $M$  — масса жидкости в объеме шара). Добавляя к  $T_{\text{ж}}$  кинетическую энергию шара, находим полную энергию

$$T = \frac{1}{2} \left( m + \frac{M}{2} \right) v_0^2.$$

Полный импульс системы вычисляется по формуле

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_0 + \rho \int \mathbf{v} dV.$$

Подставляя в нее приведенное выше поле скоростей  $\mathbf{v}$  и выполняя несложное интегрирование, получаем  $\int \rho \mathbf{v} dV = 0$ ; следовательно,  $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_0$ .

### К главе 41. Течение «мокрой» воды

- 41.1. К параметрам, определяющим силу сопротивления, относятся:  $a$  — радиус шара,  $v$  — скорость движения шара относительно жидкости,  $\eta$  — коэффициент вязкости. Размерность этих величин такова:

$$[a] = \text{Длина}; \quad [v] = \text{Длина/Время};$$

$$[\eta] = \text{Масса/Время} \times \text{Длина}.$$

Будем искать из соображений размерности выражение для силы в виде  $F = a^\alpha v^\beta \eta^\gamma$ . Запишем условие совпадения размерностей левой и правой частей этого соотношения:

$$[F] = [a^\alpha v^\beta \eta^\gamma],$$

$$[\text{Масса}] \times [\text{Длина}] \times [\text{Время}]^{-2} =$$

$$= [\text{Масса}]^\gamma \times [\text{Длина}]^{\alpha+\beta-\gamma} \times [\text{Время}]^{-\beta-\gamma}.$$

Отсюда  $\gamma = 1$ ,  $\alpha + \beta - \gamma = 1$ ,  $\beta + \gamma = 2$ , или  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ . В результате находим

$$F \sim \eta a v.$$

То, что параметры входят в выражение для  $F$  так, как было найдено выше, а не иначе, ясно из следующих качественных соображений. В «Лекциях» (вып. 7, стр. 258) указывалось, что вязкая сила  $f_{\text{вязк}}$ , действующая на единицу объема жидкости, пропорциональна коэффициенту вязкости  $\eta$  и вторым производным скорости по координатам. В задаче о движении шара в вязкой жидкости характерным размером, на котором существенно меняется скорость, являются размеры порядка размеров шара. Поэтому вторые производные по порядку величины равны  $v/a^2$ . Умножая  $f_{\text{вязк}}$  на объем порядка  $a^3$ , находим  $F \sim \eta a v$ . Заметим, что сила трения, действующая на гармонический осциллятор, также пропорциональна скорости осциллятора.

- 41.2. Направим ось  $z$  вдоль оси трубы в направлении потока жидкости. Предполагая жидкость несжимаемой, напишем уравнение движения в стационарном случае:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}.$$

Так как в данной задаче отлична от нуля лишь  $z$ -компонента скорости  $-v_z$ , причем  $v_z$  зависит только от  $r$  — расстояния от оси трубы, то  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$ . Записав  $\nabla p = -\Delta p/L$ , где  $\Delta p = p_1 - p_2$  — разность давлений на концах трубы, получим

$$\nabla^2 v_z = -\frac{\Delta p}{\eta L}.$$

Это уравнение совпадает по виду с уравнением Пуассона для потенциала равномерно заряженного бесконечного цилиндра:  $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$ . Потенциал  $\varphi$  можно вычислить, если воспользоваться теоремой Гаусса, найти напряженность электрического поля, а затем проинтегрировать соотношение  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ . В результате получаем  $\varphi = \varphi_0 - \rho r^2/4\epsilon_0$ , где  $\varphi_0$  — постоянная интегрирования. Заменяя  $\varphi$  на  $v_z$  и  $\rho/\epsilon_0$  на  $\Delta p/\eta L$ , имеем

$$v_z(r) = v_0 - \frac{\Delta p}{4L\eta} r^2.$$

Из условия, что на стенке трубы скорость жидкости равна нулю, находим неизвестную константу  $v_0$ . Таким образом,

$$v_z(r) = \frac{\Delta p}{4L\eta} (a^2 - r^2).$$

Поток массы жидкости плотностью  $\rho$  через поперечное сечение (расход) трубки равен

$$Q = \rho \int v_z(r) 2\pi r dr = \frac{a^4 \pi}{8\eta} \rho \frac{\Delta p}{L}.$$

Если провести аналогию между разностью потенциалов и разностью давлений, а также расходом жидкости и электрическим током, то под сопротивлением трубы надо понимать величину

$$R = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{8\eta L}{\pi a^4 \rho}.$$

Аналогом конденсатора являются два сообщающихся сосуда, снизу соединенные трубкой, которую можно перекрывать краном так, что уровень воды в сосудах может быть разным.

- 41.3. а) Найдем сначала распределение скоростей в жидкости вдали от краев доски. Для этого выберем систему координат, плоскость  $xz$  которой совпадает с дном бассейна, а ось  $z$  направлена вдоль скорости доски. Тогда из уравнения Навье — Стокса для стационарного течения следует  $d^2 v/dy^2 = 0$ . Из этого уравнения находим  $v = C_1 y + C_2$ . Учитывая граничные условия  $v(0) = 0$  и  $v(d) = u$ , определяем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ . Окончательно:

$$v = \frac{u}{d} y.$$

- б) Силу трения, действующую на единицу поверхности доски, найдем, исходя из формулы  $S_{xz} = \eta (dv/dy) = \eta u/d$ , где  $\eta$  — коэффициент вязкости. При этом работа на преодоление силы трения, совершаемая в единицу времени и отнесенная к единице площади поверхности доски, равна

$$S_{xz}u = \frac{\eta u^2}{d}.$$

Искомая же скорость диссипации энергии в единице объема оказывается равной

$$\frac{S_{xz}u}{d^2} = \frac{\eta u^2}{d^3}.$$

## Вып. 8

## КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА (I)

## К главе 1. Амплитуды вероятности

1.1. Вероятность того, что частица достигнет экрана в точке  $x$ , если открыта щель 1, равна

$$P_1 = |\langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle|^2,$$

если открыта щель 2, то

$$P_2 = |\langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle|^2,$$

а при обеих открытых щелях

$$P_{12} = |\langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle|^2.$$

Учитывая симметричное расположение щелей относительно источника и предполагая, что источник испускает частицы изотропно, можно записать

$$\langle 1 | s \rangle = \langle 2 | s \rangle = c.$$

Считая щели бесконечно узкими, можно воспользоваться формулой (1.7) «Лекций» (вып. 8, стр. 14). Тогда с точностью до несущественного численного множителя имеем

$$\langle x | 1 \rangle = \frac{e^{ikl_1}}{l_1}, \quad \langle x | 2 \rangle = \frac{e^{ikl_2}}{l_2};$$

здесь  $l_1$  и  $l_2$  — расстояния от щелей 1 и 2 до точки  $x$ , а  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. Таким образом,

$$P_1 = \frac{|c|^2}{l_1^2}, \quad P_2 = \frac{|c|^2}{l_2^2}, \quad P_{12} = |c|^2 \left| \frac{e^{ikl_1}}{l_1} + \frac{e^{ikl_2}}{l_2} \right|^2.$$

Обозначим расстояние от щели до экрана через  $l$ , тогда

$$l_1 = \left[ l^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad l_2 = \left[ l^2 + \left( x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Задача нахождения максимума  $P_{12}$  как функции  $x$  приводит к трансцендентному уравнению, получающемуся из условия  $dP_{12}(x)/dx = 0$ . Для простоты будем предполагать  $l \gg a$ ,  $l \gg x$ . При этом величины  $l_1$  и  $l_2$  в знаменателе  $P_{12}$  можно принять равными друг другу:

$$l_1 \approx l_2 \approx l,$$

тогда как в фазовых множителях необходимо учитывать разность хода лучей

$$l_2 - l_1 = \sqrt{l^2 + \left( x + \frac{a}{2} \right)^2} - \sqrt{l^2 + \left( x - \frac{a}{2} \right)^2} \approx \frac{ax}{l}.$$

Вынося в выражении для  $P_{12}$  первую экспоненту за скобки, получаем

$$P_{12} = \frac{|c|^2}{l^2} \left| 1 + e^{ikax/l} \right|^2.$$

Это выражение нетрудно преобразовать к виду

$$P_{12} = \frac{2|c|^2}{l^2} \left( 1 + \cos \frac{kax}{l} \right).$$

Очевидно,  $P_{12}$  принимает максимальные значения при условии

$$\frac{kax_n}{l} = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть расстояние между центральным ( $n = 0$ ) и первым боковым ( $n = 1$ ) максимумами равно  $b$ , тогда

$$\lambda \approx ab/l \approx 0,25 \text{ см.}$$

В рассматриваемом приближении величины  $P_1$  и  $P_2$  одинаковы и не зависят от  $x$ . Однако в действительности, поскольку ширина щели является конечной и  $l_1$  и  $l_2$  зависят от  $x$ , эти величины плавно зависят от  $x$ . При этом положение максимумов и минимумов  $P_{12}$  будет определяться практически прежним условием. Если фазы двух волн совпадают (максимум), то

$$P_{12} = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2,$$

а если они отличаются на  $\pi$  (минимум),

$$P_{12} = (\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2})^2.$$

Для центрального максимума из фиг. 1.1 «Лекций» (вып. 8, стр. 11) находим:  $P_1 = P_2 = 0,5$ ,  $P_{12} = 1,9$  (в относительных единицах). Расчет дает

$$P_{12} = (\sqrt{0,5} + \sqrt{0,5})^2 = 2,0.$$

Из этой же фигуры для первого бокового максимума имеем  $P_1 = 0,3$ ,  $P_2 = 0,65$ ,  $P_{12} = 1,3$ , тогда как расчетное значение  $P_{12} = 1,8$ . Для первого минимума  $P_1 = 0,4$ ,  $P_2 = 0,6$ ,  $P_{12} = 0,1$  и

$$P_{12} \text{ расч} = 0,02.$$

Для второго минимума  $P_1 = 0,2$ ,  $P_2 = 0,63$ ,  $P_{12} = 0,1$  и

$$P_{12} \text{ расч} = 0,15.$$

- 1.2. а) Если источник сдвинуть вверх на расстояние  $D$ , то разность фаз двух лучей, приходящих в точку  $x$ , очевидно, составит  $\Delta\varphi = k(L_2 - L_1 + l_2 - l_1)$ , где

$$L_1 = \sqrt{L^2 + (D - a/2)^2} \quad \text{и} \quad L_2 = \sqrt{L^2 + (D + a/2)^2}$$

— расстояния от источника до щелей 1 и 2 соответственно;  $L$  — расстояние от источника до преграды, в которой прорезаны щели. Величины  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $a$  и  $k$  те же, что в предыдущей задаче. Принимая  $a \ll L$  и  $x \ll l$ , получаем  $\Delta\varphi \approx (ka/l)(x + Dl/L)$ . Таким образом, разность фаз для точки  $x$  в рассматриваемом случае совпадает с разностью фаз для точки  $x' = x + Dl/L$  в случае, когда источник

расположен на осевой линии. Следовательно, вся интерференционная картина сместится вниз на расстояние  $Dl/L$  по сравнению с рассмотренной в предыдущей задаче.

- б) Из решения предыдущей задачи мы получили, что расстояние между двумя соседними максимумами определяется формулой

$$b = \lambda/l \quad (a \ll l, b \ll l).$$

Следовательно, если увеличить вдвое расстояние  $a$  между щелями, то расстояние между максимумами уменьшится вдвое. Вся интерференционная картина «сожмется» по оси  $x$  в масштабе 1 : 2.

- в) Поскольку ширина щели считается бесконечно малой (т. е. разность хода лучей, прошедших через разные точки щели, равна нулю), то изменение ширины щели  $l$  вдвое приведет лишь к увеличению вдвое амплитуды волны, прошедшей через щель  $l$ , т. е.

$$\langle 1 | s \rangle = 2 \langle 2 | s \rangle = 2c.$$

Следовательно,

$$\langle x | s \rangle = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle = c \left( 2 \frac{e^{ikl_1}}{l_1} + \frac{e^{ikl_2}}{l_2} \right).$$

В тех же приближениях, что и раньше, получаем

$$P_{12} = \frac{|c|^2}{l^2} \left( 5 + 4 \cos \frac{kax}{l} \right).$$

Сравнивая это выражение с результатом задачи 1.1, убеждаемся, что при увеличении ширины одной из щелей вдвое максимумы интенсивности увеличатся в  $9/4$  раза, в минимумах же интенсивность не обращается в нуль, а составляет  $1/4$  интенсивности в максимумах, найденных в задаче 1.1. Положение минимумов и максимумов не изменяется.

- 1.3. Интенсивность прошедшего света будет в  $1/\cos^2 \theta$  раз слабее, чем падающего. Отдельный фотон может либо пройти, либо не пройти через поляризатор. Вероятность прохождения фотона, поляризованного в вертикальной плоскости, равна  $\cos^2 \theta$ , причем прошедший фотон поляризуется вдоль оси «пропускания».
- 1.4. Электроны, проходя через кристалл, испытывают дифракцию так же, как, например, рентгеновские лучи. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллической решетке обсуждалась в гл. 38 «Лекций» (вып. 3). Там отмечалось, что для рассмотрения такой дифракции удобно ввести представление об интерференции лучей, отраженных от системы параллельных атомных плоскостей. При этом условие максимума записывается в виде

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $d$  — расстояние между соседними атомными плоскостями;  $\lambda$  — длина волны;  $2\theta$  — угол между падающим лучом и направлением на дифракционный максимум. В кристалле можно выделить много систем таких плоскостей, характеризующихся различными значениями  $d$ . Отметим, что для решетки золота (кубической гранцентрированной) максимальное значение  $d$  равно постоянной кристаллической решетки  $a = 2,88 \cdot 10^{-10}$  м, следующее за ним равно  $a/\sqrt{2}$  и т. п.

Рассмотрим теперь, к чему приведет хаотическая ориентация отдельных кристаллов в поликристаллической фольге. Если  $\lambda < 2d$ , то среди кристалликов фольги обязательно найдутся такие, для которых условие максимума выполнено. Далее, поскольку кристаллики

имеют всевозможные ориентации, то дифракционная картина должна быть симметричной относительно направления пучка. Поэтому на фотопластинке области почернения будут иметь форму концентрических колец с центром на оси пучка и радиусом

$$R_n = L \operatorname{tg} 2\theta \approx n\lambda L/d;$$

здесь  $L$  — расстояние от фольги до фотопластинки. Первому кольцу соответствует  $n = 1$  и максимальное значение  $d$ . Вычислим теперь радиусы первых колец. Длина волны электрона с кинетической энергией  $W$  равна

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mW}} \approx 9 \cdot 10^{-10} \text{ см},$$

отсюда радиус первого кольца

$$R_1 = \frac{\lambda L}{a} = \frac{2\pi\hbar L}{a\sqrt{2mW}} \approx 0,3 \text{ см}.$$

Второму кольцу соответствует  $n = 1$  и  $d = a/\sqrt{2}$ , так что

$$R_2 = R_1 \sqrt{2} \approx 0,4 \text{ см}.$$

При вычислении следующих радиусов нужно учитывать, что новые максимумы соответствуют не только новым значениям  $d$ , но и значениям  $n > 1$ .

- 1.5. Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — расстояния от щелей 1 и 2 до точки  $x$  на экране. Суммарная амплитуда появления электрона в точке  $x$  записывается в виде

$$A(x) = a_1 \frac{e^{ikl_1}}{l_1} + a_2 \frac{e^{ikl_2}}{l_2}.$$

Величины  $l_1$  и  $l_2$  выражаются через  $l$ ,  $a$  и  $x$  так же, как в задаче 1.1. При малых  $a$  ( $a \ll l$ ) и  $x$  ( $x \ll l$ ) имеем

$$A(x) \approx \frac{1}{l} (a_1 e^{-ikxa/2l} + a_2 e^{ikxa/2l}) e^{ikl}.$$

Введем фазы и абсолютные значения амплитуд:

$$a_1 = |a_1| e^{i\delta_1}, \quad a_2 = |a_2| e^{i\delta_2};$$

тогда

$$|A(x)|^2 = \frac{1}{l^2} \left[ |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1||a_2| \cos \left( kx \frac{a}{l} + \delta_2 - \delta_1 \right) \right].$$

- 1.6. а) Амплитуду попадания частицы в точку  $x$  запишем в виде

$$A(x) = c \left( \frac{e^{ikL_1}}{L_1} + \frac{e^{ikL_2}}{L_2} \right),$$

где  $k = 2\pi/\lambda = p_0/\hbar$  — волновое число;  $L_1 = [L^2 + (x - d/2)^2]^{1/2}$  и  $L_2 = [L^2 + (x + d/2)^2]^{1/2}$  — расстояния от щелей 1 и 2 до точки  $x$ . При  $L \gg d$  и  $L \gg x$  имеем

$$|A(x)|^2 = \frac{4|c|^2}{L^2} \cos^2 \left( \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2} \right);$$

здесь  $\Phi_2 - \Phi_1 = kxd/L$ . Для первого бокового максимума  $\Phi_2 - \Phi_1 = 2\pi$ ,  $x = a$ . Таким образом,  $a = 2\pi\hbar L/p_0 d$ .

- б) Если при внешнем воздействии фазы первого и второго лучей изменяются соответственно на  $\delta\varphi_1$  и  $\delta\varphi_2$ , то

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\hbar x d}{L} + \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1.$$

Центральный максимум располагается в точке  $x_0 = S$ , для которой  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ . Следовательно,

$$S = (\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2) \frac{\hbar L}{p_0 d}.$$

- в) Из закона сохранения энергии

$$\frac{p^2(x)}{2m} + V(x) = \frac{p^2(0)}{2m} + V(0)$$

находим

$$p(x) = p(0) \sqrt{1 + \frac{2m}{p^2(0)} [V(0) - V(x)]}.$$

Так как потенциальная энергия невелика, можно записать

$$p(x) \approx p(0) + \frac{m}{p(0)} [V(0) - V(x)].$$

Если  $V(x)$  медленно меняется с расстоянием, то

$$V(x) \approx V(0) - Fx$$

и соответственно

$$p(x) = p(0) + \frac{Fx}{v}.$$

Здесь  $F = -(dV/dx)_{x=0}$ ,  $v = p(0)/m$  — начальная скорость частицы.

- г) Среднее изменение разности фаз двух лучей выразим через среднюю разность импульсов  $\Delta p$ :

$$\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2 = \frac{1}{\hbar} L \Delta p.$$

Поскольку среднее вертикальное расстояние между двумя путями равно  $d/2$ , то  $\Delta p = Fd/2v$ . Тем самым приведенное в условии задачи выражение для  $\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2$  доказано.

Используя результат, полученный в п. (б), находим значение сдвига интерференционной картины:

$$S = \frac{FLd}{2\hbar v} \frac{\hbar L}{p_0 d} = \frac{1}{2} a T^2.$$

Величины  $a = F/m$  и  $T = L/v$  совпадают с классическими значениями ускорения и времени пролета частицы. Таким образом, сдвиг интерференционной картины соответствует величине отклонения классической частицы под действием постоянной силы  $F$  за время  $T = L/v$ .

- 1.7, а) Поскольку источником испускаются только электроны со спином «вверх», амплитуда попадания электрона в точку  $x$

$$\langle x | s \rangle = \langle x | 1 \rangle \alpha \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \alpha \langle 2 | s \rangle.$$

Следовательно,

$$P_+ = |\alpha|^2 [|\langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle]^2,$$



- т. е. картина распределения интенсивностей такая же, как и без учета спина, изменятся лишь абсолютные значения интенсивности.
- б) Если спины электронов, вылетающих из источника, направлены «вниз», имеем

$$P_- = |\beta|^2 |\langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle|^2,$$

$$\frac{P_+}{P_-} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = \text{const.}$$

- в) Если направления спинов случайны, то вероятности иметь спин «вверх» и «вниз» одинаковы, так что

$$P_0(x) = \frac{1}{2} P_+(x) + \frac{1}{2} P_-(x)$$

и

$$\frac{P_+(x)}{P_0(x)} = \frac{2|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = \text{const.}$$

- 1.8. Пусть  $\alpha$  — амплитуда прохождения первой щели; тогда амплитуда прохождения второй щели равна  $0,1\alpha e^{i\varphi}$ , где  $\varphi$  — произвольная фаза. В максимуме интенсивности полная амплитуда пропорциональна величине  $(\alpha + 0,1\alpha)$  (фаза  $\varphi$  компенсируется разностью хода двух лучей), а в минимуме амплитуда пропорциональна  $(\alpha - 0,1\alpha)$ . Следовательно, отношение интенсивностей в максимуме и минимуме равно

$$\frac{|\alpha + 0,1\alpha|^2}{|\alpha - 0,1\alpha|^2} = \frac{1,21}{0,81} \approx 1,5.$$

- 1.9. Одновременное попадание фотонов в детекторы  $a$  и  $b$  может произойти несколькими способами:

- 1) фотон, испущенный источником  $A$ , попадает в детектор  $a$ , а фотон из источника  $B$  попадает в детектор  $b$ ;
- 2) фотон из источника  $B$  попадает в детектор  $a$ , а фотон из источника  $A$  попадает в детектор  $b$ ;
- 3) в оба детектора попадают фотоны из источника  $A$  (это не значит, конечно, что в детекторы  $a$  и  $b$  попадает один и тот же фотон — ведь имеется поток фотонов);
- 4) в оба детектора попадают фотоны из источника  $B$ .

Способы 1 и 2 неразличимы, так что соответствующие амплитуды должны складываться (при этом предполагается, что фотоны из источников  $A$  и  $B$  имеют одинаковые энергии). Но способы 3 и 4 в принципе можно отличать как один от другого, так и от первых двух способов. Поэтому здесь уже будут складываться не амплитуды, а только вероятности. Таким образом, можно записать

$$P_{12} = [|\langle a | A \rangle \langle b | B \rangle + \langle a | B \rangle \langle b | A \rangle|^2 + |\langle a | A \rangle \langle b | A \rangle|^2 + |\langle a | B \rangle \langle b | B \rangle|^2] N,$$

где  $N$  — число фотонов, испускаемых каждым источником в единицу времени. Подставляя сюда выражения для амплитуд

$$\langle a | A \rangle = \langle b | B \rangle = c e^{ikR_1},$$

$$\langle b | A \rangle = \langle a | B \rangle = c e^{ikR_2}$$

и выполняя необходимые преобразования, получаем

$$P_{12} = 2|c|^4 [2 + \cos 2k(R_2 - R_1)] N.$$

Расстояния до источников

$$R_1 = [R^2 + (D - d)^2/4]^{1/2},$$

$$R_2 = [R^2 + (D + d)^2/4]^{1/2}.$$

При  $R \gg D$  и  $R \gg d$  имеем

$$R_2 - R_1 \approx \frac{Dd}{2R},$$

так что аргумент косинуса  $2k(R_2 - R_1) = 2\pi Dd/R\lambda$ . Ясно, что если изменять  $d$  (расстояние между детекторами), то скорость счета совпадений будет периодически меняться. Оценим порядок величины периода  $\Delta d$ .

Примем  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м,  $R = 10^{17}$  м (расстояние до близких звезд),  $D = 10^{11}$  м (диаметр звезды может быть сравним с расстоянием от Солнца до планет). Тогда  $\Delta d = R\lambda/D = 0,5$  м, т. е. эту величину нетрудно измерить. Таким образом, «диаметр звезды» можно определить из соотношения

$$D = R\lambda/(d_2 - d_1),$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — два ближайших значения  $d$ , для которых скорости счета совпадений одинаковы, например максимальны.

## К главе 2. Тожественные частицы

2.1. а) Энергия кванта связана с частотой соотношением  $\epsilon = h\nu$ . Подставляя сюда

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ дж} \cdot \text{сек}, \quad \nu = 10^6 \text{ сек}^{-1},$$

получаем

$$\epsilon = 6,626 \cdot 10^{-28} \text{ дж} = 4,14 \cdot 10^{-9} \text{ эв}.$$

б) Радиопередатчик мощностью  $10^6$  вт за каждый период колебаний  $T = 10^{-6}$  сек излучает энергию  $E = 10^3 \text{ квт} \cdot 10^{-6} \text{ сек} = 1 \text{ дж}$ . Следовательно, за период колебаний испускается

$$N = E/\epsilon \approx 1,509 \cdot 10^{27} \text{ квантов}.$$

2.2. Формула Планка для спектрального распределения энергии излучения абсолютно черного тела имеет вид

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1};$$

здесь  $V$  — объем полости,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура. Будем рассматривать величину

$$I(\omega) = \frac{dE}{d\omega} \frac{c}{V}.$$

а) При малых  $\omega$  ( $\hbar\omega \ll kT$ )

$$I(\omega) = \frac{kT}{\pi^2 c^2} \omega^2 \quad (\text{формула Рэлея — Джинса}),$$

а при больших  $\omega$  ( $\hbar\omega \gg kT$ )

$$I(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \omega^3 e^{-\hbar\omega/kT} \quad (\text{формула Вина}).$$

- б) Максимум спектра  $I(\omega)$  определим, приравнявая нулю производную функции  $f(x) = x^3/(e^x - 1)$ , где  $x = \hbar\omega/kT$ . Это условие приводит к трансцендентному уравнению

$$x = 3(1 - e^{-x}).$$

Его удобно решать графически или методом итераций. В качестве первого приближения возьмем  $x_1 = 3$ . Каждое следующее приближение определяется соотношением

$$x_{n+1} = 3 - 3 \exp(-x_n).$$

С достаточной степенью точности получаем

$$x \approx 2,822.$$

Таким образом, максимум спектра  $I(\omega)$  соответствует частоте

$$\omega_m \approx 2,822 kT/\hbar.$$

- в) Распределение энергии по длинам волн ( $\lambda = 2\pi c/\omega$ ) можно получить, преобразуя формулу Планка следующим образом:

$$I(\lambda) = \frac{dE}{d\lambda} = \frac{dE}{d\omega} \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| = \frac{16\pi^2 \hbar c^2 \lambda^{-5}}{\exp(2\pi \hbar c / \lambda kT) - 1}.$$

Максимум функции  $f(x) = x^5/(e^x - 1)$ , где  $x = 2\pi \hbar c / \lambda kT$ , определяется трансцендентным уравнением

$$x = 5(1 - e^{-x}),$$

единственное решение которого  $x \approx 4,965$ .

Следовательно, максимум плотности распределения энергии по длинам волн соответствует значению

$$\lambda_m \approx \frac{2\pi \hbar c}{4,965 kT}.$$

- г) Полагая  $\lambda_m = 5 \cdot 10^{-7}$  м и учитывая, что  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·сек,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/сек,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град, получаем оценку для температуры на поверхности Солнца:

$$T = \frac{2\pi \hbar c}{4,965 k \lambda_m} \approx 0,58 \cdot 10^4 \text{ град.}$$

- 2.3.** Вследствие принципа Паули состояние атома гелия, в котором спины обоих электронов выстроены в одном направлении, отличается от основного состояния тем, что по крайней мере один из электронов находится на возбужденном уровне с энергией  $\Delta E = \hbar\omega$ , где  $\omega$  — частота света, испускаемого при переходе электрона с верхнего уровня на нижний.

Если атом находится в постоянном магнитном поле  $\mathbf{B}$ , то энергия основного состояния не меняется, т. к. спины электронов антипараллельны и суммарный магнитный момент равен нулю. В возбужденном состоянии, где спины электронов параллельны, их суммарный магнитный момент равен  $+2\mu_e$ , где

$$\mu_e = \frac{q_e \hbar}{2mc} = -0,927 \cdot 10^{-23} \text{ а} \cdot \text{м}^2$$

— собственный магнитный момент электрона,  $q_e$  и  $m$  — его заряд и масса. При ориентации магнитных моментов обоих электронов про-

тив поля ( $\mu_e < 0!$ ) возникает «выигрыш» в энергии на величину  $2\mu_e B$ , так что полное изменение энергии возбужденного состояния атома гелия в магнитном поле по сравнению с основным состоянием составляет  $(\Delta E + 2\mu_e B)$ . Если эта величина отрицательна, то энергия одного из возбужденных состояний оказывается меньше, чем энергия основного состояния. Таким образом, при наложении магнитного поля, удовлетворяющего условию

$$B > \frac{\hbar\omega}{2|\mu_e|} = \frac{\pi\hbar c}{|\mu_e|\lambda},$$

спины обоих электронов можно выстроить в одном направлении (вдоль магнитного поля). Принимая  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м, получаем  $B > < 2 \cdot 10^4$  вебер/м<sup>2</sup>.

- 2.4. Если бы ядра состояли из протонов и электронов, то в ядре атома азота должно было бы быть 14 протонов и 7 электронов, поскольку заряд ядра азота равен  $+7q_e$ . Кроме того, в электронной оболочке атома должны быть еще 7 электронов. Следовательно, всего в атоме азота содержалось бы 28 фермионов. Суммарный собственный момент количества движения (спин) такой системы должен быть целым, поэтому атом азота в целом вел бы себя как бозон. Такое противоречие с экспериментом, известное в истории ядерной физики как «азотная катастрофа», легко снимается, если предположить существование электрически нейтральной ядерной частицы (нейтрона) с массой, близкой к массе протона, и с полуцелым спином. Тогда ядра состоят из протонов и нейтронов, так что атом азота содержит 7 протонов и 7 нейтронов в ядре и 7 электронов в электронной оболочке. Спин такой системы будет полуцелым, и атом азота, следовательно, должен быть ферми-частицей.

- 2.5. а) Амплитуды вероятности испускания фотона возбужденным атомом в присутствии  $n$  других точно таких же фотонов даются выражениями

$$\langle n+1, 0 | n, 1 \rangle = \sqrt{n+1} a,$$

$$\langle n+1, 1 | n, 2 \rangle = \sqrt{n+1} b,$$

а амплитуды перехода атома на более высокий уровень (амплитуды вероятности поглощения фотона) записываются в виде

$$\langle n-1, 1 | n, 0 \rangle = \sqrt{n} a^*,$$

$$\langle n-1, 2 | n, 1 \rangle = \sqrt{n} b^*,$$

где полужирными цифрами 0, 1, 2 обозначены номера атомных состояний до испускания или поглощения, после испускания и поглощения фотона. Наличие двух констант ( $a$  и  $b$ ) связано с возможными различиями амплитуд переходов между разными парами уровней. При тепловом равновесии число атомов в каждом из состояний должно оставаться неизменным, так что скорости перехода в данное состояние и выхода из него должны быть одинаковы, т. е.

$$N_0 n |a|^2 = N_1 (n+1) |a|^2,$$

$$N_1 (n+1) |a|^2 + N_1 n |b|^2 = N_0 n |a|^2 + (n+1) |b|^2 N_2,$$

$$N_1 n |b|^2 = N_2 (n+1) |b|^2.$$

Из первого и третьего уравнений получаем

$$N_1/N_0 = N_2/N_1 = n/(n+1).$$

Второе уравнение при этом удовлетворяется тождественно. С другой стороны, из статистической механики известно, что  $N(E)/N(E_0) = \exp[(E_0 - E)/kT]$ . Подставляя сюда  $E_0 = 0$ ,  $E_1 = \Delta E$ ,  $E_2 = 2\Delta E$ , получаем

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{N_2}{N_1} = e^{-\Delta E/kT} = \frac{n}{n+1}.$$

б) Отсюда среднее число фотонов с частотой  $\omega = \Delta E/\hbar$

$$\bar{n}(\omega) = 1/(e^{\hbar\omega/kT} - 1).$$

в) При малых частотах ( $\hbar\omega \ll kT$ ) получим  $\bar{n}(\omega) = kT/\hbar\omega \gg 1$ . Таким образом, число низкочастотных фотонов велико. Энергия одного фотона равна  $\hbar\omega$ , поэтому полная энергия всех фотонов с данной частотой равна  $kT$ , что отвечает средней тепловой энергии классического гармонического осциллятора. При высоких частотах ( $\hbar\omega \gg kT$ ) имеем

$$\bar{n}(\omega) = \exp(-\hbar\omega/kT),$$

т. е. число высокочастотных фотонов весьма мало. При этом энергия всех фотонов  $\hbar\omega\bar{n}(\omega) \ll kT$ .

2.6. Нейтрино является фермионом, поэтому, согласно принципу Паули, в одном и том же состоянии может находиться не более чем одна частица. Следовательно, нельзя получить поток нейтрино с высокой степенью когерентности: «нейтринный лазер» невозможно создать принципиально.

2.7. Обозначим амплитуду перехода первой частицы из  $a$  в  $b$  (в отсутствие другой частицы) через  $\langle b|a\rangle$ , а амплитуду перехода второй частицы из  $c$  в  $d$  — через  $\langle d|c\rangle$ . Тогда соответствующие вероятности  $P_{ab} = |\langle b|a\rangle|^2$ ,  $P_{cd} = |\langle d|c\rangle|^2$ . Если частицы не взаимодействуют, то для нетождественных частиц амплитуда одновременного перехода первой частицы из  $a$  в  $b$  и второй частицы из  $c$  в  $d$  равна произведению амплитуд перехода каждой из частиц:

$$\langle bd|ac\rangle = \langle b|a\rangle\langle d|c\rangle,$$

а вероятность такого перехода

$$P(ac \rightarrow bd) = |\langle bd|ac\rangle|^2 = P_{ab}P_{cd}.$$

Если частицы тождественны, то рассмотренный переход невозможно отличить от одновременного перехода первой частицы из  $a$  в  $d$  и второй частицы из  $c$  в  $b$ . Тогда вероятность перехода  $(a, c) \rightarrow (b, d)$  равна

$$|\langle b|a\rangle\langle d|c\rangle + \langle d|a\rangle\langle b|c\rangle|^2,$$

что отличается от простого произведения вероятностей  $P_{ab}$  и  $P_{cd}$ .

2.8. Система двух дейтронов может находиться в девяти различных спиновых состояниях (3 состояния дейтрона-мишени  $\times$  3 состояния падающего дейтрона). Если дейтроны в мишени и в падающем пучке неполяризованы, то вероятность каждого из таких состояний равна  $1/9$ . В случае, когда оба дейтрона имеют одинаковые проекции спинов, то вероятность рассеяния равна

$$|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2,$$

а поскольку возможны три таких состояния, то вклад в полную вероятность рассеяния от состояний с одинаковыми проекциями спинов равен

$$3 \cdot \frac{1}{9} |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2.$$

Если же проекции спинов дейтронов различны, то случай рассеяния одного из дейтронов на угол  $\theta$  и соответственно второго на угол  $\pi - \theta$  в принципе можно отличить от случая рассеяния первого дейтрона на угол  $\pi - \theta$ , а второго на угол  $\theta$ . Тогда должны складываться не амплитуды, а вероятности:

$$|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2.$$

У системы двух дейтронов может быть 6 различных состояний, в каждом из которых проекции спинов дейтронов не совпадают (три проекции спина дейтронов мишени, и для каждой из этих проекций две отличные от нее проекции спина дейтронов пучка). Поэтому вклад в полную вероятность рассеяния от таких состояний равен

$$\frac{1}{9} \cdot 6 \{ |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 \}.$$

Следовательно, полная вероятность

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \frac{1}{3} |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 + \frac{2}{3} [ |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 ] = \\ &= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 + \frac{2}{3} \operatorname{Re} [ f^*(\theta) f(\pi - \theta) ]. \end{aligned}$$

- 2.9. а) Будем считать, что при достаточно большой отдаче (отвечающей большим углам рассеяния) протон или нейтрон, на котором произошло рассеяние, обязательно вылетает из ядра. Кроме того, не будем учитывать возможности вторичного рассеяния  $\pi$ -мезона и протона (нейтрона). Тогда случаи рассеяния  $\pi$ -мезона на каждом из протонов и нейтронов можно различить, так что полная вероятность рассеяния на угол  $\theta$  получается суммированием вероятностей рассеяния на каждой из частиц ядра:

$$P_a(\theta) = 2P_1 + 2P_2,$$

где

$$P_1 = |f_1(\theta)|^2, \quad P_2 = |f_2(\theta)|^2.$$

- б) Если отдача настолько слаба (т. е. угол рассеяния достаточно мал), что ядро после рассеяния остается со 100%-ной вероятностью «неповрежденным», то невозможно определить, на какой из частиц ядра произошло рассеяние. В этом случае складываются амплитуды, так что вероятность рассеяния  $\pi$ -мезона на ядре гелия равна

$$P_b(\theta) = |f_1(\theta) + f_1(\theta) + f_2(\theta) + f_2(\theta)|^2 = 4 |f_1(\theta) + f_2(\theta)|^2.$$

Представим амплитуды рассеяния  $\pi$ -мезона на протоне и нейтроне в виде

$$f_1(\theta) = \sqrt{P_1} e^{i\varphi_1}, \quad f_2(\theta) = \sqrt{P_2} e^{i\varphi_2}.$$

Тогда

$$P_b(\theta) = 4 [ P_1 + P_2 + 2 \sqrt{P_1 P_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) ].$$

Для сравнения величин  $P_a$  и  $P_b$  будем считать, помимо сделанных выше предположений, что разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  близка к нулю.

(Эксперименты по рассеянию мезонов подтверждают это для определенной области энергий мезонов и углов рассеяния.) Тогда, очевидно,  $P_b$  значительно больше, чем  $P_a$ , если только величины  $P_1$  и  $P_2$  не слишком сильно меняются при переходе от малых  $\theta$  (при которых рассматривается  $P_b$ ) к большим (таким, чтобы отдача была велика).

Интересно отметить, что если  $f_1 \approx f_2$ , то вероятность неупругого рассеяния  $P_a$  пропорциональна числу частиц в ядре, тогда как вероятность упругого рассеяния  $P_b$  пропорциональна квадрату числа частиц в ядре (эффект когерентности).

- 2.10. а) Вероятность регистрации нейтрона детектором равна

$$|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 = |f - f|^2 = 0.$$

- б) В этом случае спин нейтрона, попавшего в счетчик, может быть направлен как вверх, так и вниз. Нейтрон со спином «вверх» может оказаться в счетчике двумя способами: либо нейтрон пучка рассеется на угол  $\theta$  без поворота спина, либо он рассеется на угол  $\pi - \theta$  с «переворотом» спина (в счетчик при этом попадет нейтрон отдачи). Эти два способа неразличимы, поэтому вероятность попадания в счетчик нейтрона со спином «вверх» равна

$$|f(\theta) + g(\pi - \theta)|^2 = |f + g|^2.$$

Аналогично, если регистрируемый нейтрон имеет спин, направленный вниз, получаем

$$|g(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 = |f + g|^2.$$

Таким образом, полная вероятность регистрации равна  $2|f + g|^2$ .

- в) В этом случае равновероятны два начальных состояния:  
 1) нейтроны пучка и мишени поляризованы вдоль оси  $+z$ ;  
 2) у нейтронов пучка спин направлен вниз, а у нейтронов мишени — вверх.  
 В первом из этих состояний вероятность рассеяния равна нулю [см. п. (а)], а во втором  $2|f + g|^2$ , в полной аналогии с п. (б). Поэтому полная вероятность равна  $|f + g|^2$ .  
 г) Имеется четыре возможных начальных состояния: два с параллельными спинами (оба «вверх» или оба «вниз», причем вероятность рассеяния здесь равна нулю) и два с антипараллельными спинами. Вероятность рассеяния в состоянии с антипараллельными спинами равна  $2|f + g|^2$ . Учитывая, что вероятность иметь любое из начальных состояний равна  $1/4$ , получаем полную вероятность регистрации нейтрона

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2|f + g|^2 = |f + g|^2.$$

- д) Хотя в данном случае детектор одинаково реагирует на протоны и нейтроны, в принципе их можно различить. Поэтому вероятность регистрации рассеянной частицы под углом  $\theta$  равна

$$|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 = 2|f|^2.$$

- 2.11. а) Из законов сохранения энергии и импульса следует, что в системе ц. м. абсолютные значения импульсов обоих протонов до и после столкновения равны между собой:

$$p_1 = p_2 = p'_1 = p'_2 = p.$$

Скорость системы ц. м. относительно лаб. системы координат равна скорости протона мишени в системе ц. м.:  $V = p/m$  и совпадает

по направлению с импульсом  $\mathbf{p}_1$ . Импульс рассеянного протона в лаб. системе координат равен

$$\mathbf{p}'_{1л} = \mathbf{p}'_1 + m\mathbf{V}.$$

Отсюда

$$p'_{1л} \cos \alpha = p'_1 \cos \theta + mV,$$

$$p'_{1л} \sin \alpha = p'_1 \sin \theta.$$

Учитывая, что  $p'_1 = mV = p$ , получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Таким образом,  $\alpha = \theta/2$ .

- б) В детекторе может появиться протон со спином «вниз» либо в результате рассеяния первого протона на угол  $\theta$  с «переворотом» спина, либо в результате рассеяния без «переворота» спина на угол  $\pi - \theta$ , так что будет зарегистрирован второй протон. Общая амплитуда вероятности в этом случае равна

$$f'(\pi - \theta) + g(\theta).$$

- в) Возможны 4 комбинации направлений спинов налетающих протонов и протонов мишени. Две из них соответствуют параллельным, а две — антипараллельным спинам. В каждом из последних двух случаев имеется по два конечных состояния:

1) направление спина регистрируемого протона совпадает с первоначальным [амплитуда  $f'(\theta) + g(\pi - \theta)$ ];

2) спин регистрируемого протона «перевернут» по отношению к спину падающего протона [амплитуда  $f'(\pi - \theta) + g(\theta)$ ].

Полная вероятность регистрации протона в направлении  $\theta$  равна сумме вероятностей каждого из указанных процессов, взятых с весом  $1/4$ . В результате получаем

$$P = \frac{1}{2} [ |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + |f'(\theta) + g(\pi - \theta)|^2 + |f'(\pi - \theta) + g(\theta)|^2 ].$$

- г) Если  $f'(\theta) = f(\theta)$  и  $g(\theta) = 0$ , то из предыдущей формулы получим

$$P = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 - \operatorname{Re} [f^*(\theta) f(\pi - \theta)].$$

Это выражение можно записать в виде

$$P = \frac{3}{4} |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{4} |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2.$$

Таким образом,  $A = 3/4$ ,  $B = 1/4$ . Первое слагаемое в этой формуле соответствует рассеянию протонов в состоянии с суммарным спином 1, а второе слагаемое — рассеянию в состоянии с суммарным спином 0.

- 2.12. Согласно принципу Паули, в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. Следовательно, энергия системы принимает наименьшее возможное значение, если электроны заполняют все состояния с энергиями от наименьшей ( $\epsilon_{\min} = 0$ ) до наибольшей энергии  $\epsilon_{\max} = p_{\max}^2/2m$ , величина которой определяется числом электронов в объеме  $V$ . Число квантовых состояний (мод)



поступательного движения электрона с волновым числом  $k = p/\hbar$  в интервале от  $k$  до  $k + dk$  равно  $V \cdot 4\pi k^2 dk / (2\pi)^3$ . Умножая эту величину на 2 (две возможные проекции спина электрона) и интегрируя по импульсам электронов от 0 до  $p_{\text{макс}}$ , получаем полное число  $N$  электронов в объеме  $V$  в состоянии с наименьшей возможной энергией:

$$N = \int_0^{p_{\text{макс}}} V \cdot 2 \cdot 4\pi \frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V p_{\text{макс}}^3}{3\pi^2 \hbar^3},$$

откуда находим

$$p_{\text{макс}} = (3\pi^2 N/V)^{1/3} \hbar.$$

Полная энергия  $U$  складывается из энергий электронов, находящихся в различных квантовых состояниях:

$$U = \int_0^{p_{\text{макс}}} \frac{p^2}{2m} \cdot V \cdot 2 \cdot \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V p_{\text{макс}}^5}{10\pi^2 \hbar^3 m}.$$

Подставляя сюда значения  $p_{\text{макс}}$ , находим энергию газа

$$U = \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} N.$$

Давление этого «вырожденного электронного газа» легко найти, если воспользоваться соотношением

$$P = - \frac{\partial U}{\partial V}.$$

Получаем

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \frac{\hbar^2}{m};$$

следовательно, давление и объем связаны соотношением

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad \text{где } \gamma = 5/3.$$

2.13. Подставляя в формулу для давления (см. решение предыдущей задачи) значение  $N/V = \rho/2M_p$ , получаем

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{\rho}{2M_p}\right)^{5/3},$$

или

$$P = A\rho^{5/3},$$

где

$$A = \frac{1}{10} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3} \frac{1}{M_p^{5/3}} \frac{\hbar^2}{m}.$$

Отсюда видно, в частности, что вклад в давление от частиц данного сорта обратно пропорционален их массе, поэтому можно считать, что все давление создается «вырожденным электронным газом», так как масса ядра много больше массы электрона,

Второе из уравнений, приведенных в условии задачи, можно получить, рассматривая условие равновесия элемента массы под действием сил гравитации и давления. На элемент вещества звезды, занимающий единичный объем и находящийся на расстоянии  $r$  от центра звезды, действует гравитационная сила  $G\rho M(r)/r^2$  [ $M(r)$  — масса, заключенная внутри сферы радиусом  $r$ ] и сила давления, равная  $-dP/dr$ . Из условия равновесия этих сил получаем

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho M(r)}{r^2}.$$

Третье уравнение

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2$$

означает просто, что объем шарового слоя радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  равен  $dV = 4\pi r^2 dr$ , а его масса, следовательно, равна  $dM = 4\pi\rho r^2 dr$ .

### К главе 3. Спин единица

- 3.1. Воспользуемся имеющейся в «Лекциях» подсказкой: представим, что между  $A$  и  $B$  расположен прибор  $T$ , в котором открыты все три «пути». Наличие этого прибора ничего не меняет, но позволяет говорить, что частица, входя в прибор  $A$  в состоянии  $\varphi$ , попадает в прибор  $B$  в одном из трех возможных состояний  $+T$ ,  $0T$  или  $-T$ .

Амплитуда того, что частица, войдя в прибор  $A$  в состоянии  $\varphi$ , выйдет из него в состоянии  $k$  ( $k = +T, 0T, -T$ ), в этом же состоянии войдет в прибор  $B$  и выйдет из него в состоянии  $\chi$ , равна

$$\langle \chi | B | k \rangle \langle k | A | \varphi \rangle,$$

а полная амплитуда равна сумме таких амплитуд:

$$\langle \chi | C | \varphi \rangle = \sum_k \langle \chi | B | k \rangle \langle k | A | \varphi \rangle.$$

- 3.2. Распределение пучка по трем состояниям ( $j = +S, 0S, -S$ ) после прохождения системы  $STS$  определяется амплитудами

$$\langle jS | STS | \varphi \rangle = \sum_{i, k} \langle jS | kT \rangle \langle kT | iS \rangle \langle iS | \varphi \rangle,$$

где  $\varphi$  — произвольное начальное состояние, а  $j$  — любое из трех конечных состояний.

Если в приборе  $T$  открыта лишь одна щель, то относительное распределение в конечном состоянии не зависит от того, с какой амплитудой ( $\langle iS | \varphi \rangle$ ) представлено каждое из состояний в начальном пучке. Действительно, в этом случае из суммы по  $k$  остается один член

$$\langle jS | STS | \varphi \rangle = \langle jS | kT \rangle \sum_i \langle kT | iS \rangle \langle iS | \varphi \rangle,$$

так что отношение вероятностей найти частицу в состояниях  $j$  и  $j'$  не зависит от  $\langle iS | \varphi \rangle$ :

$$\frac{W_j}{W_{j'}} = \frac{|\langle jS | STS | \varphi \rangle|^2}{|\langle j'S | STS | \varphi \rangle|^2} = \frac{|\langle jS | kT \rangle|^2}{|\langle j'S | kT \rangle|^2}.$$

Если же в приборе  $T$  открыты две или три щели, то отношение вероятностей зависит от начального состояния, причем в последнем

случае распределения по состояниям на входе в прибор и на выходе из него совпадают,  $W_I = |\langle jS | \Phi \rangle|^2$ .

- 3.3. а) Вычислим сначала амплитуды  $\langle iT | TS | \Phi \rangle = \langle iT | + S \rangle \langle + S | \Phi \rangle$ , где  $\Phi$  — начальное состояние. По условию задачи  $|\langle + S | \Phi \rangle|^2 = N_1/N$  ( $N$  — интенсивность пучка частиц, входящих в первый прибор  $S$ ). Поскольку в приборе  $T$  открыты щели  $0T$  и  $-T$ , то  $iT$  может принимать значения  $0T$  и  $-T$ . Амплитуды  $\langle iT | + S \rangle$  найдем по формулам (3.38) «Лекций» (вып. 8, стр. 80) при  $\alpha = \pi/2$ :

$$\langle 0T | + S \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle -T | + S \rangle = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$N_2 = N \sum_{iT=0T, -T} |\langle iT | + S \rangle \langle + S | \Phi \rangle|^2 = \frac{3}{4} N_1.$$

- б) Интенсивность  $N_3$  пучка, прошедшего через последний прибор  $S$ , определяется квадратом модуля амплитуды

$$\langle -S | STS | \Phi \rangle = \sum_{iT=0T, -T} \langle -S | iT \rangle \langle iT | + S \rangle \langle + S | \Phi \rangle.$$

Величины  $\langle -S | iT \rangle$  можно найти, воспользовавшись той же формулой (3.38) «Лекций» и соотношением  $\langle jS | iT \rangle = \langle iT | jS \rangle^*$ :

$$\langle -S | 0T \rangle = 1/\sqrt{2}, \quad \langle -S | -T \rangle = 1/2.$$

Окончательно находим

$$N_3 = |\langle -S | STS | \Phi \rangle|^2 = N_1/16.$$

- в) Если все щели в приборе  $T$  открыты, то он фактически не влияет на прохождение частиц. В этом случае, очевидно,  $N_2 = N_1$ ,  $N_3 = 0$ .

- 3.4. Найдем прежде всего амплитуды  $\langle jT | iS \rangle$ . Прибор  $T$  повернут относительно  $S$  на угол  $\pi/2$  вокруг оси  $x$ . Этот поворот можно осуществить тремя последовательными поворотами: на угол  $-\pi/2$  вокруг оси  $z$ , затем на угол  $\pi/2$  вокруг новой оси  $y'$  и, наконец, на угол  $\pi/2$  вокруг новой оси  $z''$ . Следовательно, можно написать, что

$$\langle jT | iS \rangle = \sum_{k, l} \langle jT | T''k \rangle \langle kT'' | T'l \rangle \langle iT' | iS \rangle;$$

здесь  $T'$  и  $T''$  относятся к промежуточным системам координат. Величины, входящие в правую часть этой формулы, можно определить по формулам (3.38) и (3.39) «Лекций» (вып. 8, стр. 80). Выполняя соответствующие выкладки (их удобно делать в матричной форме), найдем матрицу амплитуд  $\langle jT | iS \rangle$ :

$jT \backslash iS$	$+S$	$0S$	$-S$
$+T$	$1/2$	$i/\sqrt{2}$	$-1/2$
$0T$	$i/\sqrt{2}$	$0$	$i/\sqrt{2}$
$-T$	$-1/2$	$i/\sqrt{2}$	$1/2$

- а) Число частиц, выходящих из  $S'$  в состоянии  $|jS'\rangle$ , определяется квадратом модуля амплитуды

$$\langle jS' | S'TS | \Phi \rangle = \sum_{k=\pm T} \langle jS' | kT \rangle \langle kT | 0S \rangle \langle 0S | \Phi \rangle.$$

Функции преобразования  $\langle kT | 0S \rangle$  имеются в таблице, приведенной выше, и из этой таблицы можно получить также  $\langle jS' | kT \rangle$ , учитывая, что

$$\langle jS' | kT \rangle = \langle kT | jS' \rangle^*$$

и что приборы  $S$  и  $S'$  ориентированы одинаково. Следовательно,

$$\langle kT | jS' \rangle = \langle kT | jS \rangle.$$

Выбирая нормировку  $|\langle 0S | \Phi \rangle|^2 = N_0$ , находим величины  $N_{jS'} = N_0 \left| \sum_{kT=\pm T} \langle jS' | kT \rangle \langle kT | 0S \rangle \right|^2$ :

$$N_{0S'} = N_0, \quad N_{+S'} = N_{-S'} = 0.$$

- б) Если в приборе  $T$  установлены «прозрачные детекторы», регистрирующие прохождение частиц в состояниях  $+T$  и  $-T$ , то число частиц, выходящих из прибора  $S'$  в состоянии  $jS'$ , будет равно сумме чисел частиц в этом состоянии, находившихся в промежуточных состояниях  $+T$  и  $-T$ , поскольку регистрация промежуточных состояний устраняет интерференцию соответствующих амплитуд. (Чтобы лучше это понять, полезно вспомнить § 2 гл. 11 «Лекций», вып. 8.) Таким образом,

$$N_{jS'} = |\langle jS' | +T \rangle \langle +T | 0S \rangle \langle 0S | \Phi \rangle|^2 + |\langle jS' | -T \rangle \langle -T | 0S \rangle \langle 0S | \Phi \rangle|^2,$$

так что

$$N_{+S'} = N_{-S'} = N_0/4, \quad N_{0S'} = N_0/2.$$

Значения  $N_{kT}$  определяются выражением

$$N_{kT} = |\langle kT | 0S \rangle \langle 0S | \Phi \rangle|^2,$$

из которого получим

$$N_{+T} = N_{-T} = N_0/2, \quad N_{0T} = 0.$$

- в) Если числа отсчетов  $N_{+T}$ ,  $N_{-T}$  не регистрируются (но сами «прозрачные детекторы» срабатывают), то это, естественно, не влияет на значения  $N_{\pm S'}$ ,  $N_{0S'}$ .
- г) Если половина частиц, пролетающих через детекторы в приборе  $T$ , не взаимодействует с ними, то полное число частиц в состоянии  $jS'$  равно полусумме числа частиц, которые были бы при 100%-ной эффективности счетчиков и в случае, когда счетчики отсутствуют. Тогда

$$N_{+S'} = N_0/8, \quad N_{0S'} = \frac{3}{4} N_0, \quad N_{-S'} = N_0/8.$$

- д) Рассмотрим теперь случай, когда все перегородки из прибора  $S$  и счетчики из прибора  $T$  удалены и в прибор  $S$  поступает  $N_0$  частиц в единицу времени. Тогда наличие прибора  $S$  никак не влияет на результат. Если падающий пучок не поляризован, то можно считать, что в прибор  $T$  поступает по  $N_0/3$  частиц в состояниях  $+T$ ,  $0T$  и  $-T$ , причем между соответствующими амплитудами ин-

терференция отсутствует. Учитывая, что пучок частиц в состоянии  $0T$  блокирован, находим

$$N_{jS'} = \frac{N_0}{3} \sum_{k=\pm 1} |\langle jS' | kT \rangle|^2.$$

Отсюда, используя таблицу  $\langle kT | jS \rangle$ , получаем

$$N_{+S'} = N_{-S'} = N_0/6, \quad N_{0S'} = N_0/3.$$

### К главе 4. Спин одна вторая

4.1. Амплитуду вероятности появления атома в точке  $Q$  можно записать в виде суммы произведений

$$\langle Q | P \rangle = \sum_{iS} \sum_{jT} \langle Q | jT \rangle \langle jT | iS \rangle \langle iS | P \rangle.$$

Здесь  $\langle iS | P \rangle$  — амплитуда вероятности иметь на выходе первого прибора частицу в состоянии  $iS$ . Поскольку пучок атомов неполяризован и прибор пропускает лишь атомы в состоянии  $+S$ , то

$$|\langle iS | P \rangle|^2 = \frac{1}{2} N \delta_{iS, +S}.$$

Далее, второй прибор пропускает только атомы, находящиеся в состоянии  $+T$ , поэтому  $\langle Q | jT \rangle = \delta_{jT, +T}$ . Таким образом, число атомов, попадающих в точку  $Q$ , равно

$$N_Q = |\langle Q | P \rangle|^2 = \frac{N}{2} |\langle +T | +S \rangle|^2.$$

Величина  $\langle +T | +S \rangle$  представляет собой амплитуду вероятности того, что частица со спином «вверх» в системе координат  $S$ , характеризующей первый прибор, будет иметь спин «вверх» в системе координат  $T$ , связанной со вторым прибором. Положение повернутой системы координат будем характеризовать углами Эйлера. Тогда, согласно табл. 4.1 (см. «Лекции», вып. 8, стр. 105), имеем

$$\langle +T | +S \rangle = \cos \frac{\alpha}{2} e^{i(\beta+\gamma)/2}.$$

При этом величина  $N_Q$  не зависит от углов  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$N_Q = \frac{1}{2} N \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Угол  $\alpha$  — это угол между осями  $z$  и  $z'$  в исходной ( $S$ ) и повернутой ( $T$ ) системах координат. Теперь рассмотрение частных случаев не представляет труда:

а)  $\alpha = 0, \quad N_Q = N/2; \quad$  б)  $\alpha = \pi/2, \quad N_Q = N/4;$

в)  $\alpha = \pi/2, \quad N_Q = N/4; \quad$  г)  $\alpha = \pi/2, \quad N_Q = N/4;$

д)  $\alpha = \pi/4, \quad N_Q = \frac{N}{2} \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{N}{4} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{N}{4} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right);$

е)  $\alpha = \pi/2, \quad N_Q = N/4; \quad$  ж)  $\alpha = \pi/2, \quad N_Q = N/4;$

з)  $\alpha = 0, \quad N = N/2.$

- 4.2. Пусть прибор регистрирует частицы в том случае, если они находятся в некотором состоянии спина  $\varphi$ . Тогда амплитуда вероятности зарегистрировать частицу в состоянии  $\psi$  равна

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | +z \rangle \langle +z | \psi \rangle + \langle \varphi | -z \rangle \langle -z | \psi \rangle.$$

Обозначая  $\langle +z | \psi \rangle$  и  $\langle -z | \psi \rangle$  (амплитуды вероятностей иметь в состоянии  $\psi$  направление спина «вверх» и «вниз») соответственно через  $a$  и  $b$ , а  $\langle \varphi | +z \rangle$  и  $\langle \varphi | -z \rangle$  — через  $X$  и  $Y$  (амплитуды вероятности регистрации частицы, имеющей направление спина «вверх» и «вниз» соответственно), получаем

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = |aX + bY|^2.$$

1) Если спин частицы направлен вверх (или, что то же самое, вдоль оси  $+z$ ), то  $|a| = 1$ ,  $b = 0$  и, следовательно,

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = |X|^2.$$

Аналогично, если спин направлен вниз, то

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = |Y|^2.$$

2) Если спин направлен по оси, характеризуемой полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$ , то, согласно формуле (4.36) (вып. 8, стр. 106),

$$a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi/2}, \quad b = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi/2}.$$

Следовательно,

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi/2} X + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi/2} Y \right|^2.$$

3) Если спин направлен вдоль оси  $+x$  ( $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$ ), то

$$a = b = 1/\sqrt{2}$$

и

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} |X + Y|^2$$

Если же спин направлен вдоль  $-x$  ( $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \pi$ ), то

$$a = -i/\sqrt{2}, \quad b = i/\sqrt{2}$$

и

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} |X - Y|^2.$$

4) Пусть теперь частицы неполяризованы, причем «случайность» ориентации спина определяется разными способами. Вероятность зарегистрировать частицу, если направление ее спина выбирается способом (а), равна

$$P_a = \frac{1}{2} |X|^2 + \frac{1}{2} |Y|^2 = \frac{1}{2} (|X|^2 + |Y|^2).$$

Для способа (б) имеем

$$P_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} |X + Y|^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} |X - Y|^2 = \frac{1}{2} (|X|^2 + |Y|^2).$$

Наконец, для способа (в) получим

$$\begin{aligned}
 P_B &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left| X \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi/2} + Y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi/2} \right|^2 \sin\theta d\theta = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left\{ |X|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta d\theta + |Y|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta d\theta + \right. \\
 &\quad \left. + 2\operatorname{Re} \left[ X^* Y \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi \int_0^\pi \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta d\theta \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Замечая, что в последнем выражении в первых двух слагаемых интегрирование по  $\varphi$  и  $\theta$  дает  $2\pi$ , а интеграл по  $\varphi$  в последнем члене равен нулю, получаем

$$P_B = \frac{1}{2} (|X|^2 + |Y|^2).$$

Таким образом, для всех трех способов вероятность обнаружить частицу одна и та же. Не существует метода, которым можно было бы отличить один способ случайной ориентации спина от другого.

- 4.3. Выходящая из прибора  $S$  частица находится в состоянии  $-S$ . Амплитуда вероятности прохождения этой частицы через приборы  $T$  и  $U$  равна

$$\sum_j \langle +U | jT \rangle \langle jT | -S \rangle.$$

Соответственно

$$N = N_0 \left| \sum_j \langle +U | jT \rangle \langle jT | -S \rangle \right|^2.$$

Величины  $\langle +U | jT \rangle$  и  $\langle jT | -S \rangle$  определяются относительной ориентацией приборов  $U$  и  $T$ ,  $T$  и  $S$ .

Рассмотрим случай, соответствующий фиг. 2.

- а) Прибор  $T$  повернут относительно прибора  $S$  на угол  $\varphi = \pi$  вокруг оси  $y$ . Из табл. 4.2 (см. вып. 8, стр. 105) для  $R_y(\varphi)$  получаем

$$\langle +T | -S \rangle = 1, \quad \langle -T | -S \rangle = 0.$$

- б) Перейдем от системы  $S$  к системе  $T$ , используя только повороты вокруг осей  $y$  и  $z$ . Можно, например, сначала повернуть систему  $S$  вокруг оси  $y$  на угол  $\varphi_1 = \pi/2$ , затем новую систему  $S'$  повернуть на угол  $\varphi_2 = \theta$  вокруг оси  $z'$ , а полученную таким путем систему  $S''$  повернуть на угол  $\varphi_3 = -\pi/2$  вокруг оси  $y''$ . Соответственно

$$\langle +U | -S \rangle = \sum_{kl} \langle +U | kS'' \rangle \langle kS'' | jS' \rangle \langle jS' | -S \rangle$$

Из табл. 4.2 «Лекций» для  $R_z$  и  $R_y$  получаем

$$\begin{aligned}
 \langle +S' | -S \rangle &= \langle -S' | -S \rangle = 1/\sqrt{2}, \\
 \langle -S'' | +S' \rangle &= \langle +S'' | -S' \rangle = 0, \\
 \langle +S'' | +S' \rangle &= \langle -S'' | -S' \rangle = e^{i\theta/2}, \\
 \langle +U | +S'' \rangle &= -\langle +U | -S'' \rangle = 1/\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\langle +U | -S \rangle = i \sin(\theta/2).$$

Точно такой же результат получается, если рассматривать переход от  $S$  к  $T$  как поворот вокруг оси  $x$  на угол  $\theta$ .

- в) При  $\theta = 0$  имеем  $\langle +U | -S \rangle = 0$ , а при  $\theta = \pi$   $\langle +U | -S \rangle = i$ . В последнем случае оси  $z$  систем  $S$  и  $U$  направлены в противоположные стороны, поэтому  $|\langle +U | -S \rangle|^2 = 1$ . По той же причине в случае (а)  $|\langle +T | -S \rangle|^2 = 1$ . Но системы  $T$  и  $U$  отличаются тем, что одна из них повернута относительно другой на угол  $\pi$  вокруг оси  $z$ . Следовательно, амплитуды  $\langle +T | -S \rangle$  и  $\langle +U | -S \rangle$  отличаются друг от друга фазовым множителем  $e^{i\pi/2} = i$ .

- 4.4. Пусть плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $z$ . Тогда в  $S$ -представлении (т. е. в системе координат  $S$ ) вектор ее электрического поля имеет компоненты  $E_x$ ,  $E_y$ , 0, а в  $T$ -представлении (т. е. в системе координат  $T$ , повернутой относительно  $S$  на угол  $\theta$  вокруг оси  $z$ ) тот же вектор имеет компоненты  $E_{x'}$ ,  $E_{y'}$ , 0. Согласно закону преобразования вектора при поворотах системы координат,

$$E_{x'} = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta,$$

$$E_{y'} = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta.$$

Следовательно,

$$\langle xT | xS \rangle = \cos \theta, \quad \langle xT | yS \rangle = \sin \theta,$$

$$\langle yT | xS \rangle = -\sin \theta, \quad \langle yT | yS \rangle = \cos \theta.$$

- 4.5. Пусть  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$  — вектор напряженности электрического поля плоской электромагнитной волны на входе в прибор, а  $\mathbf{E}' = (E'_{x'}, E'_{y'}, 0)$  — соответствующий вектор на выходе из прибора. С помощью матрицы  $\langle j | A | i \rangle$  мы можем выразить компоненты вектора на входе прибора через компоненты вектора на выходе:

$$E'_{x'} = \langle x | A | x \rangle E_x + \langle x | A | y \rangle E_y,$$

$$E'_{y'} = \langle y | A | x \rangle E_x + \langle y | A | y \rangle E_y.$$

С другой стороны, используя классические представления о поляризации света, можно найти соотношения между  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{E}$  и тем самым получить элементы матрицы  $\langle j | A | i \rangle$ .

- а) В силу того, что луч  $y$  блокируется,  $E'_{y'} = 0$ , тогда как  $E'_{x'} = E_x$ . Следовательно, единственный отличный от нуля элемент матрицы  $\langle x | A | x \rangle = 1$ .

- б) В системе координат  $x'$ ,  $y'$ , повернутой вместе с прибором относительно системы  $x$ ,  $y$ , компоненты вектора  $\mathbf{E}$  записываются в виде

$$E_{x'} = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta,$$

$$E_{y'} = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta.$$

После прохождения через прибор  $E'_{x'} = E_{x'}$ ,  $E'_{y'} = 0$ . Возвращаясь в исходную систему координат, получаем

$$E'_x = E'_{x'} \cos \theta = E_x \cos^2 \theta + E_y \sin \theta \cos \theta,$$

$$E'_{y'} = E'_{x'} \sin \theta = E_x \sin \theta \cos \theta + E_y \sin^2 \theta.$$



Таким образом,

$$\langle x | A | x \rangle = \cos^2 \theta, \quad \langle y | A | y \rangle = \sin^2 \theta,$$

$$\langle x | A | y \rangle = \langle y | A | x \rangle = \sin \theta \cos \theta.$$

- в) На выходе прибора  $E'_x = E_x$ ,  $E'_y = 0$ , так, что матрица  $\langle j | A | i \rangle$  оказывается такой же, как в случае «а».
- г) Поляриод эквивалентен системе «анализатор — блокировка одного из лучей — синтезатор». Матрица  $\langle j | A | i \rangle$  совпадает с полученной в случае (б).
- д) В этом случае

$$E'_x = E_x e^{i\varphi}, \quad E'_y = E_y.$$

Следовательно,

$$\langle x | A | x \rangle = e^{i\varphi}, \quad \langle y | A | y \rangle = 1,$$

$$\langle x | A | y \rangle = \langle y | A | x \rangle = 0.$$

- е) Аналогично предыдущему пункту имеем

$$\langle x | A | x \rangle = \langle y | A | y \rangle = e^{i\varphi},$$

$$\langle x | A | y \rangle = \langle y | A | x \rangle = 0.$$

Заметим, что одинаковое изменение фазы обеих компонент вектора не влияет на поляризацию.

- ж) В системе координат, повернутой вместе с прибором на угол  $45^\circ$ , вектор  $E$  имеет компоненты

$$E_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x + E_y),$$

$$E_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-E_x + E_y).$$

На выходе прибора  $E'_{x'} = iE_{x'}$ ,  $E'_{y'} = E_{y'}$ .

Следовательно, в исходной системе координат компоненты вектора  $E'$  равны

$$E'_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (E'_{x'} - E'_{y'}) = \frac{i+1}{2} E_x + \frac{i-1}{2} E_y,$$

$$E'_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (E'_{x'} + E'_{y'}) = \frac{i-1}{2} E_x + \frac{i+1}{2} E_y.$$

Отсюда получаем

$$\langle x | A | x \rangle = \langle y | A | y \rangle = \frac{i+1}{2},$$

$$\langle x | A | y \rangle = \langle y | A | x \rangle = \frac{i-1}{2}.$$

- з) При прохождении через четвертьволновую пластинку разность фаз лучей  $x$  и  $y$  изменяется на  $\pi/2$ , и мы имеем (с точностью до общего фазового множителя)

$$E'_x = iE_x, \quad E'_y = E_y.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\langle x | A | x \rangle &= i, & \langle y | A | y \rangle &= 1, \\ \langle x | A | y \rangle &= \langle y | A | x \rangle = 0.\end{aligned}$$

- н) При прохождении пластинки толщиной  $d$  монохроматическая волна с круговой частотой  $\omega$  приобретает дополнительную фазу

$$kd = \omega d/v = \omega dn/c;$$

здесь  $k$  и  $v$  — волновое число и скорость света в среде,  $n$  — показатель преломления среды. В двоякопреломляющей среде показатель преломления различен для света с поляризациями вдоль осей  $x$  и  $y$ . При этом сдвиги фаз  $x$ - и  $y$ -лучей после прохождения ими пластинки толщиной  $d$  даются выражениями

$$\Phi_x = \frac{\omega d}{c} n_x, \quad \Phi_y = \frac{\omega d}{c} n_y.$$

Соответственно можно записать

$$E'_x = E_x e^{i\Phi_x}, \quad E'_y = E_y e^{i\Phi_y}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\langle x | A | x \rangle &= e^{i\omega dn_x/c}, & \langle y | A | y \rangle &= e^{i\omega dn_y/c}, \\ \langle x | A | y \rangle &= \langle y | A | x \rangle = 0.\end{aligned}$$

- к) После прохождения через раствор компоненты вектора  $E'$  в системе координат, повернутой на угол  $\theta$  относительно исходной, очевидно, равны  $E'_{x'} = E_x$ ,  $E'_{y'} = E_y$ . В исходной системе координат

$$\begin{aligned}E'_x &= E_x \cos \theta - E_y \sin \theta, \\ E'_y &= E_x \sin \theta + E_y \cos \theta.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle x | A | x \rangle &= \langle y | A | y \rangle = \cos \theta, \\ \langle y | A | x \rangle &= -\langle x | A | y \rangle = \sin \theta.\end{aligned}$$

- л) В этом случае на выходе прибора компонента  $E'_x$  равна нулю, тогда как  $E'_y = E_y + E_x e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  — сдвиг фазы луча  $x$  при прохождении им через раствор сахара. Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle x | A | x \rangle &= \langle x | A | y \rangle = 0, \\ \langle y | A | y \rangle &= 1, \quad \langle y | A | x \rangle = e^{i\alpha}.\end{aligned}$$

- м) Средняя по времени интенсивность плоской монохроматической волны на входе прибора пропорциональна ( $|E_x|^2 + |E_y|^2$ ). На выходе прибора она пропорциональна величине

$$|E_y + E_x e^{i\alpha}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + 2|E_x||E_y|\cos(\alpha + \beta),$$

где  $\beta$  — разность фаз комплексных величин  $E_x$  и  $E_y$ . Если  $\cos(\alpha + \beta) > 0$ , то интенсивность выходящей волны больше, чем входящей, что означает «бесплатное» увеличение энергии, т. е. возможность построения вечного двигателя.

Разумеется, этот вывод неверен. Дело в том, что в рассматриваемом приборе лучи  $x$  и  $y$  должны быть пространственно разделены и, стало быть, ограничены в пространстве (в плоскости, перпендикулярной направлению распространения). Но это означает, что волны нельзя считать плоскими. Тогда после соединения пучков возникает типичная интерференционная картина: усиление интенсивности в одном месте «экрана» сопровождается ослаблением в другом, так что полная интенсивность в пучке на выходе из прибора равна (или меньше при наличии поглощения) интенсивности пучка на входе прибора.

- 4.6. а) Пусть  $f_{+z}(\theta)$  и  $f_{-z}(\theta)$  — амплитуды вероятностей того, что электрон испускается со спином вдоль положительного направления оси  $z$  и противоположно оси  $z$  соответственно. Тогда мы можем написать

$$f_{+z}(\theta) = A \sqrt{1 - \frac{v}{c}} \sin \frac{\theta}{2}; \quad f_{-z}(\theta) = A \sqrt{1 + \frac{v}{c}} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Следовательно, относительная вероятность испускания электрона со спином вдоль положительного направления оси  $z$  равна

$$w_{+z}(\theta) = \frac{|f_{+z}(\theta)|^2}{|f_{+z}(\theta)|^2 + |f_{-z}(\theta)|^2} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta},$$

а со спином, направленным в противоположную сторону оси  $z$ ,

$$w_{-z}(\theta) = \frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right) \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}.$$

- б) Амплитуды вероятностей того, что спин направлен вдоль осей  $+x$  или  $-x$ , можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_{+x} &= \langle +x | +z \rangle f_{+z} + \langle +x | -z \rangle f_{-z}, \\ f_{-x} &= \langle -x | +z \rangle f_{+z} + \langle -x | -z \rangle f_{-z}. \end{aligned}$$

Здесь  $\langle +x | +z \rangle$  — амплитуда вероятности того, что у электрона со спином вдоль оси  $+z$  спин окажется направленным вдоль оси  $+x$  и т. п.

Из табл. 4.2 «Лекций» (вып. 8, стр. 105) имеем

$$\begin{aligned} \langle +x | +z \rangle &= \langle +x | -z \rangle = \langle -x | -z \rangle = 1/\sqrt{2}, \\ \langle -x | +z \rangle &= -1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{+x} &= (f_{+z} + f_{-z})/\sqrt{2}, \\ f_{-x} &= (-f_{+z} + f_{-z})/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Соответствующие вероятности равны

$$\omega_{+x}(\theta) = \frac{|f_{+x}|^2}{|f_{+x}|^2 + |f_{-x}|^2} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta} \right],$$

$$\omega_{-x}(\theta) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta} \right].$$

в) Аналогично предыдущему имеем

$$f_{+y} = \langle +y | +z \rangle f_{+z} + \langle y | -z \rangle f_{-z},$$

$$f_{-y} = \langle -y | +z \rangle f_{+z} + \langle -y | -z \rangle f_{-z},$$

где

$$\langle +y | +z \rangle = \langle -y | -z \rangle = 1/\sqrt{2},$$

$$\langle -y | +z \rangle = \langle +y | -z \rangle = -i/\sqrt{2}.$$

При вычислении этих амплитуд следует иметь в виду, что переход от оси  $z$  к оси  $y$  осуществляется поворотом вокруг оси  $x$  на угол  $-\pi/2$ .

Используя явный вид амплитуд  $f_{+z}$  и  $f_{-z}$ , находим

$$\omega_{+y}(\theta) = \omega_{-y}(\theta) = 1/2.$$

Результаты для осей  $x$  и  $y$ , отличающиеся друг от друга, получаются всегда в тех случаях, когда складываются амплитуды  $f_{+z}$  и  $f_{-z}$ , т. е. состояния со спином вдоль оси  $z$  и против оси  $z$  интерферируют.

г) Если антинейтрино не регистрируется, то абсолютные вероятности следует проинтегрировать по всем возможным направлениям вылета антинейтрино.

Из соображений симметрии ясно, что вероятность вылета электрона с тем или иным спином не зависит от полярного угла  $\varphi$  (от него зависит лишь фазы соответствующих амплитуд). Поэтому, воспользовавшись результатами, полученными в п. (а), для относительных вероятностей того или иного направления спина имеем

$$W_{\pm z} = \frac{\int |f_{\pm z}(\theta)|^2 d\Omega}{\int [ |f_{+z}(\theta)|^2 + |f_{-z}(\theta)|^2 ] d\Omega}.$$

Вычисляя интегралы

$$\int \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta d\theta = 2\pi,$$

$$\int \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) d\Omega = 2\pi,$$

$$\int \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right) d\Omega = 4\pi,$$

получаем

$$W_{+z} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v}{c} \right),$$

$$W_{-z} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{v}{c} \right).$$

### К главе 5. Зависимость амплитуд от времени

5.1. В соответствии с формулой (5.33) «Лекций» (вып. 8, стр. 124) направление фронта волны, описывающей частицу массой  $M$  с импульсом  $p$ , при прохождении расстояния  $w$  в области неоднородного потенциала изменяется на угол

$$\delta\theta = - \frac{M}{p^2} \frac{\partial V}{\partial y} w.$$

Здесь мы приняли, что ось  $y$  совпадает с направлением градиента потенциала  $V$ , причем  $V$  изменяется медленно, а первоначальное направление движения частицы перпендикулярно оси  $y$ . Если частица имеет спин 1 и магнитный момент  $\mu$ , то энергия ее взаимодействия с магнитным полем может принимать значения  $-\mu B$ ,  $0$ ,  $+\mu B$  соответственно для проекций спина  $+1$ ,  $0$ ,  $-1$  на направление магнитного поля. Следовательно, проходя через неоднородное магнитное поле, частица меняет направление своего движения, причем различным образом для состояний  $+1$ ,  $0$ ,  $-1$ , т. е. пучок частиц должен разделяться на три пучка, каждый из которых отклоняется от первоначального направления на углы

$$\delta\theta(\pm 1) = \pm \frac{\mu M w}{p^2} \frac{\partial B}{\partial y},$$

$$\delta\theta(0) = 0.$$

Покажем теперь, что спин 1 прецессирует в магнитном поле. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси  $+z$ , и в момент времени  $t = 0$  спин направлен вдоль оси  $+x$ . Последнее утверждение означает, что

$$C_{+x}(0) = 1, \quad C_{0x}(0) = C_{-x}(0) = 0.$$

Следовательно,

$$C_{jz}(0) = \sum_{i=0, \pm 1} \langle jz | ix \rangle C_{ix}(0) = \langle jz | +x \rangle \quad (j=0, \pm 1).$$

Из формул (3.38) «Лекций» (вып. 8, стр. 80) при  $\alpha = -\pi/2$  получим

$$\langle +z | +x \rangle = \langle -z | +x \rangle = 1/2, \quad \langle 0z | +x \rangle = 1/\sqrt{2}.$$

Как следует из § 5 гл. 5 «Лекций» (вып. 8, стр. 124), с течением времени амплитуды  $C_{jz}$  меняются по закону

$$C_{jz}(t) = e^{i\omega_p t} C_{jz}(0),$$

где  $\omega_p = \mu B/\hbar$ . Подставив сюда величины  $C_{jz}(0)$ , получим

$$C_{+z}(t) = \frac{1}{2} e^{i\omega_p t},$$

$$C_{0z}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$C_{-z}(t) = \frac{1}{2} e^{-i\omega_p t}.$$

Убедимся, что спин вращается в плоскости  $xy$  с круговой частотой  $\omega_p$ . Вычислим амплитуду вероятности проекции спина  $+1$  на ось  $L$ , расположенную в плоскости  $xy$  и составляющую с осью  $x$  в момент времени  $t$  угол  $\beta = -\omega_p t$ . Повернем систему координат вокруг оси  $z$  на угол  $\beta$ , а затем вокруг оси  $y$  на угол  $\alpha = \pi/2$ . Используя формулы (3.39) и (3.38) «Лекций» (вып. 8, стр. 80), получаем

$$C_{+L}(t) = 1.$$

Это означает, что спин направлен по оси  $L$  и, следовательно, вместе с ней вращается в плоскости  $xy$  с угловой скоростью  $\omega_p$  в направлении по часовой стрелке.

Оба явления, рассмотренные в настоящей задаче, — расщепление пучка частиц в неоднородном магнитном поле и прецессия спина в магнитном поле — зависят от магнитного момента и, следовательно, могут быть использованы для его измерения. В первом случае это будет эксперимент типа опытов Штерна и Герлаха, во втором, — например парамагнитный резонанс, когда частица, обладающая магнитным моментом, в магнитном поле резонансно поглощает внешнее радиоизлучение с частотой  $\omega = \omega_p$  (см. «Лекции», вып. 7, гл. 35).

## К главе 6. Гамильтонова матрица

6.1. Составим прежде всего гамильтонову матрицу для частицы со спином  $1/2$  в магнитном поле. Это удобно сделать, выбирая в качестве базисных состояния с определенной проекцией спина на направление магнитного поля т. е. состояния  $|+x\rangle$  и  $|-x\rangle$ . Тогда можно написать

$$\langle +x | H | +x \rangle = -\mu B_0, \quad \langle -x | H | -x \rangle = \mu B_0$$

$$\langle +x | H | -x \rangle = \langle -x | H | +x \rangle = 0.$$

Используя преобразование, аналогичное выражению (6.28) «Лекций» (вып. 8, стр. 140), нетрудно получить эту матрицу и для базисных состояний  $|+z\rangle$ ,  $|-z\rangle$ :

$$\langle iz | H | jz \rangle = \sum_{k, l} \langle iz | kx \rangle \langle kx | H | lx \rangle \langle lx | jz \rangle.$$

Амплитуды  $\langle lx | jz \rangle$  мы уже вычисляли при решении задачи 4.6, а амплитуды  $\langle iz | kx \rangle$  можно получить из соотношения

$$\langle iz | kx \rangle = \langle kx | iz \rangle^*.$$

Тогда

$$\langle +z | H | +z \rangle = \langle -z | H | -z \rangle = 0,$$

$$\langle +z | H | -z \rangle = \langle -z | H | +z \rangle = -\mu B_0.$$

В начальный момент времени после прохождения первого фильтра частица находится в состоянии  $|+z\rangle$ , так что  $C_{+z}(0) \equiv C_1(0) = 1$ ;  $C_{-z}(0) \equiv C_2(0) = 0$ . Изменение этих амплитуд во времени определяется следующими уравнениями:

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = -\mu B_0 C_2,$$

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = -\mu B_0 C_1.$$

Складывая и вычитая почленно эти два уравнения, получаем уравнения для  $C_1 + C_2$  и  $C_1 - C_2$ , которые довольно просто интегрируются. После несложных математических операций получаем решение с учетом начальных условий:

$$C_1(t) = \cos \omega t,$$

$$C_2(t) = i \sin \omega t,$$

где

$$\omega = \mu B_0 / \hbar.$$

Этот результат можно получить и другим способом, не решая систему дифференциальных уравнений, если учесть, что в рассматриваемой системе (спин в магнитном поле  $B_0$ ) фактически известны состояния с определенной энергией. Это состояния с определенной проекцией спина на направление поля, т.е. на ось  $x$ . Состояние  $|+x\rangle$  имеет энергию  $-\mu B_0$ , а состояние  $|-x\rangle$  — энергию  $+\mu B_0$ . Рассмотрим матрицу  $U(t, 0)$ , связывающую состояние системы  $|\psi(t)\rangle$  в момент времени  $t$  с начальным состоянием  $|\psi(0)\rangle$  (см. § 4 гл. 6 «Лекций», вып. 8):

$$|\psi(t)\rangle = U(t, 0) |\psi(0)\rangle.$$

Матрица  $U(t, 0)$  диагональна в представлении состояний с определенной энергией,

$$\langle b | U(t, 0) | a \rangle = \delta_{ab} e^{-iE_a t / \hbar},$$

поэтому

$$\langle +x | U(t, 0) | +x \rangle = e^{i\omega t},$$

$$\langle -x | U(t, 0) | -x \rangle = e^{-i\omega t},$$

$$\langle +x | U(t, 0) | -x \rangle = \langle -x | U(t, 0) | +x \rangle = 0.$$

Тогда компоненты  $\langle jz | \psi(t) \rangle$  вектора состояния в произвольный момент времени можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle jz | \psi(t) \rangle &= \langle jz | U(t, 0) | \psi(0) \rangle = \\ &= \sum_k \{ \langle jz | +x \rangle e^{i\omega t} \langle +x | kz \rangle \langle kz | \psi(0) \rangle + \\ &\quad + \langle jz | -x \rangle e^{-i\omega t} \langle -x | kz \rangle \langle kz | \psi(0) \rangle \}. \end{aligned}$$

Если подставить сюда функции преобразования  $\langle jz | lx \rangle$ ,  $\langle lx | jz \rangle$  и амплитуды в начальный момент времени  $\langle +z | \psi(0) \rangle = 1$ ,  $\langle -z | \psi(0) \rangle = 0$ , то получим уже известный результат для  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$ . Из найденного решения видно, что в моменты времени  $T_n$

определяемые соотношением

$$\mu B_0 T_n / \hbar = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

спин частицы направлен вниз.

Чтобы все частицы прошли через второй фильтр, необходимо, чтобы одно из значений  $T_n$  совпало со временем пролета  $T$ . Минимальное значение поля  $B_0$ , при котором это условие выполняется, определяется соотношением

$$B_0 = \frac{\pi \hbar}{2 \mu T}. \quad (1)$$

Вероятность пройти второй фильтр равна  $W = \sin^2 \omega T'$ . В частности, если  $T' = T/2$ , а поле  $B_0$  удовлетворяет соотношению (1), то  $W = 1/2$ .

**6.2.** Эту задачу, как и предыдущую, можно решать двумя способами.

1) ввести гамильтонову матрицу и решить систему уравнений для амплитуд  $C_i(t)$ ;

2) учесть, что известны состояния с определенной энергией (в данном случае это состояния с определенной проекцией спина на направление магнитного поля) и ввести матрицу  $U(t, 0)$ .

В первом способе состояния с определенной энергией знать необязательно, достаточно иметь лишь гамильтонову матрицу. Поэтому он является более общим. Его использование полезно еще и потому, что гамильтонова матрица (гамильтониан) — одно из центральных понятий в квантовой механике, с которого начинается решение почти каждой сложной квантовой задачи.

Обозначим состояния частицы с направлением спина вдоль магнитного поля и против него соответственно через  $|+B\rangle$  и  $|-B\rangle$  и в этом базисе запишем энергетическую матрицу:

$$\langle +B | H | +B \rangle = -\langle -B | H | -B \rangle = -\mu B,$$

$$\langle +B | H | -B \rangle = \langle -B | H | +B \rangle = 0.$$

Преобразуем эту матрицу к базису  $|+z\rangle, |-z\rangle$ . Необходимые нам величины находим из табл. 4.2 «Лекций» (вып. 8, стр. 105):

$$\langle +B | +z \rangle = \langle -B | -z \rangle = \langle +z | +B \rangle = \langle -z | -B \rangle = \cos \left( \frac{\pi}{8} \right),$$

$$\langle +B | -z \rangle = -\langle -B | +z \rangle = -\langle +z | -B \rangle = \langle -z | +B \rangle = \sin \left( \frac{\pi}{8} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle +z | H | +z \rangle &= \langle +z | H | -z \rangle = \langle -z | H | +z \rangle = \\ &= -\langle -z | H | -z \rangle = -\mu B / \sqrt{2}. \end{aligned}$$

В начальный момент времени амплитуда вероятности того, что спин направлен вдоль оси  $+z$ , равна  $C_1(0) = 1$ , а того, что он имеет противоположное оси  $z$  направление,  $C_2(0) = 0$ . Изменение этих амплитуд во времени определяется системой уравнений

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = -\frac{\mu B}{\sqrt{2}} (C_1 + C_2),$$

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = -\frac{\mu B}{\sqrt{2}} (C_1 - C_2).$$



Решение этой системы уравнений с учетом начальных условий записывается в виде

$$C_1(t) = \cos \omega t + \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \omega t,$$

$$C_2(t) = \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \omega t,$$

где  $\omega = \mu B/\hbar$ .

Найдем теперь амплитуду вероятности того, что частица находится в состоянии с  $J_x = \hbar/2$ :

$$C_{+x}(t) = \langle +x | +z \rangle C_1(t) + \langle +x | -z \rangle C_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Искомая вероятность обнаружить частицу в состоянии с  $J_x = \hbar/2$  тогда равна

$$w_{+x}(t) = |C_{+x}(t)|^2 = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \omega t).$$

Аналогично для состояния с  $J_y = \hbar/2$  имеем

$$C_{+y}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \omega t + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sin \omega t \right),$$

$$w_{+y}(t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\omega t \right).$$

- 6.3. а) Гамильтонова матрица системы совпадает с полученной при решении задачи 6.1 (в базисе  $|+z\rangle$ ,  $|-z\rangle$ ), если только заменить  $\mu B_0$  на  $A$ . Начальные условия также совпадают, поэтому можно сразу записать выражения для амплитуд:

$$C_+(t) = \cos \omega t,$$

$$C_-(t) = i \sin \omega t,$$

где  $\omega = A/\hbar$ . Вероятность обнаружить частицу в момент времени  $T$  в состоянии  $+z$  равна  $\cos^2 \omega t$ .

- б) В стационарном состоянии вероятность найти частицу в каждом из базисных состояний не должна изменяться со временем, поэтому система уравнений

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = -AC_2,$$

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = -AC_1$$

должна иметь решение в виде

$$C_1(t) = e^{-iEt/\hbar} a,$$

$$C_2(t) = e^{-iEt/\hbar} b.$$

Для не зависящих от времени величин  $a$  и  $b$  получаем

$$Ea = -Ab$$

$$Eb = -Aa.$$

Эта система имеет два нетривиальных решения:

$$1) a_1 = b_1 = 1/\sqrt{2} \text{ при } E_1 = -A,$$

$$2) a_2 = -b_2 = 1/\sqrt{2} \text{ при } E_2 = +A.$$

Значение  $1/\sqrt{2}$  выбирается из условия нормировки

$$|a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Таким образом, стационарным состояниям отвечают следующие комбинации найденных в п. (а) амплитуд:

$$C_1^{(1)}(t) = C_2^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [C_+(t) + C_-(t)] = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t},$$

$$C_1^{(2)}(t) = -C_2^{(2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [C_+(t) - C_-(t)] = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t},$$

причем энергии соответствующих состояний равны

$$E_1 = -A, \quad E_2 = +A.$$

- в) Рассмотрим амплитуды  $C_{+\xi}(t)$  и  $C_{-\xi}(t)$  для направления спина по и против некоторой оси  $\xi$ , расположенной в плоскости  $yz$  и образующей угол  $\varphi$  с осью  $z$ . Имеем

$$C_{+\xi}(t) = \langle +\xi | +z \rangle C_+(t) + \langle +\xi | -z \rangle C_-(t) = \cos(\omega t + \varphi/2)$$

$$C_{-\xi}(t) = i \sin(\omega t + \varphi/2).$$

Спин будет направлен вдоль оси  $\xi$ , если

$$\varphi = -2\omega t + 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Оси, отвечающие разным значениям  $n$ , физически неразличимы, так что можно принять  $\varphi = -2\omega t$ .

Таким образом, во все моменты времени с вероятностью единица спин будет направлен вдоль оси, вращающейся в плоскости  $yz$  с угловой скоростью  $2\omega$  в направлении от оси  $y$  к  $z$ .

- г) Частицу со спином  $1/2$  нужно поместить в магнитное поле, параллельное оси  $x$ . Из решения задачи 6.1 ясно, что такая система обладает требуемыми свойствами.

## К главе 7. Аммиачный мазер

- 7.1. В гл. 7 «Лекций» (вып. 8) было показано, что вероятность *вынужденного* перехода из состояния  $|I\rangle$  в состояние  $|II\rangle$

$$P(I \rightarrow II) = 4\pi^2 \frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 c} I(\omega_0) T$$

не зависит от того, сопровождается ли этот переход испусканием или поглощением света. Отсюда следует, что  $P(I \rightarrow II) = P(II \rightarrow I)$ . Используя определение коэффициентов Эйнштейна, получаем

$$B_{I, II} = \frac{P(I \rightarrow II)}{I(\omega_0) T} = \frac{\pi\mu^2}{\epsilon_0 \hbar^2 c},$$

$$B_{I, II} = B_{II, I}.$$

Попробуем теперь найти с помощью квантовой механики коэффициенты Эйнштейна  $A_{II, I}$ . Для этого будем рассматривать систему

«молекула в состоянии I и единичный фотон» и «молекула в состоянии II» как два состояния одной и той же системы. Тогда, как следует из гл. 6 «Лекций» (вып. 8), амплитуды перехода в единицу времени из начального состояния в конечное и обратно связаны между собой следующим образом:

$$\langle \text{II} | \text{I, фотон} \rangle = \langle \text{I, фотон} | \text{II} \rangle^* = M.$$

Фактически такое соотношение для испускания и поглощения фотонов уже использовалось в § 4 гл. 2 «Лекций» (вып. 8, стр. 41). Пусть в объеме  $V$  имеется молекула в состоянии I и единичный фотон. Тогда вероятность перехода в единицу времени из состояния I в II равна  $|M|^2$ . С другой стороны, вероятность перехода в данном случае совпадает с «числом» переходов в единицу времени, которое, как показано в гл. 42 «Лекций» (вып. 4), равно  $B_{\text{I, II}}$ . Интенсивность  $I$  одного фотона, очевидно, равна  $\hbar\omega c/V$ , так что

$$|M|^2 = B_{\text{I, II}} \hbar\omega \frac{c}{V}.$$

Вероятность обратного перехода (из II в I с испусканием фотона) в единицу времени, приходящаяся на интервал частот  $\Delta\omega$ , получается из  $|M|^2$  умножением на число возможных состояний фотона  $V\omega^2\Delta\omega/\pi^2c^2$  [см. формулу (2.42) «Лекций», вып. 8, стр. 49]. Но по определению коэффициента Эйнштейна  $A_{\text{II, I}}$  эта вероятность равна  $A_{\text{II, I}}\Delta\omega$ . Следовательно,

$$|M|^2 \frac{V\omega^2\Delta\omega}{\pi^2c^2} = A_{\text{II, I}}\Delta\omega.$$

Сравнивая последние две формулы, получаем соотношение между коэффициентами Эйнштейна:

$$A_{\text{II, I}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^2} B_{\text{I, II}}.$$

которое было установлено в гл. 42 «Лекций» (вып. 4) косвенным путем.

Интенсивность спонтанного излучения на интервале частот  $\Delta\omega$ , очевидно, равна интенсивности для одного фотона, умноженной на число переходов в единицу времени:

$$\Delta I_{\text{сп}} = \hbar\omega \frac{c}{V} \cdot A_{\text{II, I}} \Delta\omega = \frac{\mu^2\omega^4 \Delta\omega}{\pi\epsilon_0 c^2 V}.$$

7.2. Запишем систему уравнений для амплитуд вероятности иметь спин «вверх» и «вниз»:

$$i\hbar dC_1/dt = H_{11}C_1 + H_{12}C_2,$$

$$i\hbar dC_2/dt = H_{21}C_1 + H_{22}C_2.$$

Элементы энергетической матрицы можно определить, переходя в систему координат, в которой ось  $z'$  направлена вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}$ :

$$H_{11} = \langle +z | +z' \rangle (-\mu B) \langle +z' | +z \rangle + \langle +z | -z' \rangle (+\mu B) \langle -z' | +z \rangle,$$

$$H_{22} = \langle -z | +z' \rangle (-\mu B) \langle +z' | -z \rangle + \langle -z | -z' \rangle \mu B \langle -z' | -z \rangle,$$

$$H_{12} = \langle +z | +z' \rangle (-\mu B) \langle +z' | -z \rangle + \langle +z | -z' \rangle \mu B \langle -z' | -z \rangle,$$

$$H_{21} = \langle -z | +z' \rangle (-\mu B) \langle +z' | +z \rangle + \langle -z | -z' \rangle \mu B \langle -z' | +z \rangle =$$

$$= H_{12}.$$

Здесь использован уже известный результат:

$$\begin{aligned} \langle +z' | H | +z' \rangle &= -\langle -z' | H | -z' \rangle = -\mu B, \\ \langle +z' | H | -z' \rangle &= \langle -z' | H | +z' \rangle = 0. \end{aligned}$$

Остается найти амплитуды  $\langle jz' | iz \rangle$ . Для этого заметим, что ось  $z'$  (так же, как и поле  $B$ ) определяется полярными углами  $\theta$  и  $\varphi = -\omega t$ . Переход от системы координат  $x, y, z$  к системе  $x', y', z'$  можно осуществить поворотом, заданным углами Эйлера  $\beta = \varphi - \pi/2$ ,  $\alpha = -\theta$ ,  $\gamma = 0$ . С помощью табл. 4.1 «Лекций» (вып. 8, стр. 80) находим

$$\begin{aligned} \langle +z' | +z \rangle &= \cos \frac{\theta}{2} \exp \left[ \frac{i}{2} \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ \langle -z' | +z \rangle &= -i \sin \frac{\theta}{2} \exp \left[ \frac{i}{2} \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ \langle +z' | -z \rangle &= -i \sin \frac{\theta}{2} \exp \left[ -\frac{i}{2} \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ \langle -z' | -z \rangle &= \cos \frac{\theta}{2} \exp \left[ -\frac{i}{2} \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Используя эти выражения и соотношение

$$\langle jz' | iz \rangle = \langle iz | jz' \rangle^*,$$

получаем

$$\begin{aligned} H_{11} &= -H_{22} = -\mu B \cos \theta, \\ H_{12} &= H_{21}^* = -\mu B \sin \theta e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= \frac{i\omega_0}{2} (\cos \theta \cdot C_1 + \sin \theta e^{i\omega t} C_2), \\ \frac{dC_2}{dt} &= \frac{i\omega_0}{2} (\sin \theta \cdot e^{-i\omega t} C_1 - \cos \theta C_2) \end{aligned}$$

(где  $\omega_0 = 2\mu B/\hbar$ ) с начальными условиями

$$C_1(0) = 1, \quad C_2(0) = 0.$$

В этих уравнениях при малых  $\theta$  можно вначале пренебречь членами  $\sim \sin \theta \approx \theta \ll 1$ , а затем учесть их, действуя точно так же, как при решении аналогичной задачи в гл. 7 «Лекций» (вып. 8).

Однако записанные выше уравнения можно решить точно при произвольном  $\theta$ . Для этого удобно сделать замену  $C_1(t) = e^{i\omega t/2} b_1(t)$ ,  $C_2(t) = e^{-i\omega t/2} b_2(t)$ , так чтобы коэффициенты в уравнениях не зависели от времени:

$$\begin{aligned} \frac{db_1}{dt} &= \frac{i}{2} [(\omega_0 \cos \theta - \omega) b_1 + \omega_0 \sin \theta \cdot b_2], \\ \frac{db_2}{dt} &= \frac{i}{2} [\omega_0 \sin \theta \cdot b_1 - (\omega_0 \cos \theta - \omega) b_2]. \end{aligned}$$

При этом начальные условия записываются следующим образом:

$$b_1(0) = 1, \quad b_2(0) = 0.$$

Решение этой системы ищем в виде

$$b_1(t) = a_1 e^{iat}, \quad b_2(t) = a_2 e^{iat}.$$

В результате получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\omega_0 \cos \theta - \omega - 2\alpha) a_1 + (\omega_0 \sin \theta) a_2 &= 0, \\ \omega_0 \sin \theta \cdot a_1 - (\omega_0 \cos \theta - \omega + 2\alpha) a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет нетривиальные решения лишь при

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_0 \cos \theta - \omega)^2 + (\omega_0 \sin \theta)^2}.$$

Теперь можно записать общее решение исходных уравнений:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= e^{i\omega t/2} [a_1^{(1)} e^{i\gamma t} + a_1^{(2)} e^{-i\gamma t}], \\ C_2(t) &= e^{-i\omega t/2} [a_2^{(1)} e^{i\gamma t} + a_2^{(2)} e^{-i\gamma t}], \end{aligned}$$

где

$$\gamma = \alpha_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_0 \cos \theta}.$$

Коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  связаны условием

$$a_2^{(i)} = \frac{\omega_0 \sin \theta}{(\omega_0 \cos \theta - \omega) \pm 2\gamma} a_1^{(i)},$$

где знак «плюс» относится к  $i = 1$ , а знак «минус» к  $i = 2$ . Таким образом, учитывая начальные условия, получаем

$$\begin{aligned} C_1(t) &= e^{i\omega t/2} \left( \cos \gamma t + i \frac{\omega_0 \cos \theta - \omega}{2\gamma} \sin \gamma t \right), \\ C_2(t) &= e^{-i\omega t/2} i \frac{\omega_0 \sin \theta}{2\gamma} \sin \gamma t, \end{aligned}$$

откуда находим вероятности для направления спина «вверх» и «вниз» в произвольный момент времени:

$$\begin{aligned} P_+(t) &= \cos^2 \gamma t + \left( \frac{\omega_0 \cos \theta - \omega}{2\gamma} \right)^2 \sin^2 \gamma t, \\ P_-(t) &= \left( \frac{\omega_0 \sin \theta}{2\gamma} \right)^2 \sin^2 \gamma t. \end{aligned}$$

Очевидно, резонанс наступает при частоте

$$\omega = \omega_0 \cos \theta = \frac{2\mu B}{\hbar} \cos \theta.$$

В этом случае  $\gamma = (1/2) \omega_0 \sin \theta$ , и мы имеем

$$P_+(t) = \cos^2 \gamma t, \quad P_-(t) = \sin^2 \gamma t.$$

Отсюда следует, что спин периодически переворачивается то вверх, то вниз.

## К главе 8. Другие системы с двумя состояниями

8.1. Направим ось  $z$  противоположно магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ , а ось  $x$  вдоль поля  $\mathbf{B}_n$ . Тогда мы имеем  $B_x = 2B_n \cos \omega t$ ,  $B_z = -B_0$ ,  $B_y = 0$ . При этом уравнения для спиновых состояний [см. «Лекции», вып. 8, стр. 199, уравнения (8.23)] запишутся в виде

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = \mu B_0 C_1 - \mu B_x C_2, \quad i\hbar \frac{dC_2}{dt} = -\mu B_0 C_2 - \mu B_x C_1.$$

Начальные условия:  $C_1(0) = 1$ ,  $C_2(0) = 0$ . Эти уравнения совпадают с уравнениями (7.38) и (7.39) «Лекций» (вып. 8, гл. 7, стр. 164) для молекулы аммиака. Будем решать их аналогично. Полагая

$$C_1(t) = \gamma_1(t) e^{-i\omega_0 t/2}, \quad C_2(t) = \gamma_2(t) e^{i\omega_0 t/2} \\ (\omega_0 = 2\mu B_0/\hbar),$$

для  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  получаем следующие уравнения:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = i\omega_n \cos(\omega t) e^{i\omega_0 t} \gamma_2, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} = i\omega_n \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} \gamma_1,$$

где  $\omega_n = 2\mu B_n/\hbar$ .

Частоту  $\omega$  считаем близкой к  $\omega_0$  и по тем же соображениям, что и в гл. 7 «Лекций» (вып. 8), оставляем в уравнениях только члены с  $\exp[i(\omega - \omega_0)t]$ . Наша система приобретает вид

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = i \frac{\omega_n}{2} e^{i(\omega_0 - \omega)t} \gamma_2, \quad (1)$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = i \frac{\omega_n}{2} e^{i(\omega - \omega_0)t} \gamma_1. \quad (2)$$

Дифференцируя уравнение (2) по  $t$  и выражая  $d\gamma_1/dt$  и  $\gamma_1$  соответственно из уравнений (1) и (2), получаем

$$\frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + i(\omega_0 - \omega) \frac{d\gamma_2}{dt} + \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^2 \gamma_2 = 0.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Такие уравнения мы научились решать, изучая колебания. Ищем решение в виде  $\gamma_2 = a e^{i\alpha t}$ . Тогда для определения  $\alpha$  получаем квадратное уравнение

$$\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)\alpha - (\omega_n/2)^2 = 0,$$

из которого находим

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \omega - \omega_0 \pm \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_n^2} \right].$$

Следовательно, общий вид решения

$$\gamma_2(t) = e^{i(\omega - \omega_0)t/2} (a e^{irt} + b e^{-irt}),$$

где

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_n^2}.$$

Для определения постоянных  $a$  и  $b$  нужно иметь два начальных условия. Одно из них  $\gamma_2(0) = 0$  следует из условия  $C_2(0) = 0$  и приводит к соотношению  $b = -a$ . Тогда

$$\gamma_2(t) = 2iae^{i(\omega - \omega_0)t/2} \sin rt.$$

Из условия  $C_1(0) = 1$  следует  $\gamma_1(0) = 1$ . Учитывая уравнение (2), при  $t = 0$  имеем  $(d\gamma_2/dt)(t = 0) = i\omega_n/2$ . Подставляя сюда выражение для  $\gamma_2$ , находим

$$a = \frac{\omega_n}{4r}.$$

Окончательно вероятность того, что в момент времени  $T$  спин частицы будет направлен против оси  $+z$ , т. е. вдоль вектора  $\mathbf{B}_0$ , равна

$$P_2 = |\gamma_2|^2 = \left(\frac{\omega_n}{2r}\right)^2 \sin^2 rT.$$

В частности, при резонансе ( $\omega = \omega_0$ )

$$P_2 = \sin^2 \frac{\omega_n T}{2},$$

а вдали от резонанса [ $(\omega - \omega_0)^2 \gg \omega_n^2$ ]

$$P_2 = \left(\frac{\omega_n T}{2}\right)^2 \frac{\sin^2 [(\omega - \omega_0) T/2]}{[(\omega - \omega_0) T/2]^2}.$$

Обратим внимание на сходство этих выражений с формулами (7.50) и (7.52) «Лекций» (вып. 8, стр. 157 и 170).

## К главе 9. Еще системы с двумя состояниями

9.1. Пусть в некоторой системе координат гамильтониан записан в виде выражения (9.4) «Лекций» (вып. 8, стр. 206), т. е.

$$H_{ij} = -\mu [\sigma_{ij}^x B_x + \sigma_{ij}^y B_y + \sigma_{ij}^z B_z],$$

причем величины  $\sigma_{ij}^x$ ,  $\sigma_{ij}^y$ ,  $\sigma_{ij}^z$  в соответствии с § 1 гл. 9 «Лекций» (вып. 8) образуют матрицы Паули. Иначе говоря, это означает, что в качестве базисных состояний выбраны состояния со спином по и против оси  $z$ . Перейдем теперь к другой системе координат, оставив неизменными базисные состояния  $|i\rangle$ ,  $|j\rangle$ . При этом матричные элементы гамильтониана не изменятся (ср. § 6 гл. 8 «Лекций», стр. 196, где меняются как раз базисные состояния), и в новой системе координат

$$H_{ij} = -\mu [\sigma_{ij}^{x'} B_{x'} + \sigma_{ij}^{y'} B_{y'} + \sigma_{ij}^{z'} B_{z'}].$$

Выражая  $B_{\alpha'}$  ( $\alpha' = x', y', z'$ ) через  $B_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ):

$$B_{\alpha'} = \sum_{\alpha} C_{\alpha'\alpha} B_{\alpha}$$

находим связь между  $\sigma_{ij}^{\alpha}$  и  $\sigma_{ij}^{\alpha'}$ , т. е. закон преобразования элементов матриц Паули при поворотах системы координат:

$$\sigma_{ij}^{\alpha} = \sum_{\alpha'} \sigma_{ij}^{\alpha'} C_{\alpha'\alpha}.$$

Учитывая, что величины  $C_{\alpha'\alpha}$  образуют ортогональную матрицу, т. е.

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha'\alpha} C_{\beta'\alpha} = \delta_{\alpha'\beta'},$$

получаем

$$\sigma_{ij}^{\alpha'} = \sum_{\alpha} C_{\alpha'\alpha} \sigma_{ij}^{\alpha}.$$

Но это как раз закон преобразования вектора. Переходя от матричных элементов к матрицам Паули, т. е. опуская индексы  $i$  и  $j$ , приходим к выводу, что матрицы  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  преобразуются друг через друга при поворотах системы координат как компоненты вектора.

Соотношения

$$\sigma \times \sigma = 2i\sigma, \quad \sigma \cdot \sigma = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

легко проверить непосредственным перемножением матриц Паули. Например,

$$\begin{aligned} (\sigma \times \sigma)_x &= \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \\ & - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 2i\sigma_x. \end{aligned}$$

Аналогично получим соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z &= 2i\sigma_y, \\ \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x &= 2i\sigma_z, \\ \sigma_x \sigma_x + \sigma_y \sigma_y + \sigma_z \sigma_z &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем также произведение трех матриц Паули

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 9.2. а) Для нахождения уровней энергии электрона, присоединенного к молекуле  $\text{CO}_2$ , воспользуемся уравнением (9.62) «Лекций» (вып. 8, стр. 239):  $\text{Det}(H_{ij} - ijE) = 0$ , и будем считать, что в качестве состояний  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ ,  $|3\rangle$  выбраны состояния, описывающие электрон, принадлежащий соответственно первому атому кислорода, атому углерода и второму атому кислорода. Энергии электрона в этих состояниях  $H_{11} = H_{33} = E_0$ ,  $H_{22} = E_C$ . Поскольку прямые переходы электрона от одного атома кислорода к другому не учитываются, то  $H_{13} = H_{31} = 0$ . Из соображений симметрии матричные элементы  $H_{12}$  и  $H_{32}$ , учитывающие переходы электрона от атома углерода к атомам кислорода, равны друг другу. Обозначим их через  $v$ . Далее,  $H_{21} = H_{12}^* = v^*$ ,  $H_{23} = H_{32}^* = v^*$ . Таким образом, чтобы найти уровни энергии рассматриваемой системы, мы должны решить уравнение

$$\begin{vmatrix} E_0 - E & v & 0 \\ v^* & E_C - E & v^* \\ 0 & v & E_0 - E \end{vmatrix} = 0.$$



Расписывая этот детерминант, нетрудно найти корни уравнения:

$$E_{1,2} = \frac{E_0 + E_C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E_0 - E_C}{2}\right)^2 + 2|v|^2}, \quad E_3 = E_0.$$

- б) Коэффициенты  $a_i$  разложения стационарного состояния по базисным состояниям

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar} \sum_i a_i |i\rangle$$

определяются системой уравнений

$$\sum_j (H_{ij} - E\delta_{ij}) a_j = 0.$$

При  $E_0 = E_C = E_0$  эта система запишется так:

$$\begin{aligned} (E_0 - E) a_1 + va_2 + 0 \cdot a_3 &= 0, \\ v^* a_1 + (E_0 - E) a_2 + v^* a_3 &= 0, \\ 0 \cdot a_1 + va_2 + (E_0 - E) a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Если подставить значения энергии  $E_{1,2} = E_0 \pm |v|\sqrt{2}$ ,  $E_3 = E_0$  и решить систему относительно  $a_1, a_2, a_3$  (с учетом условия нормировки  $\sum_{i=1}^3 |a_i|^2 = 1$ ), то получим

- 1) для  $E_1 = E_0 + |v|\sqrt{2}$

$$a_1 = a_3 = 1/2, \quad a_2 = + (1/\sqrt{2}) e^{-i\alpha}$$

(здесь  $\alpha$  — фаза матричного элемента:  $v = |v| e^{i\alpha}$ );

- 2) для  $E_2 = E_0 - |v|\sqrt{2}$

$$a_1 = a_3 = 1/2, \quad a_2 = - (1/\sqrt{2}) e^{-i\alpha};$$

- 3) для  $E_3 = E_0$

$$a_1 = -a_3 = 1/\sqrt{2}, \quad a_2 = 0.$$

Эти решения показывают, что в первом и втором состояниях электрон с вероятностью  $1/2$  «принадлежит» атому углерода и с вероятностью по  $1/4$  — каждому из атомов кислорода, тогда как в третьем состоянии он с равными вероятностями (по  $1/2$ ) находится возле атомов кислорода, а вероятность «принадлежать» атому углерода равна нулю.

Следует иметь в виду, что полная система уровней молекулярного иона ( $\text{CO}_2$ ) — гораздо сложнее полученной здесь, поскольку при решении задачи не учитывались внутренние и вращательные степени свободы молекулы  $\text{CO}_2$ .

- 9.3.** Поскольку молекула  $\text{CH}_4$  образует правильный тетраэдр, любой атом водорода расположен одинаковым образом по отношению ко всем остальным атомам водорода. Поэтому амплитуды перехода «дырки» от каждого атома водорода к любому другому одни и те же, так что все недиагональные матричные элементы гамильтониана совпадают:

$$H_{12} = H_{21} = H_{13} = H_{31} = \dots = v,$$

причем  $v = v^*$ . Аналогично из соображений симметрии

$$H_{11} = H_{22} = H_{33} = H_{44} = E_0.$$

Задача, таким образом, сводится к нахождению корней уравнения

$$\begin{vmatrix} E_0 - E & v & v & v \\ v & E_0 - E & v & v \\ v & v & E_0 - E & v \\ v & v & v & E_0 - E \end{vmatrix} = 0.$$

Проще всего решить это уравнение, воспользовавшись общими свойствами определителей. Значение определителя не меняется, если любую строку (столбец) определителя, умноженную на произвольное постоянное число, прибавить к любой другой строке (столбцу). Прибавим к первому столбцу все остальные, а затем вычтем первую строку из всех остальных. Тогда получим

$$\begin{vmatrix} E_0 + 3v - E & v & v & v \\ 0 & E_0 - v - E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_0 - v - E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_0 - v - E \end{vmatrix} = \\ = (E_0 + 3v - E)(E_0 - v - E)^3 = 0$$

Таким образом, три уровня имеют одну и ту же энергию

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_0 - v,$$

а четвертый характеризуется энергией

$$E_4 = E_0 + 3v$$

и отделен интервалом  $4|v|$  от первых трех.

**9.4.** Матрица  $H_{ij}$  в рассматриваемом случае имеет вид

$$(H_{ij}) = \begin{pmatrix} E_0 & -A & 0 & 0 & 0 & -A \\ -A & E_0 & -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & E_0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & E_0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A & E_0 & -A \\ -A & 0 & 0 & 0 & -A & E_0 \end{pmatrix}.$$

Она записана с учетом того, что все диагональные матричные элементы в силу симметрии системы равны между собой:

$$H_{11} = H_{22} = \dots = H_{66} = E_0,$$

а среди недиагональных матричных элементов отличны от нуля лишь те, которые соответствуют переходам между соседними атомами, причем все ненулевые матричные элементы совпадают (из соображений симметрии) и равны  $-A$ .

Система уравнений

$$\begin{aligned} (E_0 - E) a_1 - A a_2 - A a_6 &= 0, \\ -A a_1 + (E_0 - E) a_2 - A a_3 &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -A a_1 - A a_5 + (E_0 - E) a_6 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

составленная с помощью этой матрицы, очевидно, удовлетворяется при одинаковых коэффициентах  $a_i [C_i = a_i \exp(-iEt/\hbar)]$ , если  $E = E_0 - 2A$ . Прежде чем находить значения энергий остальных пяти состояний, определим величину  $\delta$ . Как видно из условия, при переходе к соседнему атому (по часовой стрелке) амплитуда пребывания электрона в соответствующем атоме умножается на  $e^{i\delta}$ . Используя свойства симметрии системы, можно в дополнение к соотношениям, приведенным в условии, написать  $C_1 = C_6 e^{i\delta}$ , или  $a_1 = a_6 e^{i\delta}$ . С другой стороны, из условия задачи имеем  $a_6 = a_1 e^{i5\delta}$ . Следовательно,  $e^{6i\delta} = 1$  и допустимые значения

$$\delta_k = \frac{2\pi}{6} (k-1) \quad (k = 1, 2, \dots, 6).$$

Из условия нормировки  $\sum_i |a_i|^2 = 1$  можно определить величину  $a_1 = 1/\sqrt{6}$ . Значения энергии, соответствующие найденным коэффициентам  $a_j^{(k)}$ , можно получить, подставляя  $a_j^{(k)} = (1/\sqrt{6}) \exp[i\delta_k(j-1)]$  в систему (1). Из первого уравнения этой системы найдем

$$(E_0 - E) \frac{1}{\sqrt{6}} - A \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\delta_k} - A \frac{1}{\sqrt{6}} e^{5i\delta_k} = 0,$$

откуда

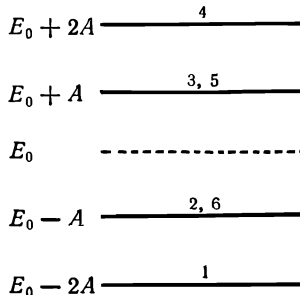
$$E_k = E_0 - 2A \cos \left[ \frac{\pi}{3} (k-1) \right] \\ (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

или  $E_1 = E_0 - 2A$ ,  $E_2 = E_6 = E_0 - A$ ,  $E_3 = E_5 = E_0 + A$ ,  $E_4 = E_0 + 2A$ . Все остальные уравнения системы (1) при этом удовлетворяются тождественно, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.

Коэффициенты  $C_j$  получаются из  $a_j$  умножением на временной множитель:

$$C_j^{(k)} = a_j^{(k)} e^{-iE_k t/\hbar}.$$

Диаграмма уровней рассматриваемой системы показана на рисунке, где цифрами обозначены номера решений (т. е. значения  $k$ ):



9.5. а) Уровни энергии определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} E_0 - E & -A & -A \\ -A & E_0 - E & -A \\ -A & -A & E_0 - E \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$E_{1,2} = E_0 + A, \quad E_3 = E_0 - 2A,$$

так что два уровня рассматриваемого молекулярного иона имеют одинаковые энергии, а третий отделен от них интервалом

$$|E_{1,2} - E_3| = 3|A|.$$

- б) Пусть энергия двух базисных состояний изменилась на величину  $\Delta$ , а третьего — на величину  $\Delta + \epsilon A$ . Тогда энергетические уровни системы определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} W - E & -A & -A \\ -A & W - E & -A \\ -A & -A & W + \epsilon A - E \end{vmatrix} = 0,$$

где  $W = E_0 + \Delta$ .

Замечая, что этот определитель можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} W - E & -A & -A \\ -A & W - E & -A \\ -A & -A & W - E \end{vmatrix} + \epsilon A \begin{vmatrix} W - E & -A \\ -A & W - E \end{vmatrix} = \\ = (W - 2A - E)(W + A - E)^2 + \epsilon A [(W - E)^2 - A^2] = \\ = (W + A - E) [(W - 2A - E)(W + A - E) + \epsilon A (W - A - E)],$$

находим  $E_1 = W + A = E_0 + \Delta + A$ .

Остальные два значения энергии найдем, приравняв нулю квадратную скобку в написанном выше выражении. В результате получим квадратное уравнение. Решая это уравнение и пренебрегая в решении членами второго порядка по  $\epsilon$ , находим

$$E_2 = E_0 + \Delta + A + \frac{1}{3} \epsilon A, \quad E_3 = E_0 + \Delta - 2A + \frac{2}{3} \epsilon A.$$

Таким образом, если до наложения электрического поля два уровня иона имели одинаковые энергии, то теперь они расщепились на величину  $(1/3)|\epsilon A| = |A|/300$ , а интервал между первым и третьим уровнями изменился незначительно и стал равным  $|3A - (2/3)\epsilon A| \approx 2,993|A|$ .

## К главе 10. Сверхтонкое расщепление в водороде

- 10.1. Энергии уровней сверхтонкой структуры атома водорода в основном состоянии при наличии магнитного поля даются выражениями (см. гл. 10 «Лекций», вып. 8):

$$E_{\text{I}} = A + \mu B, \quad \mu = -(\mu_e + \mu_p),$$

$$E_{\text{II}} = A - \mu B,$$

$$E_{\text{III}} = A [-1 + 2\sqrt{1 + (\mu' B/2A)^2}], \quad \mu' = -(\mu_e - \mu_p),$$

$$E_{\text{IV}} = -A [1 + 2\sqrt{1 + (\mu' B/2A)^2}].$$

Если магнитное поле мало ( $\mu' B \ll 2A$ ), то первые три из этих значений энергии относятся к состояниям с полным спином  $j = 1$  и его проекцией соответственно  $m = +1, -1, 0$ , а четвертое значение энергии — к состоянию с полным спином  $j = 0$ . Пренебрегая квадратичными

по  $B$  членами, запишем частоты переходов из первых трех состояний в низшее, четвертое состояние:

$$f_1 = \frac{E_I - E_{IV}}{2\pi\hbar} = f_0 + \frac{\mu B}{2\pi\hbar}, \quad f_2 = f_0 - \frac{\mu B}{2\pi\hbar}, \quad f_3 = f_0 = \frac{4A}{2\pi\hbar},$$

где  $f_0$  — частота излучения при переходе между уровнями сверхтонкой структуры свободного атома водорода в основном состоянии ( $\sim 1420$  Мгц). Расщепление линии

$$\Delta f = \frac{\mu B}{2\hbar\pi}$$

оказывается равным в межзвездном пространстве  $\sim 14,0$  гц, в магнитном поле Земли  $\sim 0,70$  Мгц. (При  $B = 1$  гс имеем  $\mu B/2\pi\hbar = 1,397048013 \cdot 10^6$  гц.) Изменения длины волны соответственно равны  $\sim 2 \cdot 10^{-7}$  и  $1 \cdot 10^{-2}$  см.

При больших полях, когда выполнено условие  $\mu' B \gg A$ , уровни сверхтонкой структуры уже нельзя характеризовать значением полного спина, а энергии уровней можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_I &= A + \mu B, & E_{II} &= A - \mu B, \\ E_{III} &= -A + \mu' B, & E_{IV} &= -A - \mu' B. \end{aligned}$$

Тогда частоты переходов из состояний I, II, III в низшее состояние IV запишутся следующим образом:

$$f_1 = \frac{1}{2} f_0 + \frac{|\mu_e| B}{\pi\hbar}, \quad f_2 = \frac{1}{2} f_0 + \frac{\mu_p B}{\pi\hbar}, \quad f_3 = \frac{\mu' B}{\pi\hbar}.$$

При  $B = 10^5$  гс

$$\begin{aligned} f_1 &= 0,28064114 \cdot 10^{12} \text{ гц}, & f_2 &= 0,11359225 \cdot 10^{10} \text{ гц}, \\ f_3 &= 0,280356521 \cdot 10^{12} \text{ гц}. \end{aligned}$$

Соответствующие длины волн равны

$$\lambda_1 = 0,10689 \text{ см}, \quad \lambda_2 = 26,41062 \text{ см}, \quad \lambda_3 = 0,10701 \text{ см}.$$

К главе 11. Распространение в кристаллической решетке

11.1. Обозначим амплитуду пребывания электрона около  $n$ -го атома в состоянии  $i$  через  $C_n^i$ , а в состоянии  $j$  — через  $C_n^j$ . Они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_n^i}{dt} &= E_i C_n^i - B(C_{n-1}^j + C_{n+1}^j) - A(C_{n-1}^i + C_{n+1}^i), \\ i\hbar \frac{dC_n^j}{dt} &= E_j C_n^j - B(C_{n-1}^i + C_{n+1}^i) - A(C_{n-1}^j + C_{n+1}^j). \end{aligned} \quad (1)$$

Для стационарных состояний зависимость амплитуд от времени дается выражениями

$$C_n^i = a_n^i e^{-iEt/\hbar}, \quad C_n^j = a_n^j e^{-iEt/\hbar}.$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем систему уравнений для коэффициентов  $a_n$ :

$$\begin{aligned} (E_i - E) a_n^i - A(a_{n-1}^i + a_{n+1}^i) - B(a_{n-1}^j + a_{n+1}^j) &= 0, \\ (E_j - E) a_n^j - A(a_{n-1}^j + a_{n+1}^j) - B(a_{n-1}^i + a_{n+1}^i) &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы ищем в виде

$$a_n^i = \alpha_i e^{ikx_n}, \quad a_n^j = \alpha_j e^{ikx_n},$$

где  $x_n = bn$ . Тогда  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} (E_i - 2A \cos kb - E) \alpha_i - (2B \cos kb) \alpha_j &= 0, \\ - (2B \cos kb) \alpha_i + (E_j - 2A \cos kb - E) \alpha_j &= 0, \end{aligned}$$

условием разрешимости которой является обращение в нуль следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} E_i - 2A \cos kb - E & - 2B \cos kb \\ - 2B \cos kb & E_j - 2A \cos kb - E \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель и решая результирующее квадратное уравнение относительно  $E$ , получаем две области допустимых

значений энергии:

$$E_1 = \frac{1}{2} [E_i + E_j + \sqrt{(E_i - E_j)^2 + 16B^2 \cos^2 kb}] - 2A \cos kb,$$

$$E_2 = \frac{1}{2} [E_i + E_j - \sqrt{(E_i - E_j)^2 + 16B^2 \cos^2 kb}] - 2A \cos kb.$$

В предельном случае  $|E_i - E_j| \gg 4|B|$  получаем просто две независимые области (полосы), расположенные вокруг энергий  $E_i$  и  $E_j$ :

$$E_1 = E_i - 2A \cos kb,$$

$$E_2 = E_j - 2A \cos kb.$$

Этот результат совершенно аналогичен полученному в § 1 гл. 11 «Лекций» (вып. 9), когда учитывается лишь одно состояние электрона в атоме. Это и понятно: ведь условие  $|E_i - E_j| \gg 4|B|$  фактически означает, что полосы можно рассматривать независимо друг от друга.

В другом случае  $|E_i - E_j| \ll 4|B|$  получаем

$$E_1 = \frac{E_i + E_j}{2} - 2(A - B) \cos kb,$$

$$E_2 = \frac{E_i + E_j}{2} - 2(A + B) \cos kb.$$

Здесь обе полосы расположены вокруг общего «центра тяжести»  $(E_i + E_j)/2$ , причем одна полоса лежит внутри другой.

## 11.2. Записываем систему уравнений для амплитуд

$$i\hbar \frac{dC_n^a}{dt} = (E_0 + \Delta E) C_n^a - A (C_{n-1}^b + C_n^b),$$

$$i\hbar \frac{dC_n^b}{dt} = (E_0 - \Delta E) C_n^b - A (C_n^a + C_{n+1}^a)$$

и ищем решение в виде

$$C_n^a = \alpha \exp [i(kx_n^a - Et/\hbar)],$$

$$C_n^b = \beta \exp [i(kx_n^b - Et/\hbar)].$$

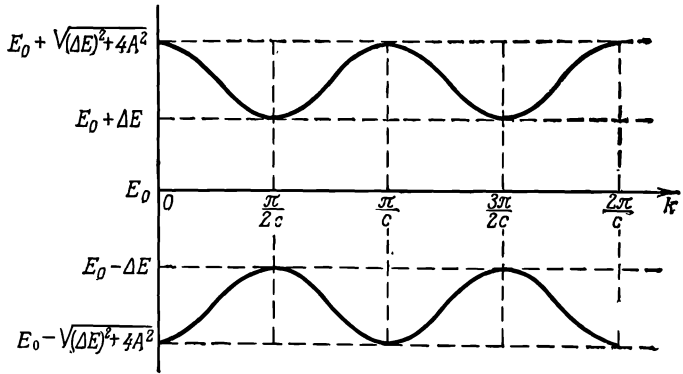
Координата  $n$ -го атома типа  $a$  равна  $x_n^a = 2nc$ , а для типа  $b$  она равна  $x_n^b = (2n + 1)c$ . При этом для величин  $\alpha$  и  $\beta$  получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (E_0 + \Delta E - E) \alpha - (2A \cos kc) \beta &= 0, \\ -(2A \cos kc) \alpha + (E_0 - \Delta E - E) \beta &= 0. \end{aligned}$$

Требование обращения в нуль определителя этой системы дает

$$E = E_0 \pm \sqrt{(\Delta E)^2 + (2A \cos kc)^2}.$$

Примерная зависимость энергии  $E$  от волнового числа  $k$  показана на рисунке.



Из рисунка, как и из формулы для  $E$ , видно, что если  $k$  изменяется от нуля до  $\pi/2c$ , то энергия принимает все свои допустимые значения: в верхней полосе от  $E_0 + \sqrt{(\Delta E)^2 + 4A^2}$  до  $E_0 + \Delta E$ , а в нижней от  $E_0 - \Delta E$  до  $E_0 - \sqrt{(\Delta E)^2 + 4A^2}$ .

41.3. Будем исходить из уравнений для не зависящих от времени амплитуд  $a_n$  [таких, что  $C_n(t) = a_n e^{-iEt/\hbar}$ ]. Имеем

$$\begin{aligned} E a_n &= E_0 a_n - A a_{n+1} - A a_{n-1} & (n \leq -2); \\ E a_{-1} &= E_0 a_{-1} - B a_0 - A a_{-2}; \\ E a_0 &= E_0 a_0 - B a_{+1} - B a_{-1}; \\ E a_{+1} &= E_0 a_{+1} - A a_2 - B a_0; \\ E a_n &= E_0 a_n - A a_{n-1} - A a_{n+1} & (n \geq 2). \end{aligned}$$

Решения ищем в виде

$$\begin{aligned} a_n &= e^{ikx_n} + \beta e^{-ikx_n} \quad \text{для } n < 0, \\ a_n &= \gamma e^{ikx_n} \quad \text{для } n > 0, \end{aligned}$$

причем  $x_n = bn$ .

Из уравнений для  $|n| \geq 2$  можно сразу же получить допустимые значения энергии

$$E = E_0 - 2A \cos kb.$$

Остались три уравнения:

$$\begin{aligned} (E_0 - E) (e^{-ikb} + \beta e^{ikb}) - B a_0 - A (e^{-2ikb} + \beta e^{2ikb}) &= 0, \\ (E_0 - E) a_0 - B (e^{-ikb} + \beta e^{ikb}) - B \gamma e^{ikb} &= 0, \\ (E_0 - E) \gamma e^{ikb} - B a_0 - A \gamma e^{2ikb} &= 0. \end{aligned}$$



Из первого и третьего уравнений с учетом соотношения  $E_0 - E = A(e^{ikb} + e^{-ikb})$  получим соответственно

$$\beta = \frac{B}{A} a_0 - 1$$

и

$$\gamma = \frac{B}{A} a_0 = \beta + 1.$$

Подставив теперь эти выражения во второе уравнение, найдем

$$a_0 = \frac{iAB \sin kb}{(B^2 - A^2) \cos kb + iB^2 \sin kb}.$$

Следовательно,

$$\gamma = \frac{iB^2 \sin kb}{(B^2 - A^2) \cos kb + iB^2 \sin kb},$$

$$\beta = \gamma - 1 = \frac{(A^2 - B^2) \cos kb}{(B^2 - A^2) \cos kb + iB^2 \sin kb}.$$

Как и должно быть, найденные величины, «амплитуда прохождения»  $\gamma$  и «амплитуда отражения»  $\beta$ , удовлетворяют условию  $|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ .

11.4. а) Из соотношения  $|\beta|^2 + |1 + \beta|^2 = 1$  следует

$$2\beta\beta^* + \beta + \beta^* = 0,$$

или

$$\beta(\beta^* + 1) + \beta^*(\beta + 1) = 0.$$

Поделив последнее соотношение на  $(\beta + 1)(\beta^* + 1)$ , получим

$$\frac{\beta}{\beta + 1} + \frac{\beta^*}{\beta^* + 1} = 2 \operatorname{Re} \frac{\beta}{\beta + 1} = 0.$$

б) Представим  $\beta$  в виде  $i|\beta|e^{i\eta}$  и воспользуемся соотношением  $|\beta|^2 + \operatorname{Re} \beta = 0$ . Следовательно,  $|\beta|^2 - |\beta| \sin \eta = 0$ , откуда  $|\beta| = \sin \eta$ . Таким образом,

$$\beta = ie^{i\eta} \sin \eta.$$

11.5. Если крайнему атому левого кристалла присписать номер ноль, то система уравнений для амплитуд  $a_n$  запишется в виде

$$(E_0 - E) a_n - A(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0 \quad (n \leq -1),$$

$$(E_0 - E) a_0 - Aa_{-1} - Ba_1 = 0,$$

$$(E'_0 - E) a_1 - Ba_0 - A'a_2 = 0,$$

$$(E'_0 - E) a_n - A'(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0 \quad (n \geq 2).$$

Решение для области I ищем в виде суммы падающей и отраженной волн:

$$a_n (n \leq 0) = e^{ikx_n} + \beta e^{-ikx_n}, \quad x_n = bn,$$

а для области II — в виде прошедшей волны

$$a_n (n \geq 1) = \gamma e^{ik'x'_n}.$$

Тогда из уравнений для  $n \leq -1$  получим допустимые значения энергии

$$E = E_0 - 2A \cos kb.$$

С другой стороны, та же энергия  $E$  (из уравнений для  $n \geq 2$ ) равна

$$E = E'_0 - 2A' \cos k'b'.$$

Это означает, что волновые числа в областях I и II связаны соотношением

$$E_0 - 2A \cos kb = E'_0 - 2A' \cos k'b'.$$

а) Обратимся теперь к оставшимся второму и третьему уравнениям. Подставим в них явный вид амплитуд  $a_{-1}$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} E_0 - E &= A(e^{ikb} + e^{-ikb}), \\ E'_0 - E &= A'(e^{ik'b'} + e^{-ik'b'}). \end{aligned}$$

Тогда второе уравнение преобразуется к виду

$$Ae^{-ikb}\beta + Ae^{ikb} - Be^{ik'b'}\gamma = 0, \quad (1)$$

а третье уравнение сразу дает искомое соотношение

$$\gamma = \frac{B}{A'}(1 + \beta).$$

б) Подставив последнее выражение для  $\gamma$  в уравнение (1), находим

$$\beta = -\frac{AA'e^{ikb} - B^2e^{ik'b'}}{AA'e^{-ikb} - B^2e^{ik'b'}}.$$

Если  $k'$  — мнимое число, т. е.  $k' = i\kappa$ , то  $e^{ik'b'} = e^{-\kappa b'}$ . Поскольку  $A$ ,  $A'$  и  $B$  — вещественные числа (как и  $kb$ ), то числитель и знаменатель являются величинами, комплексно сопряженными относительно друг друга. Таким образом,  $|\beta| = 1$ . Но величина  $|\beta|^2$  представляет собой долю отраженных частиц. Следовательно, все частицы, достигающие поверхности раздела, должны отражаться от нее. Этот результат нетрудно понять: мнимость волнового числа  $k'$  означает отсутствие потока частиц в области II; иначе говоря, это означает, что частица не может свободно распространяться в области II (хотя и может «забежать» в нее с краю). Это случится, если энергия частицы, налетающей слева на границу раздела, не попадает в область энергий, допустимых для свободного распространения частицы в правом кристалле, т. е.

$$|E_0 - E'_0| \geq 2|A| + 2|A'|.$$

- в) Для проверки закона сохранения числа частиц найдем прежде всего групповые скорости

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{b}{\hbar} 2A \sin kb$$

и

$$v'_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk'} = \frac{b'}{\hbar} 2A' \sin k'b'.$$

Заметим, что

$$\frac{v'_g/b'}{v_g/b} = \frac{A' \sin k'b'}{A \sin kb}.$$

Используя связь между  $\beta$  и  $\gamma$ , а также явный вид  $\beta$ , находим

$$\gamma = \frac{B}{A'} (1 + \beta) = - \frac{2iAB \sin kb}{AA'e^{-ikb} - B^2 e^{ik'b'}}.$$

Тогда

$$|\gamma|^2 = \frac{4A^2 B^2 \sin^2 kb}{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb + k'b')}.$$

Из явного вида  $\beta$  получаем

$$|\beta|^2 = \frac{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb - k'b')}{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb + k'b')}.$$

В числителе этого выражения добавим и вычтем величину  $2AA'B^2 \cos(kb + k'b')$ . Преобразуя разность косинусов, получаем

$$|\beta|^2 = 1 - \frac{4AA'B^2 \sin kb \sin k'b'}{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb + k'b')}.$$

Но дробь в правой части этого выражения как раз равна  $|\gamma|^2 (v'_g/b') (v_g/b)^{-1}$ . Таким образом, получаем закон сохранения числа частиц

$$|\beta|^2 + |\gamma|^2 \frac{v'_g/b'}{v_g/b} = 1.$$

Появление множителя при  $|\gamma|^2$  можно пояснить следующим образом. Закон сохранения числа частиц означает, что поток частиц, приходящих слева, равен сумме потоков частиц, прошедших границу и отраженных от нее. Величины  $|\beta|^2$  и  $|\gamma|^2$  пропорциональны вероятности для частицы находиться вблизи данного атома, т.е. плотности числа частиц в том или другом потоке. А для того чтобы получить величину потока, нужно умножить плотность частиц на их скорость. При этом скорость определяется количеством атомов, через которые проходит частица в единицу времени, т.е. нужно поделить  $v_g$  на  $b$ .

Полезно заметить, что полученное выше соотношение несправедливо при мнимом  $k'$ . В этом случае поток в области II отсутствует, и закон сохранения числа частиц принимает вид  $|\beta|^2 = 1$ .

## К главе 12. Полупроводники

12.1. Запишем уравнение движения электрона в полупроводнике в компонентной форме. Имеем следующие три уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{\tau} v_x &= \frac{q}{m^*} E_x + \omega_c v_y, \\ \frac{dv_y}{dt} + \frac{1}{\tau} v_y &= -\omega_c v_x, \\ \frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau} v_z &= 0.\end{aligned}$$

Уравнение для  $z$ -компоненты скорости решается элементарно ( $v_z = v_{0z} e^{-t/\tau}$ ) и для наших целей не представляет интереса. Для решения первых двух уравнений удобно заменить

$$E_x = E_0 \cos \omega t = \operatorname{Re} (E_0 e^{i\omega t})$$

комплексной величиной  $E_x = E_0 e^{i\omega t}$ .  
Решение уравнений ищем в виде

$$v_x = a e^{i\omega t}, \quad v_y = b e^{i\omega t},$$

где  $a$  и  $b$  — комплексные постоянные величины, для которых получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)a - \omega_c b &= \frac{qE_0}{m^*}, \\ \omega_c a + \left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)b &= 0.\end{aligned}$$

Решая их, находим

$$v_x = \frac{1 + i\omega\tau}{(1 + i\omega\tau)^2 + \omega_c^2 \tau^2} \frac{q\tau E_0}{m^*} e^{i\omega t}.$$

Таким образом, мы получили искомое соотношение

$$\frac{v_x}{E_x} = \frac{q\tau}{m^*} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_c^2 - \omega^2)\tau^2 + 2i\omega\tau}.$$

Мощность, поглощаемую электроном от поля, определим по формуле

$$P = q \operatorname{Re} v_x \operatorname{Re} E_x,$$

причем  $\operatorname{Re} E_x = E_0 \cos \omega t$ , а величину  $\operatorname{Re} v_x$  запишем следующим образом:

$$\operatorname{Re} v_x = \operatorname{Re} \left( \frac{v_x}{E_x} E_x \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{v_x}{E_x} \right) \operatorname{Re} E_x - \operatorname{Im} \left( \frac{v_x}{E_x} \right) \operatorname{Im} E_x.$$

Следовательно, мощность, поглощаемая электроном, равна

$$P(t) = qE_0^2 \operatorname{Re} \left( \frac{v_x}{E_x} \right) \cos^2 \omega t - qE_0^2 \operatorname{Im} \left( \frac{v_x}{E_x} \right) \cos \omega t \sin \omega t,$$

При усреднении по периоду  $T = 2\pi/\omega$  второе слагаемое обращается в нуль, поскольку отношение  $v_x/E_x$  не зависит от времени, а интеграл  $\int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt$  равен нулю. Таким образом, средняя за период поглощенная мощность пропорциональна  $\text{Re}(v_x/E_x)$ :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} q E_0^2 \text{Re} \left( \frac{v_x}{E_x} \right).$$

Проанализируем частотную зависимость поглощаемой мощности. Имеем

$$\text{Re} \left( \frac{v_x}{E_x} \right) = \frac{1 + (\omega_c^2 + \omega^2) \tau^2}{[1 + (\omega_c^2 - \omega^2) \tau^2]^2 + 4\omega^2 \tau^2} \frac{q\tau}{m^*}.$$

При  $\omega_c \tau \gg 1$  это выражение существенно упрощается. Введем обозначение  $\Delta\omega = \omega - \omega_c$  и будем считать, что  $|\Delta\omega| \ll \omega_c$ . Тогда получим

$$\text{Re} \left( \frac{v_x}{E_x} \right) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega)^2 \tau^2} \frac{q\tau}{2m^*}.$$

Это означает, что поглощаемая мощность максимальна при  $\omega = \omega_c$  ( $\Delta\omega = 0$ ), причем ширина максимума (определяемая по частотам, при которых поглощаемая мощность вдвое меньше максимальной) равна  $2/\tau$ . Измеряя частоту, отвечающую максимуму поглощения, и ширину этого максимума, можно получить  $m^*$  и  $\tau$ .

Предположим теперь, что  $\omega_c \tau$  уменьшается. Когда эта величина становится сравнимой с единицей, полученная выше упрощенная формула становится неприменимой. Чтобы понять, что происходит с зависимостью поглощенной мощности от частоты, исследуем случай  $\omega_c \tau \ll 1$ , иначе говоря, положим  $\omega_c = 0$ . Тогда

$$\text{Re} \left( \frac{v_x}{E_x} \right) = \frac{q\tau}{m^*} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

т. е. частотная зависимость этой величины не содержит максимума при отличных от нуля частотах, т. е. резонанс не наблюдается. Переход между двумя предельными формами частотной зависимости происходит где-то в области  $\omega_c \tau \sim 1$ . Условие  $\omega_c \tau > 1$  означает, что время между столкновениями  $\tau$  больше, чем период обращения электрона. Ясно, что только в этом случае движение электрона является периодическим (по крайней мере, между столкновениями) и, стало быть, возможно наблюдение резонанса.

- 12.2. «Ток тепловых дырок»  $I_r$ , текущий из области  $p$  в область  $n$ , пропорционален концентрации таких дырок в  $p$ -области, энергия которых достаточна для преодоления барьера:

$$I_r \sim N_p(p) \exp[-q(V_0 + V)/kT];$$

здесь  $V_0$  — разность потенциалов между  $n$ - и  $p$ -областями в условиях равновесия,  $V$  — дополнительная разность потенциалов, приложенная извне, а  $N_p(p)$  — полная концентрация дырок в  $p$ -области.

Если же дырки переходят из  $n$ - в  $p$ -область, то им не нужно преодолевать барьер, так что создаваемый ими ток  $I_g$  будет пропорционален всей концентрации дырок в  $n$ -области:

$$I_g \sim N_p(n).$$

Результирующий дырочный ток  $I_p$  равен разности этих двух токов:

$$I_p = I_g - I_r = I_r \left( \frac{I_g}{I_r} - 1 \right) = I_r \left\{ \frac{N_p(n)}{N_p(p)} \exp [q(V_0 + V)/kT] - 1 \right\}.$$

В условиях равновесия (при  $V = 0$ ) результирующий ток должен быть равен нулю. Из этого условия получаем отношение концентрации дырок в  $n$ - и  $p$ -областях:

$$N_p(n)/N_p(p) = \exp [-qV_0/kT].$$

Тогда при отличном от нуля внешнем потенциале  $V$  имеем

$$I_p = I_r [\exp (qV/kT) - 1].$$

Точно так же записывается выражение для тока отрицательных носителей (электронов). Следовательно, полный ток в  $p-n$ -переходе

$$I = (I_r + I_e) [\exp (qV/kT) - 1].$$

Здесь  $I_e$  — ток электронов из области  $n$  в область  $p$  при равновесных условиях.

Величину  $I_r + I_e$  можно интерпретировать как максимальный ток, который может течь при отрицательной внешней разности потенциалов.

### К главе 13. Приближение независимых частиц

- 13.1. В приближении независимых частиц энергия рассматриваемой системы равна сумме энергий каждого из электронов, осуществляющих двойные связи. Такой электрон может «принадлежать» одному из четырех атомов углерода и иметь энергию  $E_0$ . Однако наличие переходов электрона от одного атома к соседнему делает такие состояния нестационарными. Матричный элемент перехода равен  $-A$ , и, как показано в § 5 гл. 13 «Лекций» (вып. 9, стр. 334, 335), энергия стационарного состояния электрона для молекулы бутадиена ( $N=4$ ) может принимать значения

$$E_s = E_0 - 2A \cos \left( \frac{\pi}{5} s \right) \quad (s = 1, 2, 3, 4).$$

Тот же результат можно получить, приравнявая нулю детерминант, составленный с помощью энергетической матрицы  $H_{ij}$ . Тогда значения энергии определяются корнями уравнения:

$$\begin{vmatrix} E_0 - E & -A & 0 & 0 \\ -A & E_0 - E & -A & 0 \\ 0 & -A & E_0 - E & -A \\ 0 & 0 & -A & E_0 - E \end{vmatrix} = 0.$$

Расписывая определитель, получаем биквадратное уравнение

$$(E - E_0)^4 - 3A^2 (E - E_0)^2 + A^4 = 0,$$

решения которого записываются следующим образом:

$$E_1 = E_0 - \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} A \approx E_0 - 1,618A,$$

$$E_2 = E_0 - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} A \approx E_0 - 0,618A,$$

$$E_3 = E_0 + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} A \approx E_0 + 0,618A,$$

$$E_4 = E_0 + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} A \approx E_0 + 1,618A.$$

Любопытно, что, сравнивая эти выражения с написанным выше выражением для  $E_s$ , можно получить

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \quad \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}},$$

хотя никакой тригонометрии мы здесь не занимались.

В основном состоянии молекулы бутадиена два электрона, осуществляющие двойные связи, имеют энергию  $E_1$  (один со спином «вверх», другой — со спином «вниз»), а два других электрона — энергию  $E_2$ . Если же состояние молекулы бутадиена соответствует первому возбужденному уровню, то один из электронов, имевших в основном состоянии энергию  $E_2$ , будет иметь энергию  $E_3$ . Таким образом, энергия излучения, испускаемого молекулой бутадиена при переходе с первого возбужденного на основной уровень, равна

$$\hbar\omega = E_3 - E_2 = \sqrt{2(3 - \sqrt{5})} A \approx 1,236A.$$

Найти длину волны этого излучения теперь не представляет труда:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi\hbar c}{1,236A}.$$

Если  $A = 1$  эв, то  $\lambda = 1,00 \cdot 10^{-4}$  см.

Займемся теперь вопросом о распределении электронов в молекуле. Если энергия электрона равна  $E_s$ , то, как следует из § 5 гл. 13 «Лекций» (вып. 9), амплитуда вероятности нахождения этого электрона возле  $n$ -го атома равна

$$a_n^{(s)} = D_s \sin\left(\frac{\pi s}{5} n\right).$$

Нормировочный множитель  $D_s$  выберем так, чтобы выполнялось условие нормировки  $\sum_{n=1}^4 |a_n^{(s)}|^2 = 1$ .

Тогда для состояния электрона с энергией  $E_1$  ( $s = 1$ ) получим

$$a_1^{(1)} = a_4^{(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}},$$

$$a_2^{(1)} = a_3^{(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Аналогично для  $s = 2$  имеем

$$a_1^{(2)} = -a_4^{(2)} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}},$$

$$a_2^{(2)} = -a_3^{(2)} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

В однократно ионизованной молекуле бутadiена два электрона находятся в состоянии с энергией  $E_1$  и один электрон — в состоянии с энергией  $E_2$ . Тогда вероятность обнаружить какой-либо электрон возле  $n$ -го атома можно записать следующим образом:

$$\rho_n = 2 |a_n^{(1)}|^2 + 1 \cdot |a_n^{(2)}|^2.$$

Подставляя сюда величины  $a_n^{(s)}$ , получаем

$$\rho_1 = \rho_4 = \frac{1}{4} \left( 3 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0,6382,$$

$$\rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{4} \left( 3 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0,8618.$$

Отсюда можно сделать вывод, что возле крайних атомов углерода находится примерно по 0,64 электрона, а возле средних — по 0,86 электрона.

- 13.2. Чтобы найти энергию, необходимую для разрыва бензольного кольца, необходимо знать энергии конфигураций  $a$  и  $b$ , приведенных на рисунке в условии задачи. В § 4 гл. 13 «Лекций» (вып. 9, стр. 332) показано, что в приближении независимых частиц энергия основного состояния конфигурации  $a$  равна

$$E_a = 6E_0 - 8A.$$

Энергию конфигурации  $b$  найдем по методу, изложенному в § 5 гл. 13 «Лекций». Конфигурация  $b$  представляет собой линию из шести атомов углерода, причем энергия электрона, осуществляющего двойную связь и принадлежащего какому-либо из этих атомов, равна  $E_0$ , а матричный элемент перехода электрона к соседнему атому равен  $-A$ . Тогда одночастичная энергия электрона в стационарном состоянии  $E = E_0 - 2A \cos kb$ . Величина  $kb$  определяется условием, что амплитуда вероятности пребывания электрона около  $n$ -го атома, равная  $\sin(kbn)$ , обращается в нуль при  $n = 7$ , т. е. для отсутствующего седьмого (как и для нулевого) атома. Следовательно,  $kb = (\pi/7)s$ , где  $s = 1, 2, \dots, 6$ .

В основном состоянии конфигурации  $b$  на низших одночастичных уровнях

$$E_1 = E_0 - 2A \cos(\pi/7),$$

$$E_2 = E_0 - 2A \cos(2\pi/7),$$

$$E_3 = E_0 - 2A \cos(3\pi/7)$$

будет находиться по два электрона. Поэтому полная энергия основного состояния конфигурации  $b$  дается выражением

$$E_b = 6E_0 - 4A \left( \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right).$$



Таким образом, необходимая для разрыва бензольного кольца энергия равна

$$E_{\sigma} - E_{\alpha} = 4A \left( 2 - \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} \right).$$

Величину  $A$  найдем по известной длине волны, которая излучается при переходе молекулы бензола из первого возбужденного состояния в основное. Для этого замечаем, что энергия молекулы при таком переходе изменяется на величину  $2A$ , которая, с другой стороны, равна  $\hbar\omega = 2\pi\hbar c/\lambda$ . Таким образом, мы можем написать

$$E_{\sigma} - E_{\alpha} = \frac{4\pi\hbar c}{\lambda} \left( 2 - \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} \right).$$

Подставляя сюда  $\lambda = 2000 \text{ \AA}$ , значения косинусов и другие известные константы, получаем

$$E_{\sigma} - E_{\alpha} = 3,1 \text{ эв.}$$

- 13.3. Будем рассматривать спиновую волну как «частицу» с массой  $m_{\text{эфф}}$  и энергией  $E_K$ . Наличие в системе такой частицы, называемой магноном, означает, что спин одного из атомов направлен вниз, тогда как спины всех других атомов смотрят вверх. Поэтому спин всей системы при наличии магнона отличается от спина основного состояния (когда нет магнов) на единицу. Следовательно, магноны имеют целый спин и подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Среднее число магнов в состоянии с энергией  $E_K$  при температуре системы  $T$  определяется формулой

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{E_K/kT}{-1}}}.$$

Эта формула была получена в § 5 гл. 2 «Лекций» (вып. 8, стр. 44) для фотонов, но из ее вывода ясно, что она применима и для других бозонов. Но число магнов в системе как раз и равно числу атомов, спин которых «перевернут» по сравнению с его направлением в основном состоянии.

Подсчитаем теперь полное число магнов в системе. Для этого вспомним (см. § 5 гл. 2 «Лекций», вып. 8), что в ящике объемом  $V$  число типов колебаний, приходящееся на интервал волновых чисел от  $K$  до  $K + dK$ , равно

$$d\mathcal{N}(K) = V \frac{d^3K}{(2\pi)^3}.$$

Полное число магнов в системе равно

$$N_{\downarrow} = V \int \frac{d^3K/(2\pi)^3}{e^{\frac{E_K/kT}{-1}}}.$$

Следовательно, для числа атомов со спином «вниз» в единице объема имеем

$$\frac{N_{\downarrow}}{V} = \int \frac{d^3K/(2\pi)^3}{e^{\frac{E_K/kT}{-1}}}.$$

Намагниченность материала определяется как магнитный момент, приходящийся на единицу объема. Обозначим магнитный момент атома через  $\mu$ . Магнитный момент атома направлен в ту же сторону, что и его спин (или в противоположную, если  $\mu$  отрицателен), поэтому магнитный момент единицы объема можно выразить через число атомов со спином «вверх»  $N_{\uparrow}/V$  и „вниз“  $N_{\downarrow}/V$ :

$$M = \mu \frac{N_{\uparrow}}{V} - \mu \frac{N_{\downarrow}}{V} = \mu \left( \frac{N}{V} - 2 \frac{N_{\downarrow}}{V} \right).$$

Вспомяная, что расстояние между атомами решетки равно  $b$ , получаем полное число атомов в единице объема:

$$N/V = 1/b^3.$$

Следовательно, намагниченность дается выражением

$$M = \frac{\mu}{b^3} \left( 1 - 2b^3 \int \frac{d^3K/(2\pi)^3}{e^{E_K/kT} - 1} \right).$$

Основной вклад в интеграл, очевидно, дают энергии  $E_K$ , удовлетворяющие условию  $E_K < kT$ . При низких температурах этому условию удовлетворяют лишь самые малые значения  $E_K$ , для которых можно приближенно записать  $E_K \approx Ab^2K^2$ . При этом формально интеграл по  $K$  можно вычислять от нуля до бесконечности, поскольку большие значения  $K$  все равно не дадут существенного вклада. Выполняя интегрирование по угловым переменным  $\left( \int d\Omega = 4\pi \right)$  и переходя к безразмерной переменной  $x = (A/kT)^{1/2} bK$ , получаем

$$\frac{M}{M_{\text{насыщ}}} = 1 - 2 \left( \frac{kT}{4\pi A} \right)^{3/2} \left[ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} \right];$$

здесь  $M_{\text{насыщ}} = \mu/b^3$  — предельное значение намагниченности при  $T \rightarrow 0$ .

Стоящий в квадратных скобках интеграл можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x^2} dx}{1 - e^{-x^2}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)x^2} dx. \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$I = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^2 e^{-nx^2} dx.$$

После замены переменных  $x = t\sqrt{n}$  и интегрирования по частям получим интеграл ошибок. Таким образом,

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Ряд такого типа называют  $\zeta$ -функцией Римана:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

При  $z = 3/2$  имеем \*  $\zeta(3/2) \approx 2,612$ . Таким образом, окончательно можно записать

$$M/M_{\text{насыщ}} = 1 - \text{const} \cdot T^{3/2},$$

$$\text{const} = 5,224 \left( \frac{k}{4\pi A} \right)^{3/2}.$$

### К главе 14. Зависимость амплитуд от места

- 14.1. а) В стационарном состоянии с энергией  $E$  волновая функция одномерного движения записывается в виде

$$\psi(x, t) = u(x) e^{-iEt/\hbar},$$

причем  $u(x)$  удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + V(x)u = Eu.$$

Для прямоугольной потенциальной ямы с бесконечными стенками граничные условия можно получить из самого уравнения Шредингера. Действительно, пусть  $V(x) \rightarrow \infty$  во внешней области ( $x < 0$  и  $x > a$ ). Чтобы при этом уравнение Шредингера удовлетворялось, нужно положить либо  $u(x) = 0$ , либо  $d^2 u/dx^2 \rightarrow \infty$  всюду во внешней области. Но в последнем случае и сама функция  $u(x)$  должна обращаться в бесконечность во всей внешней области, что не имеет физического смысла. Таким образом, остается принять  $u(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $x > a$ . С точки зрения физики это означает, что частица не может находиться в области, где потенциальная энергия бесконечно велика.

- б) Во внутренней области  $V(x) = 0$ , и уравнение Шредингера принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = 0,$$

где  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ . В общем случае решение этого уравнения хорошо известно:

$$u(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

\* См., например, *Е. Янке, Ф. Эмде*, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, М., 1959.

Из граничного условия  $u(0) = 0$  получаем  $B = 0$ , а из другого граничного условия  $u(a) = 0$  имеем

$$A \sin ka = 0.$$

Поскольку  $A$  не может равняться нулю (иначе волновая функция всюду обратится в нуль), получаем условие

$$ka = \pi(n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, допустимые значения энергии равны

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n + 1)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

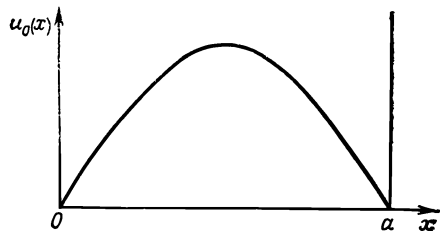
Энергия имеет наименьшее значение при  $n = 0$ :

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

Волновая функция состояния с этой энергией равна

$$u_0(x) = \begin{cases} A \sin \frac{\pi x}{a} & \text{при } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ и } x > a. \end{cases}$$

Ее график приведен на фиг. 1.



Фиг. 1.

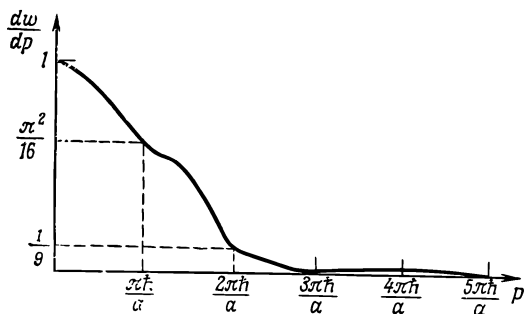
в) Первому возбужденному состоянию отвечает  $n = 1$ . Следовательно,

$$E_1 - E_0 = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}.$$

г) Попробуем сначала качественно рассмотреть распределение частиц по импульсам. Из соображений симметрии ясно, что частица с равной вероятностью может иметь как импульс  $p$ , так и  $-p$ , т. е. среднее значение импульса равно нулю. Кроме того, неопределенность координаты частицы равна  $\Delta x = a$ , и, следовательно, неопределенность импульса  $\Delta p \geq \hbar/2a$ . Эти качественные выводы можно сравнить с выражением для точной функции распределения по импульсам

$$\frac{dw(p)}{dp} = \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int_0^a u_0(x) e^{ipx/\hbar} dx \right|^2 = 2A^2 a^2 \pi \hbar^3 \left[ \frac{\cos(pa/2\hbar)}{(\pi\hbar)^2} - (pa)^2 \right]^2.$$

Примерный график этой функции показан на фиг. 2. Масштаб по оси ординат произвольный.



Фиг. 2.

14.2. а) Решим уравнение Шредингера

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] u = 0$$

для различных областей потенциала  $V(x)$ . При  $x \leq 0$ , как и в предыдущей задаче,  $u(x) = 0$ . В области  $0 < x < a$  получаем  $u(x) = A \sin kx$ , где  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ . В области  $x > a$  общее решение имеет вид

$$u(x) = Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x},$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}.$$

Поскольку в основном состоянии энергия частицы  $E < V_0$ , постоянную  $D$  следует положить равной нулю, иначе при  $x \rightarrow \infty$  волновая функция будет возрастать до бесконечности. Теперь следует потребовать, чтобы волновая функция и ее первая производная были непрерывны в точке  $x = a$ , где потенциал меняется скачком. Эти два условия приводят к непрерывности логарифмической производной волновой функции, т. е. величины  $(du/dx)/u(x)$ . Вычисляя эту величину для волновой функции, соответствующей областям  $0 < x < a$  и  $x > a$ , и полагая  $x = a$ , получаем

$$k \operatorname{ctg} ka = -\kappa.$$

Это трансцендентное уравнение определяет допустимые значения энергии частицы в рассматриваемой потенциальной яме. Если энергия известна, то данное уравнение позволяет определить глу-

бину потенциальной ямы:

$$V_0 = \frac{2E}{1 - \cos(2ka)}.$$

Если энергия частицы в основном состоянии отличается на 10% от энергии основного состояния при  $V_0 \rightarrow \infty$ , то  $E_0 = (\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2) \times (1 + 0,1)$ . Тогда

$$\cos(2ka) = \cos(2\pi \sqrt{1 + 0,1}) \approx \cos \frac{\pi}{10} \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{10} \right)^2.$$

Следовательно,

$$V_0 \approx 400 \frac{\hbar^2}{2ma^2}.$$

б) В первом возбужденном состоянии волновая функция должна иметь один нуль внутри ямы. Поскольку яма симметрична относительно точки  $x = 0$ , то нуль волновой функции должен приходиться как раз на эту точку. При  $x > 0$  волновая функция нашей задачи удовлетворяет такому же уравнению, как и в п. (а). Граничное условие  $u(0) = 0$ , рассмотренное в задаче 14.1, также выполнено, поэтому энергия первого возбужденного состояния частицы в потенциале, заданном в условии нашей задачи на фиг. 2, совпадает с энергией основного состояния частицы в потенциале на фиг. 1 (см. условие задачи), т. е.

$$E_1 = 1,1 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

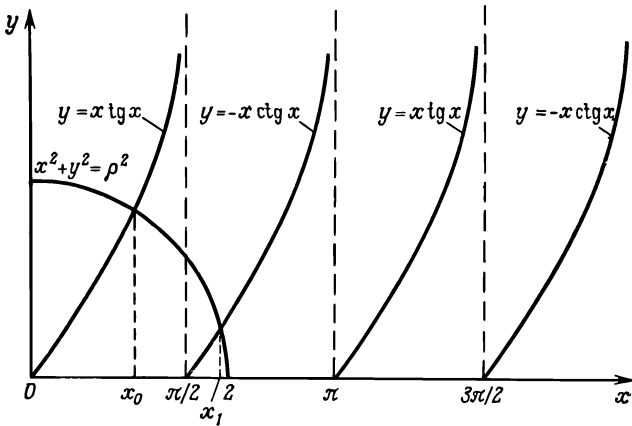
- 14.3. Потенциал  $V(x)$  обладает симметрией относительно замены  $x$  на  $-x$ , поэтому существуют два типа решений уравнения Шредингера: четные, т. е. такие, что  $u(-x) = u(x)$ , и нечетные:  $u(-x) = -u(x)$ . Для первого типа решений во внутренней области  $|x| < a$ , имеем  $u(x) = B \cos \alpha x$  ( $\alpha = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ ), а во внешней области  $u(x) = Ce^{-\beta|x|}$  ( $\beta = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$ ). Условие непрерывности логарифмической производной функции  $u(x)$  при  $x = \pm a$  дает трансцендентное уравнение для определения уравнений энергии четных состояний:

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha a = \beta.$$

Решения второго типа во внутренней области имеют вид:  $u(x) = A \sin \alpha x$ , а во внешней области  $u(x) = De^{-\beta x}$  при  $x > a$  и  $u(x) = -De^{\beta x}$  при  $x < -a$ . Приравнявая при  $x = \pm a$  логарифмические производные решений во внутренней и внешней областях, получаем  $\alpha \operatorname{ctg} \alpha a = -\beta$ .

Полученные уравнения можно решить графическим методом. Введем для этого величины  $x = \alpha a$  и  $y = \beta a$  и нарисуем окружность  $x^2 + y^2 = \rho^2 = 2mV_0 a^2 / \hbar^2$ . Энергии четных состояний определяются пересечением этой окружности с кривой  $y = x \operatorname{tg} x$ , а энергии нечетных состояний — пересечением с кривой  $y = -x \operatorname{ctg} x$  при положительных значениях  $x$  и  $y$  в обоих случаях.

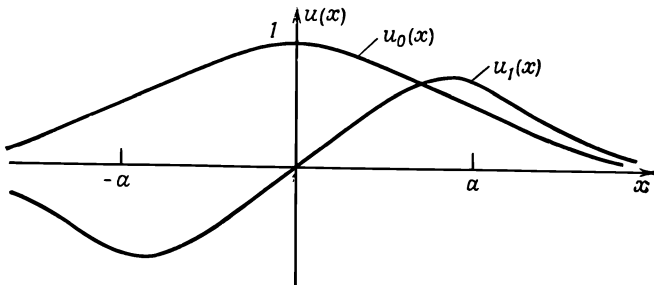
Если  $V_0 a^2 = 4\hbar^2/2m$ , то радиус окружности  $\rho = 2$ . Из фиг. 1 видно, что в этом случае окружность пересекается с каждой из кривых один раз, для одной кривой при  $x_0 \approx \pi/3$ , а для другой — при  $x_1 \approx 1,9$ . При этом энергия основного состояния  $E_0 = \pi^2\hbar^2/18ma^2$ ,



Фиг. 1.

а первого возбужденного  $E_1 = 3,6\hbar^2/2ma^2$ . На фиг. 2 показана качественно зависимость волновых функций этих состояний от координаты  $x$ .

Если  $V_0 a^2 < \pi^2\hbar^2/8m$ , то  $\rho < \pi/2$ , так что будет существовать лишь одно связанное состояние.



Фиг. 2.

- 14.4. Волновая функция  $\varphi(x, t) = K \exp[-a(t)x^2 - c(t)]$  должна удовлетворять уравнению Шредингера для свободной частицы:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Выполняя дифференцирование и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях уравнения, получаем

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\hbar}{im} a^2, \quad \frac{dc}{dt} = \frac{i\hbar}{m} a.$$

Интегрирование первого уравнения дает искомое выражение

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_0} + \frac{2i\hbar}{m} t.$$

Подставляя значение  $a(t)$  во второе уравнение и интегрируя его с начальным условием  $c(0) = 0$ , получаем

$$c = \frac{1}{4} \ln \left[ 1 + \left( \frac{2\hbar a_0 t}{m} \right)^2 \right] + \frac{i}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\hbar a_0 t}{m} \right).$$

Тогда волновую функцию можно записать следующим образом:

$$\varphi(x, t) = \text{const} \cdot e^{i\alpha(x, t)} (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-x^2/4\sigma^2};$$

здесь

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \frac{1}{4a_0} \left[ 1 + \left( \frac{2\hbar a_0 t}{m} \right)^2 \right], \\ \alpha(x, t) &= -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\hbar a_0 t}{m} \right) + \frac{\hbar a_0 t}{2m} \frac{x^2}{4\sigma^2}. \end{aligned}$$

Постоянный множитель  $\text{const} = K(2\pi/4a_0)^{1/4}$  удобно выбирать равным единице. Отметим, что нормировка найденной волновой функции не зависит от времени. Ширина «области локализации» частицы меняется с течением времени и характеризуется величиной

$$2\sigma = 2\sigma_0 \sqrt{1 + (2\hbar a_0 t/m)^2}.$$

Если волновая функция описывает электрон, находившийся в начальный момент времени внутри области шириной 1 Å, т.е.  $2\sigma_0 = 1 \text{ Å}$ , то  $a_0 = (2\sigma_0)^{-2} = 10^{16} \text{ см}^{-2}$ . Через 1 сек волновой пакет «расползется» по области шириной  $2\sigma = 2,3 \cdot 10^8 \text{ см} = 2300 \text{ км}$  (!)

Найдем волновую функцию в импульсном представлении:

$$\begin{aligned} \varphi(p, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) e^{-ipx/\hbar} dx = \\ &= K(2\hbar a)^{-1/2} \exp\left(-\frac{p^2}{4\hbar^2} a - c\right). \end{aligned}$$

Если подставить сюда явные выражения для функций  $1/a(t)$  и  $c(t)$  и проделать несложные преобразования с комплексными числами, то волновую функцию можно привести к виду

$$\varphi(p, t) = \text{const} \cdot e^{-i\beta(p, t)} (2\pi\eta)^{-1/4} e^{-p^2/4\eta^2},$$

где

$$\eta = \hbar \sqrt{a_0}, \quad \beta(p, t) = \frac{p^2}{2m} \frac{t}{\hbar}.$$

Отсюда видно, что разброс по импульсам сохраняется постоянным в любой момент времени.

Чтобы оценить разброс по скоростям, запишем полуширину «области локализации» частицы следующим образом:

$$\sigma^2(t) = \sigma_0^2 + (ut)^2,$$



где величина  $u = \hbar \sqrt{a_0}/m$  характеризует скорость расплывания пакета. Эту скорость можно принять в качестве меры разброса по скоростям, причем  $u = \eta/m$ .

Более строго этот вопрос можно проанализировать, используя введенный в гл. 18 «Лекций» (вып. 9) оператор скорости

$$\hat{v} = -\frac{i\hbar}{m} \frac{d}{dx}.$$

С помощью волновой функции в координатном представлении можно найти среднеквадратичное отклонение скорости частицы от среднего значения, т. е. величину

$$\langle (\hat{v} - \langle \hat{v} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{v}^2 \rangle - \langle \hat{v} \rangle^2.$$

Вычислив соответствующие интегралы, найдем, что среднее значение скорости оказывается равным нулю,  $\langle \hat{v} \rangle = 0$ , а среднее значение квадрата скорости в точности соответствует ширине разброса по импульсам, т. е.

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar^2 a_0}{m} = \eta^2/m^2.$$

### К главе 16. Момент количества движения

- 16.1. В начальном состоянии атома со спином 1 и с нулевой проекцией спина на ось  $z$  содержатся состояния со всеми тремя возможными проекциями спина ( $m' = 0, \pm 1$ ) на ось  $z'$ , амплитудой испускания фотона вдоль которой мы интересуемся. Однако из этих трех состояний в силу закона сохранения проекции момента импульса лишь состояние  $m' = +1$  может излучать правополяризованный фотон. Поэтому интересующая нас величина  $A(\theta)$  пропорциональна амплитуде того, что в состоянии атома со спином 1 и с нулевой проекцией спина на ось  $z$  содержится состояние с проекцией спина  $+1$  на ось  $z'$ , направление которой задано полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$ . Следовательно,

$$A(\theta) = \text{const} \cdot \langle +1 | R_y(\theta) R_z(\varphi) | 0 \rangle =$$

$$= \text{const} \cdot \langle +1 | R_y(\theta) | 0 \rangle = \text{const} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta.$$

- 16.2. а) Пронумеруем конечные состояния, показанные на рисунке в условии задачи, цифрами от 1 до 8 слева направо.

В начальном состоянии проекция спина на ось  $z$  равна  $+1/2$ , поэтому в результате распада могут реализоваться лишь такие конечные состояния, в которых проекция полного момента импульса на ось  $z$  равна  $+1/2$ . Этому условию удовлетворяют лишь состояния 2 и 8. Амплитуды всех остальных состояний должны быть равны нулю.

- б) Пусть поляризованная вдоль оси  $z$  частица  $X$  распадается, а частица  $Y$  движется вдоль оси  $z'$ , заданной полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$ . Относительно этой оси проекция спина частицы  $X$  могла быть равна  $+1/2$  с амплитудой

$$\left\langle +\frac{1}{2} | R_y(\theta) R_z(\varphi) | +\frac{1}{2} \right\rangle = e^{i\varphi/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

или  $-\frac{1}{2}$  с амплитудой

$$\left\langle -\frac{1}{2} \mid R_y(\theta) R_z(\varphi) \mid +\frac{1}{2} \right\rangle = -e^{i\varphi/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

В первом случае сохранение проекции момента импульса приводит к тому, что фотон, движущийся в направлении, противоположном оси  $+z'$ , является левополяризованным, а проекция спина частицы  $Y$  равна  $-\frac{1}{2}$ . Во втором случае фотон оказывается правополяризованным, а проекция спина частицы  $Y$  равна  $+\frac{1}{2}$ . Обозначим амплитуду первого процесса через  $a$ , второго — через  $b$ . Тогда угловое распределение частиц  $Y$ , поляризованных вдоль направления своего движения, определяется формулой

$$W_+(\theta) = |b \langle -\frac{1}{2} \mid R_y(\theta) R_z(\varphi) \mid +\frac{1}{2} \rangle|^2 = (\frac{1}{2}) |b|^2 (1 - \cos \theta).$$

Для частиц  $Y$ , поляризованных против направления своего движения, имеем

$$W_-(\theta) = (\frac{1}{2}) |a|^2 (1 + \cos \theta).$$

в) Угловое распределение всех частиц получается суммированием по различным поляризациям:

$$W(\theta) = W_-(\theta) + W_+(\theta) = (\frac{1}{2}) [|a|^2 + |b|^2 + (|a|^2 - |b|^2) \cos \theta].$$

г) Если угловое распределение изотропно, то  $|a| = |b|$ . Процессы, описываемые амплитудами  $a$  и  $b$ , получаются один из другого зеркальным отражением в плоскости  $xy$  и поворотом вокруг оси  $y$  на  $\pi$ . Поэтому изотропное угловое распределение, т. е. равенство  $|a| = |b|$ , означает сохранение четности при испускании фотона.

**16.3.** Проекция момента импульса на ось  $z$  у правополяризованного фотона равна  $+1$ , а у протона — либо  $+\frac{1}{2}$ , либо  $-\frac{1}{2}$ , так что проекция  $m$  полного момента импульса системы  $p^*$  может принимать значения  $+\frac{3}{2}$  и  $+\frac{1}{2}$ . В конечном состоянии проекция момента импульса на ось  $z'$ , направленную вдоль импульса протона отдачи, обусловлена только спином протона, поэтому  $m' = \pm\frac{1}{2}$ .

Пусть протон до столкновения был поляризован вдоль оси  $+z$ . Тогда система  $p^*$  может образоваться лишь в состоянии  $|j = \frac{3}{2}, m = +\frac{3}{2}\rangle$  с амплитудой  $a$ . Распад на  $\pi^0$ -мезон и протон, движущийся в направлении оси  $+z'$ , характеризуемой полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$ , может произойти из состояний  $|j = \frac{3}{2}, m' = +\frac{1}{2}\rangle$  и  $|j = \frac{3}{2}, m' = -\frac{1}{2}\rangle$ . Амплитуды вероятности того, что эти состояния содержатся в состоянии  $|j = \frac{3}{2}, m = +\frac{3}{2}\rangle$ , определяются матрицей поворота для спина  $\frac{3}{2}$ . С помощью формулы (16.25) и табл. 16.2 «Лекций» (вып. 9, стр. 413 и 417) получаем

$$\left\langle \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \mid R_y(\theta) R_z(\varphi) \mid \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = -\sqrt{3} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2},$$

$$\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \mid R_y(\theta) R_z(\varphi) \mid \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2}.$$

Если состояние  $|j = \frac{3}{2}, m' = +\frac{1}{2}\rangle$  распадется и протон полетит вдоль оси  $+z'$ , а мезон — в противоположном направлении, то спин протона обязательно должен быть направлен вдоль оси  $+z'$ . Если  $m' = -\frac{1}{2}$ , то спин протона после распада направлен противоположно оси  $+z'$ . Амплитуды распадов в этих двух случаях равны соот-

ответственно  $f$  и  $g$ . Теперь мы можем записать полные амплитуды процесса фоторождения  $\pi$ -мезона на протоне:

$$\begin{aligned} \left\langle \mu' = +\frac{1}{2} \mid F \mid \mu = +\frac{1}{2} \right\rangle &= f \left\langle \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \mid R_y(\theta) R_z(\varphi) \mid \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle a = \\ &= -af \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2}, \\ \left\langle \mu' = -\frac{1}{2} \mid F \mid \mu = +\frac{1}{2} \right\rangle &= ga \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mu$  — проекция спина протона на ось  $z$  до столкновения, а  $\mu'$  — проекция спина протона на направление его импульса после столкновения. Другие квантовые числа опущены. Совершенно аналогично можно получить амплитуды для случая  $\mu = -1/2$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \mu' = +\frac{1}{2} \mid F \mid \mu = -\frac{1}{2} \right\rangle &= fb \frac{1}{2} (3 \cos \theta - 1) \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2}, \\ \left\langle \mu' = -\frac{1}{2} \mid F \mid \mu = -\frac{1}{2} \right\rangle &= -gb \frac{1}{2} (3 \cos \theta + 1) \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2}. \end{aligned}$$

Возводя модули найденных амплитуд в квадрат, усредняя по начальным значениям проекций спина протона и суммируя по конечным, получаем угловое распределение протонов:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{\mu = \pm 1/2} \sum_{\mu' = \pm 1/2} |\langle \mu' \mid F \mid \mu \rangle|^2.$$

При вычислении этого выражения учтем равенство  $f = g$ , которое вытекает из закона сохранения четности. В результате получим

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{8} |f|^2 \{3|a|^2 \sin^2 \theta + |b|^2 (3 \cos^2 \theta + 1)\}.$$

Угловое распределение мезонов получается отсюда заменой  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ , поскольку мезон и протон движутся в противоположных направлениях. Однако при этом полученное выражение не меняется.

- 16.4. Пусть  $\pi$ -мезон падает на мишень вдоль оси  $+z$ , а проекция спина протона на эту ось равна  $\mu$ . Рассмотрим такой процесс, когда после рассеяния  $\pi$ -мезон движется вдоль оси  $z'$ , характеризуемой полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$ , а проекция спина протона на ось  $z'$  равна  $\mu'$ . При образовании промежуточного состояния  $|j = 3/2, m\rangle$  проекция момента импульса системы должна сохраниться; следовательно,  $m = \mu$ . (Напомним, что проекция орбитального момента частицы на направление ее движения равна нулю.) Точно так же при распаде состояния  $|3/2, m'\rangle$  с испусканием мезона вдоль оси  $+z'$  должно выполняться равенство  $m' = \mu'$ . Тогда амплитуду рассматриваемого процесса можно записать как произведение амплитуды  $f_\mu$  образования состояния  $|3/2, \mu\rangle$  на амплитуду обнаружения в этом состоянии другого состояния  $|3/2, \mu'\rangle$ , с проекцией спина  $\mu'$  на новую ось  $z'$  и на амплитуду  $g_{\mu'}$  распада такого состояния с испусканием мезона вдоль оси  $+z'$ . Вторая из этих амплитуд равна матрице поворота для спина  $3/2$ :

$$\left\langle \frac{3}{2} \mu' \mid R_y(\theta) R_z(\varphi) \mid \frac{3}{2} \mu \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} \mu' \mid R_y(\theta) \mid \frac{3}{2} \mu \right\rangle e^{i\mu\varphi}.$$

В нашем случае допустимые значения  $\mu$  и  $\mu'$  равны  $\pm 1/2$ . Из табл. 16.2 «Лекций» (вып. 9, стр. 417) находим амплитуды

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \mid R_y \mid \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \mid R_y \mid \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} (3 \cos \theta - 1) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right), \\ \left\langle \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \mid R_y \mid \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= - \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \mid R_y \mid \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} (3 \cos \theta + 1) \sin \left( \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

С помощью этих амплитуд усреднением по начальным и суммированием по конечным поляризациям протона получаем угловое распределение  $\pi$ -мезонов при рассеянии на неполяризованных протонах:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1/2} \sum_{\mu'=\pm 1/2} \left| g_{\mu'} \left\langle \frac{3}{2} \mu' \mid R_y(\theta) \mid \frac{3}{2} \mu \right\rangle f_{\mu} \right|^2.$$

Сравним теперь между собой образование промежуточного состояния с  $j = 3/2$  в случаях, когда протон поляризован по оси  $+z$  и противоположно ей. Если повернуть систему координат на  $180^\circ$  вокруг оси  $y$  и затем выполнить операцию зеркального отражения относительно плоскости  $xy$ , то направление спина изменится на противоположное, а импульсы сталкивающихся частиц не изменятся. Тогда в силу сохранения четности амплитуды  $f_{+1/2}$  и  $f_{-1/2}$  могут лишь отличаться несущественным фазовым множителем, так что  $|f_{+1/2}| = |f_{-1/2}| = f$ . Подобное соотношение справедливо и для амплитуд распада:

$$|g_{+1/2}| = |g_{-1/2}| = g.$$

Следовательно, угловое распределение  $\pi$ -мезонов при рассеянии на неполяризованных протонах принимает простой вид

$$\sigma(\theta) = \text{const} \sum_{\mu, \mu'=\pm 1/2} \left| \left\langle \frac{3}{2} \mu' \mid R_y(\theta) \mid \frac{3}{2} \mu \right\rangle \right|^2 = \text{const} (3 \cos^2 \theta + 1).$$

- 16.5.** Определим угловую зависимость амплитуд испускания право- и левополяризованного фотона:

$$\begin{aligned} \langle 0^+, R, \theta \Phi \mid F \mid 1^\pi, m = 1 \rangle &= a_R^\pi \langle 1, +1 \mid R_y(\theta) R_z(\Phi) \mid 1, +1 \rangle = \\ &= a_R^\pi e^{i\Phi} (1 + \cos \theta) / 2, \\ \langle 0^+, L, \theta \Phi \mid F \mid 1^\pi, m = 1 \rangle &= \\ &= a_L^\pi \langle 1, -1 \mid R_y(\theta) R_z(\Phi) \mid 1, +1 \rangle = a_L^\pi e^{i\Phi} (1 - \cos \theta) / 2. \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс  $\pi$  указывает четность возбужденного состояния и принимает значение  $+$  или  $-$ ; например,  $1^+$  означает, что полный спин системы равен единице, а четность положительна; величины  $a_R^\pi$  и  $a_L^\pi$  представляют собой амплитуды излучения вдоль оси  $+z'$  фотона с правой и левой круговыми поляризациями, если возбужденный атом находится соответственно в состояниях  $|1^\pi, m' = +1\rangle$  и  $|1^\pi, m' = -1\rangle$ . Для данного значения четности возбужденного состояния  $\pi$  эти амплитуды равны по абсолютной величине, но их относи-

тельный знак (см. § 1 гл. 16 «Лекций», вып. 9, стр. 397) зависит от значения  $\pi$ :  $a_R^\pi = \pi a_L^\pi$ . Если поляризация фотонов не регистрируется, то угловое распределение не зависит от четности возбужденного состояния:

$$\begin{aligned} W(\theta) &= |\langle 0^+, R, \theta\Phi | F | 1^\pi, m = 1 \rangle|^2 + |\langle 0^+, L, \theta\Phi | F | 1^\pi, m = 1 \rangle|^2 = \\ &= |a_R^\pi|^2 (1 + \cos^2 \theta)/2. \end{aligned}$$

Угловое распределение фотонов с круговой поляризацией тоже, очевидно, не зависит от  $\pi$ :

$$W_R(\theta) = \frac{1}{4} |a_R^\pi|^2 (1 + \cos \theta)^2; \quad W_L(\theta) = \frac{1}{4} |a_L^\pi|^2 (1 - \cos \theta)^2.$$

Найдем теперь угловые распределения линейно-поляризованных фотонов. Амплитуда испускания фотона с поляризацией вдоль оси  $+x'$  или  $+y'$  выражается через амплитуды испускания фотонов с круговой поляризацией:

$$\begin{aligned} \langle x' | F | 1^\pi m \rangle &= \langle x' | R \rangle \langle R | F | 1^\pi m \rangle + \langle x' | L \rangle \langle L | F | 1^\pi m \rangle, \\ \langle y' | F | 1^\pi m \rangle &= \langle y' | R \rangle \langle R | F | 1^\pi m \rangle + \langle y' | L \rangle \langle L | F | 1^\pi m \rangle. \end{aligned}$$

Из соотношений

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|x'\rangle + i|y'\rangle\}, \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|x'\rangle - i|y'\rangle\}$$

находим

$$\langle x' | R \rangle = \langle x' | L \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \langle y' | R \rangle = -\langle y' | L \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Тогда амплитуды испускания линейно-поляризованных фотонов даются выражениями

$$\langle 0^+, x', \theta\Phi | F | 1^\pi, 1 \rangle = \frac{e^{i\Phi} a_R^\pi}{2\sqrt{2}} [(1 + \cos \theta) + \pi(1 - \cos \theta)],$$

$$\langle 0^+, y', \theta\Phi | F | 1^\pi, 1 \rangle = \frac{ie^{i\Phi} a_R^\pi}{2\sqrt{2}} [(1 + \cos \theta) - \pi(1 - \cos \theta)].$$

Квадраты модулей этих амплитуд дают угловые распределения фотонов, поляризованных соответственно вдоль осей  $+x'$  и  $+y'$ . В случае положительной четности возбужденного состояния получаем

$$W_{x'}(\theta) = \frac{1}{2} |a_R^+|^2, \quad W_{y'}(\theta) = \frac{1}{2} |a_R^+|^2 \cos^2 \theta.$$

Если же четность отрицательна, то угловые распределения оказываются иными:

$$W_{x'}(\theta) = \frac{1}{2} |a_R^-|^2 \cos^2 \theta, \quad W_{y'}(\theta) = \frac{1}{2} |a_R^-|^2.$$

Если вспомнить, каким образом мы переходим от оси  $z$  к оси  $z'$ , то легко убедиться, что ось  $x'$  лежит в плоскости, проведенной через направление ориентации спина возбужденного состояния и направление излучения фотона, а ось  $y'$  перпендикулярна этой плоскости.

Таким образом, по угловому распределению линейно-поляризованных фотонов можно определить четность возбужденного состояния.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
-----------------------	---

### УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

#### Том I

Вып. 1. Современная наука о природе. Законы механики . . . . .	9
Вып. 2. Пространство. Время. Движение . . . . .	41
Вып. 3. Излучение. Волны. Кванты . . . . .	65
Вып. 4. Кинетика. Теплота. Звук . . . . .	80

#### Том II

Вып. 5. Электричество и магнетизм . . . . .	95
Вып. 6. Электродинамика . . . . .	121
Вып. 7. Физика сплошных сред . . . . .	146

#### Том III

Вып. 8. Квантовая механика (I) . . . . .	155
Вып. 9. Квантовая механика (II) . . . . .	176

### РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

#### Том I

Вып. 1. Современная наука о природе. Законы механики . . . . .	189
Вып. 2. Пространство. Время. Движение . . . . .	269
Вып. 3. Излучение. Волны. Кванты . . . . .	325
Вып. 4. Кинетика. Теплота. Звук . . . . .	345

#### Том II

Вып. 5. Электричество и магнетизм . . . . .	370
Вып. 6. Электродинамика . . . . .	414
Вып. 7. Физика сплошных сред . . . . .	459

#### Том III

Вып. 8. Квантовая механика (I) . . . . .	475
Вып. 9. Квантовая механика (II) . . . . .	517

## УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЫ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим посылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, изд-во «Мир».

**ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ  
С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ**

**Фейнмановские лекции  
по физике**

Редактор А. Куксенко  
Художник В. Карпов  
Художественный редактор Л. Безрученков  
Технический редактор Е. Потапенкова  
Корректор Л. Панова

**ИБ № 1415**

Сдано в набор 14.04.78. Подписано к печати 09.11.78.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага типографская № 2.  
Гарнитура латинская. Печать высокая.  
Объем 17,00 бум. л. Усл. печ. л. 34,00.  
Уч.-изд. л. 29,63. Изд. № 2/9999. Тираж 90 тыс. экз.  
Зак. 1096. Цена 2 р. 30 к

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“  
129820, Москва, И-110, ГСП,  
1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградская типография № 2 имени Евгении  
Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном  
комитете СССР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли.  
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29



**ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ**  
**ПЕРЕВОДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**  
**ИЗДАТЕЛЬСТВА «МИР»**

Литературу издательства «Мир» можно приобрести или оформить предварительный заказ в магазинах — опорных пунктах по изучению спроса на литературу издательства «Мир»:

121019, Москва, Г-19, просп. Калинина, 26, п/я № 42, магазин № 200, «Дом книги».

191049, Ленинград, Пушкинская ул., 2, магазин № 5 «Техническая книга».

480003, Казахская ССР, Алма-Ата, ул. Гоголя, 109, магазин «Прогресс».

232000, Литовская ССР, Вильнюс, ул. Университета, 7, магазин № 13.

603000, Горький, просп. Ленина, 11, магазин № 24.

252001, УССР, Киев, Крещатик, 44, магазин № 12.

630000, Новосибирск, Красный просп., 60, магазин № 7.

620014, Свердловск, ул. Малышева, 31-а, магазин № 8, «Техническая книга».

634050, Томск, пер. Батенькова, 5, магазин № 2.

В магазинах представлены книги по естественным наукам и новой технике, выпущенные издательством «Мир». Для предварительного заказа на книгу, готовящуюся к выпуску, достаточно оставить открытку-заказ и указать свой адрес.

Книги высылаются наложенным платежом.

2р.30к.