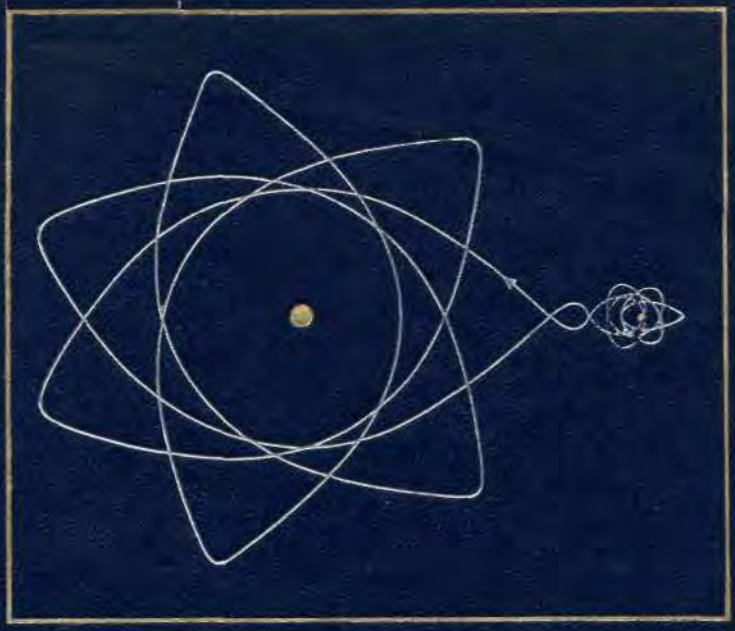


В. СЕБЕХЕЙ

ТЕОРИЯ ОРБИТ

В. СЕБЕХЕЙ

ТЕОРИЯ ОРБИТ

Ограниченная задача трех тел

Перевод с английского
А. Н. РУБАШОВА

под редакцией
Г. Н. ДУБОШИНА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

22.62
С 28
УДК 521.1+629.78

THEORY OF ORBITS

The Restricted Problem of Three Bodies

Victor SZEBEHELY

YALE UNIVERSITY
NEW HAVEN, CONNECTICUT

1967 Academic Press New York and London

Себехей В. **Теория орбит: ограниченная задача трех тел.** Пер. с англ. Под ред. Г. Н. Дубошина.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1982. —656 с.

Книга посвящена классической проблеме небесной механики и аналитической механики, имеющей важнейшие приложения в теории космического полета. Развивается теория движения тела малой массы под действием притяжений двух небесных тел (например, движения космического аппарата, притягиваемого Землей и Луной). Исследуются методы получения частных решений ограниченной задачи трех тел, движения вблизи точек либрации, почти периодические орбиты, окололунные орбиты, траектории полетов к Луне и т. д.

Монография предназначена для специалистов по небесной механике и теории космического полета, преподавателей теоретической механики, аспирантов университетов.

Рис. 160. Табл. 29. Библ. 513 назв.

С $\frac{1705030000-015}{053(02)-82}$ 177-81

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы,
1982

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора русского перевода 6
Предисловие автора к русскому переводу 8
Предисловие автора к американскому изданию 8
Вступление 11
Введение 13

Глава 1. **Постановка ограниченной задачи** 20
§ 1.1. Введение 20
§ 1.2. Постановка задачи и уравнения движения в сидерической системе координат 21
§ 1.3. Инвариантное соотношение и полная энергия системы . . 23
§ 1.4. Уравнения движения в синодической системе координат и интеграл Якоби 26
§ 1.5. Уравнения движения в безразмерных координатах . . . 29
§ 1.6. Сводка уравнений движения 34
§ 1.7. Способ нахождения потенциала 35
§ 1.8. Связь с общей задачей трех тел 37
§ 1.9. Классификация и модификации ограниченной задачи . . 42
§ 1.10. Приложения 44
§ 1.11. Замечания 50
§ 1.12. Литература 53

Глава 2. **Приведение** 55
§ 2.1. Введение 55
§ 2.2. Приведение к третьему порядку 58
§ 2.3. Приведение ко второму порядку 60
§ 2.4. Аналогия с линиями тока четырехмерного потока . . . 63
§ 2.5. Аналогия с линиями тока трехмерного потока 66
§ 2.6. Общие замечания относительно соотношения между системами Гамильтона и потоком в фазовом пространстве . . 67
§ 2.7. Аналогия с линиями тока двумерного потока 70
§ 2.8. Дальнейшие общие замечания 75
§ 2.9. Приложения 77
§ 2.10. Замечания 79
§ 2.11. Литература 81

Глава 3. **Регуляризация** 83
§ 3.1. Введение 83
§ 3.2. Регуляризация орбит соударения в задаче двух тел . . 85
§ 3.3. Регуляризация общей задачи двух тел 97
§ 3.4. Локальная регуляризация ограниченной задачи 104
§ 3.5. Глобальная регуляризация Биркгофа ограниченной задачи . 108
§ 3.6. Преобразование Тиле — Барро 113

§ 3.7. Регуляризация Леметра 115
§ 3.8. Обобщение методов глобальной регуляризации 118
§ 3.9. Сравнение глобальных регуляризаций 120
§ 3.10. Существование решений 122
§ 3.11. Приложения 125
§ 3.12. Замечания 127
§ 3.13. Литература 133

Глава 4. **Множество решений** 136

§ 4.1. Введение 136
§ 4.2. Множество состояний движения 139
§ 4.3. Особенности множества состояний движения 141
§ 4.4. Определение положения коллинеарных точек 144
§ 4.5. Описание таблиц характеристик коллинеарных точек равновесия (Приложения I, II, III) 148
§ 4.6. Исследование функции $\Omega\ (x, y)$ 150
§ 4.7. Области движения 167
§ 4.8. Приложения 203
§ 4.9. Замечания 210
§ 4.10. Литература 215

Приложение I. Первая коллинеарная точка равновесия 217
Приложение II. Вторая коллинеарная точка равновесия 221
Приложение III. Третья коллинеарная точка равновесия 225
Приложение IV. Значение постоянной Якоби 229

Глава 5. **Движение вблизи точек равновесия** 234

§ 5.1. Введение 234
§ 5.2. Устойчивость решений линейных и нелинейных систем . . 235
§ 5.3. Движение вокруг коллинеарных точек 245
§ 5.4. Движение вокруг треугольных точек 252
§ 5.5. Нелинейные явления вблизи точек равновесия 267
§ 5.6. Приложения 279
§ 5.7. Замечания 297
§ 5.8. Литература 305

Приложение I. Корни характеристического уравнения в коллинеарных точках 311
Приложение II. Корни характеристического уравнения для устойчивого решения в треугольных точках 318
Приложение III. Корни характеристического уравнения для неустойчивого решения в треугольных точках 320

Глава 6. **Динамика Гамильтона в расширенном фазовом пространстве** 321

§ 6.1. Введение 321
§ 6.2. Уравнения движения 322
§ 6.3. Каноническое преобразование в фазовом пространстве . . 325
§ 6.4. Расширенное фазовое пространство 329
§ 6.5. Примеры приложения динамики Гамильтона в расширенном фазовом пространстве 333
§ 6.6. Обобщенные преобразования времени 339
§ 6.7. Замечания 342
§ 6.8. Литература 343

Глава 7. **Канонические преобразования ограниченной задачи** . . . 345

§ 7.1. Введение 345

§ 7.2. Каноническое преобразование сидерической системы в синодическую . . . 346
§ 7.3. Интерпретация новых переменных . . . 350
§ 7.4. Перенос начала координат посредством канонических преобразований . . . 354
§ 7.5. Преобразование прямоугольной синодической системы в полярную . . . 355
§ 7.6. Преобразование полярных координат в переменные Делоне 359
§ 7.7. Модификации элементов Делоне . . . 367
§ 7.8. Регуляризация в случае канонических переменных . . . 372
§ 7.9. Замечания . . . 380
§ 7.10. Литература . . . 381

Глава 8. **Периодические орбиты** . . . 382
§ 8.1. Введение . . . 382
§ 8.2. Определения . . . 385
§ 8.3. Поверхностные преобразования и изображения на торе . 390
§ 8.4. Аналитическое продолжение . . . 399
§ 8.5. Задача двух тел во вращающейся системе координат . . 404
§ 8.6. Ограниченная задача с малым массовым параметром . . 418
§ 8.7. Критерий Уиттекера существования периодических орбит . 429
§ 8.8. Характеристические показатели . . . 431
§ 8.9. Замечания . . . 435
§ 8.10. Литература . . . 441

Глава 9. **Численные исследования** . . . 446
§ 9.1. Введение . . . 446
§ 9.2. Систематизация имеющихся численных результатов . . . 449
§ 9.3. Связь между различными системами координат . . . 452
§ 9.4. Копенгагенская категория . . . 458
§ 9.5. Периодические лунные орбиты . . . 497
§ 9.6. Движение вокруг треугольных точек либрации . . . 511
§ 9.7. Лунные траектории . . . 516
§ 9.8. Приложения к двойным системам . . . 523
§ 9.9. Дополнительные периодические орбиты . . . 525
§ 9.10. Устойчивость . . . 533
§ 9.11. Замечания . . . 540
§ 9.12. Литература . . . 549

Глава 10. **Модификации ограниченной задачи** . . . 554
§ 10.1. Введение . . . 554
§ 10.2. Трехмерная ограниченная задача . . . 555
§ 10.3. Эллиптическая ограниченная задача . . . 583
§ 10.4. Задача Хилла . . . 597
§ 10.5. Другие модификации . . . 621
§ 10.6. Замечания . . . 632
§ 10.7. Литература . . . 640

Перечень основополагающих книг . . . 646
Литература, добавленная редактором перевода . . . 647
Именной указатель . . . 648
Предметный указатель . . . 653

ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

По общепринятому в настоящее время определению Лапласа «небесной механикой» называется та часть астрономии, которая занимается изучением движений небесных тел под действием естественных сил природы. Небесными телами в этом определении являются всевозможные реально существующие космические образования — Солнце, Луна, планеты, кометы, астероиды, метеориты, звезды, галактики и т. п. В наше время к небесным телам естественно также причислить искусственные небесные тела, которые также двигаются под действием естественных сил природы, но движениями которых в ряде случаев возможно управлять при помощи специальных двигателей. Основной задачей небесной механики со времен Ньютона является осуществление возможности определять положение и скорость интересующего нас небесного тела для всякого момента времени, как будущего, так и прошлого. Для решения этой задачи Кеплер создал теорию невозмущенного (кеплерова) движения, а Ньютон разработал основные методы теории возмущений. Знаменитый Эйлер — создатель одной из первых теорий движения Луны — ввел в обиход небесной механики так называемую ограниченную задачу трех тел, являющуюся следующей по сложности задачей после простой и легко разрешимой задачи двух тел, управляемой законами Кеплера.

С этих пор (т. е. со времен Эйлера) ограниченная задача трех тел является важнейшим аппаратом классической небесной механики, разработке и исследованию которой посвящено бесчисленное множество научных работ и изложение основных результатов которой неизбежно входит в любое руководство по небесной механике.

Особенно важное значение приобрела ограниченная задача трех тел во второй половине этого столетия в связи с необходимостью изучать движения искусственных спутников Земли и других планет.

Поэтому естественно назрела необходимость собрать все известные до сих пор результаты и, изложив их с единой точки зрения, создать общедоступное руководство по той части небесной механики, которая является как бы второй ее главой после теоретической астрономии, под которой обычно понимают теорию и практику задачи двух тел.

Эту задачу выполнил один из крупнейших в наше время специалистов по небесной механике В. Себехей, перевод книги которого представляется вниманию советских читателей.

Эта книга, носящая название «Теория орбит», посвящена главным образом изложению результатов теории круговой ограниченной задачи, где предполагается, что две конечные массы описывают вокруг общего центра масс круговые орбиты.

Эта задача является простейшей в серии ограниченных задач небесной механики и имеет наибольшие приложения как в астрономических, так и в космодинамических задачах.

Автор подробно рассмотрел все стороны этой задачи, искусно связывая их друг с другом, получая таким образом единую стройную теорию.

Нет надобности освещать содержание книги, так как это сделано в предисловии автора. Отметим только, что книга написана на высоком научном уровне, но, с другой стороны, вполне доступна для учащихся, знакомых с элементами небесной и теоретической механики.

Разумеется, уровень научных достижений, затрагиваемых в этой книге, соответствует эпохе ее создания, т. е. 60-м годам двадцатого столетия. С тех пор небесная механика и ее приложения к космодинамике получили чрезвычайно широкое развитие, и эти новые результаты, естественно, не нашли отражения в книге Себехея.

Однако и в своем настоящем виде книга Себехея представляет значительный интерес и несомненно будет весьма полезной для специалистов различных областей как небесной механики, так и смежных с нею областей, иногда весьма далеких по первоначальному представлению от науки о движении небесных тел как естественных, так и искусственных.

Книга может служить также ценным научным и учебным пособием для студентов и аспирантов целого ряда различных дисциплин.

Г. Н. Дубошин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Для меня является высокой честью тот факт, что знаменитая русская школа небесной механики поддержала перевод моей книги, посвященной ограниченной задаче трех тел. Высокий уровень Московского и Ленинградского научных центров небесной механики хорошо известен еще со времен Эйлера, работавшего в России. Я убедился в этом же во время своих посещений Москвы и Ленинграда.

В моей книге имеются ссылки на ряд старых и новых работ советских ученых. Эти работы свидетельствуют о таланте их авторов и о большой роли советских ученых в развитии замечательной науки — небесной механики.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга посвящена ограниченной задаче трех тел. Эта задача занимает центральное место в аналитической динамике, небесной механике и космодинамике. Полезным введением в небесную механику и космодинамику может явиться задача двух тел. Но для того чтобы перейти к исследованию фундаментальных проблем, нужно от задачи двух тел перейти к задаче трех тел. Этот шаг является принципиальным. Задача двух тел не только решена — причем само понятие «решение» для астрономов, инженеров и математиков может различаться, — но в отношении этой динамической системы имеется общее понимание. С другой стороны, задача трех тел не только не получила своего решения, но даже поведение этой динамической системы пока еще полностью не понято.

Солнечная система дает несколько примеров приложения общей задачи трех тел. Здесь мы встречаемся с несколько необычным положением, когда задача более общего вида, содержащая значительные сложности, оказывается менее интересной и полезной, чем сравнительно более простая задача. Следует также отметить, что ограниченную задачу трех тел мы знаем значительно лучше, чем общую задачу трех тел.

Автор этой книги в своей работе во многом основывался на трудах основоположников современной динамики: А. Пуанкаре и Дж. Д. Биркгофа. А. Пуанкаре в своем труде *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste,* а также в своей известной работе *Mémoire Couronné* при изложении динамики использовал в качестве примера задачу трех тел. То же самое можно сказать о работе Дж. Д. Биркгофа *Dynamical Systems* и работе К. Л. Зигеля *Vorlesungen über Himmelsmechanik.* А. Винтнер в свом труде *Analytical Foundations of Celestial Mechanics* первоначально предполагал рассмотреть задачу трех тел, в особенности ограниченную задачу, но фактически больше внимания уделил математическим основам, чем небесной механике. Интересно отметить следующий любопытный факт. Книга Х. Хаппеля называется *Das Dreikörperproblem,* а в подзаголовке ее стоит *«Vorlesungen über Himmelsmechanik»,* в то время как второй том К. Штумпфа, наоборот, называется *Himmelsmechanik,* а в подзаголовке стоит *«Das Dreikörperproblem».* Поистине можно удивляться тому, насколько тесно связаны между собой задача трех тел, небесная механика и динамика вообще, раз заголовки, подзаголовки, содержание, приложения и примеры стали взаимозаменяемыми!

Приложения ограниченной задачи к небесной механике составляют основу некоторых теорий движения Луны и планет. Современные приложения ее к космодинамике еще более убедительны и многочисленны, чем классические приложения. Значение ограниченной задачи для космогонии и звездной динамики тоже трудно переоценить. Наконец, можно показать, что множество динамических систем могут быть представлены уравнениями движения, которые формально тождественны с уравнениями ограниченной задачи. Степень важности научных усилий можно характеризовать эффектом, оказываемым ими на смежные области. Хотя раньше многие авторы, начиная с Эйлера и кончая Зигелем, считали астрономию и динамику единственными областями приложения ограниченной задачи, в настоящее время, как мы знаем, она в равной мере важна для космодинамики и звездной динамики.

Интерес к космическим исследованиям омолодил небесную механику, а методы последней быстро нашли в них свое приложение. Некоторые из проблем фактически не были новыми, и апробированные методы классической небесной механики дали положительные результаты. Например, некоторые задачи, относящиеся к системе Земля — спутник, при отсутствии сопротивления атмосферы могут считаться в настоящее время решенными. Это задача двух тел, решаемая с помощью теории возмущений; успех ее решения частично можно объяснить популярностью проблем спутников в классической небесной меха-

нике. Ряд проблем космодинамики, тесно связанных с ограниченной задачей, представляет в настоящее время большой интерес и имеет важное значение. Многие из этих проблем являются новыми и могут отличаться от классических.

Рассмотрим известную классическую задачу трех тел Солнце — Земля — Луна и исследуем движение Луны. Можно принять, что большие тела, Солнце и Земля, движутся вокруг друг друга приблизительно по окружностям, а третье тело, Луна, движется в их поле приблизительно по эллипсу. Такая конфигурация по сути дела является стационарной, так как соударения не происходят. Это справедливо также для движения Троянцев под непрерывным действием Солнца и Юпитера. С другой стороны, одной из центральных проблем в исследовании космоса является создание искусственных тел, которые бы двигались по орбитам, связывающим близкие окрестности двух естественных небесных тел. Иногда орбиты соударения бывают желательны. Проблемы сближения и соударения, вероятно, никогда не ставились в классической небесной механике, в новых же областях космодинамики они приобретают важное значение.

Вообще можно различать три подхода к решению динамических проблем: качественный, количественный и формалистический. Применение каждого из них диктуется преимуществами, которыми они обладают. На них мы остановимся подробней во Введении, где приведем также основную библиографию и дадим краткий исторический обзор по ограниченной задаче.

В первой главе дается формулировка задачи трех тел и выводятся уравнения движения в инерциальной и вращающейся системах координат. В этой главе показывается связь между ограниченной задачей и общей задачей трех тел и приводится ряд иллюстрирующих примеров. Указывается также несколько приложений к космогонии и звездной динамике.

В гл. 2 рассматриваются приведения систем уравнений. Кроме того, здесь широко представлены аналогии с линиями тока различных потоков.

Гл. 3 посвящена регуляризации, и в ней показывается, каким образом уравнения движения могут быть написаны в форме системы, не содержащей особенностей. Это является как раз тем признаком, по которому можно отличить работу по классической небесной механике от работы по одной из современных тем. Эта глава, возможно, является одной из наиболее важных для тех, кто работает в области космодинамики.

Гл. 4 посвящена принципиальным качественным аспектам ограниченной задачи — кривым нулевой скорости; рассмотрены примеры применения некоторых из них. Представлены области допустимого движения и показаны расположение и свойства точек либрации.

В гл. 5 подробно исследуется движение и нелинейная устойчивость вблизи этих точек равновесия.

Гл. 6 можно рассматривать как краткое введение в динамику Гамильтона в расширенном фазовом пространстве.

В гл. 7 принципы и методы предыдущей главы применяются к ограниченной задаче и к процессу регуляризации. Выводятся производящие функции, причем особое внимание уделяется их правомерности и мотивировке. Естественным путем читатели знакомятся здесь с теорией возмущений.

В гл. 8 изучается задача двух тел во вращающейся системе координат и рассматриваются периодические орбиты в ограниченной задаче на основании результатов А. Пуанкаре и Дж. Д. Биркгофа.

В гл. 9 представлены количественные аспекты ограниченной задачи. Рассматриваются результаты Дж. Дарвина, Е. Стрёмгрена и Ф. Мультона, а также проводится сравнение некоторых лунных и межпланетных орбит, полученных в последнее время в Советском Союзе и в Соединенных Штатах.

Гл. 10 посвящена модификациям ограниченной задачи, таким как эллиптическая задача, трехмерная задача и задача Хилла.

В. Себехей

ВСТУПЛЕНИЕ

Материалом книги послужили лекции и семинарские занятия, которые автор проводил по различным аспектам небесной механики, динамике, ограниченной задаче трех тел, периодическим орбитам, регуляризации и космодинамике. Книга в первую очередь предназначена аспирантам, но можно думать, что благодаря широкому охвату многих вопросов она сможет служить научным справочником и учебником повышенной трудности по многим приложениям небесной механики.

Одна из целей книги состоит в том, чтобы ознакомить читателей, интересующихся приложениями небесной механики к космическим проблемам, с теми этапами, которые последовали после задачи двух тел. Студенты, изучающие небесную механику, найдут в книге как классические методы, так и последние направления в исследовании ограниченной задачи трех тел, а также смогут познакомиться с обзором соответствующей литературы.

Данная книга является первой книгой, посвященной теории орбит в ограниченной задаче. Автор стремился, образно выражаясь, «перекинуть мосты» между книгами, написанными для астрономов, математиков и инженеров, занимающихся косми-

ческими проблемами, и книгами для студентов, изучающих динамику. Вместо того чтобы создавать отдельные труды для представителей перечисленных профессий, автор счел более целесообразным написать одну книгу, которую стремился сделать полезной для широкого круга читателей. Астрономы найдут в ней материал по аналитической динамике в большем объеме, чем в обычных учебниках по небесной механике, специалисты в области динамики познакомятся с приложениями к астрономии, а математики и техники найдут в ней задачи, в которых устанавливается совокупность возможных движений рассматриваемой динамической системы.

На основании своего педагогического опыта автор убедился в том, что студенты всегда проявляют повышенный интерес к истории развития небесной механики, столь богатой своими традициями и культурным наследием. Поэтому в конце каждой главы автор помещает краткий исторический обзор и делает ссылки на соответствующие работы. Бо́льшая часть глав содержит обширную математическую информацию. Автор умышленно представил фундаментальные вопросы в объеме, иногда превышающем тот, который необходим для изложения последующего материала, с тем чтобы создать стройную систему и предоставить читателям возможность применить приобретенные ими знания к интересующим их приложениям.

Основным принципом, которым руководствовался автор, было донести до читателя мотивы и цели исследований, пробудить в нем интерес к предмету. Автор стремился избежать излишнего формализма в изложении математической части, а также специальной терминологии в приложениях. Математика является средством динамики, а не целью. При исследовании задачи трех тел автор старался не делать чрезмерного крена в сторону математики, как это получилось у Винтнера, а стремился всегда подчеркнуть динамическую сущность явления. Автор в буквальном смысле слова покорен блестящими работами Пуанкаре и Биркгофа. Он высоко оценивает изящное изложение Дж. Дарвина, краткость и немногословность стиля Зигеля, обобщения Шарлье и интересные подробности, содержащиеся в трудах Мультона и Стрёмгрена. Достоинства работ этих ученых автор пытался объединить в своей книге. Особое внимание он уделил работам, вышедшим в Советском Союзе за два или три последних десятилетия; они внесли большой вклад в дело изучения небесной механики и космодинамики. Полученные в последнее время численные результаты о траекториях в системе Земля — Луна сравниваются в книге с предыдущими результатами. Классические методы вычисления орбит не утратили своего значения.

Апрель 1967 *В. Себехей*

ВВЕДЕНИЕ

Назначение динамики состоит в том, чтобы характеризовать всю совокупность возможных движений заданной динамической системы. Причем это не обязательно должно выражаться в явном и законченном общем решении задачи. Последнее редко бывает возможно, а в тех случаях, когда оно все же возможно, оно чаще оказывается малосодержательным и не особенно полезным для понимания поведения системы. Примером может служить задача двух тел. Поскольку свойства совокупности возможных движений известны, ее можно считать решенной. Несмотря на то что координаты, описывающие движение рассматриваемых здесь тел, не могут быть представлены в окончательном виде как явные функции времени, задача все же рассматривается как решенная.

В динамике можно различать три основных метода исследования поведения динамических систем: качественный, количественный и формалистический. Качественный метод, — пожалуй, наиболее изящный, а иногда и наиболее мощный, формалистический метод служит основой для классической небесной механики, а количественный метод является наиболее популярным у астрономов и техников, которые часто могут удовлетвориться частным решением задачи, не исследуя поведения динамической системы. Примером могут служить эфемериды планет, представляющие частные решения астрономической задачи n тел, или траектории космического корабля «Аполлон» как пример частного решения технической задачи.

Качественные методы в динамике применяются при исследовании таких вопросов, как устойчивость, существование решения, интегрируемость и приводимость. Развитие качественных методов связано в первую очередь с именами А. Пуанкаре и Дж. Д. Биркгофа. Имя Хилла упоминают в этой связи реже, хотя он первый применил кривые нулевой скорости для представления граничных областей. Его метод является, вероятно, одним из самых мощных и успешных методов в ограниченной задаче.

Иногда высказывается мнение, что результаты качественной динамики не приносят большой пользы «практикам» (т. е. не тем, кто разрабатывает теорию, а тем, кто ее применяет на

практике). Это частично можно объяснить тем, что одна часть качественных результатов не получила до сих пор должной интерпретации, а другая представляет чисто теоретический интерес.

А между тем знание некоторых качественных свойств динамической системы может оказаться значительно важнее численных решений. Решения неинтегрируемых динамических систем никогда не бывают известны на всей оси времени, если только они не являются периодическими или асимптотическими. В этом можно убедиться, если попытаться представить частное решение дифференциальных уравнений динамической системы с помощью электронной вычислительной машины. Оставляя на время попытку такой оценки, постараемся мысленно представить себе выход компьютера, когда время неограниченно возрастает и ошибки от различных источников выносятся на печать. Если не будет обнаружено более или менее систематического поведения результатов, то рано или поздно выход компьютера теряет смысл и мы не получаем полезной информации относительно динамической системы вдоль всей оси времени. Орбита или поведение системы останутся неизвестными, несмотря на проделанные численные расчеты.

Другим примером может служить одна из фундаментальных вопросов динамики, а именно, описание всей совокупности возможных движений динамической системы. Для неинтегрируемых систем — это главная проблема, так как общего решения в конечном виде в этом случае не существует. Практическая важность знания всех возможных орбит между Землей и Луной не нуждается в подробном объяснении, так как выбор орбиты, «лучшим образом» отвечающей поставленной задаче, требует информации относительно возможного выбора. Формалистический подход к этой задаче малоэффективен. Даже если он и приводит к сходящемуся ряду, который дает общее решение, характер, поведение и совокупность решений в общем случае не могут быть определены из этого ряда. Количественный метод для этой задачи заключается в выборе области начальных условий, представляющих практический интерес, и вычислении стольких орбит, сколько возможно в этой области. Эту систему орбит называют «совокупностью орбит, представляющих интерес». Недостаток этого метода состоит в том, что можно пропустить полезные орбиты или даже целые семейства полезных орбит. Когда возможная область начальных условий значительна, представление численным способом семейств орбит, соответствующих шести изменяющимся начальным условиям, — задача почти безнадежная. Описание совокупности возможных движений нужно производить совместными методами (численным и формалистическим), руководствуясь при

этом качественными методами динамики. Таким образом, одна из наиболее важных практических проблем прикладной небесной механики — выбор соответствующей орбиты — эквивалентна одному из наиболее хорошо разработанных вопросов качественной динамики.

Обращаясь теперь к формалистическим методам, мы входим в «цитадель» классической небесной механики. Формалистические методы называют еще общими методами возмущений, и основным математическим приемом здесь служит разложение в ряд. При использовании общего метода возмущений начальные условия в решении сохраняются произвольными. Требуется тщательная математическая проверка сходимости рядов по переменным. По иронии судьбы, один из качественных результатов в динамике, приписываемый Пуанкаре, устанавливает, что ряды, применяемые в небесной механике, вообще являются расходящимися. Несмотря на это, конечные части таких рядов часто оказываются исключительно полезными в небесной механике, так как они дают результаты, хорошо согласующиеся с наблюдениями. Однако получить ответы на вопросы, связанные с поведением системы при неограниченном увеличении времени, на основании решений, выраженных такими рядами, конечно, нельзя. При сближении тел и при их соударении классические ряды небесной механики почти не применяются, а так как в современной динамике такие орбиты играют особо важную роль, то нужно разрабатывать новые формалистические методы.

Ожидаемое с надеждой решение вопроса о представлении совокупности решений с помощью «простых» функций начальных условий и времени, может быть, даст когда-нибудь формалистическая динамика. Для этого, однако, нужно развивать все три основные метода, но ведущая роль здесь остается за формалистическим методом. Метод Ньютона в динамике состоял в нахождении как раз таких явных выражений, представляющих движение динамических систем.

Продвижение в небесной механике и прогресс в других областях науки с математической ориентацией обнаруживают в большей или меньшей степени схожие этапы. Сначала предпринимается попытка описать интересующее поле с помощью простых аналитических выражений. Если первая попытка получить простые решения в конечном виде терпит неудачу, то это приводит к необходимости последовательных приближений и решения в форме рядов. Задачи типа «разрешимых» динамических систем, в которых первый этап приносит результаты, считаются решенными, и их обычно скоро оставляют в стороне. Количественные методы в динамике в сущности не отличаются от первого этапа, поскольку дают частное решение в

простой форме: систему чисел, представляющих координаты как функции времени. Те задачи, для которых важно иметь общие решения, но которые в то же время не являются «интегрируемыми» и потому не позволяют получить простые общие решения, относятся ко второй фазе математической физики: к задачам, решаемым с помощью рядов. Некоторые задачи решаются на этом этапе, если решения в форме рядов обладают свойствами общего решения. Это редко случается в сложных системах, где сходимость последовательных приближений и сам физический смысл решения в форме ряда не вполне ясны. Физические задачи, подпадающие под эту категорию, должны рассматриваться с позиций качественных методов.

Количественный метод в динамике соответствует экспериментированию. Роль его трудно переоценить, в особенности в неинтегрируемых динамических системах, так как он по существу является единственным методом, который позволяет получать орбиту, когда вопрос о сходимости при формалистическом подходе подвергается сомнению. Роль должным образом поставленных экспериментов и важность интерпретации получаемых результатов хорошо известны в физике. Основной «инструмент» при экспериментировании в динамике — ЭВМ — сравнительно недавно стала одним из важных средств решения сложных задач, поэтому экспериментирование в динамике не продвинулось так далеко, как, например, в физике. Известные классические расчетные результаты в ограниченной задаче были получены Е. Стрёмгреном и Дж. Дарвином без применения цифровых вычислительных машин. Последние результаты, полученные с помощью быстродействующих ЭВМ, позволили открыть некоторые важные свойства системы, которые можно проверить теоретически. Такой теоретико-экспериментальный подход к динамике обладает большими потенциальными возможностями.

История ограниченной задачи начинается с Эйлера и Лагранжа (1772 г.), затем она получила развитие в трудах Якоби (1836 г.), Хилла (1878 г.), Пуанкаре (1899 г.), Леви-Чивита (1905 г.) и Биркгофа (1915 г.). Период времени от Эйлера до наших дней продолжительностью почти что в 200 лет включает имена и многих других ученых, внесших свой вклад в изучение этой задачи. В нашем коротком историческом обзоре мы, к сожалению, не имеем возможности на них остановиться, и все наше внимание мы сосредоточим на работах Эйлера, Якоби и Пуанкаре.

Первый вклад в изучение этой задачи сделал Эйлер в 1772 г. в связи с его теорией движения Луны. Его работа явилась первым важным исследованием ограниченной задачи и оказала существенное влияние на дальнейшее развитие теории

движения Луны и даже на некоторые последние работы по космодинамике. Его главным достижением явилось введение синодической (вращающейся) системы координат, использование которой приводит к интегралу уравнений движения, известному в настоящее время как интеграл Якоби. Сам Эйлер не открывал интеграла Якоби, это впервые сделал Якоби (1836 г.), который, по выражению Винтнера, «вновь открыл» синодическую систему. Действительное положение в некоторой степени спорно, так как Якоби опубликовал свой интеграл в сидерической (неподвижной) системе, в которой его значение несомненно не столь велико, как в синодической системе. Ироническое замечание Винтнера, о котором говорилось выше, не вполне точно; нельзя также согласиться с его рекомендацией рассматривать доклад Ньюкома о теории движения Луны как полезный источник по истории ограниченной задачи.

Еще до своей теории движения Луны Эйлер в 1760 г. дал решение задачи, в которой две неподвижные массы притягивают третью согласно ньютоновскому закону гравитации. Эта динамическая система представляет собой специальный и сильно упрощенный случай ограниченной задачи, в которой центробежные силы и силы Кориолиса отсутствуют. Непосредственное значение ее ограничено, так как неподвижные притягивающие центры ни в небесной механике, ни в ее приложениях не встречаются. Но сам факт решения Эйлером в конечном виде задачи двух неподвижных притягивающих центров имеет важное значение, и решение это находит многочисленные приложения в ряде других областей. В литературе по космодинамике интерес к этой задаче (и к ее упрощению с помощью теоремы Боннэ) возник в 1959 г. в связи с вопросом о надежности и точности решений, получаемых с помощью цифровых вычислительных машин.

Решение Эйлера задачи двух неподвижных притягивающих центров может быть использовано также в задаче об искусственном спутнике, а также в ограниченной задаче в качестве промежуточной орбиты при вычислениях на основе теории возмущений. Решение Винти задачи об искусственном спутнике, полученное им независимо от результата Эйлера, действительно оказалось в основном аналитически идентичным с ним. Идея использования решения Эйлера в качестве промежуточной орбиты в ограниченной задаче в настоящее время не является новой. К сожалению, это решение содержит эллиптические функции и потому менее удобно, чем значительно более простой метод Энке, в котором в качестве промежуточных орбит используются конические сечения. С другой стороны, в задаче Эйлера учитывается действие обеих масс, тогда как в методе Энке только одной.

Третье приложение задачи Эйлера двух неподвижных притягивающих центров относится к задаче о регуляризации. Преобразование координат, примененное Эйлером при решении задачи двух неподвижных притягивающих центров, в случае использования его в ограниченной задаче исключает особенности или, иными словами, «регуляризует» задачу. Тиле (1892 г.) и Барро (1906 г.) применяли это преобразование для ограниченной задачи, выполняя регуляризующий процесс. Кроме того, большое количество численных расчетов, выполненных Копенгагенской школой под руководством Стрёмгрена (1935 г.), основывалась на этом преобразовании.

Интеграл ограниченной задачи связывают с именем Якоби. Приложения этого интеграла многочисленны. Так как он устанавливает связь между величиной скорости третьего тела и его положением, то он дает нам возможность установить некоторые общие *качественные* характеристики движения, не решая уравнений движения. Этот факт имеет важное значение для приложения интеграла к «неразрешимой» динамической задаче. Он позволяет установить определенную запрещенную область, в которой третье тело не может находиться. Этот принцип впервые применил Хилл (1878 г.), для того чтобы показать, что расстояние между Землей и Луной все время должно быть ограниченным сверху. Это говорит о том, что *если* модель Хилла пригодна для системы Солнце—Земля—Луна, то Луна не может удалиться от Земли на произвольно большое расстояние.

Три известных тома Пуанкаре *Méthodes Nouvelles* были закончены им в 1899 г. Эта работа была (и остается) в такой степени новой и оригинальной, что даже сейчас значение некоторых ее разделов еще не полностью раскрыто. Наиболее важной особенностью работ Пуанкаре является, возможно, то внимание, которое он уделял качественным аспектам небесной механики. Подобно Эйлеру, разработавшему свою теорию движения Луны, которую можно считать величайшим научным достижением человечества, Пуанкаре был первый, кто развил аналитические методы, которые можно рассматривать как одно из величайших достижений в области теории. Работы Эйлера по ограниченной задаче были продолжены Хиллом и Брауном (1896 г.), который создал наиболее точную теорию движения Луны; Пуанкаре же нашел последователя в лице Биркгофа (1915 г.), который развил качественные методы динамики и довел их до таких высот, которые до сих пор никем не превзойдены.

Проблема регуляризации, столь важная для некоторых приложений космодинамики, связана с именами Тиле (1892 г.),

Пенлеве (1897 г.), Леви-Чивита (1903 г.), Барро (1906 г.), Зундмана (1912 г.) и Биркгофа (1915 г.).

Интерпретация и развитие идей Эйлера были выполнены, доведены до кульминационной точки и затем завершены Биркгофом. В двадцатые годы свои результаты опубликовала школа Мультона, а в тридцатые годы были опубликованы работы по качественным методам Моисеева и Биркгофа, а также окончательные количественные результаты школы Стрёмгреиа. В 1941 г. вышла книга Винтнера, а в пятидесятые годы — важная работа Колмогорова, а также книга Зигеля. В шестидесятые годы советские авторы, следуя Колмогорову, сделали ряд существенных шагов в развитии качественного анализа. Кроме того, в эти же годы с помощью цифровых вычислительных машин был выполнен целый ряд численных экспериментальных работ по динамике.

Литература по ограниченной задаче тесным образом связана с работами по небесной механике и с книгами по динамике. Отдельные главы книг по небесной механике Пламмера (1918 г.), Шарлье (1907 г.), Мультона (1914 г.), Брауэра и Клеменса (1961 г.), Дэнби (1962 г.) и Маккаски (1963 г.) содержат информационный материал по ограниченной задаче. «Аналитическую динамику» Уиттекера (1904 г.) можно рассматривать как фундаментальный учебник по динамике, на который можно всегда ссылаться в работах по общей и ограниченной задачам трех тел. В главах книг Парса (1965 г.) и Полларда (1966 г.) эти задачи коротко излагаются с динамической и математической позиций.

Закончим наше введение высказыванием Биркгофа в 1927 г. по поводу выхода в свет одной книги, подобной нашей: «Тогда, когда нет физической теории, которую с полным основанием можно было бы назвать фундаментальной, известные теории выглядят более или менее фундаментальными по определенным направлениям; в них может с уверенностью утверждаться, что обыкновенные дифференциальные уравнения в действительной области и, в частности, уравнения динамического происхождения продолжают занимать положение чрезвычайной важности».

Глава 1

ПОСТАНОВКА ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ

§ 1.1. Введение

При решении физических задач часто возникают трудности, происходящие из-за недостаточно точных определений. После того как задача сформулирована, пути решения ее во многом бывают уже определены. Поэтому мы постараемся сформулировать ограниченную задачу наиболее простым и ясным образом.

Точные и ясные определения необходимы, но, конечно, не достаточны для того, чтобы добиться прогресса. Задача трех тел представляет собой тот случай, когда задачу сформулировать сравнительно легко, и это можно сделать вполне точно. Задача ставится ясно, и решение ее нам надлежит найти.

В этой главе приводится наиболее простая и часто встречающаяся формулировка ограниченной задачи. В своей основной форме она впервые была дана, по-видимому, Л. Эйлером в его трудах по второй теории движения Луны почти что 200 лет тому назад.

Поставив задачу, мы выведем уравнения движения в инерциальной (сидерической) и вращающейся (синодической) системах координат, используя как физические (размерные), так и безразмерные переменные. Мы сравним четыре типа уравнений и покажем, как введение синодической системы координат приводит к существованию интеграла Якоби. Вывод этих четырех систем уравнений движения основывается на простых принципах, а используемые элементарные методы способствуют лучшему пониманию физической сущности. Позже, в гл. 7, мы приведем уравнения движения в форме Лагранжа и в форме Гамильтона и дадим более точную и в то же время более сложную картину.

Ограниченную задачу мы представим как вырожденный случай общей задачи трех тел. Это будет служить основой для двух важных вопросов. Будут рассмотрены различные модификации основной ограниченной задачи. В последнем параграфе главы мы исследуем приложения ограниченной задачи.

§ 1.2. Постановка задачи и уравнения движения в сидерической системе координат

Сформулируем задачу следующим образом. Пусть два тела обращаются вокруг их общего центра масс по круговым орбитам под действием взаимного ньютоновского притяжения, а третье тело (притягиваемое двумя первыми, но не оказывающее влияние на их движение) движется в плоскости, определяемой двумя вращающимися телами. *Ограниченная задача трех тел состоит в том, чтобы описать движение этого третьего тела.*

Два обращающихся тела будем называть *основными телами* *) (в звездной динамике их обычно называют первым и вторым телом, но мы этой терминологии придерживаться не будем). Массы m_1 и m_2 этих тел произвольны, но внутреннее распределение масс в этих телах таково, что их можно принять за точечные массы. Масса третьего тела m_3 определяется более сложным образом. Подробней об этом будет сказано позже, в этой же главе мы ограничимся указанием на то, что масса m_3 намного меньше масс m_1 и m_2. Это следует из принятого нами предположения, что масса m_3 не влияет на движение масс m_1 и m_2. Круговое движение масс m_1 и m_2 вокруг их центра масс O показано на рис. 1.1.

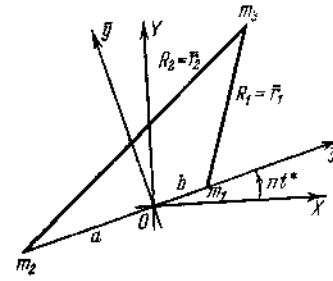


Рис. 1.1. Неподвижная (сидерическая) и вращающаяся (синодическая) системы координат ($m_1>m_2$).

Равновесие гравитационной и центробежной сил требует, чтобы

$$k^2\frac{m_1m_2}{l^2}=m_2an^2=m_1bn^2, \tag{1}$$

где k — гравитационная постоянная, n — (общая) угловая скорость масс m_1 и m_2, l — расстояние между массами m_1 и m_2 и a и b — расстояния центра масс m_1 и m_2 соответственно от m_2 и m_1 (см. рис. 1.1). Величину n в небесной механике называют средним движением, а угол nt^* — долготой массы m_1. (Мы здесь пользуемся символом t^*, оставляя t для обозначения безразмерного времени.)

*) В нашей литературе их чаще называют телами или точками конечной массы, а третье тело называют телом или точкой «нулевой массы», или «пассивно-гравитирующей» точкой. (*Прим. перев.*)

Из уравнений (1) получаем

$$k^2m_1=an^2l^2,\quad k^2m_2=bn^2l^2,\quad k^2(m_1+m_2)=n^2l^3. \tag{2}$$

Последнее уравнение выражает третий закон Кеплера. Кроме того, имеем

$$a=\frac{m_1l}{M}\quad\text{и}\quad b=\frac{m_2l}{M}, \tag{3}$$

где $M=m_1+m_2$.

Уравнения движения массы m_3 в инерциальной (неподвижной) прямоугольной системе координат X, Y записываются следующим образом:

$$\frac{d^2X}{dt^{*2}}=\frac{\partial F}{\partial X},\quad \frac{d^2Y}{dt^{*2}}=\frac{\partial F}{\partial Y}. \tag{4}$$

Инерциальную систему координат X, Y, показанную на рис. 1.1, называют сидерической системой. Через F в уравнениях (4) обозначена силовая функция (или потенциал со знаком минус), определяемая формулой

$$F=k^2\left(\frac{m_1}{R_1}+\frac{m_2}{R_2}\right). \tag{5}$$

Расстояния R_1 и R_2 выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} R_1&=[(X-X_1)^2+(Y-Y_1)^2]^{\frac{1}{2}},\\ R_2&=[(X-X_2)^2+(Y-Y_2)^2]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{6}$$

где X_1, Y_1 и X_2, Y_2 — зависящие от времени координаты масс m_1 и m_2; как видно из рис. 1.1

$$\begin{aligned} X_1&=b\cos nt^*,\quad X_2=-a\cos nt^*,\\ Y_1&=b\sin nt^*,\quad Y_2=-a\sin nt^*. \end{aligned}$$

Зависимость координат масс m_1 и m_2 от времени приводит к тому, что уравнения движения содержат время явным образом. Это легко понять, так как массы m_1 и m_2 *движутся* в неподвижной системе координат. Формальное доказательство того, что время входит в уравнения явно, можно провести, подставив зависящие от времени координаты в формулы (6), их в свою очередь подставить в формулу (5), а его — в уравнения (4). Тогда уравнения (4) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^{*2}}&=-k^2\left[\frac{m_1(X-b\cos nt^*)}{R_1^3}+\frac{m_2(X+a\cos nt^*)}{R_2^3}\right],\\ \frac{d^2Y}{dt^{*2}}&=-k^2\left[\frac{m_1(Y-b\sin nt^*)}{R_1^3}+\frac{m_2(Y+a\sin nt^*)}{R_2^3}\right], \end{aligned} \tag{7}$$

или сокращенно

$$\frac{d^2X}{dt^{*2}}=\frac{\partial F(X, Y, t^*)}{\partial X} \quad \text{и} \quad \frac{d^2Y}{dt^{*2}}=\frac{\partial F(X, Y, t^*)}{\partial Y}. \tag{8}$$

§ 1.3. Инвариантное соотношение и полная энергия системы

В этом параграфе рассматриваются три вопроса, имеющие важное теоретическое значение. В пункте А выводится инвариантное соотношение для ограниченной задачи в инерциальной системе координат, в пункте Б дается определение интеграла динамической системы в общем виде и в пункте В рассматривается условие сохранения энергии.

А. Поскольку поле гравитационных сил обладает потенциалом, можно попробовать вывести инвариантное соотношение, соответствующее сохранению энергии динамической системы. Умножая уравнения (8) соответственно на dX/dt^* и dY/dt^*, складывая и интегрируя по времени, получаем

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dX}{dt^*}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt^*}\right)^2\right]=\int_{t_0^*}^{t^*}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\frac{dX}{dt^*}+\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{dY}{dt^*}\right)dt^*, \tag{9}$$

где постоянная интегрирования временно опущена. Так как

$$dF=F_X dX+F_Y dY+F_{t^*}dt^*$$

(с помощью индексов обозначены частные производные), то квадратура в правой части равенства (9) принимает вид

$$\int_{t_0^*}^{t^*} dF-F_{t^*}dt^*=F-\int_{t_0^*}^{t^*}F_{t^*}dt^*. \tag{10}$$

Из уравнений (9) и (10) получаем

$$\frac{1}{2}V^2=F-\int_{t_0^*}^{t^*}F_{t^*}dt^*, \tag{11}$$

где V — скорость массы m_3. Таким образом, энергия в системе не сохраняется, ибо выражение $^1/_2V^2—F$ зависит от времени и не является постоянным. Квадратуру

$$\int_{t_0^*}^{t^*}\frac{\partial F(X, Y, t^*)}{\partial t^*}\,dt^*,$$

входящую в правую часть уравнения (11), можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим решение, данное в форме $X=X(\alpha_i, t^*)$, $Y=Y(\alpha_i, t^*)$, где постоянные α_i $(i=1, 2, \ldots, 4)$

представляют начальные условия. Подставляя решение в квадратуру, получаем функцию, зависящую от начальных условий и от времени. Таким образом, уравнение (11) примет вид

$$^1/_2V^2 - F = C(\alpha_i, t^*).$$

Следует заметить, что соотношение, подобное (11), имеет ограниченное применение, пока не сделаны дополнительные приближенные предположения, так как в общем случае его интерпретация требует решения задачи. С другой стороны, если силовая функция F не должна зависеть явным образом от времени, то тогда должны выполняться равенства $F_{t^*}=0$ и $^1/_2V^2 - F = C(\alpha_i)$, т. е. постоянная интегрирования должна зависеть только от начальных условий.

Выражение (11) представляет собой инвариантное соотношение рассматриваемой динамической системы. Хотя оно непосредственно и не оказывает помощи при установлении «решения», однако оно полезно при проверке числеиных и формальных расчетов. Ниже мы даем определение интеграла динамической системы, чтобы исключить возможность неправильного понимания.

Б. Рассмотрим динамическую систему с n степенями свободы и с координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и напишем уравнения движения в форме

$$\frac{d^2q_i}{dt^2} = Q_i(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t), \tag{12}$$

где $i=1, \ldots, n$, а t есть время. Эту систему n уравнений второго порядка можно записать в виде системы $2n$ уравнений первого порядка, положив $x_i=q_i$ и $x_{n+i}=\dot{q}_i$ или

$$x_1=q_1,\ x_2=q_2,\ \ldots,\ x_n=q_n,\ x_{n+1}=\dot{q}_1,\ x_{n+2}=\dot{q}_2,\ \ldots,\ x_{2n}=\dot{q}_n. \tag{13}$$

Уравнения (12) тогда примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_{n+i}, \\ \frac{dx_{n+i}}{dt} &= Q_i(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, t). \end{aligned} \tag{14}$$

В явной и подробной форме уравнения (14) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_{n+1},\ \dot{x}_2 = x_{n+2},\ \ldots,\ \dot{x}_n = x_{2n}, \\ \dot{x}_{n+1} &= Q_1(x_1, \ldots, x_{2n}, t), \\ \dot{x}_{n+2} &= Q_2(x_1, \ldots, x_{2n}, t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{2n} &= Q_n(x_1, \ldots, x_{2n}, t) \end{aligned} \tag{15}$$

или короче

$$\dot{x}_k = P_k(x_1, \ldots, x_m, t), \tag{16}$$

где $k=1, 2, \ldots, m$, $m=2n$, а P_k и их частные производные суть определенные и непрерывные функции в некоторой области.

Рассмотрим теперь систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, представляемую уравнениями (16), и дадим определение интеграла этой системы. Если функция $G(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$, обладающая теми же свойствами, что и P_k, при подстановке в нее любой системы решения $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{dG}{dt}=0, \tag{17}$$

то соотношение $G(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)=\text{const}$ мы будем называть интегралом системы (16). В развернутом виде уравнение (17) выглядит следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}+\frac{\partial G}{\partial t}=0,$$

или, используя (16),

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G}{\partial x_k}P_k+\frac{\partial G}{\partial t}=0. \tag{18}$$

Уравнение (18) выражает условие, которое должно выполняться, чтобы G было интегралом.

В. Покажем теперь, что в ограниченной задаче полная энергия не остается постоянной. Полная энергия массы m_3 (принимаемой за единицу) равна

$$h_3=\frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dt^*}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dY}{dt^*}\right)^2-F, \tag{19}$$

что, как было показано в пункте А, не является постоянной величиной. Встает вопрос, будет ли постоянна полная энергия динамической системы, состоящей из трех тел? Полная энергия нескольких отдельных частиц равна, естественно, сумме их энергий. Таким образом, будем иметь

$$H=m_3h_3+H_{12}, \tag{20}$$

где H_{12} есть энергия системы m_1, m_2, равная

$$H_{12}=\frac{1}{2}n^2(m_1b^2+m_2a^2)-k^2\frac{m_1m_2}{l}. \tag{21}$$

Первый член выражает здесь кинетическую энергию, а второй — потенциальную энергию. Из уравнений (1) и (2) легко

находим

$$\frac{1}{2} n^2 (m_1 b^2 + m_2 a^2) = \frac{1}{2} k^2 \frac{m_1 m_2}{l}. \tag{22}$$

Следовательно, $H_{12} = -\frac{1}{2} k^2 m_1 m_2 / l = \text{const}$, и полная энергия системы трех тел будет равна

$$H = m_3 h_3 - \frac{1}{2} k^2 \frac{m_1 m_2}{l} \neq \text{const}. \tag{23}$$

Формальная причина того, что полная энергия трех тел в ограниченной задаче не является постоянной, заключается просто в том, что полная энергия массы m_3 не постоянна, тогда как полная энергия системы масс m_1 и m_2 постоянна и, стало быть, сумма энергий не может быть постоянной. Более глубокая причина этого «нарушения закона сохранения энергии» будет нами вскрыта в следующей главе, где будет рассмотрена общая задача трех тел. В ограниченной задаче трех тел мы пренебрегаем влиянием массы m_3 на движение масс m_1 и m_2 и создаем, таким образом, динамическое условие, которое может иметь место, строго говоря, только, когда $m_3 = 0$. Если это условие выполняется, то, естественно, уравнение (23) дает постоянное значение полной энергии трех тел: $H = -\frac{1}{2} k^2 m_1 m_2 / l = \text{const}$.

Если масса m_3 отлична от нуля, то она должна оказывать влияние на движение масс m_1 и m_2, и они не могут двигаться по круговым орбитам, как мы предполагали. В этом случае уравнение (21) не будет справедливо и энергия H_{12} не будет постоянна. Полная энергия динамической системы, состоящей из трех тел, при отсутствии ограничений на движение масс m_1 и m_2 будет иметь потенциал, не зависящий явно от времени, и, следовательно, полная энергия этой системы будет сохраняться постоянной.

§ 1.4. Уравнения движения в синодической системе координат и интеграл Якоби

Как уже говорилось, вследствие движения двух основных тел, силовая функция F содержит время явным образом. Поэтому гамильтониан явно зависит от времени, не является интегралом и не остается постоянным вдоль орбиты. Это будет показано в гл. 7.

Руководствуясь принципом, что одной из целей математики является проверка интуитивных предположений, поставим следующий вопрос: в какой системе координат силовая функция не будет зависеть явным образом от времени? Интуитивный ответ, очевидно, будет такой: так как зависимость от времени является следствием движения основных тел в неподвижной (сиде-

рической) системе координат, то нужно ожидать, что система координат, в которой массы m_1 и m_2 будут неподвижны, окажется наилучшей. Приводимые ниже выкладки подтверждают нашу догадку.

Преобразование координат представляет собой вращение, которое в обозначениях рис. 1.1 записывается в виде

$$\begin{aligned} X &= \bar{x}\cos nt^* - \bar{y}\sin nt^*, \\ Y &= \bar{x}\sin nt^* + \bar{y}\cos nt^*, \end{aligned} \tag{24}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}},$$

где вектор $\mathbf{R}$ имеет составляющие X, Y, вектор $\bar{\mathbf{r}}$ — составляющие $\bar{x}$, $\bar{y}$, а матрица $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos nt^* & -\sin nt^* \\ \sin nt^* & \cos nt^* \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Преобразование уравнений (7) будет, по-видимому, самым простым, если ввести комплексные переменные. Положим

$$Z = ze^{int^*}, \tag{26}$$

где

$$z = \bar{x} + i\bar{y},\ Z = X + iY,\ i = (-1)^{1/2}.$$

Расстояния R_1 и R_2, определяемые уравнениями (7), тогда запишутся в виде

$$R_1 = |Z - Z_1| \text{ и } R_2 = |Z - Z_2|, \tag{27}$$

где согласно уравнениям (7)

$$Z_1 = be^{int^*} \text{ и } Z_2 = -ae^{int^*}. \tag{28}$$

Подставляя Z из уравнения (26), а Z_1 и Z_2 — из уравнений (28), получаем уравнения (27) в виде

$$\begin{aligned} R_1 &= |z - b| = [(\bar{x} - b)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{1}{2}}, \\ R_2 &= |z + a| = [(\bar{x} + a)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{29}$$

Левые части уравнений (7) в комплексной форме принимают вид

$$\frac{d^2Z}{dt^{*2}} = \left(\frac{d^2z}{dt^{*2}} + 2in\frac{dz}{dt^*} - n^2z\right)e^{int^*}. \tag{30}$$

(Преобразование остальных членов уравнения (7) предлагается читателям провести самостоятельно в качестве несложного упражнения.) Уравнения движения во вращающейся системе

координат в комплексной форме записываются следующим образом:

$$\frac{d^2z}{dt^{*2}}+2in\frac{dz}{dt^*}-n^2z=-k^2\left[m_1\frac{z-b}{|z-b|^3}+m_2\frac{z+a}{|z+a|^3}\right]. \quad (31)$$

Вещественная и мнимая части дают:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{x}}{dt^{*2}}-2n\frac{d\bar{y}}{dt^*}-n^2\bar{x}&=-k^2\left[m_1\frac{\bar{x}-b}{\bar{r}_1^3}+m_2\frac{\bar{x}+a}{\bar{r}_2^3}\right],\\ \frac{d^2\bar{y}}{dt^{*2}}+2n\frac{d\bar{x}}{dt^*}-n^2\bar{y}&=-k^2\left[\frac{m_1\bar{y}}{\bar{r}_1^3}+\frac{m_2\bar{y}}{\bar{r}_2^3}\right],\end{aligned} \quad (32)$$

где для R_1, R_2 введены обозначения $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$. Мы видим, что во вращающейся системе координат расстояния не обнаруживают явной зависимости от времени (сравните с уравнениями (29)). Уравнения (32) подтверждают интуитивное предположение, что во вращающейся системе координат можно ожидать, что силовая функция не будет явно зависеть от времени. Правые части уравнений (7) упрощаются, поскольку уравнения (32) не содержат t^*, тогда как левые части, наоборот, несколько усложняются: в них входят первые производные и линейные члены. Члены $n^2\bar{x}$ и $n^2\bar{y}$, правда, можно объединить с членами, стоящими в правых частях, но наличие первых производных порождает вопрос: будет ли преобразование представлять интерес или оно только усложнит задачу? Ответ на этот вопрос связан с тем обстоятельством, что новые уравнения (32) имеют «полезный» интеграл. В самом деле, единственный известный интеграл ограниченной задачи может быть получен непосредственно из уравнений (32) тем же способом, каким было получено уравнение (9) из уравнения (8). Прежде, чем это проделать, выразим сначала силовую функцию, принадлежащую уравнениям (32). С этой целью перепишем их в виде

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^{*2}}-2n\frac{d\bar{y}}{dt^*}=\frac{\partial F^*}{\partial\bar{x}},\quad \frac{d^2\bar{y}}{dt^{*2}}+2n\frac{d\bar{x}}{dt^*}=\frac{\partial F^*}{\partial\bar{y}} \quad (33)$$

и найдем функцию F^* такую, чтобы

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^*}{\partial\bar{x}}&=n^2\bar{x}-k^2\left[m_1\frac{\bar{x}-b}{\bar{r}_1^3}+m_2\frac{\bar{x}+a}{\bar{r}_2^3}\right],\\ \frac{\partial F^*}{\partial\bar{y}}&=n^2\bar{y}-k^2\left[\frac{m_1\bar{y}}{\bar{r}_1^3}+\frac{m_2\bar{y}}{\bar{r}_2^3}\right].\end{aligned} \quad (34)$$

Это — известная задача теории потенциала, и так как при составлении производящих функций канонических преобразований мы в дальнейшем встретимся с аналогичными задачами и методами, то мы остановимся на ней несколько подробней в

§ 1.7. Сейчас же ограничимся тем, что приведем решение для задачи, описываемой уравнениями (34). Имеем

$$F^* = \frac{n^2}{2}(\bar{x}^2+\bar{y}^2)+k^2\left(\frac{m_1}{\bar{r}_1}+\frac{m_2}{\bar{r}_2}\right). \tag{35}$$

Заметим, что функция F^* может быть получена также непосредственно из преобразования.

Уравнения (33) имеют интеграл, что можно показать, умножив первое из них на $d\bar{x}/dt^*$, второе — на $d\bar{y}/dt^*$, сложив и проинтегрировав по времени t^*. Проделав это, получим

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt^*}\right)^2+\left(\frac{d\bar{y}}{dt^*}\right)^2\right]=\int_{t_0^*}^{t^*}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \bar{x}}d\bar{x}+\frac{\partial F^*}{\partial \bar{y}}d\bar{y}\right)=F^*-\frac{C^*}{2}, \tag{36}$$

так как теперь

$$dF^*=\frac{\partial F^*}{\partial \bar{x}}d\bar{x}+\frac{\partial F^*}{\partial \bar{y}}d\bar{y}.$$

Этот интеграл называют интегралом Якоби, а величину C^* — постоянной Якоби.

Иную форму уравнения (36) можно получить, если обозначить через $\bar{v}$ скорость во вращающейся системе координат. Тогда

$$\bar{v}^2=2F^*-C^*. \tag{37}$$

Подставляя сюда F^* из равенства (35) и полагая $\bar{x}^2+\bar{y}^2=\bar{r}^2$, находим

$$\bar{v}^2=n^2\bar{r}^2+2k^2\left(\frac{m_1}{\bar{r}_1}+\frac{m_2}{\bar{r}_2}\right)-C^*. \tag{38}$$

§ 1.5. Уравнения движения в безразмерных координатах

А. Уравнения движения в инерциальной системе координат (уравнения (7)) в качестве физических параметров содержат k^2, a, b, m_1, m_2 и n, не все из которых являются независимыми. Покажем с помощью безразмерных переменных, что ограниченная задача зависит только от одного параметра. Для этой цели введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{gathered}\xi=\frac{X}{l},\quad \eta=\frac{Y}{l},\quad t=nt^*,\quad \mu_1=\frac{m_1}{M}=\frac{a}{l},\\ \mu_2=\frac{m_2}{M}=\frac{b}{l},\quad \rho_1=\frac{R_1}{l},\quad \rho_2=\frac{R_2}{l}.\end{gathered} \tag{39}$$

Уравнения движения тогда примут вид

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi},\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \tag{40}$$

где

$$\varphi=\frac{F}{l^2n^2}=\frac{\mu_1}{\rho_1}+\frac{\mu_2}{\rho_2} \tag{41}$$

и

$$\begin{aligned}\rho_1^2&=(\xi-\mu_2\cos t)^2+(\eta-\mu_2\sin t)^2,\\ \rho_2^2&=(\xi+\mu_1\cos t)^2+(\eta+\mu_1\sin t)^2.\end{aligned} \tag{42}$$

Переменными, входящими в эти уравнения движения, являются безразмерные координаты ξ, η и безразмерное время t. Единственными оставшимися параметрами (постоянными) являются μ_1 и μ_2, но так как $m_1/M+m_2/M=1$, то имеем $\mu_1+\mu_2=1$, т. е. если задана одна из безразмерных масс, другая тем самым уже определена. Поэтому мы оставим только один параметр (либо μ_1, либо μ_2), выбор которого определяет задачу.

Безразмерные уравнения, соответствующие уравнениям (7), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2}&=-\left[\mu_1\frac{\xi-\mu_2\cos t}{\rho_1^3}+\mu_2\frac{\xi+\mu_1\cos t}{\rho_2^3}\right],\\ \frac{d^2\eta}{dt^2}&=-\left[\mu_1\frac{\eta-\mu_2\sin t}{\rho_1^3}+\mu_2\frac{\eta+\mu_1\sin t}{\rho_2^3}\right].\end{aligned} \tag{43}$$

Б. Составим теперь уравнения движения во вращающейся системе координат в безразмерных переменных. Мы увидим, что таким путем дифференциальные уравнения движения получат наиболее простую форму.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned}&x=\frac{\bar{x}}{l},\quad y=\frac{\bar{y}}{l},\quad t=nt^*,\\ &r_1=\frac{\bar{r}_1}{l},\quad r_2=\frac{\bar{r}_2}{l},\quad \mu_{1,2}=\frac{m_{1,2}}{M}.\end{aligned} \tag{44}$$

Уравнения (32) § 1.4 тогда примут вид

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\bar{\Omega}_x,\quad \ddot{y}+2\dot{x}=\bar{\Omega}_y, \tag{45}$$

где точка обозначает дифференцирование по безразмерному времени t, а индексы в правых частях — дифференцирование частным образом соответственно по x и y. Функция $\bar{\Omega}$ выражается через введенную выше для неподвижной системы функцию φ (уравнение (41)) и безразмерную форму силовой функ-

цин F (уравнение (35)):

$$\bar{\Omega}=\frac{F^*}{l^2n^2} \tag{46}$$

или

$$\bar{\Omega}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{\mu_1}{r_1}+\frac{\mu_2}{r_2}, \tag{47}$$

где

$$r_1^2=(x-\mu_2)^2+y^2, \quad r_2^2=(x+\mu_1)^2+y^2. \tag{48}$$

Уравнения (45) и (47), определяющие задачу в синодической системе координат, получили широкое распространение. Модификация функции $\bar{\Omega}$, получаемая путем прибавления постоянной, не сказывается на уравнениях движения и приводит к более симметричной форме. Положим

$$\Omega=\bar{\Omega}+\frac{1}{2}\mu_1\mu_2. \tag{49}$$

Тогда будем иметь

$$\Omega=\frac{1}{2}(\mu_1 r_1^2+\mu_2 r_2^2)+\frac{\mu_1}{r_1}+\frac{\mu_2}{r_2} \tag{50}$$

или

$$\Omega=\mu_1\left(\frac{r_1^2}{2}+\frac{1}{r_1}\right)+\mu_2\left(\frac{r_2^2}{2}+\frac{1}{r_2}\right). \tag{51}$$

Уравнения движения записываются в виде

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\Omega_x, \quad \ddot{y}+2\dot{x}=\Omega_y. \tag{52}$$

Интеграл Якоби уравнений (45) имеет вид

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\bar{\Omega}-\bar{C}, \tag{53}$$

и подставляя Ω вместо $\bar{\Omega}$, получаем

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega-C. \tag{54}$$

Отсюда

$$C=\bar{C}+\mu_1\mu_2. \tag{55}$$

Интеграл Якоби (54) в безразмерной форме, в синодической системе координат связывает безразмерную относительную скорость с координатами посредством постоянной Якоби.

Переход к неподвижной системе координат (к безразмерной сидерической системе) осуществляется с помощью преобразований

$$\xi=x\cos t-y\sin t, \quad \eta=x\sin t+y\cos t,$$

аналогичных уравненням (24), или с помощью соотношения

$$\zeta = ze^{it},$$

где теперь $z = x + iy$.

Левая часть интеграла Якоби (54) преобразуется в $(\dot{\xi}+\eta)^2 + (\dot{\eta}-\xi)^2$, а правая часть принимает вид

$$\xi^2 + \eta^2 + \frac{2\mu_1}{\rho_1} + \frac{2\mu_2}{\rho_2} - \overline{C},$$

где ρ_1 и ρ_2 определяются формулами (42).

Таким образом, в сидерической системе координат интеграл Якоби принимает вид

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \frac{2\mu_1}{\rho_1} + \frac{2\mu_2}{\rho_2} - \overline{C}. \qquad (56)$$

Задача. Выведите уравнение (56) непосредственно из уравнений движения в сидерической системе координат.

В. Параметры μ_1 и μ_2 связаны между собой соотношением $\mu_1 + \mu_2 = 1$. В безразмерной системе переменных параметры μ_1 и μ_2 представляют собой массы основных тел. Сумма их равна единице. Расстояние между ними тоже равно единице, так как линейные размеры, входящие в уравнения, приведены к безразмерной форме путем деления на расстояние l между основными телами. Безразмерное время t служит также мерой угла, на который поворачивается вращающаяся система координат за фактическое время t^*. Величине t можно дать и другую физическую интерпретацию, а именно, рассматривать ее как долготу массы m_1 или μ_1.

Зависимые переменные x и y относятся к вращающейся системе координат. Если, например, они будут постоянны, то физически это будет означать, что третье тело относительно вращающейся системы координат остается неподвижным, т. е. что оно движется по окружности с постоянной скоростью относительно неподвижной системы координат. Среднее движение самой вращающейся системы равно единице (ее угловая скорость равна единице), а гравитационная постоянная равна $k^2 = 1$. В литературе часто можно встретить утверждение, что уравнения (52) предполагают единичное расстояние между основными телами, единичную общую массу, единичное среднее движение и т. д. Такое утверждение может ввести читателя в заблуждение и создать впечатление, что уравнения неприменимы, когда расстояние между основными телами равно, скажем, 380 000 км. Дело здесь заключается просто в том, что уравнения (52) содержат безразмерные переменные и параметры, которые связаны с физическими величинами соотношениями (44). На рис. 1.2 показана безразмерная синодическая система координат.

Как мы уже говорили, уравнения (51) и (52) содержат только один параметр. Для того чтобы исключить μ_1 или μ_2, достаточно воспользоваться соотношением $\mu_1=1-\mu_2$. Далее, если $\mu_2=\mu$, то $\mu_1=1-\mu$. Значение безразмерной массы неотрицательно и меньше единицы, следовательно, $0\leqslant\mu\leqslant1$. Значениям $\mu=0$ и $\mu=1$ соответствует единичная масса в начале координат. Значению $\mu=1/2$ соответствуют две равные массы, расположенные в $x=\pm1/2$, безразмерная масса каждой из них равна 1/2. Когда $0\leqslant\mu<1/2$, бо́льшая масса располагается в области $0\leqslant x<1/2$, а меньшая масса — в области $-1\leqslant x<-1/2$, когда же $1/2<\mu\leqslant1$, большая масса лежит в области $-1/2<x\leqslant0$, а меньшая — в области $1/2<x\leqslant1$. При $\mu=1/2$ мы имеем симметричный случай. Если μ рассматривать как малый параметр ($\mu\approx0$, в действительности $\mu<1/2$), то бо́льшая масса будет располагаться справа от начала координат. Полагая $\mu_1=\mu$, приходим к противоположному результату, т. е. при $\mu<1/2$ бо́льшая масса будет располагаться слева от начала координат. Различные авторы не придерживаются какого-либо одного способа расположения бо́льшей массы, но это и не так существенно, поскольку уравнения (51) и (52) даются в общем виде. В случае $\mu_2=\mu$, показанном на рис. 1.2, бо́льшая масса ($\mu_1=1-\mu$) при $\mu<1/2$ располагается справа от центра масс, а в случае $\mu_1=\mu$ при $\mu<1/2$ меньшая масса располагается справа. Кроме того, в литературе встречаются два различных обозначения расстояний r_1 и r_2, так что читатель, вообще говоря, может встретиться с четырьмя различными комбинациями, в зависимости от принятого расположения бо́льшей массы и обозначения расстояний (подробней см. § 9.3). Указанные выше причины не влияют на уравнения движения, заданные в форме (51) и (52).

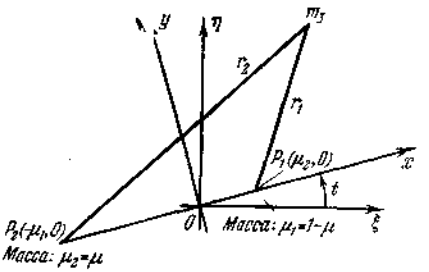


Рис. 1.2. Обозначения, применяемые в тексте для безразмерной синодической системы x, y ($\mu_1>\mu_2$).

Если бо́льшая масса расположена справа от начала координат, то будем иметь

$$\Omega=\frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}, \tag{57}$$

если же она расположена слева, то будем иметь

$$\Omega=\frac{1}{2}[\mu r_1^2+(1-\mu)r_2^2]+\frac{\mu}{r_1}+\frac{1-\mu}{r_2}. \tag{58}$$

Переход от уравнения (57) к уравнению (58) осуществляется простой заменой $1-\mu$ на μ и μ на $1-\mu$.

Заметим, что интерес представляет только область $0 \leqslant \mu \leqslant 1/2$, так как область $1/2 \leqslant \mu \leqslant 1$ представляет собой отражение первой области относительно оси y.

§ 1.6. Сводка уравнений движения

Уравнения движения в инерциальной, или неподвижной (сидерической) системе координат X, Y, в размерных величинах X, Y, R_1, R_2, t^*, k^2, m_1, m_2, a и b имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2X}{dt^{*2}} &= -k^2\left[m_1\frac{X-b\cos nt^*}{R_1^3}+m_2\frac{X+a\cos nt^*}{R_2^3}\right],\\ \frac{d^2Y}{dt^{*2}} &= -k^2\left[m_1\frac{Y-b\sin nt^*}{R_1^3}+m_2\frac{Y+a\sin nt^*}{R_2^3}\right].\end{aligned} \tag{7}$$

(Смысл символов см. на рис. 1.1.)

В безразмерной форме эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -\left[\mu_1\frac{\xi-\mu_2\cos t}{\rho_1^3}+\mu_2\frac{\xi+\mu_1\cos t}{\rho_2^3}\right],\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\left[\mu_1\frac{\eta-\mu_2\sin t}{\rho_1^3}+\mu_2\frac{\eta+\mu_1\sin t}{\rho_2^3}\right],\end{aligned} \tag{43}$$

где ξ, η соответствуют X, Y; μ_1, μ_2 соответствуют m_1, m_2; ρ_1, ρ_2 соответствуют R_1, R_2 и t соответствует t^*.

Уравнения движения во вращающейся (синодической) системе координат, в размерных величинах имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{x}}{dt^{*2}}-2n\frac{d\bar{y}}{dt^*}-n^2\bar{x} &= -k^2\left[m_1\frac{\bar{x}-b}{\bar{r}_1^3}+m_2\frac{\bar{x}+a}{\bar{r}_2^3}\right],\\ \frac{d^2\bar{y}}{dt^{*2}}+2n\frac{d\bar{x}}{dt^*}-n^2\bar{y} &= -k^2\left[\frac{m_1\bar{y}}{\bar{r}_1^3}+\frac{m_2\bar{y}}{\bar{r}_2^3}\right].\end{aligned} \tag{32}$$

(Смысл обозначений см. на рис. 1.2.)

В безразмерной форме имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dy}{dt} &= -\left[\frac{\mu_1(x-\mu_2)}{r_1^3}+\frac{\mu_2(x+\mu_1)}{r_2^3}\right]+x,\\ \frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dx}{dt} &= -\left[\frac{\mu_1 y}{r_1^3}+\frac{\mu_2 y}{r_2^3}\right]+y,\end{aligned} \tag{59}$$

где x, y соответствуют $\bar{x}$, $\bar{y}$, а r_1, r_2 соответствуют $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$.

Интеграл Якоби в размерной и безразмерной системах переменных имеет соответственно следующий вид:

$$\left(\frac{d\bar{x}}{dt^*}\right)^2+\left(\frac{d\bar{y}}{dt^*}\right)^2 = n^2(\bar{x}^2+\bar{y}^2)+2k^2\left(\frac{m_1}{\bar{r}_1}+\frac{m_2}{\bar{r}_2}\right)-C^* \tag{38}$$

и

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\mu_1 r_1^2+\mu_2 r_2^2+\frac{2\mu_1}{r_1}+\frac{2\mu_2}{r_2}-C. \tag{54}$$

Полагая $\mu_2=\mu$, получаем уравнения движения в синодической системе координат, в безразмерных переменных

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\Omega_x, \quad \ddot{y}+2\dot{x}=\Omega_y, \tag{52}$$

где

$$\Omega=\frac{1}{2}\left[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2\right]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}, \tag{57}$$

$$r_1^2=(x-\mu)^2+y^2, \quad r_2^2=(x+1-\mu)^2+y^2.$$

Интеграл Якоби принимает вид

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega-C. \tag{54}$$

§ 1.7. Способ нахождения потенциала

Здесь мы немного отклонимся от основного направления наших исследований и приведем некоторые сведения, которые окажутся полезными в последующих главах.

Рассмотрим задачу нахождения функции $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, которая должна удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=F_1(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=F_2(x_1, x_2, x_3), \tag{60}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=F_3(x_1, x_2, x_3).$$

Сначала выведем условие существования функции Φ, исходя из известного правила, что

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_i} \tag{61}$$

или

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}=\frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3}=\frac{\partial F_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_1}=\frac{\partial F_1}{\partial x_3}. \tag{62}$$

Это условие можно также получить, если принять, что силовое поле с составляющими F_1, F_2, F_3 является безвихревым, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{F}=0$, где вектор $\mathbf{F}$ имеет составляющие F_1, F_2, F_3.

После того как существование функции Φ доказано, ее можно определить различными способами. Остановимся коротко на одном из них, как на наиболее удобном для рассматриваемой задачи. Из первого уравнения (60) имеем

$$\Phi=\int F_1(x_1, x_2, x_3)\,dx_1+\psi(x_2, x_3), \tag{63}$$

где при интегрировании x_2 и x_3 рассматриваются как постоянные. Уравнение (63) дает функцию Φ, удовлетворяющую первому из уравнений (60) с произвольной функцией ψ. Подставляя выражение (63) во второе и третье уравнения (60), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2}\int F_1 dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\psi = F_2, \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\int F_1 dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_3}\psi = F_3, \end{aligned} \tag{64}$$

что можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = F_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\int F_1 dx_1 = G_2(x_2, x_3), \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = F_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}\int F_1 dx_1 = G_3(x_2, x_3). \end{aligned} \tag{65}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial G_2}{\partial x_1} = \frac{\partial G_3}{\partial x_1} = 0.$$

Это следует из того, что функция $\psi(x_2, x_3)$ не зависит от x_1, а также непосредственно из уравнений (65). Действительно, взяв частные производные по x_1 от правых частей уравнений (65), будем иметь

$$\frac{\partial G_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\int F_1 dx_1 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0$$

и

$$\frac{\partial G_3}{\partial x_1} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\int F_1 dx_1 = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0.$$

Задача нахождения функции ψ представляет собой первоначальную задачу, но на один порядок ниже. Из первого уравнения (65) получаем

$$\psi = \int G_2 dx_2 + \chi(x_3), \tag{66}$$

где при интегрировании x_3 рассматриваем как постоянную. Произвольную функцию $\chi(x_3)$ получаем путем подстановки выражения (66) во второе уравнение (65):

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\int G_2 dx_2 + \frac{d\chi}{dx_3} = G_3.$$

Решение этого уравнения относительно $\chi(x_3)$ возможно, поскольку выражение

$$G_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}\int G_2 dx_2$$

зависит только от x_3.

Это можно показать, продифференцировав предыдущее выражение частным образом по x_1 и x_2. В первом случае будем иметь

$$\frac{\partial G_3}{\partial x_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \int G_2 dx_2 = 0,$$

так как G_2 и G_3 зависят только от x_2 и x_3, что было показано выше. Во втором случае —

$$\frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \int G_2 dx_2 = \frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = 0,$$

так как согласно уравнениям (65)

$$\frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3 \partial x_2} = 0.$$

Функция $\psi(x_2, x_3)$ определяется уравнением (66), а функция Φ — уравнением (63). Действительно, читатель может легко убедиться в этом, выполнив соответствующие подстановки и придя к довольно ясным формулам для непосредственного вычисления искомой функции $\Phi(x_1, x_2, x_3)$.

Функцию Φ часто можно написать непосредственно, в особенности в задачах, в которых имеют место ньютоновские гравитационные поля. Замечая, что градиент потенциала гравитационного поля равен

$$\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

находим

$$F_1 = -\frac{x}{|\mathbf{r}|^3}, \quad F_2 = -\frac{y}{|\mathbf{r}|^3}, \quad F_3 = -\frac{z}{|\mathbf{r}|^3},$$

где

$$|\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \Phi = 1/|\mathbf{r}|.$$

При любом из предыдущих методов решение задачи, указанной в § 1.4 и определенной уравнениями (34), получается в виде

$$F^* = \frac{n^2}{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + k^2 \left[\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right]. \tag{35}$$

§ 1.8. Связь с общей задачей трех тел

При постановке ограниченной задачи мы приняли, что планеты имеют приблизительно круговое движение вокруг Солнца, а массы астероидов и спутников планет малы по сравнению с массами планет.

В пункте В § 1.3 мы рассмотрели вопрос о полной энергии трех тел в ограниченной задаче и показали, что энергия не остается постоянной. С другой стороны, известно, что общая задача трех тел имеет интеграл энергии, и полная энергия сохраняется неизменной. Таким образом, при переходе от общей задачи к ограниченной принцип сохранения энергии нарушается. Этот вопрос мы исследуем ниже. Кроме того, мы выведем условия, которые должны выполняться, для того чтобы методы ограниченной задачи были применимы. Общая задача трех тел представляет собой один из весьма редких примеров в физике, когда применимость метода более высокого порядка или более сложной физической модели оказывается в большей степени ограниченной, чем при более простом подходе. В обычных процедурах наблюдается как раз противоположная картина, и при более сложной модели следует ожидать лучшего приближения к действительному физическому состоянию, чем при более простой.

Общая задача трех тел имеет всего лишь несколько приложений в небесной механике (одной из них является динамика кратной звездной системы) и совсем мало приложений в космодинамике и в динамике Солнечной системы. Кроме того, наши знания относительно общей задачи в настоящее время являются значительно менее полными, чем относительно ограниченной. В тех задачах, где ограничения «собственной» ограниченной задачи оказываются столь строгими, что затрудняют приложения, в большей части случаев бывает достаточно применить модификации и обобщения ограниченной задачи, и перехода к общей задаче не требуется.

Ниже мы коротко рассмотрим общую задачу трех тел и установим ее связь с ограниченной задачей. Полного исследования общей задачи трех тел мы проводить не будем, так как она представляется нам слишком сложной и мало плодотворной по сравнению с ограниченной задачей. К этому выводу пришел еще Эйлер (1772 г.). До него было опубликовано гораздо больше работ по общей задаче трех тел, чем после него, однако и теперь встречаются интересные и важные работы на эту тему.

Общую задачу трех тел можно сформулировать следующим образом. Три частицы произвольной массы притягиваются друг к другу согласно ньютоновскому закону гравитации. Начальное движение их задано, и они могут занимать любое положение в пространстве. Требуется найти их движение.

Различие между общей задачей трех тел и ограниченной задачей заключается прежде всего в том, что в ограниченной задаче массы только двух частиц являются произвольными, третья масса намного меньше двух первых. В общей задаче допуска-

ются любые начальные условия для трех частиц, тогда как в ограниченной задаче требуется, чтобы точки конечной массы двигались по круговым орбитам.

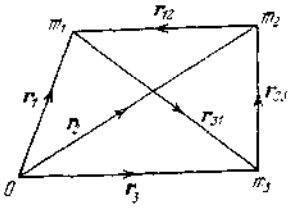


Рис. 1.3. К общей задаче трех тел. Массы тел: m_1, m_2, m_3; их радиусы-векторы: $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$.

На рис. 1.3 приводятся обычные обозначения. Массы трех тел обозначены через m_1, m_2, m_3, а радиусы-векторы — через

$$\mathbf{r}_1(q_1, q_2, q_3),\ \mathbf{r}_2(q_4, q_5, q_6),\ \mathbf{r}_3(q_7, q_8, q_9).$$

Векторы, идущие от одной массы к другой, равны

$$\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\quad \mathbf{r}_{23}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3,\quad \mathbf{r}_{31}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1, \tag{67}$$

а расстояния между массами m_1, m_2 и m_3 равны

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_{12}| &= [(q_1-q_4)^2+(q_2-q_5)^2+(q_3-q_6)^2]^{\frac{1}{2}},\\
|\mathbf{r}_{23}| &= [(q_4-q_7)^2+(q_5-q_8)^2+(q_6-q_9)^2]^{\frac{1}{2}},\\
|\mathbf{r}_{31}| &= [(q_7-q_1)^2+(q_8-q_2)^2+(q_9-q_3)^2]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{68}$$

Силовая функция имеет вид

$$F=k^2\left(\frac{m_1m_2}{|\mathbf{r}_{12}|}+\frac{m_2m_3}{|\mathbf{r}_{23}|}+\frac{m_3m_1}{|\mathbf{r}_{31}|}\right). \tag{69}$$

Уравнения движения записываются в виде

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i=\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_i},\qquad i=1, 2, 3. \tag{70}$$

Таким образом, имеем систему трех дифференциальных векторных уравнений второго порядка относительно векторов $\mathbf{r}_i$ или систему девятн скалярных уравнений второго порядка относительно координат q_i. Получающаяся результирующая система восемнадцатого порядка указывает на более сложный характер общей трехмерной задачи по сравнению с ограниченной задачей, описываемой системой четвертого порядка.

В подробном виде уравнения (70) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -k^2 m_2 \frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3} + k^2 m_3 \frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|^3},\\
\ddot{\mathbf{r}}_2 &= -k^2 m_3 \frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3} + k^2 m_1 \frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3},\\
\ddot{\mathbf{r}}_3 &= -k^2 m_1 \frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|^3} + k^2 m_2 \frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3}.
\end{aligned} \tag{71}$$

Задача. Выведите уравнения движения в векторной форме для общей задачи трех тел посредством вычисления градиентов, указанных в уравнениях (70), и учитывая, что $\partial|\mathbf{r}|/\partial\mathbf{r}=\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$.

Система восемнадцатого порядка может быть сведена к системе шестого порядка, и это совсем не тривиальное приведение является одной из важных процедур, рассматриваемых в классической литературе по общей задаче трех тел, что было наилучшим образом выполнено Лагранжем в 1772 г.

1. Так как на систему не действуют никакие внешние силы, то центр масс движется по прямой с постоянной скоростью, т. е.

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{a} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{3} m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b}. \tag{72}$$

Эти два векторных уравнения, соответствующие шести скалярным уравнениям с шестью скалярными постоянными интегрирования (т. е. координатами векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$), представляют шесть интегралов, с помощью которых система может быть преобразована из системы восемнадцатого порядка в систему двенадцатого порядка.

2. Условие сохранения момента количества движения записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{c}. \tag{73}$$

Если написать три соответствующих скалярных интеграла (с составляющими вектора $\mathbf{c}$ в качестве постоянных интегрирования) и ввести циклическую координату, то систему двенадцатого порядка можно будет свести к системе восьмого порядка.

3. Дальнейшее понижение порядка на две единицы можно осуществить, применяя интеграл энергии и исключая время.

Интеграл энергии получается из уравнений (70) обычным способом, т. е. умножением на $\dot{\mathbf{r}}_i$, суммированием и интегриро-

ванием:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \int \dot{\mathbf{r}}_i \ddot{\mathbf{r}}_i dt = \sum_{i=1}^{3} \int \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i dt \tag{74}$$

или

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + m_3 \dot{\mathbf{r}}_3^2 = 2F - C. \tag{75}$$

Таким образом, принцип сохранения энергии здесь выполняется.

Покажем теперь, каким образом общая задача трех тел приводится к ограниченной задаче.

Уравнения (71) описывают общий случай задачи трех тел в ньютоновском гравитационном силовом поле. Структура этих уравнений такова, что первое из них не содержит m_1, второе не содержит m_2 и третье не содержит m_3. Это «не расщепляет» уравнения, так как все три радиуса-вектора входят в каждое из них.

Члены в правых частях уравнений имеют определенный физический смысл. Первый член в правой части первого уравнения, например, представляет собой силу на единицу массы, действующую на первое тело со стороны второго тела. Второй член в правой части этого уравнения определяет действие m_3 на m_1.

Уменьшая массу третьего тела, мы уменьшаем влияние его на движение масс m_1 и m_2, т. е. при $m_3 \to 0$ два первых уравнения (71) (при $k^2=1$) переходят в следующие:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -m_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \tag{76}$$

а третье уравнение не изменяется. При этом происходит расщепление уравнений, и движение масс m_1 и m_2 теперь можно определить, не рассматривая влияние третьей массы и не решая систему дифференциальных уравнений (76) двенадцатого порядка.

В отношении третьего уравнения (71) можно заметить следующее. Если в двух первых уравнениях (71) положить $m_3=0$, то они примут вид (76), а третье уравнение перейдет при этом в тождество вида $0=0$, так как в этом случае, т. е. при $m_3=0$, деление на m_3 недопустимо. Поэтому, чтобы перейти к ограниченной задаче трех тел, поступают следующим образом. Предполагают, что m_3 не равно нулю, но достаточно мало, так что не оказывает влияния на движение масс m_1 и m_2. Таким образом, уравнения (76) становятся приближенно верными, а третье уравнение (71) будет точным. Система, состоящая из уравнений (76) и третьего уравнения (71), представляет нашу динамическую систему лишь приближенно, и степень при-

ближения определяется «малостью» членов

$$m_3\frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|^3} \quad \text{и} \quad m_3\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3}$$

по сравнению с членами

$$m_2\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3} \quad \text{и} \quad m_1\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}.$$

Влияние масс m_1 и m_2 на движение массы m_3 определяется третьим уравнением (71). Приняв указанное выше приближение, можно решить уравнения (76), подставить решение в третье уравнение (71) и получить дифференциальное уравнение шестого порядка, описывающее движение третьего тела. Проделав это, будем иметь

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -k^2m_1\frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|^3}+k^2m_2\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3}, \tag{77}$$

где теперь $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — заданные функции времени и начальных условий.

Уравнение (77) описывает ограниченную задачу трех тел. «Ограничение» эквивалентно предположению, что движение масс m_1 и m_2 не зависит от массы m_3, тогда как движение самой массы m_3 определяется массами m_1 и m_2 и их движением.

§ 1.9. Классификация и модификации ограниченной задачи

Последний результат, полученный в § 1.8, позволяет надлежащим образом представить различные обобщения ограниченной задачи. Уравнение (77) можно написать в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{f}(m_1, m_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3), \tag{78}$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — заданные функции времени и их начальных условий, так как три первоначальных уравнения разъединены. Функция $\mathbf{f}$ представляет силовое поле, которое в уравнении (77) есть ньютоновское гравитационное поле. С этой точки зрения наиболее общей формой ограниченной задачи будет просто

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t), \tag{79}$$

т. е. задача состоит в определении движения тела с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ в поле $\mathbf{g}$, зависящем от положения тела и времени. Уравнение (79) описывает систему двух или трех степеней свободы в зависимости от двумерного или трехмерного движения тела.

Задача, определенная в § 1.2 как ограниченная задача трех тел, рассматривалась при круговом движении масс m_1 и m_2 и в предположении, что движение массы m_3 происходит в плоскости, определяемой движением масс m_1 и m_2.

Представляют интерес следующие модификации этой основной задачи.

1. Движение масс m_1 и m_2 не является круговым. Если действуют ньютоновские гравитационные силы, задача двух тел с массами m_1 и m_2 в зависимости от их начальных условий может иметь в качестве решения любое коническое сечение. Наиболее важным является случай, когда массы m_1 и m_2 движутся по эллиптическим орбитам. Эту «эллиптическую ограниченную задачу» называют иногда «псевдоограниченной задачей», она имеет много приложений и будет рассмотрена подробно в § 10.3.

2. В трехмерной ограниченной задаче рассматривается движение массы m_3, не ограничивающееся плоскостью, определяемой движением масс m_1 и m_2. Это имеет место при начальных условиях таких, что третье тело не лежит в начальный момент в плоскости движения m_1 и m_2, или вектор его начальной скорости имеет составляющую, не лежащую в этой плоскости.

В случае ньютоновских гравитационных сил, если начальное положение и вектор начальной скорости третьего тела находятся в плоскости движения m_1 и m_2, то движение третьего тела будет происходить в этой плоскости, так как нет сил, которые могли бы вывести его из этой плоскости.

Трехмерная ограниченная задача встречается в небесной механике при определении орбит некоторых малых планет с большим наклонением плоскости орбиты к эклиптике. Важное значение имеют также приложения этой задачи к космогонии и исследованию космического пространства; они будут рассмотрены в § 10.2.

3. Величина отношения масс m_1/m_2 и связанного с ним параметра μ, введенного нами ранее, оказывает существенное влияние на движение третьего тела, а также на решение задачи. При $\mu=0$ ограниченная задача становится задачей двух тел, поэтому задачи с малыми значениями μ можно рассматривать как задачи возмущений в задаче двух тел. С другой стороны, задача с $\mu=1/2$ вообще по существу является задачей трех тел. Задание величины μ, таким образом, играет важную роль. В случае $\mu=1/2$ задача получила специальное название Копенгагенской задачи. Ограниченная задача Пуанкаре, задача с малым μ, допускает применение теории возмущений.

4. Если массы основных тел изменяются со временем, то основные уравнения движения изменяются существенным образом, но основная идея ограниченной задачи не теряет интереса для звездной динамики (близкие двойные звезды) и космогонии.

5. Если в задаче имеются нецентральные силы, то возникает важный вопрос: будет ли сохранять смысл круговое движение

или движение по коническим сечениям для тел конечной массы? Если будет, то тогда модифицированное поле будет существенно только при изучении движения третьего тела. Это весьма важно для начальных участков некоторых траекторий от Земли к Луне, когда существенное влияние могут оказывать гармоники гравитационного потенциала Земли высшего порядка.

Термин «ограниченная задача» мы будем употреблять для кругового плоского ньютоновского случая при условии, что μ не равно нулю или единице, и все модификации будут описаны с помощью их известных свойств, например, эллиптическая ограниченная задача, трехмерная ограниченная задача и т. д. Модификациям ограниченной задачи посвящена гл. 10.

§ 1.10. Приложения

Рассмотрим три простых приложения.

Основное предположение, которое мы делаем при выводе уравнений движения ограниченной задачи, сначала будет рассмотрено в связи с двумя важными приложениями. Это предположение заключается в том, что масса третьей частицы считается столь малой по сравнению с массами основных тел, что влиянием ее на их движение можно пренебречь. Первое приложение относится к движению Луны (пункт А), второе — к движению космического корабля вокруг Земли или Луны (пункт Б). Третье приложение будет связано с интегралом Якоби (пункт В).

А. Массы системы трех тел Солнце — Земля — Луна относятся друг к другу как

$$m_\odot : m_\oplus : m_\leftmoon = 2\cdot 10^{33}\ \text{г} : 6\cdot 10^{27}\ \text{г} : 7{,}4\cdot 10^{25}\ \text{г},$$

или приближенно $m_\odot : m_\oplus : m_\leftmoon = 300\,000 : 1 : 0{,}01$. Относительные расстояния $d_{\odot\oplus} : d_{\oplus\leftmoon} = 149{,}6\cdot 10^{11}$ см : $3844\cdot 10^{10}$ см, или приближенно 390 : 1, и, разумеется, $d_{\odot\oplus} \approx d_{\odot\leftmoon}$.

Уравнения движения для общей задачи трех тел (уравнения (71)) при $m_1 = m_\odot$, $m_2 = m_\oplus$, $m_3 = m_\leftmoon$, $|\mathbf{r}_{23}| = d_{\oplus\leftmoon}$, $|\mathbf{r}_{31}| = d_{\odot\leftmoon}$ и $|\mathbf{r}_{12}| = d_{\odot\oplus}$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
m_\odot \ddot{\mathbf{r}}_\odot &= -k^2\left[m_\odot m_\oplus \frac{\mathbf{r}_\odot - \mathbf{r}_\oplus}{d^3_{\odot\oplus}} - m_\odot m_\leftmoon \frac{\mathbf{r}_\leftmoon - \mathbf{r}_\odot}{d^3_{\odot\leftmoon}}\right],\\
m_\oplus \ddot{\mathbf{r}}_\oplus &= -k^2\left[m_\oplus m_\leftmoon \frac{\mathbf{r}_\oplus - \mathbf{r}_\leftmoon}{d^3_{\oplus\leftmoon}} - m_\oplus m_\odot \frac{\mathbf{r}_\odot - \mathbf{r}_\oplus}{d^3_{\odot\oplus}}\right], \qquad (80)\\
m_\leftmoon \ddot{\mathbf{r}}_\leftmoon &= -k^2\left[m_\leftmoon m_\odot \frac{\mathbf{r}_\leftmoon - \mathbf{r}_\odot}{d^3_{\leftmoon\odot}} - m_\leftmoon m_\oplus \frac{\mathbf{r}_\oplus - \mathbf{r}_\leftmoon}{d^3_{\oplus\leftmoon}}\right].
\end{aligned}$$

Сначала оценим влияние Земли на движение Солнца по сравнению с влиянием Луны. Для этого сравним члены

$$m_\oplus m_\odot \frac{\mathbf{r}_\odot - \mathbf{r}_\oplus}{d^3_{\odot\oplus}} \text{ и } m_\odot m_\leftmoon \frac{\mathbf{r}_\leftmoon - \mathbf{r}_\odot}{d^3_{\odot\leftmoon}}$$

или

$$\frac{m_\oplus}{d^2_{\odot\oplus}} \text{ и } \frac{m_\leftmoon}{d^2_{\odot\oplus}}.$$

Мы видим, что влияние Земли (первый член) приблизительно в 100 раз сильнее, чем влияние Луны (второй член), так как $m_\oplus : m_\leftmoon \approx 100$. Поэтому, если мы опустим член $m_\odot m_\leftmoon (\mathbf{r}_\leftmoon - \mathbf{r}_\odot)/d^3_{\odot\leftmoon}$ в первом уравнении (80), мы допустим ошибку в уравнениях движения всего лишь в 1%. Во втором уравнении (80) мы пренебрегаем первым членом правой части по сравнению со вторым членом, он составляет

$$\frac{m_\leftmoon}{m_\odot}\left(\frac{d_{\odot\oplus}}{d_{\oplus\leftmoon}}\right)^2 \approx 0{,}005,$$

т. е. влияние Луны на движение Земли в $5 \cdot 10^3$ раза слабее, чем влияние Солнца на движение Земли.

Таким образом, порядок величин членов в правых частях в двух первых уравнениях можно записать следующим образом:

$$O(1) + O(0{,}01),\ O(0{,}01) + O(1), \tag{81}$$

где 0,005 представлено как $O(0{,}01)$.

Члены в правой части последнего уравнения (80) определяют влияние Солнца и Земли на движение Луны. Отношение этих членов равно

$$\frac{m_\odot}{m_\oplus}\left(\frac{d_{\oplus\leftmoon}}{d_{\oplus\odot}}\right)^2 \approx 2,$$

т. е. движение Луны в большей степени определяется Солнцем, а не Землей. Это излюбленный вопрос экзаменаторов, но для нас этот факт малопримечателен. Важно то, что влияние третьего тела (Луны) на систему Солнце—Земля на два порядка ниже, чем влияние силы между двумя телами, которая определяет движение системы Солнце—Земля. Требование кругового движения системы Земля—Солнце удовлетворяется также приближенно, так как эксцентриситет орбиты Земли равен 0,017. Орбита третьего тела, строго говоря, не лежит в плоскости движения масс m_1 и m_2, в действительности наклонение плоскости

ее орбиты к плоскости эклиптики составляет около 5°. Таким образом, приложение модели ограниченной задачи к движению Луны предполагает следующие приближения:

1) что движение третьего тела является плоским, тогда как в действительности оно, как мы знаем, отклоняется на ±5°;

2) что движение Земли является круговым, в то время как фактическая ее орбита, как мы знаем, имеет эксцентриситет около 0,02;

3) что влияние Луны на систему Солнце—Земля отсутствует, тогда как мы показали, что оно составляет около 1%.

Приложение ограниченной задачи к движению Луны составляет основу для нескольких теорий Луны. Те эффекты, которые не учитываются ограниченной задачей, рассматриваются как возмущения решения соответствующей ограниченной задачи.

Б. Второе приложение относится к движению космического аппарата вблизи системы Земля — Луна. Рассматриваются три тела: $m_1 = m_\oplus$, $m_2 = m_\leftmoon$, $m_3 = m_p$. Приняв массу m_p космического аппарата равной 6000 кг, будем иметь следующие отношения масс: $m_\oplus : m_\leftmoon : m_p \approx 100 : 1 : 10^{-19}$. Расстояния между ними пусть будут равны $d_{\oplus\leftmoon}$, $d_{p\oplus} \geqslant R_\oplus$, $d_{p\leftmoon} \geqslant R_\leftmoon$; мы будем считать, что $d_{\oplus\leftmoon} : R_\oplus : R_\leftmoon \approx 400 : 6{,}38 : 1{,}74$, здесь $R_\oplus$ — радиус Земли, а $R_\leftmoon$ — радиус Луны. Неравенства ограничивают движение внешним пространством над поверхностью Земли и поверхностью Луны.

Рассмотрим три уравнения движения. Первое уравнение, определяющее ускорение Земли, будет содержать в правой части член, характеризующий влияние Луны, $m_\oplus m_\leftmoon / d^2_{\oplus\leftmoon}$, и член, характеризующий влияние космического аппарата, $m_\oplus m_p / d^2_{\oplus p}$. Отношение этих сил равно

$$2{,}5 \cdot 10^{15} \leqslant \frac{m_\leftmoon}{m_p} \left(\frac{d_{\oplus p}}{d_{\oplus\leftmoon}} \right)^2 < \infty,$$

где нижняя граница получена при задании $d_{\oplus p}$ его минимального значения, равного $R_\oplus$. Верхняя граница получается при неограниченном удалении космического аппарата от системы Земля — Луна, когда расстояние его от Земли $d_{\oplus p}$ стремится к бесконечности. Таким образом, отношение влияний космического аппарата на Землю и Луны на Землю бывает равно от нуля до $4 \cdot 10^{-16}$ и не бывает более этой величины.

Второе уравнение в рассматриваемом случае определяет ускорение Луны. В правой части его содержится член, отражающий влияние космического аппарата $m_\leftmoon m_p / d^2_{\leftmoon p}$, и член,

отражающий влияние Земли $m_{\leftmoon} m_{\oplus}/d^2_{\oplus\leftmoon}$. Отношение сил равно

$$2\cdot 10^{16} \leqslant \frac{m_{\oplus}}{m_p}\left(\frac{d_{\leftmoon p}}{d_{\oplus\leftmoon}}\right)^2 < \infty,$$

где нижняя граница получена при $(d_{\leftmoon p})_{\min} = R_{\leftmoon}$. Поэтому сила, с которой космический аппарат действует на Луну, не превышает $0{,}5\cdot 10^{-16}$ силы, с которой Земля действует на Луну.

Порядок величин правых частей двух первых уравнений равен

$$O(1)+O(10^{-16}),\quad O(10^{-16})+O(1). \tag{82}$$

Третье уравнение описывает движение космического аппарата:

$$m_p \ddot{\mathbf{r}}_p = -k^2\left[m_p m_{\oplus}\frac{\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_{\oplus}}{d^3_{p\oplus}} - m_p m_{\leftmoon}\frac{\mathbf{r}_{\leftmoon}-\mathbf{r}_p}{d^3_{p\leftmoon}}\right].$$

Влияние Земли на космический аппарат пропорционально первому члену правой части, т. е. $m_{\oplus}/d^2_{p\oplus}$. Влияние Луны определяется вторым членом, $m_{\leftmoon}/d^2_{p\leftmoon}$. Отношение этих сил равно $(m_{\oplus}/m_{\leftmoon})(d_{p\leftmoon}/d_{p\oplus})^2$.

Максимальное значение этого отношения соответствует случаю, когда космический аппарат находится вблизи Земли, т. е. когда $d_{p\leftmoon} = (d_{p\leftmoon})_{\max} \approx d_{\oplus\leftmoon}$, и в то же время $d_{p\oplus} = (d_{p\oplus})_{\min} = R_{\oplus}$. Таким образом,

$$\max \frac{m_{\oplus}}{m_{\leftmoon}}\left(\frac{d_{p\leftmoon}}{d_{p\oplus}}\right)^2 = \frac{m_{\oplus}}{m_{\leftmoon}}\left(\frac{d_{\oplus\leftmoon}}{R_{\oplus}}\right)^2 = 4\cdot 10^5.$$

Минимальное значение этого отношения имеет место, когда космический аппарат находится на поверхности Луны и $d_{p\leftmoon} = (d_{p\leftmoon})_{\min} = R_{\leftmoon}$ и $d_{p\oplus} = (d_{p\oplus})_{\max} \approx d_{\oplus\leftmoon}$ или

$$\min \frac{m_{\oplus}}{m_{\leftmoon}}\left(\frac{d_{p\leftmoon}}{d_{p\oplus}}\right)^2 = \frac{m_{\oplus}}{m_{\leftmoon}}\left(\frac{R_{\leftmoon}}{d_{\oplus\leftmoon}}\right)^2 = 2\cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, при движении от Земли к Луне это отношение изменяется, грубо говоря, от 10^5 до 10^{-3}. Другими словами, когда космический аппарат находится вблизи Земли, влияние Земли на него в $4\cdot 10^5$ раза сильнее, чем Луны, а когда он находится вблизи Луны, влияние Луны в $\frac{1}{2}\cdot 10^3$ раза сильнее, чем Земли. Это результат, конечно, не лишен известного интереса, но для нас сейчас более важным является выражение

(82), показывающее, что пренебрежение влиянием космического корабля приводит к ошибке порядка 10^{-16}. Заметим, что соответствующее число для Луны в системе Солнце — Земля — Луна равно 10^{-2} (см. (81)).

Вычисления показывают, что основные предположения ограниченной задачи весьма точно выполняются в задачах космодинамики. В самом деле, задачи космодинамики всегда относятся к ограниченным задачам трех тел, поскольку космические аппараты не оказывают влияния на движение естественных небесных тел, за исключением разве только комет, и определение траекторий космических аппаратов всегда может быть сведено к задаче о движении тела в заданном силовом поле, описываемым уравнением (79). Это относится также к траекториям соударений вследствие отличного от нуля радиуса небесных тел, как показано в предыдущем приложении. Рассматриваемая задача о движении космического аппарата вблизи системы Земля — Луна приближенно удовлетворяет также и требованию, чтобы основные тела имели круговое движение, поскольку эксцентриситет орбиты Луны равен 0,055. Плоскость орбит Луны и Земли перемещается за год на несколько дуговых минут (это изменение происходит относительно угла 5,15° к эклиптике), и траектории космических аппаратов находятся по существу в плоскости Земля — Луна, так как любые отклонения требуют больших дополнительных энергий.

Влияние Солнца на движение окололунного космического аппарата не учитывается в силу самой постановки ограниченной задачи, однако это допустимо только в течение сравнительно небольшого отрезка времени его полета (скажем, нескольких дней).

Мы видим, что предположения ограниченной задачи при полете космического аппарата удовлетворяются хотя и не совсем точно, но для получения качественной картины эти приближения вполне приемлемы. Результаты, полученные на основе ограниченной задачи, следует рассматривать лишь как первое приближение к более точному расчету траектории.

В случае, когда при исследовании траекторий космических аппаратов вблизи системы Земля — Луна применяется модель ограниченной задачи, следует принимать следующие более точные предположения:

1) движение основных тел (Земли и Луны) приближенно происходит в плоскости (с отклонением в несколько минут за год),

2) движение третьего тела происходит по существу в той же плоскости (типичные траектории обнаруживают лишь малые отклонения от этой плоскости),

3) влияние типичного космического аппарата на движение

основных тел имеет порядок 10^{-16} по сравнению с силами, действующими между основными телами,

4) движение основных тел является в сущности круговым (с эксцентриситетом 0,055).

Задача 1. Исследуйте возможность применения ограниченной задачи к системе Солнце — Юпитер — астероид.

Задача 2. Исследуйте возможность применения ограниченной задачи к системе Солнце — астероид — космический аппарат, приняв плотность астероида равной 2 г/см^3 и радиус его равным 1 км.

В. Одно из приложений интеграла Якоби в сидерической системе (уравнение (56)) известно как критерий Тиссерана для отождествления комет. Рассмотрим его здесь в качестве третьего приложения.

В сидерической системе интеграл энергии при $\mu=0$ имеет вид

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2=2/\rho_1-1/a, \tag{83}$$

где $\rho=\rho_1$, а a есть большая полуось кометы. Момент количества движения также сохраняется неизменным при $\mu=0$ и может быть записан в виде

$$\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}=[a(1-e^2)]^{1/2}, \tag{84}$$

где e — эксцентриситет орбиты кометы вокруг Солнца. Подставляя эти выражения в уравнение (56), находим

$$\frac{2}{\rho}-\frac{1}{a}=2[a(1-e^2)]^{1/2}+\frac{2\mu}{\rho_2}+\frac{2(1-\mu)}{\rho_1}-\overline{C}. \tag{85}$$

Приравнивая теперь ρ к ρ_1 и $\mu(1/\rho_2-1/\rho_1)$ к нулю, получаем

$$\frac{1}{a}+2[a(1-e^2)]^{1/2}=\overline{C}, \tag{86}$$

где $\overline{C}$ — постоянная. Заметим, что $\rho\approx\rho_1$, так как для системы Солнце—Юпитер $\mu<10^{-3}$. Кроме того, ρ_1 и ρ_2 могут быть приближенно равны друг другу при надлежащем выборе эпох, так что $\rho_1\approx\rho_2>1$. Следовательно,

$$\mu\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)=\mu\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1\rho_2}\approx 0.$$

Уравнение (86) мы вывели аналитически. Ряд принятых при выводе предположений отражает их приближенный характер. Тот факт, что интеграл Якоби (даже когда он применяется в точной форме) не служит удобной мерой точности орбиты, отмечается в гл. 9. Таким образом, значение уравнения (86) ограничено, но тем не менее недооценивать его при инженерных оценках критических параметров траекторий не следует (см. пункт 10.2.6).

§ 1.11. Замечания

Превосходная книга Марколонго [1], а также известный доклад Уиттекера [2] основываются на работе Якоби, сформулировавшего в 1836 г. ограниченную задачу. Однако автор данной книги разделяет мнение Винтнера [4, стр. 436] и дату рождения ограниченной задачи склонен связывать с опубликованием Эйлером [5] в 1772 г. второй теории Луны. Сам термин «ограниченная задача» впервые был применен, по-видимому, Пуанкаре, который в своей книге [6] называл ее «частным случаем задачи трех тел» и лишь после ввел термин «ограниченная задача».

Постановка задачи, приведенная в § 1.2, является общепринятой, математические же формулировки различаются и порой, к сожалению, содержат различные ошибки. Укажем на некоторые из них.

Так, например, Пуанкаре [6, т. 1, стр. 22] приводит уравнения, определяющие расстояния между третьей частицей и телами конечной массы, в которых содержится типографская ошибка: вместо r_2^1 там должно быть r_1^2.

В известной работе Дж. Д. Биркгофа, вышедшей в Палермо [7, стр. 5], текст, рис. 1 и уравнение (2) находятся между собой в противоречии. В тексте масса тела S (по-видимому, Солнца) равна μ, а масса тела J равна $1-\mu$. (Это уже само по себе немного странно, так как во всей работе $\mu \leqslant 1/2$). На рис. 1 отчетливо видно, что масса тела S больше, чем масса тела J; вероятно, первое имеет массу $1-\mu$, а второе — массу μ. Наконец, в соответствии с принятыми на рисунке обозначениями должно быть

$$r_1^2=(x-1+\mu)^2+y^2,\ r_2^2=(x+\mu)^2+y^2,$$

тогда как в тексте у него

$$r_1^2=(x-\mu)^2+y^2,\ r_2^2=(x-\mu+1)^2+y^2.$$

Определение А. Винтнера [4, стр. 347] дается с ссылкой на пять предыдущих разделов (207, 214, 241, 276 и 343). Приведенное описание ограниченной задачи, конечно, правильно, хотя и не всегда в таком виде полезно.

На рис. 1.1 нашей книги бо́льшая масса (m_1) при $t^*=0$ располагается справа от начала координат. Этого правила мы будем придерживаться во всей книге.

Величина n, входящая в уравнение (1), характеризует среднее движение, поскольку является средней по времени угловой скоростью (также тогда, когда n не является постоянной). Заме-

тим, что скорость (velocity) и движение («motio») в семнадцатом и восемнадцатом веках были синонимами. Подробней об этом можно посмотреть у Винтнера [4, стр. 377].

Уравнения (36)—(38) § 1.4 и (53), (54), (56) § 1.5 выражают различные формы интеграла Якоби, наиболее распространенной из них является (54). Интересно отметить, что Якоби получил свой интеграл [3] в сидерической системе координат (сравните с уравнением (56)). Первоначальная форма Якоби, однако, отличается от уравнения (56), начало его системы координат совпадает с частицей, имеющей бо́льшую массу. В работе [3] Якоби показал, каким образом сохранение энергии и сохранение момента количества движения могут быть объединены для определенных динамических систем и получен интеграл. Вывод уравнения (56) был осуществлен нами путем преобразования интеграла Якоби при переходе от синодической системы к сидерической, что представляется нам более простым, чем первоначальный вывод Якоби [3] или метод Тиссерана непосредственного интегрирования, описанный в его работе [8, т. 4, стр. 203]. Выводы уравнения (56) и, следовательно, критерия Тиссерана идентичности комет, выполненные Пламмером [9, стр. 236] и Мультоном [10, стр. 297], различаются тем, что Пламмер, следуя Тиссерану и Якоби, помещал начало координат в Солнце, а Мультон пользовался по существу той же системой, что и мы при выводе уравнения (56). С вопросом о практической пригодности критерия можно познакомиться в гл. 10, а также в работе Брауэра и Клеменса [11, стр. 256]. Читателям, отдающим предпочтение векторному изложению, можно порекомендовать книгу Дэнби [12, стр. 188].

Заметим, что интеграл Якоби в форме (38) связывает квадрат скорости с центробежным потенциалом n^2r^2 и гравитационным потенциалом. Он *не является* выражением сохранения энергии, хотя некоторые авторы настойчиво предлагают называть его интегралом энергии или интегралом относительной энергии. Уиттекер [13] избежал этой ошибки, хотя пользовался физически неопределенными переменными. Вместо того чтобы придавать уравнению (38) неверный или неясный смысл, лучше рассматривать его просто как интеграл дифференциальных уравнений движения ограниченной задачи во вращающейся системе координат.

Различные возможные расположения масс, обозначения, выбор координатных систем и т. д. рассматриваются в § 9.3. Для представления численных результатов эти условия имеют существенное значение. У Брауэра и Клеменса [11], Дэнби [12], Дарвина [14], Мультона [10], Винтнера [4] и др. *меньшая масса* расположена справа. У Шарлье [15], Хилла [16], Егорова [17] и Биркгофа [7] *бо́льшая масса* расположена справа.

Материал, изложенный в § 1.7, будет использован в гл. 2, 6 и 7. Способ нахождения потенциала, приведенный в тексте, является стандартным. Другой способ, подсказываемый интуицией, состоит в простом интегрировании функций F_1, F_2, F_3 по x_1, x_2 и x_3 при остальных переменных, принимаемых за постоянные. Таким путем получают три функции от переменных x_1, x_2, x_3, которые дают требуемую функцию $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ посредством отбора всех *различных* членов, появляющихся в результатах интегрирования.

В преобразовании Лагранжа общей задачи трех тел, § 1.8, метод Гамильтона не использовался. (С ним можно познакомиться в книге Уиттекера [13], а также в его докладе [2], в котором наиболее полно изложена общая задача). Введение циклической координаты, о чем мы говорили в связи с уравнением (73) и процессом понижения порядка (пункт 2), тождественно исключению узлов, проведенному Якоби [18]. Пункту 2 можно дать еще другое объяснение, а именно, что интегралы (73) дают две функции, которые находятся в инволюции друг с другом и с гамильтонианом, и, следовательно, порядок канонических уравнений может быть понижен на две единицы на интеграл. Существует много способов преобразований, но, как показал Сильвестр [19], в принципе их имеется только два. Помимо понижения порядка системы уравнений с помощью интегралов или различных приведений (иными словами, посредством *исключения* переменных), можно *сначала* ввести такие переменные, чтобы система приняла вид, при котором ее порядок является наинизшим (процесс *аблиминации*). С этими вопросами подробней можно познакомиться у Радо [20] и Эжервея [21], а с плоской общей задачей трех тел — у Себехея [22].

Классификация и терминология, использованные нами в § 1.9, не являются общепринятыми в литературе. Пуанкаре, например, называл задачу «ограниченной», а Шарлье [15, т. 1, стр. 104] применял термин «астерондная», который, впрочем, в более поздних работах по эллиптической ограниченной задаче (Себехей и Джакалья [23]) и псевдоограниченной задаче (Коломбо и др. [24]) уже не встречается.

Ряд дополнительных приложений (см. § 1.10) можно найти у Клозе [25]. Основная область приложений, теория Луны, отлично изложена в статье Ньюкома [26].

Точные значения астрономических постоянных обычно не требуются, поэтому в § 1.10 нами приведен лишь порядок величин, используемых в расчетах. Значение, данное для астрономической единицы $d_{\odot\oplus} = 149{,}6 \cdot 10^{11}$ см, соответствует солнечному параллаксу $8''{,}7941$ и рекомендовано Международным Астрономическим Союзом.

§ 1.12. Литература

1. Marcolongo R. Il Problema dei Tre Corpi.— Milano: Hoepli, 1919, p. 97.
2. Whittaker E. T. Report on the progress of the solution of the problem of three bodies.— Rept. 69th Meeting Brit. Assoc. Advan. Sci. 1899. London: Murray, 1900, p. 123.
3. Jacobi C. G. J. Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps.— Compt. Rend., 1836, 3, 59.
4. Wintner A. The Analytical Foundations of Celestial Mechanics.— Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1941.
5. Euler L. Theoria Motuum Lunae.— Petropoli: Typis Academiae Imperialis Scientiarum, 1772. Reprinted in Opera Omnia, Series 2 (Courvoisier L., ed.), v. 22, Lausanne; Orell Füssli Turici, 1958.
6. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. V. I, 1892; v. 2, 1893; v. 3, 1899. Paris: Gauthier-Villars. Reprinted by Dover, New York, 1957. [Русский перевод: Пуанкаре А. Новые методы небесной механики.— Избр. тр., т. 1, 2, М.: Наука, 1971, 1972.]
7. Birkhoff G. D. The restricted problem of three bodies.— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1915, 39, 1; also: Collected Mathematical Papers.— V. I, p. 682. New York: Am. Math. Soc., 1950.
8. Tisserand F. Sur la théorie de la capture des comètes périodiques. Note sur l'intégrale de Jacobi, et sur son application à la théorie des comètes.— Bull. Astron., 1889, 6, 289; also: Traité de Mécanique Céleste.— Paris: Gauthier—Villars, 1896, v. 4, p. 203.
9. Plummer H. C. An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy.— London; New York: Carmbridge Univ. Press, 1918. Reprinted by Dover, New York, 1960.
10. Moulton F. R. An Introduction to Celestial Mechanics. 2nd rev. ed Macmillan, New-York, 1914. [Русский перевод: Мультон Ф. Введение в небесную механику.— М.: ОНТИ, 1935.]
11. Brouwer D., Clemence G. M. Methods of Celestial Mechanics.— New York: Academic Press, 1961. [Русский перевод: Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики.— М.: Мир, 1964.]
12. Danby J. M. A. Fundamentals of Celestial Mechanics.— New York: Macmillan, 1962.
13. Whittaker E. T. Analytical Dynamics.— London, New York: Cambridge Univ. Press, 1904. Reprinted by Dover, New York, 1944. [Русский перевод: Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1937.]
14. Darwin G. Scientific Papers. V. 4: Periodic Orbits and Miscellaneous Papers.— London; New York: Gambridge Univ. Press, 1911.
15. Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels.— 1st. v., 1903; 2nd v., 1907. Leipzig: Von Veit. [Русский перевод: Шарлье К. Небесная механика.— М.: Наука, 1966.]
16. Hill G. W. Researches in the lunar theory.— Am. J. Math. 1, 5, 129, 245 (1878); also: Collected Mathematical Works of Hill G. W.— Washington: Carnegie Inst. of Wash., v. 1, p. 284.
17. Егоров В. А. О некоторых задачах динамики полета к Луне.— Успехи физ. наук, 1957, 63, вып. 1а, с. 73—117.
18. Jacobi C. G. J. Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps.— J. Math., 1843, 26, 115.
19. Sylvester J. J. Collected Mathematical Papers. V. 2.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1904—1912.
20. Radau R. Sur une transformation des coordonnées de trois corps dans laquelle figurent les moments d'inertie.— Compt. Rend., 1869, 68, 1465.

21. Egerváry E. On a new form of the differential equations of the problem of three bodies.— Hung. Acta Math., 1946, 1, 1.
22. Szebehely V. On the problem of three bodies on a plane.— Math. Mag., 1952, 26, 59.
23. Szebehely V., Giacaglia G. On the elliptic restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1964, 69, 230.
24. Colombo G., Lautman D., Munford C. On the libration orbits of a particle near the triangular point in the semirestricted three-body problem.— Astron. J., 1963, 68, 159.
25. Klose A. Topologische Dynamik der interplanetaren Massen.— Vierteljschr. Astron. Ges., 1932, 67, 61.
26. Newcomb S. La theorie du mouvement de la lune. Son histoire et son état actuel.— Atti IV Congr. Intern. Mat., v. 1, p. 135. Rome: Accad. Lincei, 1909.
27. Kovalevsky J., ed. The System of Astronomical Constants.— Paris: Gauthier—Villars, 1965.

Глава 2

ПРИВЕДЕНИЕ

§ 2.1. Введение

Проблема приведения является, вероятно, одной из наиболее сложных в динамике. Общая интерпретация приведения включает различные преобразования и изменения первоначальной задачи не только в математическом, но и физическом смысле. Аналогии в динамике могут рассматриваться как преобразования, и в этой главе мы уделим аналогиям ограниченной задачи достаточно большое внимание.

Понижение порядка дифференциальных уравнений, выражающих задачу, представляет большой интерес и тесным образом связано с вопросом об интегрируемости и с тем, является ли задача разрешимой. Если динамическую систему считать интегрируемой тогда, когда все координаты могут быть выражены как «известные» функции времени, то в этом случае интегрируемость будет зависеть, с одной стороны, от теоремы существования (теоремы Коши) и, с другой стороны, от довольно-таки произвольного определения того, что именно понимается под «известными» функциями. Если в качестве «известных» функций принять сходящиеся бесконечные ряды, то ограниченная задача будет, конечно, интегрируемой во всей конечной плоскости xy, если исключить особенности с помощью процесса регуляризации. Так как такие «глобальные» регуляризации доступны для ограниченной задачи, то общее решение, конечно, может быть выражено сходящимися бесконечными рядами. Такие «решения» редко содержат какую-либо существенную информацию относительно поведения динамической системы. На вопросы, касающиеся устойчивости областей возможного движения и других фундаментальных аспектов поведения динамических систем, получить полные ответы из «решений» в форме сложных бесконечных рядов нельзя.

Другое определение интегрируемости динамической системы связано с возможностью сведения дифференциальных уравнений к квадратурам. Примеры, однако, показывают, что это часто не означает, что получена качественная информация относительно динамической системы.

Общая задача трех тел описывается системой дифференциальных уравнений восемнадцатого порядка, которая может быть сведена к системе шестого порядка (см. § 1.8). Уравнения ограниченной задачи образуют систему четвертого порядка. Сведение ее к системе третьего порядка с помощью интеграла Якоби и последующее понижение до второго порядка путем исключения времени подробно рассматриваются в этой главе. Такие преобразования не являются единственными, и можно вывести ряд интересных систем третьего, а также второго порядка.

Первоначальную систему уравнений четвертого порядка можно интерпретировать как систему, представляющую четырехмерный поток; физическая интерпретация, правда, здесь ограничена. Система, сведенная к третьему и второму порядку, аналогична соответственно трехмерному и двумерному потоку.

Поскольку в этой главе для понижения порядка уравнений движения используются интегралы, мы коротко остановимся на вопросе о существовании интегралов в задаче n тел, задаче трех тел и в ограниченной задаче.

Десять интегралов общей задачи трех тел, указанные в § 1.8, согласно теореме Брунса полностью исчерпывают все возможные алгебраические интегралы. Более строго (и в более общем виде) эту теорему можно сформулировать следующим образом. В задаче n тел интегралы, в которые алгебраически входят координаты и скорости, а также время, состоят только из интегралов центра масс, момента количества движения и энергии. Иначе говоря, помимо известных интегралов не существует интегралов, которые бы являлись алгебраическими функциями времени, координат и скоростей, так что классическими интегралами исчерпываются все независимые алгебраические интегралы.

Напомним, что в § 1.3 было дано определение интеграла, а в § 1.8 мы отмечали, что десять рассмотренных там интегралов являются алгебраическими функциями положений и скоростей.

Обобщение Пенлеве теоремы Брунса допускает включение интегралов, которые являются алгебраическими функциями скоростей и аналитическими функциями координат. Следовательно, согласно теореме Пенлеве любой интеграл задачи n тел, в который алгебраически входят скорости и произвольным образом входят координаты, является комбинацией классических интегралов.

Теорема Брунса относится к алгебраическим интегралам и потому предполагает сильное ограничение. Пуанкаре устранил ограничение Брунса, но ввел другое. Остановимся коротко на его теореме о несуществовании. Мы приведем ее для ограни-

ченной задачи, желающих познакомиться с этой теоремой для более общего случая мы отсылаем к соответствующей литературе.

Пусть H будет гамильтонианом нашей динамической системы, который может быть разложен в ряд по степеням параметра μ, сходящийся при достаточно малых его значениях:

$$H=H_0+\mu H_1+\mu^2 H_2+\ldots$$

Здесь $H=H(q,p)$, $H_0=H_0(p)$, $H_1=H_1(q,p),\ldots$ Гамильтониан является периодической функцией переменных q_1 и q_2, с периодом 2π. С таким разложением в ряд мы встретимся в гл. 7 и 8, где рассматривается простое преобразование, которое дает для H_0 не обращающийся в нуль гессиан. Заметим, что q и p здесь обозначают координаты q_1, q_2 и импульсы p_1, p_2.

Пусть теперь $\varphi=\varphi(q,\ p,\ \mu)$ будет периодической функцией переменных q_1 и q_2, с периодом 2π. Кроме того, пусть φ будет однозначной аналитической функцией для любых действительных значений q_1 и q_2 при достаточно малых значениях μ и значениях p_1 и p_2, которые образуют произвольно малую область. Таким образом, функцию φ можно разложить в сходящийся ряд по степеням μ с помощью однозначных аналитических функций

$$\varphi_i=\varphi_i(q,p),$$

которые являются периодическими относительно q_1, q_2. Этот ряд будет иметь вид

$$\varphi=\varphi_0+\mu\varphi_1+\mu^2\varphi_2+\ldots$$

Теорема Пуанкаре устанавливает, что ограниченная задача не имеет интеграла, кроме интеграла Якоби, который имел бы вид

$$\varphi=\text{const}.$$

Важно отметить, что Черри показал: теорема не выполняется, если ослабить требование относительно разложения интеграла в ряд по степеням μ. Пуанкаре обобщил эту теорему на общую задачу трех тел, тогда как Пенлеве, как говорилось выше, пришел к аналогичному обобщению, исходя из результатов Брунса. Это ослабляет требование, касающееся того, каким образом координаты входят в интеграл.

Теорема, соответствующая теореме Брунса и касающаяся несуществования алгебраических интегралов ограниченной задачи, была доказана Зигелем. Он установил, что ограниченная задача не имеет других алгебраических интегралов, кроме интеграла Якоби. Иначе говоря, если $\varphi(z)$ является алгебраической функцией z, то согласно теореме Зигеля любой

алгебраический интеграл ограниченной задачи имеет вид

$$\Phi(\dot{x}^2+\dot{y}^2-2\Omega)=0.$$

Заметим, что теорема Зигеля не зависит от теоремы Брунса, так как приведение последней к ограниченной задаче невозможно.

§ 2.2. Приведение к третьему порядку

Система четвертого порядка, описываемая уравнениями

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\Omega_x,\quad \ddot{y}+2\dot{x}=\Omega_y, \tag{1}$$

может быть приведена к системе третьего порядка с помощью интеграла Якоби

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega-C. \tag{2}$$

Это приведение может быть выполнено различными способами. Рассмотрим сначала следующий общий способ. Представим искомую систему третьего порядка в виде

$$\dot{x}=f(x, y, z),\quad \dot{y}=g(x, y, z),\quad \dot{z}=h(x, y, z), \tag{3}$$

где функции f, g, h, а также переменная z являются здесь неизвестными. Определение их основывается на требовании, чтобы уравнения (3) удовлетворяли одному из уравнений (1) и уравнению (2). Величина $\dot{y}$, т. е. функция g, может быть получена из уравнения (2), если известна функция $f(x, y, z)$:

$$g=\pm(\Lambda^2-f^2)^{1/2}, \tag{4}$$

где

$$\Lambda(x, y)=[2\Omega(x, y)-C]^{1/2}. \tag{5}$$

Функция $h(x, y, z)$ может быть найдена из первого уравнения (1), так как

$$\ddot{x}=\Omega_x+2\dot{y}=f_x\dot{x}+f_y\dot{y}+f_z\dot{z} \tag{6}$$

или

$$\Omega_x+2g=f_xf+f_yg+f_zh.$$

Таким образом, функция h принимает вид

$$h=\frac{\Omega_x-ff_x-g(f_y-2)}{f_z}. \tag{7}$$

Уравнение (4) дает функцию $g(x, y, z)$, а уравнение (7) — функцию $h(x, y, z)$, при условии, что функция $f(x, y, z)$ известна. Второе уравнение движения (1) пока не использовалось, но

оно не содержит новой информации, так как из него снова следует, что

$$h=\frac{\Omega_y-gg_y-f(2+g_x)}{g_z}. \tag{8}$$

Этот результат идентичен уравнению (7), и один из способов, показывающих это, состоит в вычислении Ω_x, Ω_y, Ω_z с помощью соотношений

$$ff_x+gg_x=\Omega_x,\quad ff_y+gg_y=\Omega_y,\quad ff_z+gg_z=0, \tag{9}$$

полученных посредством дифференцирования частным образом интеграла Якоби

$$f^2+g^2=2\Omega-C. \tag{10}$$

Таким образом, если функция $f(x, y, z)$ выбрана, то уравнения (4) и (7) содержат решение задачи приведения.

Задача 1. Покажите, что выбор специальной функции вида

$$f(x, y, z)=\Lambda(x, y)\ \varphi(z)$$

дает

$$\begin{aligned} g&=\Lambda[1-\varphi^2(z)]^{1/2},\\ h&=\frac{(1-\varphi^2)^{1/2}}{\varphi'}[\Lambda_x(1-\varphi^2)^{1/2}-\Lambda_y\varphi+2], \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\varphi'=\frac{d\varphi}{dz}\neq 0.$$

Задача 2. Рассмотрите общую форму уравнений (1)

$$\begin{aligned} \ddot{x}-2\lambda(x, y)\dot{y}&=\Omega_x,\\ \ddot{y}+2\lambda(x, y)\dot{x}&=\Omega_y \end{aligned} \tag{12}$$

и получите результаты, соответствующие уравнениям (4) и (7).

Задача 3. Покажите, что если в уравнениях (11) $\varphi(z)=\cos z$, то

$$z=\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}. \tag{13}$$

В последней задаче приведен специальный случай, рассмотренный Биркгофом. Здесь z есть угол между касательной к орбите и положительным направлением оси x. Уравнения движения (3) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}&=\Lambda(x, y)\cos z,\\ \dot{y}&=\Lambda(x, y)\sin z,\\ \dot{z}&=-2-\Lambda_x\sin z+\Lambda_y\cos z. \end{aligned} \tag{14}$$

Прямое доказательство следующее. Обозначим через s длину дуги вдоль орбиты. Тогда будем иметь

$$\frac{dx}{ds}=\cos z, \quad \frac{dy}{ds}=\sin z$$

и

$$\dot{x}=\frac{dx}{ds}\dot{s}=\Lambda\cos z, \quad \dot{y}=\Lambda\sin z,$$

так как абсолютное значение вектора скорости получается из интеграла Якоби в виде

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega-C=\Lambda^2.$$

Последнее из уравнений (14) следует из уравнения (13) при $\dot{z}$, равном

$$\dot{z}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{s}^2}.$$

Исключая $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ с помощью уравнений (1) и подставляя $\dot{x}$ и $\dot{y}$ из уравнений (14), находим нужный нам результат (третье уравнение (14)).

Поскольку преобразование четвертого порядка к третьему не является единственным, приведенные выше результаты содержат произвольную функцию $f(x, y, z)$, и для того чтобы приведение было определенным, требуется дополнительное условие.

§ 2.3. Приведение ко второму порядку

Помимо использования интеграла Якоби, можно исключить время из уравнений движения и получить дифференциальное уравнение второго порядка, представляющее динамическую систему. Вообще, отправляясь от системы третьего порядка (уравнения (3)), можно получить следующие уравнения:

$$\frac{dx}{f}=\frac{dy}{g}=\frac{dz}{h} \tag{15}$$

или

$$\frac{dz}{dx}=\frac{h}{f}=\alpha(x, y, z) \tag{16}$$

и

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{g}{f}=\beta(x, y, z). \tag{17}$$

Последнее уравнение дает $z=B(x, y, y')$, откуда

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}y'+\frac{\partial B}{\partial y'}y''. \tag{18}$$

Подставляя уравнение (18) в уравнение (16), получаем

$$\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}y'+\frac{\partial B}{\partial y'}y''=\alpha[x, y, B(x, y, y')] \tag{19}$$

или

$$y''=\gamma(x, y, y'). \tag{20}$$

Это уравнение и является искомым дифференциальным уравнением второго порядка.

Заметим, что приведение уравнений ко второму порядку не обязательно должно выполняться в два отдельных этапа. В самом деле, полагая $y=y(x)$, $dy/dx=\dot{y}/\dot{x}$ и $\dot{y}=y'\dot{x}$, находим из интеграла Якоби

$$\dot{x}^2=\frac{\Lambda^2}{1+(y')^2}=\Gamma^2(x, y, y'). \tag{21}$$

Дифференцируя по времени обе части равенства, получаем

$$2\dot{x}\ddot{x}=\frac{\partial\Gamma^2}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\Gamma^2}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\Gamma^2}{\partial y'}\frac{dy'}{dt}. \tag{22}$$

Здесь

$$\ddot{x}=2\dot{y}+\Omega_x=2y'\dot{x}+\Lambda\Lambda_x \tag{23}$$

и

$$\frac{dy'}{dt}=y''\dot{x}. \tag{24}$$

Подставляя уравнения (23) и (24) в уравнение (22), находим при $\dot{x}\neq 0$

$$2(\Lambda\Lambda_x\pm 2y'\Gamma)=\frac{\partial\Gamma^2}{\partial x}+\frac{\partial\Gamma^2}{\partial y}y'+\frac{\partial\Gamma^2}{\partial y'}y''.$$

С помощью уравнения (21) вычисляем частные производные и получаем

$$y''=\frac{1+(y')^2}{\Lambda}\{\Lambda_y-\Lambda_x y'\pm 2[1+(y')^2]^{1/2}\}. \tag{25}$$

Задача 1. Покажите, что, используя функцию $f(x, y, z)$ и уравнения (4) и (7) для функций g и h, можно получить уравнение (25) с помощью метода, указанного в начале этого параграфа (уравнения (15)—(20)).

Задача 2. Приведите уравнения (12) ко второму порядку.

Общее решение уравнения (25) будет содержать три постоянные: постоянную Якоби C, входящую в функцию Λ, и две постоянные интегрирования. Это решение дает информацию только относительно геометрической стороны задачи, т. е. дает только зависимость y от x. Полное решение системы четвертого порядка должно выражать зависимость первоначальных пере-

менных от времени. Интеграл Якоби дает из уравнения (21)

$$\dot{x}^2[1+(y')^2]=\Lambda^2.$$

Отсюда

$$t=\pm\int\frac{[1+(y')^2]^{1/2}}{\Lambda}dx+C_4, \tag{26}$$

где C_4 — четвертая постоянная решения.

Здесь y' и Λ являются функциями x, так как решение $y(x)$ получено из уравнения (25).

Для первоначальной системы четвертого порядка требуются четыре начальных условия: при $t=t_0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$ и $\dot{y}=\dot{y}_0$. Соответствующими начальными условиями для системы второго порядка будут y_0 и $y_0'=\dot{y}_0/\dot{x}_0$. Эти начальные условия связаны с постоянной Якоби соотношением $C=2\Omega(x_0, y_0)-(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2)$.

Существует много способов, с помощью которых уравнение (25) можно представить как систему двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Например, положив $y=y_1$ и $y'=y_2$, будем иметь

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= \frac{1+y_2^2}{\Lambda(x, y_1)}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial y_1}-y_2\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\pm 2(1+y_2^2)^{1/2}\right] \end{aligned} \tag{27}$$

при тех же начальных условиях, что и раньше, т. е. при $t=t_0$, $x=x_0$, $y=y_1=y_0=y_{10}$ и $y'=y_2=y_0'=y_{20}=\dot{y}_0/\dot{x}_0$.

Представление уравнений в виде системы второго порядка имеет недостаток: так как $y'=\dot{y}/\dot{x}$, то в тех точках на орбите, где $\dot{x}=0$, $\dot{y}\neq 0$, y' имеет особенность. В системах третьего и четвертого порядка этой проблемы не возникает.

Укажем на одно существенное различие между представлением уравнений в виде системы третьего порядка и представлением в виде системы второго порядка. В первом случае уравнения могут быть записаны в виде

$$\dot{x}=f(x, y, z), \quad \dot{y}=g(x, y, z), \quad \dot{z}=h(x, y, z), \tag{28}$$

где правые части не содержат независимой переменной (времени). Во втором случае (уравнения (27)) имеем

$$y_1'=y_2, \quad y_2'=G(y_1, y_2, x) \tag{29}$$

или, обозначая y_1 через x, y_2 — через y и x — через t,

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=G(x, y, t). \tag{30}$$

Сравнивая систему (28) с системой (30), мы видим существенное различие между ними, а именно, в правую часть второго уравнения (30) входит независимая переменная.

Первоначальная система четвертого порядка может быть приведена к системе третьего порядка с помощью интеграла Якоби. Система третьего порядка в свою очередь может быть понижена на порядок, так как в уравнения не входит независимая переменная, но система второго порядка уже не может быть понижена путем исключения независимой переменной.

Следует иметь в виду, что систему второго порядка можно представить самым различным образом. Систематическому изложению различных преобразований посвящен следующий параграф, в котором рассмотрены также определенные аналогии с линиями тока.

§ 2.4. Аналогия с линиями тока четырехмерного потока

Рассмотрим первоначальную систему четвертого порядка (1) и запишем ее в виде системы четырех уравнений первого порядка. Такое представление не является единственным, одним из возможных будет следующее:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= 2x_4 + \frac{\partial \Omega(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \\ \dot{x}_4 &= -2x_3 + \frac{\partial \Omega(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \end{aligned} \tag{31}$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = \dot{x}$ и $x_4 = \dot{y}$. Если забыть на время первоначальный физический смысл переменных, то уравнения (31) или их обобщенную форму

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad i = 1, \ldots, 4 \tag{32}$$

можно рассматривать как уравнения, описывающие четырехмерное поле скоростей с составляющими скорости $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_4$. Это поле скоростей зависит только от положения (от времени не зависит), и потому его можно назвать установившимся, или стационарным. Вводя вектор скорости $\mathbf{v}$ с составляющими $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_4$ и радиус-вектор $\mathbf{r}$ с составляющими $x_1, \ldots, x_4$, можно представить уравнение (32) в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Решением динамической задачи будет $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)$. Это значит, что радиус-вектор будет известен как функция времени и начальных условий. (Тот факт, что «радиус-вектор» $\mathbf{r}$ имеет составляющие, которые физически, в динамической задаче,

соответствуют скоростям, сейчас не имеет значения). Решение гидродинамической задачи не может быть найдено, пока не сформулирована сама задача. Это очень важно в гидродинамике, так как знание поля скоростей как функций времени часто составляет «решение». Это верно при так называемой *эйлеровой* формулировке гидродинамики. Поэтому в этом смысле можно считать, что гидродинамическая задача решена, так как функции в правых частях уравнений (31) заданы. В так называемой *лагранжевой* формулировке механики жидкости интересуются траекториями отдельных частиц жидкости. Траектория зависит от самой частицы, т. е. от начальных условий, которые заданы для частицы. Этими начальными условиями являются четыре координаты $\mathbf{r}_0$ $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})$ в момент времени $t=t_0$. В динамической задаче начальные условия, конечно, те же самые, так как $x_{10}=x_0$, $x_{20}=y_0$, $x_{30}=\dot{x}_0$ и $x_{40}=\dot{y}_0$. Таким образом, решение гидродинамической задачи в постановке Лагранжа и решение первоначальной динамической задачи эквивалентны между собой.

Траектории различных частиц жидкости различны, так как различаются их начальные положения, исключая особые точки. Начальные положения полностью определяют траектории, подобно тому как в динамической задаче начальные условия определяют орбиты. Траектория частицы жидкости находится в четырехмерном пространстве с координатами x_1, x_2, x_3, x_4. Орбита третьего тела в динамической задаче находится в двумерном пространстве x_1x_2. Проекция траектории частицы жидкости на плоскость x_1x_2 дает орбиту третьего тела в ограниченной задаче. Проекция траектории третьей частицы на плоскость x_3x_4 дает скорость третьего тела в ограниченной задаче. Если пользоваться иной терминологией, то можно говорить о движении третьего тела в фазовом пространстве с координатами $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Тогда траектория частицы жидкости в ее четырехмерном пространстве будет идентична с орбитой третьего тела в фазовом пространстве. Совокупность возможных движений в динамической задаче будет соответствовать движению всех частиц жидкости, или движению всей жидкости.

В гидродинамической задаче, когда скорость потока не зависит от времени, т. е. $\mathbf{v}=\mathbf{f}(\mathbf{r})$, как в данном случае, поток является стационарным и линии тока совпадают с траекториями частиц. В любой заданной точке $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ в четырехмерном потоке в каждый момент имеется только одна частица жидкости (с вполне определенной скоростью), исключая опять-таки особые точки. Поэтому линии тока, т. е. траектории частиц жидкости, не пересекаются. В соответствующей динамической задаче орбиты не пересекаются *в фазовом пространстве*.

Пересечение в четырехмерном потоке означало бы, что уравнения (31) не определяют скорость единственным образом. Пересечение орбит в динамической задаче (в плоскости $x=x_1$, $y=x_2$) просто означает, что пересекаются проекции траекторий потока.

Проекции замкнутых линий тока дают замкнутые орбиты, и так как в пространстве потока нет пересечений, то четыре координаты и четыре составляющие скорости должны быть согласованы в начале и при возвращении. (Под орбитами возвращения в динамике мы понимаем периодические орбиты, которые возвращаются к своим начальным условиям.) Такие периодические траектории в четырехмерном пространстве потока соответствуют периодическим орбитам в динамической задаче.

Точка остановки, или критическая точка в потоке, определяется равенствами $\dot{x}_1=\ldots=\dot{x}_4=0$. В динамической задаче это соответствует условиям $x_3=x_4=\partial\Omega/\partial x_1=\partial\Omega/\partial x_2=0$, т. е. так называемым точкам равновесия (см. гл. 4), так как при $\dot{x}=\dot{y}=0$ уравнения движения дают $\ddot{x}=\partial\Omega/\partial x_1=\partial\Omega/\partial x$ и $\ddot{y}=\partial\Omega/\partial y$; следовательно, частные производные равны нулю и мы имеем $\dot{x}=\ddot{x}=\dot{y}=\ddot{y}=0$.

Давление в любой точке потока находится из уравнения Эйлера

$$\varphi-\operatorname{grad} p=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\rho=\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{r}}\,\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right)\rho, \tag{33}$$

где φ — внешняя сила, действующая на единицу объема жидкости, p — давление и ρ — плотность. Градиент определяется частными производными $\partial p/\partial x_i$, а

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{r}}\,\mathbf{v}\text{ — выражением }\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j.$$

Задача. Покажите, что при отсутствии внешних сил для потока с плотностью, равной единице, отрицательный градиент давления имеет составляющие $\ddot{x}, \ddot{y}, \dddot{x}, \dddot{y}$.

Система четвертого порядка (31) имеет интеграл Якоби, который можно написать непосредственно или же вывести. В последнем случае нужно два последних уравнения (31) умножить на x_3 и x_4, сложить и проинтегрировать. Проделав все это, получим

$$x_3^2+x_4^2=2\Omega(x_1, x_2)-C. \tag{34}$$

Поскольку решения системы (31), т. е. уравнения линий тока должны удовлетворять интегралу (34), точки, описывающие линию тока, должны лежать на указанной выше трехмерной гиперповерхности. Если начальные условия для частицы жидкости

заданы и $\mathbf{r}_0(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})$ известно, то постоянная C может быть вычислена из уравнения (34). Или же, если заданы значение C для частицы и три ее начальных условия, то ее движение будет определено. Таким образом, C всегда может служить в качестве одного из начальных условий.

Представляют интерес два вопроса, касающиеся свойств потока: 1) является ли поток потенциальным и 2) чему равна его дивергенция. Поле скоростей, определяемое уравнениями (31), представляет собой поток несжимаемой жидкости, так как

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial v_i}{\partial x^i} = 0, \tag{35}$$

но он не является потенциальным потоком, поскольку в общем случае

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \qquad (i \neq j). \tag{36}$$

§ 2.5. Аналогия с линиями тока трехмерного потока

Как было показано раньше, с помощью интеграла Якоби нашу систему четвертого порядка можно привести к системе третьего порядка. Это означает, что четырехмерная гидродинамическая аналогия переходит в трехмерную, и уравнения (3) теперь можно интерпретировать как уравнения, определяющие три составляющие скорости поля потока. Так как правые части уравнений не содержат времени, то поток является стационарным. Если трехмерный поток представляет собой движение несжимаемой жидкости, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0. \tag{37}$$

В § 2.2 было показано, что выбрав функцию $f(x, y, z)$, мы получим две другие составляющие скорости в виде

$$g = (\Lambda^2 - f^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

и

$$h = \frac{\Omega_x - f f_x + g(2 - f_y)}{f_z}. \tag{7}$$

Вычисляя g_y и h_z и подставляя в уравнение (37), находим

$$F(\Lambda, \Lambda_x, \Lambda_y, f, f_x, f_y, f_z, f_{xz}, f_{yz}, f_{zz}) = 0. \tag{38}$$

Решение этого нелинейного уравнения второго порядка в частных производных относительно $f(x, y, z)$ дает множество функ-

ций f, которые, будучи подставлены в уравнения (4) и (7), дадут составляющие скорости всех несжимаемых потоков, аналогичных ограниченной задаче.

Задача. Найдите дифференциальное уравнение в частных производных (уравнение (38)) и докажите, что его можно удовлетворить функцией $f=\Lambda(x, y)\varphi(z)$, как это предлагается в первом уравнении (11). Решите результирующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $\varphi(z)$, которое получается после подстановки $\Lambda\varphi$, и покажите, что результат представляет собой некоторое обобщение поля потока Биркгофа (см. уравнение (14)).

Следует напомнить, что при приведении системы к третьему порядку используется интеграл Якобн, т. е. уравнения для поля скоростей содержат постоянную Якоби C:

$$\dot{x}=f(x, y, z, C),\ \dot{y}=g(x, y, z, C),\ \dot{z}=h(x, y, z, C). \qquad (39)$$

Это ясно видно из уравнений (14), где $\Lambda=(2\Omega-C)^{1/2}$. Физнческий смысл заключается в том, что трехмерный поток теперь имеет параметр C. Если значение C фиксировано, то совокупность лнний тока в трехмерном потоке соответствует орбитам с той же самой постоянной Якобн. Координаты x н y в динамической задаче представляют собой координаты третьей частицы. Орбита в динамической задаче поэтому соответствует в гидродинамнческой задаче проекцин линий тока на плоскость xy. Третья координата z частнцы жидкостн в днпамической задаче не допускает непосредственного физического истолкования. В аналогии Биркгофа

$$z=\operatorname{arctg} y', \qquad (40)$$

и, такнм образом, координата z частнцы жидкости служит мерой угла между касательной к орбите и осью x. Третья составляющая скорости потока $\dot{z}$ измеряет скорость изменения этого угла со временем.

Задача. Покажите, что для задачи двух тел в неподвижных координатах

$$\ddot{x}=\Omega_x,\ \ddot{y}=\Omega_y,\ \Omega=1/r \qquad (41)$$

круговые орбиты соответствуют потокам, движущимся по спиралн, если пользоваться аналогией Биркгофа, так как $z=\text{const}\cdot t$.

§ 2.6. Общие замечания относительно соотношения между системами Гамильтона и потоком в фазовом пространстве

Рассмотрнм динамическую систему с n степенями свободы и с гамильтонианом

$$H=H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t), \qquad (42)$$

где q_i — обобщенные координаты, а p_i — обобщенные импульсы.

Уравнения движения записываются в виде

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{43}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Положим $x_1 = q_1, \ldots, x_n = q_n, \quad x_{n+1} = p_1, \ldots, x_{2n} = p_n$. Тогда уравнения движения примут вид

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial x_{n+2}}, \quad \ldots, \quad \dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial x_{2n}},$$
$$\dot{x}_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \dot{x}_{n+2} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \dot{x}_{2n} = -\frac{\partial H}{\partial x_n}$$

и, рассматривая $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{2n}$ как $2n$ составляющие вектора скорости $\mathbf{v}$, а $x_1, \ldots, x_{2n}$ — как $2n$ составляющие радиуса-вектора $\mathbf{r}$, будем иметь

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t). \tag{44}$$

Дивергенция этого поля скоростей равна нулю. В самом деле,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} + \frac{\partial v_{n+1}}{\partial x_{n+1}} + \ldots + \frac{\partial v_{2n}}{\partial x_{2n}} =$$
$$= \frac{\partial^2 H}{\partial x_{n+1} \partial x_1} + \ldots + \frac{\partial^2 H}{\partial x_{2n} \partial x_n} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_{n+1}} - \ldots - \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_{2n}} = 0. \tag{45}$$

Следовательно, система канонических уравнений всегда может быть представлена несжимаемым потоком. Обратная теорема в общем случае неверна, так как условие несжимаемости может удовлетворяться и не каноническими системами. Например, система четвертого порядка (31) удовлетворяет условию несжимаемости, но не является канонической системой.

Так как гамильтониан (42) зависит явным образом от времени, то соответствующее поле потока является нестационарным:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \neq 0. \tag{46}$$

Стационарные потоки требуют, чтобы гамильтонианы не зависели от времени. Не зависящий от времени гамильтониан представляет интеграл динамической системы, и стационарный поток имеет линии тока, идентичные с траекториями частиц жидкости. Если же поток нестационарен, то форма линий тока будет изменяться со временем и они не будут совпадать с траекториями. Понятие линии тока можно распространить на нестационарные потоки, но польза от этого сомнительна. Положение здесь сходно с тем, которое мы имели в § 1.4, когда рассматривали роль интеграла, и сейчас мы видим, что нестационарные потоки связаны с зависящими от времени гамиль-

тонианами таким же образом, как несуществование линий тока в нестационарном потоке связано с несуществованием интеграла в обычном смысле. Введя в гидродинамике понятие изменяющихся линий тока, а в динамике — зависящие от времени постоянные интегрирования, мы сможем снова установить аналогию.

Задача 1. Покажите, что составляющие отрицательного градиента давления $-\partial p/\partial x_k$ $(k=1, 2, \ldots, 2n)$ равны $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \ldots, \dot{p}_n$.

Задача 2. Покажите, что поток в общем случае не является потенциальным или, иначе говоря, что не существует функции Φ, для которой бы вектор скорости потока являлся градиентом.

Так как каноническая форма уравнений движения приводит к аналогиям с несжимаемыми потоками, то отсюда следует, что канонические преобразования динамической системы дают новые потоки, которые тоже являются несжимаемыми. Что касается связи между зависящим от времени гамильтонианом и нестационарностью потока, то канонические преобразования устанавливают, что если первоначальный гамильтониан не зависит от времени и производящая функция также не зависит от времени, то тогда новый поток (как и первоначальный) будет стационарным. Посредством зависящих от времени производящих функций стационарный поток может быть преобразован в нестационарный, и наоборот. Следовательно, нестационарность или стационарность потока не являются инвариантным свойством канонических преобразований, в то время как несжимаемость этим свойством обладает.

Нестационарность потока можно характеризовать безразмерным отношением абсолютных значений локального и конвективного векторов ускорений:

$$S = \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right| \Big/ \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}\,\mathbf{v}\right| \tag{47}$$

или, применяя правило суммирования,

$$S^2 = \frac{\dfrac{\partial v_i}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial v_i}{\partial t}}{\dfrac{\partial v_j}{\partial x_k}\cdot\dfrac{\partial v_j}{\partial x_l}\,v_k v_l}. \tag{48}$$

Это дает нам возможность установить меру нестационарности потока. Например, когда поток стационарен и вектор скорости его зависит только от положения в потоке (т. е. только от $\mathbf{r}$), $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$ и, следовательно, $S=0$. Когда изменение вектора скорости со временем значительно больше, чем изменение его, вызываемое перемещением, S становится большим.

Основываясь на этом, мы можем также судить об эффекте, который оказывает время на гамильтониан и на адиабатические инварианты при достаточно ясно определяемой мере «медленных» изменений. Подробней об этом будет сказано в пункте 10.3.3 в связи с эллиптической ограниченной задачей.

Задача. Вычислите меру нестационарности (47) для динамической системы с n степенями свободы, когда гамильтониан явно зависит от времени. Покажите, что

$$S = G(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\frac{1/f(t)}{dt}, \tag{49}$$

когда

$$H = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) f(t).$$

§ 2.7. Аналогия с линиями тока двумерного потока

Рассматриваемая динамическая система с двумя степенями свободы имеет интеграл. Поэтому с помощью этого интеграла, исключив время, ее можно привести к системе второго порядка. Эта система второго порядка, если она является канонической, соответствует несжимаемому двумерному потоку. Поэтому, для того чтобы получить аналогию с двумерным несжимаемым потоком, следует выполнить приведения в канонической системе. Покажем, как это можно сделать.

Рассмотрим зависящий от времени гамильтониан системы с двумя степенями свободы:

$$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2). \tag{50}$$

Уравнения движения запишутся в виде

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}; \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \tag{51}$$

и система будет иметь интеграл

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = H_0 = \text{const}. \tag{52}$$

Если, скажем, q_1 рассматривать как независимую переменную, то уравнения движения можно представить в следующем виде:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{H_{p_2}}{H_{p_1}}, \quad \frac{dp_2}{dq_1} = -\frac{H_{q_2}}{H_{p_1}}, \tag{53}$$

так как, например,

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{dq_2}{dq_1}\dot{q}_1. \tag{54}$$

Здесь q_2 и p_2 — единственные оставшиеся зависимые переменные, так как q_1 становится новой независимой переменной,

и соответствующий импульс p_1 можно получить, решив уравнение (52) относительно p_1:

$$p_1 = p_1(q_2, p_2;\ q_1;\ H_0), \tag{54a}$$

где точкой с запятой отделены зависимые переменные q_2, p_2 от независимой переменной q_1, а также постоянная интегрирования H_0. При вычислении частных производных функции H, входящих в уравнения (53), когда H имеет форму (50), производные H_{p_1}, H_{p_2} и H_{q_2} сначала представляют в виде функций от q_1, q_2, p_1 и p_2. Затем с помощью уравнения (54а) из полученных результатов исключают p_1. Таким образом, уравнения (53) принимают вид

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \alpha(q_2, p_2; q_1; H_0), \quad \frac{dp_2}{dq_1} = \beta(q_2, p_2; q_1; H_0). \tag{55}$$

Эти уравнения образуют систему второго порядка; они получены с помощью интеграла (52) и исключения времени согласно (54).

Для того чтобы решить динамическую задачу, поступаем следующим образом. Сначала решаем уравнения (55) относительно q_2 и p_2:

$$q_2 = q_2(q_1, H_0, a, b), \quad p_2 = p_2(q_1, H_0, a, b), \tag{56}$$

где a, b — постоянные интегрирования. Затем из уравнения (54а) находим

$$p_1 = p_1(q_1, H_0, a, b), \tag{57}$$

а из первого уравнения (51) —

$$t - t_0 = \int_{q_{10}}^{q_1} \frac{dq_1}{H_{p_1}}. \tag{58}$$

Здесь $H_{p_1} = \partial H/\partial p_1$ вычисляется из гамильтониана (50); таким образом, будем иметь

$$H_{p_1} = \gamma(q_1, q_2, p_1, p_2). \tag{59}$$

Прежде чем выполнять интегрирование, нужно подставить q_2, p_1 и p_2 как функции q_1, H_0, a и b и получить $\bar{\gamma}(q_1, H_0, a, b) = \gamma(q_1, q_2, p_1, p_2)$, после чего будем иметь

$$t = \int_c^{q_1} \frac{dq_1}{\bar{\gamma}(q_1, H_0, a, b)}. \tag{60}$$

Выполнив интегрирование в правой части, можно будет найти из полученного уравнения зависимость q_1 от времени t и четы-

рех постоянных интегрирования: H_0, a, b и c. Из (56) и (57) получаем зависимость q_2, p_1 и p_2 от времени.

Вернемся теперь к уравнениям (55) и выясним, будут ли эти уравнения представлять двумерный несжимаемый поток, если рассматривать dq_2/dq_1 и dp_2/dq_1 как составляющие скорости потока, q_2, p_2 — как координаты в гидродинамической задаче и q_1 — как независимую переменную. Для того чтобы показать, что ответ будет утвердительный, докажем, что уравнения (55) представляют каноническую систему, т. е. что существует гамильтониан $\tilde{H}=\tilde{H}(q_2, p_2; q_1; H_0)$, который дает уравнения движения

$$\frac{dq_2}{dq_1}=\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_2} \quad \text{и} \quad \frac{dp_2}{dq_1}=-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_2}. \tag{61}$$

Действительно,

$$\tilde{H}=-p_1(q_2, p_2; q_1; H_0). \tag{62}$$

Так как q_1 является теперь новой независимой переменной, то сопряженный с ней импульс p_1 становится новым гамильтонианом со знаком минус. Это известная теорема, относящаяся к каноническим системам.

Следует заметить, что если в качестве независимой переменной выбрать q_2, то роль переменных изменится, если только гамильтониан H не будет симметричен относительно индексов 1 и 2, и окончательный вид уравнений (55) будет другим.

Прежде чем продолжить дальнейшее теоретическое исследование, обратимся снова к ограниченной задаче. Гамильтониан (50) для ограниченной задачи имеет следующий вид:

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+p_1q_2-p_2q_1-f(q_1, q_2), \tag{63}$$

где

$$p_1=\dot{q}_1-q_2, \quad p_2=\dot{q}_2+q_1, \quad q_1=x, \quad q_2=y \tag{64}$$

и

$$f=\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}, \tag{65}$$

$$r_1^2=(q_1-\mu)^2+q_2^2, \quad r_2^2=(q_1+1-\mu)^2+q_2^2. \tag{66}$$

Уравнения (63) — (66) выводятся и подробно анализируются в § 7.2. Здесь же они служат лишь для того, чтобы продемонстрировать процесс приведения системы четвертого порядка.

Так как гамильтониан не содержит явно времени, то $H=H_0=\text{const}$, и порядок может быть понижен с четвертого до второго. Решая уравнение $H=H_0$ относительно p_1, получаем

уравнение

$$p_1 = -q_2 \pm (q_2^2 - p_2^2 + 2p_2q_1 + 2f + 2H_0)^{1/2}, \tag{67}$$

соответствующее уравнению (55). Чтобы сохранить принятое ранее обозначение для постоянной Якоби $\bar{C}$, подставим $-\bar{C}/2$ вместо H_0. Новый гамильтониан $\tilde{H} = -p_1$ (уравнение (62)) тогда примет вид

$$\tilde{H} = q_2 \mp [2\Omega - C - (p_2 - q_1)^2]^{1/2}, \tag{68}$$

где в выражение, стоящее под корнем и определяемое формулой (67), введена величина, обозначенная через Ω, равная

$$\Omega = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu). \tag{69}$$

Следовательно,

$$2\Omega - C - (p_2 - q_1)^2 = q_2^2 - p_2^2 + 2p_2q_1 + 2f + \mu(1-\mu) - C,$$

и так как

$$H_0 = -\bar{C}/2, \quad \bar{C} = C - \mu(1-\mu),$$

то мы имеем

$$\mu(1-\mu) - C = 2H_0.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться уравнением (68), а не эквивалентным ему уравнением (67). Уравнения движения, соответствующие уравнениям (61), запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{dq_2}{dq_1} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_2} = \pm \frac{p_2 - q_1}{[2\Omega - C - (p_2 - q_1)^2]^{\frac{1}{2}}}, \\ \frac{dp_2}{dq_1} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_2} = -1 \pm \frac{\Omega_{q_2}}{[2\Omega - C - (p_2 - q_1)^2]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{70}$$

Эту систему второго порядка можно теперь интерпретировать как двумерный поток несжимаемой жидкости. Скорости потока стоят в левой части уравнений, координатами частицы жидкости являются q_2 и p_2 и независимой переменной служит q_1. В соответствии с этой физической картиной обозначения переменных можно поменять и перейти к тем, которые обычно применяются для функции тока. Независимую переменную обозначим теперь через t, переменные q_2, p_2 — через y, x и гамильтониан — через ψ. Тогда гидродинамическая задача будет опи-

сываться следующими уравнениями:

$$\frac{dx}{dt}=u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}=-1\pm\frac{\Omega_u}{[\Lambda^2-(x-t)^2]^{\frac{1}{2}}},$$
$$\frac{dy}{dt}=v=\frac{\partial\psi}{dx}=\pm\frac{x-t}{[\Lambda^2-(x-t)^2]^{\frac{1}{2}}}, \tag{71}$$

где $\Lambda^2=2\Omega-C$ зависит от q_1, q_2, т. е. от t, y.

Подвергая уравнения (70) каноническим преобразованиям, можно получить различные формы гидродинамических уравнений (71), представляющие несжимаемые потоки. Действительно, из уравнений (71) имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\psi_{yx}+\psi_{xy}=0, \tag{72}$$

что и следовало ожидать, так как динамическая задача (70) была сформулирована в канонических переменных.

Поток не является потенциальным:

$$|\operatorname{rot}\mathbf{v}|=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\Delta\psi\neq 0. \tag{73}$$

Поток, описываемый уравнениями (71), является нестационарным, так как t входит в правые части уравнений. Это, разумеется, является следствием того, что q_1 входит в правые части уравнений (70), что в свою очередь объясняется тем, что q_1 входит явным образом в гамильтониан $\tilde{H}$. Так как гамильтониан $\tilde{H}$ явно зависит от независимой переменной, то он непостоянен, и полезный интеграл не существует.

Вообще, если в динамической задаче гамильтониан H содержит явно время, то мы не имеем инвариантного соотношения $H=\text{const}$ для преобразования вдоль этих линий. Соответствующим гидродинамическим аналогом будет нестационарный поток. Основываясь на определенной ранее (уравнения (47) и (48)) мере нестационарности потока S, можно сказать, что приводимые динамические системы и стационарные потоки эквивалентны между собой.

Задача. Покажите, что задача двух тел может быть представлена как двумерный однонаправленный нестационарный несжимаемый поток (одна из составляющих скорости потока равна нулю). Не равная нулю составляющая скорости потока зависит только от «времени» и координаты, которая нормальна к направлению потока. Покажите, что $S=\infty$, $\operatorname{rot}\mathbf{v}\neq 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$.

§ 2.8. Дальнейшие общие замечания

Уравнение неразрывности в гидродинамике выражает сохранение материи и записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \tag{74}$$

где ρ — плотность, а $\mathbf{v}$ — скорость потока. Для несжимаемых жидкостей $\rho = \text{const}$ и уравнение (74) имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{75}$$

В стационарном потоке ни одна из переменных не зависит явно от времени, и поэтому $\partial\rho/\partial t = 0$, и уравнение неразрывности для стационарного потока несжимаемой жидкости принимает вид

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0. \tag{76}$$

Рассмотрим область трехмерного пространства, ограниченную поверхностью S. Скорость, с которой масса втекает в эту область через S, равна

$$\int \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \tag{77}$$

где вектор $d\mathbf{S}$ нормален к поверхности S и направлен внутрь. С помощью теоремы о дивергенции*) (Гаусса) верхний интеграл переписывается в виде

$$-\int_V \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \, dV, \tag{78}$$

где V — объем, ограниченный поверхностью S.

Масса жидкости внутри S равна $\int_V \rho dV$ и скорость изменения ее в зависимости от времени равна $\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$. Следовательно, сохранение материи можно выразить, приравняв два верхних интеграла, т. е. записав, что полная масса, заключенная внутри объема, не изменяется:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0. \tag{79}$$

Для несжимаемой жидкости масса ее внутри S равна

$$\rho \int_V dx_1 dx_2 dx_3 = \text{const}, \tag{80}$$

что выражает постоянство объема.

*) Имеется в виду теорема Остроградского о дивергенции. (*Прим. перев.*)

Рассмотрим теперь на основании теоремы Лиувилля уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_m; t) \tag{81}$$

и скорости dx_i/dt, такие, чтобы

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{82}$$

Увеличение объема измеряется величиной $\operatorname{div} \mathbf{v}$, и, так как она равна нулю, то объем

$$\int_V dx_1 dx_2 \ldots dx_m$$

сохраняется неизменным.

Рассмотрим теперь вместо уравнений (81) уравнения (43). Интегральный инвариант, выражающий сохранение объема, с $m = 2n$ переменными принимает вид

$$\int_v dq_1 \ldots dq_n dp_1 \ldots dp_n.$$

Это, несомненно, есть инвариант, так как канонические уравнения удовлетворяют условию равенства нулю дивергенции. Мы видим, что теорема Лиувилля обладает большей общностью и не ограничивается системами Гамильтона. Действительно, аналогия с трехмерным потоком, рассмотренная в § 2.5, вследствие нечетного порядка не может рассматриваться как гамильтонова система. Тем не менее, если удовлетворяется условие равенства нулю дивергенции, то существует интегральный инвариант в форме $\int dx\, dy\, dz$.

Некоторые интересные соображения и доказательство теоремы Лиувилля для канонических систем можно провести, заметив, что якобиан канонического преобразования равен единице, т. е.

$$\int_v dq_1 \ldots dq_n dp_1 \ldots dp_n = \int_V dQ_1 \ldots dQ_n dP_1 \ldots dP_n,$$

где переменные, набранные строчными буквами, представляют систему до преобразования, а набранные заглавными буквами, — после преобразования. Кроме того, движение эквивалентно бесконечно малым каноническим преобразованиям и потому соответствует сохранению интеграла

$$\int dq_1 \ldots dq_n dp_1 \ldots dp_n.$$

Задача. Покажите, что интеграл $\int dx\, dy\, dx\, dy$ инвариантен и конечен внутри окружности с радиусом, намного меньшим единицы, и с центром в одной из основных точек.

§ 2.9. Приложения

В этой главе мы преследовали две цели: 1) представить уравнения движения в существенно различных формах и 2) познакомить читателей с гидродинамическими аналогиями динамики.

Под *существенно различными* формами уравнений мы понимаем такие системы дифференциальных уравнений, порядок которых понижен с четвертого до третьего и затем до второго. Численное решение соответствующих дифференциальных уравнений не является предметом обсуждения в этой главе (оно будет рассмотрено в гл. 9). Не рассматриваются здесь также общие методы возмущений. Несомненно, однако, что при любом методе решения порядок решаемых уравнений имеет важное значение. Уравнения четвертого порядка вообще применяются в специальном или общем методах возмущений. Форма третьего порядка до сих пор не применялась, а форма второго порядка стала изучаться только в последнее время.

Полное решение задачи предполагает, конечно, определение зависимых переменных (координат) как функций независимого переменного (времени), что требует дальнейшего интегрирования, но преимущество системы в форме второго порядка состоит в том, что этот процесс изолирован. Решение системы второго порядка (такой, например, как (27)) должно дать зависимость y от x, т. е. геометрию или, проще говоря, форму орбиты. Движение третьей частицы по этой кривой можно определить отдельно (см. уравнение (26)).

Недостатком представления системы в форме второго порядка является то, что при этом вводится новая особенность. При представлении в форме четвертого порядка условия $\dot{x}=0$ или $\dot{y}=0$ не составляют проблемы, тогда как в форме второго порядка эти условия приводят к бесконечно большому значению dy/dx или dx/dy. Этого затруднения можно, правда, избежать, перейдя в численном процессе от y' к $1/y'$, когда $\dot{x}=\pm\varepsilon$, но помнить о нем всегда следует, в особенности при изучении тех периодических орбит, которые пересекают ось x перпендикулярно, т. е. когда $\dot{x}=0$. Тесным образом с этим вопросом связаны, конечно, системы второго порядка, рассмотренные нами в связи с гидродинамическими аналогиями. Поскольку эти системы имеют каноническую форму, легко провести их дальнейшее преобразование и получить многообразие форм второго порядка. Преимущества и недостатки форм второго порядка с точки зрения специальной или общей теории возмущений фактически не могут быть выяснены до того, как будут достаточно полно изучены преобразованные формы.

Гидродинамические аналогии имеют два аспекта: концептуальный и физический. Под первым мы понимаем получение качественной информации, а под вторым — фактическую конструкцию аналогового устройства.

Приложения теоремы Лиувилля в статистической механике хорошо известны, а одно из приложений Пуанкаре к ограниченной задаче по существу охватывается примером в конце предыдущего параграфа. Инвариантный интеграл, связанный с кольцевым преобразованием, и затронутые выше вопросы привели Пуанкаре к доказательству существования бесконечного числа периодических орбит для малого отношения масс, а Биркгофа — к доказательству существования бесконечного числа симметричных периодических орбит в ограниченной задаче.

Построение физической модели гидродинамической аналогии должно быть ограничено потоками двух и трех измерений. Между трехмерным стационарным потоком и двумерным нестационарным можно усмотреть некоторое сходство: в первом случае проекция линий тока на плоскость xy дает орбиты, а во втором случае мы наблюдаем действительные траектории.

Естественно, возникает вопрос о дальнейших уравнениях, описывающих движение жидкости, так как до сих пор мы пользовались только уравнением неразрывности. Гидродинамическое уравнение Эйлера имеет вид (33). С помощью известных в векторном анализе преобразований это уравнение можно представить в виде

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}\frac{\mathbf{v}^2}{2}-\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}\right)=\Phi-\operatorname{grad}p. \tag{83}$$

При постоянной плотности и стационарном потоке оно принимает вид

$$\frac{\Phi}{\rho}+\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}=\operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right). \tag{84}$$

Взяв ротор этого уравнения, получим

$$\operatorname{rot}(\mathbf{w}\times\mathbf{v})=\operatorname{rot}\frac{\Phi}{\rho}, \tag{85}$$

где $\mathbf{w}=\operatorname{rot}\mathbf{v}$ есть вектор напряженности вихря.

Уравнение Навье—Стокса для вязкой жидкости имеет вид

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}\frac{\mathbf{v}^2}{2}-\mathbf{v}\times\mathbf{w}\right)=\Phi-\operatorname{grad}p+\rho\nu\operatorname{rot}\mathbf{w}. \tag{86}$$

Предполагая несжимаемость и стационарность, будем иметь

$$\operatorname{rot}(\mathbf{w}\times\mathbf{v})=\operatorname{rot}\Phi/\rho-\nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{w}. \tag{87}$$

Таким образом, рассматривая аналогию между ограниченной задачей и стационарным потоком несжимаемой жидкости, мы

видим, что вектор скорости потока должен удовлетворять либо уравнению (85), либо уравнению (87). Это, разумеется, возможно, так как φ в этих уравнениях было взято произвольно.

Заметим, что вообще $\varphi \neq 0$, поэтому внешнее поле, действующее на жидкость, не является консервативным. Этот факт препятствует использованию гравитационного поля для образования Φ.

Задача. Вычислите $\mathrm{rot}\,\varphi$ для аналогии Биркгофа, заданной уравнениями (14).

§ 2.10. Замечания

Проблема интегрируемости, которой мы коснулись в § 2.1, будет нами подробней рассмотрена в гл. 8. Вместо того чтобы говорить об интегрируемых или неинтегрируемых системах, советские авторы в 1960-е годы стали применять термины «проинтегрированные и непроинтегрированные системы», см., например, Арнольд [1].

Теорема Брунса, приведенная во введении к § 2.1, первоначально появилась в его работе [2] в 1887 г. Наиболее важные для нас результаты Уиттекера содержатся в его работах [3], [4, стр. 523] и [5, стр. 157]. Замечания Пуанкаре [6] по статье Бруиса были опубликованы в 1896 г. Затем через год появилась работа Пенлеве, в которой содержались обобщения, и позже — работа Макмиллана [8]. В статье Пуанкаре [9] и в его книге [10, т. 1, стр. 233], а также в интерпретациях Уиттекера [3] содержатся ясные указания на ограниченную справедливость теоремы Пуанкаре. Значительный интерес представляют замечания Черри [11], а также обобщение Пенлеве [12]. Теорема Зигеля [13] появилась спустя 49 лет после теоремы Брунса. Теорема, относящаяся к работе Брунса, но касающаяся проблемы Хилла, будет рассмотрена нами в гл. 10. Все эти теоремы не исключают существование дополнительных интегралов других типов, как, например, это показал Леви-Чивита [14] в своих регуляризованных координатах (см. гл. 3).

Понятие «третий интеграл» относится к звездной динамике, где применяются потенциальные функции, отличные от той, что используется в ограниченной задаче. Несмотря на это, тот факт, что в дополнение к другим классическим интегралам могут существовать другие (*второй* интеграл в ограниченной задаче, *одиннадцатый* в общей задаче трех тел и *третий* в звездной динамике), широко исследуется. В качестве основных работ здесь можно указать на фундаментальную статью Уиттекера [15] об адельфическом интеграле и соответствующие разделы из его книги [3], а также на статьи Черри [11] и Зигеля [16]. Приложения к звездной динамике подробно рассмотрены Кон-

топулосом [17]. Гудас и Барбани [18] описали некоторые новые свойства третьего интеграла, а Эно и Хайлс [19] опубликовали расчетные результаты. Предварительные исследования Эно [20] и частично Бозн [21] посвящены второму интегралу для ограниченной задачи. Эти результаты, в особенности в связи с ограниченной задачей, полностью еще не завершены, по этой причине они, а также последняя работа [17] здесь не обсуждаются. Однако на работе Котсакиса [22] следует коротко остановиться, так как в ней содержится интересное приложение некоторых из этих результатов к вычислению дисперсии фрагментов в ограниченной задаче с очевидной причастностью к космогонии.

Общая форма приведения системы к третьему порядку, описанная в § 2.2, и результат приведения ко второму порядку (уравнение (25) § 2.3) не получили широкой известности. Интересный пример, касающийся уравнения (25), даи Уиттекером [3]. Этот пример относится также к уравнениям (146) и (147) § 3.9, а также к уравнениям (142) § 10.5, пункт 10.5.2.Г. Общая формулировка уравнения второго порядка (25) и его форма в полярных координатах даны в работе Себехея [23]. Преобразование Биркгофа, выражаемое уравнением (13) § 2.2, впервые было опубликовано в его мемуарах [23а] в 1915 г.

Что касается рассмотренных в этой главе аналогий с потоками, то по этому вопросу наиболее интересной является, пожалуй, книга Ланцоша [24, стр. 172—183 и 219—228]. Много разделов, посвященных этому вопросу, содержится у Пуанкаре [10, т. 3, стр. 142—174], но изложены они не так ясно, как у Ланцоша; автор данной книги считает книгу Ланцоша отличным введением в работы Пуанкаре.

Теорема Лиувилля [25] повторяется в работах Ланцоша [24, стр. 177—180], Синга [26], а также Винтнера; у последнего, правда, без раскрытия физической картины. Статистические аспекты и вопросы теории меры содержатся в работе Хинчина [28].

Мера нестационарности в гидродинамике (см. уравнения (47), (48)) введена Себехеем [29] и вместе с другими безразмерными числами рассматривалась Труселлом [30, стр. 379, 432].

Параграфы 2.6 и 2.7 и приведенные там примеры требуют знакомства с каноническими системами. По динамике Гамильтона может оказаться полезной гл. 6, в качестве более подробных источников можно указать, например, книгу Брауэра и Клеменса [31, стр. 530] и книгу Голдстейна [32].

Приведение к системе второго порядка, аналогичное изложенному в § 2.7, рассмотрено в работе Себехея [33]. Систему второго порядка в полярных координатах, о чем говорилось в § 2.3,

исследовали Меффруа [34] и, с общих позиций, Тиссеран [35, т. 1, стр. 87].

Задача, приведенная в конце § 2.8, заимствована у Пуанкаре [10, т. 3, стр. 157]. Физическая допустимость аналоговых устройств рассмотрена в работе [33]. Автор данной книги выражает свою признательность Дж. Д. Малхолленду за его замечания по этому вопросу.

§ 2.11. Литература

1. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.— Успехи математических наук, 1963, 18, вып. 6, с. 91—192.
2. Bruns H. Über die Integrale des Vielkörper-Problems.— Acta Math., 1887, 11, 25.
3. Whittaker E. T. Analytical Dynamics. London; New York: Cambridge Univ. Press, 1904. [Русский перевод: Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1937.]
4. Whittaker E. T. Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen.— Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (Schwarzschild K., Oppenhien, eds), v. 6, pt. 2 (1-я половина гл. 12), Leipzig: Teubner, 1905—1923.
5. Whittaker E. T. Report on the progress of the solution of the problem of three bodies.— Rept. 69th Meeting Brit. Assoc. Advan. Sci., 1899. London: Murray, 1900.
6. Poincaré H. Sur la méthode de Bruns.— Compt. Rend., 1896, 123, 1224.
7. Painlevé P. Sur les intégrales premières de la dynamique et sur le problème des n corps.— Compt. Rend. 1897, 124, 173. Mémoire sur les intégrales premières du problème des n corps.— Bull. Astron., 1898, 15, 81.
8. MacMillan W. D. On Poincaré's correction to Bruns' theorem.— Bull. Am. Math. Soc., 1913, 15, 349.
9. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.— Acta Math., 1890, 13, 259.
10. Poincaré H. Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, 3 vols. Paris: Gauthier—Villars, 1892—1899. [Русский перевод: Пуанкаре А. Новые методы небесной механики.— Избр. тр., т. 1, 2, М.: Наука, 1971, 1972.]
11. Cherry T. M. On Poincaré's theorem of The non-existence of uniform integrals of dynamical equations.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1924, 22, 287.
12. Painlevé P. Sur les intégrales uniformes du problème des n corps.— Compt. Rend., 1900, 130, 1699.
13. Siegel C. L. Über die algebraischen Integrale des restringierten Dreikörperproblems.— Trans. Am. Math. Soc., 1936, 39, 225.
14. Levi-Civita T. Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps.— Acta Math., 1906, 30, 305.
15. Whitakker E. T. On the adelphic integral of the differential equations of dynamics.— Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1916, 37, 95.
16. Siegel C. L. On the integrals of canonical systems.— Anal. Math, 1941, 42, 806.
17. Contopoulos G. On the existence of a third integral of motion.— Astron. J. 1963, 68, 1; A third integral of motion in a galaxy.— Z. Astrophys., 1960, 49, 273; The «third» integral in the restricted three-body problem.— Astrophys. J., 1965, 142, 802.

18. Goudas C. L., Barbanis B. S. A new property of the third integral.— Z. Astrophys., 1963, 57, 183.
19. Hénon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments.— Astron. J., 1964, 69, 73.
20. Hénon M. Numerical exploration of the restricted three-body problem.— Proc. Intern. Astron. Union, Symposium № 25, Thessaloniki, 1964. New York: Academic Press, 1966, p. 157. See following discussion by Szebehely V., Bozis G., p. 167.
21. Bozis G. On the existence of a new integral in the restricted three-body problem.— Astron. J., 1966, 71, 404.
22. Kotsakis D. Dispersion of Fragments in the restricted three-body problem.— Z. Astrophys., 1965, 60, 273.
23. Szebehely V. Equations for thrust programs.— Proc. 11th Intern. Astron. Congr., Stockholm, 1960, v. 1, p. 431. Wien: Springer, 1961.
23a. Birkhoff G. D. The restricted problem of three bodies.— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1915, 39, 1; also Birkhoff G. D. Collected Mathematical Papers.— New York, Am. Math. Soc., 1950, v. 2, p. 466.
24. Lanczos C. The Variational Principles of Mechanics. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1949. [Русский перевод: Ланцош К. Вариационные принципы механики.— М.: Мир, 1965.]
25. Liouville J. Sur le théorie de la variation des constantes arbitraires.— J. Math., 1838, 3, 342.
26. Synge J. L. Classical Dynamics.— Encyclopedia of Physics. V. 3/1, p. 1. Berlin: Springer, 1960. [Русский перевод: Синг Дж. Л. Классическая динамика.— М.: Физматгиз, 1963.]
27. Wintner A. Analytical Foundations of Celestial Mechanics.— Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1941. [Русский перевод: Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.]
28. Хинчин А. Я. Математические основания статистической механики.— М.; Л.: Гостехиздат, 1943.
29. Szebehely V. A measure of unsteadiness of time dependent flows.— Proc. 3rd Midwestern Conf. Fluid Mechanics, Minneapolis, 1953, p. 221. Minnesota, Minneapolis: Univ. of Minnesota, 1953.
30. Truesdell C. The classical Field Theories.— Encyclopedia of Physics. V. 3/1, p. 226. Berlin: Springer, 1960.
31. Brouwer D., Clemence G. Methods of Celestial Mechanics.— New York: Academic Press, 1961. [Русский перевод: Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики.— М.: Мир, 1964.]
32. Goldstein H. Classical Mechanics. — Addison—Wesley, Reading, Massachusetts, 1959. [Русский перевод: Голдстейн Г. Классическая механика.— 2-е изд.— М.: Наука, 1975.]
33. Szebehely V. Notes on a Two Degree of Freedom Irreversible Dynamical System: the Restricted Problem of Three Bodies. (Lectures Appl. Math. Ser., v. 5, p. 150.) — Rhode Island: Am. Math. Soc. Providence, 1966.
34. Meffroy J. Sur la recherche systématique des équations différentielles rigoureuses du mouvement plan d'un asteroïde de masse négligeable en coordonnées polaires.— Compt. Rend., 1962, 255, 644.
35. Tisserand F. Traité de Mécanique Céleste.— Paris: Gauthier—Villars. V. 1, 1889; v. 2, 1891; v. 3, 1894; v. 4, 1896.

Глава 3

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

§ 3.1. Введение

Существенное различие между движением естественных (небесных) тел и движением искусственных тел состоит в том, что в последнем случае сближение тел можно считать обычным явлением, тогда как в первом случае оно хотя и происходит, но весьма редко.

Причину этого факта легко понять из свойств ньютоновского гравитационного силового поля, в котором при неограниченном убывании расстояния между телами силы, действующие между ними, стремятся к бесконечности. Поэтому при столкновении (когда r_1 или r_2 равно нулю) уравнения обнаруживают особенности.

В космонавтике часто требуются траектории, соединяющие два небесных тела. Действительные траектории, разумеется, не проходят через особые точки, так как траектории оканчиваются в точке встречи космического аппарата с поверхностью небесного тела. В рамках задачи трех тел такое столкновение может произойти только в особой точке, поскольку в этой задаче тела рассматриваются как материальные точки. Таким образом, в физическом смысле особенности при столкновении в небесной механике никогда не имеют места. Однако в расчетном и концептуальном отношениях особенности в задаче трех тел играют весьма важную роль.

Сила, действующая на третье тело, а также скорость его возрастают, когда оно оказывается вблизи одного из основных тел. Величина шага при численном интегрировании должна быть значительно уменьшена в этой области, для того чтобы результат получился достаточно точным. Физические аспекты космических траекторий также требуют повышенной точности в этих критических областях вблизи особых точек.

Концептуальные аспекты особенностей в поле связаны с вопросом о существовании решения дифференциальных уравнений.

Так как особые точки, имеющие место при столкновениях, не являются существенными, то они могут быть исключены посред-

ством соответствующего выбора независимой переменной. После того как это сделано, можно выполнить следующие действия:

1) доказать существование решений при произвольном выборе начальных условий,

2) построить аналитически решения, проходящие через особые точки,

3) получить решения численно до столкновения, в момент столкновения и после столкновения,

4) рассмотреть сближение с аналитической и численной точностью.

В этой главе мы сначала рассмотрим простейшую прямолинейную орбиту столкновения, а затем перейдем к полной регуляризации ограниченной задачи. Соответственно первым вопросом будет задача двух тел. Уравнения движения регуляризуются в два этапа: сначала рассматриваются орбиты столкновения (§ 3.2), затем регуляризуется общая задача (§ 3.3). За этим следует регуляризация уравнений движения ограниченной задачи. Здесь мы сначала решим задачу «локально», т. е. регуляризуем уравнения движения только в одной из двух особых точках (§ 3.4). Затем мы произведем, выражаясь словами Биркгофа, «глобальную» регуляризацию: исключим обе особенности одновременно. Как «глобальная», так и «локальная» регуляризации могут рассматриваться в математическом отношении как локальные операции, но в этом вопросе мы будем придерживаться терминологии Биркгофа; дополнительные замечания отложим до § 3.10. Глобальная регуляризация может быть выполнена с помощью нескольких преобразований, мы опишем три способа (§ 3.5—§ 3.7). Обобщения и сравнения способов глобальной регуляризации проводятся в §§ 3.8 и 3.9. Параграф 3.10 содержит теорему о существовании решений ограниченной задачи для конечных интервалов времени. Завершается глава двумя главными областями приложений: космодинамикой и звездной динамикой.

Здесь нужно сделать два следующих дополнительных замечания.

Регуляция дифференциальных уравнений движения является главной задачей, и ей в основном посвящена данная глава. *Регуляризация решения* при столкновении всегда может быть выполнена путем введения эксцентрической аномалии, так как столкновение двух тел в любой задаче может быть регуляризовано таким способом.

Второе замечание следующее. Включение главы о регуляризации в книгу по небесной механике может служить двум целям. Это помогает доказать существование решений с точки зрения анализа и распространяет применимость небесной механики на случай орбит столкновения. В книгах по классической небесной механике вопрос о регуляризации часто вообще опускается,

так как аналитичность решений для астрономов не представляет большого интереса, а столкновения вообще не встречаются в классической небесной механике.

Для наших целей включение главы о регуляризации необходимо для того, чтобы удовлетворить наш интерес к приложениям из области космодинамики, а также чтобы доказать существование решений ограниченной задачи. Этим решениям, в конце концов, и посвящен данный труд.

После обзора методов регуляризации в конце главы рассмотрен вопрос о существовании. Три первых параграфа после Введения (§§ 3.2, 3.3 и 3.4) возможно покажутся читателям чересчур легкими, а местами даже изобилующими повторениями. Опыт преподавания подсказал автору такое изложение. Для перехода к более сложным вопросам нужно иметь хороший теоретический фундамент. Так как регуляризация особенно важна в космодинамике, то указанные выше параграфы в первую очередь предназначаются для тех, кто работает в этой области; некоторые аналитические вопросы отнесены к § 3.10.

§ 3.2. Регуляризация орбит соударения в задаче двух тел

В пункте А этого параграфа излагается динамика простой орбиты соударения без перехода к регуляризующим переменным. В пункте Б регуляризирующие переменные вводятся в общей форме, а в пункте В рассматривается специальное преобразование, относящееся только к независимой переменной. В пункте Г дается объяснение математическому результату, состоящему в том, что частица после соударения отражается, показывается регуляризующая роль эксцентрической аномалии и доказывается, что расстояние до места соударения изменяется как время в степени 2/3. В пункте Д регуляризация осуществляется преобразованием как независимой переменной, так и зависимой.

А. Рассмотрим уравнения движения ограниченной задачи (§ 1.5, уравнения (52)) и положим $\mu_1=1$, $\mu_2=0$. Соответствующая функция Ω будет равна

$$\Omega=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{2}r^2, \tag{1}$$

так как $r^2=r_1^2=x^2+y^2$ (см. рис. 3.1, *а*). Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}-2\dot{y}=x(1-1/r^3), \quad \ddot{y}+2\dot{x}=y(1-1/r^3) \tag{2}$$

с интегралом Якоби

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=r^2+\frac{2}{r}-C. \tag{3}$$

Уравнения (2) описывают задачу двух тел. Фактически они относятся к упрощенной ограниченной задаче трех тел, в которой масса одного из двух основных тел равна нулю. Такое описание дается в синодической системе координат, в результате

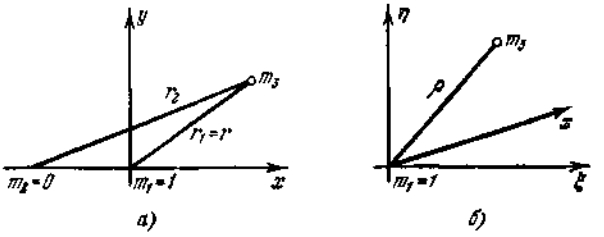


Рис. 3.1. К задаче двух тел.

чего уравнения принимают довольно сложный вид. Уравнения движения в соответствующей неподвижной системе координат записываются следующим образом:

$$\ddot{\xi}=-\frac{\xi}{\rho^3} \quad \text{и} \quad \ddot{\eta}=-\frac{\eta}{\rho^3}, \tag{4}$$

где $\rho^2=r^2=x^2+y^2=\xi^2+\eta^2$ (см. рис. 3.1, *б*). Интеграл энергии уравнений (4) имеет вид

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2=\frac{2}{\rho}-C. \tag{5}$$

Сначала рассмотрим самое тесное из возможных сближений, а именно, соударение. Так как орбита соударения двух тел в неподвижной системе координат представляет собой прямую, то мы можем задать следующие начальные условия: при $t=0$ $\xi=\xi_0$, $\dot{\xi}=\dot{\xi}_0$ и $\eta\equiv 0$, $\dot{\eta}\equiv 0$ для любого t. Замечая, что $\rho=|\xi|$, получаем

$$\ddot{\xi}=\mp\frac{1}{\xi^2} \tag{6}$$

для $\xi\gtrless 0$. Интеграл энергии дает

$$\dot{\xi}^2=\frac{2}{|\xi|}-C=\pm\frac{2}{\xi}-C \tag{7}$$

опять-таки для $\xi\gtrless 0$, и для того чтобы вычислить C, подставляем начальные условия. Проделав это, получим

$$C=\pm 2/\xi_0-\dot{\xi}_0^2. \tag{8}$$

Для определенности положим $\dot{\xi}_0=0$ и $\xi_0>0$. Таким образом, $C=2/\xi_0>0$, и из уравнения (7) получаем

$$\pm\int_{\xi_0}^{\xi}\left(\frac{\xi}{2-C\xi}\right)^{1/2}d\xi=t. \tag{9}$$

Заметим, что так как $2/|\xi|-2/\xi_0\geqslant 0$, то $|\xi|\leqslant\xi_0$; частица, начинающая движение в момент $t=0$ с $\xi=\xi_0>0$, никогда не удалится от начала координат на расстояние, большее, чем первоначальное. Скорость частицы направлена к началу координат и отрицательна в интервале времени $0<t<t_c$, где t_c — время соударения. Таким образом,

$$\dot{\xi}=-(2/|\xi|-C)^{1/2} \tag{10}$$

для $0<\xi<\xi_0$. Из уравнения (6) видно, что эта отрицательная скорость увеличивается по абсолютной величине, когда частица приближается к началу координат (к точке соударения), так как $\xi<0$ для $\xi>0$. Когда $\xi\to 0$, $|\dot{\xi}|\to\infty$ и, следовательно, уравнение (10) можно проинтегрировать от $t=0$ до $t_c-\delta$, где время $t_c-\delta$ соответствует $\xi=\varepsilon>0$, а время $t=0$ — координате $\xi=\xi_0$. Вычислим предел, когда $\varepsilon\to 0$ и $\delta\to 0$. Решая уравнение (9) с отрицательным знаком, будем иметь

$$t=\frac{1}{C}[\xi(2-C\xi)]^{1/2}+\frac{2}{C^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2-C\xi}{C\xi}\right)^{1/2}. \tag{11}$$

При $\xi\to 0$ из уравнения (11) получаем выражение

$$t\to t_C=\frac{\pi}{C^{3/2}}, \tag{12}$$

которое связывает начальные условия с моментом соударения, так как $C=2/\xi_0$ и, стало быть, $\xi_0=2\,(t_c/\pi)^{2/3}$.

Монотонно убывающая функция $\xi=\xi(t)$, полученная из уравнения (11), показана на рис. 3.2. Из уравнения (10) видно, что при $\xi\to 0$ (т. е. когда $t\to t_c$) $|\dot{\xi}|\to\infty$ и, следовательно, кривая пересекает ось t под прямым углом. Из начальных условий ($t=0$ $\xi=\xi_0$, $\dot{\xi}=\dot{\xi}_0=0$) следует, что кривая начинается от оси ξ под прямым углом. Так как в интервале времени $0\leqslant t<t_c$ вторая производная $\ddot{\xi}$ отрицательна, то кривая вогнутая.

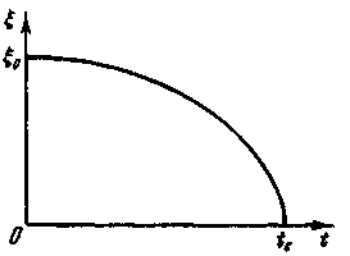


Рис. 3.2. Одномерная орбита соударения. Расстояние ξ как функция времени t.

Что происходит с частицей после момента t_c, когда $t\geqslant t_c$, из предыдущих результатов, конечно, не ясно, так как при $t=t_c$

они теряют смысл. Продолжение орбиты после соударения невозможно, так как решение встречается с особенностью в задаче.

Б. Для того чтобы исключить особенность, введем новые зависимую и независимую переменные

$$\xi = f(u) \tag{13}$$

и

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{g(u)}. \tag{14}$$

Движение в новой системе описывается функцией $u = u(\tau)$; новая переменная u зависит от собственной независимой переменной τ. Когда функции $f(u)$ и $g(u)$ известны, уравнение (13) также дает u как функцию от t, поскольку $\xi = \xi(t)$. Следовательно, уравнение (14) определяет зависимость между старой временной переменной t и новой τ.

Другой, часто встречающейся формой уравнения (14) является следующая:

$$\frac{dt}{d\tau} = g(u). \tag{15}$$

В этой форме отношение дифференциалов старого и нового времени выражается в виде функции новой зависимой переменной или, если учесть уравнение (13), в виде функции старой зависимой переменной.

Для того чтобы лучше представить, что происходит при соударении и вблизи него, нужно замедлить процесс путем растяжения шкалы времени, чтобы получить возможность рассматривать стремление действительной скорости к бесконечности.

Соображения, лежащие в основе выбора функций f и g, приводятся в следующих параграфах.

Новая скорость $u' = du/d\tau$ связана с действительной (физической) скоростью $\dot{\xi} = d\xi/dt$ соотношением

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{df(u)}{du} \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}, \tag{16}$$

или

$$\dot{\xi} = u' f'/g, \tag{17}$$

где через f' обозначена производная df/du. Уравнение (16) получается из уравнения (13) с помощью (15) и определяет новую скорость:

$$u' = g\dot{\xi}/f'. \tag{18}$$

Для того чтобы при соударении иметь конечное значение этой

новой скорости, необходимо, чтобы отношение g/f' при $\dot{\xi}\to\infty$ стремилось к нулю.

Интеграл энергии (7) можно записать в виде

$$\dot{\xi}^2 = 2/\xi - C = 2U, \tag{19}$$

где знаки $\pm$ опущены; напомним, что $\xi > 0$. В новых переменных интеграл энергии имеет вид

$$u'^2 = \frac{g^2}{f'^2}\left(\frac{2}{f} - C\right) = \frac{g^2}{f'^2}2U. \tag{20}$$

Когда $\xi\to 0$, $f(u)\to 0$ и $2U\to\infty$. Для того чтобы при соударении иметь конечную скорость u', нужно, чтобы $(g^2/f'^2)U$ было конечным, когда $\xi\to 0$.

Так как $2U = (2/\xi) - C$, то $U\to\infty$ при $\xi\to 0$ и вблизи соударения $U = 1/\xi = 1/f$. Таким образом, для того чтобы скорость была конечной в системе u, τ, требуется, чтобы выражение $g^2/(f'^2 f)$ оставалось конечным при $\xi\to 0$ или чтобы $(g/f')(1/f^{1/2})$ было конечным, когда $f\to 0$.

Если отношение g/f' представлено степенным рядом по $f^{1/2}$, то низший член ряда должен быть равен $(\text{const})f^{1/2}$. Это следует из того, что при $g/f' = (f^{1/2})^n$

$$\frac{g}{f'}\frac{1}{f^{1/2}} = (f^{1/2})^{n-1}.$$

Следовательно, верхнее предельное условие удовлетворяется, когда $n-1\geqslant 0$, и низшая степень величины $f^{1/2}$ в ряду должна быть равна единице. Ряд имеет следующий вид:

$$g/f' = A_1 f^{1/2} + A_2 f + A_3 f^{3/2} + A_4 f^2 + \ldots \tag{21}$$

Следовательно,

$$\frac{g}{f' f^{1/2}} = A_1 + A_2 f^{1/2} + \ldots, \tag{22}$$

и при $f\to 0$ $(g/f'f^{1/2})\to A_1$. Только в том случае, когда $A_1 = 0$, предельный процесс приводит к $g/(f'f^{1/2}) = 0$. Таким образом, скорость в системе u, τ конечна в особой точке, $u' = 2^{1/2}A_1$, при условии, что g и f выбраны так, чтобы удовлетворялось уравнение (22).

Например, если $\xi = f(u) = u^n$, то мы имеем

$$g = A_1 f' f^{1/2} = n A_1 u^{(3/2)n-1}. \tag{23}$$

Следующий шаг будет заключаться в исследовании уравнения движения в отношении особенностей. Аналогично уравнению (16) будем иметь

$$\ddot{\xi} = f' u' \frac{d^2\tau}{dt^2} + (f' u'' + f'' u'^2)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2.$$

Но так как

$$\frac{d^2\tau}{dt^2}=\frac{d}{dt}\frac{1}{g(u)}=-\frac{g'u'}{g^3},$$

то

$$\ddot{\xi}=-u'^3\frac{f'g'}{g^3}+\frac{f'u''+f''u'^3}{g^2}. \tag{24}$$

Из уравнения (6), ограничиваясь областью $\xi>0$, получаем уравнение движения в системе u, τ:

$$u''\frac{f'}{g^2}+u'^3\left(\frac{f''}{g^2}-\frac{f'g'}{g^3}\right)=\frac{1}{f'}\frac{dU}{du}, \tag{25}$$

или

$$u''+u'^2\frac{gf''-f'g'}{f'g}=\frac{g^2}{f'^2}\frac{dU}{du}. \tag{26}$$

В связи с регуляризацией скорости в системе u, τ уравнение (20) приводит к требованию, чтобы выражение $(g^2/f'^2)2U$ было конечным. Для того чтобы использовать это условие, вычисляем

$$\frac{d}{du}U\frac{g^2}{f'^2}=\frac{g^2}{f'^2}\frac{dU}{du}+\frac{u'^2}{f'g}(g'f'-gf''). \tag{27}$$

Решая это уравнение относительно требуемого члена в правой части равенства и подставляя в уравнение (26), находим

$$u''=\frac{d}{du}\frac{g^2}{f'^2}U, \tag{28}$$

что, конечно, можно получить также и из уравнения (20) посредством дифференцирования, поскольку $du'/du=u''/u'$.

В. Переходя к выбору функций f и g, напомним сначала идею Зундмана и Леви-Чивита, согласно которой существенной частью регуляризации является преобразование времени, выбор функции g. Основная идея следует из упоминавшегося выше процесса замедления явления. Уравнения

$$\frac{dt}{d\tau}=g(\xi) \tag{29}$$

и

$$\xi=u \tag{30}$$

заменяют уравнения (13) и (14). Новая скорость $u'=\xi'=d\xi/d\tau$ с помощью уравнения (20) принимает следующий вид:

$$\xi'^2=g^2(2/\xi-C), \tag{31}$$

и для того чтобы ξ' оставалось конечным при $\xi\to 0$, нужно, чтобы

$$g^2=A_1\xi+B_1\xi^2+C_1\xi^3+\ldots \tag{32}$$

Отсюда получаем

$$\xi'^2 = 2A_1 + \xi(2B_1 - CA_1) + \xi^2(2C_1 - CB_1) + \ldots, \tag{33}$$

и новая скорость при соударении будет равна $(2A_1)^{1/2}$. Если $A_1 = C_1 = \ldots = 0$, а $B_1 = 1$, то мы будем иметь $g = \xi$, $\xi'^2 = 2\xi - C\xi^2$ и из уравнения (29)

$$\frac{dt}{d\tau} = \xi, \tag{34}$$

или

$$d\tau = \frac{dt}{\xi} = \Omega(\xi)\, dt. \tag{35}$$

Таким образом, новая временная переменная τ непосредственно связана с потенциалом динамической задачи $\Omega(\xi) = 1/\xi$. Так как ξ в данной задаче есть расстояние движущейся частицы от особой точки, то $\Omega(\xi) = 1/r$ или

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r}. \tag{36}$$

Это есть обычная форма, часто встречающаяся в литературе.

Действительное решение задачи в системе ξ, τ получается посредством интегрирования уравнения (31). Вместо того чтобы пользоваться общей формой для $g(\xi)$, т. е. уравнением (32), продолжим рассмотрение частного случая, когда $B_1 = 1$, $A_1 = C_1 = \ldots = 0$:

$$\xi'^2 = \xi(2 - C\xi). \tag{37}$$

Начальными условиями являются следующие: при $t = 0$ $\tau = 0$, $\xi = 2/C$, и решение, получаемое из уравнения (37), имеет вид

$$\xi = \frac{1}{C}(1 + \cos C^{1/2}\tau). \tag{38}$$

Здесь τ связано с t соотношением

$$t = \frac{1}{C}\left[\tau + \frac{1}{C^{1/2}} \sin C^{1/2}\tau\right]. \tag{39}$$

Функции $\xi(\tau)$ и $t(\tau)$ показаны на рис. 3.3 и 3.4. Решение (38) может быть получено как из уравнения (37), так и из уравнения

$$\xi'' + C\xi - 1 = 0, \tag{40}$$

которое является следствием уравнения (26) или (28). Решение (39) получается из уравнения

$$t = \int_0^{\tau} \xi\, d\tau. \tag{41}$$

При соударении $t=t_c=\pi/C^{3/2}$, $\tau=\tau_c=\pi/C^{1/2}$, а в начале движения $t=\tau=0$.

Как видно из уравнений (38) и (39) и рис. 3.3 и 3.4, движение частицы является колебательным. В начале движения

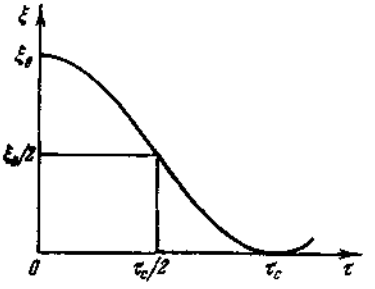


Рис. 3.3. Расстояние ξ как функция регуляризованного времени τ для одномерной орбиты соударения.

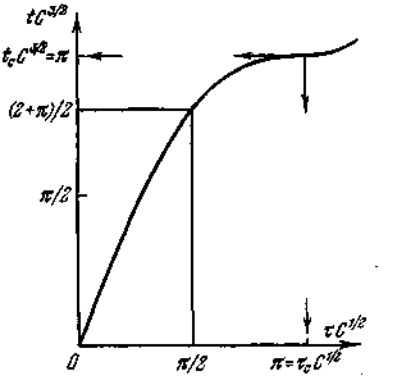


Рис. 3.4. Зависимость между физическим временем t и псевдовременем τ.

$t=\tau=0$, $\xi=2/C>0$, $\dot{\xi}=0$ и $\xi'=0$. Частица движется по направлению к началу координат ($\xi=0$) с $\dot{\xi}<0$ и $\xi'<0$. При $\tau=\tau_c/2$ $t=[(2+\pi)/2\pi]\,t_c$, $\xi=1/C$, $\dot{\xi}<0$, $\xi'<0$. При приближении частицы к началу координат $|\dot{\xi}|$ увеличивается по закону $1/\xi^{1/2}$, а ξ' стремится к нулю. В момент соударения $\xi=0$, $t=t_c$, $\tau=\tau_c$, $\xi'=0$ и $|\dot{\xi}|=+\infty$. Вскоре после соударения имеем $t>t_c$, $\tau>\tau_c$, $\xi>0$ и $\xi'>0$. При $t=2t_c$ $\tau=2\tau_c$, частица поворачивается назад при $\xi=2/C$ с $\dot{\xi}=\xi'=0$, и цикл повторяется. Функция $\xi(\tau)$ всюду регулярна; то же можно сказать относительно новой скорости

$$\xi'(\tau)=-\frac{1}{C^{1/2}}\sin C^{1/2}\tau.$$

Колебание происходит вдоль положительной оси ξ между $\xi_0=2/C$ и $\xi=0$ с периодом $2t_c=2\pi/C^{3/2}$. Поэтому для единичного среднего движения $n=2\pi/2t_c=1$ имеем $t_c=\pi$, $C=1$ и $\xi_0=2$.

Г. Регуляризованная скорость ξ' при соударении меняет знак: до соударения $\xi'<0$, после соударения $\xi'>0$. Так как при соударении действительная скорость $|\dot{\xi}|=\infty$, то частица приходит со скоростью $\dot{\xi}\to-\infty$, а уходит со скоростью $\dot{\xi}\to\infty$. Для того чтобы представить это ясней, рассмотрим предельное выражение эллиптической двумерной орбиты.

Как и на рис. 3.5, пусть $\dot{\eta}_0>0$ будет малой вертикальной скоростью в точке $\xi=\xi_0$, $\eta=0$, такой, что

$$2/\xi_0>\dot{\eta}_0^2.$$

Частица описывает эллипс с фокусом в начале координат системы ξ, η. Большая полуось этого эллипса связана с начальными условиями интегралом энергии $(2/r)-(1/a)=v^2$ или

$$1/a=2/\xi_0-\dot{\eta}_0^2, \qquad (42)$$

а эксцентриситет эллиптической орбиты определяется из равенства $\xi_0=a(1+e)$, или

$$e=\frac{\xi_0-a}{a}. \qquad (43)$$

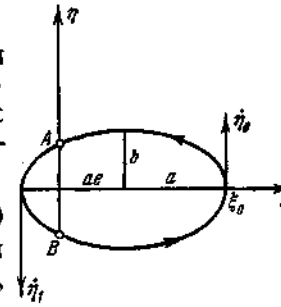


Рис. 3.5. Иллюстрация к случаю, когда $\dot{\eta}_0\to 0$.

Когда $\xi_0=2a$, тогда $e=1$, $\dot{\eta}_0=0$ и при $v^2=\dot{\xi}_0^2$ имеем

$$2/\xi_0-1/a=\dot{\xi}_0^2, \qquad (44)$$

откуда $C=1/a$.

Скорость в перицентре равна

$$\dot{\eta}_1=\frac{1}{a^{1/2}}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}$$

и стремится к бесконечности при $e\to 1$. Скорость в апоцентре равна

$$\dot{\eta}_0=\frac{1}{a^{1/2}}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{1/2} \qquad (45)$$

и стремится к нулю, когда $e\to 1$.

Скорость в точке A с координатами $\xi=0$, $\eta=\eta_A$ равна

$$v_A=\frac{1}{a^{1/2}}\left(\frac{1+e^2}{1-e^2}\right)^{1/2}, \qquad (46)$$

а составляющие скоростей в точках A и B равны

$$\dot{\xi}_A=-\frac{1}{[a(1-e^2)]^{1/2}}=-\dot{\xi}_B, \quad \dot{\eta}_A=-\frac{e}{[a(1-e^2)]^{1/2}}=\dot{\eta}_B. \qquad (47)$$

Когда $e\to 1$, эллипс вырождается в прямую $(b=a(1-e^2)^{1/2}\to\to 0)$ и указанные выше составляющие скорости стремятся к бесконечности. Составляющая скорости по оси ξ меняет знак, когда частица обходит особую точку: $\dot{\xi}_A=-\dot{\xi}_B$.

Период движения по эллипсу равен $T=2\pi/n$, где $n=a^{-3/2}$. Когда $\dot{\eta}_0\to 0$, $a^{-1}\to 2/\xi_0$ и $T\to 2\pi(2/\xi_0)^{-3/2}$. Так как $C=2/\xi_0$ и

$t_c=T/2$, то предельное условие эллиптического движения дает полученное ранее время соударения t_c.

Нельзя ожидать, что в случае $e=1$ движение будет во всем следовать описанному выше, но, с другой стороны, приведенные нами рассуждения позволяют считать, что результаты, полученные в процессе регуляризации, справедливы не только в математическом отношении, но и в физическом.

Прежде чем закончить рассмотрение этого простейшего случая регуляризации, обратимся снова к уравнению (38), связывающему расстояние $\xi=r$ с новой временной переменной τ. Подставляя $a=1/C$ и $na=aa^{-3/2}=C^{1/2}$, получаем

$$r=a(1+\cos na\tau),$$

где $na\tau=u$ есть эксцентрическая аномалия, и, следовательно, уравнение Кеплера

$$nt=u+e\sin u$$

при $e=1$ переходит в уравнение (39). Заметим, что если $u=\tau=0$ соответствует перигелию, а не афелию, как на рис. 3.5, то в двух последних уравнениях знаки плюс изменяются на знаки минус.

Таким образом, можно сделать заключение, что эксцентрическая аномалия служит регуляризующей переменной для задачи двух тел. Действительно, из уравнения (36) видим, что

$$d\tau=\frac{dt}{r} \quad \text{и} \quad du=\frac{na}{r}dt,$$

и, стало быть, наше «новое время» τ по существу является эксцентрической аномалией.

Если время от соударения измеряется величиной $t^*=t-t_c$ или $\tau^*=\tau-\tau_c$, где $Ct_c=\tau_c=\pi/C^{1/2}$, то уравнения (38) и (39) принимают вид соответственно

$$\xi=\frac{1}{C}(1-\cos C^{1/2}\tau^*), \qquad t^*=\frac{1}{C}\left(\tau^*-\frac{1}{C^{1/2}}\sin C^{1/2}\tau^*\right).$$

Разложение в степенные ряды дает

$$\xi=\frac{\tau^{*2}}{2!}-\frac{C\tau^{*4}}{4!}\pm\ldots=\tau^{*2}\Xi(\tau^*),$$

$$t^*=\frac{\tau^{*3}}{3!}-\frac{C\tau^{*5}}{5!}\pm\ldots=\tau^{*3}T(\tau^*),$$

где ряды $\Xi(\tau^*)$ и $T(\tau^*)$ являются сходящимися при любом τ^*, так как по существу они представляют собой ряды Тейлора для функций синуса и косинуса. Постоянными членами в рядах Ξ и T являются соответственно $(2!)^{-1}$ и $(3!)^{-1}$. Следовательно, для достаточно малых t^* будем иметь

$$\xi=(t^*)^{2/3}X(t^{*1/3}),$$

где опять-таки функция $X(t^{*1/3})$ представляет собой степенной ряд с постоянным членом $(9/2)^{1/3}$. Поэтому первоначальное решение имеет в t^* точку разветвления второго порядка, и синодическая траектория в момент соударения имеет точку заострения.

Д. Уравнения (13) и (14) указывают на возможность выполнения регуляризации посредством двух преобразований:

$$\xi = f(u) \text{ и } \frac{dt}{d\tau} = g(u).$$

В предыдущем примере выбор функции $f(u)$ был простым: $f(u) = \xi = u$; так что зависимая переменная не подвергалась преобразованию. Преобразование независимой переменной производилось по формуле $dt/d\tau = g(u) = g(\xi) = \xi$. Таким образом, регуляризация осуществлялась путем преобразования одной только независимой переменной, как можно было и ожидать, так как это являлось существенным этапом процесса регуляризации.

Если же преобразуется еще и зависимая переменная, то положение изменяется, так как уравнение (23) дает возможную функцию $g(u)$, после того как функция $f(u)$ уже выбрана.

Выбор функции

$$\xi = f(u) = u^2 \tag{48}$$

является следующим естественным шагом. Заметим, что когда n четное, уравнение (26) дает рациональные функции для g. В рассматриваемом случае

$$g(u) = Bu^2, \tag{49}$$

где $B = \text{const}$. Из уравнения (20) получаем новую скорость:

$$(u')^2 = (1/2 - Cu^2/4)B^2,$$

и, положив $B = 4$, будем иметь

$$u' = \pm 2(2 - Cu^2)^{1/2}. \tag{50}$$

Выбор постоянной B совершенно произволен. Если $B = 4$, то $g = 4u^2 = f'^2$; это понадобится нам в дальнейшем.

Что касается знака правой части уравнения (50), то заметим, что так как из уравнения (48) $u = \pm\xi^{1/2}$, а из уравнения (17)

$$\dot{\xi} = \frac{u'f'}{g} = \frac{u'}{2u}, \tag{51}$$

то мы приходим к следующему результату: если $\dot{\xi} > 0$, то либо $u > 0$, $u' > 0$, либо $u < 0$, $u' < 0$; если же $\xi < 0$, то знаки u и u' должны различаться. Нужно ясно представлять, что существует два различных значения u, соответствующих каждому значению ξ, кроме $\xi = 0$.

Уравнением движения будет уравнение (50). Уравнение второго порядка можно получить либо дифференцируя уравнение (50), либо используя уравнение (28). В результате будем иметь

$$u''+4Cu=0. \tag{52}$$

Решением уравнения (50) или (52) будет

$$u=(2/C)^{1/2}\cos 2C^{1/2}\tau, \tag{53}$$

где в качестве начальных условий взяты следующие: при $\tau=0$ $u=u_0=\xi_0^{1/2}=(2/C)^{1/2}$ и $u_0'=0$. Последнее условие следует из уравнения (51), так как $u_0'=2u_0\dot{\xi}_0=0$.

Соударению соответствует $\xi=u=0$, т. е. $\tau_c=\pi/4C^{1/2}$. Из уравнения (53) получаем новую скорость:

$$u'=-2(2)^{1/2}\sin 2C^{1/2}\tau. \tag{54}$$

В момент соударения она равна $u_c'=-2(2)^{1/2}$.

Тот же результат получается из уравнения (50) при $u=u_c=0$.

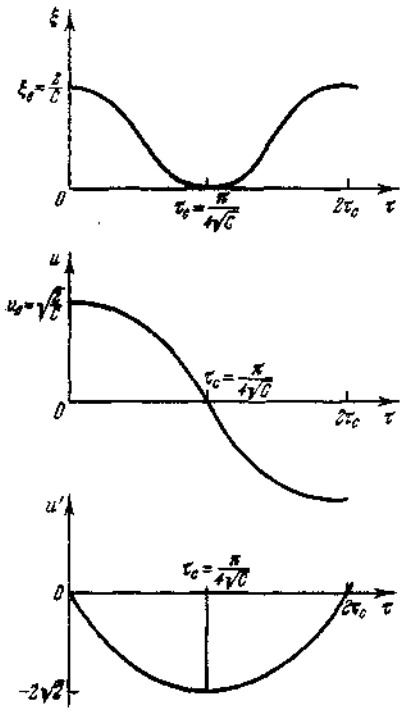


Рис 3.6. Соударение двух тел в системе преобразованных времени и координаты

На рис. 3.6 показаны функции $\xi(\tau)$, $u(\tau)$ и $u'(\tau)$. Изображены только положительные значения соотношения $u=\xi^{1/2}$. Между начальным положением и соударением $0\leqslant\tau<\tau_c$, $u_0\geqslant u\geqslant 0$, $\xi_0\geqslant\xi\geqslant 0$ и $0\geqslant u'\geqslant -2(2)^{1/2}$. В этой области $0\geqslant\dot{\xi}\geqslant-\infty$, т. е. $\dot{\xi}<0$ и знаки у u и u' различны. После соударения, в интервале времени $\tau_c<\tau\leqslant 2\tau_c$ частица возвращается из начала координат в положение $\xi=\xi_0$, которое она занимала в момент $\tau=0$. В течение этого времени $0\geqslant u\geqslant -u_0$, $0\leqslant\xi\leqslant\xi_0$ и $-2(2)^{1/2}\leqslant u'\leqslant 0$. В этой области знаки u и u' одинаковы и $\dot{\xi}>0$.

Для нахождения соотношения между новым временем τ и старым временем t из уравнения (15) имеем $dt/d\tau=4u^2$. Применяя уравнение (53), получаем

$$t=\int_0^{\tau}\frac{8}{C}\cos^2 2C^{1/2}\tau d\tau,$$

или

$$t=\frac{4}{C}\left(\tau+\frac{\sin 4C^{1/2}\tau}{4C^{1/2}}\right). \tag{55}$$

Общий вид этого соотношения показан графически на рис. 3.4, так как в этом случае $\tau_c=\pi/4C^{1/2}$.

Между двойным преобразованием, при котором преобразуется как время, так и зависимая переменная, и рассмотренным выше преобразованием одного только времени существенной разницы нет. Оба способа регуляризуют уравнение движения и представляют решение. Первый дает нулевую скорость при соударении, второй дает $2(2)^{1/2}$.

Преобразование независимой переменной регуляризирует уравнение движения, и оно принимает вид $\xi''+C\xi-1=0$, а двойное преобразование дает $u''+4Cu=0$. В математическом отношении оба эти уравнения одинаково просты.

Двумерный случай, который мы рассмотрим в следующем параграфе, отличается от случая прямолинейного движения (в отношении регуляризации) тем, что в двумерном случае интеграл энергии не дает уравнений движения. Введение энергетического соотношения (20) в уравнение движения (26) исключает квадратный член скорости в уравнении (26), в результате чего мы приходим к уравнению (28). Мы покажем, что в двумерном случае, для того чтобы исключить из уравнения движения квадратный член скорости, помимо преобразования времени необходимо выполнить еще геометрическое преобразование (преобразование координат).

Поскольку регуляризация ограниченной задачи осуществляется двойными преобразованиями, высказанные выше соображения (уравнения (48) и (55)) могут рассматриваться как подготовительные упражнения.

§ 3.3. Регуляризация общей задачи двух тел

Обратимся теперь снова к уравнениям (4) и исследуем их общую форму. Вводя $\zeta=\xi+i\eta$, будем иметь $\rho=|\zeta|$ и

$$\ddot{\zeta}=-\zeta/|\zeta|^3. \tag{56}$$

Легко видеть, что при $\zeta=0$, т. е. при соударении, мы имеем особенность. Следовательно, с математической точки зрения регуляризация представляет интерес только тогда, когда орбита, имеющая форму конического сечения, вырождается в прямую. С практической точки зрения так называемые орбиты сближения тоже требуют регуляризации, так как при расчете действительной орбиты при этих условиях возникает проблема точ-

ности. По этой причине мы произведем регуляризацию уравнения (56), для чего осуществим преобразование координат

$$\zeta = f(w) \tag{57}$$

и преобразование времени

$$\frac{dt}{d\tau} = g(w), \tag{58}$$

которые аналогичны преобразованиям (13) и (14). Здесь $w = u + iv$, так что в то время как в случае прямолинейного движения преобразование представляло соотношение между точками физической линии ξ и преобразованной линии u, теперь мы имеем соотношение между физической плоскостью ζ и преобразованной плоскостью w. Функция $g(w)$ является действительной функцией комплексной переменной w. Так что новое время τ — действительная величина.

Первое преобразование представляет собой конформное отображение, оно содержит геометрическую информацию и контролирует точность формы орбиты. Второе преобразование, как было показано выше, является наиболее существенным, так как оно контролирует кинематические характеристики и осуществляет регуляризацию. Введение двух преобразований дает бо́льшую свободу и, как будет показано ниже, приводит к значительным упрощениям преобразованных уравнений движения, достигаемым путем соответствующего (не независимого) выбора функций f и g.

Интеграл энергии в физической плоскости имеет вид

$$|\zeta|^2 = 2/|\zeta| - C \tag{59}$$

и, как мы видим, совпадает с тем, который был определен ранее уравнением (5).

Вычисление $\dot{\zeta}$ производится способом, аналогичным тому, что применялся в одномерном случае:

$$\dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{dw}\frac{dw}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \tag{60}$$

или

$$|\dot{\zeta}|^2 = \frac{|f'(w)|^2 |w'|^2}{g^2}. \tag{61}$$

Совместно с уравнением (59) это дает интеграл энергии в новой системе переменных

$$|w'|^2 = \left(\frac{2}{|f|} - C\right)\frac{g^2}{|f'|^2}, \tag{62}$$

аналогичный интегралу, определяемому уравнением (20). В левой части равенства (62) стоит квадрат новой скорости, ко-

торый равен

$$|w'|^2=\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2. \tag{63}$$

Прежде чем переходить к рассмотрению общего положения, положим, по аналогии с предыдущим случаем, $\zeta=w^2$, что соответствует $\xi=u^2$ в уравнении (48). В уравнении (36) производная $d\tau/dt$ определена как величина, обратная расстоянию. В данном случае имеем $d\tau/dt=r^{-1}=|\zeta|^{-1}=|w|^{-2}$. (Коэффициент 4, который мы здесь введем и который был нами введен еще раньше в уравнении (49), несуществен.) Таким образом, уравнениями преобразования будут

$$\zeta=f(w)=w^2, \tag{64}$$

и

$$\frac{dt}{d\tau}=g(w)=4|w|^2. \tag{65}$$

Интеграл энергии принимает вид

$$|w'|^2=8-4|w|^2C, \tag{66}$$

а соотношение между физической скоростью и преобразованной будет

$$|\dot{\zeta}|=\frac{|w'|}{2|w|}, \tag{67}$$

что можно рассматривать как обобщение соотношения (51).

Уравнение движения в преобразованных переменных имеет вид

$$w''+4Cw=0. \tag{68}$$

Оно может быть получено посредством преобразования первоначального уравнения движения (уравнение (56)) с помощью интеграла энергии (66).

Рассмотрим теперь уравнение движения (56), которое напишем в виде

$$\ddot{\zeta}=\operatorname{grad}_\zeta\frac{1}{|\zeta|}, \tag{69}$$

где для действительной функции F комплексной переменной ζ мы определяем

$$\operatorname{grad}_\zeta F(\zeta)=\frac{\partial F}{\partial\xi}+i\frac{\partial F}{\partial\eta}. \tag{70}$$

Обозначая, как и ранее,

$$U=\frac{1}{|\zeta|}-\frac{C}{2}, \tag{71}$$

будем иметь

$$\ddot{\zeta}=\operatorname{grad}_\zeta U. \tag{72}$$

Интеграл энергии (59) принимает вид

$$|\dot{\zeta}|^2 = 2U. \tag{73}$$

Для того чтобы преобразовать уравнение (72), воспользуемся выражением для $\dot{\zeta}$ (уравнение (60)):

$$\dot{\zeta} = \frac{df}{dw}\frac{dw}{d\tau}\frac{d\tau}{dt},$$

которое, полагая

$$\frac{d\tau}{dt} = \dot{\tau}, \quad \frac{df}{dw} = f'(w), \quad \frac{dw}{d\tau} = w'(\tau),$$

можно переписать в виде

$$\dot{\zeta} = f'w'\dot{\tau}. \tag{74}$$

Для второй производной имеем

$$\ddot{\zeta} = f'w'\ddot{\tau} + (f''w'^2 + f'w'')\dot{\tau}^2. \tag{75}$$

Градиент тоже должен быть преобразован. Можно показать, что

$$\overline{f'}\,\mathrm{grad}_\zeta U = \mathrm{grad}_w U, \tag{76}$$

где черта обозначает сопряженную величину, т. е. $\overline{f'} = \overline{(df/dw)}$.

Таким образом, уравнение (72) принимает вид

$$w'' + w'\frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}^2} + w'^2\frac{f''}{f'} = \frac{\mathrm{grad}_w U}{\dot{\tau}^2|f'|^2}. \tag{77}$$

Вычисление $\ddot{\tau}$ требует некоторого внимания. Так как $\dot{\tau} = 1/g$, то имеем после дифференцирования

$$\ddot{\tau}/\dot{\tau}^2 = -\dot{g}. \tag{78}$$

Кроме того, $g = g(w)$ есть действительная функция комплексного переменного, так что ее можно представить в виде $g = h(w)\overline{h}(w) = |h|^2$, причем предполагается дифференцируемость функции $h(w)$. Производная dg/dt принимает вид

$$\frac{dg}{dt} = \left(h\frac{\overline{dh}}{dw}\frac{\overline{dw}}{d\tau} + \overline{h}\frac{dh}{dw}\frac{dw}{d\tau}\right)\dot{\tau}. \tag{79}$$

При вычислении производной от $\overline{h}$ нужно учитывать, что

$$(\overline{h})' = \frac{d\overline{h}}{dw} = \overline{\frac{dh}{dw}} = (\overline{h'}).$$

Следовательно,

$$\frac{d\overline{h}}{dt} = \frac{\overline{dh}}{dw}\frac{\overline{dw}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \overline{\frac{dh}{dw}}\frac{\overline{dw}}{d\tau}\dot{\tau} = \frac{\overline{h'}\overline{w'}}{\overline{h}}$$

и

$$\frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}^2} = -\dot{g} = -\left(\frac{\overline{h'}\overline{w'}}{\overline{h}} + \frac{h'w'}{h}\right).$$

Подставляя в уравнение (77), получаем

$$w'' - \frac{|w'|^2}{\overline{h}}\frac{\overline{dh}}{dw} + w'^2\left(\frac{f''}{f'} - \frac{h'}{h}\right) = \frac{|h|^4}{|f'|^2}\operatorname{grad}_w U. \qquad (80)$$

Второй член в левой части равенства можно преобразовать, применяя интеграл энергии

$$|w'|^2 = \frac{|h|^4}{|f'|^2}2U, \qquad (81)$$

так что уравнение движения принимает вид

$$w'' + (w')^2\frac{d}{dw}\left(\ln\frac{f'}{h}\right) = \frac{|h|^4}{|f'|^2}\left(2U\frac{\overline{d\ln h}}{dw} + \operatorname{grad}_w U\right), \qquad (82)$$

что можно записать также в виде

$$w'' = \operatorname{grad}_w\left|\frac{h^2}{f'}\right|^2 U - 2iw'\operatorname{Im}\left(w'\frac{d}{dw}\ln\frac{f'}{h}\right), \qquad (83)$$

где символ Im обозначает мнимую часть следующего за ним комплексного выражения.

Прежде чем рассмотреть дифференциальные операции при переходе от уравнения (82) к уравнению (83), заметим, что если $f' = h$, то

$$w'' = \operatorname{grad}_w|f'|^2 U, \qquad (84)$$

и если, согласно уравнению (64), $\zeta = f(w) = w^2$, то будем иметь

$$w'' = \operatorname{grad}_w 4|w|^2(1/|w|^2 - C/2) = -4Cw, \qquad (85)$$

что полностью согласуется с уравнением (68).

Уравнение (83) легко проверить, если заметить, что

1) $\operatorname{grad}_w g_1(w) g_2(w) = g_1\operatorname{grad}_w g_2 + g_2\operatorname{grad}_w g_1$,

где g_1 и g_2 — действительные функции комплексной переменной w, и

2) $$\operatorname{grad}_w|G(w)|^2 = 2G\frac{\overline{dG}}{dw},$$

где G — комплексная функция комплексной переменной w.

В справедливости первого равенства мы предлагаем читателю убедиться самому, а второе докажем следующим образом.

Так как $G(w)$ является аналитической функцией, то

$$G_u = \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{dG}{dw} = -iG_v \quad \text{и} \quad \overline{G}_u = \frac{d\overline{G}}{dw} = i\overline{G}_v.$$

Кроме того,

$$\operatorname{grad}_w |G|^2 = G \operatorname{grad}_w \bar{G} + \bar{G} \operatorname{grad}_w G,$$

где

$$\operatorname{grad}_w G = G_u + iG_v = 0$$

и

$$\operatorname{grad}_w \bar{G} = \bar{G}_u + i\bar{G}_v = 2\frac{d\bar{G}}{dw},$$

что и требовалось доказать.

Выведем теперь уравнение (76). Напишем $\operatorname{grad}_w U(w) = U_u + iU_v$ в развернутом виде:

$$\operatorname{grad}_w U = U_\xi \xi_u + U_\eta \eta_u + i(U_\xi \xi_v + U_\eta \eta_v).$$

Соотношения Коши—Римана преобразовывают мнимую часть в

$$-U_\xi \eta_u + U_\eta \xi_u.$$

Тогда $\operatorname{grad}_w U$ принимает вид

$$(\xi_u - i\eta_u)(U_\xi + iU_\eta) = \bar{f}' \operatorname{grad}_\xi U,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что когда выбрано $h = f'$, нелинейная часть уравнения (83) (относительно w'), как уже говорилось, пропадает. Следствием этого выбора является $g = |f'|^2$, и преобразование времени будет связано с преобразованием координат следующей формулой:

$$\frac{dt}{d\tau} = |f'|^2. \tag{86}$$

Нельзя не отметить простоту и изящество уравнения (68). Первоначальное уравнение движения (уравнение (56))

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\zeta}{|\zeta|^3} = 0$$

заменяется уравнением

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} + 4Cw = 0.$$

Решение его может быть написано сразу:

$$w = A\cos 2C^{1/2}\tau + B\sin 2C^{1/2}\tau \quad \text{для} \quad C > 0, \tag{87}$$

$$w = A\operatorname{ch} 2(-C)^{1/2}\tau + B\operatorname{sh} 2(-C)^{1/2}\tau \quad \text{для} \quad C < 0 \tag{88}$$

и

$$w = A + B\tau \quad \text{для} \quad C = 0. \tag{89}$$

Такое представление задачи двух тел не является, конечно, новым, и общий метод введения универсальных переменных

является здесь не главной целью, а скорее побочным результатом наших рассуждений. Заметим, что процесс регуляризации также выполняется посредством введения таких переменных.

Итак, регуляризация задачи двух тел осуществляется следующим образом.

Преобразования $\zeta = w^2$ и

$$t = 4\int_0^\tau |w|^2 d\tau$$

приводят к уравнениям движения вида

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} + 4Cw = 0,$$

где постоянная

$$C = \frac{2}{|\zeta|} - |\dot{\zeta}|^2$$

определяется начальными условиями. Преобразование начальных условий и переход от величин ζ_0, $\dot{\zeta}_0$ к величинам w_0, $w_0' = (dw/d\tau)_0$ производится по формулам $w_0 = \zeta^{1/2}$ и $w_0' = 2\dot{\zeta}_0\overline{w}_0$.

На основании уравнения (84) предыдущие положения можно обобщить.

Дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\zeta} = \operatorname{grad}_\zeta U$$

можно преобразовать в следующее:

$$w'' = \operatorname{grad}_w |f'(w)|^2 U.$$

Геометрическое преобразование $\zeta = f(w)$ и преобразование времени $dt = |f'(w)|^2 d\tau$ осуществляются здесь одной и той же функцией $f(w)$. Если преобразование времени будет связано с функцией $f(w)$ каким-либо другим образом, то в преобразованном уравнении будет содержаться член второй степени относительно первой производной.

В предыдущем уравнении

$$\operatorname{grad}_w |f'(w)|^2 U = \frac{\partial}{\partial u}|f'|^2 U + i\frac{\partial}{\partial v}|f'|^2 U,$$

и новая (преобразованная) скорость связана с первоначальной (физической) скоростью соотношением

$$\dot{\zeta} = f'w'/|f'|^2 \quad \text{или} \quad w' = \overline{f'}\dot{\zeta}.$$

§ 3.4. Локальная регуляризация ограниченной задачи

Общая постановка задачи здесь не отличается от задачи двух тел. Мы снова вводим два преобразования

$$z = f(w) \tag{90}$$

и

$$\frac{dt}{d\tau} = g(w) = |h(w)|^2,$$

аналогичные преобразованиям (57) и (58). Заметим, что уравнение (90) представляет собой соотношение между z и w, а не между ζ и w, так как мы имеем дело с преобразованиями безразмерной вращающейся координатной системы (z).

Уравнение движения ограниченной задачи в комплексной форме имеет вид

$$\ddot{z} + 2i\dot{z} = \operatorname{grad}_z U. \tag{91}$$

Выполняя преобразования, получаем

$$w'' + 2ig(w)w' = \operatorname{grad}_w \left|\frac{h^2}{f'}\right|^2 U - 2iw' \operatorname{Im}\left(w' \frac{d}{dw} \ln \frac{f'}{h}\right), \tag{92}$$

где

$$U = \Omega - C/2.$$

Вывод уравнения (92) аналогичен выводу уравнения (83), различие состоит лишь в том, что в уравнение (92) входит член линейный относительно w'. Мы снова видим, что если $f' = h$ или $g(w) = |f'|^2$, то уравнение движения принимает вид

$$w'' + 2i|f'|^2 w' = \operatorname{grad}_w |f'|^2 U. \tag{92'}$$

Интеграл Якоби в физической системе равен

$$|\dot{z}|^2 = 2U. \tag{93}$$

В преобразованной системе он имеет вид

$$\left|\frac{dw}{d\tau}\right|^2 = 2|f'|^2 U. \tag{94}$$

В особых точках функции U, где $r_1 \to 0$ или $r_2 \to 0$, физическая скорость $|\dot{z}| \to \infty$.

Задача. Получите преобразованные уравнения движения (92) из уравнения (91), поступая аналогично тому, как это мы делали при выводе регуляризованных уравнений в задаче двух тел.

Выбор преобразования времени, связанного с преобразованием координат, производился нами в §§ 3.3 и 3.4 в соответствии с уравнениями (83) и (92). Согласно этим уравнениям, если

$$\frac{dt}{d\tau} = g(w) = |h(w)|^2 = |f'(w)|^2,$$

то регуляризованное уравнение линейно относительно первой и второй производных новой зависимой переменной w. При

другом выборе $g(w)$, в случае уже выбранной функции $f(w)$, в преобразованные уравнения войдет величина w'^2 или ее эквивалент. Можно, конечно, выбрать и другие функции для $g(w)$. Один из способов выбора функции, управляющей преобразованием времени, предложенный Аренсторфом, особенно привлекателен вследствие его динамического значения. При этом выборе требуется, чтобы два любых «эквивалентных» решения регуляризованного уравнения (92) обнаруживали геометрическое и динамическое соответствия в отношении их переменной — времени. Эквивалентными решениями в плоскости w, скажем, $w_1(\tau)$ и $w_2(\tau)$, назовем такие, которые отображаются в одну и ту же кривую решения в плоскости z. Такая эквивалентность имеет только геометрический характер, но если потребовать, чтобы для заданного значения τ_0 точки на регуляризованных решениях $w_1(\tau_0)$ и $w_2(\tau_0)$ отображались в одну и ту же точку $z(t_0)$, то будет достигнута также и динамическая эквивалентность. Заметим, что связь между t и τ зависит от решения в плоскости w, так как

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{g(w)},$$

и, следовательно, требование динамической эквивалентности не обязательно выполняется. К этому вопросу мы вернемся в конце § 3.7.

Функция $z=f(w)=w^2$ регуляризирует особенность в начале координат в задаче двух тел. Функция преобразования $Z=z-\mu$ смещает точку $z=\mu$ плоскости z в начало координат плоскости Z, следовательно, преобразование $Z=w^2$ снова будет регуляризовать особенность в начале координат плоскости Z и соответственно в точке $z=\mu$ плоскости z.

Так как в ограниченной задаче тела конечной массы расположены в точках $z_1=\mu$ и $z_2=\mu-1$, то преобразование $z=\mu+w^2$ будет регуляризовать особенность в m_1, а преобразование $z=\mu-1+w^2$ — особенность в m_2. Такие преобразования, следуя Биркгофу, называют *локальными* регуляризациями, так как при выборе одного из приведенных выше преобразований исключается только одна из особенностей.

Рассмотрим функцию

$$z=f(w)=w^2+\mu, \tag{95}$$

которая преобразовывает точку $P_1(\mu, 0)$ физической плоскости в начало координат плоскости w и в то же время точку $P_2(\mu-1, 0)$ — в $w_{1,2}=\pm i$. Начало координат физической плоскости перемещается в $w_{1,2}=\pm i\mu^{1/2}$, и верхняя полуплоскость z ($y>0$) преобразуется в первый квадрант плоскости w ($u>0$, $v>0$). Так как $w=\pm(z-\mu)^{1/2}$, то часть плоскости z, для кото-

рой $y>0$, преобразуется в третий квадрант плоскости w ($u<0$, $v<0$). Соотношение между точками плоскостей z и w является одно-двузначным соответствием: каждой точке плоскости z (за исключением $z=\mu$) соответствуют две различные точки в плоскости w. Это есть известное свойство функции, определяемой уравнением (95), благодаря которому один лист плоскости w преобразуется в два листа плоскости z. Рис. 3.7,*а* и *б*

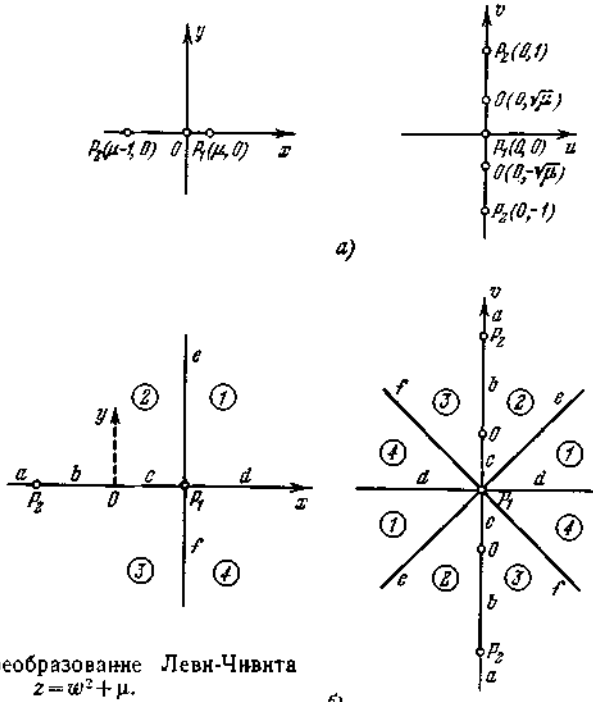


Рис. 3.7. Преобразование Леви-Чивита $z=w^2+\mu$.

иллюстрируют преобразование посредством формулы $z=w^2+\mu$. Рис. 3.7,*а* иллюстрирует преобразование характерных точек с их координатами. Рис. 3.7,*б* показывает отображение плоскости z на плоскость w. Сектор в 90°, помеченный на плоскости z цифрой *1*, переходит в два сектора по 45° на плоскости w. Отрезок прямой слева от точки P_2 вдоль отрицательного направления оси x, помеченный буквой a, преобразуется в отрезок прямой вдоль оси v. Заметим, что секторы на плоскости z разделяются вертикальной линией, пересекающей ось x в точке P_1, *а не осью* y.

Для преобразования $U=\Omega-(C/2)$ к новой переменной w нужно выразить r_1 и r_2 через w. Так как $r_1=|z-\mu|$, а $r_2=$

$=|z-\mu+1|$, то имеем $r_1=|w|^2$ и $r_2=|1+w^2|$. Функция U определяется формулой

$$U=\frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}-\frac{C}{2}, \tag{96}$$

или

$$U=\frac{1}{2}[(1-\mu)|w|^4+\mu|1+w^2|^2]+\frac{1-\mu}{|w|^2}+\frac{\mu}{|1+w^2|}-\frac{C}{2}. \tag{97}$$

Так как $|f'|^2=4|w|^2$, то новая скорость (уравнение (94)) выражается формулой

$$\left|\frac{dw}{d\tau}\right|^2=8(1-\mu)+$$
$$+|w|^2\left[\frac{8\mu}{|1+w^2|}+4(1-\mu)|w|^4+4\mu|w^2+1|^2-4C\right]. \tag{98}$$

В массе m_1 $r_1=0$, $z=\mu$, $w=0$ и уравнение (98) дает конечную скорость в плоскости w:

$$\left|\frac{dw}{d\tau}\right|=2|2(1-\mu)|^{1/2}. \tag{99}$$

В массе m_2 $r_2=0$, $z=\mu-1$, $w=\pm i$ и уравнение (98) дает бесконечную скорость.

Дифференциальные уравнения движения в плоскости w, как видно из уравнения (92′), содержат частные производные от $|f'|^2U$. Их можно найти из выражения

$$U|f'|^2=2[(u^2+v^2)^3+2\mu(u^4-v^4)+(\mu-C)(u^2+v^2)+$$
$$+2(1-\mu)+\frac{2\mu(u^2+v^2)}{[(u^2+v^2)^2+1+2(u^2-v^2)]^{1/2}}]. \tag{100}$$

Так как $|f'|^2=4(u^2+v^2)$, то из уравнения (92) получаем уравнения движения в виде

$$u''-8(u^2+v^2)v'=(U|f'|^2)_u,$$
$$v''+8(u^2+v^2)u'=(U|f'|^2)_v. \tag{101}$$

В точке $P_1(\mu, 0)$ физической плоскости имеем $w=0$, $\operatorname{grad}U|f'|^2=0$ и $|w'|$ конечно; следовательно, при соударении с m_1 имеем $w''=0$. Из уравнения (100) видно, что в точке $P_2(\mu-1, 0)$ физической плоскости $w=\pm i$, $U|f'|^2\to\infty$, $|w'|\to\infty$ и $\operatorname{grad}_w U|f'|^2$ не определен.

Функции $z=\mu+w^2$ и $z=\mu-1+w^2$ называют также преобразованиями Леви-Чивита, так как они эквивалентны преобразованиям, введенным Леви-Чивита для задачи двух тел. Тот факт, что регуляризация задачи двух тел исключает локальные особенности ограниченной задачи, не является неожиданным. Конечные возмущающие эффекты в особой точке и вблизи нее становятся пренебрежимо малыми по сравнению с эффектом особенности.

Тем не менее встает вопрос о возможности регуляризации обеих особенностей одновременно, т. е. о возможности такого преобразования, которое допускает соударение с обоими основными телами. Мы, конечно, не говорим об одновременном соударении трех тел в ограниченной задаче, так как два из них движутся по концентрическим круговым орбитам. Под одновременной регуляризацией мы понимаем преобразование, которое с помощью *одной единственной* функции $z=f(w)$ дает новые уравнения движения в форме, в которой точки соударения с обеими массами m_1 и m_2 являются обыкновенными. Такие преобразования осуществляют *глобальную* регуляризацию как противопоставление *локальной* регуляризации; они рассматриваются в следующем параграфе.

§ 3.5. Глобальная регуляризация Биркгофа ограниченной задачи

Для того чтобы представить различные регуляризующие преобразования, изменим положение начала координатной системы: выберем его не в центре масс основных тел, а посередине между ними и в качестве новой комплексной переменной примем $q=z+{}^1/_2-\mu$. Тогда основные тела будут располагаться в точках $q=\pm{}^1/_2$, а уравнения движения запишутся в виде

$$\ddot{q}+2i\dot{q}=\operatorname{grad}_q U(q), \tag{102}$$

где

$$U(q)=\Omega(q)-\frac{C}{2} \tag{103}$$

и, как и ранее,

$$\Omega(q)=\frac{1}{2}\left[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2\right]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}, \tag{104}$$

но теперь

$$r_1=\left|q-\frac{1}{2}\right| \quad \text{и} \quad r_2=\left|q+\frac{1}{2}\right|, \tag{105}$$

или

$$r_1=\left[\left(q_1-\frac{1}{2}\right)^2+q_2^2\right]^{1/2} \quad \text{и} \quad r_2=\left[\left(q_1+\frac{1}{2}\right)^2+q_2^2\right]^{1/2}. \tag{106}$$

Интеграл Якоби имеет вид

$$|\dot{q}|^2=2\Omega(q)-C=2U(q). \tag{107}$$

Комплексный вектор q и соответствующая система координат показаны на рис. 3.8.

Регуляризующая функция имеет следующий общий вид: $q=f(w)$. Рассмотрим обобщение преобразования, предложенное впервые Биркгофом:

$$q=\alpha w^2+\frac{\beta}{w}=f(w). \quad (108)$$

Отсюда

$$|f'(w)|^2=\frac{|\alpha w^2-\beta|^2}{|w|^4}. \quad (109)$$

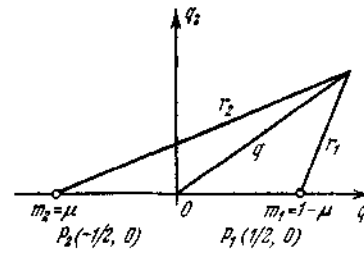


Рис. 3.8. Вращающаяся система координат с началом посередине между основными телами.

Постоянные α и β определяются двумя требованиями: требованием, чтобы функция $f(w)$ исключала обе особенности, и требованием, чтобы P_1 и P_2 были неподвижными точками преобразования. Что касается первого требования, то следует рассмотреть произведение критической части $\Omega(q)$

$$\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}=\frac{1-\mu}{\left|\alpha w+\beta/w-\frac{1}{2}\right|}+\frac{\mu}{\left|\alpha w+\beta/w+\frac{1}{2}\right|}$$

на $|f'(w)|^2$. Это произведение можно записать в виде

$$\frac{1}{|w|^3}\left[\frac{(1-\mu)|\alpha w^2-\beta|^2}{|\alpha w^2+\beta-w/2|}+\frac{\mu|\alpha w^2-\beta|^2}{|\alpha w^2+\beta+w/2|}\right]. \quad (110)$$

Одна особенность — в точке $q=1/2$, соответствующей

$$w_{1,2}=\frac{1}{4\alpha}[1\pm(1-16\alpha\beta)^{1/2}]. \quad (111)$$

Это следует из уравнения (108), если положить в нем $q=1/$ и решить его относительно w. Уравнение (111) дает также конечно, корни знаменателя первого члена в произведении определяемом выражением (110). Для того чтобы исключить эти особенности, нужно иметь эти же корни в числителе, т. е.

$$\frac{1}{4\alpha}[1\pm(1-16\alpha\beta)^{1/2}]=\pm\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}$$

или

$$16\alpha\beta=1. \quad (112)$$

Этот результат непосредственно показывает (из уравнения (111)), что $w_1=w_2=1/4\alpha$, т. е. что m_1 преобразуется в одну точку. Если P_1 должна быть неподвижной точкой преобразования, то мы должны иметь $1/4\alpha=1/2$, или $\alpha=1/2$. Из уравнения (112) тогда получаем $\beta=1/8$, и преобразующая функция принимает вид

$$q=\frac{1}{4}\left(2w+\frac{1}{2w}\right). \quad (113)$$

Второй член в критической части $|f'|^2\Omega(q)$ имеет особенность в точке P_2, и исключение ее производится аналогичным образом.

Важно обратить внимание на коэффициент $1/|w|^3$, входящий в новую потенциальную функцию, имеющую вид (110). Он вносит новую особенность, когда $w=0$; при этом $q\to\infty$. Таким образом, при исключении особенностей в точках P_1 и P_2 в преобразованной плоскости появляется новая особая точка в начале координат. Однако в физической плоскости она соответствует бесконечности, и потому мы можем считать, что все точки конечной физической плоскости регуляризуются данным преобразованием.

Различные уравнения, описывающие преобразованную систему, могут быть представлены в изящной форме, если в плоскости w ввести расстояния ρ_1, ρ_2 и ρ, соответствующие величинам r_1, r_2 и r в физической плоскости q. Положим

$$\rho_1=|w-1/2|,\quad \rho_2=|w+1/2|,\quad \rho=|w|. \tag{114}$$

Тогда будем иметь

$$|f'(w)|^2=\frac{|4w^2-1|^2}{64|w|^4}$$

или

$$|f'(w)|^2=\frac{\rho_1^2\rho_2^2}{4\rho^4}. \tag{115}$$

При пользовании этими переменными функция $\Omega(q)$ также становится проще, так как

$$r_1=\frac{\rho_1^2}{2\rho},\quad r_2=\frac{\rho_2^2}{2\rho},\quad |f'|^2=\frac{r_1r_2}{\rho^2}. \tag{116}$$

Для того чтобы составить уравнения движения, нужно вычислить функцию $U|f'|^2=(\Omega-C/2)|f'|^2$; в нашем случае она равна

$$U|f'|^2=\frac{\rho_1^2\rho_2^2}{32\rho^6}[(1-\mu)\rho_1^4+\mu\rho_2^4]+$$
$$+\frac{1}{2\rho^3}[(1-\mu)\rho_2^2+\mu\rho_1^2]-\frac{C}{2}\left(\frac{\rho_2\rho_2}{2\rho^2}\right)^2. \tag{117}$$

Единственная особенность имеет место при $\rho=0$, при этом $r_1\to\infty$, $r_2\to\infty$, $|w|=0$ и $|q|\to\infty$, что уже отмечалось нами выше. Начальная точка плоскости w и соответствующая бесконечно удаленная точка физической плоскости q становятся особыми.

На рис. 3.9—3.11 дана геометрическая интерпретация преобразования

$$q=\frac{1}{4}\left(2w+\frac{1}{2w}\right).$$

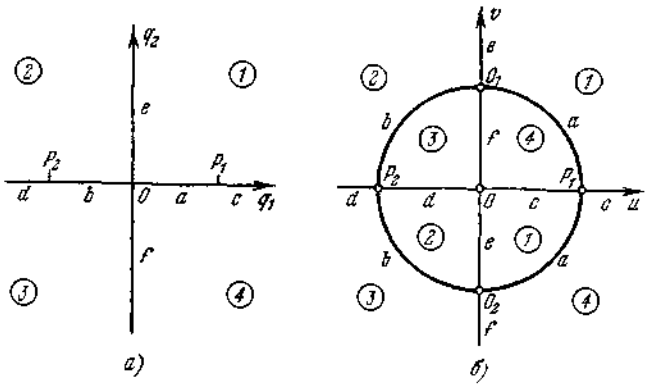


Рис. 3.9. Соответствующие секторы и отрезки в преобразовании Биркгофа. *а*) физическая плоскость q, *б*) регуляризованная плоскость w.

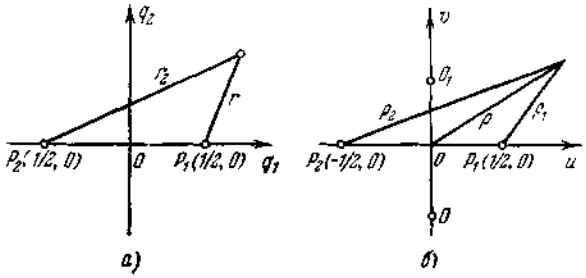


Рис. 3.10. Соответствующие точки в преобразовании Биркгофа и расстояния ρ_1, ρ_2, ρ. *а*) физическая плоскость q, *б*) регуляризованная плоскость w.

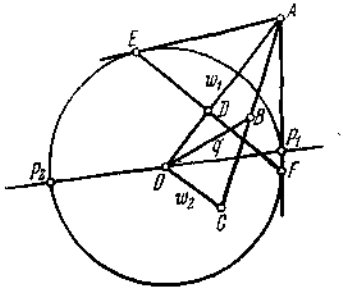


Рис. 3.11. Построение комплексных векторов q, w_1, w_2.

Точки $P_1(1/2, 0)$, $P_2(-1/2, 0)$ являются неподвижными точками преобразования, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Начальная точка плоскости q переходит в точки

$w=\pm i/2$, обозначенные на рисунках через $O_{1,2}(0, \pm 1/2)$. Дуга окружности в первом квадранте плоскости w радиуса $1/2$, соединяющая точки $P_1(1/2, 0)$ и $O_1(0, 1/2)$, является отображением отрезка $\overline{P_1O}$ оси q_1, так как при

$$w=\frac{1}{2}e^{is}$$

мы имеем

$$q=\frac{1}{2}\cos s.$$

Когда $0\to s\to\pi/2$, описывается эта траектория. Когда же $0\to s\to-\pi/2$, траектория в плоскости q остается такой же от P_1 до 0 вдоль положительного направления оси q_1, а соответствующая траектория в плоскости w представляет собой четверть окружности радиуса $1/2$, соединяющей точку $P_1(1/2, 0)$ с точкой $O_2(0, -1/2)$. Между точками плоскости q и плоскости w существует одно-двузначное соответствие. В самом деле,

$$4w^2-8wq+1=0, \qquad (118)$$

и, следовательно, $w_1w_2=1/4$. Это значит, что два значения w, соответствующие одному единственному значению q, разделяются действительной осью плоскости w, и если $|w_1|\leqslant 1/2$, то $|w_2|\geqslant 1/2$, и наоборот. Среднее геометрическое двух значений w, соответствующих одному и тому же q, равно $1/2$, $(w_1w_2)^{1/2}=1/2$, а среднее арифметическое равно q, т. е. $(w_1+w_2)/2=q$.

Отображение плоскости q на плоскость w показано на рис. 3.9 и 3.10. На рис. 3.11 показаны векторы q, w_1 и w_2. На этом рисунке $\overline{OA}=w_1$, $\overline{OC}=w_2$, $\overline{OB}=q$, $\overline{OD}=|4w_1|^{-1}=|w_2|=\overline{OC}$, $\overline{CB}=\overline{AB}$ и $\overline{AF}=\overline{AE}$. Построение начинается с w_1 и касательных к окружности радиуса 1/2 из точки A. Таким способом получают точки E, F и D. Конечной точкой плоскости w_2 является точка C, которая служит зеркальным отображением точки D относительно линии P_1P_2. Конечной точкой плоскости q является средняя точка между A и C.

Скорость в регуляризованной системе переменных определяется формулой

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2=2U|f'|^2. \qquad (119)$$

В первой основной точке P_1 имеем $\rho_1=0$, $\rho_2=1$, $\rho=1/2$ и из уравнения (117) находим $2U|f'|^2=8(1-\mu)$, так что скорость из уравнения (119) получается равной $2[2(1-\mu)]^{1/2}$. Аналогично во второй основной точке P_2 скорость равна $2(2\mu)^{1/2}$. Эти конечные значения скоростей следовало ожидать, так как P_1 и P_2 — обыкновенные точки.

Интересно отметить, что абсолютное значение преобразованной скорости фиксировано в основных точках и потому не может выбираться произвольно, если отношение масс опреде-

лено. Другими словами, начальные условия для орбиты, скажем в m_1, определяются положением $m_1(u=1/2,\ v=0)$ и направлением вектора скорости в этой точке, например $\operatorname{tg}\alpha = v'/u'$.

Система дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно u и v содержит параметр C. Решение системы четвертого порядка требует знания величины C, что вместе с $u=1/2$, $v=0$ и $\alpha=\alpha_0$ составляет четыре начальных условия. Следует заметить, что начальные условия не могут быть заданы в особых точках физической плоскости, так как в точке $q=q_1=\pm 1/2$ величина $\dot{q}^2$ стремится к бесконечности (и C нельзя определить).

§ 3.6. Преобразование Тиле — Барро

Следующая глобальная регуляризация была впервые предложена Т. Н. Тиле для $\mu=1/2$, и ее основная идея позже была обобщена К. Барро на случай произвольных значений μ. Преобразование здесь такое же, какое применял Эйлер при интегрировании задачи двух неподвижных гравитационных центров.

Воспользуемся снова синодической системой координат и выберем начало посередине между основными телами. Уравнения движения, интеграл Якоби и различные другие уравнения, представляющие интерес для этой задачи, нами были приведены раньше (уравнения (102)—(107)). Преобразование Тиле—Барро описывается функцией

$$q=\frac{1}{2}\cos w, \tag{120}$$

или

$$q=\frac{1}{4}\left(e^{iw}+e^{-iw}\right). \tag{121}$$

Уравнение (121) обнаруживает сходство с уравнением (113). Действительно, если в уравнении (113) положить $w=w_B$, где индекс указывает на преобразование Биркгофа, а в уравнении (121) положить $w=w_T$, то будем иметь

$$w_B=\frac{1}{2}e^{iw_T}. \tag{122}$$

Из уравнения (120) находим

$$|f'|^2=\frac{1}{4}\left(\operatorname{ch}^2 v-\cos^2 u\right)=\frac{1}{8}\left(\operatorname{ch} 2v-\cos 2u\right), \tag{123}$$

так как

$$f'=-\frac{1}{2}\sin w=-\frac{1}{2}\left(\sin u\operatorname{ch} v+i\cos u\operatorname{sh} v\right).$$

Расстояния r, r_1 и r_2 получают следующие выражения:

$$r=\frac{1}{2}|\cos w|=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}^2 v+\cos^2 u)^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2\,(2)^{1/2}}(\operatorname{ch}2v+\cos 2u)^{1/2}, \qquad (124)$$

$$r_1=\frac{1}{2}|\cos w-1|=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}v-\cos u),$$

$$r_2=\frac{1}{2}|\cos w+1|=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}v+\cos u). \qquad (125)$$

Из уравнений (120) и (125) имеем

$$|f'(w)|^2=r_1r_2,$$

и, следовательно, можно ожидать исключения обеих особенностей, когда $\Omega(q)$ умножается на $|f'|^2$. Действительно,

$$U|f'|^2=\frac{r_1r_2}{2}[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2-C]+(1-\mu)r_2+\mu r_1 \qquad (126)$$

и после подстановки выражений (125) будем иметь

$$U|f'|^2=\frac{1}{16}(\operatorname{ch}2v-\cos 2u)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{4}-C+\frac{1}{8}(\operatorname{ch}2v+\cos 2u)+\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}v\cos u\right]+$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\cos u+\frac{1}{2}\operatorname{ch}v=\Omega^*(u,v). \qquad (127)$$

Геометрические свойства преобразования определяются уравнением (120), которое можно переписать в виде

$$q_1=\frac{1}{2}\cos u\operatorname{ch}v, \quad q_2=-\frac{1}{2}\sin u\operatorname{sh}v.$$

Линии $u=\text{const}$ представляют собой гиперболы, а линии $v=$ $=\text{const}$ — эллипсы в физической плоскости q_1q_2, так как

$$\frac{q_1^2}{\cos^2 u}-\frac{q_2^2}{\sin^2 u}=\frac{1}{4} \text{ и } \frac{q_1^2}{\operatorname{ch}^2 v}+\frac{q_2^2}{\operatorname{sh}^2 v}=\frac{1}{4}. \qquad (128)$$

Центр софокусных гипербол и эллипсов лежит в начальной точке $q=0$, а фокусы совпадают с основными телами.

Начальная точка физической плоскости $q=0$ преобразуется в точки $v=0$, $u=\pm\pi/2,\ldots,\pm(2n+1)\pi/2$. Начальная точка плоскости w соответствует m_1 в физической плоскости, а точки плоскости w, соответствующие m_1, имеют координаты $v=0$, $u=0,\ldots,\pm 2k\pi$. Второе основное тело m_2, расположенное в физической плоскости в точке $P_2(-1/2, 0)$, преобразуется в точ-

ки $v=0$, $u=\pm\pi, \ldots, \pm(2n+1)\pi$. Характерные свойства преобразования показаны на рис. 3.12.

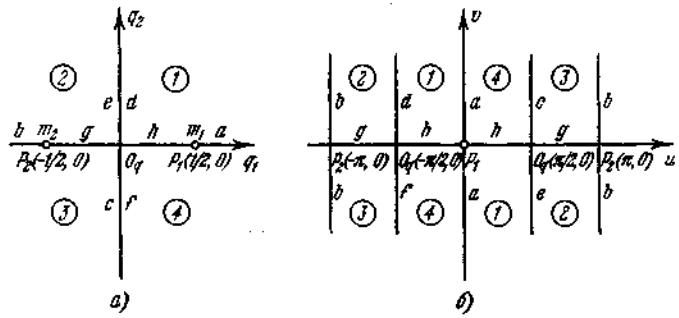


Рис. 3.12. Преобразование Тиле—Барро. *а*) физическая плоскость q, *б*) регуляризованная плоскость w.

Выражение для скорости можно опять получить из уравнения (119):

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2=2\Omega^*(u, v).$$

В точке m_1 $u=v=0$, $2\Omega^*(u, v)=2(1-\mu)$, а в точке m_2 $u=\pi$, $v=0$, $2\Omega^*(u, v)=2\mu$, т. е. абсолютное значение регуляризованной скорости в m_1 равно $[2(1-\mu)]^{1/2}$, а в m_2 равно $(2\mu)^{1/2}$.

При соударении дифференциальные уравнения движения дают те же результаты: $u''=v''=0$, которые были получены при применении преобразования Левн-Чивита (уравнение (101)).

§ 3.7. Регуляризация Леметра

Это преобразование можно вывести из преобразования Биркгофа, если в уравнении (113) положить $w_B=w$,

$$q=\frac{1}{4}\left(2w_B+\frac{1}{2w_B}\right),$$

а затем вместо $2w_B$ подставить w_L^2. Таким образом, получим

$$q=\frac{1}{4}\left(w_L^2+\frac{1}{w_L^2}\right),$$

и, следовательно, преобразование, которое надлежит исследовать, будет иметь вид

$$q=\frac{1}{4}\left(w^2+\frac{1}{w^2}\right), \tag{129}$$

причем

$$|f'(w)|^2=\frac{|w^4-1|^2}{4|w|^6}=\frac{dt}{d\tau}. \tag{130}$$

Расстояния третьего тела от двух основных будут равны

$$r_1 = \frac{|w^2-1|^2}{4|w|^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{|w^2+1|^2}{4|w|^2}, \tag{131}$$

и формула для $|f'(w)|^2$ принимает вид

$$|f'(w)|^2 = 4\frac{r_1 r_2}{|w|^2}. \tag{132}$$

Исключение обеих особенностей таким образом выполнено. Действительно,

$$U|f'|^2 = \frac{|1-w^4|^2}{128|w|^{10}}[-16C|w|^4 + |1-w^2|^4 - \mu(|1-w^2|^4 -$$

$$-|1+w^2|^4)] + \frac{1}{|w|^4}[(1-\mu)|1+w^2|^2 + \mu|1-w^2|^2] = \Omega^*(u, v). \tag{133}$$

Геометрическая картина при этом преобразовании получается несколько сложнее. Основные тела в плоскости w оказываются в точках $w=\pm 1$ и $w=\pm i$, так как из уравнения (129) $q=1/2$ при $w=\pm 1$ и $q=-1/2$ при $w=\pm i$. Начальная точка физической плоскости ($q=0$) переходит в $w=(-1)^{1/4}$, а начальная точка регуляризованной плоскости ($w=0$) — в бесконечно удаленную точку физической плоскости. Заметим, что $\Omega^*(u, v)$ регулярна всюду в плоскости w, кроме точки $w=0$. Преобразование Леметра областей плоскости q в соответствующие области плоскости w показано на рис. 3.13.

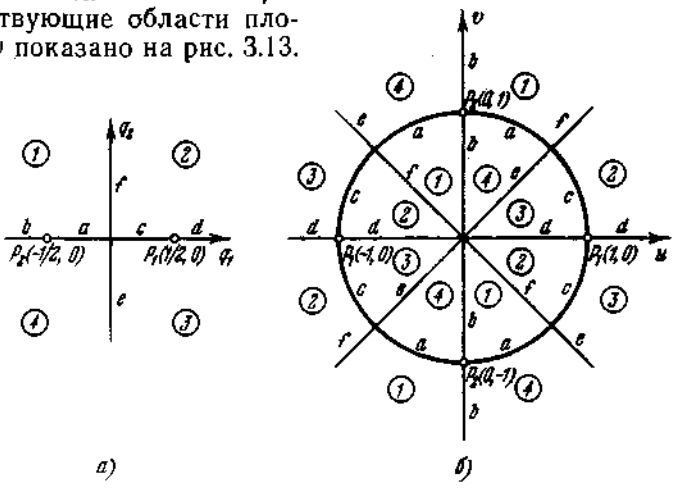


Рис. 3.13. Преобразование Леметра. *а*) физическая плоскость q, *б*) регуляризованная плоскость w.

Заметим, что при этом преобразовании каждой точке плоскости q соответствуют четыре точки плоскости w, исключая точки, где находятся основные тела. Это вытекает из уравне-

ния (129):

$$w^4-4qw^2+1=0, \tag{134}$$

корни которого даются формулой

$$w=\pm\left[2q\pm(4q^2-1)^{1/2}\right]^{1/2}. \tag{135}$$

Здесь знаки $\pm$ в двух случаях нужно выбирать независимо одни от других, чтобы получить все четыре корня уравнения (134). Если $4q^2=1$ и, стало быть, $q=\pm 1/2$, то $w=\pm(\pm 1)^{1/2}$ и мы будем иметь четыре точки $w_{1,2}=\pm 1$ и $w_{3,4}=\pm i$, соответствующие положениям основных тел.

Неподвижные точки преобразования можно получить из решения уравнения (134), заменив в нем q на w; тогда оно примет вид

$$w^4-4w^3+1=0. \tag{136}$$

Неподвижные точки на действительной оси определятся уравнением

$$h(u)=u^4-4u^3+1=0.$$

Согласно правилу знаков Декарта, уравнение $h(u)=0$ не имеет отрицательных корней и может иметь два положительных корня. Так как $h(+1/2)>0$, а $h(+1)<0$, то один из положительных корней расположен в области d плоскости q на положительной оси q_1 между точкой расположения первого основного тела с массой m_1 и точкой $q_1=+1$. Поскольку минимальное значение функция $h(u)$ имеет при $u=+3$, $h(+3)<0$, а $h(+4)=+1$ и, стало быть, второй положительный корень лежит в интервале $+3<w=q=u=q_1<+4$ на положительной оси u снаружи единичной окружности в области d. Два других корня уравнения $h(u)=0$ являются комплексными и потому не представляют интереса, поскольку u вещественно. Других неподвижных точек преобразования нет.

Для того чтобы получить преобразованные скорости в точках соударения, нужно вычислить $\Omega^*(u, v)$ из уравнения (133) при $w=\pm 1$ (соответствующем m_1) и при $w=\pm i$ (соответствующем m_2). Первый член в (133) не влияет на значение Ω^* в этих точках, и мы получаем $\Omega^*(P_1)=4(1-\mu)$ и $\Omega^*(P_2)=4\mu$.

Интеграл Якоби в преобразованной системе равен

$$u'^2+v'^2=2\Omega^*,$$

и, следовательно, величина регуляризованной скорости в m_1 равна $[8(1-\mu)]^{1/2}$, а в m_2 равна $(8\mu)^{1/2}$.

Регуляризующее преобразование, введенное Аренсторфом, является интересной модификацией описанного выше метода. Действительно, функция (129), выражающая преобразование Леметра, эквивалентна функции, предложенной Аренсторфом.

Существенное различие состоит лишь в том, что преобразование времени $|f'|^2=dt/d\tau$, примененное в методе Леметра, в регуляризации Аренсторфа заменено на $|wf'|^2$. Такое преобразование времени обусловлено требованием динамической эквивалентности, о которой говорилось выше в § 3.4.

§ 3.8. Обобщение методов глобальной регуляризации

Три метода глобальной регуляризации ограниченной задачи, рассмотренные ранее, основываются на общей функции преобразования

$$q=A\left[h(w)+\frac{1}{h(w)}\right]=f(w), \tag{137}$$

где во всех трех случаях $A=1/4$, а функция $h(w)$ для преобразований Биркгофа, Тиле — Барро и Леметра равна соответственно $2w$, e^{iw} и w^2. Принимать A равным $1/4$, вообще говоря, не обязательно, но тем не менее такой выбор аргументирован. Из уравнения (137) имеем

$$|f'(w)|^2=|A^2|\,\frac{|h'|^2|h^2-1|^2}{|h|^4}. \tag{138}$$

С другой стороны, из равенств $r_1=|q-1/2|$ и $r_2=|q+1/2|$ находим

$$r_1=\frac{|2Ah^2-h+2A|}{2|h|},\quad r_2=\frac{|2Ah^2+h+2A|}{2|h|}. \tag{139}$$

Так как $|f'(w)|^2$ является множителем при U, а U имеет полюсы в $r_1=0$ и $r_2=0$, то для исключения этих особенностей нужно, чтобы $(r_1r_2)^n\gamma(w)=|f'|^2$ было таким, чтобы в образованном произведении $U|f'|^2$ члены $1/r_1$ и $1/r_2$ стали регулярными. Функция $\gamma(w)$ должна быть регулярной в особых точках, а показатель степени n должен быть, конечно, больше или равен единице. Фактически нужно, чтобы $n=1$, так как при $n>1$ $|f'|^2U=0$, в особых точках, где скорости тоже равны нулю. В самом деле, если $\operatorname{grad}|f'|^2U=0$ в особых точках, то ускорение также будет равно нулю; мы получаем стационарное решение, и частица в особых точках будет находиться в покое.

Для преобразований Биркгофа, Тиле и Леметра функция $\gamma(w)$ соответственно равна $|w|^{-2}$, 1 и 4 $|w|^{-2}$. Заметим, что точка $w=0$ не совпадает с преобразованным положением ни одного, ни другого основного тела.

Вычисляя r_1r_2 из (139) и сравнивая с (138), находим

$$\frac{|(h^2+1)^2-h^2/4A^2|}{|h|^2}\,\gamma(w)=\frac{|h^2-1|^2|h'|^2}{|h|^4}.$$

Если $A=1/4$, то

$$\gamma(w)=|h'/h|^2 \quad\text{и}\quad |f'|^2=r_1r_2|h'/h|^2. \tag{140}$$

После того как A выбрано равным $^1/_4$, нужно найти положения особых точек в преобразованной плоскости. Если w_1 представляет преобразованное положение первого основного тела, а w_2 — второго основного тела, то из уравнения (137) будем иметь

$$[h(w_1)+h^{-1}(w_1)]=2 \quad \text{и} \quad [h(w_2)+h^{-1}(w_2)]=-2 \qquad (141)$$

или $h(w_1)=1$ и $h(w_2)=-1$. Эти уравнения, как мы уже видели, могут иметь кратные корни.

Особенности будут исключены, так как

$$\Omega^*(u, v)=U|f'|^2=|h'/h|^2\frac{r_1r_2}{2}[r_1^2-C+\mu(r_2^2-r_1^2)]+$$
$$+|h'/h|^2](1-\mu)r_2+\mu r_1]. \qquad (142)$$

Единственным критическим членом в этом выражении, в отношении особенностей, является $h'(w)$, так как мы видели, что в местах расположения основных тел $h(w)\neq 0$, и поскольку в этих точках $h'(w_1)$ и $h'(w_2)$ конечны, выражение (142) для $\Omega^*(u, v)$ является регулярным. Это условие удовлетворяется, конечно, при функциях $h(w)=2w$, $h(w)=e^{iw}$ и $h(w)=w^2$, так как соответствующие производные h' равны 2, ie^{iw} и $2w$. В случае преобразования Биркгофа производная $h'=2=\text{const}$, и, следовательно, в w_1 и w_2 она конечна. При преобразовании Тиле имеем $h'=ie^{iw}=ih$, и следовательно, $h'(w_1)=ih(w_1)=i$ и $h'(w_2)=ih(w_2)=-i$. Таким образом, и $h'(w_1)$ и $h'(w_2)$ конечны. Для преобразования Леметра $h'=2w=2h^{1/2}$, и, стало быть, $h'(w_1)=\pm 2$ и $h'(w_2)=\pm 2i$; обе производные конечны.

Абсолютное значение преобразованной скорости в m_1 получается из уравнения (142), если положить в нем $r_1=0$:

$$|w'|_{m_1}=[2\Omega^*(r_1=0, r_2=1)]^{1/2}=|h'/h|[2(1-\mu)]^{1/2}. \qquad (143)$$

В m_2 оно равно

$$|w'|_{m_2}=[2\Omega^*(r_1=1, r_2=0)]^{1/2}=|h'/h|(2\mu)^{1/2}.$$

Так как в обеих точках расположения основных тел

$$|h(w_1)|=|h(w_2)|=1,$$

то имеем

$$|w'|_{m_1}=|h'(w_1)|[2(1-\mu)]^{1/2}, \quad |w'|_{m_2}=|h'(w_2)|(2\mu)^{1/2}. \qquad (144)$$

Задача. Найдите соответствующие соотношения для

$$q=f(w)=\frac{\alpha^2w^{2n}+1}{4\alpha w^n}.$$

§ 3.9. Сравнение глобальных регуляризаций

Сравним теперь рассмотренные выше три метода глобальной регуляризации в отношении их практического использования. Эта задача, вообще говоря, не простая, так как ни один из трех методов не имеет особых преимуществ перед двумя другими по всем аспектам одновременно.

Если говорить в отношении многозначности, то удобней преобразование Биркгофа, поскольку соответствие между точками физической плоскости и точками регуляризованной плоскости здесь является одно-двузначным. В случае преобразования Леметра оно одно-четырехзначное, а при преобразовании Тиле — Барро — одно-бесконечнозначное. Вообще, при $h(w)=aw^n$

$$a^2w^{2n}-4aqw^n+1=0,$$

так что соответствие дважды n-значное, где n — показатель степени функции $h(w)$.

Если в основу сравнения положить простоту получаемого регуляризованного дифференциального уравнения, то, пожалуй, на первом месте окажется преобразование Тиле — Барро. Подходящими выражениями для рассмотрения здесь будут $|f'(w)|^2$ и $\Omega^*(u, v)$, так как они входят в регуляризованные уравнения движения. Выражение $|f'(w)|^2$ в преобразовании Тиле имеет вид

$$|f'(w)|_T^2=\frac{1}{4}|\sin w|^2,$$

в преобразовании Биркгофа —

$$|f'(w)|_B^2=\frac{|4w^2-1|^2}{64|w|^4},$$

и в преобразовании Леметра —

$$|f'(w)|_L^2=\frac{|w^4-1|^2}{4|w|^8}.$$

Если подставить $w=u+iv$, то получим

$$|f'(w)|_T^2=\frac{1}{8}(\operatorname{ch}2v-\cos 2u),$$

а соответствующие выражения для $|f'|_B{}^2$ и $|f'|_L{}^2$ примут вид дробей многочленов высокой степени.

Аналогичные замечания можно сделать и относительно функции Ω^*, которая более простой вид имеет в преобразовании Тиле (см. уравнение (127)) и значительно более сложный — в двух других преобразованиях. Форма функции Ω^* в преобразовании Биркгофа определяется уравнением (117), а в преобразовании Леметра — уравнением (133). Существенное различие между двумя этими уравнениями заключается в том, что по-

следнее содержит только рациональные дроби многочленов, тогда как в первом имеются нррациональные выражения вследствие наличия члена $\rho^{-3}=|w|^{-3}=(u^2+v^2)^{-3/2}$. Поэтому преобразование Леметра, помимо того что регуляризует функцию Ω^*, еще освобождает ее от нррациональности. Недостатком преобразования Леметра является, конечно, то, что в выражение для Ω^* зависимая переменная входит в шестнадцатой степени, тогда как в преобразовании Биркгофа — только в восьмой степени.

Отиосительно простые тригонометрические и гиперболические функции, входящие в выражения для $|f'(w)|^2$ и $\Omega^*(u, v)$ в случае преобразования Тиле, делают этот метод идеальным для расчетов без применения ЭВМ; для этой цели он первоначально и был введен. При иснользовании ЭВМ более предпочтительным может оказаться преобразование Биркгофа или Леметра.

В аналитическом отношении метод Биркгофа и метод Леметра одинаково просты, но опубликованные результаты имеются только для преобразования Биркгофа.

Задача. Приведите регуляризованные уравнения движения ко второму порядку, основываясь на уравнении (25) § 2.3.

Подчеркнем еще раз основное сходство между уравнениями движения, полученными различными методами регуляризации. Как в случае, когда начало системы выбиралось в центре масс $[z=z(t)]$, так и в случае, когда оно принималось посередине $[q=q(t)]$, первоначальные уравнения движения, до регуляризации, могут быть записаны в виде

$$\ddot{z}+2i\dot{z}=\operatorname{grad}_z\Omega, \quad \text{или} \quad \ddot{z}+\lambda(z)\dot{z}=\operatorname{grad}_z\Omega, \tag{145}$$

где $\lambda(z)\equiv 2i$.

Преобразование этого уравнения посредством функции $z=f(w)$ или $dt=|f'(w)|^2 d\tau$ дает

$$w''+2i|f'(w)|^2w'=\operatorname{grad}_w\Omega^*,$$

или

$$w''+\lambda^*(w)w'=\operatorname{grad}_w\Omega^*, \tag{146}$$

где

$$\lambda^*(w)=2i|f'(w)|^2 \quad \text{и} \quad \Omega^*=(\Omega-C/2)|f'(w)|^2.$$

Легко заметить формальное сходство между уравнениями (145) и (146) и инвариантность основной формы уравнений в отношении регулярнзующих преобразований. Функции, помеченные звездочкой, получены посредством умножения исходных

функций на $|f'(w)|^2$. Такая же инвариантность наблюдается и в соответствующих интегралах Якоби:

$$|\dot{z}|^2=2\Omega-C \quad \text{и} \quad |w'|^2=2\Omega^*.$$

Задача. Покажите, что $|f'(w)|^2$ и якобиан преобразования $z=f(w)$ тождественны, когда $f(w)$ является аналитической функцией.

Основываясь на этой инвариантности, можно обобщить ограниченную задачу и определить ее уравнением

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda(y)\frac{dy}{dx}=\operatorname{grad}_y F(y), \tag{147}$$

где y — (комплексная) зависимая переменная, x — (действительная) независимая переменная, а $F(y)$ и $\lambda(y)$ регулярны в интересующей нас области. Это уравнение имеет интеграл вида

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|^2=2F-C \tag{148}$$

для любой функции λ. С помощью уравнения (148) можно уравнение (147) привести ко второму порядку; дальнейшее приведение зависит от фактического вида функций λ и F. Если y есть радиус-вектор, а x — время, то уравнение (147) представляет необратимую динамическую систему с двумя степенями свободы. Уравнение (147) всегда приводится к системе дифференциальных уравнений второго порядка.

§ 3.10. Существование решений

А. Любая действительная конечная особенность решения уравнений движения $x(t)$, $y(t)$ соответствует соударению с одним из двух основных тел. Рассмотрим это утверждение подробней.

Уравнения движения и интеграл Якоби в первоначальной (физической) системе имеют следующий вид:

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\Omega_x, \quad \ddot{y}+2\dot{x}=\Omega_y, \quad \dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega-C,$$

где

$$\Omega=\frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}.$$

Заметим сперва, что Ω остается ограниченной тогда и только тогда, когда r_1, r_2, r_1^{-1} и r_2^{-1} остаются ограниченными. Это означает, что если Ω должна оставаться ограниченной, то не могут иметь место ни соударения, ни удаления на бесконечные расстояния. При фиксированных значениях параметра массы и постоянной Якоби величина Ω остается ограниченной тогда и только тогда, когда и $\dot{x}$ и $\dot{y}$ остаются ограниченными. В связи с этим требованием ограниченности четырех указанных выше

величин r_1, r_2, r_1^{-1} и r_2^{-1} введем функцию

$$\rho(t)=\min(r_1,\ r_2,\ r_1^{-1},\ r_2^{-1}),$$

которая вдоль решения либо положительна, либо равна нулю. Когда ее значение равно нулю, Ω неограниченна. Приведем здесь без доказательства теорему Винтнера: при фиксированных значениях μ и C, для каждого $\rho^*>0$ существуют числа $\alpha^*>0$ и $\beta^*>0$, такие, что любое решение $x(t)$, $y(t)$, для которого в некоторый момент времени $t=t_0$ удовлетворяется неравенство $\rho\geqslant\rho^*$, обладает двумя следующими свойствами:

1) решение является регулярным аналитическим в интервале времени $|t-t_0|<\alpha^*$;

2) решение является ограниченным

$$[x(t)-x(t_0)]^2+[y(t)-y(t_0)]^2<\beta^*$$

для любого времени в указанном выше интервале.

Соответственно, если решение не является регулярным аналитическим в момент t_c, то мы имеем

$$\lim\rho(t)=0,\text{ когда } t\to t_c.$$

Но это происходит тогда и только тогда, когда удовлетворяется одно из трех следующих условий:

$$1)\ \lim r_1(t)=0,$$

$$2)\ \lim r_2(t)=0,$$

$$3)\ \lim r_1^{-1}(t)=0,$$

когда $t\to t_c$.

В случаях 1 и 2 мы имеем соударения, в случае 3 мы имеем удаление на бесконечное расстояние; этот случай эквивалентен $r_2^{-1}(t)\to 0$. Трактовать проблемы соударения и регуляризовать решение можно так, как показывается в этой главе. Единственная оставшаяся особенность, касающаяся удаления в бесконечность, в ограниченной задаче не может произойти за конечный промежуток времени, в чем можно убедиться на основании следующих рассуждений.

Когда $r_1(t)\to\infty$, центробежные силы начинают превалировать над гравитационными, и уравнения движения и интеграл Якоби принимают вид

$$\ddot{x}-2\dot{y}=x,\quad \ddot{y}+2\dot{x}=y,\quad \dot{x}^2+\dot{y}^2=x^2+y^2-\bar{C}.$$

Решения этой системы линейных дифференциальных уравнений являются регулярными аналитическими для всех конечных значений t, так что x^2+y^2 при $t\to t_c$ должно стремиться к конечному пределу. Но тут мы приходит к противоречию, так как $\dot{x}^2+\dot{y}^2$ и, следовательно, x^2+y^2 стремятся к бесконечности при $t\to t_c$. Отсюда заключаем, что координаты $x(t)$, $y(t)$ должны

оставаться ограниченными для любого решения ограниченной задачи, когда t изменяется в конечных пределах.

Но если удаление на бесконечное расстояние невозможно, то остаются только особенности, соответствующие соударениям. С другой стороны, мы показали, что при регуляризации решение может быть аналитически продолжено через соударение. *Следовательно, решения ограниченной задачи существуют для всех конечных значений времени.*

Б. Рассмотрим еще два следующих вопроса.

Сначала установим аналитичность времени t как функции τ, в частности, когда $\tau \to \tau^*$. Действительно, для парного соударения, рассмотренного нами в § 3.2, мы имели согласно уравнению (36)

$$\tau(t) = \int_{t_c}^{t} \frac{dt}{r(t)} + \tau_c,$$

и так как

$$r(t) = A(t - t_c)^{2/3} + \ldots,$$

то при $t \to t_c$ подынтегральное выражение обращается в бесконечность.

В самом деле, при соударении $d\tau/dt$ не ограниченно при любом из рассмотренных регуляризующих преобразований, так что существование $\lim \tau = \tau_c$ при $t \to t_c$ следует тщательно проверить.

Возвращаясь к регуляризации в случае r^{-1}, будем иметь после выполнения интегрирования

$$\tau(t) \to B(t - t_c)^{\frac{1}{3}} + \tau_c.$$

Второй вопрос, на котором мы остановимся, касается времен дат соударения. Если соударения происходят при конечном $t = t^*$, то решение не будет определено в интервале $-\infty < t < +\infty$. Тот факт, что при бесконечном числе соударений они не могут иметь конечную предельную точку, был доказан Винтнером и Аренсторфом; следовательно, этот вопрос тоже решен.

Заметим, что τ монотонно возрастает с увеличением t для всех преобразований. Тем не менее, когда t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, регуляризующая переменная времени τ не обязательно ведет себя подобным образом. Мы видели, например, что регуляризация Биркгофа вносит новую особенность, соответствующую бесконечности в физической плоскости. Это в свою очередь соответствует $t \to \infty$. Следовательно, мы имеем случай, когда решение в плоскости w имеет особенность (середина между основными точками) при конечном значении τ, которое должно соответствовать $t \to \infty$.

§ 3.11. Приложения

Основные приложения метод регуляризации нашел в космодинамике, космогонии и звездной динамике.

Рассматривая в качестве основных тел в ограниченной задаче Землю и Луну, можно установить семейство траекторий космического аппарата, соединяющих эти два небесных тела. Такая траектория показана на рис. 3.14.

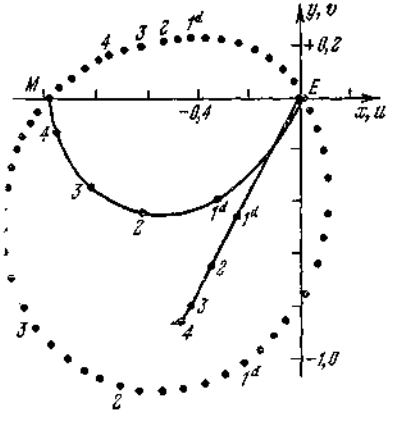


Рис. 3.14. Последовательная орбита соударения в системе Земля—Луна. $\theta=60°{,}855$, $\psi_1=120°{,}428$, $\psi_2=300°{,}428$, $C=2{,}000009$, $P=4^d{,}41$.

Кривая, соединяющая точки E и M, проведенная сплошной линией, представляет траекторию в синодической системе координат. Цифры, проставленные вдоль кривой, указывают время в сутках. Другая сплошная кривая представляет траекторию в неподвижной системе координат. Пунктирные линии являются регуляризованным изображением траектории. Одной траектории в системе x, y соответствуют две траектории в системе u, v, так как преобразование Биркгофа, которое было в этом случае применено, дает одно-двузначное соответствие между физической плоскостью xy и регуляризованной плоскостью uv. Соответствующие данные указаны на рисунке. Через θ обозначен угол запуска ракеты, т. е. угол между касательной к траектории у Земли и отрицательной осью x. Этот угол показан также на рис. 3.15, на котором изображено семейство орбит последовательного соударения. Углы ψ_1 и ψ_2 представляют соответствующие углы в регуляризованной плоскости.

Более подробные сведения об этом семействе орбит содержатся в гл. 9, а также в работах, указанных в библиографическом списке к этой главе.

Практическая важность таких траекторий заключается в малой чувствительности к ошибкам наведения. Если рассматри-

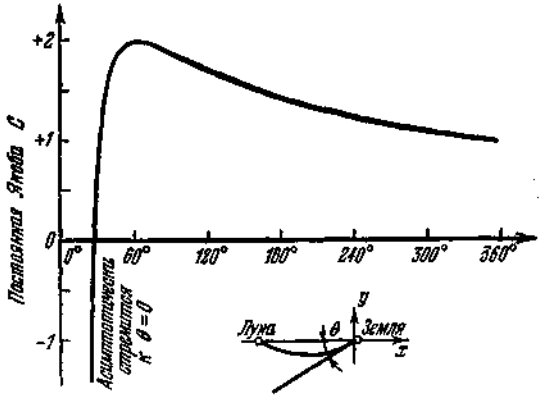


Рис. 3.15. Семейство последовательных орбит соударения.

вать, например, траекторию, проходящую (если ее продолжить) через центр Луны, то можно увидеть, что в том случае, когда начальные условия слегка изменятся, орбита все же пройдет через Луну, хотя и не через центр ее.

Космогоническое значение регуляризации двоякое. Во-первых, в тех случаях, когда существенно предсказание на длительное время, в уравнениях движения не должно оставаться особенностей. Во-вторых, многие космогонические теории основываются на сближениях, соударениях и захватах, изучение которых не может проводиться без регуляризации.

В космогонии и в звездной динамике ограниченная задача по важности не уступает общей задаче трех тел. В то же время важное значение имеют вопросы соударения, поэтому остановимся коротко на регуляризации гравитационной задачи n тел.

Уравнения движения для n тел можно записать в следующей форме:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = k^2 \sum_{i \neq j,\, j=1}^{n} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_{ji}|^3} \mathbf{r}_{ji}. \tag{149}$$

Вводя силовую функцию

$$F = \frac{k^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j,\, j=1}^{n} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|}, \tag{150}$$

получаем их в виде

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{151}$$

Здесь m_i и $\mathbf{r}_i$ — масса и радиус-вектор i-го тела, $\mathbf{r}_{ij}=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j$ — радиус-вектор i-го тела относительно j-го и k^2 — гравитационная постоянная Гаусса.

Введем новую независимую переменную

$$d\tau = F(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)\, dt, \tag{152}$$

тогда будем иметь

$$\dot{\mathbf{r}} = F\mathbf{r}',$$

где штрихом обозначено дифференцирование по τ.

Интеграл энергии первоначальной системы

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = 2F - C$$

теперь принимает вид

$$\sum m_i \mathbf{r}_i'^2 = \frac{2}{F} - \frac{C}{F^2}.$$

Уравнения движения записываются в форме

$$\mathbf{r}_i'' + \mathbf{r}_i' \frac{F'}{F} = \frac{1}{m_i F^2} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_i}, \tag{153}$$

где F' может быть выражено в виде суммы

$$F' = \sum_j \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_j} \mathbf{r}_j'.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}_i'' + \mathbf{r}_i' \sum_j \mathbf{r}_j' \frac{\partial \ln F}{\partial \mathbf{r}_j} = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial F^{-1}}{\partial \mathbf{r}_i}. \tag{154}$$

Как и следовало ожидать, в уравнение вошел квадрат первой пронзводной $\mathbf{r}_i'$, тем не менее уравнение регуляризовано для парных соударенний. О пользе таких преобразований следует судить по их пригодности для ЭВМ.

Значение этого регуляризованного уравнения для звездной динамики объясняется тенденцией звезд к скоплению и образованию двойных звезд. Это, конечно, требует исследования задачи n тел.

§ 3.12. Замечания

Основные идеи относительно регуляризации общей задачи трех тел были высказаны Зундманом [1], на которого сильное влияние оказала работа Пуанкаре [2].

В § 3.2 рассматривается самый простой случай, для того чтобы избавить читателей от излишних алгебраических слож-

ностей. Еще Эйлер [2а] регулировал задачу соударения двух тел, движущихся по одной и той же прямой, на что обратила внимание мисс Уильямс. Заметим, что метод Эйлера соответствует выбору $n=1$ в уравнении (23) § 3.2.

С развитием основных идей, а также обширной библиографией можно познакомиться в книгах Уиттекера [3] и Леймаииса и Минорского [4]. Задача регуляризации затронута в книге Винтнера [5]. Этому же вопросу посвятил главу в четырнадцать страниц своей книги Хаппель [6].

Регуляризация в случае общей задачи двух тел (§ 3.3) может быть достигнута без преобразования координат. Аренсторф привел замечательное короткое доказательство того, что преобразование времени

$$\frac{dt}{d\tau}=r$$

можно использовать из условия сохранения момента количества движения и уравнений (56) и (59) для получения следующего результата:

$$\zeta''+C\zeta=\text{const},$$

где штрихами обозначено дифференцирование по τ. Это аналогично регуляризации, примененной к задаче соударения в § 3.2, где указанное выше преобразование времени и эксцентрическая аномалия, в качестве регуляризующей переменной, введены в уравнение (40). См. также работы [4] и [5, стр. 193].

Значителен также вклад, внесенный в этот вопрос Леви-Чивита [7]. Существенный материал содержится в третьей, а также в последней работах библиографического списка. Близкое отношение к рассматриваемым вопросам имеет преобразование, предложенное Болином [8]. При небольшой модификации оно приводится к тому, которое у нас в тексте (§ 3.4) называется преобразованием Леви-Чивита.

История преобразования Тиле—Барро (§ 3.6) начинается с Эйлера [9], который доказал интегрируемость задачи двух неподвижных центров притяжения. Эта задача рассматривается в книгах Уиттекера [3], Шарлье [10], а также Пламмера [11], в которой ясно показывается связь между регуляризацией ограниченной задачи и задачи Эйлера. В преобразовании Эйлера прямоугольные координаты заменяются на эллиптические координаты, и таким путем задача становится задачей типа Лиувилля и может быть проинтегрирована в эллиптических функциях. Следует напомнить, что при одном притягивающем центре существуют орбиты в форме конических сечений. Когда действуют два центра одновременно, решения конического сечения согласно теореме Боннэ [12] еще

существуют, на что указывали также Лежандр [13] и, для обобщенного случая, Егоров [14]. Эта теорема и ее приложение к задаче двух неподвижных центров притяжения, а также применение этой последней задачи к ограниченной задаче описаны Себехеем [15]; с подробностями можно познакомиться в пункте 10.5.1.

Регуляризация ограниченной задачи при $\mu=1/2$, применявшаяся в основном в преобразовании Эйлера, была выполнена Тиле [16] (без ссылки на Эйлера), а при произвольном μ — Барро. Первоначальная задача была «перерешена», так как локальная регуляризация должна была допускать продолжение орбит класса «a» по Стрёмгрену до их естественного окончания (см. гл. 9).

В 1892 г. Тиле представил исследование движения вблизи третьей точки либрации L_3 (см. гл. 4) на конкурс работ по астрономии, проводимый Датской Королевской Академией, и был удостоен премии. Малые эллиптические орбиты вокруг L_3, получаемые из решения линеаризованных уравнений движения, подробно рассматриваются в гл. 5. При увеличении амплитуды одна из этого семейства орбит становится орбитой соударения с m_1. Задача Тиле состояла в том, чтобы установить эту орбиту семейства. Регуляризация ограниченной задачи была вызвана необходимостью сделать семейство орбит полным.

Регуляризация Тиле—Барро была перенята школой Стрёмгрена для проведения в широких масштабах численного интегрирования; различные формулы преобразования были затабулированы и представлены в форме графиков и номограмм. Поскольку это преобразование является обычным и рекомендуется главным образом для расчетов без использования ЭВМ, то мы остановимся здесь коротко только на номограмме Линдоу [18] и таблицах преобразований Стрёмгрена (Барро и Стрёмгрен [19]).

В историческом плане следует заметить, что Барро решил задачу Тиле, отмеченную премией, до того как Тиле применил преобразование Эйлера. Здесь можно сослаться на статью Барро [20], в которой раскрывается отмеченный выше факт, что для решения задачи необходима только локальная регуляризация; он применил преобразование $\tau=at^{1/3}$, которое мы приводили в конце § 3.2. Содержащийся там вывод более точно выполнил Винтнер [5], см. § 3.2, пункт Г.

Введение преобразования Биркгофа (§ 3.5) было в значительно меньшей степени связано с важными последствиями. Широкая дискуссия по его преобразованию проводится в работе [21]. Никаких численных приложений там не рассматривается, преобразование применяется в связи с топологией динамической задачи. Заметим, что на стр. 13 там вкралась

ошибка: в уравнении (21) ρ_1 и ρ_2 надлежит поменять местами. Можно рекомендовать также более позднюю работу Биркгофа [22].

Еще до опубликования результатов Биркгофа появилась несколько необычная работа Армеллини, написанная им под сильным влиянием Зундмана; в ней рассматривается регуляризация ограниченной задачи и вводится соотношение $d\tau = (r_1+r_2-1)^{-1}dt$.

Интересно рассмотреть ряд работ, в которых совершен переход от функции $h(w)=w$ к функции $h(w)=w^2$. Это имело место как в преобразовании Биркгофа, так и в преобразовании Леметра, а также других авторов (см. § 3.7). Первым, кто предложил преобразование $z=(c/2)(w^2+w^{-2})$, не преследуя специально цели регуляризации, был Пламмер [24]. Несколько статей Леметра из университета в Лувене посвящены регуляризации общей задачи трех тел [25]. Приложение результатов этой работы к глобальной регуляризации ограниченной задачи нашел Депри [26, 26а]. В первую очередь можно рекомендовать читателям познакомиться с работой Леметра 1955 г. и с замечательно написанным кратким обзором Депри в журнале Icarus за 1963 г. Важный принцип симметрии при исследовании общей плоской задачи трех тел применяли Марнаган [27], Себехей [28], Депри и Дели [29], Депри и Роелс [30] и Депри и Дели [31]. По существу тот же метод был предложен Ареисторфом в его выдающейся аналитической работе [32]. Она написана в строгом математическом стиле, и в ней впервые вводится понятие динамической эквивалентности (§ 3.4).

Рассматриваемое здесь преобразование автор данной книги в 1964 г. назвал именем Леметра (см. [35]), так как в то время наиболее ранним источником, которым он располагал, была работа Леметра 1954 г. [25]. Автор намерен сохранить эту терминологию, несмотря на значительно более раннюю работу Пламмера (1914 г.) [24]. Для этого имеются две причины: во-первых, в литературе это преобразование связывают обычно с именем Леметра, хотя ряд других ученых, в том числе и автор книги, внесли свой вклад в изучение этого вопроса, во-вторых, Пламмер, вводя это преобразование, не преследовал цели регуляризации; действительно, он ничего не говорит о регуляризации, когда рассматривает это преобразование, в то время как применяя в этой же статье другие преобразования, он имеет в виду именно регуляризацию. Леметр же в качестве основной цели ставил условие регуляризации общей задачи трех тел.

Брукке [34] отмечал, что с помощью функции $h(w)=w^n$, рассмотренной нами в §§ 3.8 и 3.9, достигается не только регу-

ляризации, но и некоторые многопериодические орбиты (с повторяющимися витками вокруг начала координат) могут быть преобразованы в простые периодические орбиты без повторяющихся витков. Это означает также, что решения в форме рядов, полученные в плоскости w для, скажем, заданной задачи о спутнике, будут справедливы для большего числа оборотов в физической плоскости (q или z), чем в плоскости w.

Форма, в которой на рис. 3.7*б*, 3.9*а* и *б* и 3.13*а* и *б* представлены конформные отображения, является обычной (см., например, статью Депри и Брукке [26а]).

Важность регуляризации для задач космодинамики отмечается в работе Себехея [33], а в его статье [35] проводится сравнение различных методов регуляризации; они были рассмотрены нами в § 3.9. В этой последней статье исследуется общая схема возмущений для решения уравнений движения ограниченной задачи после того, как выполнено регуляризующее преобразование Биркгофа. Другой вывод регуляризованных уравнений приводится в статье Себехея и Джакалья [35а], в которой рассматривается также регуляризация эллиптической ограниченной задачи (см. § 10.3). Примеры приложения общей теории возмущений приводятся у Пирса [36], который использовал преобразование Леви-Чивита. Вывод уравнения (92) § 3.4 содержится в работе Себехея [36а].

Универсальные переменные, которые мы рассматривали в § 3.3 в связи с уравнениями (68) и (87) — (89), предложил Херрик [37], который ввел их впервые, вне связи с регуляризацией, еще в 1945 г. [38].

Обширное исследование по регуляризации с большим числом примеров провел Себехей [39].

Процесс регуляризации в рамках динамики Гамильтона рассматривается в гл. 7.

Параграф 3.10 посвящен вопросу существования решений ограниченной задачи. Приведенные теоремы и некоторые из доказательств указывают на то, что этот вопрос достаточно глубоко изучен и освещен в литературе. Здесь можно сослаться на три следующие наиболее важные работы: Лейманиса (Лейманис и Минорский [4, стр. 59]), Винтнера [5, стр. 269, 329, 356—359] и Аренсторфа [32]. Фундаментальная теорема Винтнера о существовании решений ограниченной задачи основывается на результатах Пенлеве. Решение задачи определения $\lim_{\tau \to t^*}$ для различных преобразований регуляризации было дано Аренсторфом [32]. Приведенное в § 3.10 преобразование, в котором рассматривается эксцентрическая аномалия, является недостаточно строгим, несмотря на тот факт, что каждое соударение в ограниченной задаче является в сущности (прямолинейным) соударением двух тел. Последнее замечание к § 3.10 находится

в противоречии с заключением Винтнера [5, стр. 359], что было впервые замечено Аренсторфом [32].

Численные результаты, приведенные в § 3.11 и полученные для ограниченной задачи из регуляризованных уравнений, впервые были представлены Копенгагенской школой, пользовавшейся преобразованием Тиле — Барро. Эта работа, результаты которой отражены в статье Стремгрена [40], достаточно подробно рассматривается нами в гл. 9. Копенгагенская школа определила несколько орбит одиночного соударения и небольшое число орбит последовательного соударения, но не получила семейств, состоящих из одних орбит соударения.

Орбиты последовательного соударения, не обладающие периодичностью, но образующие вполне определенное семейство, были представлены Себехеем совместно с соавторами. В первой работе Себехея и др. [41] приведено семейство траекторий, соединяющих центр Земли с центром Луны. Одна из траекторий этого семейства близка к действительной траектории Земля — Луна и может быть использована для прилунения. В этой работе представлены некоторые рассчитанные орбиты последовательного соударения для приближенной задачи двух тел. Продолжение семейства орбит описано у Пирса и Стендиша [42]. В этой работе систематически исследуются весьма сложные орбиты последовательного соударения, исходя из основного семейства; эти орбиты рассмотрены также в нашей книге в гл. 9.

Расчет траекторий соударения в ограниченной задаче с использованием преобразования Леви-Чивита произвели Бенедикт [43] и Брукке [44]. Бенедикт рассматривает решение в форме степенного ряда для задачи нахождения начальных условий, приводящих к соударению. Та же задача рассматривается у Леви-Чивита [45], Бискончини [46] и Уиттекера [3].

Общая задача трех тел, о которой говорилось вскользь в § 3.11, не является предметом изучения в нашей книге, но тем не менее игнорировать тот факт, что специалисты, занимающиеся практическими задачами небесной механики, неохотно следуют методам Зундмана, тоже нельзя. Если рассматривать только парные соударения, то можно считать, что общая задача в принципе решена, так как Зундман регулярнзовал эту задачу. (Одновременные, т. е. тройные соударения должны быть исключены заданием отличного от нуля вектора момента количества движения. Это условие является достаточным, но не необходимым, так как они могут быть исключены путем соответствующего выбора начальных условий даже тогда, когда момент количества движения равен нулю [5, стр. 265].)

То же самое относится к ограниченной задаче, которая после проведения глобальной регуляризации может быть решена, по крайней мере в принципе, посредством степенных рядов.

С глобальной, а также локальной регуляризацией можно подробней познакомиться в работе Винтнера [47].

В интересной работе Сеско [48] отмечается, что для астрономов регуляризация представляет ограниченный интерес, так как не находит достаточно широкого приложения. Движение вокруг треугольных точек либрации, с малой амплитудой, когда не происходит тесного сближения, пожалуй, еще не служит убедительным примером, оправдывающим регуляризацию. Сеско приводит пример с парным соударением, который показывает эффективность и фактически необходимость регуляризации. Автор данной книги считает приводимый аргумент правильным, но основной вывод не вполне верным. Тесные сближения в небесной механике обычно не происходят, и в этом как раз заключается причина того, что регуляризующие преобразования не находят применения. В том случае, когда в задаче рассматриваются соударения и сближения, как, например, в космодинамике и звездной динамике, регуляризация становится существенно необходимой.

Регуляризация задачи n тел, о которой говорилось в § 3.11, значительно подробней рассмотрена Лейманисом (Лейманис и Минорский [4, стр. 94]). Качественные аспекты изложены у Хильми [49]. В заметке Эбера [50] указывается на возможность использования регуляризации для нахождения нового инвариантного соотношения для задачи n тел. На важность регуляризации для звездной динамики обратил внимание автор данной книги д-р М. Лекар, которому автор очень признателен.

§ 3.13. Литература

1. Sundman K. F. Mémoire sur le problème des trois corps.— Acta Math., 1912, **36**, 105.
2. Poincaré H. Sur l'uniformisation des fonctions analytiques.— Acta Math., 1907, **31**, 1.

2a. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium.— Nov. Comm. Petrop., 1765, **11**, 144.

3. Whittaker E. T. Analytical Dynamics.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1904, pp. 97, 423—426. [Русский перевод: Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1937.]
4. Leimanis E., Minorsky N. Dynamics and Nonlinear Mechanics.— New York: Wiley, 1958, pp. 59—108.
5. Wintner A. Analytical Foundation of Celestial Mechanics.— Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1941. [Русский перевод: Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.]
6. Happel H. Das Dreikörperproblem.— Leipzig: Koehler, 1941.
7. Levi-Civita T. Traiettorie singulari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi.— Ann. Math., 1903, [3], **9**, 1. Sur la résolution qualitative du problème des trois corps.— Acta Math., 1918, **42**, 99; Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi.— Rend. Accad. Naz. Lincei, 1915, [5], **24**, 61; Sui problema piano dei tre corpi.— Ibid., 1915, **24**, 421, 485, 553; Condition du choc dans le problème restreint des trois corps.— Compt. Rend.

1903, **136**, 82, 221; Sur la régularisation du problème des trois corps.— Ibid., 1916, **162**, 1.
8. Bohlin K. Note sur le problème des deux corps et sur une integration nouvelle dans le problème des trois corps.— Bull. Astron.; 1911, **28**, 113.
9. Euler L. Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés.— Mem. Berlin, 1760, p. 228; De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti.— Nov. Comm. Petrop., 1764, **10**, 207; 1765, **11**, 152.
10. Charlier C. V. L. Die Mechanik des Himmels.— V. 1, Chapter 3. Leipzig: Von Veit, 1902. [Русский перевод: Шарлье К. Небесная механика.— М. :Наука, 1966.]
11. Plummer H. C. Dynamical Astronomy.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1918, p. 252. Reprinted by Dover, New York, 1960.
12. Bonnet O. Note sur un théorème de mécanique.— J. Math. Pures Appl., 1844, **9**, 113. Solution de quelques problèmes de mécanique. — Ibid., 217.
13. Legendre A. Exercices de Calcul Intégral. V. 2, p. 383. Paris: Courcier, 1817.
14. Егоров В. А. О теореме Боннэ.— ПММ, 1958, **22**, вып. 6, с. 721—729.
15. Szebehely V. Reliability of interplanetary and lunar orbit computations.— Am. Rocket Soc., 1959, Paper № 874—59; Application of the restricted problem of three bodies to space mechanics.— Space Sci. Rev., 1963, 2, 219.
16. Thiele T. N. Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps.— Astron. Nachr., 1896, **138**, 1.
17. Burrau C. Über einige in Aussicht genommene Berechnung, betreffend einen Spezialfall des Dreikörperproblems.— Vierteljahrsschrift Astron. Ges., 1906, **41**, 261.
18. Lindow M. Ein Nomogramm zur Thieleschen Transformation.— Astron. Nachr., 1921, **214**, 263.
19. Burrau C., Strömgren E. Über Librationen und Ejecktionsbahnen.— Copenhagen Obs. Publ., 1914, № 18; Astron. Nachr., 1914, **197**, 273.
20. Burrau C. Recherches numérique concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps.— Astron. Nachr., 1894, **135**, 233; 1894, **136**, 161.
21. Birkhoff G. D. The restricted problem of three bodies. — Rend. Circ. Mat. Palermo, 1915, **39**, 1; Birkhoff G. D. Collected Mathematical Papers. V. 1, p. 628.— New York: Am. Math. Soc., 1950.
22. Birkhoff G. D. Sur le problème restreint des trois corps.— Ann. Scuola Normale Sup. Pisa [2] 1935, **4**, 267; Birkhoff G. D. Collected Mathematical Papers.— New York: Am. Math. Soc., 1950. V. 2, p. 466.
23. Armellini G. Sur la solution analytique du problème restreint des trois corps.— Compt. Rend., 1914, **158**, 253.
24. Plummer H. C. Note on the use of conjugate functions in some dynamical systems.— Proc. Roy. Irish. Acad., 1914, **A32**, 7.
25. Lemaitre G. Coordonnées symétriques dans le problème des trois corps.— Bull. Classe. Sci., Acad. Roy. Belg. [5] 1952, **38**, 582; Régularisation dans le problème des trois corps.— Ibid., 1954, **40**, 759; Regularization of three-body problem. V. 1, p. 207; Vistas in Astronomy (Beer A., ed.). Oxford: Pergamon Press, 1955; The three body problem.— NASA, 1964, CR-110.
26. Deprit A., Delie A. Régularisation du problème des trois corps.— Arch. Rational Mech. Analysis, 1963, **12**, 325.
26a. Deprit A., Broucke R. Régularisation du problème restreint plan des trois corps par représentations conformes. — Icarus 1963, **2**, 207
27. Marnaghan F. D. A symmetric reduction of the planar three-body problem.— Am. J. Math., 1936, **58**, 859.
28. Szebehely V. On the problem of three bodies in a plane.— Math. Mag., 1952, **26**, 59.

29. Deprit A., Delie A. Systèmes matériels de trois masses ponctuelles. Mouvement plan en coordonnées symétriques.— Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1961, **75**, 5.
30. Deprit A., Roels J. Réduction canonique du problème plan des trois corps.— Bull. Classe. Sci., Acad. Roy. Belg., 1962, [5], **48**, 432.
31. Deprit A., Delie A. Courbure de la métrique riemannienne du problème plan des trois corps.— Bull. Classe. Sci., Acad. Roy. Belg., 1962, [5] **48**, 652.
32. Arenstorf R. F. New regularization of the restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1963, **68**, 548.
33. Szebehely V. Application of the restricted problem of three bodies to space mechanics.— Space Sci. Rev., 1963, **2**, 219.
34. Broucke R. Regularizations of the plane restricted three-body problem.— Icarus, 1965, **4**, 8.
35. Szebehely V. Perturbation of the regularized equations of the restricted problem of three bodies. — Astron. J., 1964, **69**, 309.
35a. Szebehely V., Giacaglia G. On the elliptic restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1964, **69**, 230.
36. Pierce D. A. A solution of the regularized equations of motion of the restricted problem.— Astron. J., 1966, **71**, 545.
36a. Szebehely V. Selection of regularizing functions.— Astron. J., 1967, **72**, April.
37. Herrick S. Universal variables.— Astron. J., 1965, **70**, 309.
38. Herrick S. Nearly parabolic and nearly rectilinear orbits.— Astron. J., 1945, **51**, 123.
39. Szebehely V. Regularization in celestial mechanics.— Proc. Conf. Senior Navy Mathematicians, Monterey, Cal., 1965. Washington: Office of Naval Res., 1967.
40. Strömgren E. Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps.— Copenhagen Obs. Publ., 1935, № 100; Bull. Astron., 1935, **9**, 87.
41. Szebehely V., Pierce D. A., Standish E. M. A group of earth-to-moon trajectories with consecutive collisions.— Celestial Mechanics and Astrodynamics (Szebehely V., ed.). New York: Academic Press, 1964, p. 35.
42. Pierce D. A., Standish E. M. Numerical aspects of the family of earth-to-moon trajectories with consecutive collisions.— *AIAA* J., 1966, **4**, 709.
43. Benedikt E. T. Collision trajectories in the three-body problem.— J. Astronaut. Sci., 1959, **6**, 17.
44. Broucke R. Recherches d'orbites périodiques dans le problème restreint plan (système Terre-Lune).— Dr. Sci. dissertation, Univ. of Louvain, 1962, unpublished.
45. Levi-Civita T. Traiettorie singulari ed urti nei problema ristretto dei tre corpi.— Ann. Math., 1903, [3], **9**, 1; Condition du choc dans le problème restreint des trois corps.— Compt. Rend., 1903, **136**, 82, 221.
46. Bisconcini G. Sur le problème des trois corps.— Acta Math., 1905, **30**, 49.
47. Wintner A. Zur effektiven Stabilität des Mondes.— Math. Z., 1930, **32**, 675.
48. Cesco R. P. Some theorems and results in the three-body problem.— Proc. Intern. Meeting Probls. Astrometry and Celestial Mech., La Plata, 1960, p. 81. Astron. Obs., Natl. Univ. of La Plata, Argentina, 1961.
49. Хильми Г. Ф. Качественные методы в проблеме n тел.—М.: Изд-во АН СССР, 1958.
50. Ebert W. Sur un système d'equations différentielles qui équivaut au problème des n corps,. mais admet une integrale de plus.— Compt. Rend., 1900, **131**, 251.

Глава 4

МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ

§ 4.1. Введение

Движение динамической системы с двумя степенями свободы описывается системой дифференциальных уравнений четвертого порядка. Решение этой системы определяется, исключая особенности, заданием четырех начальных условий. Точка в четырехмерном пространстве, образованном этими четырьмя начальными условиями, будет, таким образом, представлять систему начальных условий и, стало быть, определяет частное решение. Совокупность всех решений представляется всеми точками четырехмерного пространства, которое часто называют *фазовым пространством*.

Понятие фазового пространства может быть пояснено рассмотрением системы, имеющей только одну степень свободы. Начальными условиями в этом случае будут просто значения x и $\dot{x}$, и фазовое пространство оказывается двумерным, т. е. фазовой плоскостью $x\dot{x}$, на которой можно изобразить различные решения. Отдельное решение с начальными условиями x, $\dot{x}$ может быть представлено одной точкой или вообще кривой, потому что при изменении времени от t_0 до t соответствующие значения x и $\dot{x}$ в общем случае также будут изменяться. Например, если на фазовой плоскости мы имеем прямую, параллельную оси x (т. е. $\dot{x}=\dot{x}_0=\text{const}$), то соответствующее движение будет описываться уравнением $x=\dot{x}_0 t+x_0$. Линия, идущая под углом 45° к оси x и проходящая через начало координат, соответствует уравнению $x=x_0e^t$, а окружность $\dot{x}^2+x^2=a^2\omega^2$ представляет гармоническое колебание. Действительное движение во всех трех примерах происходит вдоль оси x.

Интеграл динамической системы с одной степенью свободы представляет собой соотношение между x и $\dot{x}$ вида $C=F(x, \dot{x})$, что можно рассматривать как уравнение кривой на плоскости $x\dot{x}$.

Точки этой кривой имеют двоякое значение. Во-первых, они представляют все начальные условия, которые дают одно и то же значение C, т. е. выбрав какую-либо точку x_0, $\dot{x}_0$, можно об-

разовать решение, которое будет соответствовать заданному C. Но если C остается во время движения постоянным (функция F есть интеграл), то решение, как показывается на фазовой плоскости, должно совпадать с кривой, для которой $C=\text{const}$. Поэтому второе назначение графика $C=F(x, \dot{x})$ состоит фактически в том, чтобы выделить движение системы, так как частица должна иметь такое движение, при котором ее след лежал бы на этой кривой.

Таким образом, точки на этой кривой представляют решения, соответствующие определенному заданному значению C. При изменении значения C получаем различные интегральные кривые. Примером может служить гармонический осциллятор. В этом случае уравнение движения имеет вид $\ddot{x}+x=0$, если массу точки, а также жесткость пружины принять равными единице. Точки плоскости $x\dot{x}$ представляют различные начальные условия и, таким образом, образуют всю совокупность движений. Интеграл выражает принцип сохранения энергии: $\dot{x}^2+x^2=C$. Интегральные кривые в этом случае являются окружностями на фазовой плоскости. «Изоэнергетические» решения (решения с такими начальными условиями, при которых энергия одинакова) расположены на одной и той же окружности. Двумерное множество решений посредством интеграла приводится к точкам линии, т. е. к одномерному множеству.

Фазовое пространство четырех измерений, соответствующее динамической системе с двумя степенями свободы, допускает приведение в том случае, когда существует интеграл системы. Такой интеграл имеет вид

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y})=C \tag{1}$$

и представляет трехмерное подпространство, или гиперповерхность, для фиксированного значения C. Другой интеграл, если он существует и не зависит от первого, позволяет провести рассмотрение точек поверхности. Это легко видеть, так как если из двух интегралов

$$F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y})=C_1, \quad F_2(x, y, \dot{x}, \dot{y})=C_2 \tag{2}$$

исключить, например, $\dot{x}$, то получим уравнение $0=f(C_1, C_2, x, y, \dot{y})$, представляющее уравнение поверхности в пространстве $\dot{y}xy$. Поэтому все решения, которые имеют начальные условия те же, что и в уравнениях (2), будут расположены на этой поверхности. Не только начальные условия и точки, представляющие решения, но также и сами орбиты будут находиться на поверхности $f=0$. Сечение $x=0$ этой поверхности с плоскостью $y\dot{y}$ образует в общем случае кривую, на которой будут располагаться точки пересечения орбиты с плоскостью $x=0$ (скажем,

для $\dot{x}>0$). Существование этой кривой означает существование двух интегралов (уравнения (2)). Если существует только один из двух интегралов, то кривой на плоскости $y\dot{y}$ мы, конечно, не получим, но площадь будет заполнена точками, соответствующими пересечению плоскости $x=0$ с объемом $F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y})=C_1$.

Другой путь приведения четырехмерного фазового пространства состоит в исследовании определенных классов решений. Приведение к трехмерному фазовому пространству посредством интеграла равносильно рассмотрению только тех решений, для которых постоянные интегрирования одни и те же. Помимо этого требования можно ограничить исследование изучением решений с некоторыми специальными начальными условиями, скажем, $x_0\neq 0$, $y_0=0$, $\dot{x}_0=0$, $\dot{y}_0\neq 0$. Если постоянная интегрирования фиксирована, то выбор всех четырех начальных условий приходит в противоречие, так как, например, C, x_0, y_0 и $\dot{x}_0$ определяют $\dot{y}_0$ из уравнения (1). Геометрически указанные выше начальные условия означают, что исследуются орбиты, начинающиеся с оси x под прямым углом к ней. Таким образом, трехмерное фазовое пространство, соответствующее заданному значению C, может быть приведено к однопараметрическому семейству, если исследуются только орбиты, начинающиеся перпендикулярно от оси x. Другими словами, одномерное семейство выделяется из трехмерного фазового пространства.

Другое приведение многомерного множества можно осуществить, изучая изоэнергетические орбиты, когда величина скорости имеет нулевое значение. Уравнение (1) в этом случае принимает вид

$$C=F(x, y, 0, 0)$$

и выражает кривую в плоскости xy для некоторого значения C. Эти кривые называют кривыми нулевой скорости, или кривыми Хилла.

Динамическая система с тремя степенями свободы, как, например, трехмерная ограниченная задача, приводит к шестимерному фазовому пространству, которое опять-таки допускает различные приведения. Например, при фиксированном значении постоянной интегрирования C множество нулевой скорости представляет собой поверхности, так как в этом случае

$$C=F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

откуда при $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$ получаем

$$z=f(C, x, y).$$

Эти множества называют поверхностями нулевой скорости.

При изучении множеств важное значение имеют аналитические свойства, и, как будет показано, для полной их характеристики нужно знать особенности этих множеств. После этого можно показать, что некоторые свойства возможных орбит связаны с этими множествами.

Заканчивается эта глава приложениями, которые особенно важны для производства инженерных расчетов технических систем, поскольку множества содержат информацию относительно энергии и поэтому позволяют установить характеристики двигателя для космических аппаратов.

§ 4.2. Множество состояний движения

Точки $P(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ четырехмерного фазового пространства представляют собой состояния движения, так как каждая точка соответствует начальному условию, которое в свою очередь представляет собой орбиту. Интеграл Якоби дает соотношение между этими величинами, поэтому при фиксированном значении постоянной Якоби C свободно выбирать можно только три начальных условия. Точки трехмерного множества, соответствующие фиксированному значению C, также могут рассматриваться как состояния движения, но только в изоэнергетическом смысле.

Так как динамическую задачу можно описать с помощью переменных x, y, а также других переменных, например, регуляризующих координат u, v, то состояния движения могут быть описаны с помощью $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ или u, v, u', v'. Поскольку система x, y имеет особенности (в местах расположения основных тел), исследование состояния движения часто проводят в регуляризованной системе u, v. Нужно иметь в виду, что каждому заданному состоянию в системе x, y могут соответствовать несколько различных систем значений u, v, u', v'.

Например, в преобразовании Биркгофа соотношение между преобразованной плоскостью w и физической плоскостью z есть одно-двузначное соответствие. Два значения w, которые соответствуют одному заданному значению z, связаны соотношением

$$2+\frac{1}{w_1-\mu}+\frac{1}{w_2-\mu}=0. \tag{3}$$

Оно следует из основной формулы преобразования Биркгофа

$$z=f(w)=\frac{w^2+\mu(1-\mu)}{2w+1-2\mu}, \tag{4}$$

которую можно записать в виде

$$1+\frac{1}{z-\mu}=\left(1+\frac{1}{w-\mu}\right)^2. \tag{5}$$

Если w_1 соответствует положительному значению квадратного корня в левой части равенства, а w_2 — отрицательному, то сразу получается формула (3).

Две регуляризованные скорости для любого преобразования с одно-двузначным соответствием связаны между собой формулой

$$w_1' \frac{f'(w_1)}{|f'(w_1)|^2} = w_2' \frac{f'(w_2)}{|f'(w_2)|^2}, \tag{6}$$

так как

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dw}\frac{dw}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}$$

или

$$\dot{z} = \frac{f'(w)\,w'}{|f'(w)|^2}.$$

Этот результат эквивалентен уравнению (6), так как должно получаться одно и то же $\dot{z}$, независимо от того, вычисляется ли оно при w_1 или при w_2.

Уравнение (6) можно переписать также в виде

$$\frac{w_1'}{w_2'} = \frac{\overline{f'(w_1)}}{\overline{f'(w_2)}}. \tag{7}$$

Например, при преобразовании Леви-Чивита

$$z = \mu + w^2$$

имеем

$$\frac{w_1'}{w_2'} = \frac{\overline{w}_1}{\overline{w}_2} = \frac{+(\overline{z}-\mu)^{1/2}}{-(\overline{z}-\mu)^{1/2}} = -1.$$

Задача. Покажите, что при преобразовании Биркгофа в особых точках мы имеем $w_1' = -w_2'$.

В регуляризованной системе Биркгофа всегда имеются две различные системы переменных состояния, которые соответствуют одному единственному состоянию движения в физическом пространстве. Заметим, что два преобразованных радиуса-вектора w_1 и w_2 обладают тем свойством, что либо они оба расположены на действительной оси u, либо разделяются ею. Это следует из уравнения (3), которое можно представить также в виде

$$1 + \frac{1}{w_1 - \mu} = -1 - \frac{1}{w_2 - \mu}$$

или

$$1 + \frac{\overline{w}_1 - \mu}{|w_1 - \mu|^2} = -1 - \frac{\overline{w}_2 - \mu}{|w_2 - \mu|^2}.$$

Взяв мнимые части обеих частей равенства, получим

$$\frac{-v_1}{|w_1-\mu|^2}=\frac{v_2}{|w_2-\mu|^2}.$$

Отсюда видно, что v_1 и v_2 противоположного знака. Если одно из значений w вещественно, то вещественно и второе ($v_1=v_2=0$) и оба w расположены на действительной оси u.

Поэтому представить множество состояний движения достаточно просто, независимо от того, используются ли первоначальные физические переменные x, y или же соответствующая регуляризованная система; в последнем случае мы имеем преимущества аналитического характера.

§ 4.3. Особенности множества состояний движения

Любая система чисел x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, удовлетворяющая уравнению Якоби $\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega(x, y)-C$, представляет собой возможное движение для заданного C. Точно так же любая система чисел u, v, u', v', удовлетворяющая уравнению Якоби $u'^2+v'^2=2\Omega^*(u, v)$, представляет возможное движение для заданного значения C, так как Ω^* содержит C.

Множество

$$F(u, v, u', v')=u'^2+v'^2-2\Omega^*(u, v)=0 \tag{8}$$

имеет особенности в точках u, v, u', v', где

$$\frac{\partial F}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial u'}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial v'}=0. \tag{9}$$

Эти особые точки регуляризованного множества (состояний движения) отличаются от особенностей, имеющих место в первоначальных дифференциальных уравнениях движения. В гл. 3 мы рассмотрели особенности уравнений движения и показали, что они находятся в местах расположения тел конечной массы. Равенства (9) эквивалентны следующим:

$$\Omega_u^*=0,\ \Omega_v^*=0,\ u'=0,\ v'=0. \tag{10}$$

Два последних равенства выражают нулевую скорость в регуляризованной плоскости, и на основании уравнения (8) мы имеем $\Omega^*(u, v)=0$. Соотношение с физической плоскостью выражается формулой $\Omega^*(u, v)=(\Omega-C/2)\,|f'(w)|^2=0$, так что $\Omega=C/2$ или $\dot{x}^2+\dot{y}^2=0$ или $x=0$, $y=0$. Условие нулевой скорости, полученное в регуляризованной системе переменных, поэтому справедливо и в физической системе. Этот результат можно получить также, исследуя множество

$$G(x, y, \dot{x}, \dot{y})=\dot{x}^2+\dot{y}^2-2\Omega(x, y)+C=0.$$

Это исследование может быть осложнено из-за особенностей функции $\Omega(x, y)$.

Заметим, что уравнение

$$\left(\Omega-\frac{C}{2}\right)|f'(w)|^2=0$$

в общем случае не удовлетворяется в местах расположения основных тел, где величина $|f'(w)|^2$ равна нулю. Это следует из того, что вообще скорость в местах расположения основных тел в регуляризованной системе не равна нулю, так как $\Omega^*\neq 0$ в точках P_1 и P_2.

Поэтому заключаем, что два последних условия [уравнения (10)], относящиеся к особенностям множества состояний движения ($u'=0$, $v'=0$), приводят ко всем тем точкам плоскостей uv или xy, где обе составляющие скорости равны нулю, т. е. к кривым нулевой скорости. Поскольку функция Ω (а также Ω^*) аналогична потенциальной функции, уравнения $\Omega^*=0$ или $\Omega=C/2$ описывают эквипотенциальные линии (сравните с пунктом 4.7.4).

Два дополнительных условия (уравнения (10)), касающиеся особенностей множества состояний движения, $\Omega_u^*=0$ и $\Omega_v^*=0$, также эквивалентны условиям $\Omega_x=0$ и $\Omega_y=0$. Чтобы показать это, запишем это условие в виде $\operatorname{grad}_w\Omega^*=0$ или в виде

$$\operatorname{grad}_w\left[\left(\Omega-\frac{C}{2}\right)|f'(w)|^2\right]=0,$$

или подробней

$$2f'\bar{f}''\left(\Omega-\frac{C}{2}\right)+|f'|^2\bar{f}'\operatorname{grad}_z\Omega=0,$$

что дает $\operatorname{grad}_z\Omega=0$ или $\Omega_x=0$, $\Omega_y=0$, так как первый член, как было показано, должен равняться нулю.

Таким образом, заключаем, что *особенности множества* состояний движения находятся в тех точках кривых нулевой скорости, в которых $\Omega_u^*=\Omega_v^*=0$ или $\Omega_x=\Omega_y=0$. Другими словами, особенности определяются любой из двух следующих систем уравнений:

$$\Omega^*=0,\quad \Omega_u^*=0,\quad \Omega_v^*=0 \tag{11}$$

или

$$\Omega=\frac{C}{2},\quad \Omega_x=0,\quad \Omega_y=0. \tag{12}$$

Теперь рассмотрим физическую плоскость и дадим интерпретацию уравнений (12).

Уравнения движения

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\Omega_x \quad \text{и} \quad \ddot{y}+2\dot{x}=\Omega_y$$

в точках, где имеет место *особенность множества* состояний движения ($\dot{x}=\dot{y}=\Omega_x=\Omega_y=0$), дают $\ddot{x}=\ddot{y}=0$. По этой причине точки, определяемые уравнениями (12), называют также *точками равновесия*. Действительно, все производные координат по времени в этих точках равны нулю. Например, из первого уравнения движения имеем

$$\dddot{x}=2\ddot{y}+\Omega_{xx}\dot{x}+\Omega_{xy}\dot{y}=0.$$

Поэтому, если третья частица находится в точке равновесия и имеет нулевую скорость, то она не выйдет из этой точки. По этой причине особые точки называют также *стационарными точками*. Применяют еще термины «*точки либрации*» и «*точки Лагранжа*», обозначаемые $L_1,\ldots,L_5$, см. гл. 5.

Уравнения $\Omega_x=0$, $\Omega_y=0$ в развернутой форме выглядят следующим образом:

$$x-\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3}-\frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}=0 \tag{13}$$

и

$$y\left(1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}\right)=0. \tag{14}$$

Решение уравнений (13) и (14) дает пять точек: три на оси x, называемые коллинеарными*) решениями, и две, образующие вместе с точками конечной массы равносторонние треугольники, называемые треугольными решениями. Эти последние определяются равенствами $r_1=r_2=1$. Если подставить их в уравнения (13) и (14), то получим решение $y\neq 0$. Чтобы найти коллинеарные точки, полагаем в уравнениях (13) и (14) $y=0$ и решаем уравнение (13) относительно x.

Треугольные точки имеют координаты $x=\mu-{}^1/_2$ и $y=\pm 3^{1/2}/2$; знак плюс соответствует точке L_4, а знак минус — точке L_5. Определение значений абсцисс коллинеарных точек требует решения уравнений пятой степени, так как при $y=0$ уравнение (13) может быть записано в виде

$$x+\frac{A}{(x-\mu)^2}+\frac{B}{(x+1-\mu)^2}=0 \tag{15}$$

и приводится к алгебраическому уравнению пятой степени.

На рис. 4.1 показано расположение точек равновесия. Первая коллинеарная точка расположена слева от второго основного тела, вторая — между основными телами и третья коллинеар-

*) Кроме термина «коллинеарные точки» в нашей литературе часто встречается термин «прямолинейные точки». См., например, Г. Н. Дубошин. Небесная механика. Аналитические и качественные методы.— М., «Наука», 1964. (*Прим. перев.*)

ная точка равновесия — справа от первого основного тела. Области, в которых располагаются коллинеарные точки, показаны на рис. 4.1 и обозначены через L_1, L_2 и L_3.

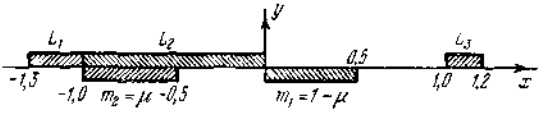


Рис. 4.1. Расположение коллинеарных точек равновесия.

Наиболее узкие пределы, которые можно указать для этих положений, следующие:

$$\begin{aligned} \mu-2 \leqslant x_1 \leqslant \mu-1, \\ \mu-1 \leqslant x_2 \leqslant \mu, \\ \mu \leqslant x_3 \leqslant \mu+1. \end{aligned} \tag{16а}$$

Пределы можно сделать не зависящими от значения μ:

$$\begin{aligned} -1{,}3 \leqslant x_1 \leqslant -1, \\ -1 \leqslant x_2 \leqslant 0, \\ 1 \leqslant x_3 \leqslant 1{,}2. \end{aligned} \tag{16б}$$

Более точные пределы приближенно равны

$$\begin{aligned} -1{,}271630 \leqslant x_1 \leqslant -1, \\ -1 \leqslant x_2 \leqslant 0, \\ +1 \leqslant x_3 \leqslant 1{,}198406. \end{aligned} \tag{16в}$$

§ 4.4. Определение положения коллинеарных точек

Определение абсцисс коллинеарных точек требует решения уравнения (13) или (15). Коэффициенты A и B в уравнении (15), зависящие от области, в которой расположена точка, могут быть найдены, и уравнение пятой степени может быть решено.

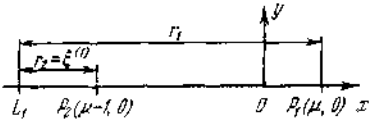


Рис. 4.2. Обозначения, применяемые при вычислении $x_1=x_1(L_1)$.

А. В первой области (см. рис. 4.2) имеем $r_1=\mu-x$ и $r_2=\mu-x-1$. Подставляя в уравнение (13), получаем

$$x+\frac{1-\mu}{(x-\mu)^2}+\frac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0. \tag{17}$$

Таким образом, коэффициенты в уравнении (15) равны $A=1-\mu$ и $B=\mu$.

Полагая $r_2=\xi^{(1)}$, $r_1=1+\xi^{(1)}$, $x=\mu-1-\xi^{(1)}$, получаем

$$\xi^{(1)}+1-\mu+\frac{\mu-1}{(1+\xi^{(1)})^2}-\frac{\mu}{(\xi^{(1)})^2}=0. \tag{18}$$

Решение этого алгебраического уравнения пятой степени относительно $\xi^{(1)}$, где μ есть параметр, может быть проведено различными способами. Запишем уравнение в виде

$$\xi^5+(3-\mu)\xi^4+(3-2\mu)\xi^3-\mu\xi^2-2\mu\xi-\mu=0, \tag{19}$$

где

$$\xi=\xi^{(1)}.$$

Согласно правилу знаков Декарта, для $0<\mu\leqslant 1/2$ существует один и только один положительный корень, а для $\mu=0$ — один вещественный корень ($\xi^{(1)}=0$).

Один из способов решения, наиболее удобный для быстродействующих ЭВМ, состоит в следующем. Производя разложение на множители трех первых членов и решая относительно ξ^3, находим

$$\xi^3=\frac{\mu(1+\xi)^2}{3-2\mu+\xi(3-\mu+\xi)}. \tag{20}$$

Процесс итерации можно начать с $\xi=0$ в качестве начального значения в правой части равенства, тогда для первой итерации будем иметь $\xi=[\mu/(3-2\mu)]^{1/3}$, и т. д. Или же можно процесс начать с $\xi=(\mu/3)^{1/3}$. Возможно читатель отдаст предпочтение третьему выбору, при котором начальное значение берется равным $[\mu/3(1-\mu)]^{1/3}$; оно обосновывается следующими соображениями. Уравнение (18) можно переписать в виде

$$\xi+(1-\mu)[1-(1+\xi)^{-2}]-\mu\xi^{-2}=0$$

или

$$(1-\mu)[1+\xi-(1+\xi)^{-2}]+\mu(\xi-\xi^{-2})=0.$$

Отсюда

$$\frac{\mu}{3(1-\mu)}=\frac{\xi^3\left(1+\xi+\frac{\xi^2}{3}\right)}{(1+\xi)^2(1-\xi^3)}. \tag{21}$$

Решение в форме ряда по степеням $\nu=[\mu/3(1-\mu)]^{1/3}$ записывается в виде

$$\xi^{(1)}=\nu\left(1+\frac{1}{3}\nu-\frac{1}{9}\nu^2-\frac{31}{81}\nu^3-\frac{119}{243}\nu^4-\frac{1}{9}\nu^5\right)+O(\nu^7). \tag{22}$$

Решение же в форме ряда по степеням $(\mu/3)^{1/3}$ имеет следующий вид:

$$\xi^{(1)}=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}-\frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}+\ldots\right], \tag{23}$$

что следует из решения (22), если принять

$$\frac{\mu}{3(1-\mu)}=\frac{\mu}{3}(1+\mu+\mu^2+\ldots)\approx\frac{\mu}{3}.$$

Нетрудно установить, что быстрота сходимости рядов (22) и (23), имеющих в основном исторический интерес, будет различна, см. § 4.9.

Опыт показывает, что решение уравнения (19) проще всего получить посредством процесса итерации, используя равенство (20) и принимая в качестве начального значения $[\mu/3(1-\mu)]^{1/3}$.

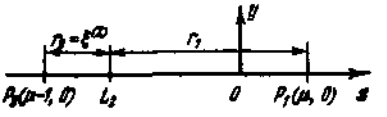


Рис. 4.3. Обозначения, применяемые при вычислении $x_2=x_2(L_2)$.

Б. Область 2 располагается между двумя основными телами. Как видно из рис. 4.3, теперь $r_1=\mu-x$, $r_2=1-\mu+x$. Подставляя в уравнение (13), получаем

$$x+\frac{1-\mu}{(x-\mu)^2}-\frac{\mu}{(x+1-\mu)^2}=0. \quad (24)$$

Таким образом, $A=1-\mu$ и $B=-\mu$. Полагая опять $r_2=\xi^{(2)}$, $r_1=1-\xi^{(2)}$, $x=\mu-1+\xi^{(2)}$, будем иметь

$$\xi^{(2)}-1+\mu+\frac{1-\mu}{(\xi^{(2)}-1)^2}-\frac{\mu}{(\xi^{(2)})^2}=0 \quad (25)$$

или

$$\xi_3=\frac{\mu(1-\xi)^2}{3-2\mu-\xi(3-\mu-\xi)}, \quad (26)$$

где $\xi=\xi^{(2)}$. Уравнение пятой степени принимает вид

$$\xi^5-(3-\mu)\xi^4+(3-2\mu)\xi^3-\mu\xi^2+2\mu\xi-\mu=0,$$

и, следовательно, согласно правилу знаков Декарта, существует по крайней мере один положительный корень.

Можно применить разложение, аналогичное (22) и (23). Наиболее удобным методом решения является процесс итерации с начальным значением $\xi=[\mu/3(1-\mu)]^{1/3}$. Решение в форме ряда по степеням ν,

$$\nu=\left[\frac{\mu}{3(1-\mu)}\right]^{1/3},$$

имеет вид

$$\xi^{(2)}=\nu\left(1-\frac{1}{3}\nu-\frac{1}{9}\nu^2-\frac{23}{81}\nu^3+\frac{151}{243}\nu^4-\frac{1}{9}\nu^5\right)+O(\nu^7), \quad (27)$$

а по степеням $(\mu/3)^{1/3}$ —

$$\xi^{(2)}=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}-\frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}+\ldots\right]. \quad (28)$$

В. Наконец, в третьей области, как видно из рис. 4.4, мы имеем $r_1 = x - \mu$, $r_2 = 1 + x - \mu$; подставляя в уравнение (13), получаем

$$x - \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} - \frac{\mu}{(1+x-\mu)^2} = 0, \tag{29}$$

так что $A = \mu - 1$ и $B = -\mu$. Полагая $r_1 = \xi^{(3)} = x - \mu$,

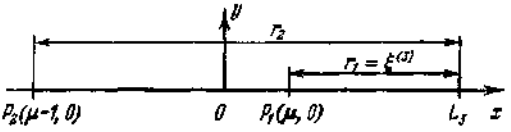


Рис. 4.4. Обозначения, применяемые при вычислении $x_3 = x_3(L_3)$.

$r_2 = 1 + \xi^{(3)}$, $x = \mu + \xi^{(3)}$, будем иметь

$$\xi^{(3)} + \mu - \frac{1-\mu}{[\xi^{(3)}]^2} - \frac{\mu}{[1+\xi^{(3)}]^2} = 0 \tag{30}$$

или

$$\xi^3 = \frac{(1-\mu)(1+\xi)^2}{1+2\mu+\xi(2+\mu+\xi)}, \tag{31}$$

где $\xi^{(3)} = \xi$.

Уравнение пятой степени принимает вид

$$\xi^5 + (2+\mu)\xi^4 + (1+2\mu)\xi^3 - (1-\mu)\xi^2 - 2(1-\mu)\xi - (1-\mu) = 0, \tag{32}$$

и поскольку имеем одну перемену знака, будем иметь один и только один положительный корень. Так как корень близок к $+1$, то удобно перейти к новой неизвестной $\eta = \xi - 1$, тогда уравнение примет вид

$$\eta^5 + (7+\mu)\eta^4 + (19+6\mu)\eta^3 + (24+13\mu)\eta^2 + 2(6+7\mu)\eta + 7\mu = 0. \tag{33}$$

Начальное значение

$$\eta = -\frac{7}{12}\mu$$

следует непосредственно из двух последних членов. Действительно, существование по крайней мере одного отрицательного корня следует из пяти изменений знака в уравнении (33), когда совершается переход $\eta \to -\eta$. Решение в форме ряда по степеням $\nu = 7\mu/12$ имеет вид

$$\eta = -\nu\left(1 + \frac{23}{84}\nu^2 + \frac{23}{84}\nu^3 + \frac{761}{2352}\nu^4 + \frac{3163}{7056}\nu^5 + \frac{30703}{49392}\nu^6\right). \tag{34}$$

Г. Заметим, что функция $x_1 = x_1(\mu)$ имеет минимум при $\mu_0 = 0{,}178944$. Это можно установить из того, что минимум должен удовлетворять уравнению (18), которое связывает $\xi^{(1)}$ или, если

иметь в виду равенство $\xi^{(1)}=\mu-1-x_1$, величину x_1 с μ. Кроме того, при экстремуме $dx_1/d\mu=0$ или $d\xi^{(1)}/d\mu=1$; учитывая это при дифференцировании уравнения (18), получаем

$$\xi^3(3-2\mu+\xi)+(\xi+1)^3(2\mu-\xi)=0, \tag{35}$$

где мы снова вместо $\xi^{(1)}$ пишем ξ.

Решая уравнения (18) и (35) относительно μ, находим

$$\mu=\frac{\xi^5+3\xi^4+3\xi^3}{\xi^4+2\xi^3+\xi^2+2\xi+1}=\frac{3\xi^2+\xi}{6\xi^2+6\xi+2}, \tag{36}$$

откуда для $\xi\neq 0$ получаем

$$6\xi^6+21\xi^5+31\xi^4+19\xi^3-\xi^2-5\xi-1=0. \tag{37}$$

Одно единственное положительное значение ξ, удовлетворяющее этому уравнению, равно 0,450574 и дает $(x_1)_{\min}=-1{,}271630$ при заранее заданном значении μ_0.

§ 4.5. Описание таблиц характеристик коллинеарных точек равновесия (Приложения I, II, III)

Поскольку таблицы, приведенные в Приложениях I, II и III в конце этой главы, дают значения координат для первой, второй и третьей коллинеарных точек равновесия в идентичной форме, мы ограничимся рассмотрением одного только Приложения I. Оно состоит из четырех частей: (1) А и Б, (2) В, (3) Г, (4) Д. Различие между этими частями состоит в значениях μ. Разделы А и Б Приложения I содержат информацию относительно следующих областей изменения μ: $10^{-6}\leqslant\mu\leqslant 9\cdot 10^{-6}$; $10^{-5}\leqslant\mu\leqslant 9\cdot 10^{-5}$; $10^{-4}\leqslant\mu\leqslant 9\cdot 10^{-4}$; $10^{-3}\leqslant\mu\leqslant 9\cdot 10^{-3}$; $10^{-2}\leqslant\mu\leqslant 9\cdot 10^{-2}$ и $0{,}1\leqslant\mu\leqslant 0{,}5$. Каждая из пяти первых областей содержит 9 эквидистантных значений, а последняя область — 40 граф. Приложение IВ охватывает те значения μ, которые близки к массовому параметру Юпитера

$$\mu=\frac{m_{2\!4}}{m_{2\!4}+m_{\odot}}\approx 0{,}00095,$$

и дает 21 эквидистантное значение в пределах $0{,}00085\leqslant\mu\leqslant 0{,}00105$. Приложение IГ дает аналогичные результаты для системы Земля — Луна, близкие к

$$\mu=\frac{m_{\leftmoon}}{m_{\oplus}+m_{\leftmoon}}\approx 0{,}012,$$

и охватывает область $0{,}011\leqslant\mu\leqslant 0{,}013$ с 21 эквидистантным значением. Приложение IД имеет 13 граф различных значений μ. Первые девять из них соответствуют планетам. Десятая и одиннадцатая дают ранее принятые и сравнительно недавно полученные (1965 г.) значения для системы Земля — Луна. Двенад-

цатая графа, «критическая», соответствует массовому параметру, который является граничным между линейно устойчивым движением и неустойчивым движением вокруг треугольных точек либрации, см. гл. 5. Последняя графа соответствует значению μ, которое применял Дж. Дарвин, см. гл. 9.

В приложениях даются значение массового параметра μ, положение коллинеарной точки либрации x_i, значение постоянной Якоби C_i и значения Ω_{xx} и Ω_{yy} — все в коллинеарных точках либрации. Ожидаемые ошибки в графах не должны превышать $\pm 0{,}5 \cdot 10^{-11}$.

На рис. 4.5 показаны абсциссы коллинеарных точек в функции от массового параметра.

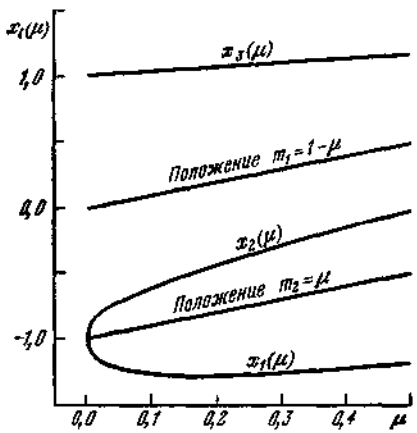


Рис. 4.5. Расположение коллинеарных точек равновесия в зависимости от μ.

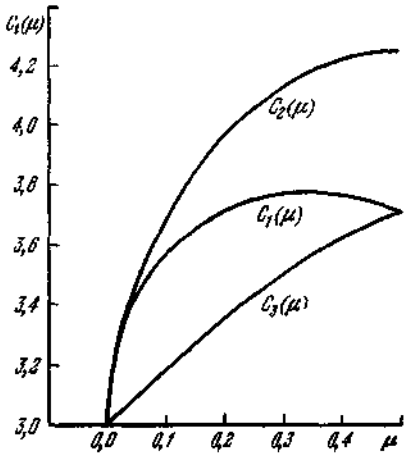


Рис. 4.6. Значения постоянных Якоби C_i в коллинеарных точках равновесия в зависимости от μ.

Особенности множества состояний движения связаны с решениями уравнений $\Omega_x=0$, $\Omega_y=0$, $2\Omega=C$. Полное решение задачи требует поэтому вычисления постоянной Якоби C в точках равновесия. Можно показать, что в треугольных точках $\Omega(L_4)=\Omega(L_5)=3/2$, независимо от значения параметра μ, так что $C(L_4)=C(L_5)=3$.

С помощью вычисленных значений $C(L_1)=C_1$, $C(L_2)=C_2$ и $C(L_3)=C_3$ на рис. 4.6 построены кривые, показывающие монотонное возрастание функций $C_2(\mu)$ и $C_3(\mu)$ и максимум ($C_1=3{,}769683$) функции $C_1(\mu)$, достигаемый при $\mu=0{,}334364$.

Затабулированные значения C_1, C_2 и C_3 в виде функций μ, как уже указывалось, приводятся в Приложениях I, II и III.

Эти таблицы для разных групп ученых могут представлять свой особый интерес. Например, астрономы и техники обычно стремятся применить имеющиеся формулы и результаты ограниченной задачи к реальным физическим условиям, тогда как математиков чаще интересует задача сама по себе. Значения массовых параметров планет, спутников, парных звезд и всех без исключения естественных и искусственных конфигураций известны с различной степенью точности, но, конечно, с бо́льшими ошибками, чем, например, в Приложениях ID, IID, IIID. Положения точек либрации имеют смысл только при соответствующих предположениях ограниченной задачи. В реальных физических условиях имеют место различные возмущения в ограниченной задаче и других задачах, поэтому может возникнуть вопрос о целесообразности приводимых значений $x(L_i)$ с точностью до десятого десятичного знака. Но, с другой стороны, любая вычисляемая периодическая орбита вокруг L_i с двойной разрядностью может нуждаться и более чем в десяти десятичных знаках для положения точек либрации.

Для приближенного построения кривых нулевой скорости вторые производные функции Ω не обязательно знать с точностью до десятого знака, однако любой подробный расчет вокруг коллинеарных точек либрации может потребовать значений наклонов с неменьшей точностью.

Для того чтобы найти значение какой-либо графы для значения μ, не указанного в таблицах, нужно решить алгебраическое уравнение пятой степени, в случае, когда корень дается приближенно из интерполяции. Требуемая точность при таких операциях зависит от самой рассматриваемой задачи. В физическом отношении соответствующая предельная точность, с какой известно значение μ, решения в форме рядов (22), (27) и (34) и, наконец, дополнительные таблицы вблизи значений $\mu=0{,}012$ и $\mu=0{,}0095$ дают основание считать, что таблицы, помещенные в Приложениях I, II и III, позволяют получить ответы на бо́льшую часть возникающих вопросов.

§ 4.6. Исследование функции $\Omega(x, y)$

Интеграл Якоби

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega(x, y)-C \tag{38}$$

дает возможность установить определенные области на плоскости xy, где может иметь место движение с заданными начальными условиями. Такого рода исследования основываются на простом факте, что величина левой части уравнения (38) всегда положительна. Поэтому для заданных начальных условий можно вычислить величину постоянной Якоби C и затем с помощью

кривой $2\Omega(x, y)=C$ установить нужную область. Этот простой принцип в приложении встречает трудности, значительно бо́льшие, чем в случае более сложных операций, поэтому он будет рассмотрен подробней в § 4.7, а также в § 4.8, посвященном приложениям.

Регуляризованная плоскость, конечно, также может быть использована для установления областей движения, так как условие для возможного движения там совсем простое: $\Omega^*\geqslant 0$.

Так как функция $\Omega(x, y)$ играет принципиальную роль в изучении областей возможного движения, то ниже мы перечислим основные ее свойства, а также приведем некоторые теоремы (пункты 4.6.1—4.6.10). Итак, укажем сначала основные свойства этой функции, а затем перейдем к разъяснениям и доказательствам.

Таблица свойств функции $\Omega(x, y)$

1. $\Omega(x, y)\geqslant 3/2$,
$\lim\limits_{r\to\infty}\Omega(x, y)=\lim\limits_{r_1\to 0}\Omega(x, y)=\lim\limits_{r_2\to 0}\Omega(x, y)=\infty$,
$\Omega(x, y)=\Omega(x, -y)$.
2. Абсолютные минимумы функции $\Omega(x, y)$ достигаются в точках L_4 и L_5; коллинеарные точки равновесия являются седловыми точками.
3. Наклон кривых нулевой скорости определяется отношением $S=-\Omega_x/\Omega_y$, исключая коллинеарные точки, для которых $S=\pm(-\Omega_{xx}/\Omega_{yy})^{1/2}$.
4. Минимумы функции $\Omega(x, 0)$ достигаются в коллинеарных точках.
5. $1{,}5=\Omega(L_{4,5})\leqslant\Omega(L_3)\leqslant\Omega(L_1)\leqslant\Omega(L_2)\leqslant 2{,}125$.
6. Если $\mu=0$, $x_1=x_2=-x_3=-1$ и $C_i=3$, $i=1, 2, \ldots, 5$.
7. $C_1=C_3=3{,}706796$, $C_2=(C_2)_{\max}=4{,}25$ и $x_1=-x_3=-1{,}198406$, $x_2=0$, когда $\mu=1/2$.
8. Функции $C_i(\mu)$ монотонно возрастают при $i=2$ или 3 и имеют максимум при $i=1$; $(C_1)_{\max}=3{,}769683$ при $\mu=0{,}334364$.
9. Расстояния между массами и коллинеарными точками равновесия $r_2(L_1)=\mu-1-x_1(\mu)$, $r_2(L_2)=x_2(\mu)+1-\mu$, и $r_1(L_3)=x_3(\mu)-\mu$ возрастают монотонно с увеличением μ в двух первых случаях и убывают в последнем. Кроме того, $r_2(L_1)\leqslant r_1(L_3)$, $r_2(L_2)\leqslant r_1(L_2)$ и $r_1(L_2)<r_1(L_3)$; знаки равенства соответствуют $\mu=1/2$. Здесь $r_i(L_j)$ есть расстояние между i-м основным телом и j-й коллинеарной точкой.
10. Расстояние между центром масс и второй коллинеарной точкой равновесия, $-x_2(\mu)$, монотонно убывает, расстояние между центром масс и третьей коллинеарной точкой равновесия, $x_3(\mu)$, монотонно возрастает и расстояние между первой коллинеарной точкой равновесия и центром масс,

$-x_1(\mu)$, имеет максимум $(-x_1)_{\max}=1{,}271630$ при $\mu=0{,}178944$.

4.6.1. Границы и свойство симметрии функции $\Omega(x, y)$. Первую часть первого пункта можно доказать, если функцию $\Omega(x, y)$ представить в виде

$$\Omega=\frac{3}{2}+(1-\mu)(r_1-1)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{r_1}\right)+\mu(r_2-1)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{r_2}\right). \quad (39)$$

Второй и третий члены положительны при $0<\mu\leqslant 1/2$, исключая случай, когда $r_1=r_2=1$, при котором они равны нулю и $\Omega_{\min}=\Omega(r_1=1, r_2=1)=3/2$.

Что касается верхнего предела функции $\Omega(x, y)$, то напомним, что в гл. 3 показывалось, что в местах расположения основных тел $\Omega\to\infty$.

Записывая $\Omega(x, y)$ в форме

$$\Omega=\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}\mu(1-\mu)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2},$$

видим, что $\Omega(x, y)\to\infty$, когда $r\to\infty$.

Последнее свойство первого пункта—симметрия функции $\Omega=\Omega(r_1, r_2)$ — следует из ее определения (уравнение (50), § 1.5), если вспомнить, что

$$r_1=[(x-\mu)^2+y^2]^{1/2}, \quad r_2=[(x-\mu+1)^2+y^2]^{1/2}.$$

Таким образом, $r_i(x, y)=r_i(x, -y)$ для $i=1, 2$, что доказывает то свойство, что кривые $\Omega=\text{const}$ симметричны относительно оси x.

Заметим, что, применяя преобразование Биркгофа, мы имеем

$$\Omega^*(u, v)=\Omega^*(u, -v),$$

что можно проверить с помощью уравнений (114) и (117), § 3.5.

4.6.2. Свойства функции Ω в точках равновесия. Первая часть второго пункта связана с пунктом 1, но здесь мы докажем ее более формальным способом, посредством вычисления гессиана в коллинеарных и треугольных точках.

Вычисленные ранее функции Ω_x и Ω_y можно записать в виде

$$\Omega_x=x-\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3}-\frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}=g(x, y) \quad (40)$$

и

$$\Omega_y=y\left[1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}\right]=yf(x, y). \quad (41)$$

Заметим, что в треугольных точках

$$r_1=r_2=1, \quad y\neq 0, \quad f(L_{4,5})=g(L_{4,5})=0.$$

Вторые производные от Ω будут равны $\Omega_{xx}=g_x$, $\Omega_{xy}=g_y=yf_x$, $\Omega_{yy}=yf_y+f$, а в треугольных точках эти производные принимают значения $\Omega_{xx}=g_x(L_{4,5})$, $\Omega_{xy}=\pm(3^{1/2}/2)f_x(L_{4,5})$,

$\Omega_{yy} = \pm(3^{1/2}/2) f_y(L_{4,5})$; положительный знак здесь относится к L_4, а отрицательный — к L_5.

Частные производные от g и f равны

$$g_x(L_{4,5}) = \frac{3}{4}, \quad f_x(L_{4,5}) = 3\left(\mu - \frac{1}{2}\right), \quad f_y(L_{4,5}) = \pm 3\frac{3^{1/2}}{2}.$$

Подставляя их в верхние равенства, получаем

$$\Omega_{xx}(L_{4,5}) = \frac{3}{4}, \quad \Omega_{xy}(L_{4,5}) = \pm 3\frac{3^{1/2}}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}\right), \quad \Omega_{yy}(L_{4,5}) = \frac{9}{4}.$$

Гессиан вторых производных равен

$$H(L_{4,5}) = \begin{vmatrix} \Omega_{xx} & \Omega_{xy} \\ \Omega_{xy} & \Omega_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \pm 3\frac{3^{1/2}}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}\right) \\ \pm 3\frac{3^{1/2}}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}\right) & \frac{9}{4} \end{vmatrix} = \frac{27}{4}\mu(1-\mu). \tag{42}$$

Так как $\Omega_{xx} > 0$ и $H(L_{4,5}) > 0$, исключая не интересующие нас случаи $\mu = 0$ и $\mu = 1$, то можем заключить, что в точках L_4 и L_5 функция $\Omega(x, y)$ имеет минимум. Действительно, $\Omega(L_{4,5}) = 3/2$ для любого значения μ.

Седловые точки поверхности $z = \Omega(x, y)$ могут быть найдены посредством вычисления гессиана в коллинеарных точках. Вычисляя вторые производные из уравнений (40) и (41), получаем вдоль оси x

$$\Omega_{xx} = g_x(x, 0) = 1 + \frac{2(1-\mu)(x-\mu)^2}{r_1^5} + \frac{2\mu(x+1-\mu)^2}{r_2^5}, \tag{43}$$

$$\Omega_{yy} = f(x, 0) = 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}, \tag{44}$$

$$\Omega_{xy} = y f_x(x, 0) = 0. \tag{45}$$

В первой коллинеарной точке $x - \mu = -r_1$ и $x + 1 - \mu = -r_2$; таким образом,

$$g_x(x_1, 0) = 1 + \frac{2(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{2\mu}{r_2^3} > 0. \tag{46}$$

Кроме того, во всех коллинеарных точках, разумеется, $g(x_i, 0) = 0$, так что

$$\mu - r_1 + \frac{1-\mu}{r_1^2} + \frac{\mu}{r_2^2} = 0. \tag{47}$$

Уравнение (44) можно записать в форме

$$f(x, 0) = 1 - \frac{1-\mu}{r_1^2}\frac{1}{r_1} - \frac{\mu}{r_2^3},$$

и, выражая $(1-\mu)\,r_1^{-2}$ из уравнения (47), получаем

$$f(x_1, 0)=1-\frac{1}{r_1}(r_1-\mu-\mu/r_2^2)-\mu/r_2^3$$

или

$$f(x_1, 0)=\mu\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1 r_2^2}-\frac{1}{r_2^3}\right)=\frac{\mu}{r_1}\left(1+\frac{1}{r_2^2}-\frac{r_1}{r_2^3}\right)$$

или, наконец,

$$f(x_1, 0)=\frac{\mu}{r_1}(1-1/r_2^3). \tag{48}$$

Так как $r_2<1$, то $f(x_1, 0)<0$.

Гессиан равен $H(L_1)=g_x(x_1, 0)\ f(x_1, 0)<0$, откуда следует, что L_1 является седловой точкой.

Для L_2 и L_3 исследование проводится совершенно аналогичным образом, и никаких новых проблем здесь не возникает.

Эти же результаты можно выразить посредством индикатрисы. Индикатриса Дюпена поверхности $z=\Omega(x, y)$ в заданной точке представляет собой эллипс, гиперболу или параболу, в зависимости от знака гауссовой кривизны K поверхности в этой точке. Если главные кривизны поверхности в заданной точке обозначить через $C_1=1/R_1$ и $C_2=1/R_2$, где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны, то будем иметь

$$K=C_1C_2=\frac{\Omega_{xx}\Omega_{yy}-\Omega_{xy}^2}{(\Omega_x^2+\Omega_y^2+1)^2}.$$

Средняя кривизна равна

$$M=\frac{1}{2}(C_1+C_2)=\frac{(1+\Omega_y^2)\,\Omega_{xx}-2\Omega_x\Omega_y\Omega_{xy}+(1+\Omega_x^2)\,\Omega_{yy}}{2(\Omega_x^2+\Omega_y^2+1)^{3/2}}.$$

Следовательно, кривизны C_1 и C_2 могут быть получены из квадратного уравнения

$$C^2-2MC+K=0.$$

Точку поверхности называют эллиптической, гиперболической или параболической, в зависимости от того, является ли в ней кривизна K величиной положительной, отрицательной или равной нулю.

В пяти точках либрации $\Omega_x=\Omega_y=0$, так что гауссова кривизна принимает форму гессиана

$$K=\Omega_{xx}\Omega_{yy}-\Omega_{xy}^2=H.$$

Средняя кривизна в точках равновесия равна

$$M=\frac{1}{2}(\Omega_{xx}+\Omega_{yy}).$$

Гауссова кривизна в треугольных точках либрации положительна, а в коллинеарных точках она всегда отрицательна. Сред-

няя кривизна в треугольных точках равна 3/2, в коллинеарных точках она всегда положительна.

Коллинеарные точки являются гиперболическими, и индикатрисы Дюпена в этих точках представляют собой гиперболы. Треугольные точки являются эллиптическими точками, и индикатрисы Дюпена представляют собой эллипсы, а поверхность $z=\Omega(x, y)$ опирается на одну сторону ее касательной плоскости в этих точках.

Задача 1. Покажите, что когда $\mu \to 0$,

$$\Omega_{xx}(L_1) \to 9, \quad \Omega_{xx}(L_2) \to 9, \quad \Omega_{xx}(L_3) \to 3,$$
$$\Omega_{yy}(L_1) \to -3, \quad \Omega_{yy}(L_2) \to -3, \quad \Omega_{yy}(L_3) \to 0.$$

Задача 2. Покажите, что когда $\mu = 1/2$,

$$\Omega_{xx}(L_2) = 17 \text{ и } \Omega_{yy}(L_2) = -7.$$

Задача 3. Покажите, что когда рассматриваются три коллинеарные точки равновесия, $\Omega_{xy}=0{,}17 \geqslant \Omega_{xx} \geqslant 3$ и $-7 \leqslant \Omega_{yy} \leqslant 0$ в области $0 \leqslant \mu \leqslant 1/2$.

4.6.3. Наклоны кривых нулевой скорости. Кривые $\Omega = \text{const}$ пересекаются только в коллинеарных (особых) точках множества.

Наклоны кривых $\Omega = \text{const}$ во всех точках, кроме особых, вычисляются по формуле

$$S = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\Omega_x(x, y)}{\Omega_y(x, y)} \tag{49}$$

или

$$S = -\frac{g(x, y)}{yf(x, y)}. \tag{50}$$

Наклоны в особых коллинеарных точках вычисляются посредством разложения в ряд около точек либрации $(x_L, 0)$, так как в этом случае $g=0$ и $y=0$.

Ряд Тейлора функции $\Omega(x, y)$ около $x=x_L$ и $y=0$ записывается в виде

$$\Omega(x, y) = \Omega(x_L, 0) + \Omega_x(x_L, 0)(x - x_L) + \Omega_y(x_L, 0)\, y + \frac{1}{2}\Omega_{xx}(x_L, 0)(x - x_L)^2 + \Omega_{xy}(x_L, 0)(x - x_L)\, y + \frac{1}{2}\Omega_{yy}(x_L, 0)\, y^2 + \ldots . \tag{51}$$

В этом разложении $\Omega_x(x_L, 0) = \Omega_y(x_L, 0) = \Omega_{xy}(x_L, 0) = 0$, поскольку точка $(x_L, 0)$ является коллинеарной точкой равновесия. Полагая теперь $x = x_L + \Delta x$ и $y = \Delta y$, получаем

$$\Omega(x_L + \Delta x, \Delta y) = \Omega(x_L, 0) + \frac{1}{2}\Omega_{xx}(x_L, 0)(\Delta_x)^2 + \frac{1}{2}\Omega_{yy}(x_L, 0)(\Delta y)^2 + \ldots .$$

В пределе будем иметь

$$S=\frac{dy}{dx}=\pm\left(\frac{-\Omega_{xx}(x_L, 0)}{\Omega_{yy}(x_L, 0)}\right)^{1/2}=\pm\left(\frac{-g_x(x_L, 0)}{f(x_L, 0)}\right)^{1/2}. \quad (52)$$

Другой путь, приводящий к этому результату, требует вычисления $\Omega_x(x, y)$ и $\Omega_y(x, y)$ посредством взятия частных производных функции $\Omega(x, y)$, как это делалось в формуле (51), и подстановки полученных результатов в уравнение (49):

$$\begin{aligned}\Omega_x(x, y)&=\Omega_x(x_L, 0)+\Omega_{xx}(x_L, 0)(x-x_L)+\Omega_{xy}(x_L, 0)y+\ldots,\\ \Omega_y(x, y)&=\Omega_y(x_L, 0)+\Omega_{yy}(x_L, 0)y+\Omega_{xy}(x_L, 0)(x-x_L)+\ldots\end{aligned} \quad (53)$$

или

$$\begin{aligned}\Omega_x(x, y)&=\Omega_{xx}(x_L, 0)(x-x_L)+\ldots,\\ \Omega_y(x, y)&=\Omega_{yy}(x_L, 0)y+\ldots\end{aligned}$$

Полагая теперь $x-x_L=\Delta x$ и $y=\Delta y$, получаем снова уравнение (52).

Так как $f(x_i, 0)<0$ и $g_x(x_i, 0)>0$ для $i=1, 2, 3$, то S является действительным. В Приложениях I, II и III помимо положений коллинеарных точек либрации и значений постоянных Якоби приводятся также вторые частные производные, необходимые для вычисления наклонов.

4.6.4. Функция $\Omega(x, 0)$. Сначала покажем, что в областях, где располагаются соответственные коллинеарные точки, минимумы функции $\Omega(x, 0)$ достигаются в коллинеарных точках либрации. Для этого нам потребуется выражение

$$\Omega(x, 0)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\mu(1-\mu)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}. \quad (54)$$

Оно следует из определения функции $\Omega(x, y)$. Здесь $r_1(x)$ и $r_2(x)$ в трех интересующих нас случаях определяются различным образом, как было показано выше. Заметим, что в особых точках $r=0$ и $r_2=0$, $\Omega(x, 0)\to\infty$. Кроме того, из уравнения (54) следует, что $\Omega(x, 0)>0$. И наконец, $\Omega(x, 0)\to x^2/2\to\infty$, когда $x\to\pm\infty$.

Из уравнения (54) имеем

$$\frac{d\Omega(x, 0)}{dx}=x-\frac{1-\mu}{r_1^2}\frac{dr_1}{dx}-\frac{\mu}{r_2^2}\frac{dr_2}{dx} \quad (55)$$

и

$$\frac{d^2\Omega(x, 0)}{dx^2}=1+\frac{2(1-\mu)}{r_1^3}\left(\frac{dr_1}{dx}\right)^2+\frac{2\mu}{r_2^3}\left(\frac{dr_2}{dx}\right)^2>1. \quad (56)$$

Так как вторая производная всюду положительна, то условие

$$\frac{d\Omega(x, 0)}{dx}=0$$

дает минимум. Следует заметить, что при вычислении $d^2\Omega/dx^2$ вторые производные от r_1 и r_2 равны нулю.

Теперь в области 1, слева от m_2, имеем $r_1=\mu-x$, $r_2=\mu-x-1$ и, следовательно, $dr_1/dx=dr_2/dx=-1$. Из уравнения (55) получаем

$$\frac{d\Omega(x, 0)}{dx}=x+\frac{1-\mu}{r_1^2}+\frac{\mu}{r_2^2}, \tag{57}$$

и, таким образом, положение минимума вычисляется из заданного заранее уравнения для x_1 (сравните с уравнением (17)).

В области 2, между m_1 и m_2, имеем $r_1=\mu-x$, $r_2=1-\mu+x$ и, следовательно, $dr_1/dx=-dr_2/dx=-1$. Из уравнения (55) находим

$$\frac{d\Omega(x, 0)}{dx}=x+\frac{1-\mu}{r_1^2}-\frac{\mu}{r_2^2}. \tag{58}$$

Здесь мы опять ссылаемся на уравнение (24), определяющее x_2 как положение минимума функции Ω в этой области.

В области 3, справа от m_1, имеем $r_1=x-\mu$, $r_2=1+x-\mu$, так что $dr_1/dx=dr_2/dx=1$. Из уравнения (55) получаем

$$\frac{d\Omega(x, 0)}{dx}=x-\frac{1-\mu}{r_1^2}-\frac{\mu}{r_2^2}. \tag{59}$$

Сравнивая этот результат с уравнением (29), завершаем доказательство того, что функция $\Omega(x, 0)$ имеет минимум в положениях x_1, x_2, x_3.

На рис. 4.7 показана функция $C=2\Omega(x, 0)$ для нескольких значений μ; в Приложении IV даются соответствующие численные значения.

Значение $\mu=0{,}5$ соответствует симметричному случаю относительно оси C (рис. 4.7,*а*). С уменьшением μ от 0,5 до 0 асимметрия увеличивается. На рис. 4.7,*г* минимумы, соответствующие L_1 и L_2, близки друг к другу, а также к асимптоте, расположенной в $x=\mu-1=-0{,}99$.

Приложение IV составлено для $\mu=10^{-6}$, $\mu=10^{-5}$, $\mu=10^{-4}$, $\mu=10^{-3}$, $\mu=10^{-2}$, $\mu=0{,}1$, $\mu=0{,}2$, $\mu=0{,}3$, $\mu=0{,}4$ и $\mu=0{,}5$. Ошибка в значениях C, приведенных в Приложении IV, не превышает $\pm 5\cdot 10^{-11}$. Здесь нужно сделать следующее замечание. В точках $x=\mu$ и $x=\mu-1$, где расположены основные тела, $C=\infty$, как видно из таблицы. Для малых значений μ вычисление постоянной Якоби для $x=0$ и $x=-1$ может быть выполнено посредст-

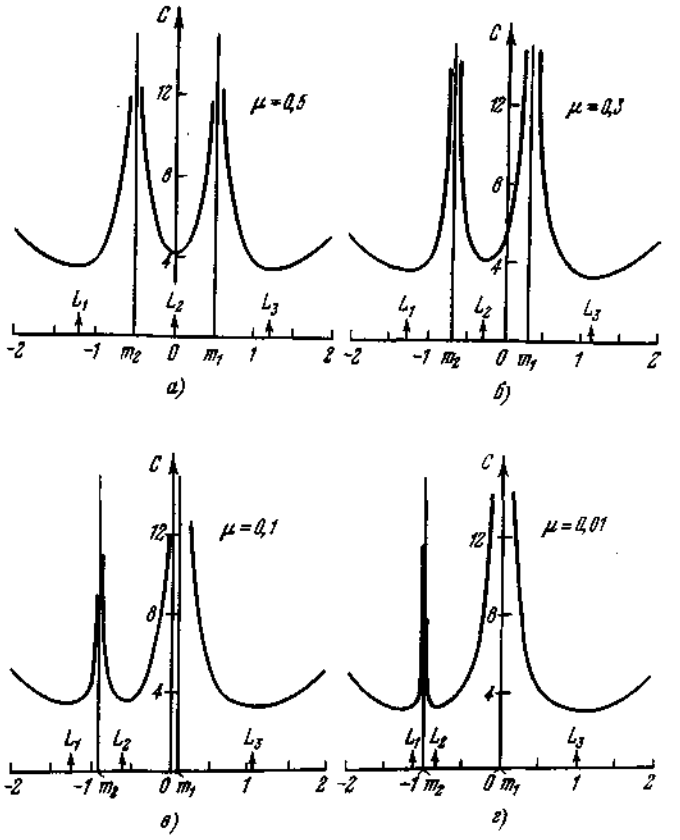


Рис. 4.7. Постоянная Якоби вдоль оси x.

вом разложения в ряд. Из уравнения (54) при $r_1=1+\mu$ и $r_2=\mu$ имеем

$$C(-1, 0)=3+\mu-\mu^2+2\frac{1-\mu}{1+\mu}$$

или

$$C(-1, 0)=5-3\mu(1-\mu)+4\sum_{n=3}^{\infty}(-\mu)^n.$$

Вычисление для $x=0$ проводится иначе, так так уравнение (54) в этом случае дает

$$C(0, 0)=\mu-\mu^2+\frac{2(1-\mu)}{\mu}+\frac{2\mu}{1-\mu}.$$

Отсюда

$$C(0, 0)=\frac{2}{\mu}-2+3\mu+\mu^2+2\sum_{n=3}^{\infty}\mu^n.$$

Для малых значений μ имеем

$$C(0, 0)\approx\frac{2}{\mu} \quad \text{и} \quad C(-1, 0)\approx 5-3\mu.$$

Значения C, приведенные в Приложении IV, соответствующие $C(0, 0)$, равны просто $2/\mu$, так как при составлении этого приложения не указывались точные значения $C(0, 0)$. Эти приближенные значения $C(0, 0)$ в Приложении IV даны со знаком $\sim$. Ошибка в значении C в окрестности $x=-1$, $y=0$ та же, что и в других графах: $\pm 5\cdot 10^{-11}$. Область $-3\leqslant x\leqslant 3$ содержит 80 значений для каждого указанного значения μ, за исключением $\mu=1/2$, для которого вследствие симметрии дана только область $0\leqslant x\leqslant 3$.

4.6.5. Значения функции $\Omega(x, y)$ в точках равновесия. Четыре различные значения функции $\Omega(x, y)$ в пяти точках равновесия располагаются в следующем порядке:

$$1{,}5=\Omega(L_4)=\Omega(L_5)\leqslant\Omega(L_3)<\Omega(L_1)\leqslant\Omega(L_2)\leqslant 2{,}125. \qquad (60)$$

Следовательно, соответствующие значения постоянной Якоби удовлетворяют следующим неравенствам:

$$3=C_4=C_5\leqslant C_3<C_1\leqslant C_2\leqslant 4{,}25. \qquad (61)$$

Так как ранее было показано, что функция Ω достигает своего абсолютного минимума в точках L_4 и L_5, то первую часть неравенства можно считать доказанной. Вторая часть относится к коллинеарным точкам равновесия, которые расположены на оси x, и, следовательно, неравенства (60) можно переписать в виде

$$1{,}5\leqslant\Omega(x_3, 0)\leqslant\Omega(x_1, 0)\leqslant\Omega(x_2, 0)\leqslant 2{,}125,$$

где x_1, x_2, x_3 суть абсциссы коллинеарных точек равновесия.

Сначала покажем, что $\Omega(\mu+\alpha, 0)<\Omega(\mu-\alpha, 0)$, где $0<\alpha<1$. Так как

$$\Omega(\mu+\alpha, 0)=\frac{1}{2}(\mu+\alpha)^2+\frac{\mu}{2}(1-\mu)+\frac{1-\mu}{\alpha}+\frac{\mu}{1+\alpha}$$

и

$$\Omega(\mu-\alpha, 0)=\frac{1}{2}(\mu-\alpha)^2+\frac{\mu}{2}(1-\mu)+\frac{1-\mu}{\alpha}+\frac{\mu}{1-\alpha},$$

то имеем

$$\Omega(\mu-\alpha, 0)-\Omega(\mu+\alpha, 0)=\frac{2\mu}{1-\alpha^2}(\alpha^2-\alpha+1)>0,$$

ибо дискриминант квадратичной формы отрицателен. Кроме того, $\Omega(x_3, 0)<\Omega(\mu+\alpha, 0)$ при условии, что $0<\alpha<x_3-\mu$, так как минимум функции $\Omega(x, 0)$ в области $\mu<x<\infty$ находится в точке x_3. Далее, $x_3-\mu>\mu-x_2$ или $r_1(L_3)>r_1(L_2)$. Следовательно, если $\mu-\alpha=x_2$, то мы имеем $\Omega(x_3, 0)<\Omega(x_2, 0)$, что является частью нашего утверждения. Неравенство $\Omega(x_1, 0)<\Omega(x_2, 0)$ проверяется аналогичным образом. Используемое для этого доказательства неравенство $r_1(L_3)>r_1(L_2)$ будет выведено в пункте 4.6.9.

4.6.6. Предельные значения в случае, когда $\mu=0$. Уравнения (57), (58) и (59) с правой частью, приравненной нулю, можно оценить при $\mu=0$. Критический член в предельном процессе, когда используются уравнения (57) и (58), равен

$$\varphi=\lim_{\mu\to 0}\frac{\mu}{[\mu-x_i(\mu)-1]^2}, \qquad i=1, 2.$$

Однако значение φ, как можно видеть, равно нулю, и для вычисления предела нужно воспользоваться правилом Лопиталя, так как $|dx_i/d\mu|$ и $|dx_i/d\mu||\mu-x_i-1|\to\infty$, когда $\mu\to 0$, для $i=1, 2$.

То, что $x_3\to 1$, когда $\mu\to 0$, можно получить непосредственно из уравнения (59) без каких-либо критических членов. В этом случае первая часть утверждения 6 относительно положений коллинеарных точек равновесия при $\mu\to 0$ может быть установлена, за исключением проверки пределов, касающихся производной $dx_i/d\mu$.

Эти пределы можно получить из уравнений (22) и (27) следующим образом. Для $i=1$ и 2 имеем $x_i=\mu-1+\xi^{(i)}(-1)^i$ (обозначения см. в пунктах А и Б § 4.4).

Следовательно,

$$\frac{dx_i}{d\mu}=1+\frac{d\xi^{(i)}}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}(-1)^i.$$

Символ

$$\nu=[\mu/3(1-\mu)]^{1/3}$$

был введен нами в § 4.4. Так как

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{d\nu}{d\mu}=\lim_{\mu\to 0}[3\mu^{1/2}(1-\mu)]^{-4/3}=\infty$$

и

$$\lim_{\substack{\mu\to 0\\(\nu\to 0)}}\frac{d\xi^{(i)}}{d\nu}=1,$$

то

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{dx_i}{d\mu}=(-1)^i\infty, \qquad i=1, 2.$$

Заметим, что результат $dx_3/d\mu = 5/12$ можно легко получить из пункта В § 4.4; в самом деле,

$$\frac{dx_3}{d\mu} = 1 + \frac{d\eta}{d\mu} = 1 - \frac{7}{12} + O(\mu^2),$$

и при $\mu = 0$ получаем $dx_3/d\mu = 5/12$.

Вторая часть утверждения 6 касается значения постоянной Якоби в точках равновесия, когда $\mu \to 0$. Предельный процесс дает $\Omega(L_i) = \Omega(x_i, 0) = {}^3/_2$ для $i = 1, 2, 3$, при использовании уравнения (54), и $\Omega(L_i) = {}^3/_2$ для $i = 4, 5$, при использовании уравнения (39).

Единственный входящий критический член равен

$$\overline{\varphi} = \lim_{\mu \to 0} \frac{(-1)^i \mu}{1 - \mu + x_i(\mu)}.$$

Его можно рассматривать как предел, подобный предыдущему пределу φ.

4.6.7. Предельные значения в случае, когда $\mu = 1/2$. Сначала покажем, что $x_1 = -x_3$, когда $\mu = 1/2$. Полагая в уравнениях (17) и (29) $\mu = 1/2$, находим

$$x_1 + \frac{1/2}{(x_1 - 1/2)^2} + \frac{1/2}{(x_1 + 1/2)^2} = 0 \tag{62}$$

и

$$x_3 - \frac{1/2}{(x_3 - 1/2)^2} - \frac{1/2}{(x_3 + 1/2)^2} = 0 \tag{63}$$

и, следовательно, $x_1 = -x_3$.

Что касается значения $x_2(1/2)$, то обратимся к уравнению пятой степени относительно ξ, приведенному в пункте Б, § 4.4. При $\mu = 1/2$ и $\xi = \xi^{(2)} = 1/2 + x_2$ оно принимает вид

$$2\xi^5 - 5\xi^4 + 4\xi^3 - \xi^2 + 2\xi - 1 = 0$$

или

$$(\xi - 1/2)\left[\xi^2(\xi - 1)^2 + 1\right] = 0.$$

Следовательно, единственный вещественный корень равен $\xi = {}^1/_2$ и, стало быть, $x_2 = 0$.

Положение первой точки равновесия для $\mu = {}^1/_2$ можно вычислить из уравнения (62) или из равенства $x_1 = -1{,}2 + \eta$, где приближенное значение η (с точностью до восьмого десятичного знака) равно меньшему положительному корню уравнения

$$14{,}48\eta^2 - 5{,}8705\eta + 0{,}00932 = 0.$$

Из соображений симметрии заключаем, что при $\mu = 1/2$ $C_1 = C_3$. Действительно, из уравнения (54) имеем

$$C_1 = 2\Omega(x_1, 0) = 2\Omega(x_3, 0) = C_3,$$

так как

$$2\Omega(x_1, 0) = x_1^2 + \frac{1}{4} + \frac{2}{1-2x_1} - \frac{2}{1+2x_1},$$
$$2\Omega(x_3, 0) = x_3^2 + \frac{1}{4} + \frac{2}{2x_3-1} + \frac{2}{2x_3+1} \qquad (64)$$

и $x_3 = -x_1$.

Последняя часть утверждения 7, касающаяся максимального значения C_2, имеющего место при $x_2=0$ и соответственно при $\mu = 1/2$, доказывается следующим образом. Полная производная от $C_2/2 = \Omega(x_2, 0)$ по массовому параметру равна

$$\frac{d\Omega(x_2, 0)}{d\mu} = \frac{\partial\Omega(x_2, 0)}{\partial\mu} + \frac{\partial\Omega(x_2, 0)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\mu}, \qquad (65)$$

где

$$\frac{\partial\Omega(x_2, 0)}{\partial x_2} = 0 \qquad (66)$$

и

$$\frac{\partial\Omega(x_2, 0)}{\partial\mu} = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + (1-\mu)\left(r_1 - \frac{1}{r_1^2}\right)\frac{\partial r_1}{\partial\mu} + \\ + \mu\left(r_2 - \frac{1}{r_2^2}\right)\frac{\partial r_2}{\partial\mu}. \qquad (67)$$

Уравнение (66) устанавливает, что x_2 есть абсцисса коллинеарной точки равновесия, а уравнение (67) следует из первоначального определения функции Ω. В области 2 имеем $r_1 = \mu - x$ и $r_2 = 1 - \mu + x$, поэтому уравнение (67) можно записать в виде

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}, \qquad (68)$$

так как, согласно уравнению (58),

$$\frac{d\Omega(x_2, 0)}{dx_2} = (1-\mu)\left(\frac{1}{r_1^3} - r_1\right) + \mu\left(r_2 - \frac{1}{r_2^2}\right) = 0.$$

Наконец, имеем

$$\frac{\partial\Omega(x_2, 0)}{\partial\mu} = (1-2r_1) - \frac{r_1 - r_1^2 - 2}{2r_1(1-r_1)} = f(r_1). \qquad (69)$$

Здесь использовано соотношение $r_1 + r_2 = 1$, справедливое во второй области, а также условие $1/2 < r_1 \leqslant 1$ для $0 < \mu \leqslant 1/2$.

Единственный вещественный корень уравнения $f(r_1) = 0$ равен $r_1 = 1/2$, так как всюду $r_1 - r_1^2 - 2 < 0$. Функция $f(r_1)$ меняет знак при $r_1 = 1/2$ с положительного на отрицательный, при убывании r_1, т. е. при возрастании μ. Следовательно, функция $\Omega(x_2, 0)$ имеет максимум при $\mu = 1/2$. Это максимальное значение можно

вычислить из уравнения (54):

$$\Omega(x_2, 0) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu) + \frac{1-\mu}{\mu - x_2} + \frac{\mu}{1-\mu+x_2}, \qquad (70)$$

и, следовательно, когда $\mu = 1/2$ и $x_2 = 0$, мы имеет $\Omega(0, 0) = 2{,}125$ и $(C_2)_{\max} = 4{,}25$.

4.6.8. Свойства функции $C_i(\mu)$. Сначала покажем, что функции $\Omega[x_2(\mu), 0]$ и $\Omega[x_3(\mu), 0]$ монотонно возрастают и, следовательно, то же самое имеет место для функций $C_i(\mu)$ при $i = 2, 3$.

Возвращаясь к функции $f(r_1)$, определяемой уравнением (69), замечаем, что она всюду положительна и конечна в области $0 < \mu < 1/2$ или, что эквивалентно, когда $1/2 < r_1 < 1$, так как $1 - 2r_1 < 0$, $r_1 - r_1^2 - 2 < 0$, $r_1 > 0$ и $1 - r_1 > 0$. Следовательно, C_2 монотонно возрастает с μ. При верхнем и нижнем значениях неравенств имеем $f(r_1) \to \infty$, когда $\mu \to 0$, $r_1 \to 1$, и $f(r_1) = 0$, когда $\mu = 1/2$, $r_1 = 1/2$.

Утверждение, что $\Omega(x_3, 0)$ есть монотонно возрастающая функция, можно проверить, оценив снова уравнение (68), на этот раз при $r_1 + 1 = r_2$. При этом получаем

$$\frac{\partial \Omega(x_3, 0)}{\partial \mu} = \frac{r_1(1+r_1)(1+2r_1) - 2}{2r_1(1+r_1)} = g(r_1). \qquad (71)$$

Так как $r_1 = x_3 - \mu$ и $x_3 = 1$, когда $\mu = 0$, то при $\mu = 0$ имеем $r_1 = 1$. Аналогично, так как $x_3 > 1{,}1$, когда $\mu = 1/2$, то для этого значения μ мы имеем $r_1 > 0{,}6$. Следовательно, в области $0 \leqslant \mu \leqslant 1/2$ мы имеем $0{,}6 < r_1 \leqslant 1$. Знаменатель функции $g(r_1)$, определяемой уравнением (71), всегда положителен, а числитель ее есть монотонно возрастающая фуикция от r_1 в области $0{,}6 < r_2 \leqslant 1$. При $r_1 = 0{,}6$ этот числитель положителен. Следовательно, во всей области функция $g(r_1)$ положнтельна и, стало быть, $\Omega(x_3, 0)$ есть монотонно возрастающая функция μ.

Для того чтобы определить максимальное значение $\Omega(x_1, 0)$ как функции μ, воспользуемся уравнением (68) с $r_1 = 1 + r_2$. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial \Omega(x_1, 0)}{\partial \mu} = \frac{2 - r_2(1+r_2)(1+2r_2)}{2r_2(1+r_2)} = -g(r_2). \qquad (72)$$

Так как теперь (в первой области, слева от m_2) $r_2 = \mu - x_1 - 1$, то будем иметь для $\mu = 0$: $x_1 = -1$ и $r_2 = 0$, а для $\mu = 1/2$: $x_1 > -1{,}2$ и $r_2 < 0{,}7$. Следовательно, области изменения μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 1/2$, соответствует следующая область изменения r_2: $0 < r_2 \leqslant 0{,}7$. Выражение третьей степени, стоящее в числителе левой части уравнения для $-g(r_2)$ (уравнение (72)), имеет только один положительный корень: $r_2 = 0{,}583156$. Соответствующее значение μ можно получить из уравнения (57):

$$\mu - 1 - r_2 + \frac{1-\mu}{(1+r_2)^2} + \frac{\mu}{r_2^2} = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$\mu = \frac{r_2^3(r_2^2+3r_2+3)}{r_2^4+2r_2^3+r_2^2+2r_2+1}. \tag{73}$$

Подставляя численное значение r_2, получаем $\mu=0{,}334364$.

Максимальное значение функции $\Omega(x_1, 0)$ можно вычислить из уравнения (54), подставив в него критические значения r_2 и μ.

Использованные выше значения $x_3>1{,}1$ и $x_1>-1{,}2$ применимы для $\mu=1/2$. Доказательство основывается на уравнениях (18) и (32), § 4.4. В любом случае уравнение для определения положения первой или третьей коллинеарной точки при $\mu=1/2$ принимает вид

$$F(\xi)=\xi^5+2{,}5\xi^4+2\xi^3-0{,}5\xi^2-\xi-0{,}5=0.$$

Для L_1 имеем $-x_1=\xi+1/2$, а для L_3 имеем $x_3=\xi+1/2$. Таким образом, приведенные раньше два неравенства можно записать в виде одного условия $0{,}6<\xi<0{,}7$. Заметим, что уравнение $F(\xi)=0$ имеет только один положительный корень между 0,6 и 0,7, так как $F(0{,}6)<0$, а $F(0{,}7)>0$.

4.6.9. Свойства расстояний между основными телами и точками равновесия. Сначала установим свойство монотонного изменения расстояний.

Пусть $r_i(L_j)$ будет расстоянием между i-м основным телом и j-й коллинеарной точкой равновесия. Тогда $r_2(L_1)=\mu-x_1-1$, $r_2(L_2)=x_2+1-\mu$ и $r_1(L_3)=x_3-\mu$. На основании этих равенств и первой части утверждения 9 устанавливаем, что комбинации $i=2$, $j=1$, 2 дают монотонно возрастающие функции от μ, а комбинация $i=1$, $j=3$ приводит к монотонно убывающей функции.

Для того чтобы показать это, исключим сначала r_1 и x из уравнения (57), воспользовавшись равенствами $r_1=1+r_2$ и $x=\mu-1-r_2$. Это дает тождество относительно μ, справедливое в первой области, слева от m_2. Заметим, что здесь $r_2=r_2(\mu)$. Уравнение для r_2 будет иметь вид

$$\mu-1-r_2+\frac{1-\mu}{(1+r_2)^2}+\frac{\mu}{r_2^2}=0.$$

Дифференцируя по μ, получаем $r_2'=dr_2/d\mu$:

$$r_2'=\frac{1+1/r_2^2-1/(1+r_2)^2}{1+2(1-\mu)/(1+r_2)^3+2\mu/r_2^3}. \tag{73a}$$

Так как $r_2>0$, то $(1+r_2)^{-2}<r^{-2}{}_2$ и, стало быть, $r'_2>0$. Следовательно, функция $r_2(\mu)$ монотонно возрастает.

Для того чтобы доказать, что вторая комбинация $(i=j=2)$ тоже дает монотонно возрастающую функцию, исключим r_1 и x

из уравнения (58), воспользовавшись равенствами $r_1=1-r_2$ и $x=r_2-1+\mu$. Уравнение для r_2 будет иметь вид

$$r_2-1+\mu+\frac{1-\mu}{(1-r_2)^2}-\frac{\mu}{r_2^2}=0.$$

Дифференцируя, получаем

$$r_2'=\frac{-1+1/r_2^2+1/(1-r_2)^2}{1+2(1-\mu)/(1-r_2)^3+2\mu/r_2^3}. \qquad (73б)$$

Так как $0<r_2<1/2$, то числитель больше семи и, следовательно, $r_2'>0$. Таким образом, функция $r_2(\mu)$ монотонно возрастает.

И наконец, чтобы убедиться, что функция $r_1(L_3)$, определяемая третьей комбинацией, монотонно убывает, рассмотрим уравнение (59) при $x=r_1+\mu$ и $r_2=1+r_1$:

$$r_1+\mu-\frac{1-\mu}{r_1^2}-\frac{\mu}{(1+r_1)^2}=0.$$

Дифференцируя, находим

$$r_1'=\frac{1/(1+r_1)^2-1/r_1^2-1}{1+2(1-\mu)/r_1^3+2\mu/(1+r_1)^3}. \qquad (73в)$$

Отсюда на основании той же аргументации, какой мы пользовались в предыдущем случае $r_2(L_1)$, заключаем, что $r'_1<0$. Следовательно, функция $r_1(\mu)$ монотонно убывает.

Теперь обратимся ко второй части утверждения 9, касающейся неравенств $r_2(L_1)\leqslant r_1(L_3)$, $r_2(L_2)<r_1(L_2)$ и $r_1(L_2)<r_1(L_3)$ для $0<\mu\leqslant 1/2$. Сначала заметим, что $r_1(L_2)=r_2(L_2)=1/2$, когда $\mu=1/2$, и $r_1(L_2)+r_2(L_2)=1$, когда $0\leqslant\mu<1/2$. Для доказательства второе из трех неравенств перепишем в виде $r_2(L_2)\leqslant 1-r_2(L_2)$ или $r_2(L_2)\leqslant 1/2$. Но выше мы показали, что при увеличении μ от 0 до $1/2$ функция $r_2(L_2)$ монотонно возрастает. Следовательно, $r_2(L_2)$ достигает своего наибольшего значения при $\mu=1/2$, что и требовалось доказать.

Доказательство первого неравенства можно провести аналогичным образом. Заметим сначала, что когда $\mu=1/2$, $r_1(L_3)=r_2(L_1)$. Но выше было показано, что с увеличением μ функция $r_2(L_1)$ монотонно возрастает, а $r_1(L_3)$ монотонно убывает. При $\mu=1/2$ рассматриваемые величины становятся равными, и при $1/2\to\mu\to 0$ функция $r_1(L_3)$ возрастает, а $r_2(L_1)$ убывает. Следовательно, в этой области $r_1(L_3)\geqslant r_2(L_1)$, что и требовалось доказать.

Доказательство третьего неравенства $r_1(L_2)\leqslant r_1(L_3)$ лишь немного сложнее предыдущих. Заметим сначала, что знак равенства соответствует $\mu=0$. В этом случае $r_1(L_2)=r_1(L_3)=1$. При $\mu=1/2$ неравенство, конечно, остается верным, так как $r_1(L_2)=1/2$, а $r_1(L_3)>1/2$, как было показано в конце пункта 4.6.8 в другой форме $(0{,}6<\xi=r_1(L_3)<0{,}7)$. Таким образом,

проверяемое неравенство справедливо в области $0<\mu\leqslant 1/2$, если в этой области нет значения μ, для которого $r_1(L_2)=r_1(L_3)$. То, что это не будет иметь места, следует из уравнений (58) и (59). Полагая в уравнении (58) $r_2=1-r_1$ и $x=\mu-r_1$, получаем

$$\mu-r_1+\frac{1-\mu}{r_1^2}-\frac{\mu}{(1-r_1)^2}=0.$$

С другой стороны, если принять $r_2=1+r_1$ и $x=\mu+r_1$, то уравнение (59) запишется в виде

$$\mu+r_1-\frac{1-\mu}{r_1^2}-\frac{\mu}{(1+r_1)^2}=0.$$

В двух предыдущих уравнениях мы имели соответственно $r_1=r_1(L_2)$ и $r_1=r_1(L_3)$. Решая эти уравнения относительно μ и приравнивая результаты, получаем

$$\mu=\frac{(r_1^3-1)(1-r_1)^2}{(r_1^2-1)(1-r_1)^2-r_1^2}=-\frac{(r_1^3-1)(1+r_1)^2}{(r_1^2+1)(1+r_1)^2-r_1^2}$$

или

$$1+r_1^2=(1-r_1^2)^2.$$

Единственный положительный корень равен $r_1=3^{1/2}$. Так как $r_1<0{,}7$, то можно заключить, что для $0<\mu\leqslant 1/2$ $r_1(L_2)\neq r_1(L_3)$ и, следовательно, $r_1(L_2)\leqslant r_1(L_3)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что все другие возможные комбинации неравенств относительно расстояний $r_i(L_j)$ могут быть сведены к трем основным комбинациям, рассмотренным выше.

4.6.10. Свойства расстояний между центром масс и точками равновесия. В предыдущем пункте мы установили монотонное возрастание расстояний между m_2 и первой точкой равновесия и между m_2 и второй точкой равновесия при увеличении μ. Расстояние между третьей точкой равновесия и m_1, как было показано, монотонно убывает с возрастанием μ.

Сейчас мы исследуем расстояния между центром масс (началом координат) и точками равновесия. Мы покажем, что расстояние $-x_1(\mu)$ между L_1 и началом координат имеет максимум в области $0\leqslant\mu\leqslant 1/2$. Расстояние $-x_2(\mu)$ между L_2 и началом координат монотонно убывает, а расстояние $x_3(\mu)$ между началом координат и третьей точкой равновесия монотонно возрастает.

Начнем с последнего утверждения и покажем, что $dx_3(\mu)/d\mu>0$. Так как в третьей области $x_3=r_1+\mu$, то знак суммы $r_1'+1$ можно установить с помощью ранее полученного выражения для r_1' (уравнение (73в), пункт 4.6.9). Имеем

$$r_1'+1=\frac{1/(1+r_1)^2+[2(1-\mu)-r_1]/r_1^3+2\mu/(1+r_1)^3}{1+2(1-\mu)/r_1^3+2\mu/(1+r_1)^3},$$

где все члены положительны и, следовательно, функция $x_3(\mu)$ монотонно возрастает. Заметим, что $r_1<1$ и $1<2(1-\mu)<2$.

Вторая часть утверждения 10 касается расстояния между началом координат и точкой L_2. Так как во второй области $x_2=r_2-1+\mu$, то рассматриваемая производная равна $dx_2/d\mu=r'_2+1$. В пункте 4.6.9 было показано, что $r'_2>0$, следовательно, производная $dx_2/d\mu>0$ и функция $-x_2(\mu)$ монотонно убывает, см. уравнение (73б).

Расстояние между центром масс основных тел и первой точкой равновесия не является монотонной функцией массового параметра. Для того чтобы найти максимум этого расстояния $-x_1$, рассмотрим в первой области $x_1=\mu-1-r_2$; отсюда находим $-x'_1=r'_2-1$.

Уравнение (73а), пункт 4.6.9, представляет собой уравнение для r'_2, из которого условие $x'_1=0$ можно записать в виде

$$r_2^3(3-2\mu+r_2)+(r_2+1)^3(2\mu-r_2)=0$$

или

$$\mu=\frac{3r_2^2+r_2}{2(3r_2^2+3r_2+1)}.$$

Так как r_2 связано с μ уравнением (73а), то будем иметь

$$\mu=\frac{r_2^3(r_2^2+3r_2+3)}{r_2^4+2r_2^3+r_2^2+2r_2+1},$$

что эквивалентно условию $\Omega_x=0$ и уравнению (73). Два последних уравнения дают уравнение шестой степени для r_2:

$$6r_2^6+21r_2^5+31r_2^4+19r_2^3-r_2^2-5r_2-1=0.$$

Единственный положительный корень этого уравнения равен $r_2=0{,}450574$. Соответствующее значение массового параметра равно $\mu_0=0{,}178944$, и, следовательно, $(x_1)_{\min}=\mu_0-1-r_2=-1{,}271630$. Достаточным условием для минимума является $r''_2<0$; дифференцируя уравнение (73а) по μ, можно убедиться, что оно выполняется.

На этом мы закончим доказательство, а также обсуждение десяти высказанных ранее утверждений относительно свойств функции $\Omega(x, y)$.

§ 4.7. Области движения

4.7.1. Задача двух тел. Как указывалось ранее, кривые $\Omega(x, y)=\text{const}$ определяют различные области возможного движения, так как эта существенно положительная функция связана с существенно положительной величиной — квадратом относительной скорости — посредством интеграла Якоби.

Рассмотрим функцию

$$\Omega(x, y)=\frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2} \tag{74}$$

в случае, когда $\mu=0$. Тогда будем иметь

$$\Omega(x, y)=\frac{1}{2}r_1^2+\frac{1}{r_1}, \tag{75}$$

где $r_1=r$ есть расстояние между третьей частицей и основным телом единичной массы, расположенным в начале координат. Кривые $\Omega(x, y)=\text{const}$ представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат.

Интеграл Якоби $v^2=2\Omega(x, y)-C$ принимает вид

$$v^2=r^2+2/r-C. \tag{76}$$

Рассмотрим теперь движение с начальными условиями $v=v_0$ и $r=r_0$. Постоянная Якоби этого движения согласно уравнению (76) равна

$$C_0=r_0^2+2/r_0-v_0^2. \tag{77}$$

Радиус окружности нулевой скорости, принадлежащей этому значению C_0, определяется из решения уравнения

$$C_0=r^2+2/r=r_z^2+2/r_z, \tag{78}$$

которое следует из уравнения (76). Это уравнение, разрешенное относительно r (если существует действительное положительное решение), дает радиус окружности нулевой скорости, принадлежащей выбранным начальным условиям. Обозначая этот радиус через r_z, получаем из уравнений (77) и (78)

$$r_z^2+2/r_z=r_0^2+2/r_0-v_0^2. \tag{79}$$

Это соотношение связывает начальные условия (обозначенные с индексом 0) с радиусом окружности нулевой скорости (обозначенным с индексом z).

Интеграл Якоби (уравнение (76)) связывает переменные (в данном случае r и v) при заданном значении C (в данном случае C_0) в любой момент времени соотношением

$$v^2=r^2+2/r-C_0 \tag{80}$$

или

$$v^2=r^2+2/r-r_z^2-2/r_z. \tag{81}$$

Здесь r — любое расстояние от начала координат, а r_z — радиус кривой нулевой скорости. Так как $v^2\geqslant 0$, то мы должны иметь

$$r^2+2/r-(r_z^2+2/r_z)\geqslant 0, \tag{82}$$

где равенство имеет место тогда, когда $r=r_z$, т. е. когда $v=0$

или, другими словами, когда частица находится на своей собственной кривой нулевой скорости. Те значения r, для которых удовлетворяется неравенство (82), соответствуют действительным значениям скорости. Для того чтобы получить области возможного движения, нужно найти решение следующего кубического уравнения:

$$r^3{}_z - C_0 r_z + 2 = 0. \tag{83}$$

Поясним это на примере. Пусть начальными условиями будут $r_0 = 2$, $v_0 = 1$. Это значит, что движение начинается в некоторой точке окружности радиуса, равного двум, с единичной скоростью некоторого направления, см. рис. 4.8.

Для этих начальных условий из уравнения (77) получаем постоянную Якоби $C_0 = 4$. Радиус окружности нулевой скорости определяется из уравнения

$$r^3{}_z - 4r_z + 2 = 0 \tag{84}$$

и приближенно равен $(r_z)_{1,2,3} = 1{,}67,\ 0{,}54$ и $-2{,}21$. Два положительных значения (r_l и r_s) соответствуют двум радиусам двух кривых нулевой скорости, принадлежащих $C_0 = 4$ (см. рис. 4.8).

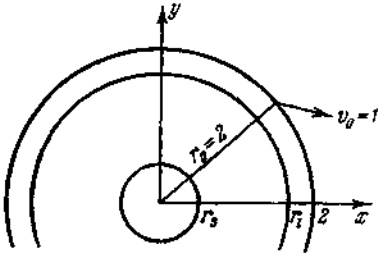


Рис. 4.8. Кривые нулевой скорости и начальные условия для задачи двух тел.

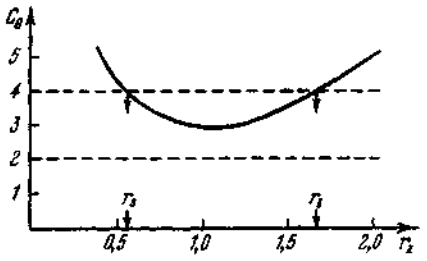


Рис. 4.9. Постоянная Якоби в зависимости от радиуса окружности нулевой скорости для задачи двух тел.

На рис. 4.9 показаны функции $C_0(r_z) = r^2{}_z + 2/r_z$ и два радиуса, меньший из которых обозначен через r_s, а больший — через r_l.

Вернемся теперь к интегралу Якоби (уравнение (80)), который в нашем случае записывается в виде

$$v^2 = r^2 + 2/r - 4. \tag{85}$$

Заметим, что когда $r = r_l = 1{,}67$, скорость v, как и следовало ожидать, равна нулю, так как r есть радиус кривой нулевой скорости. Скорость в начале движения (при $r_0 = 2$) равна $v_0 = 1$. Когда скорость вычисляется из уравнения (85), в любой точке,

для которой r^2+2/r меньше четырех, она получается мнимой. Это означает, что частица (с теми начальными условиями, которые получаются при $C_0=4$) никогда не может находиться в области, для которой $r^2+2/r<4$. График функции r^2+2/r на рис. 4.9 (с $r=r_z$) показывает, что для того, чтобы выполнялось условие $r^2+2/r\geqslant 4$, т. е. чтобы было действительное значение скорости, нужно, чтобы $r\geqslant r_l=1{,}67$. Другими словами, частица не может проникнуть в круг радиуса r_l, и движение должно происходить снаружи окружности нулевой скорости радиуса r_l.

Рассмотрим теперь другую частицу с начальными условиями $r_0=1/2$, $v_0=1/2$. Постоянная Якоби в этом случае тоже равняется $C_0=4$, ее можно вычислить из уравнения (77). Если эта частица достигает окружности радиуса $r=r_s=0{,}54$, то скорость ее становится равной нулю, что можно видеть из рис. 4.9. Вычисляя скорость в какой-либо точке, для которой r^2+2/r меньше четырех, легко убедиться из уравнения (85), что она получается мнимой. Это значит, что частица, начавшая движение внутри окружности нулевой скорости радиуса r_s, не выйдет из этой окружности.

Важная и в то же время простая идея заключается в том, что любая движущаяся частица имеет свою собственную постоянную Якоби и, стало быть, свои собственные кривые нулевой скорости и свои собственные области возможного движения. В предыдущем примере мы видели, что частицы снаружи окружности радиуса r_l и внутри окружности радиуса r_s не будут проходить сквозь эти кривые нулевой скорости.

Было бы ошибочно думать то же самое о частицах в круговом кольце между этими окружностями, при $r_s<r<r_l$, так как для таких значений r выражение r^2+2/r всегда меньше, чем $C_0=4$, что можно видеть из рис. 4.9. Поэтому не существует действительной скорости, которая могла бы служить в качестве начального условия для частиц в круговом кольце. Иначе говоря, нельзя найти внутри кругового кольца таких частиц, для которых значение постоянной Якоби равнялось бы четырем.

С другой стороны, можно рассмотреть частицу с $r_0=1$ и с любой начальной скоростью, скажем, $v_0=1$, для которой $C_0=2$. Эта частица находится внутри установленного выше кругового кольца, но это кольцо не будет иметь никакого отношения к ее движению, так как значение постоянной Якоби равно теперь двум. Действительно, кубическое уравнение

$$r_z^3-2r_z+2=0$$

(см. уравнение (83) с $C_0=2$) не имеет положительных корней (существует только один действительный отрицательный корень, который не представляет интереса, так как $r_z>0$). Это показано также на рис. 4.9, на котором линия $C_0=2$ не пересе-

кается с кривой $C_0(r_z)$, так как $(C_0)_{\min}=3$. В этом случае не существует окружностей нулевой скорости. Интеграл Якоби равен

$$v^2=r^2+2/r-2, \tag{86}$$

и так как для любого $r\geqslant 0$ выражение $r^2+2/r>2$, то частица может достигать любого положения с действительной скоростью.

Внутри окружности радиуса r_s, когда $C_0=4$, возможно только эллиптическое движение, так как при $\mu=0$ физическое состояние соответствует задаче двух тел во вращающейся системе координат. Так как движение ограничено, то оно является эллиптическим. Такие движения значительно более подробно будут рассмотрены в пункте 8.5.1. Здесь же задача двух тел служит в качестве иллюстрации и показывает смысл различных областей возможных движений и их связь с кривыми нулевой скорости.

Подведем краткий итог полученных в этом пункте результатов.

Интеграл Якоби $v^2=2\Omega-C$ для рассматриваемой здесь специальной функции

$$\Omega(r)=r^2/2-\frac{1}{r}$$

равен

$$v^2=r^2+2/r-C. \tag{87}$$

Для заданных начальных условий v_0, r_0 постоянная Якоби равна

$$C_0=r_0^2+2/r_0-v_0^2. \tag{88}$$

Радиусы окружностей нулевой скорости, принадлежащие этому значению постоянной Якоби, можно вычислить по формуле

$$r_z^2+2/r_z-C_0=0. \tag{89}$$

Интеграл Якоби можно записать в одной из следующих четырех форм:

$$v^2=r^2+2/r-(r_z^2+2/r_z), \tag{90}$$

$$v^2-v_0^2=r^2+2/r-(r_0^2+2/r_0), \tag{91}$$

$$v^2=2\Omega(r)-2\Omega(r_z), \tag{92}$$

$$v^2-v_0^2=2\Omega(r)-2\Omega(r_0). \tag{93}$$

Движение возможно в областях, где

$$\Omega(r)>\Omega(r_z).$$

На окружности нулевой скорости ($r=r_z$) уравнение (92) дает $v=0$. Движение возможно внутри ($r>r_z$) или снаружи ($r>r_z$) окружности радиуса r_z, в зависимости от знака $d\Omega/dr$ при $r=r_z$. Если эта производная положительна, то $\Omega(r)$ возрастает с увеличением r (от $r=r_z=r_l$ до $r=r$) и, следовательно, *снаружи* кривой нулевой скорости ($r>r_z$) Ω больше, чем *на* самой кривой: $\Omega(r)>\Omega(r_z)$. Так как это эквивалентно неравенству $v^2>0$, то движение будет возможно снаружи. С другой стороны, когда $(d\Omega/dr)_{r=r_z}<0$, тогда для $r<r_z$ мы имеем $\Omega(r)>\Omega(r_z)$, и движение возможно внутри. Эти два случая показаны на рис. 4.9 для r_s и r_l.

Если кривой нулевой скорости нет, то движение возможно всюду. Это имеет место тогда, когда начальные условия таковы, что C_0 удовлетворяет неравенству $2(\Omega)_{\min}>C_0$.

Из уравнений (89) и (90) имеем

$$v^2=2\Omega(r)-C_0. \tag{94}$$

Следовательно, когда верхнее неравенство удовлетворяется, тогда $v^2>0$ и движение возможно, независимо от значения r (всюду).

Когда $d\Omega/dr=0$ на кривой нулевой скорости, можно провести специальное, иногда простое, исследование, проясняющее положение. Например, в верхнем случае, в котором $d\Omega/dr=0$, мы имеем $r=1$. Если $r=1=r_z$ есть кривая нулевой скорости, то $C_0=3$, что соответствует минимуму функции 2Ω, и рассмотренное ранее круговое кольцо стягивается в окружность единичного круга. Движение возможно всюду, но частицы, которые достигают этой кривой нулевой скорости, должны быть специально исследованы на устойчивость последующего движения.

В следующем пункте мы проведем эти исследования для ограниченной задачи.

4.7.2. Области возможных движений в ограниченной задаче. Поведение функции

$$\Omega=\frac{1}{2}\left[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2\right]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2} \tag{95}$$

в области $0\leqslant\mu\leqslant 1/2$ служит ключем для нахождения областей движения. Кривые нулевой скорости, определяемые уравнением $2\Omega-C=0$ (или линии уровня функции Ω, или эквипотенциальные кривые), можно изобразить на плоскости xy для различных значений μ, и эти системы кривых (каждая система соответствует одному фиксированному значению μ) можно использовать, чтобы представить функцию $\Omega(x, y)$. Другой способ представления состоит в рассмотрении системы трехмерных диаграмм функции $z=\Omega(x, y)$ в системе координат x, y, z. (Сечение этой поверхности плоскостью $y=0$ для различных

значений μ показано, например, на рис. 4.7.) Такое трехмерное представление обнаруживает два пика, в m_1 и m_2, где $\Omega(x, y) \to \to\infty$. Две нижние площади, симметрично расположенные относительно оси x, в L_4 и L_5 разделяются двумя бесконечно высокими пиками, а в L_1, L_2 и L_3 — тремя проходами. Снаружи областей L_1, L_3, L_4 и L_5, когда r_1 и r_2 неограниченно возрастают, функция Ω снова стремится к бесконечности. При таком изображении можно получить представление об эквипотенциальных кривых. Например, когда Ω достаточно велико, плоскость $z=\text{const}$ пересекает только два пика, соответствующие m_1 и m_2, и наружный гребень, соответствующий r_1, $r_2\to\infty$. Кроме того, когда $\Omega<3/2$, постоянная Якоби $C<3$ и кривых нулевой скорости не существует. Другими словами, плоскость $z=\text{const}$ располагается ниже минимумов в L_4 и L_5, и эквипотенциальных линий не существует.

Ниже проводится систематическое изучение линий нулевой скорости, при этом в качестве параметра выбрана постоянная Якоби, а не $\Omega=C/2$.

I. Наружный и внутренний овалы ($C_2<C$). При r_1, $r_2\to\infty$ или $r_1\to 0$ или $r_2\to 0$ мы имеем $\Omega\to\infty$. Следовательно, для больших значений C линии нулевой скорости образуют три ветви. Они рассматриваются ниже в пунктах I.1, I.2 и I.3.

I.1. Овалы нулевой скорости вокруг основного тела большей массы. Рассмотрим сначала случай, когда $r_1\to 0$. Так как при этом $r_2\to 1$, то в уравнении $C=2\Omega$ преобладает член $2(1-\mu)/r_1$, и потому можно принять

$$C\approx\frac{2(1-\mu)}{r_1}.$$

Следовательно, кривые нулевой скорости представляют собой овалы вокруг m_1. Чем больше C, тем меньше влияние членов, которыми мы пренебрегли, и тем точнее приближение

$$r_2=r_1=\frac{2(1-\mu)}{C}. \tag{96}$$

По форме кривые нулевой скорости близки к окружностям. Кроме того, с увеличением C расстояние r_1 убывает. Следовательно, чем больше значение C, тем меньше овалы. Так как

$$\frac{d\Omega}{dr_1}\approx-\frac{1-\mu}{r_1^2}<0,$$

то движение возможно внутри овала нулевой скорости. Это следует из того, что говорилось в конце предыдущего пункта. Кроме того, можно привести следующие соображения.

Пусть v_0 и $r_1=r_0$ будут начальными условиями, такими, чтобы соответствующее значение постоянной Якоби приближенно равнялось

$$C_0 \approx \frac{2(1-\mu)}{r_0} - v_0^2. \tag{97}$$

Кривую нулевой скорости для этого значения $C=C_0$ приближенно можно считать окружностью радиуса $2(1-\mu)/C_0=r_z$. Заметим, что r_0 и r_z стягиваются от m_1, т. е. от места нахождения большего основного тела с массой $1-\mu$, и что $r_z>r_0$, так как из уравнения (97) имеем

$$v_0^2=2(1-\mu)(1/r_0-1/r_z)>0.$$

Выберем теперь другую точку, расположенную на расстоянии r_0' от большего основного тела. Скорость частицы v_0' (с постоянной Якоби C_0) будет равна

$$v_0'^2 = \frac{2(1-\mu)}{r_0'} - C_0$$

или

$$v_0'^2 = 2(1-\mu)\left(\frac{1}{r_0'} - \frac{1}{r_z}\right). \tag{98}$$

Отсюда следует, что пока частица находится внутри окружности нулевой скорости ($r_0'<r_2$), скорость v_0' действительна и движение возможно. Когда $r_0'=r_z$, $v_0'=0$, а когда $r_0'>r_z$, скорость v_0' мнимая. Поэтому частица не может перейти на другую сторону кривой нулевой скорости.

I.2. Овалы нулевой скорости вокруг основного тела меньшей массы. Когда $r_2 \ll 1$ и $r_1 \approx 1$, кривые нулевой скорости представляют собой овалы вокруг основного тела меньшей массы. Радиусы круговых линий нулевой скорости приближенно равны

$$r_z = r_2 \approx \frac{2\mu}{C}. \tag{99}$$

Сравнивая с уравнением (96), видим, что радиус приближенной кривой нулевой скорости для заданного (большого) C, окружающей основное тело большей массы (r_1), больше, чем радиус кривой, окружающей другое основное тело (r_2). Действительно,

$$0<r_1-r_2 \approx 2/C<{}^2/_3,$$

так как кривых нулевой скорости для $C<3$ не существует. Отношение радиусов приближенно равно $(1-\mu)/\mu$. Поэтому для малых μ можно принять $r_2 \approx \mu r_1$.

I.3. Овалы нулевой скорости, окружающие оба основных тела. Когда оба радиальных расстояния (r_1 и r_2) от точек равновесия значительно возрастают (r_1, $r_2 \gg \gg 1$), можно снова получить большие значения C. В самом деле, полагая $r_1 = r_2 = r$, находим из уравнения (95)

$$C \approx r^2.$$

Это уравнение относится к тому случаю, когда вследствие больших расстояний влияние тяготения пренебрежимо мало по сравнению с центробежной силой (потенциал которой равен r^2). Интеграл Якоби равен

$$v^2 \approx r^2 - C,$$

и кривые нулевой скорости определяются уравнением

$$C^{1/2} \approx r,$$

т. е. приближенно являются окружностями.

Заметим, что этот радиус всегда больше, чем полученное ранее значение $2(1-\mu)/C$; сравнение имеет смысл только тогда, когда $C > 3$.

С увеличением C овалы нулевой скорости расширяются, поэтому движение возможно *снаружи* этих предельных кривых.

Относительно кривых, описанных в случае I, следует сделать следующие общие замечания. На рис. 4.10 показано круговое приближение для $\mu = 0{,}2$ и $C = 4$. Радиусы равны $2\mu/C = 0{,}1$, $2(1-\mu)/C = 0{,}4$ и $C^{1/2} = 2$.

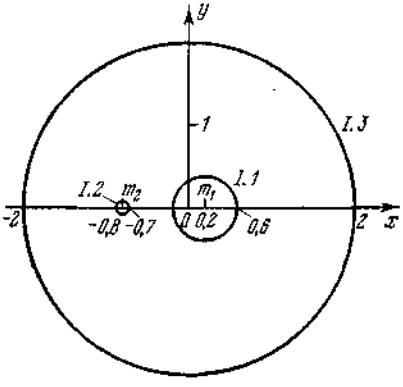


Рис. 4.10. Круговое приближение для кривых нулевой скорости при $C = 4$, $\mu = 0{,}2$.

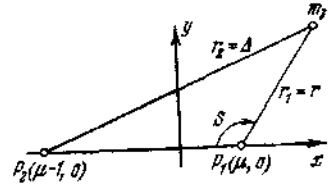


Рис. 4.11. Полярные координаты r, S.

Представляет интерес оценить искажение этих окружностей, вызываемое возмущением, вносимым вторым основным телом.

Исследуем подробно, например, искажение овала нулевой скорости, окружающего основное тело большей массы. Возму-

шения, оказываемые на другие овалы нулевой скорости, могут быть исследованы таким же способом.

Для удобства введем полярные координаты с началом в месте нахождения основного тела большей массы, как показано на рис. 4.11.

Используя уравнение (95), получаем уравнение кривых нулевой скорости в полярных координатах:

$$C = r^2 + \frac{2}{r} + 2\mu\left(\frac{1}{2} - r\cos S - \frac{1}{r} + \frac{1}{\Delta}\right), \tag{100}$$

где

$$\Delta^{-1} = (r^2 + 1 - 2r\cos S)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos S). \tag{101}$$

Когда рассматриваются кривые нулевой скорости вокруг основного тела большей массы (когда $r < 1$), верхний ряд сходится. Полиномы Лежандра определяются следующим образом:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right]. \tag{102}$$

Когда $S = 0$, тогда $x = 1$ и $P_n(1) = 1$, а когда $S = \pi$, тогда $x = -1$ и $P_n(-1) = (-1)^n$. Кроме того, при $S = \pi/2$ $x = 0$, $P_{2n+1}(0) = 0$ и

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

В этих формулах

$$n! = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 3\cdot 2\cdot 1,$$
$$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\ \ldots\ 4\cdot 2$$

и

$$0! = 0!! = (-1)!!$$

Сохраняя в этом разложении члены второго порядка и пренебрегая членами высших порядков, получаем из уравнения (100)

$$C = r^2 + \frac{2}{r} + \mu\left(3 - \frac{2}{r} + 3r^2\cos^2 S - r^2\right), \tag{103}$$

что для малых значений r ($r \ll 1$) достаточно точно представляет кривую нулевой скорости.

Для того чтобы установить некоторые общие свойства овалов нулевой скорости вокруг основного тела большей массы,

оценим функцию $r(S)$ при четырех значениях S: $S=0$, $S=\pi/2$, $S=\pi$ и $S=3\pi/2$. Так как кривые нулевой скорости симметричны относительно оси x, т. е. относительно линии $S=0$, то $r(\pi/2)=r(3\pi/2)$. Для заданных значений C и μ уравнение (100), которое в общем случае справедливо, дает значение r, принадлежащее некоторому заданному углу S, при условии, что C выбрано таким, что существуют овалы нулевой скорости вокруг основных тел. При этом методе требуется решить алгебраические уравнения восьмой степени относительно r. Для малых значений r может быть использовано, конечно, и кубическое уравнение (103).

Можно применить и другой способ. Зная, что для $\mu=0$ кривые нулевой скорости представляют собой окружности, можно ожидать, что когда $\mu\neq 0$, но $\mu\ll 1/2$, эти окружности будут искажены. Если это действительно так, то можно положить $r=r_0+\rho(S)$ и подставить в правую часть уравнения (100), пренебрегая второй и более высокими степенями функции $\rho(S)$. Проделав это, будем иметь

$$\rho(S)=\frac{C-(r_0^2+2/r_0)+2\mu\,(r_0\cos S+1/r_0-1/2-1/\Delta_0)}{-2\,(1/r_0^2-r_0)+2\mu\,(1/r_0^2-\cos S-(r_0-\cos S)/\Delta_0^3)}, \quad (104)$$

где

$$\Delta_0=(1+r_0^2-2r_0\cos S)^{1/2}.$$

Из этого уравнения следует, что $\rho(S)<0$. В этом можно убедиться, если C принять равным

$$C=r_0^2+2/r_0$$

и учесть, что для $r_0\ll 1$

$$1/r_0^2-r_0>0.$$

Кроме того, оба выражения в правой части уравнения (104) с множителем 2μ являются положительными, а тем, что стоит в знаменателе, можно пренебречь.

С помощью уравнения (104) получаем

$$\rho(\pi/2)<\rho(\pi)<\rho(0)<0,$$

и, следовательно,

$$r(\pi/2)<r(\pi)<r(0)<r_0, \quad (105)$$

что видно из рис. 4.12.

Как отмечалось в пункте 1.3, аналогичное исследование можно провести и для наружной кривой.

Если значение постоянной Якоби убывает, то размеры овалов нулевой скорости, окружающих m_1 и m_2, увеличиваются, а

наружный овал сокращается в размерах. На рис. 4.13*а*, *б*, и *в* этот процесс показан для $\mu=0{,}3$, $\mu=0{,}1$ и $\mu=0{,}01$. Значения постоянных Якоби указаны на рисунках и в подписях. Наименьшие значения C на трех рисунках выбраны такими, чтобы они были немного выше, чем соответствующие значения C_2. Заметим, что $C_2(0{,}3)=4{,}130149$, $C_2(0{,}1)=3{,}686953$ и $C_2(0{,}01)=3{,}177541$. На рис. 4.13*в* показан только один овал нулевой скорости вокруг m_2, тот, что соответствует наименьшему значению C, так как кривые с бо́льшими значениями C стягиваются к m_2.

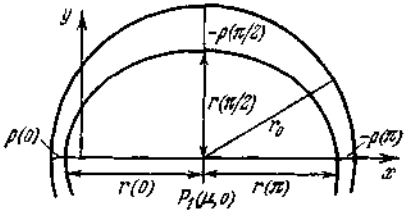


Рис. 4.12. Возмущение овала нулевой скорости вокруг большего основного тела.

Напомним, что для любого положительного μ, не превышающего 1/2, мы имеем

$$\Omega(L_2)>\Omega(L_1)>\Omega(L_3),$$

и, следовательно, когда значение постоянной Якоби убывает от $C>2\Omega(L_2)$, первое появляющееся критическое значение C равно $2\Omega(L_2)=C_2$. Кривая нулевой скорости для этого значения постоянной Якоби, имеет две ветви. Наружный овал стягивается и при C_2 сохраняет свой предыдущий характер: охватывает оба основных тела, а также все точки равновесия. (Если бы он не включал какой-либо точки либрации, то в процессе стягивания он проходил бы через точку, постоянная Якоби для которой меньше C_2). Внутренний овал расширяется, проходит через точку L_2 и образует кривую, имеющую форму восьмерки. При этом процессе овалы никогда не охватывают L_1 и L_3, так как соответствующие значения постоянной Якоби, C_1 и C_3, меньше, чем C_2. На рис. 4.14*а* процесс показан при $C=4{,}5$ и $C_2=4{,}130149$ для $\mu=0{,}3$. Наружные овалы располагаются ближе к L_1, чем к L_3, и бо́льшие овалы вокруг большей массы (m_1) при C_2 образуют бо́льшую часть получающейся восьмерки.

Рассмотрение пересечений овалов и кривой, имеющей форму восьмерки, с осью x облегчает построение кривых нулевой скорости.

Пересечения с осью x, справа от m_1, показанные на рис. 4.14*а*, могут быть получены следующим образом. Из уравнения (95) находим постоянную Якоби

$$C=r_1^2+\mu(r_2^2-r_1^2)+\frac{2(1-\mu)}{r_1}+\frac{2\mu}{r_2}, \qquad (106)$$

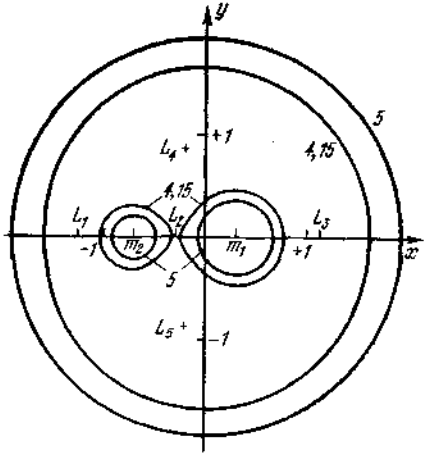


Рис. 4.13а. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}3$ и $C=5$ и 4,15.

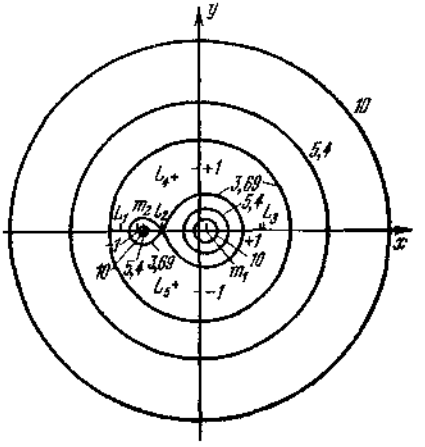


Рис. 4.13б. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}1$ и $C=10$, 5,4 и 3,69.

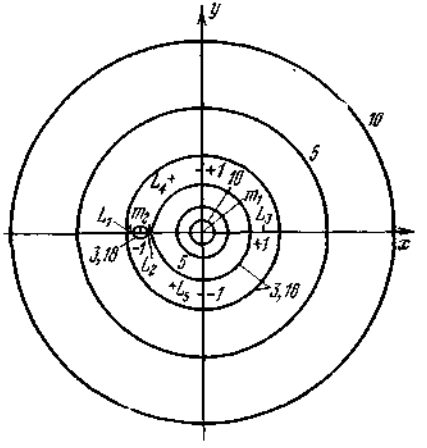


Рис. 4.13в. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}01$ и $C=10$, 5 и 3,18.

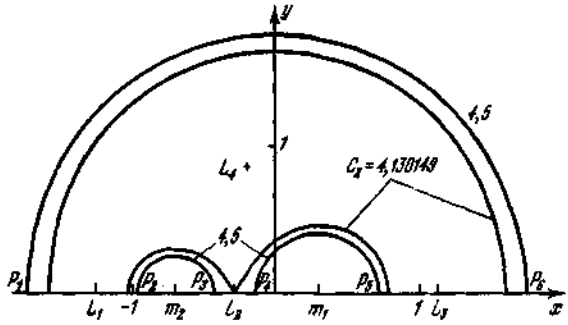


Рис. 4.14*а*. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}3$, $C=4{,}5$ и $C_2=4{,}130149$.

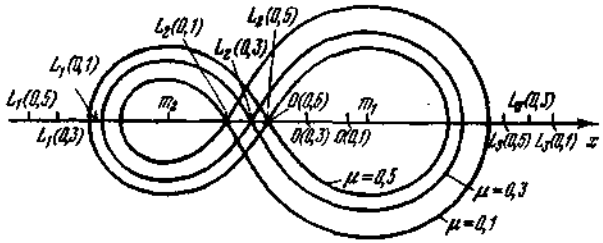


Рис. 4.14*б*. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}5$, 0,3 и 0,1 при $C=C_2$.

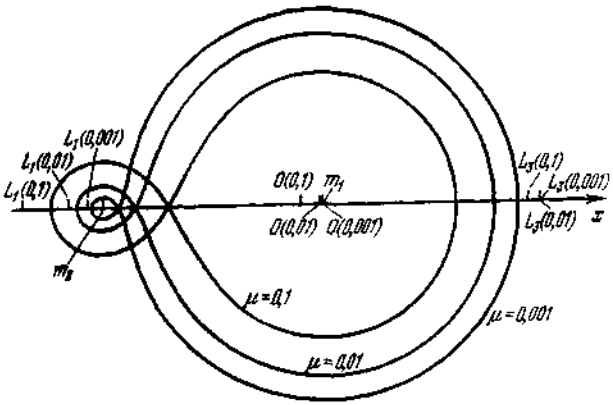


Рис. 4.14*в*. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}1$, 0,01, и 0,001 при $C=C_2$.

и так как $r_2 = r_1 + 1$, то будем иметь

$$C = r_1^2 + \mu(2r_1 + 1) + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{1+r_1}. \qquad (107)$$

Это есть уравнение четвертой степени относительно r_1, и при больших значениях C оно имеет два положительных корня, один меньше $x_3 - \mu$, другой больше, так как L_3 разделяет внутреннюю и наружную кривые нулевой скорости.

Пересечение кривой в форме восьмерки с осью x можно получить, если в уравнение (107) подставить $C = C_2$.

Пересечения слева от m_2 получаются из уравнения (106), но теперь $r_1 = 1 + r_2$ и, следовательно,

$$C = (1 + r_2)^2 - \mu(1 + 2r_2) + \frac{2(1-\mu)}{1+r_2} + \frac{\mu}{r_2}. \qquad (107а)$$

Это есть уравнение четвертой степени относительно r_2, оно имеет две перемены знака, и потому для больших значений C имеет два положительных корня. Один корень удовлетворяет неравенству $\overline{L_1 m_2} < r_2$, другой — неравенству $r_2 < \overline{L_1 m_2}$. При $C = C_1$ эти корни, как будет показано позже, становятся равными друг другу.

На рис. 4.14*б* и *в* показаны изменения кривых нулевой скорости, имеющих форму восьмерки, при убывании массового параметра от $\mu = 0{,}5$ до $\mu = 0{,}001$. Положения коллинеарных точек либрации также показаны с μ в качестве аргумента. Положения основных тел на рисунках фиксированы, а начало координат O движется к центру масс при любом значении μ. Значения постоянных Якоби равны $C_2(0{,}5) = 4{,}25$, $C_2(0{,}3) = 4{,}1301495$, $C_2(0{,}1) = 3{,}6869531$, $C_2(0{,}01) = 3{,}177541$ и $C_2(0{,}001) = 3{,}040948$. Наружные овалы не показаны.

Движение все же возможно внутри кривой, имеющей форму восьмерки, или снаружи внешнего овала.

Дальнейшее уменьшение величины C изменяет форму восьмерки и создает у кривой нулевой скорости пики, так как кривая не пересекает оси x в L_2 еще раз. Действительно, между m_1 и m_2 нет пересечений. Таким образом, кривая в форме восьмерки разделяет два различных типа кривых нулевой скорости, она заканчивает случай I с одним наружным и двумя внутренними овалами и является отправной точкой для излагаемого ниже случая II с внутренними грушеподобными формами и наружными овалами.

II. Наружные овалы и внутренние грушеподобные формы ($C_1 < C < C_2$). Первое критическое значение $C = C_2$ достигается тогда, когда C уменьшается от $+\infty$. При дальнейшем уменьшении получается $C = C_1 < C_2$. Этот процесс начинается с восьмерки и заканчивается касанием в L_1

между внутренней и наружной площадями. На рис. 4.15 показаны кривые нулевой скорости для C_1 и C_2.

Когда $C_1<C<C_2$, кривые нулевой скорости образуют две ветви. Первая ветвь имеет форму гантелей или груши, внутри

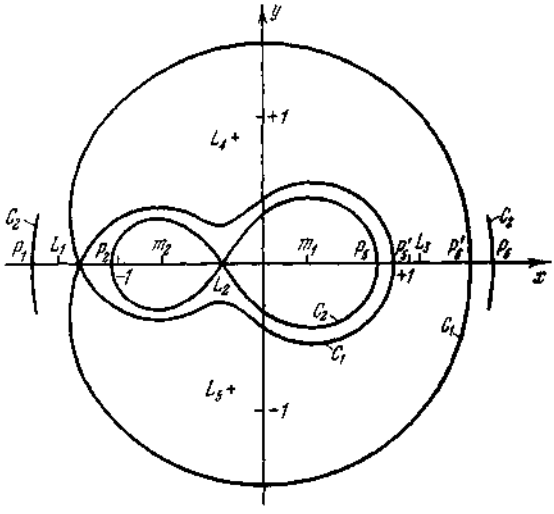


Рис. 4.15. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}3$ при $C=C_2$ и $C=C_1$.

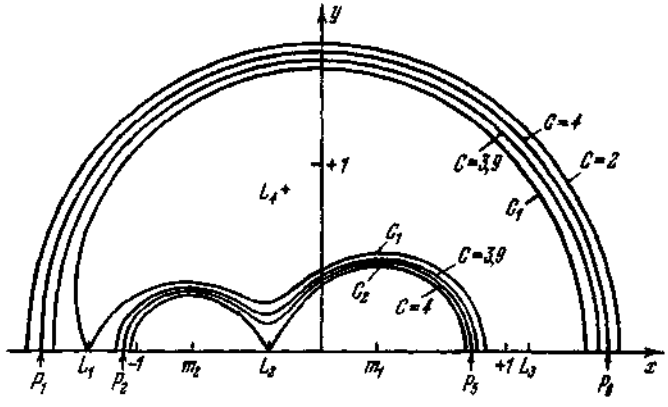


Рис. 4.16. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}3$ при $C=C_2$, 4, 3,9 и C_1.

иее возможно движение. Эта кривая охватывает m_1, m_2 и L_2, а L_1 и L_3 остаются снаружи. Когда $C=C_2-\varepsilon$, где ε — произвольно малая положительная величина, восьмерка раскрывается в точке L_2, как показано на рис. 4.16, и для $C_1<C<C_2$ образует кривую в форме гантелей. На рис. 4.16 $\varepsilon=C_2-4=0{,}1301495$, а $\mu=0{,}3$.

Аналогично, когда $C=C_1+\varepsilon'$, наружная кривая нулевой скорости не проходит через L_1, но включает все массы и точки либрации. На рис. 4.16 $\varepsilon'=3{,}9—C_1=0{,}1335870$. Когда C убывает с C_2 до C_1, наружные овалы сохраняют свою общую форму и только обнаруживают выемку вблизи L_1. Движение снаружи этих овалов всегда возможно.

III. Кривые подковообразной формы ($C_3<C<C_1$). При дальнейшем уменьшении величины C от $C=C_1$, точка L_1 уже не оказывается на кривой нулевой скорости, и имеется только одна ветвь кривой. Точка заострения в L_1, которая существует при $C=C_1$, исчезает, когда кривая не пересекает больше оси x между $-\infty$ и m_1. На рис. 4.17 показана кривая подковообразной формы, которая охватывает только L_3, L_4 и L_5. При $C\to C_3$ точки пересечения с осью x около L_3 перемещаются ближе к L_3, и когда C становится равным C_3, точки A, A', а также точки B, B' оказываются в L_3, образуя точку заострения.

На рис. 4.18 показаны два предельных положения и кривые нулевой скорости для C_1 и C_3. Ряд подковообразных кривых начинается в C_1, когда точка заострения образуется в L_1, и заканчивается в C_3, когда точка заостроения находится в L_3. Движение возможно всюду снаружи площади, ограниченной подковообразными кривыми.

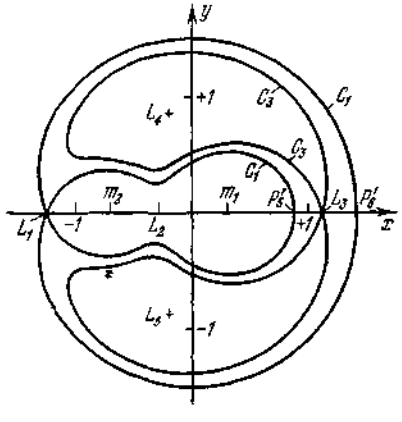


Рис. 4.17. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}3$ при $C=C_1$ и $3{,}6$.

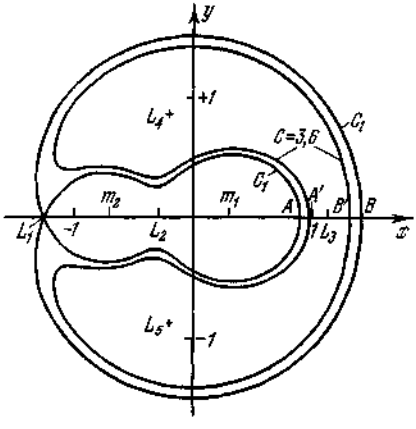


Рис. 4.18. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}3$ при $C=C_1$ и C_3.

IV. Кривые, имеющие форму головастика ($3=C_4=C_5<C<C_3$). При дальнейшем уменьшении постоянной Якоби от C_3 точка заострения пропадает, когда кривая оставляет точку L_3. Ряд кривых нулевой скорости образует две

ветви, одна охватывает точку L_4, другая — точку L_5. Когда величина C стремится к трем, эти кривые стягиваются к точкам L_4 и L_5. При $C=3+\varepsilon$ (где ε — произвольная малая положительная величина) форму кривой приближенно можно считать эллиптической с центром в точке L_4 (L_5). Для того чтобы показать это, перейдем от переменных x, y к переменным ξ, η:

$$\xi=x+1/2-\mu, \quad \eta=y-3^{1/2}/2. \tag{108}$$

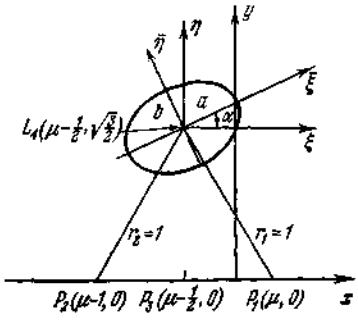


Рис. 4.19. Эллиптическое приближение к кривым нулевой скорости вокруг L_4.

Эти уравнения выражают перенос координатной системы x, y в треугольную точку либрации L_4, см. рис. 4.19.

Применяя преобразование (108) к уравнению (95) и пренебрегая членами, содержащими третью и более высокие степени ξ и η, получаем

$$C=\frac{3}{4}\xi^2+\frac{9}{4}\eta^2-\frac{3\cdot 3^{1/2}}{2}(1-2\mu)\xi\eta+3. \tag{109}$$

Для $0<\mu\leqslant 1/2$ имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3\cdot 3^{1/2}}{4}(1-2\mu) \\ -\frac{3\cdot 3^{1/2}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} \end{vmatrix} = \frac{27}{4}\mu(1-\mu)>0, \tag{110}$$

и, следовательно, кривая представляет собой эллипс.

Длина и направление осей эллипса определяются корнями характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2}=\frac{3}{2}\{1\pm[1-3\mu(1-\mu)]^{1/2}\}. \tag{111}$$

Из равенства (111) видно, что оба корня вещественны и положительны и что для малых значений μ (для которых величиной μ^2 можно пренебречь) будем иметь

$$\lambda_1\approx 3-9\mu/4 \quad \text{и} \quad \lambda_2\approx 9\mu/4. \tag{112}$$

Направление большой оси эллипса определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha=3^{1/2}(1-2\mu). \tag{113}$$

Малая и большая полуоси эллипса соответственно равны

$$b=\left(\frac{C-3}{\lambda_1}\right)^{1/2}, \quad a=\left(\frac{C-3}{\lambda_2}\right)^{1/2}. \tag{114}$$

Общее расположение эллипса показано на рис. 4.19. Заметим, что ориентация и эксцентриситет эллипса зависят только от значения μ, тогда как размер эллипса определяется еще величиной постоянной Якоби.

На рис. 4.20 показано семейство кривых, относящихся к случаю IV. Кривая, обозначенная C_3, представляет начало, а точки L_4 и L_5 — окончание этой серии кривых нулевой скорости.

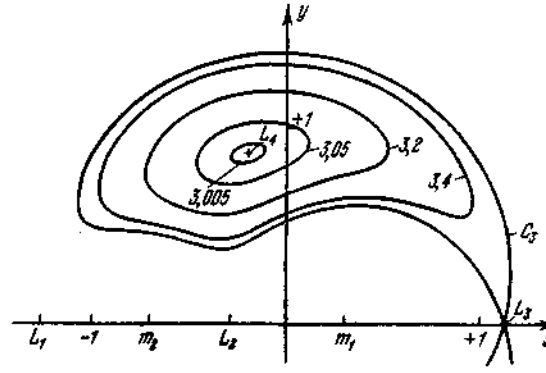


Рис. 4.20. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}3$ и $C=C_3$, 3,4, 3,2, 3,05, 3,005 и C_4.

Для $\mu=0{,}3$ значение постоянной Якоби в точке L_3 равно $C_3=3{,}5013501$. Эллиптическое приближение для кривой нулевой скорости, соответствующей $C=3{,}05$, показанное на рис. 4.20, характеризуется следующими данными: $a=0{,}293$, $b=0{,}144$, эксцентриситет $e\approx0{,}87$ и $\alpha=17{,}4°$. Движение возможно всюду снаружи кривых, напоминающих по форме головастиков.

На этом мы закончим детальное рассмотрение различных классов (I—IV) кривых нулевой скорости. Следующие ниже замечания будут носить более общий характер.

Построение кривых нулевой скорости облегчается, если знать их пересечения с осью x. Три двойные точки пересечения, наклоны в которых конечны, можно считать известными, так как положение этих коллинеарных точек можно найти из Приложений I, II и III. Все другие пересечения с осью x происходят под прямым углом к ней. Положение этих пересечений при заданном значении μ для различных C можно найти, вычислив функцию $2\Omega(x, 0)=C$ при различных значениях x. Обратная функция $x=x(C)$ может быть получена (так как Ω_x равно нулю только в точках либрации) либо численным способом, либо графически. Прототип рис. 4.7 представлен на рис. 4.21 и показывает функцию $C(x)$ вместо функции $\Omega(x, 0)$. Рисунок соответствует $\mu=0{,}4$.

Как можно видеть, при $C>C_2$ имеется шесть пересечений кривых нулевой скорости с осью x, так как существует шесть

пересечений кривых $C(x)$ с горизонтальной линией, проведенной для значения C, большего, чем C_2. Эти шесть пересечений $Q_1, \ldots, Q_6$ соответствуют точкам $P_1, P_2, \ldots, P_6$, показанным на рис. 4.14*а*. При $C=C_2$ точки Q_3 и Q_4 совпадают и мы имеем пять точек: Q_1', Q_2', Q_{34}', Q_5' и Q_6', соответствующие точкам P_1, P_2, L_2, P_5 и P_6 на рис. 4.15.

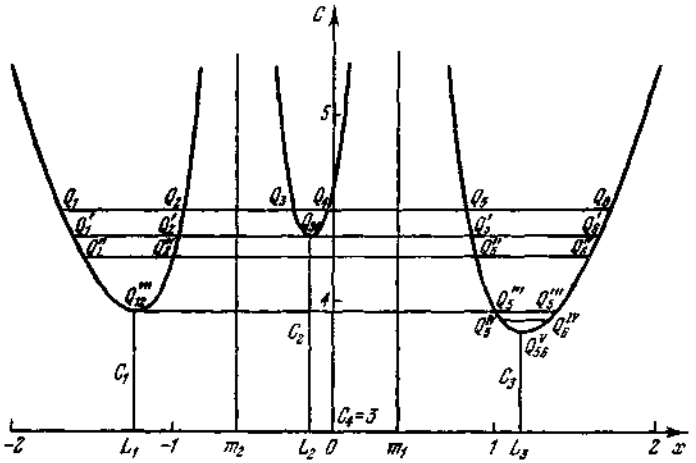


Рис. 4.21. Функция $C=2\Omega(x, 0)$.

Понижая C до значения, лежащего между C_1 и C_2, можно получить четыре пересечения (см. рис. 4.21) Q_1'', Q_2'', Q_5'' и Q_6'', соответствующие точкам P_1, P_2, P_5 и P_6 на рис. 4.16. При $C=C_1$ точки Q_1'' и Q_2'' совпадают и мы получаем три пересечения Q_{12}'', Q_5'' и Q_6'', соответствующие точкам L_1, P_5' и P_6' на рис. 4.15 и 4.18.

Когда $C_3<C<C_1$, два пересечения на рис. 4.21, точки Q_5^{IV} и Q_6^{IV}, соответствуют точкам A' и B' на рис. 4.17. Эти точки совпадают, когда $C=C_3$, образуя точку Q_{56}^{V} на рис. 4.21 и единственное пересечение на рис. 4.20, обозначенное через L_3.

Меньшие значения C (т. е. $C<C_3$) не дают пересечений, что можно видеть из обоих рисунков 4.20 и 4.21.

Таким образом, можно различать четыре области значений постоянной Якоби, каждая из которых имеет свой тип кривых нулевой скорости, в соответствии с четырьмя различными типами площадей возможного движения.

I. Для больших значений постоянной Якоби ($C>C_2$) допустимые области схематически показаны на рис. 4.22 штриховкой. Как можно видеть, области 1, 2 и 3 не связаны друг с другом.

II. Когда значение постоянной Якоби лежит между C_1 и C_2, картина меняется и принимает вид, изображенный на рис. 4.23. В этом случае возможна связь между окрестностями двух основных тел, но третье тело либо остается снаружи большого овала 2, либо внутри гантелеобразной площади 1.

III. Следующий этап наступает, когда значение постоянной Якоби оказывается между C_3 и C_1. Допустимая область на рис. 4.24 заштрихована. Теперь возможна связь между

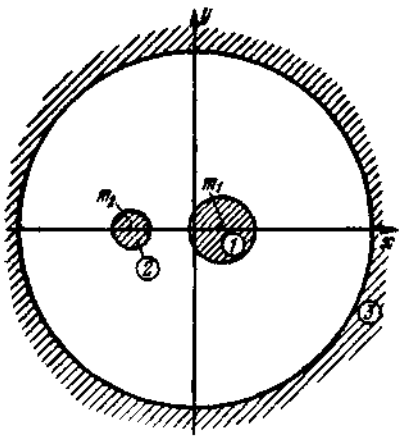


Рис. 4.22. Общая форма допустимых площадей для $C>C_2$. Кривые соответствуют $\mu=0{,}3$, $C=5$.

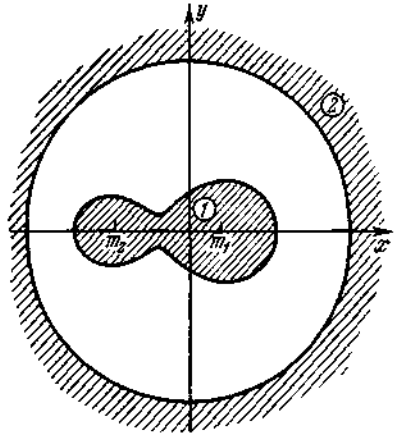


Рис. 4.23. Общая форма допустимых площадей для $C_3<C<C_2$. Кривые соответствуют $\mu=0{,}3$, $C=4$.

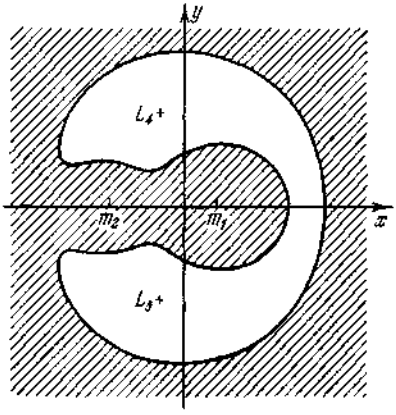


Рис. 4.24. Общая форма допустимой площади для $C_3<C<C_1$. Кривые соответствуют $\mu=0{,}3$, $C=3{,}6$.

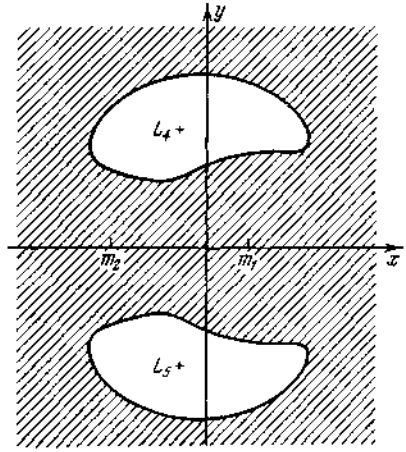


Рис. 4.25. Общая форма допустимой площади для $C_4<C<C_3$. Кривые соответствуют $\mu=0{,}3$, $C=3{,}3$.

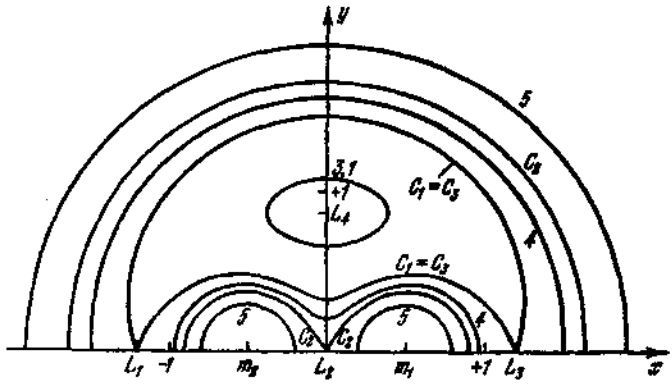


Рис. 4.26*а*. Кривые нулевой скорости для Копенгагенской задачи, $\mu=0{,}5$.

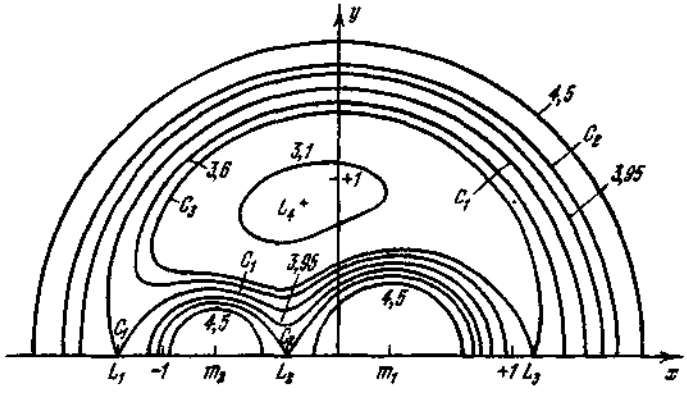


Рис. 4.26*б*. Кривые нулевой скорости для $\mu=0{,}3$.

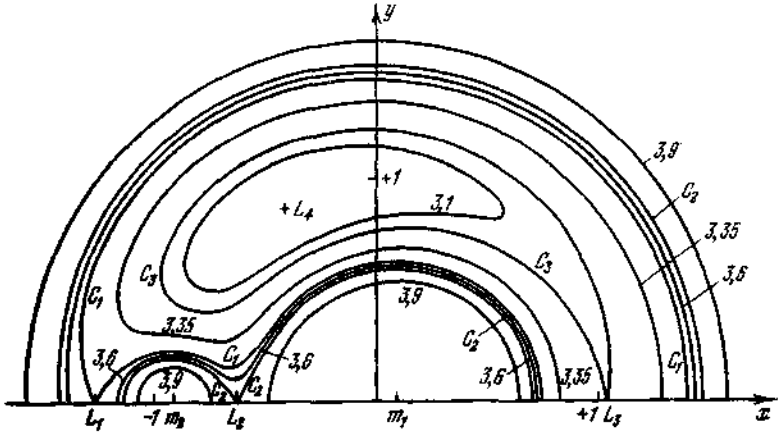


Рис. 4.26*в*. Кривые нулевой скорости для задачи Дарвина, $\mu=1/11$.

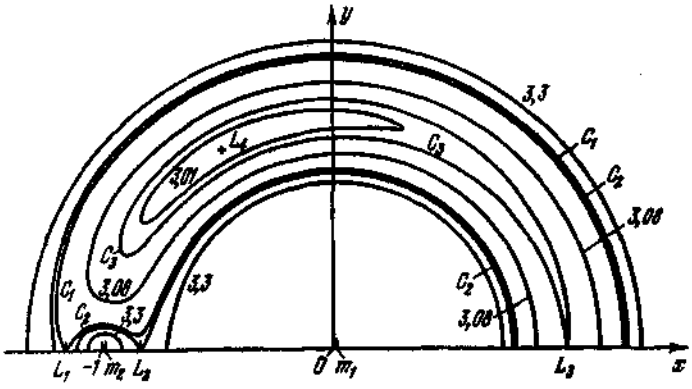


Рис. 4.26*г*. Кривые нулевой скорости для системы Земля—Луна, $\mu=0{,}012141$.

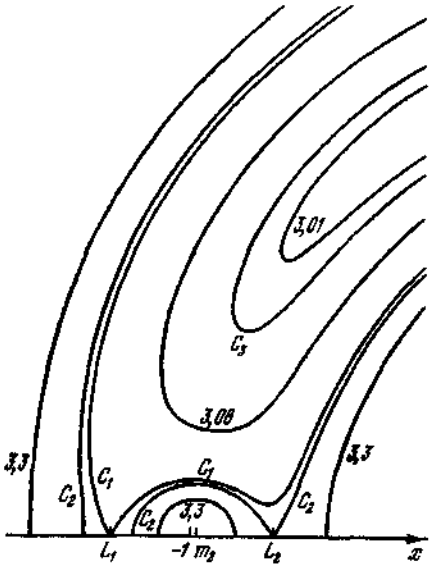


Рис. 4.26*д*. Кривые нулевой скорости для системы Земля—Луна ($\mu=0{,}012141$), показанные вблизи Луны в увеличенном масштабе.

Таблица 1. **Характеристики кривых нулевой скорости**

№ рисунка	μ	C	C_3	C	C_1	C	C_2	C
4,26*а*	0,5	5	4,25	4	3,7057961	—	3,7067961	3,1
4,26*б*	0,3	4,5	4,1301495	3,95	3,7664130	3,6	3,5013501	3,1
4,26*в*	0,090909	3,9	3,6529163	3,6	3,5341816	3,35	3,1732222	3,1
4,26*г*, *д*	0,012141	3,3	3,2002462	—	3,1840783	3,08	3,0241311	3,01

внутренней и наружной областями, и она осуществляется со стороны основного тела меньшей массы.

IV. Последний этап соответствует значениям постоянной Якоби, лежащим между C_3 и 3, т. е. удовлетворяющим условию $3=C_4<C<C_3$. Запретные области вокруг L_4 и L_5 стягиваются при $C\to 3$, и движение возможно всюду, когда $C\leqslant 3$. Заштрихованная площадь на рис. 4.25 показывает возможное движение.

4.7.3. Влияние массового параметра на кривые нулевой скорости. На рис. 4.26*а—в* показано влияние массового параметра на полные системы кривых нулевой скорости. Можно видеть, что при изменении μ от $\sim 0{,}01$ до 0,5 топологический характер кривых не изменяется. Более подробные данные, относящиеся к этим рисункам, приводятся в табл. I.

На рис. 4.27 заштрихованы запретные области. Кривые нулевой скорости заменены окружностями, которые являются их

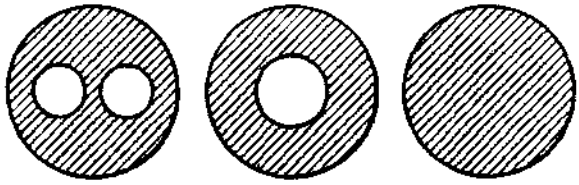


Рис. 4.27. *а*) Трехсвязная запрещенная область, $C_2<C$. *б*) Двусвязная запрещенная область, $C_1<C>C_2$. *в*) Односвязная запрещенная область, $C_3<C<C_1$.

топологическими эквивалентами. При больших значениях постоянной Якоби ($C>C_2$), рассматривавшихся нами в классе I, имеет место трижды связная область (рис. 4.27*а*). Рис. 4.27*б* относится к классу II, а рис. 4.27*в* — к классу III. Заметим, что это описание справедливо для любого положительного μ, меньшего 0,5.

Распределение точек либрации также представляет интерес для процесса установления различных форм кривых нулевой скорости. Запретная область класса I содержит все пять точек равновесия. В случае класса II число охватываемых точек уменьшается до четырех, так как L_2 находится в допустимой области. Класс III содержит только три такие точки: L_3, L_4 и L_5.

Сечение, которое переводит тройную связность на рис. 4.27*а* в двойную связность на рис. 4.27*б*, находится между окружностями, проведенными вокруг m_1 и m_2. Следующее сечение, которое дает односвязную область, находится, разумеется, между внутренней и наружной окружностями.

4.7.4. Кривые нулевой скорости в регуляризованной системе. Кривые нулевой скорости могут быть преобразованы из систе-

мы x, y в регуляризованную систему u, v. В результате получим систему кривых в плоскости uv, каждая из которых соответствует определенному заданному значению постоянной Якобн C:

$$2\Omega[x(u, v),\ y(u, v)] = C.$$

На рис. 4.28$а$—$г$ показаны кривые нулевой скорости в системе u, v, полученные в результате преобразований Леви-Чивита, Тиле, Биркгофа и Леметра. В трех первых случаях производятся преобразования плоскости xy, а в четвертом случае — преобразование плоскости q_1q_2, введенной намн в § 3.5. Формулы

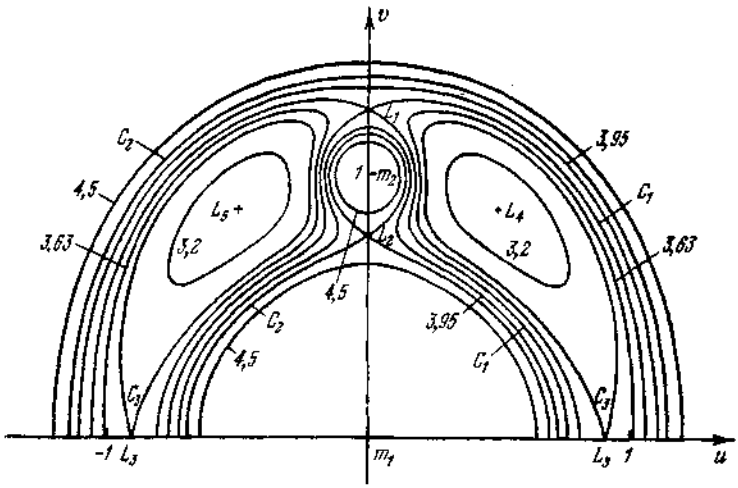


Рис. 4.28$а$. Преобразование Леви-Чивита кривых нулевой скорости, $\mu = 0{,}3$.

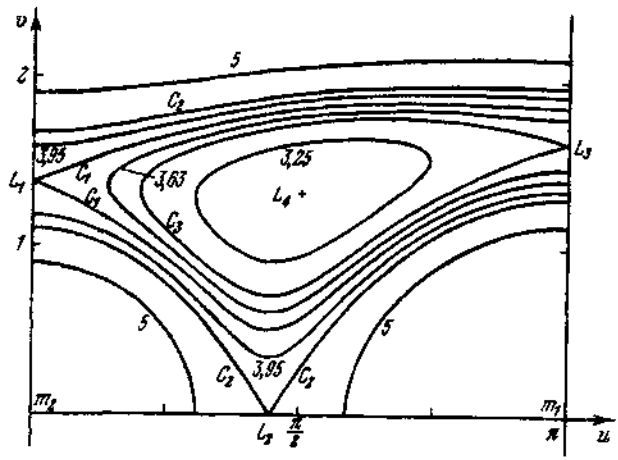


Рис. 4.28$б$. Преобразование Тиле кривых нулевой скорости, $\mu = 0{,}3$.

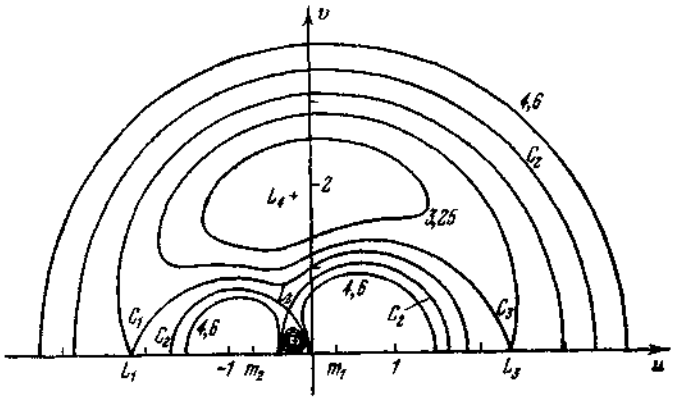


Рис. 4.28*в*. Преобразование Биркгофа кривых нулевой скорости, $\mu=0{,}3$.

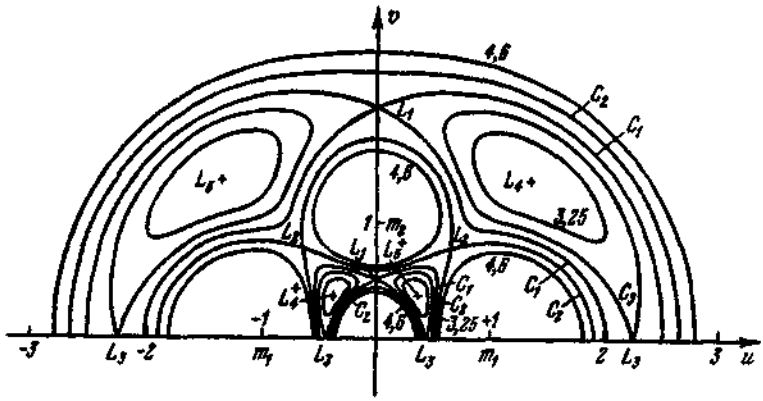


Рис. 4.28*г*. Преобразование Леметра кривых нулевой скорости, $\mu=0{,}3$.

Таблица 11. **Описание кривых нулевой скорости, изображенных на рис. 4.28*а*—*г* в регуляризованной системе**

№ рисунка	Преобразование	Формула	C
4,28*а*	Леви-Чивита	$z=\mu+w^2$	4,5, C_2, 3,95, C_1, 3,63, C_3, 3,2
4,28*б*	Тиле	$z=\mu-\cos^2\frac{w}{2}$	5, C_2, 3,95, C_1, 3,63, C_3, 3,25
4,28*в*	Биркгофа	$z=\frac{w^2+\mu(1-\mu)}{2w+1-2\mu}$	4,6, C_2, C_1, C_3, 3,25
4,28*г*	Леметра	$q=-\frac{1}{4}\left(w^2+\frac{1}{w^2}\right)$	4,6, C_2, C_1, C_3, 3,25

преобразований приводятся в табл. II вместе с другими характеристиками, относящимися к рис. 4.28. Значение массового параметра для всех этих рисунков равно $\mu=0{,}3$.

Сделаем несколько дополнительных замечаний.

Интеграл Якоби в системе u, v записывается в виде

$$u'^2+v'^2=2\Omega^*(u,\ v),$$

где, как было показано в гл. 3,

$$\Omega^*(u,\ v)=[\Omega(u,\ v)-C/2]|f'(w)|^2.$$

Кривые нулевой скорости в системе u, v определяются уравнением

$$\Omega(u,\ v)=C/2$$

и, стало быть, действительно являются кривыми, вдоль которых

$$\Omega^*(u, v)=0,$$

а также

$$u'^2+v'^2=0.$$

Таким образом, кривые нулевой скорости в системе x, y, вдоль которых $\dot{x}^2+\dot{y}^2=0$, посредством преобразования $z=f(w)$ переходят в кривые нулевой скорости в системе u, v, вдоль которых $u'^2+v'^2=0$.

С другой стороны, в то время как кривые

$$2\Omega(x, y)=C$$

являются кривыми нулевой скорости в системе x, y, кривые

$$2\Omega^*(u, v)=C^*$$

не являются кривыми нулевой скорости, если только C^* не равно нулю. Уравнение этих последних кривых содержит два параметра, C и C^*, так как

$$2\Omega^*(u, v)=[2\Omega(u, v)-C]\,|f'(w)|^2=C^*.$$

Поэтому для заданного значения постоянной Якоби C можно построить систему кривых, удовлетворяющих уравнению

$$2\Omega^*(u, v)=C^*$$

при изменяющихся значениях C^*.

Кривые

$$2\Omega(x, y)=C$$

являются линиями постоянной скорости *) в системе x, y, тогда

*) Автор называет их изотахами — isotachs. (*Прим. перев.*)

как кривые

$$2\Omega(u, v) = C$$

в системе u, v таковыми не являются. Линии постоянной скорости в системе u, v определяются уравнением

$$2\Omega^*(u, v) = C^*.$$

Здесь можно применить понятие обобщенной потенциальной функции $\Omega(x, y)$, так как уравнения движения можно записать в виде

$$\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\dot{x}_j = \frac{\partial\Omega(x_1, x_2)}{\partial x_i},$$

где $i, j = 1, 2$, $x = x_1$, $y = x_2$ и $a_{ij} = \text{const}$.

Выполняя регуляризующее преобразование, получаем

$$u_i'' + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(u_1, u_2)\, u_j' = \frac{\partial\Omega^*(u_1, u_2)}{\partial u_i},$$

где $i, j = 1, 2$ и $u_1 = u$, $u_2 = v$. Если мы теперь $\Omega(x, y)$ и $\Omega^*(u, v)$ будем рассматривать как потенциалы, то кривые

$$2\Omega(x, y) = C$$

будут эквипотенциальными линиями в системе x, y, а кривые

$$2\Omega^*(u, v) = C^*$$

— эквипотенциальными линиями в системе u, v. Кривые же

$$2\Omega(u, v) = C$$

потенциальными линиями в системе u, v не будут.

Подытоживая, можем отметить следующие свойства кривых.

Кривые $2\Omega(x, y) = C$ являются эквипотенциальными линиями, линиями постоянной скорости и кривыми нулевой скорости в системе x, y. Кривые $2\Omega^*(u, v) = C^*$ являются эквипотенциальными линиями и линиями постоянной скорости в системе u, v. Наконец, кривые $2\Omega(u, v) = C$ являются кривыми нулевой скорости в системе u, v.

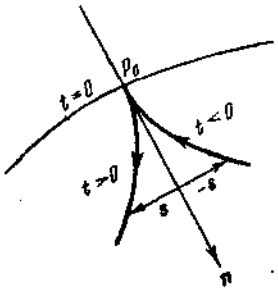


Рис. 4.29. Точка заострения у кривой нулевой скорости.

4.7.5. Дополнительные свойства кривых нулевой скорости. А. В качестве первого важного свойства кривых нулевой скорости мы покажем, что третья частица, находящаяся в покое на кривой нулевой скорости, перемещается вдоль нормали к кривой, рис. 4.29. Предположим, что начальные условия частицы x_0, y_0, $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ выбраны таким образом, что

$P_0(x_0, y_0)$ не является точкой либрации и, кроме того, не совпадает ни с одним из основных тел. В первом случае, т. е. когда $P_0 \equiv L_i$ известно, что частица остается в своей начальной точке. Во втором же случае скорость бесконечна, и, стало быть, движение не может начаться с нулевой скоростью. Производя разложение в степенной ряд около начальной точки, получаем

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \ddot{x}_0 \frac{t^2}{2!} + \dddot{x}_0 \frac{t^3}{3!} + \ldots \tag{115}$$

и

$$y = y_0 + \dot{y}_0 t + \ddot{y}_0 \frac{t^2}{2!} + \dddot{y}_0 \frac{t^3}{3!} + \ldots \tag{116}$$

Коэффициенты можно найти из уравнений движения

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + \Omega_x \tag{117}$$

и

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + \Omega_y. \tag{118}$$

Так как x_0 и y_0 заданы, а $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$, то первые коэффициенты, которые нужно определить, — это $\ddot{x}_0$ и $\ddot{y}_0$. Из уравнений (117) и (118) находим

$$\ddot{x}_0 = \Omega_x(x_0, y_0) \neq 0$$

и

$$\ddot{y}_0 = \Omega_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Следующий коэффициент можно определить из уравнения движения путем дифференцирования. Из уравнения (117) получаем

$$\dddot{x} = 2\ddot{y} + \Omega_{xx}\dot{x} + \Omega_{xy}\dot{y},$$

что с помощью уравнения (118) можно представить в виде

$$\dddot{x} = 2\Omega_y + (\Omega_{xx} - 4)\dot{x} + \Omega_{xy}\dot{y}. \tag{119}$$

В точке $P_0(x_0, y_0)$ имеем

$$\dddot{x}_0 = 2\Omega_y(x_0, y_0),$$

так как $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$.

Аналогично

$$\dddot{y} = -2\Omega_x + \Omega_{xy}\dot{x} + (\Omega_{yy} - 4)\dot{y} \tag{120}$$

и

$$\dddot{y}_0 = -2\Omega_x(x_0, y_0).$$

Подставляя значения, найденные для $\ddot{x}_0$, $\ddot{y}_0$, $\dddot{x}_0$ и $\dddot{y}_0$, в ряды (115) и (116), получаем

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Omega_x(x_0, y_0)\frac{t^2}{2} + \Omega_y(x_0, y_0)\frac{t^3}{3} + \ldots, \\ y &= y_0 + \Omega_y(x_0, y_0)\frac{t^2}{2} - \Omega_x(x_0, y_0)\frac{t^3}{3} + \ldots. \end{aligned} \tag{121}$$

Касательная к орбите определяется уравнением

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{\Omega_y(x_0, y_0)\,t - \Omega_x(x_0, y_0)\,t^2 + O(t^3)}{\Omega_x(x_0, y_0)\,t + \Omega_y(x_0, y_0)\,t^2 + O(t^3)}. \tag{122}$$

При $t \to 0$ имеем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{\Omega_y(x_0, y_0)}{\Omega_x(x_0, y_0)}. \tag{123}$$

Наклон касательной к кривой нулевой скорости

$$2\Omega(x, y) = C$$

в обыкновенной точке $P_0(x_0, y_0)$ вычисляется из уравнения

$$d\Omega = \Omega_x dx + \Omega_y dy = 0,$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\frac{\Omega_x(x_0, y_0)}{\Omega_y(x_0, y_0)}. \tag{124}$$

Таким образом, касательная к орбите, Ω_y/Ω_x, перпендикулярна к касательной к кривой нулевой скорости Ω_x/Ω_y.

Заметим, что кубические члены в рядах (121) связаны с касательной к кривой нулевой скорости в точке P_0. Действительно, вводя раднус-вектор

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

вектор вдоль нормали к кривой нулевой скорости

$$\mathbf{n} = \Omega_x\mathbf{i} - \Omega_y\mathbf{j} = \operatorname{grad}\Omega$$

и вектор вдоль касательной к крнвой нулевой скорости

$$\mathbf{s} = \Omega_y\mathbf{i} + \Omega_x\mathbf{j},$$

можем представнть уравнения (121) в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{n}\frac{t^2}{2} + \mathbf{s}\frac{t^3}{3} + \ldots. \tag{125}$$

Отсюда мы снова видим, что движенне начинается вдоль нормали ($\mathbf{n}t^2/2$) н что с увеличением t поперечная составляю-

щая ($st^3/3$) приобретает все большее значение. Влияние члена $st^3/3$ зависит от знака t, так как s в точке P_0 фиксировано. Это значит, что если в момент t_0 частица находилась на кривой нулевой скорости в точке $P_0(r_0)$, то поперечная составляющая до t_0 и после t_0 меняет знак, образуя в P_0 точку заострения (см. рис. 4.29).

Б. Второе замечание относительно кривых нулевой скорости касается их сходства с орбитами. Подробней на этом сходстве мы остановимся в следующей главе, где покажем, что решения линеаризованных уравнений движения вокруг треугольных точек либрации для $\mu<\mu_0=0{,}03852\ldots$ дают эллипсы с осями, параллельными осям, полученным в этой главе для линеаризованных кривых нулевой скорости. Однако эксцентриситеты двух систем эллипсов неодинаковы.

Другой пример сходства орбит с кривыми нулевой скорости относится к орбитам вокруг и вблизи основного тела большей массы.

При соответствующем выборе начальных условий эти орбиты представляют собой слегка искаженные окружности. Кривые нулевой скорости вокруг того же тела тоже представляют собой несколько искаженные окружности, и как кривые нулевой скорости, так и орбиты становятся точными окружностями при $\mu=0$. Другое основное тело влияния при этом не оказывает. Положение остается таким же и тогда, когда орбиты сравниваются с кривыми нулевой скорости при $r\gg 1$, при больших значениях C, соответствующих наружным овалам. Для того чтобы придать точный аналитический смысл этим подобиям, мы сначала установим условие, которому должна удовлетворять динамическая система, чтобы идентифицировать кривые нулевой скорости с орбитами. Затем это условие мы применим к задаче двух тел и придем к такому выводу: кривые нулевой скорости являются орбитами, так как окружности с центрами, совпадающими с основным телом единичной массы, являются возможными орбитами, как и кривые нулевой скорости. После этого критерий применяется к ограниченной задаче. Установлено, что в ограниченной задаче не существует кривых нулевой скорости, которые являлись бы орбитами. Тем не менее показывается, что некоторые кривые нулевой скорости могут аппроксимировать некоторые орбиты.

Для того чтобы третья частица совершала движение вдоль кривой нулевой скорости, нужно, чтобы

$$v\cdot\operatorname{grad}\Omega=0 \tag{126}$$

или

$$\dot{x}\Omega_x+\dot{y}\Omega_y=0. \tag{127}$$

Это последнее уравнение называют «условием касания»; оно справедливо всюду, кроме основных тел и пяти точек равновесия, которые опять исключаются.

Пусть постоянная Якоби кривой нулевой скорости, по которой должно двигаться третье тело, будет C_1,

$$2\Omega - C_1 = 0, \tag{128}$$

а постоянная Якоби частицы будет C_0,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = |v|^2 = 2\Omega - C_0 = k^2. \tag{129}$$

Вдоль кривой нулевой скорости справедливо уравнение (128), так что из уравнения (129) имеем $C_1 - C_0 = k^2$. Для частицы, которая находится на своей собственной кривой Хилла, $k^2 = 0$, т. е. если постоянная Якоби частицы равна C_1 и частица располагается на кривой $2\Omega = C_1$, то ее скорость равна нулю. Рассматривая частицу с постоянной Якоби $C_0 < C_1$ и помещая ее на кривую $2\Omega = C_1$, получаем скорость ее равной $k = \pm (C_1 - C_0)^{1/2}$.

Условие касания (уравнение (127)) и интеграл Якоби (уравнение (129)) можно разрешить относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$ и, подставив их в уравнение (117), получить

$$F^4 \pm 2kF^3 + k^2 G = 0, \tag{130}$$

где

$$F^2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2,$$

$$G = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}\frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2,$$

а знаки $\pm$ относятся соответственно к орбитам с прямым и попятным движением

Уравнение (130) выражает искомый результат и представляет условие, накладываемое на Ω. Те кривые Хилла, для которых Ω удовлетворяет уравнению (130), представляют собой орбиты. Замкнутые кривые Хилла, вдоль которых Ω удовлетворяет уравнению (130), соответствуют периодическим орбитам. Заметим, что, подставив $\Omega(x, y)$ в уравнение (130), мы получим уравнение вида $g(x, y, k) = 0$. Это уравнение вместе с уравнением кривой Хилла $\Omega(x, y) = \text{const}$ дают постоянное значение для k. Это можно выразить, потребовав чтобы из уравнения $g(x, y, k) = 0$ следовало уравнение $k = f(\Omega)$. Известным условием этого является обращение в нуль якобиана

$$\frac{\partial(g, \Omega)}{\partial(x, y)} = 0. \tag{13}$$

В полярных координатах уравнение (130) принимает вид

$$\frac{\Omega^2_r}{r}\left(\Omega_r+\frac{\Omega_{\varphi\varphi}}{r}\right)+\left(\frac{\Omega_\varphi}{r}\right)^2\Omega_{rr}+\frac{2\Omega_r\Omega_\varphi}{r^2}\left(\frac{\Omega_\varphi}{r}-\Omega_{r\varphi}\right)\pm$$

$$\pm\frac{2}{k}\left(\Omega_r{}^2+\frac{\Omega^2_\varphi}{r^2}\right)^{3/2}+\frac{1}{k^2}\left(\Omega_r{}^2+\frac{\Omega^2_\varphi}{r^2}\right)^2=0, \quad (132)$$

где

$$\Omega=\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{2}{r}\right)+\mu\left(\frac{1}{2}-r\cos\varphi-\frac{1}{r}+\frac{1}{\Delta}\right), \quad (133)$$

$r=r_1$, $\Delta=r_2$ и φ есть угол между r и отрицательным направлением оси x, если смотреть вдоль Δ (см. рис. 4.11 с $\varphi=S$). Заметим, что начало полярной системы координат находится в точке $x=\mu$, $y=0$.

Для движения в окрестности $1-\mu$ мы имеем $r\ll 1$ и

$$\frac{1}{\Delta}=\sum_{n=0}^{\infty}r^nP_n(\cos\varphi). \quad (134)$$

Если $r\gg 1$, то имеем

$$\frac{1}{\Delta}=\sum_{n=0}^{\infty}r^{-(n+1)}P_n(\cos\varphi). \quad (135)$$

Здесь в обоих уравнениях P_n — полиномы Лежандра.

Ньютоновское центральное силовое поле в равномерно вращающейся (синодической) системе координат получается из общей формулы, если положить $\mu=0$:

$$\Omega=\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{2}{r}\right). \quad (136)$$

Кривые нулевой скорости будут являться орбитами в том случае, когда функция $\Omega(r)$ удовлетворяет уравнению (132), которое принимает вид

$$\frac{\Omega_r{}^3}{r}\pm\frac{2}{k}\Omega_r{}^3+\frac{1}{k^2}\Omega_r{}^4=0$$

или, для $\Omega_r=r-\frac{1}{r^2}\neq 0$, т. е. для $r\neq 1$,

$$\frac{1}{r}\pm\frac{2}{k}+\frac{\Omega_r}{k^2}=0. \quad (137)$$

Подставляя выражение (136) в уравнение (137), находим

$$r^3\pm 2kr^2+k^2r-1=0, \quad (138)$$

где непосредственной проверкой, не пользуясь якобианом, можно убедиться, что вдоль линий нулевой скорости уравнение

(138) удовлетворяется. Кривые Хилла представляют собой окружности, так как $2\Omega - C_1$ дает

$$r^2 + 2/r = C_1, \tag{139}$$

и из уравнения (138) следует, что вдоль окружностей k имеет постоянное значение.

Силовая функция Ω при $\mu \neq 0$ может быть представлена в более удобной форме

$$\Omega = U(r) + \mu V(r, \varphi), \tag{140}$$

где

$$U(r) = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) \tag{141}$$

соответствует задаче двух тел в синодических координатах, а

$$V(r, \varphi) = 1/2 - r\cos\varphi - 1/r + 1/\Delta \tag{142}$$

выражает возмущение.

Подставляя уравнение (140) в уравнение (132), получаем уравнение в частных производных, которому должны удовлетворять функции U и V для того, чтобы кривые нулевой скорости были орбитами. Если в процессе подстановки опустить члены порядка μ^2, то мы увидим, что второй член уравнения (132)

$$\left(\frac{\Omega_\varphi}{r}\right)^2 \Omega_{rr} = \left(\frac{\mu}{r}\right)^2 (U_{rr} + \mu V_{rr}) V_\varphi^2 \approx 0$$

и третий член

$$\frac{2\Omega_r \Omega_\varphi}{r^2}\left(\frac{\Omega_\varphi}{r} - \Omega_{r\varphi}\right) = \mu^2 \frac{2V_\varphi (U_r + \mu V_r)}{r^2}\left(\frac{V_\varphi}{r} - V_{r\varphi}\right) \approx 0$$

пропадут и мы будем иметь

$$\frac{\Omega_r^2}{r}\left(\Omega_r + \frac{\Omega_{\varphi\varphi}}{r}\right) \pm \frac{2}{k}\Omega_r^3 + \frac{1}{k^2}\Omega_r^4 = 0, \tag{143}$$

где члены $\Omega_\varphi^2 = \mu^2 V_\varphi^2$ опущены.

Если игнорировать решение $\Omega_r = 0$, то уравнение (143) можно записать в виде

$$\Omega_r\left(\frac{1}{r} \pm \frac{2}{k} + \frac{\Omega_r}{k^2}\right) + \frac{\Omega_{\varphi\varphi}}{r^2} = 0. \tag{144}$$

Хотя член Ω_r^2 в этом уравнении содержит μ^2, оно приводится для того, чтобы показать связь его с соответствующим невозмущенным уравнением (137). При сравнении уравнений (137) и (144) возмущение обнаруживает себя функцией $\Omega_{\varphi\varphi} r^{-2}$.

Производя исключение последнего оставшегося члена порядка μ^2, получаем

$$AU' + \mu\left[V_r\left(A + \frac{U'}{k^2}\right) + \frac{V_{\varphi\varphi}}{r^2}\right] = 0, \tag{145}$$

где

$$A(r) = 1/r \pm 2/k + U'/k^2 \tag{146}$$

и $U' = dU(r)/dr$.

Заметим, что функция $A(r)$ тождественна с левой частью уравнения (137), так как для $\mu = 0$ мы имеем $\Omega(r) = U(r)$.

Кривые нулевой скорости будут орбитами в том случае, когда функция $\Omega(r, \varphi)$ удовлетворяет либо решению $\Omega_r = 0$, либо уравнению (145) с постоянным k. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся условием Якоби (уравнение (131)) с

$$\Omega = U + \mu V$$

и

$$g = \Omega_r \tag{147}$$

или же

$$g = AU' + \mu\,[V_r(A + U'/k^2) + V_{\varphi\varphi}/r^2]. \tag{148}$$

Уравнение (131) с функцией (147) дает

$$\Omega_{r\varphi}\Omega_r - \Omega_{rr}\Omega_\varphi = 0$$

или

$$\mu V_{r\varphi}(U' + \mu V_r) - \mu V_\varphi(U'' + \mu V_{rr}) = 0,$$

и, опуская члены, имеющие порядок μ^2, получаем

$$V_{r\varphi}U' - V_\varphi U'' = 0. \tag{149}$$

После исключения членов порядка μ^2 из уравнения (148) находим

$$U'\left[V_{r\varphi}\left(A + \frac{U'}{k^2}\right) + \frac{V_{\varphi\varphi\varphi}}{r^2}\right] - V_\varphi(U'A)' = 0. \tag{150}$$

Вблизи основного тела с массой, равной $1-\mu$, имеем из уравнения (134)

$$V = \frac{1}{2} - rc - \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(c), \tag{151}$$

где $c = \cos\varphi$.

Подставляя функции $U(r)$ и $V(r, c)$ либо в уравнение (149), либо в уравнение (150), получаем в сущности тот же результат.

Применяя уравнение (149), находим

$$-3+3P_1'+4rP_2'+5r^2P_3'+6r^3P_4'+$$
$$+\sum_{n=4}^{\infty} r^n[(n+3)P_{n+1}'-(n-3)P_{n-2}']=0. \qquad (152)$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Так как $P_1'=1$, то при $r\to 0$ кривая нулевой скорости приближается к орбите, поскольку уравнение (152), а, стало быть, и уравнение (149) удовлетворяются. Заметим, что если разложение Лежандра, определяемое уравнением (134), закончить $n=1$, т. е. первой степенью r, то уравнение (152) будет удовлетворяться, так как остаются только два первых члена. Другими словами, для малых μ, если применить линейное разложение $1/\Delta$ и пренебречь членами порядка μ^2, то кривые Хилла будут являться орбитами.

Для наружного овала разложение Лежандра имеет теперь форму уравнения (135), а уравнение (149) принимает вид

$$-3+3P_1'+\frac{4P_2'}{r}+\frac{5P_3'}{r^2}+\frac{6P_4'}{r^3}+$$
$$+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{r^n}[(n+3)P_{n-1}'-(n-3)P_{n-2}']. \qquad (153)$$

Это уравнение будет тождественно с уравнением (152), если в нем заменить $1/r$ на r. Выводы можно сделать на основании уравнения (152). Для больших значений r разложение Лежандра

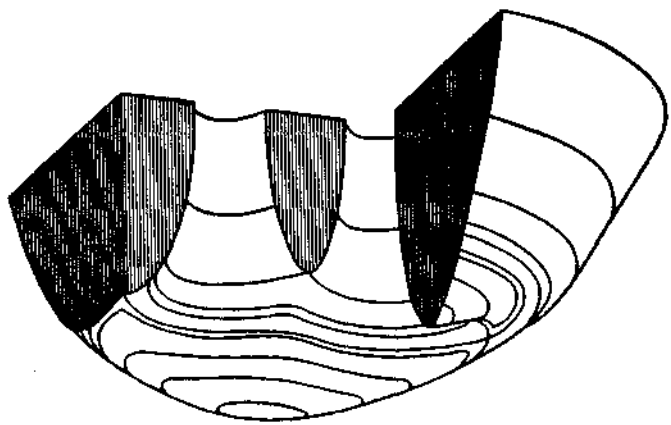


Рис. 4.30. Пространственное представление кривых нулевой скорости (Депри, 1962 [36]).

имеет вид

$$1/\Delta \approx P_0/r + P_1/r^2,$$

и кривые нулевой скорости являются орбитами, если пренебречь членами $O(\mu^2)$. Заметим, что в разложении Лежандра в случае планет ($r \gg 1$) опускаются члены порядка r^{-3}, а в случае спутников ($r \ll 1$) — члены порядка r^2.

Уравнение (150) аналогично уравнению для случая спутников: оно не вносит никакой дополнительной информации для случая планет.

В. Этот раздел, который мы посвятили кривым нулевой скорости, мы закончим кратким описанием рис. 4.30. (Первоначально он был выполнен Депри.) Он дает пространственное изображение результатов, полученных в пункте 4.7.2. Одна из треугольных точек находится внизу, на дне, а две равные массы расположены между тремя заштрихованными площадями.

§ 4.8. Приложения

4.8.1. Движение Луны. Одним из наиболее известных приложений кривых нулевой скорости является вероятно то, которое рассмотрел Хилл. Он разработал способ решения задачи о движении Луны, модифицировав ограниченную задачу (см. гл. 10).

Основная идея состоит в следующем. Если считать, что к динамической системе Солнце—Земля—Луна применимы предположения ограниченной задачи, то можно вычислить постоянную Якоби для движения Луны. Тогда, построив кривые нулевой скорости, соответствующие этому значению постоянной Якоби, можно установить, ограничены орбиты или нет.

Для Луны постоянная Якоби равна

$$C = 2\Omega - v^2,$$

где v — скорость Луны относительно вращающейся системы координат. Эта система координат вращается со средней скоростью вращения системы Солнце—Земля, т. е. со скоростью $n_\odot = 1{,}99095 \cdot 10^{-7}$ рад/сек. Система Земля—Луна вращается со скоростью $n_\leftmoon = 2{,}6617 \cdot 10^{-6}$ рад/сек. Массовый параметр для системы Солнце—Земля равен

$$\mu = \frac{m_\oplus + m_\leftmoon}{m_\odot + m_\oplus + m_\leftmoon} = 3{,}03591 \cdot 10^{-6}.$$

Среднее расстояние между Солнцем и Луной равно $l = 149525 \cdot 10^6$ м, а среднее расстояние между Землей и Луной равно $d_{\oplus\leftmoon} = 384{,}4 \cdot 10^6$ м. Расстояние от Солнца до центра масс

системы равно $a=453\,944$ м; это следует из приведенных выше данных и уравнения $a=l\mu$. Расстояние от Земли до начала вращающейся системы координат равно $b=l(1-\mu)=149\,524{,}546056\cdot10^6$ м. Среднее безразмерное расстояние между Землей и Луной равно $2{,}570808\cdot10^{-3}$. Положение второй коллинеарной точки либрации системы Солнце — Земля указано в Приложении IIД: $x_2=-0{,}989991$, и так как безразмерное расстояние между Землей и началом координат равно $1-\mu=0{,}99999696409$, то расстояние между Землей и точкой L_2 в безразмерном выражении будет равно $\overline{EL_2}=1-\mu+x_2=0{,}01000596409$. На рис. 4.31 в соответствующем масштабе изображены кривые нулевой скорости для системы Солнце — Земля вблизи Земли.

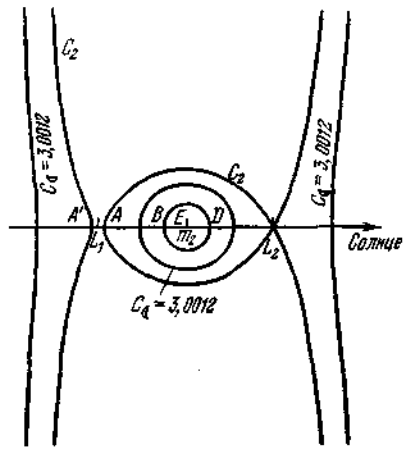


Рис. 4.31. Кривые нулевой скорости для системы Солнце—Земля вблизи Земли, $\mu=3{,}03591\cdot10^{-6}$.

Значение постоянной Якоби, соответствующей точке L_2, также можно прочесть в таблице Приложения IIД: $C_2=3{,}0009000092671$. Положение точки пересечения кривой нулевой скорости, проходящей через L_2, с отрицательным направлением оси x (точки A) можно вычислить из уравнения.

$$f(r)=r^4+(3-2\mu)r^3-(C_2+3\mu-3)r^2-(C_2+\mu-3)r+2\mu=0,$$

где в безразмерном выражении $r=\overline{EA}$ или $r=\overline{EA'}$. Два положительных корня этого уравнения, r_A, $r_{A'}$, соответствуют точкам A и A', т. е. точкам пересечения внутреннего и наружного овалов с отрицательным направлением оси x. Корень $r_A=0{,}00941$ дает положение точки A. Так как $f(r)>0$, когда $r\to\pm\infty$, и так как согласно правилу знаков имеется только два положительных корня и, наконец, в силу того, что $f'(r_A)<0$, можно ожидать, что другой корень $r_{A'}$ будет больше, чем r_A; и действительно, $r_{A'}=0{,}01076$.

Орбитальная скорость Луны во вращающейся системе координат равна $v_{\leftmoon}=n_{\leftmoon}\,d_{\oplus\leftmoon}=1{,}023$ км/сек, а безразмерная относительная скорость Луны равна 0,03436.

Постоянную Якоби для Луны в различных точках ее орбиты теперь можно вычислить по уравнению

$$C_{\leftmoon}=(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2+\frac{2(1-\mu)}{r_1}+\frac{2\mu}{r_2}-v^2.$$

Например, в точке B мы имеем $r_1=1+r_2$, $r_2=\overline{EB}=2{,}570808\cdot10^{-3}$. Отсюда $C_{\mathfrak{C}}^{B}=3{,}0012>3{,}0009=C_2$, т. е. постоянная Якоби для Луны $C_{\mathfrak{C}}^{B}$ больше, чем постоянная Якоби, соответствующая предельному значению C_2. Поэтому Луна остается внутри овала нулевой скорости, который, в свою очередь, располагается внутри предельной кривой нулевой скорости, имеющей форму восьмерки, и не удаляется от Земли.

В точке D мы имеем $r_1=1-r_2$, $r_2=\overline{EB}$ и, следовательно,

$$C_{\mathfrak{C}}^{D}=C_{\mathfrak{C}}^{B}-7\cdot10^{-8}>3{,}0009=C_2.$$

Отсюда можно заключить, что точку B или точку D можно использовать для вычисления $C_{\mathfrak{C}}$, если принять, что имеет место круговое движение Луны с постоянной скоростью.

Известно, что при движении от предельной кривой нулевой скорости (C_2) внутрь по направлению к точке E, изображающей Землю, величина C возрастает. Поэтому кривая нулевой скорости, соответствующая движению Луны, $C_{\mathfrak{C}}$, будет находиться внутри предельной кривой C_2. С другой стороны, кривая $C_{\mathfrak{C}}$ будет содержать орбиту Луны, поскольку в этом случае движение возможно только внутри кривой нулевой скорости. Эти кривые и характерные точки показаны на рис. 4.31.

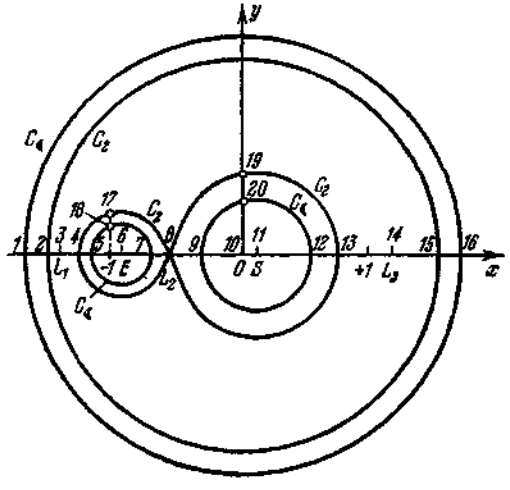


Рис. 4.32. Схематическое изображение кривых нулевой скорости для системы Солнце—Земля, $\mu=3{,}03591\cdot10^{-6}$.

На рис. 4.32 в схематическом виде и с неизбежными искажениями показаны обе стороны кривых нулевой скорости, соответствующих $\mu=3{,}03591\cdot10^{-6}$.

Таблица III. **Координаты точек на рис. 4.32**

Точка	x	Изображение	Точка	x	Изображение
1	—1,01682 57807	C_4	9	—0,98340 58399	C_4
2	—1,01076 03350	C_5	10	0,00000 00000	O
3	—1,01007 01938	L_1	11	0,00000 30359	Солнце
4	—1,00941 04109	C_3	12	0,98025 15691	C_4
5	—1,00545 76402	C_4	13	0,98283 80084	C_3
6	—0,99999 69541	Земля	14	1,00000 12650	L_2
7	—0,99453 24684	C_4	15	1,01736 31718	C_2
8	—0,98999 09310	L_2	16	1,02001 44609	C_4

Точка	x	y	Изображение	Точка	x	y	Изображение
17	—1	0,66777	C_2	19	0	0,98280	C_2
18	—1	0,50554	C_4	20	0	0,98210	C_4

Так как дополнительные подробности относительно критических кривых нулевой скорости для системы Солнце—Земля могут представить значительный интерес, то в таблице III приводятся координаты соответствующих точек, изображенных на рис. 4.32. Ошибки в значениях абсцисс x не превышают $5 \cdot 10^{-11}$.

4.8.2. Приложения к космогонии и двойным звездам. В качестве основных тел мы будем рассматривать Солнце и Землю и примем все предположения ограниченной задачи. Существование периодических орбит вокруг Солнца, классически доказанное Пуанкаре, можно установить с помощью значения невозмущенной большой полуоси (т. е. радиуса), которая определяет положение орбиты внутри овала нулевой скорости вокруг Солнца. Эта большая полуось удовлетворяет неравенству $a_1 < \mu - x_2$. Чем ближе орбита находится к кривой Хилла, имеющей форму восьмерки и проходящей через точку L_2, тем сильнее возмущения третьего тела, вызываемые Землей. Поскольку постоянная Якоби C для третьей частицы больше, чем C_2, и ее начальные условия удовлетворяют требованиям периодичности, тело продолжает двигаться вокруг Солнца, и ее движение является планетарным.

Уменьшим теперь постоянную Якоби частицы так, чтобы $C_1 < C < C_2$. Физически это будет означать, что движение треть-

его тела не обуславливается только влиянием Солнца. Оно может стать спутником второго основного тела, т. е. Земли. Это не значит, однако, что оно станет перманентным спутником Земли, так как его постоянная Якоби такова, что оно не ограничивается овалом нулевой скорости вокруг Земли. Кривая нулевой скорости, соответствующая постоянной C, лежащей в пределах между C_1 и C_2, имеет форму песочных часов (или грушн) с очень малым овалом вокруг Земли, с горловиной вблизи точки L_2 и с большим овалом вокруг Солнца. Когда C становится равным C_2, горловина замыкается. Когда C немного меньше, чем C_2, горловина открывается и частица может пройти через нее; устанавливается связь между Солнцем и Землей, и становится возможной замена планетной орбиты на орбиту спутника, и наоборот. Если частица, первоначально имевшая орбиту планеты вокруг Солнца, обладает достаточной относительной энергией (имеет достаточно низкое значение C), чтобы пройти через отверстие (точка L_2), то она может начать вращаться вокруг Земли по орбите, которую можно определить большой полуосью $a_s < 1-\mu+x_2$. Если в системе имеется какой-либо механизм, который приводит на этой стадии к рассеянию энергии, то соответствующая кривая нулевой скорости замыкается вокруг Земли и частица остается на своей орбите спутника. Механизм рассеяния может представлять собой, например, приливное трение (связанное с приливно-отливным движением океана), которое будет оказывать влияние после того, как частица станет спутником Земли.

Эксцентриситет орбит основных тел может также привести к «захвату». Хотя этот случай менее вероятен, чем предыдущий, он решает проблему, не требуя введения какого-либо физического механизма рассеяния. «Постоянная» Якоби в эллиптическом случае, естественно, зависит от времени, тем не менее интеграл Якоби имеет некоторые практические приложения, и метод квазиустановившегося режима может дать интересные результаты. Изменяющиеся кривые нулевой скорости, соответствующие зависящей от времени «постоянной» Якоби в квазиустановившемся смысле, могут быть получены с помощью таблиц, приведенных в приложениях к этой главе.

Приложения к звездной динамике, в особенности к задачам близких двойных систем, рассматриваются в гл. 10 в связи с трехмерными аспектами ограниченной задачи. Здесь же мы остановимся только на возможных приложениях положений 8 и 10, рассмотренных в пунктах 4.6.8 и 4.6.10.

В случае, когда первая точка Лагранжа находится на максимальном расстоянии от центра масс (см. третью часть положения 10), можно ожидать, что если имеют место явления, которые следуют из динамических предположений ограниченной

задачи, то обмен частиц между основными телами и внешним миром можно минимизировать. Это следует из того факта, что кривые нулевой скорости грушевидной формы, охватывающие оба основных тела, открываются для связи с внешним миром *всегда* в первой точке либрации, когда постоянная Якоби убывает от C_2 до C_1, при условии, что $\mu<1/2$.

Что касается третьей части положения 8, то можно высказать следующие соображения. Следует иметь в виду, что частицы, соответствующие постоянной Якоби, меньшей чем 3, обладают относительной энергией, достаточной для того чтобы достигнуть любой точки в плоскости движения основных тел. Увеличение C от своего минимального значения, равного трем, означает, что рассматриваются частицы с все убывающим и убывающим содержанием относительной энергии.

Чем больше значение C_1, при котором возникает связь между основными телами и окружающим их пространством, тем больше частиц участвуют в обмене, так как большему C_1 соответствует меньшая относительная энергия, и частиц, которые имеют заданное низкое содержание энергии, будет больше, чем частиц с более высоким содержанием энергии. Это значит, что значение массового параметра $\mu_0=0{,}334364$, соответствующее максимальному C_1, должно дать максимальное участие частиц в обмене.

4.8.3. Приложение к космодинамике. Разница в значении постоянной Якоби в точках L_2 и L_1 соответствует области изменения относительной энергии частиц, а именно, $C_1<C<C_2$. Полное изменение значения C в области равно $\Delta_1=C_2-C_1$. Оно выражает требуемое для частиц превышение относительной энергии (для того чтобы установить связь с наружной областью) над энергетическим уровнем, необходимым для указанной выше замены орбит планет на орбиты спутников. Иначе говоря, частицы с очень высокими значениями C имеют низкие уровни относительной энергии, и они либо движутся вокруг одного из основных тел, либо уходят далеко за пределы системы. Рассматривая частицы с несколько меньшими значениями C, скажем, $C=C_2$ (т. е. с несколько более высокими энергетическими уровнями), можно достигнуть граничного случая, соответствующего кривой нулевой скорости в форме восьмерки, проходящей через точку L_2. Все частицы с постоянными Якоби, лежащими между $C=\infty$ и $C=C_2$ (между соответствующими уровнями относительной энергии), будут находиться либо внутри граничной кривой, имеющей форму восьмерки, либо снаружи большого овала, охватывающего оба основных тела. Те частицы, для которых $C_1\leqslant C<C_2$, обладают достаточной относительной энергией, чтобы соединить окрестность m_1 с окрестностью m_2. Если $C<C_1$, то частицы могут покинуть систему, а если $C>C_2$, то соответ-

ствующие частицы не могут изменить положения и перейти из окрестности m_1 в окрестность m_2. Поэтому область $C_2 - C_1 = \Delta_1$ соответствует тем частицам, которые обладают достаточной относительной энергией, чтобы пройти между основными телами, но энергия которых недостаточна для того, чтобы оставить систему.

Величина $\Delta_2 = C_1 - C_3$ соответствует тем частицам, которые обладают достаточной энергией, чтобы покинуть систему (или войти в нее) через отверстие горловины в точке L_1, но энергия которых недостаточна для того, чтобы покинуть систему (или войти в нее) через L_3.

На рис. 4.33 Δ_1 и Δ_2 показаны в функции от μ. Максимум Δ_2 достигается при $\mu = 0{,}136017$ и равен $(\Delta_2)_{\max} = 0{,}376796$, что соответствует $x_1 = -1{,}268623$ и $x_3 = 1{,}056525$.

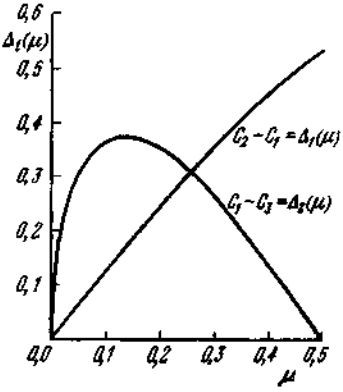


Рис. 4.33. Разность значений постоянных Якоби Δ_i в зависимости от массового параметра μ.

Задача. Покажите, что предыдущее критическое значение μ максимизирует функцию $\Delta_2(\mu) = 2[\Omega(x_1, 0) - \Omega(x_3, 0)]$. Указание: следуйте в сущности тому же методу, который применялся нами при нахождении μ для $(C_1)_{\max}$ в пункте 4.6.8.

Рассмотрим теперь интеграл Якоби в форме $v = (2\Omega - C)^{1/2}$ и вычислим приращение скорости.

$$\Delta v = \frac{\Delta\Omega}{v} - \frac{\Delta C}{2v}.$$

Функция $\Omega(x, y)$ постоянна (в пределах весьма близкого приближения) на малой окружности с центром в одном из основных тел. Поэтому для частиц, которые начинают свои орбиты на высоте, скажем, $h = 100 - 200$ км над поверхностью Земли,

$$\Delta v \approx -\frac{\Delta C}{2v}. \tag{154}$$

При этом значении h имеем

$$r_1 = \frac{h+R}{l} \text{ и } \left(1 - \frac{h+R}{l}\right) < r_2 < \left(1 + \frac{h+R}{l}\right),$$

где $l = 384\,329$ км и $R = 6378$ км. Следовательно, $r_1 = 0{,}01698545$,

$$0{,}98301455 < r_2 < 1{,}01698545$$

и

$$58{,}17694385<\Omega<58{,}17694398.$$

Разница в предельных значениях Ω, как мы видим, лишь в девятой цифре.

Поэтому изменение начальной величины скорости пропорционально приращению C (формула (154)). Величина Δ_1 служит мерой допустимого изменения скорости для частиц, которые перемещаются от m_1 к m_2, но не для тех, которые оставляют систему. Большое значение Δ_1 соответствует большому изменению скорости, а малое изменение Δ_1, имеющее место при малом значении массового параметра, т. е. при $\mu\approx 0$, указывает на исключительно высокую чувствительность к «ошибкам» в скорости, если требуется, чтобы частицы оставались в пределах системы Земля—Луна.

Аналогично максимальное значение Δ_2 определяет наибольшие допустимые ошибки в скорости для частиц, которые оставляют систему (или входят в нее) через отверстие в L_1, но не через горловину в L_3.

§ 4.9. Замечания

Термин «фазовое пространство» был введен Гиббсом [1, т. 2, стр. 6, 10]. Уравнение (2), если оно применяется к ограниченной задаче, указывает на существование «второго интеграла» (в дополнение к интегралу Якоби). Поэтому работы [10—13], на которые мы ссылались в § 2.10, применимы также и здесь.

Необходимое условие существования второго интеграла ограниченной задачи, о котором говорилось в § 4.1, было исследовано экспериментально Эно и Бозн (см. [20] и [21] в списке литературы к гл. 2).

Кривые нулевой скорости были введены Хиллом и использовались им в связи с задачей, носящей теперь его имя. Приложение их к ограниченной задаче было осуществлено им, а также Болином [3]. Пример, а также некоторые понятия, которыми мы пользовались в § 4.2, взяты нами из работы Биркгофа [4, стр. 15].

Введение точек равновесия как особых точек множества состояний движения можно рассматривать как переход к более сложным методам. Более элементарным и непосредственным способом является построение диаграммы свободного тела (во вращающейся системе координат) и нахождение точек, где результирующий вектор силы равен нулю.

Следует отметить, что терминология, а также отсчет этих точек не отличаются единообразием. Чаще всего их называют

стационарными точками, точками Лапласа, точками Лагранжа, точками Эйлера или точками (центрами) либрации. Отсчет их производится либо слева направо, либо справа налево, либо начиная от средней точки.

Первыми работами по этим вопросам можно считать работы Лагранжана [5, т. 6, стр. 229], Лапласа [6, т. 4, книга 10, стр. 304] и Рауса [7]. Более точные хронологические данные приводятся в § 5.7.

В § 4.3 рассматриваются особенности множества состояний движения в регуляризованных координатах. Регуляризация, как и в гл. 3, состоит в исключении особенностей из уравнений движения. С другой стороны, особыми точками функции Якоби $f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\Omega + C$ или $F(u, v, u', v') = u'^2 + v'^2 - 2\Omega^*$ являются точки либрации в системе x, y или системе u, v, см. Биркгоф [4, стр. 15].

По вопросу о трех системах пределов, определяющих положения точек либрации, можно указать следующую литературу: Винтнер [8, стр. 361] для неравенств (16а), Мартин [9] для (16б) и Себехей и Уильямс [10] для (16в).

В § 4.4 вычисляются положения коллинеарных точек либрации. Для этого требуется решить алгебраические уравнения пятой степени. Начальное значение $(\mu/3)^{1/3}$ принимал еще Лаплас [6], позже его принимали Шарлье [11, т. 2, стр. 110] и Мультон [12, стр. 292]. Значение, рекомендуемое нами, применяли Пламмер [13, стр. 240] и Брауэр и Клеменс [14, стр. 261]. Подробное обсуждение этого вопроса проводится в статье Себехея и Уильямс [10]. С результатами расчетов можно познакомиться, помимо [10] и [11], также в работах Койпера [15], Копала [16], Койпера и Джонсона [17], Абъянкара [18], Гудаса [19] и Депри [20]. Небольшая таблица имеется также в книге Винтера [8], в которой приводятся численные результаты, полученные Розенталем [21]. Винтнер внес небольшие исправления в результаты Розенталя, а Розенталь в свою очередь указал на некоторые ошибки в книге Винтнера [8, стр. 438]. Формулы разложения до шестого порядка для определения положения первой и второй коллинеарных точек, приведенные в § 4.4 (пункт А, уравнение (22), и пункт В, уравнение (27)), можно встретить также в работе Депри [20]. Коэффициенты ряда для L_3, приведенные в § 4.4 (пункт В, уравнение (34)), возрастают после восьмой степени. Тем не менее, когда ряд составлен по степеням μ (а не ν), члены убывают быстрее, чем в геометрическом ряде. Два первых члена даны Брауэром и Клеменсом [14]. Полное машинное время для таблиц I, II и III при работе на IBM-7094 составляло 17 сек.

В § 4.6 подробно исследуется функция $\Omega(x, y)$. Это важно не только для изучения свойств кривых нулевой скорости, что

было показано в § 4.7, но также имеет важное значение для ограниченной задачи. Параграф начинается с перечисления свойств функции, которые затем подробно разъясняются и доказываются. Поэтому читатель может принять их, не затрудняя себя их проверкой. Уравнение (39) в сущности было получено Пламмером [13, стр. 238]. Связь между динамической задачей, индикатрисой Дюпена и кривизной поверхности $z=\Omega(x, y)$ была установлена Пламмером [22, 23] с исключительной ясностью. В коллинеарных центрах либрации поверхность, согласно терминологии Пламмера, является антикластической (anticlastic), а в точках L_4 и L_5 — синкластической (synclastic). В той же работе [23] Пламмер приводит доказательство неравенства $\Omega_{xx}(L_i)\Omega_{yy}(L_i)-\Omega_{xy}^2(L_i)<0$ для $i=1, 2, 3$. Среди других источников можно назвать работы Мартина [9] и Винтнера [8]. Максимум функции $|x_1(\mu)|$ приводится в работе Себехея и Уильямс [10].

В работе Мартина [9] 1931 г. содержится, между прочим, ошибочная теорема о том, что расстояния $r_2(L_2)$ и $r_2(L_1)$ меняют свою относительную величину, $r_1 \gtrless r_2$, и что это происходит при $\mu=\mu^*>1/2$. Правильным является условие $r_2(L_2)\leqslant r_2(L_1)$, которое следует из третьего неравенства второй части утверждения 9, пункт 4.6.9. Эту ошибку повторил Розенталь [24] в 1931 г. Она была обнаружена Марковым [25] в 1933 г. и исправлена Рейном [26] в 1936 г. Винтнер [8, стр. 363] в 1941 г. и Егоров [27] в 1957 г. показали, что неравенство не меняет своего направления.

Другая ошибка была допущена Винтнером [8, стр. 362] в доказательстве знака функции $\Omega_{yy}(x_i, 0)$. Она была исправлена Депри [20]. Пламмер в своей работе [13, стр. 242] ее избежал. Доказательство Пламмера приводится нами в пункте 4.6.2 (критическое уравнение (48)). Еще одна ошибка Винтнера [8, стр. 364], на этот раз непосредственно касающаяся доказательства третьего неравенства, исправлена нами в тексте, пункт 4.6.9, часть 2.

Пункты 4.7.1 и 4.7.2 изложены нами весьма подробно. Во-первых, потому что кривые нулевой скорости служат инструментом, посредством которого удается получить соответствующую информацию для ограниченной задачи, и, во-вторых, по той причине, что опыт преподавания убедил автора в том, что переход от простых идей к практическим приложениям часто превращается в одну из главных задач.

В описании форм кривых нулевой скорости тоже не существует общепринятой терминологии, если не считать такого термина, как «овал», которым мы пользовались в пункте 4.7.2, когда говорили об искаженных окружностях. В том случае, когда внутренние овалы, соединяясь, образуют внутреннюю

область «грушеподобной», или «гантелеобразной», формы, вообще не существует какой-либо единой терминологии. Гантели, как известно, симметричны относительно двух перпендикулярных осей, тогда как кривые нулевой скорости имеют только одну ось симметрии (если только μ не равно $1/2$). Известная немецкая конфета «кошачий язык» («Katzenzunge») точнее передает форму этой кривой, но и она имеет две оси симметрии. То же самое можно сказать относительно термина «лемниската», примененного нами для кривой: уравнение лемнискаты отличается от уравнения кривой нулевой скорости. Более точно будет, пожалуй, определять форму кривой как грушеподобную. Форма кривых, названных нами в пункте 4.7.2 III «подковообразными», достаточно хорошо соответствует этому названию. Кривые, о которых говорится в пункте 4.7.2 IV, можно назвать «кривыми, имеющими форму фасоли». Термин «кривая, имеющая форму головастика» был введен Дэнби [28, стр. 192].

В пункте 4.7.3 рассмотрено несколько систем кривых нулевой скорости. Более полная система для $\mu=1/2$ дана Стрёмгреном [29]; она включает кривые, построенные для шестнадцати различных значений постоянной Якоби. На рис. 4.26*а* — *г* рассмотрены кривые, относящиеся к $C=3{,}1$, а на рис. 4.26*д* — к $C=3{,}01$. Ни одна из этих кривых, напоминающих по форме головастиков, не имеет точек заострения, однако широко распространено ошибочное представление о них как о кривых с одной или с двумя точками заострения на концах. Причиной тому послужила поверхностная модификация первоначального чертежа Дарвина [30, т. 4, стр. 12], что явилось источником ошибок для многих подобных рисунков. Рисунок Дарвина показывает кривую нулевой скорости для C_3, которая, разумеется, имеет точку заострения. Любая новая точка заострения на кривых нулевой скорости для значений постоянной Якоби, лежащих в пределах $3<C<C_3$, как правильно указал Поллард, предполагала бы существование шестой точки либрации.

Пункт 4.7.4 представляет интерес также и для вопросов, рассматривавшихся в гл. 3. На две существенно различные возможности введения кривых нулевой скорости в регуляризованную систему указывали Себехей и Пирс [30а]. Слегка отличающийся от рис. 4.28*б* вариант, представляющий кривые нулевой скорости в системе Тиле, предложили Барро и Стрёмгрен [31].

Свойство кривых нулевой скорости (пункт 4.7.5), заключающееся в том, что движение начинается в перпендикулярном направлении, отмечается во всех стандартных учебниках. Обобщение этого свойства на более сложные динамические системы проведено Себехеем [32], который исследовал также связь между кривыми нулевой скорости и орбитами в ограниченной

задаче [33]. Приложение понятия кривой постоянной скорости к динамическим системам более общего вида описали Наон [34] и Себехей [32]. Заслуживают внимания мемуары Моисеева, в которых представлены качественные результаты, полученные посредством искусной комбинации кривых нулевой скорости и свойств кривизны орбит [35]. Трехмерное представление функции $z=\Omega(x, y)$, показанное на рис. 4.30, заимствовано из статьи Депри [36] о задаче Лагранжа; задача эта будет рассмотрена нами в пункте 10.5.1.

Средний безразмерный радиус кривой нулевой скорости, относящийся к Луне, из табл. III, пункт 4.8.1, равен $[|x_5|-|x_7|]/2\approx 0{,}0055$, что можно сравнить со значением экваториального радиуса Земли 109,695, данным Хиллом [2] и Брауэром и Клеменсом [14, стр. 206], и со значением 0,00506, указанным Си [37, т. 2, стр. 227]. В этой последней работе приводятся также постоянные Якоби для других спутников в Солнечной системе.

Приложения к космогонии и двойным системам рассматриваются в работе [38], а также в работах, на которые мы ссылались выше, главным образом в работах [10, 15 — 17]. Особого внимания заслуживает работа [38], в которой приводятся несколько систем кривых нулевой скорости, от $\mu=0{,}3$ до $\mu=0{,}5$. Первоначально эти кривые были представлены в неопубликованных тезисах [39]. Подробное рассмотрение результатов Копала и приложений ограниченной задачи к двойным системам проводится нами в гл. 10 в связи с трехмерными аспектами ограниченной задачи. Приложение кривых нулевой скорости к космогонии Солнечной системы рассматривается в работе Хуанга [40], а приложения к предельному радиусу скопления — в работе Минёра [41]. Следует отметить также учебник Джинса [42], особенный интерес представляет для нас материал на стр. 243 и 396.

Приложения к космодинамике, в дополнение к тем, что были рассмотрены в пункте 4.8.3, можно найти в работе Егорова [27].

Трудности, связанные с построением эквипотенциальных кривых, зависят, конечно, от характера функции. В нашем случае могут быть применены различные методы, такие, например, как метод Шарлье [11], Мультона [12] и Хевисона [39]. Составлены также программы для ЭВМ, входными данными для них служили значение массового параметра и значения постоянных Якоби, что позволяло получить требуемые кривые нулевой скорости. Такие программы были составлены Лоусоном и др. [43], а также Стендишем. Кривые на рис. 4.13 — 4.18, 4.26 и 4.31 построены Стендишем, а кривые на рис. 4.28*а* — *г* — Пирсом из Иельского университета.

§ 4.10. Литература

1. Gibbs J. W. Collected Works.— New York: Longmans Green, 1928.
2. Hill G. W. Researches in the lunar theory.— Am. J. Math., 1878, **1**, 5, 129, 245.
3. Bohlin K. Über die Bedeutung des Prinzips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme.— Acta Math., 1887, **10**, 115.
4. Birkhoff G. D. The restricted problem of three bodies.— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1915, **39**, 1; also Collected Mathematical Papers. New York: Am. Math. Soc., 1950, v. 1, p. 628.
5. Lagrange J. Euvres (M. J.—A. Serret, ed.). — Paris: Gauthier-Villars, 1867—1892, 14 vols.
6. Laplace P. S. Traité de Méchanique Céleste.— Paris: Duprat J. B. M., 1799, vols. 1, 2; Paris: Duprat J. B. M., 1802, v. 3; Paris: Courrier V., 1805, v. 4; Paris: Bachelier, 1823, 1825, v. 5.
7. Routh E. J. On Laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady motion.— Proc. London Math. Soc. 1875, **6**, 86.
8. Wintner A. The Analytical Foundations of Celestial Mechanics.— Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1941. [Русский перевод: Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.]
9. Martin M. H. On the libration points of the restricted problem of three bodies.— Am. J. Math., 1931, **53**, 167.
10. Szebehely V., Williams C. Collinear libration points.— Astron. J., 1964, **69**, 460.
11. Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels.— Leipzig; Von Veit, v. 1, 1902; v. 2, 1907. [Русский перевод: Шарлье К. Небесная механика.— М.: Наука, 1966.]
12. Moulton F. R. Introduction to Celestial Mechanics.— New York: Macmillan, 2nd ed., 1914. [Русский перевод: Мультон Ф. Введение в небесную механику.— М.: ОНТИ, 1935.]
13. Plummer H. C. An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy.— London, New York: Cambridge Univ. Press, 1918. Reprinted by Dover, New York, 1960.
14. Brouwer D., Clemence G. M. Methodes of Celestial Mechanics.— New York: Academic Press, 1961. [Русский перевод: Брауэр Д. Клеменс Дж. Методы небесной механики.— М.: Мир, 1964.]
15. Kuiper G. P. On the interpretation of β lyrae and other close binaries.— Ap. J., 1941, **93**, 133.
16. Kopal Z. A study of the Roche model.— Jodrell Bank Ann., 1954, **1**, 37; Evolutionary processes in close binary systems.— Ann. Astrophys., 1956, **19**, 298.
17. Kuiper G. P., Johnson J. R. Dimensions of contact surfaces in close binaries.— Ap. J., 1956, **123**, 90.
18. Abhyankar K. D. Stability of straight-line solutions in the restricted prblem of three bodies.— Astron. J., 1959, **64**, 163.
19. Goudas G. L. The Lagrangian equilibrium points as functions of μ.— Observatory, 1963, **83**, 187.
20. Deprit A. A note concerning the collinear libration centers.— Icarus, 1965, **4**, 273.
21. Rosenthal J. E. Tbales for the libration points of the restricted problem of three bodies.— Astron. Nachr., 1931, **244**, 169; also Copenhagen Obs. Publ., 1932, No. 81.
22. Plummer H. C. On motion in the neighbourhood of the equilateral points of libration.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1932, **92**, 442.
23. Plummer H. C. On periodic orbits in the neighbourhood of centres of libration.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1901, **62**, 6.

24. Rosenthal J. E. Note on the numerical value of a particular mass ratio in the restricted problem of three bodies.— Am. J. Math., 1931, 53, 258.
25. Markov A. A.— Progr. Astronaut. Sci., 1933, № 3, 75.
26. Rein N. Note on a result of M. H. Martin concerning a particular mass ratio in the restricted problem of three bodies.— Am. J. Math., 1936, 58, 735.
27. Егоров В. А. Некоторые вопросы динамики полета к Луне.— ДАН СССР, 1957, 113, вып. 1, с. 46—49.
28. Danby J. M. A. Fundamentals of Celestial Mechanics.— New York: MacMillan, 1962.
29. Strömgren E. Periodic orbits in the restricted problem of three bodies in their relation to Hill's work on the motion of the moon.— Am. J. Math., 1938, 60, 867.
30. Darwin G. Periodic orbits.— Acta Math., 1897, 21, 99; also Scientific Papers. London; New York: Cambridge Univ. Press, 1911, v. 4.
30a. Szebehely V., Pierce D. Regularization transformations of the Jacobian integral.— Astron. J., 1966, 71, 886.
31. Burrau C., Strömgren E. Numerische Untersuchungen über eine Klasse periodischer Bahnen im problème restreint.— Copenhagen Obs. Publ. 1915, No. 21; also Astron. Nachr., 1915, 200, 313.
32. Szebehely V. On isotach orbits.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1963, 13, 192; Generation of orbits by generalized Hill curves.— J. Franklin Inst., 1963, 275, 371.
33. Szebehely V. Zero velocity curves and orbits in the restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1963, 68, 147.
34. Nahon F. Sur une classe de fonctions de force qui généralisent les fonctions de force radiales.— Compt. Rend., 1964, 259, 65.
35. Moisseiev N. Certain general methods for the qualitative analysis of the forms of motion in problems of celestial mechanics: The method of contact characteristics in the case of two degrees of freedom.— Publ. Sternberg Inst. Astron., 1936, 7, 5.
36. Deprit A. Le problème de Lagrange à masses égales.— Bull. Soc. Math. Belg., 1962, 14, 46.
37. See T. J. J. Researches on the Evolution of the Stellar Systems. V. I, 2. Lynn: Nichols Publ., 1896—1910.
38. Kopal Z. Close Binary Systems. Chapter 3, p. 125; chapter 7, p. 501.— London: Chapman & Hall, 1959.
39. Hewison V. M. Sc. Thesis, Univ. of Manchester, 1956, unpublished.
40. Huang S. S. Some dynamical properties of natural and artificial satellites.— Astron. J., 1961, 66, 157.
41. Mineur H. Équilibre des nuages galactiques et des amas ouverts dans la voie lactée évolution des ames.— Ann. Astrophys., 1939, 2, 1.
42. Jeans J. H. Astronomy and Cosmogony.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1928.
43. Lawson C., Block N., Garrett R. Fortran IV subroutines for contour plotting.— Jet Propulsion Laboratory, Section 314, Tech. Memo № 106, 1965.

Приложение I. ПЕРВАЯ КОЛЛИНЕАРНАЯ ТОЧКА РАВНОВЕСИЯ

А. Первая коллинеарная точка равновесия, $0 \leqslant \mu \leqslant 0{,}09$

μ	x_1	C_1	$(\Omega_{xx})_1$	$(\Omega_{yy})_1$
0,0	—1,0	3,0	9,0	—3,0
0,000001	—1,00694 86021	3,00042 90104	8,91755 48240	—2,95877 74120
0,000002	—1,00875 91723	3,00067 95007	8,89636 93726	—2,94818 45863
0,000003	—1,01003 02284	3,00088 90094	8,88156 70477	—2,94078 35238
0,000004	—1,01104 26656	3,00107 56194	8,86981 72863	—2,93490 86432
0,000005	—1,01189 79954	3,00124 68340	8,85991 86180	—2,92995 93090
0,000006	—1,01264 59173	3,00140 66842	8,85128 36074	—2,92564 18037
0,000007	—1,01331 49243	3,00155 76514	8,84357 58475	—2,92178 79237
0,000008	—1,01392 30521	3,00170 14000	8,83658 26095	—2,91829 13047
0,000009	—1,01448 25253	3,00183 91148	8,83015 98291	—2,91507 99146
0,00001	—1,01500 20578	3,00197 16774	8,82420 48987	—2,91210 24494
0,00002	—1,01891 81309	3,00311 47532	8,77960 13943	—2,88980 06971
0,00003	—1,02166 80892	3,00406 76167	8,74856 91883	—2,87428 45941
0,00004	—1,02385 87664	3,00491 41992	8,72401 26370	—2,86200 63185
0,00005	—1,02570 95531	3,00568 93267	8,70337 63627	—2,85168 81814
0,00006	—1,02732 78936	3,00641 17087	8,68541 25564	—2,84270 62782
0,00007	—1,02877 54028	3,00709 28620	8,66940 73933	—2,83470 36967
0,00008	—1,03009 16901	3,00774 05120	8,65490 99005	—6,82745 49502
0,00009	—1,03130 14017	3,00836 01581	8,64161 49227	—2,82080 74613
0,0001	—1,03242 51917	3,00895 58909	8,62930 52813	—2,81465 26406
0,0002	—1,04089 03393	3,01406 59688	8,53760 86790	—2,76880 43395
0,0003	—1,04682 58214	3,01829 32324	8,47431 93223	—2,73715 96612
0,0004	—1,05154 67105	3,02202 72196	8,42451 87049	—2,71225 93524
0,0005	—1,05552 88539	3,02542 95601	8,38285 40631	—2,69142 70316
0,0006	—1,05900 54417	3,02858 70839	8,34671 89285	—2,67335 94642
0,0007	—1,06211 02699	3,03155 32409	8,31462 57209	—2,65731 28605
0,0008	—1,06492 80850	3,03436 38832	8,28563 65445	—2,64281 82723
0,0009	—1,06751 63637	3,03704 45331	8,25911 79178	—2,62955 89589
0,001	—1,06991 60980	3,03961 41747	8,23461 97385	—2,61730 98693
0,002	—1,08786 44705	3,06137 69572	8,05368 47916	—2,52684 23958
0,003	—1,10018 53084	3,07903 96976	7,93024 15555	—2,46512 07777
0,004	—1,11004 69762	3,09441 02292	7,83381 98114	—2,41690 99057
0,005	—1,11818 88558	3,10823 87169	7,75357 44201	—2,37678 72100
0,006	—1,12522 16700	3,12092 81938	7,68425 62089	—2,34212 81044
0,007	—1,13143 05633	3,13272 67788	7,62288 42279	—2,31144 21140
0,008	—1,13702 10432	3,14380 09159	7,56758 71078	—2,28379 35539
0,009	—1,14210 05525	3,15426 91082	7,51710 56878	—2,25855 28439
0,01	— 1,14676 50421	3,16421 95085	7,47054 83838	—2,23527 41919
0,02	— 1,18007 79046	3,24533 32901	7,12820 00816	—2,06410 00408
0,03	— 1,20119 12467	3,30719 55159	6,89503 66342	—1,94751 83171
0,04	— 1,21643 05676	3,35821 71744	6,71241 56068	—1,85620 78034
0,05	— 1,22809 36671	3,40189 41382	6,55976 95755	—1,77988 47877
0,06	— 1,23730 95359	3,44010 76312	6,42724 52090	—1,71362 26045
0,07	— 1,24472 72109	3,47401 76444	6,30929 09932	—1,65464 54966
0,08	— 1,25075 84229	3,50440 35577	6,20244 40152	—1,60122 20076
0,09	— 1,25568 27620	3,53182 11319	6,10438 65433	—1,55219 32716

Б. Первая коллинеарная точка равновесия, $0{,}1 \leqslant \mu \leqslant 0{,}5$

μ	x_1	C_1	$(\Omega_{xx})_1$	$(\Omega_{yy})_1$
0,10	—1,25969 98329	3,55568 44258	6,01348 47506	—1,50674 23753
0,11	—1,26295 77220	3,57931 24945	5,92854 00754	—1,46427 00377
0,12	—1,26556 96953	3,59995 78458	5,84864 49981	—1,42432 24990
0,13	—1,26762 45599	3,61882 47116	5,77309 44478	—1,38654 72239
0,14	—1,26919 33923	3,63608 12814	5,70132 88069	—1,35066 44034
0,15	—1,27033 40733	3,65185 81838	5,63289 58218	—1,31644 79109
0,16	—1,27109 44417	3,66630 45400	5,56742 43242	—1,28371 21621
0,17	—1,27151 45468	3,67949 23912	5,50460 56000	—1,25230 28000
0,18	—1,27162 82945	3,69152 00093	5,44417 98678	—1,22208 99339
0,19	—1,27146 46743	3,70246 44158	5,38592 62632	—1,19296 31316
0,20	—1,27104 85907	3,71239 33329	5,32965 52852	—1,16482 76431
0,21	—1,27040 20808	3,72136 67142	5,27520 30130	—1,13760 15065
0,22	—1,26954 38749	3,72943 79637	5,22242 65988	—1,11121 32994
0,23	—1,26849 08403	3,73665 49155	5,17120 07368	—1,08560 03684
0,24	—1,26725 78356	3,74306 06316	5,12141 48389	—1,06070 74195
0,25	—1,26585 81025	3,74869 40562	5,07297 07673	—1,03649 53837
0,26	—1,26430 34930	3,75359 05580	5,02578 09912	—1,01289 04956
0,27	—1,26260 46576	3,75778 23828	4,97976 70766	—0,98988 35383
0,28	—1,26077 12295	3,76129 90337	4,93485 84385	—0,96742 92192
0,29	—1,25881 19301	3,76416 75942	4,89099 13027	—0,94549 56513
0,30	—1,25673 46958	3,76641 30018	4,84810 78353	—0,92405 39176
0,31	—1,25454 67701	3,76805 82834	4,80615 54090	—0,90307 77045
0,32	—1,25225 47859	3,76912 47585	4,76508 59306	—0,88254 29903
0,33	—1,24986 48298	3,76963 22140	4,72485 55597	—0,86242 77798
0,34	—1,24738 25111	3,76959 90568	4,68542 37533	—0,84271 18767
0,35	—1,24481 30042	3,76904 24477	4,64675 33739	—0,82337 66839
0,36	—1,24216 10976	3,76797 84178	4,60881 00992	—0,80440 50496
0,37	—1,23943 12324	3,76642 19719	4,57158 21774	—0,78578 10887
0,38	—1,23662 75362	3,76438 71792	4,53498 01694	—0,76749 00847
0,39	—1,23375 38528	3,76188 72546	4,49903 67228	—0,74951 83614
0,40	—1,23081 37694	3,75893 45301	4,46370 63739	—0,73185 31869
0,41	—1,22781 03389	3,75554 10193	4,42896 53721	—0,71448 26961
0,42	—1,22474 76016	3,75171 74748	4,39479 15253	—0,69739 57626
0,43	—1,22162 76031	3,74747 44395	4,36116 40519	—0,68058 20309
0,44	—1,21845 34109	3,74282 17939	4,32803 35085	—0,66403 17543
0,45	—1,21522 76291	3,73776 88957	4,29547 15803	—0,64773 57903
0,46	—1,21195 27117	3,73232 45239	4,26337 10841	—0,63168 55421
0,47	—1,20863 09744	3,72649 74026	4,23174 58280	—0,61587 29140
0,48	—1,20526 46055	3,72029 52423	4,20058 05147	—0,60029 02723
0,49	—1,20185 56751	3,71372 57637	4,16986 08193	—0,58493 04095
0,50	—1,19840 61446	3,70679 62241	4,13957 30238	—0,56978 65118

В. Первая коллинеарная точка равновесия для системы Солнце—Юпитер

η	x_1	C_1	$(\Omega_{xx})_1$	$(\Omega_{yy})_1$
0,00085	—1,06624 80527	3,03571 91482	8,27209 98930	—2,63604 99465
0,00086	—1,06650 56873	3,03598 65411	8,23946 08824	—2,63473 04412
0,00087	—1,06676 12977	3,03625 27583	8,26684 35953	—2,63342 17976
0,00088	—1,06701 49226	3,03651 78177	8,26424 76096	—2,63212 38048
0,00089	—1,06726 65992	3,03678 17370	8,26167 25160	—2,63083 62580
0,00090	—1,06751 63637	3,03704 45331	8,25911 79178	—2,62955 89589
0,00091	—1,06776 42513	3,03730 62227	8,25658 34297	—2,62829 17149
0,00092	—1,06801 02960	3,03756 68219	8,25406 86782	—2,62703 43391
0,00093	—1,06825 45311	3,03782 63464	8,25157 33004	—2,62578 66502
0,00094	—1,06849 69886	3,03808 48118	8,24909 69438	—2,62454 84719
0,00095	—1,06873 76999	3,03834 22329	8,24663 92662	—2,62331 93331
0,00096	—1,06897 66953	3,03859 86244	8,24419 99350	—2,62209 99375
0,00097	—1,06921 40045	3,03885 40006	8,24177 86267	—2,62088 93134
0,00098	—1,06944 96561	3,03910 83753	8,23937 50271	—2,61968 75135
0,00099	—1,06968 36782	3,03936 17622	8,23698 88302	—2,61849 44151
0,00100	—1,06991 60980	3,03961 41747	8,23461 97385	—2,61730 98693
0,00101	—1,07014 69420	3,03986 56255	8,23226 74626	—2,61613 37313
0,00102	—1,07037 62359	3,04011 61275	8,22993 17206	—2,61496 58603
0,00103	—1,07060 40050	3,04036 56929	8,22761 22380	—2,61380 61190
0,00104	—1,07083 02737	3,04061 43339	8,22530 87476	—2,61265 43738
0,00105	—1,07105 50359	3,04086 20624	8,22302 09890	—2,61151 04945

Г. Первая коллинеарная точка равновесия для системы Земля—Луна

μ	x_1	C_1	$(\Omega_{xx})_1$	$(\Omega_{yy})_1$
0,0110	—1,15108 12284	3,17371 99416	7,42725 83457	—2,21362 93229
0,0111	—1,15149 57620	3,17464 73998	7,42308 91100	—2,21154 45550
0,0112	—1,15190 73758	3,17557 09499	7,41894 67443	—2,20947 33721
0,0113	—1,15231 61127	3,17649 06380	7,41483 11298	—2,20741 55649
0,0114	—1,15272 20148	3,17740 65094	7,41074 18589	—2,20537 09290
0,0115	—1,15312 51232	3,17831 86084	7,40667 85300	—2,20333 92650
0,0116	—1,15352 54778	3,17922 69783	7,40264 07562	—2,20132 03781
0,0117	—1,15392 31179	3,18013 16618	7,39862 81563	—2,19931 40781
0,0118	—1,15431 80818	3,18103 27005	7,39464 03587	—2,19732 01794
0,0119	—1,15471 04069	3,18193 01353	7,39067 70005	—2,19533 85003
0,0120	—1,15510 01298	3,18282 40053	7,38673 77270	—2,19336 88635
0,0121	—1,15548 72863	3,18371 43528	7,38282 21914	—2,19141 10957
0,0122	—1,15587 19114	3,18460 12132	7,37893 00549	—2,18946 50274
0,0123	—1,15625 40393	3,18548 46255	7,37506 09869	—2,18753 04930
0,0124	—1,15663 37037	3,18636 46266	7,37121 46609	—2,18560 73304
0,0125	—1,15701 09371	3,18724 12531	7,36739 07625	—2,18369 53812
0,0126	—1,15738 57719	3,18811 45105	7,36358 89803	—2,18179 44904
0,0127	—1,15775 82393	3,18898 45240	7,35980 90123	—2,17990 45062
0,0128	—1,15812 83702	3,18985 12379	7,35605 05504	—2,17802 52802
0,0129	—1,15849 61947	3,19071 47160	7,35231 33343	—2,17615 66671
0,0130	—1,15886 17423	3,19157 49016	7,34859 70496	—2,17429 85248

Д. Первая коллинеарная точка равновесия для планет Солнечной системы

		μ	x_1	C_1
Меркурий	и Солнце	0,00000 01667	—1,00382 03944	3,00013 04262
Венера	и Солнце	0,00000 24510	—1,00937 59347	3,00077 75604
Земля — Луна	и Солнце	0,00000 30359	—1,01007 01938	3,00089 60448
Марс	и Солнце	0,00000 03233	—1,00476 57798	3,00020 26108
Юпитер	и Солнце	0,00095 38754	—1,06883 05211	3,03844 17152
Сатурн	и Солнце	0,00028 55022	—1,04605 72665	3,01771 63548
Уран	и Солнце	0,00004 37254	—1,02458 08107	3,00521 09988
Нептун	и Солнце	0,00005 17732	—1,02601 13038	3,00582 08726
Плутон	и Солнце	0,00000 27778	—1,00977 55079	3,00084 48097
Луна	и Земля	0,01214 09319	—1,15564 50248	3,18407 77812
Луна	и Земля	0,01215 06683	—1,15568 24834	3,18416 41431
Критическое значение		0,03852 08955	—1,21443 88479	3,35119 28504
Значение Дарвина		0,09090 90909	—1,25808 29085	3,53418 16095

		μ	$(\Omega_{xx})_1$	$(\Omega_{yy})_1$
Меркурий	и Солнце	0,00000 01667	8,95444 25439	—2,97722 12719
Венера	и Солнце	0,00000 24510	8,88919 00644	—2,94459 50322
Земля — Луна	и Солнце	0,00000 30359	8,88110 25512	—2,94055 12756
Марс	и Солнце	0,00000 03233	8,94325 59307	—2,97162 79354
Юпитер	и Солнце	0,00095 38754	8,24569 17789	—2,62284 58895
Сатурн	и Солнце	0,00028 55022	8,48247 06954	—2,74123 53482
Уран	и Солнце	0,00004 37254	8,71594 99842	—2,85797 49921
Нептун	и Солнце	0,00005 17732	8,70002 12333	—2,85001 06166
Плутон	и Солнце	0,00000 27778	8,88452 88544	—2,94226 44272
Луна	и Земля	0,01214 09319	7,38122 62548	—2,19061 31274
Луна	и Земля	0,01215 06683	7,38084 72091	—2,19042 36045
Критическое значение		0,03852 08965	6,73721 23782	—1,86860 61891
Значение Дарвина		0,09090 90909	6,09584 76445	—1,54792 38223

Приложение II. ВТОРАЯ КОЛЛИНЕАРНАЯ ТОЧКА РАВНОВЕСИЯ

А. Вторая коллинеарная точка равновесия, $0 \leqslant \mu \leqslant 0{,}09$

μ	x_2	C_2	$(\Omega_{xx})_2$	$(\Omega_{yy})_2$
0,0	—1,0	3,0	9,0	—3,0
0,000001	—0,99308 14476	3,00043 03438	9,08397 15228	—3,04198 58114
0,000002	—0,99128 77034	3,00068 21674	9,10694 88029	—3,05302 44015
0,000003	—0,99003 04373	3,00089 30094	9,12159 71552	—3,06079 85776
0,000004	—0,98903 00939	3,00108 09528	9,13401 15347	—3,06700 57673
0,000005	—0,98818 57174	3,00125 35007	9,14452 00888	—3,07226 00444
0,000006	—0,98744 79071	3,00141 46843	9,15372 45812	—3,07686 22921
0,000007	—0,98678 83534	3,00153 69849	9,16197 02500	—3,08098 51250
0,000008	—0,98618 91443	3,00171 20668	9,16947 57324	—3,08473 78662
0,000009	—0,98563 81428	3,00185 11151	9,17638 93082	—3,08819 46541
0,00001	—0,98512 67004	3,00198 59110	9,18281 67185	—3,09140 83592
0,00002	—0,98127 80036	3,00314 14208	9,23149 81258	—3,11574 80329
0,00003	—0,97858 13298	3,00410 76184	9,26592 81541	—3,13293 40771
0,00004	—0,97643 60530	3,00493 75351	9,29350 68111	—3,14675 34055
0,00005	—0,97462 53925	3,00575 59971	9,31691 12383	—3,15845 56343
0,00006	—0,97304 32603	3,00649 17135	9,33745 58374	—3,16872 79187
0,00007	—0,97162 89044	3,00718 62017	9,35589 52773	—3,17794 76386
0,00008	—0,97034 38880	3,00784 71834	9,37270 83178	—3,18635 40089
0,00009	—9,96916 21723	3,00848 01674	9,38821 87594	—3,19410 93797
0,0001	—0,96806 52061	3,00908 92351	9,40235 92182	—3,20132 96091
0,0002	—0,95980 55124	3,01433 26564	9,51235 49181	—3,25532 74740
0,0003	—0,95401 00579	3,01869 32881	9,59110 91041	—3,29556 45520
0,0004	—0,94939 26354	3,02256 06331	9,65432 30990	—3,32716 19995
0,0005	—0,94548 93755	3,02609 63398	9,70822 64274	—3,35411 32137
0,0006	—0,94207 35233	3,02938 72276	9,75573 11694	—3,37783 55847
0,0007	—0,93901 52447	3,03248 67492	9,79951 55551	—3,39925 77780
0,0008	—0,93623 24594	3,03543 07559	9,83734 47363	—3,41882 23683
0,0009	—0,93366 95555	3,03824 47700	9,87391 27383	—3,43692 13842
0,001	—0,93128 69755	3,04094 77750	9,90762 71128	—3,45331 35554
0,002	—0,91321 85315	3,05404 41038	10,16749 90219	—3,58374 95110
0,003	—0,90037 36546	3,08304 01333	10,35538 12003	—3,67769 06002
0,004	—0,89001 82302	3,09974 35141	10,50814 73504	—3,75407 39302
0,005	—0,88116 83389	3,11490 46584	10,63929 87932	—3,81964 93981
0,006	—0,87334 38158	3,12892 62529	10,75550 82243	—3,87775 41123
0,007	—0,86627 01236	3,14205 65184	10,85933 37495	—3,93031 68747
0,008	—0,85977 39031	3,15445 18462	10,95713 44284	—3,97855 72142
0,009	—0,85373 79033	3,16626 07308	11,04868 75821	—4,02334 37910
0,01	—0,84807 87139	3,17754 13092	11,13049 53811	—4,06524 78493
0,02	—0,80346 56289	3,27192 51343	11,78073 32923	—4,39035 63462
0,03	—0,76934 34855	3,34699 84410	12,25116 74123	—4,62703 37032
0,04	—0,74090 98429	3,41116 43845	12,63833 54983	—4,81946 77499
0,05	—0,71522 53594	3,45791 63874	12,93782 33302	—4,98391 18491
0,06	—0,69159 97593	3,51913 28424	13,25724 25141	—5,12832 12570
0,07	—0,66946 93430	3,56597 12421	13,51677 35874	—5,25838 82937
0,08	—0,64847 95054	3,60920 85320	13,75259 18352	—5,37529 59326
0,09	—0,62839 12557	3,64939 86768	13,96892 83932	—5,48145 43491

Б. Вторая коллинеарная точка равновесия, $0,1 \leqslant \mu \leqslant 0,5$

μ	x_2	C_2	$(\Omega_{xx})_2$	$(\Omega_{yy})_2$
0,10	—0,60903 51100	3,68695 32299	14,16884 95090	—5,58442 47545
0,11	—0,59028 60914	3,72218 93018	14,35465 05198	—5,67732 52599
0,12	—0,57204 91314	3,75535 73453	14,52810 52543	—5,76405 26271
0,13	—0,55425 00599	3,78665 95409	14,69061 68094	—5,84530 84047
0,14	—0,53682 97798	3,81626 20189	14,84331 74522	—5,92165 87261
0,15	—0,51974 03585	3,84430 33313	14,98713 62140	—5,99356 81070
0,16	—0,50294 23195	3,87090 04974	15,12284 62095	—6,06142 31047
0,17	—0,48610 27162	3,89615 34255	15,25109 86455	—6,12551 93228
0,18	—0,47009 37289	3,92014 82166	15,37244 78252	—6,18622 39126
0,19	—0,45399 16226	3,94295 96796	15,48736 98971	—6,24368 49485
0,20	—0,43807 59585	3,96465 32763	15,59627 71610	—6,29813 85805
0,21	—0,42232 89887	3,98528 66491	15,69952 91513	—6,34976 45757
0,22	—0,40673 51836	4,00491 08343	15,79744 13417	—6,39872 06709
0,23	—0,39128 08599	4,02357 12389	15,89029 20662	—6,44514 60331
0,24	—0,37595 38833	4,04130 84335	15,97832 80826	—6,48916 40413
0,25	—0,36074 34284	4,05815 88029	16,06176 90892	—6,53088 45446
0,26	—0,34563 97833	4,07415 50839	16,14081 14252	—6,57040 57126
0,27	—0,33063 41893	4,08932 68140	16,21563 11261	—6,60781 55531
0,28	—0,31571 87081	4,10370 07075	16,28638 64673	—6,64319 32336
0,29	—0,30088 61102	4,11730 09732	16,35322 00931	—6,67661 00465
0,30	—0,28612 97821	4,13014 95841	16,41626 08128	—6,70813 04064
0,31	—0,27144 36469	4,14226 65080	16,47562 51216	—6,73781 25608
0,32	—0,25682 20976	4,15366 99049	16,53141 84965	—6,76570 92483
0,33	—0,24225 99384	4,16437 62970	16,58373 65049	—6,79186 82525
0,34	—0,22775 23360	4,17440 07157	16,63266 57565	—6,81633 28782
0,35	—0,21329 47756	4,18375 68291	16,67828 47237	—6,83914 23618
0,36	—0,19888 30237	4,19245 70525	16,72066 44508	—6,86033 22254
0,37	—0,18451 30950	4,30051 26446	16,75986 91675	—6,87993 45838
0,38	—0,17018 12230	4,20793 37919	16,79595 68219	—6,89797 84110
0,39	—0,15588 38344	4,21472 96813	16,82897 95424	—6,91448 97712
0,40	—0,14161 75256	4,22090 85646	16,85898 40391	—6,92949 20195
0,41	—0,12737 90424	4,22647 78131	16,88601 19515	—6,94300 59757
0,42	—0,11316 52610	4,23144 39667	16,91010 01497	—6,95505 00748
0,43	—0,09897 31706	4,23581 27751	16,93128 09935	—6,96564 04967
0,44	—0,08479 98581	4,23958 92333	16,94958 25544	—6,97479 12772
0,45	—0,07064 24934	4,24277 76128	16,96502 88039	—6,98251 44020
0,46	—0,05649 83159	4,24538 14864	16,97763 97719	—6,98881 98860
0,47	—0,04236 46216	4,24740 37498	16,98743 16758	—6,99371 58379
0,48	—0,02823 87514	4,24884 66380	16,99441 70245	—6,99720 85122
0,49	—0,01411 80789	4,24971 17384	16,99860 46973	—6,99930 23487
0,50	0,0	4,25	17,0	—7,0

В. Вторая коллинеарная точка равновесия для системы Солнце—Юпитер

μ	x_2	C_2	$(\Omega_{xx})_2$	$(\Omega_{yy})_2$
0,00085	—0,93492 62821	3,03685 27030	9,85607 40205	—3,42803 70103
0,00086	—0,93467 11362	3,03713 34324	9,85967 85901	—3,42983 92950
0,00087	—0,93441 79271	3,03741 29860	9,86325 72710	—3,43162 86355
0,00088	—0,93416 66178	3,03769 13819	9,86681 05491	—3,43340 52745
0,00089	—0,93391 71723	3,03796 86375	9,87033 88957	—3,43516 94479
0,00090	—0,93366 95555	3,03824 47700	9,87384 27683	—3,43692 13842
0,00091	—0,93342 37337	3,03851 97960	9,97732 26108	—3,43866 13054
0,00092	—0,93317 96739	3,03879 37315	9,88077 88543	—3,44038 94271
0,00093	—0,93293 73441	3,03906 65925	9,88421 19176	—3,44210 59588
0,00094	—0,93269 67133	3,03933 83942	9,88762 22077	—3,44381 11038
0,00095	—0,93245 77513	3,03960 91516	9,89101 01200	—3,44550 50600
0,00096	—0,93222 04288	3,03987 88794	9,89437 60391	—3,44718 80195
0,00097	—0,93198 47173	3,04014 75919	9,89772 03389	—3,44886 01695
0,00098	—0,93175 05892	3,04041 53030	9,90104 33834	—3,45052 16917
0,00099	—0,93151 80173	3,04068 20263	9,90434 55265	—3,45217 27632
0,00100	—0,93128 69755	3,04094 77750	9,90762 71128	—3,45381 35564
0,00101	—0,93105 74382	3,04121 25621	9,91088 84780	—3,45544 42390
0,00102	—0,93082 93806	3,04147 64004	9,91412 99488	—3,45706 49744
0,00103	—0,93060 27785	3,04173 93021	9,91735 18435	—3,45867 59217
0,00104	—0,93037 76081	3,04200 12794	9,92055 44723	—3,46027 72361
0,00105	—0,93015 38467	3,04226 23441	9,92373 81376	—3,46186 90688

Г. Вторая коллинеарная точка равновесия для системы Земля—Луна

μ	x_2	C_2	$(\Omega_{xx})_2$	$(\Omega_{yy})_2$
0,0110	—0,84273 46477	3,18837 13920	11,20945 43422	—4,10472 71711
0,0111	—0,84221 56618	3,18943 17855	11,21711 13886	—4,10855 56943
0,0112	—0,84169 93078	3,19048 82657	11,22472 75303	—4,11236 37651
0,0113	—0,84118 55462	3,19154 08784	11,23230 33486	—4,11615 16743
0,0114	—0,84067 43384	3,19258 96690	11,23983 94114	—4,11991 97057
0,0115	—0,84016 56465	3,19363 46816	11,24733 62736	—4,12366 81368
0,0116	—0,83965 94336	3,19467 59598	11,25479 44777	—4,12739 72389
0,0117	—0,83915 56638	3,19571 35460	11,26221 45538	—4,13110 72769
0,0118	—0,83865 43019	3,19674 74820	11,26959 70202	—4,13479 85101
0,0119	—0,83815 53134	3,19777 78086	11,27694 23838	—4,13847 11919
0,0120	—0,83765 86648	3,19880 45659	11,28425 11404	—4,14212 55702
0,0121	—0,83716 43231	3,19982 77931	11,29152 37750	—4,14576 18875
0,0122	—0,83667 22562	3,20084 75288	11,29876 07622	—4,14938 03811
0,0123	—0,83618 24327	3,20186 38108	11,30596 25664	—4,15298 12832
0,0124	—0,83569 48218	3,20287 66761	11,31312 96422	—4,15656 48211
0,0125	—0,83520 93934	3,20388 61611	11,32026 24346	—4,16013 12173
0,0126	—0,83472 61180	3,20489 23016	11,32736 13794	—4,16368 06897
0,0127	—0,83424 49669	3,20589 51325	11,33442 69032	—4,16721 34516
0,0128	—0,83376 59118	3,20689 46883	11,34145 94241	—4,17072 97121
0,0129	—0,83328 89250	3,20789 10027	11,34845 93515	—4,17422 96758
0,0130	—0,83281 39796	3,20888 41090	11,35542 70867	—4,17771 35433

Д. Вторая коллинеарная точка равновесия для планет Солнечной системы

	μ	x_2	C_2
Меркурий и Солнце	0,00000 01667	—0,99618 89785	3,00013 06484
Венера и Солнце	0,00000 24510	—0,99067 83249	3,00078 08284
Земля—Луна и Солнце	0,00000 30359	—0,98999 09310	3,00090 00927
Марс и Солнце	0,00000 03233	—0,99524 86596	3,00020 30418
Юпитер и Солнце	0,00095 38754	—0,93236 55874	3,03971 38022
Сатурн и Солнце	0,00028 55022	—0,95476 09796	3,01809 70862
Уран и Солнце	0,00004 37254	—0,97572 94921	3,00526 84024
Нептун и Солнце	0,00005 17732	—0,97433 03181	3,00588 99075
Плутон и Солнце	0,00000 27778	—0,99028 22680	3,00084 85134
Луна и Земля	0,01214 09319	—0,83696 26374	3,20024 56106
Луна и Земля	0,01215 06683	—0,83691 47190	3,20034 49097
Критическое значение	0,03852 08965	—0,74493 51184	3,40220 01842
Значенке Дарвина	0,09090 90909	—0,62660 34962	3,65291 62912

	μ	$(\Omega_{xx})_2$	$(\Omega_{yy})_2$
Меркурий и Солнце	0,00000 01667	9,04602 13700	—3,02301 06859
Венера и Солнце	0,00000 24510	9,11357 72660	—3,05678 86330
Земля—Луна и Солнце	0,00000 30359	9,12208 67063	—3,06104 33531
Марс и Солнце	0,00000 03233	9,05746 48073	—3,02873 24037
Юпитер и Солнце	0,00095 38754	9,89231 71231	—3,44615 85616
Сатурн и Солнце	0,00028 55022	9,58088 69137	—3,29044 34568
Уран и Солнце	0,00004 37254	9,30262 60717	—3,15131 30358
Нептун и Солнце	0,00005 17732	9,32073 62883	—3,16036 81442
Плутон и Солнце	0,00000 27778	9,11847 79472	—3,05923 89735
Луна и Земля	0,01214 09319	11,29449 02969	—4,14724 51484
Луна и Земля	0,01215 06683	11,29519 50582	—4,14759 75291
Критическое значенне	0,03852 08965	12,58607 90893	—4,79303 95446
Значение Дарвина	0,09090 90909	13,98774 25747	—5,49387 12874

Приложение III. ТРЕТЬЯ КОЛЛИНЕАРНАЯ ТОЧКА РАВНОВЕСИЯ

A. Третья коллинеарная точка равновесия, $0 \leqslant \mu \leqslant 0{,}09$

μ	x_3	C_3	$(\Omega_{xx})_3$	$(\Omega_{yy})_3$
0,1	1,0	3,0	3,0	0,0
0,000001	1,00000 04167	3,00000 20000	3,00000 17500	—0,00000 08750
0,000002	1,00000 08333	3,00000 40000	3,00000 35000	—0,00000 17500
0,000003	1,00000 12500	3,00000 60000	3,00000 52500	—0,00000 26250
0,000004	1,00000 16667	3,00000 80000	3,00000 70000	—0,00000 35000
0,000005	1,00000 20833	3,00001 00000	3,00000 87500	—0,00000 43750
0,000006	1,00000 25000	3,00001 20000	3,00001 05000	—0,00000 52500
0,000007	1,00000 29167	3,00001 39999	3,00001 22500	—0,00000 61250
0,000008	1,00000 33333	3,00001 59999	3,00001 40001	—0,00000 70000
0,000009	1,00000 37500	3,00001 79999	3,00001 57501	—0,00000 78750
0,00001	1,00000 41667	3,00001 99999	3,00001 75001	—0,00000 87500
0,00002	1,00000 83333	3,00003 99996	3,00003 50003	—0,00001 75002
0,00003	1,00001 25000	3,00005 99991	3,00005 25007	—0,00002 62504
0,00004	1,00001 66667	3,00007 99984	3,00007 00013	—0,00003 50006
0,00005	1,00002 08333	3,00009 99974	3,00008 75020	—0,00004 37510
0,00006	1,00002 50000	3,00011 99963	3,00010 50029	—0,00005 25014
0,00007	1,00002 91667	3,00013 99950	3,00012 25039	—0,00006 12520
0,00008	1,00003 33333	3,00015 99935	3,00014 00051	—0,00007 00026
0,00009	1,00003 75000	3,00017 99917	3,00015 75065	—0,00007 87532
0,0001	1,00004 16667	3,00019 99898	3,00017 50080	—0,00008 75040
0,0002	1,00008 33333	3,00039 99592	3,00035 00321	—0,00017 50160
0,0003	1,00012 50000	3,00059 99081	3,00052 50722	—0,00026 25361
0,0004	1,00016 66667	3,00079 98367	3,00070 01284	—0,00035 00642
0,0005	1,00020 83333	3,00099 97448	3,00087 52006	—0,00043 76003
0,0006	1,00025 00009	3,00119 95325	3,00105 02888	—0,00052 51444
0,0007	1,00029 16666	3,00139 94997	3,00122 53931	—0,00061 26966
0,0008	1,00033 33333	3,00159 93466	3,00140 05135	—0,00070 02568
0,0009	1,00037 50000	3,00179 91730	3,00157 56499	—0,00078 78250
0,001	1,00041 66666	3,00199 89790	3,00175 08024	—0,00087 54012
0,002	1,00083 33329	3,00399 59151	3,00350 32111	—0,00175 16055
0,003	1,00124 99985	3,00599 08071	3,00525 72280	—0,00262 86140
0,004	1,00166 66632	3,00798 36539	3,00701 28552	—0,00350 64276
0,005	1,00208 33265	3,00997 44543	3,00877 00948	—0,00438 50474
0,006	1,00249 99882	3,01196 32069	3,01052 89488	—0,00526 44744
0,007	1,00291 66479	3,01394 99107	3,01228 94193	—0,00614 47097
0,008	1,00333 33054	3,01593 45645	3,01405 15084	—0,00702 57542
0,009	1,00374 99602	3,01791 71669	3,01581 52182	—0,00790 76091
0,01	1,00416 66120	3,01989 77168	3,01758 05507	—0,00879 02754
0,02	1,00833 28934	3,03959 00559	3,03532 35899	—0,01766 17949
0,03	1,01249 85063	3,05907 57745	3,05323 12375	—0,02661 56188
0,04	1,01666 31048	3,07835 35936	3,07130 53686	—0,03565 28343
0,05	1,02082 63343	3,09742 21971	3,08954 91149	—0,04477 45575
0,06	1,02498 78317	3,11628 02303	3,10796 38672	—0,05398 19336
0,07	1,02914 72245	3,13492 62991	3,12655 22780	—0,06327 61390
0,08	1,03330 41310	3,15335 89680	3,14531 67637	—0,07265 83818
0,09	1,03745 81596	3,17157 67591	3,16425 98073	—0,08212 99036

Б. Третья коллинеарная точка равновесия, $0{,}1 \leqslant \mu \leqslant 0{,}5$

μ	x_3	C_3	$(\Omega_{xx})_3$	$(\Omega_{yy})_3$
0,10	1,04160 89086	3,18957 81504	3,18338 39613	—0,09169 19806
0,11	1,04575 59655	3,20736 15747	3,20269 18504	—0,10134 59252
0,12	1,04989 89069	3,22492 54170	3,22218 61747	—0,11109 30874
0,13	1,05403 72981	3,24226 80137	3,24186 97130	—0,12093 48565
0,14	1,05817 06923	3,25938 76506	3,26174 53259	—0,13087 26630
0,15	1,06229 86302	3,27628 25607	3,28181 59598	—0,14090 79799
0,16	1,06642 06396	3,29295 09222	3,30208 46501	—0,15104 23250
0,17	1,07053 62350	3,30939 08571	3,32255 45259	—0,16127 72630
0,18	1,07464 49164	3,32560 04280	3,34322 88138	—0,17161 44069
0,19	1,07874 61695	3,34157 76366	3,36411 08423	—0,18205 54212
0,20	1,08283 94642	3,35732 04210	3,38520 40469	—0,19260 20235
0,21	1,08692 42547	3,37282 66529	3,40651 19747	—0,20325 59873
0,22	1,09099 99781	3,38809 41353	3,42803 82900	—0,21401 91450
0,23	1,09506 60540	3,40312 05993	3,44978 67797	—0,22489 33899
0,24	1,09912 18836	3,41790 37015	3,47176 13597	—0,23588 06799
0,25	1,10316 68488	3,43244 10203	3,49396 60807	—0,24698 30403
0,26	1,10720 03111	3,44673 00530	3,51640 51352	—0,25820 25676
0,27	1,11122 16109	3,46076 82121	3,53908 28650	—0,26954 14325
0,28	1,11523 00660	3,47455 28213	3,56200 37681	—0,28100 18841
0,29	1,11922 49711	3,48808 11121	3,58517 25078	—0,29258 62539
0,30	1,12320 55959	3,50135 02189	3,60859 39204	—0,30429 69602
0,31	1,12717 11843	3,51435 71749	3,63227 30255	—0,31613 65128
0,32	1,13112 09529	3,52709 89072	3,65621 50350	—0,32810 75175
0,33	1,13505 40893	3,53957 22321	3,68042 53645	—0,34021 26822
0,34	1,13896 97508	3,55177 38489	3,70490 96440	—0,35245 48220
0,35	1,14286 70625	3,56370 03353	3,72967 37306	—0,36483 68653
0,36	1,14674 51157	3,57534 81400	3,75472 37215	—0,37736 18607
0,37	1,15060 29658	3,58671 35774	3,78006 59678	—0,39003 29839
0,38	1,15443 96301	3,59779 28197	3,80570 70899	—0,40285 35449
0,39	1,15825 40857	3,60858 18898	3,83165 39935	—0,41582 69968
0,40	1,16204 52673	3,61907 66536	3,85791 38876	—0,42895 69438
0,41	1,16581 20640	3,62927 28109	3,88449 43030	—0,44224 71515
0,42	1,16955 33169	3,63916 58866	3,91140 31130	—0,45570 15565
0,43	1,17326 78160	3,64875 12206	3,93864 85555	—0,46932 42777
0,44	1,17695 42968	3,65802 39575	3,96623 92569	—0,48311 96284
0,45	1,18061 14366	3,66697 90348	3,99418 42584	—0,49709 21292
0,46	1,18423 78509	3,67561 11710	4,02249 30442	—0,51124 65221
0,47	1,18783 20889	3,68391 48519	4,05117 55722	—0,52558 77861
0,48	1,19139 26290	3,69188 43166	4,08024 23079	—0,54012 11539
0,49	1,19491 78738	3,69951 35416	4,10970 42605	—0,55485 21302
0,50	1,19840 61446	3,70679 62241	4,13957 30236	—0,56978 65118

В. Третья коллинеарная точка равновесия для системы Солнце—Юпитер

μ	x_3	C_3	$(\Omega_{xx})_3$	$(\Omega_{yy})_3$
0,00085	1,00035 41666	3,00169 92623	3,00148 80797	—0,00074 40399
0,00086	1,00035 83333	3,00171 92449	3,00150 55934	—0,00075 27967
0,00087	1,00036 25000	3,00173 92272	3,00152 31073	—0,00076 15537
0,00088	1,00036 66666	3,00175 92093	3,00154 06214	—0,00077 03107
0,00089	1,00037 08333	3,00177 91913	3,00155 81356	—0,00077 90678
0,00090	1,00037 50000	3,00179 91730	3,00157 56499	—0,00078 78250
0,00091	1,00037 91666	3,00181 91545	3,00159 31645	—0,00079 65822
0,00092	1,00038 33333	3,00183 91358	3,00161 06791	—0,00080 53396
0,00093	1,00038 75000	3,00185 91169	3,00162 81940	—0,00081 40970
0,00094	1,00039 16666	3,00187 90978	3,00164 57090	—0,00082 28545
0,00095	1,00039 58333	3,00189 90785	3,00166 32242	—0,00083 16121
0,00096	1,00040 00000	3,00191 90590	3,00168 07395	—0,00084 03698
0,00097	1,00040 41666	3,00193 90393	3,00169 82550	—0,00084 91275
0,00098	1,00040 83333	3,00195 90194	3,00171 57706	—0,00085 78853
0,00099	1,00041 24999	3,00197 89993	3,00173 32865	—0,00086 66432
0,00100	1,00041 66666	3,00199 89790	3,00175 08024	—0,00087 54012
0,00101	1,00042 08333	3,00201 89584	3,00176 83186	—0,00088 41593
0,00102	1,00042 49999	3,00203 89377	3,00178 58348	—0,00089 29174
0,00103	1,00042 91666	3,00205 89168	3,00180 33513	—0,00090 16757
0,00104	1,00043 33333	3,00207 88956	3,00182 08679	—0,00091 03440
0,00105	1,00043 74999	3,00209 88743	3,00183 83847	—0,00091 91923

Г. Третья коллинеарная точка равновесия для системы Земля—Луна

μ	x_3	C_3	$(\Omega_{xx})_3$	$(\Omega_{yy})_3$
0,0110	1,00458 32605	3,02187 62129	3,01934 75081	—1,00967 37541
0,0111	1,00462 49252	3,02207 39495	3,01952 42933	—1,00976 21466
0,0112	1,00466 65898	3,02227 16656	3,01970 10948	—1,00985 05474
0,0113	1,00470 82544	3,02246 93611	3,01987 79125	—1,00993 89562
0,0114	1,00474 99189	3,02266 70360	3,02005 47465	—1,01002 73732
0,0115	1,00479 15834	3,02286 46904	3,02023 15968	—1,01011 57984
0,0116	1,00483 32479	3,02306 23243	3,02040 84633	—1,01020 42317
0,0117	1,00487 49124	3,02325 99376	3,02058 53462	—1,01029 26731
0,0118	1,00491 65767	3,02345 75303	3,02076 22453	—1,01038 11227
0,0119	1,00495 82411	3,02365 51025	3,02093 91607	—1,01046 95804
0,0120	1,00499 99054	3,02385 26541	3,02111 60924	—1,01055 80462
0,0121	1,00504 15697	3,02405 01851	3,02129 30404	—0,01064 65202
0,0122	1,00508 32339	3,02424 76956	3,02147 00047	—0,01073 50023
0,0123	1,00512 48981	3,02444 51855	3,02164 69853	—0,01082 34926
0,0124	1,00516 65623	3,02464 26549	3,02182 39822	—0,01091 19911
0,0125	1,00520 82264	3,02484 01036	3,02200 09953	—0,01100 04977
0,0126	1,00524 98905	3,02503 75319	3,02217 80248	—0,01108 90124
0,0127	1,00529 15545	3,02523 49395	3,02235 50706	—0,01117 75353
0,0128	1,00533 32185	3,02543 23266	3,02253 21327	—0,01126 60663
0,0129	1,00537 48824	3,02562 96931	3,02270 92111	—0,01135 46055
0,0130	1,00541 65463	3, 02582 70390	3,02288 63058	—0,01144 31529

Д. Третья коллинеарная точка равновесия для планет Солнечной системы

		μ	x_3	C_3
Меркурий	и Солнце	0,00000 01667	1,00000 00394	3,00000 03333
Венера	и Солнце	0,00000 24510	1,00000 10212	3,00000 49019
Земля — Луна	и Солнце	0,00000 30359	1,00000 12650	3,00000 60718
Марс	и Солнце	0,00000 03233	1,00000 01347	3,00000 06465
Юпитер	и Солнце	0,00095 38754	1,00039 74480	3,00190 68217
Сатурн	и Солнце	0,00028 55022	1,00011 89592	3,00057 09212
Уран	и Солнце	0,00004 37254	1,00001 82189	3,00008 74489
Нептун	и Солнце	0,00005 17732	1,00002 15722	3,00010 35437
Плутон	и Солнце	0,00000 27778	1,00000 11574	3,00000 55555
Луна	и Земля	0,01214 09319	1,00505 83237	3,02413 10325
Луна	и Земля	0,01215 03683	1,00506 26803	3,02415 02629
Критическое значение		0,03852 08935	1,01604 71952	3,07551 53565
Значение Дарвина		0,09090 90909	1,03783 55421	3,17322 22145

		μ	$(\Omega_{xx})_3$	$(\Omega_{yy})_3$
Меркурий	и Солнце	0,00000 01667	3,00000 02917	—0,00000 01458
Венера	и Солнце	0,00000 24510	3,00000 42892	—0,00000 21446
Земля — Луна	и Солнце	0,00000 30359	3,00000 53128	—0,00000 26564
Марс	и Солнце	0,00000 03233	3,00000 05657	—0,00000 02829
Юпитер	и Солнце	0,00095 38754	3,00167 00120	—0,00083 50060
Сатурн	и Солнце	0,00028 55022	3,00049 96942	—0,00024 98471
Уран	и Солнце	0,00004 37254	3,00007 65210	—0,00003 82605
Нептун	и Солнце	0,00005 17732	3,00009 06053	—0,00004 53027
Плутон	и Солнце	0,00000 27778	3,00000 48611	—0,00000 24306
Луна	и Земля	0,01214 09319	3,02136 54734	—0,01068 27337
Луна	и Земля	0,01215 03683	3,02138 27031	—0,01069 13516
Критическое значение		0,03852 08935	3,03852 16769	—0,03431 08335
Значение Дарвина		0,09090 90909	3,16599 08439	—0,08299 54220

Приложение IV. ЗНАЧЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ ЯКОБИ

А. Значения постоянной Якоби на оси x, $C=2\Omega(x,0)$, для $\mu=0{,}000001$ и $\mu=0{,}00001$

$\mu=0{,}00001$

x	C	x	C
		0,00	$-2\cdot10^{4}$
−3,0	9,66666 77778	0,05	40,00326 29200
−2,9	9,09965 62976	0,10	20,01018 28200
−2,8	8,55428 68560	0,15	13,35591 16285
−2,7	8,03074 19021	0,20	10,04004 26669
−2,6	7,52923 19541	0,25	8,06252 66001
−2,5	7,05000 12133	0,30	6,75668 47607
−2,4	6,59333 45813	0,35	5,83679 88080
−2,3	6,15956 65082	0,40	5,16000 99286
−2,2	5,74909 22531	0,45	4,64695 22559
−2,1	5,36238 23647	0,50	4,25000 63333
−2,0	5,00000 15000	0,55	3,93886 89019
−1,9	4,66263 31945	0,60	3,69333 78056
−1,8	4,35111 28827	0,65	3,49942 69459
−1,7	4,06647 25769	0,70	3,34714 62581
−1,6	3,81000 23021	0,75	3,22916 96984
−1,5	3,58333 61111	0,80	3,14000 27361
−1,4	3,38857 49796	0,85	3,07544 36728
−1,3	3,22846 64832	0,90	3,03222 45218
−1,2	3,10667 45111	0,95	3,00776 52943
−1,1	3,02819 93469	1,00	3,00000 20000
−1,00	4,99999 70000	1,1	3,02818 36053
−0,95	3,00779 99374	1,2	3,10666 82980
−0,90	3,03223 85311	1,3	3,22846 30630
−0,85	3,07545 03888	1,4	3,38857 28537
−0,80	3,14000 53751	1,5	3,58333 46889
−0,75	3,22916 94445	1,6	3,81000 13005
−0,70	3,34714 35851	1,7	4,06647 18445
−0,65	3,49942 19806	1,8	4,35111 23316
−0,60	3,69333 04445	1,9	4,66263 27700
−0,55	3,93885 88329	2,0	5,00000 11667
−0,50	4,24999 30000	2,1	5,36238 20987
−0,45	4,64698 47599	2,2	5,74909 20382
−0,40	5,15998 66334	2,3	6,15956 63320
−0,35	5,83676 77505	2,4	6,59333 44355
−0,30	6,75664 16350	2,5	7,05000 10914
−0,25	8,06246 36668	2,6	7,52923 18514
−0,20	10,03994 35003	2,7	8,03074 18149
−0,15	13,35573 44647	2,8	8,55428 67814
−0,10	20,00978 32244	2,9	9,09965 62334
−0,05	40,00166 31221	3,0	9,66666 77222

$\mu=00001$

x	C	x	C
		0,00	$-2\cdot10^{4}$
−3,0	9,66667 77777	0,05	40,01013 05680
−2,9	9,09966 64239	0,10	20,01182 83619
−2,8	8,55429 71314	0,15	13,35661 63306
−2,7	8,03075 23544	0,20	10,04042 66867
−2,6	7,52924 26182	0,25	8,06276 60096
−2,5	7,05001 21332	0,30	6,75684 76120
−2,4	6,59334 58133	0,35	5,83691 60245
−2,3	6,15957 81255	0,40	5,16009 92876
−2,2	5,74910 43524	0,45	4,64702 25597
−2,1	5,36239 50750	0,50	4,25006 33341
−2,0	5,00001 49998	0,55	3,93891 62922
−1,9	4,66264 77344	0,60	3,69337 80559
−1,8	4,35112 88268	0,65	3,49946 17664
−1,7	4,06649 04741	0,70	3,34717 68669
−1,6	3,81002 30203	0,75	3,22919 69842
−1,5	3,58336 11104	0,80	3,14002 73612
−1,4	3,38860 69376	0,85	3,07546 61395
−1,3	3,22951 09841	0,90	3,03224 52177
−1,2	3,10674 61063	0,95	3,00778 45223
−1,1	3,02835 70877	1,00	3,00001 99999
−1,00	4,99997 00003	1,1	3,02819 96890
−0,95	3,00813 00250	1,2	3,10668 29797
−0,90	3,03236 53291	1,3	3,22847 66837
−0,85	3,07553 33081	1,4	3,38858 56802
−0,80	3,14005 37556	1,5	3,58334 68888
−0,75	3,22919 44484	1,6	3,81001 30047
−0,70	3,34715 01392	1,7	4,06648 31513
−0,65	3,49941 21160	1,8	4,35112 33156
−0,60	3,69330 44471	1,9	4,66264 34892
−0,55	3,93881 56042	2,0	5,00001 16666
−0,50	4,24993 00031	2,1	5,36239 24152
−0,45	4,64684 76019	2,2	5,74910 22003
−0,40	5,15986 83382	2,3	6,15957 63630
−0,35	5,83660 60820	2,4	6,59334 43545
−0,30	6,75641 63591	2,5	7,05001 09142
−0,25	8,06213 66829	2,6	7,52924 15910
−0,20	10,03943 50302	2,7	8,03075 14821
−0,15	13,35484 47068	2,8	8,55429 63855
−0,10	20,00783 24423	2,9	9,09966 57821
−0,05	39,99413 27324	3,0	9,66667 72221

Б. Значения постоянной Якоби на оси x, $C=2\Omega(x, 0)$, для $\mu=0{,}0001$ и $\mu=0{,}001$

$\mu=0{,}0001$				$\mu=0{,}001$			
x	C	x	C	x	C	x	C
		0,00	$\sim 2\cdot 10^4$			0,00	$\sim 2\cdot 10^3$
−3,0	9,66677 77657	0,05	40,07391 27839	−3,0	9,66777 65742	0,05	40,78091 57818
−2,9	9,09976 76765	0,10	20,02829 93427	−2,9	9,10077 91027	0,10	20,19463 70180
−2,8	8,55439 98739	0,15	13,35366 78475	−2,8	8,55542 61668	0,15	13,43463 56172
−2,7	8,03085 68357	0,20	10,01423 85716	−2,7	8,03190 08054	0,20	10,08286 80617
−2,6	7,52934 92466	0,25	8,03515 09532	−2,6	7,53041 43092	0,25	8,08919 66666
−2,5	7,05012 13189	0,30	6,75847 65889	−2,5	7,05121 18929	0,30	6,77481 28934
−2,4	6,59345 81196	0,35	5,83809 53912	−2,4	6,59457 98212	0,35	5,84990 99465
−2,3	6,15969 42884	0,40	5,16039 30449	−2,3	6,16085 14016	0,40	5,16994 73896
−2,2	5,74922 53235	0,45	4,64772 57056	−2,2	5,75043 34748	0,45	4,65476 79037
−2,1	5,36252 21612	0,50	4,25033 31122	−2,1	5,36379 12563	0,50	4,25534 12338
−2,0	5,00014 99775	0,55	3,93389 02417	−2,0	5,00149 77516	0,55	3,94413 44179
−1,9	4,66279 31101	0,60	3,69378 05901	−1,9	4,66424 45317	0,60	3,69780 90172
−1,8	4,35128 82400	0,65	3,49939 99924	−1,8	4,35287 95546	0,65	3,50329 42908
−1,7	4,06666 94115	0,70	3,34748 29376	−1,7	4,06845 52417	0,70	3,35054 52517
−1,6	3,81023 01555	0,75	3,22946 98497	−1,6	3,81229 68058	0,75	3,23219 92529
−1,5	3,58351 10359	0,80	3,14027 33151	−1,5	3,58510 36076	0,80	3,14278 65110
−1,4	3,38892 64131	0,85	3,07539 03078	−1,4	3,39211 07282	0,85	3,07793 75562
−1,3	3,22895 58316	0,90	3,03245 21750	−1,3	3,23338 52554	0,90	3,03452 15953
−1,2	3,10746 05268	0,95	3,00797 67938	−1,2	3,11456 29040	0,95	3,00989 92452
−1,1	3,02993 27343	1,00	3,00019 99359	−1,1	3,04551 48767	1,00	3,00199 95033
−1,00	4,99970 00800	1,1	3,02335 05201	−1,00	4,99700 29960	1,1	3,02995 82132
−0,95	3,01143 90764	1,2	3,10682 97898	−0,95	3,04526 16988	1,2	3,10829 71615
−0,90	3,03335 51305	1,3	3,22851 29831	−0,90	3,04873 70912	1,3	3,22997 51793
−0,85	3,07385 33388	1,4	3,38871 39381	−0,85	3,08474 79057	1,4	3,38999 56543
−0,80	3,14353 80303	1,5	3,58346 88791	−0,80	3,14543 12787	1,5	3,58468 79125
−0,75	3,22944 49375	1,6	3,81013 00031	−0,75	3,23198 38582	1,6	3,81129 94836
−0,70	3,34721 59577	1,7	4,06659 62093	−0,70	3,34790 19432	1,7	4,06772 58892
−0,65	3,49931 37139	1,8	4,35123 31468	−0,65	3,49835 40830	1,8	4,35233 05504
−0,60	3,69304 47076	1,9	4,66275 03727	−0,60	3,69047 07659	1,9	4,66382 15945
−0,55	3,93838 35625	2,0	5,00011 66564	−0,55	3,93408 76443	2,0	5,00116 56388
−0,50	4,24930 03160	2,1	5,36249 55716	−0,50	4,24303 09681	2,1	5,36352 62180
−0,45	4,64597 63563	2,2	5,74920 38120	−0,45	4,63729 71979	2,2	5,75021 99112
−0,40	5,15858 33163	2,3	6,15967 66638	−0,40	5,14688 15391	2,3	6,16037 87545
−0,35	5,83498 99919	2,4	6,59344 35355	−0,35	5,81888 83564	2,4	6,59413 44279
−0,30	6,75416 44855	2,5	7,05010 91326	−0,30	6,73179 39845	2,5	7,05109 03998
−0,25	8,05886 82916	2,6	7,52983 89772	−0,25	8,02682 85895	2,6	7,53031 19242
−0,20	10,03135 30198	2,7	8,03084 81458	−0,20	9,98380 03364	2,7	8,03181 38523
−0,15	13,34595 32332	2,8	8,55439 24172	−0,15	13,25764 27921	2,8	8,55535 18209
−0,10	19,93834 42149	2,9	9,09976 12593	−0,10	19,79540 19119	2,9	9,10071 51255
−0,05	39,91897 82031	3,0	9,66577 22120	−0,05	39,18207 70698	3,0	9,66772 11991

В. Значения постоянной Якоби на оси x, $C=2\Omega(x, 0)$, для $\mu=0{,}01$ и $\mu=0{,}1$

$\mu=0{,}01$				$\mu=0{,}1$			
x	C	x	C	x	C	x	C
		0,00	$-2\cdot10^3$			0,00	18,31222 22222
−3,0	9,67765 75577	0,05	49,53163 07692	−3,0	9,76588 32565	0,05	36,30302 63158
−2,9	9,11078 35753	0,10	22,03824 86239	−2,9	9,20000 00000	0,10	∞
−2,8	8,56557 60583	0,15	14,19280 10025	−2,8	8,65595 28131	0,15	36,30297 61905
−2,7	8,04222 32127	0,20	10,48775 93543	−2,7	8,13396 82540	0,20	18,31181 81818
−2,6	7,54094 30499	0,25	8,33852 90323	−2,6	7,63431 37255	0,25	12,32641 30435
−2,5	7,06198 96546	0,30	6,94299 00829	−2,5	7,15730 76923	0,30	9,34666 66667
−2,4	6,60566 11606	0,35	5,97065 47849	−2,4	6,70333 33333	0,35	7,57250 00000
−2,3	6,17231 00327	0,40	5,26121 15651	−2,3	6,27285 71429	0,40	6,40384 61538
−2,2	5,76235 65274	0,45	4,72628 88889	−2,2	5,86645 48495	0,45	5,58350 52910
−2,1	5,37630 66436	0,50	4,31413 91453	−2,1	5,48484 84848	0,50	4,98285 71429
−2,0	5,01477 66071	0,55	3,99205 36797	−2,0	5,12896 10390	0,55	4,53043 10345
−1,9	4,67852 72366	0,60	3,73841 08197	−1,9	4,80000 00000	0,60	4,18333 33333
−1,8	4,36851 40100	0,65	3,53834 51220	−1,8	4,49959 06433	0,65	3,91425 95308
−1,7	4,08596 37509	0,70	3,38129 95369	−1,7	4,23000 00000	0,70	3,70500 00000
−1,6	3,83250 05498	0,75	3,25956 99285	−1,6	3,99453 78151	0,75	3,54294 28904
−1,5	3,61037 39644	0,80	3,16740 22983	−1,5	3,79833 33333	0,80	3,41907 56303
−1,4	3,42293 58070	0,85	3,10041 24224	−1,4	3,65000 00000	0,85	3,32678 57143
−1,3	3,27586 65107	0,90	3,05520 11117	−1,3	3,56571 42857	0,90	3,26111 11111
−1,2	3,18150 17316	0,95	3,02909 22571	−1,2	3,58128 20513	0,95	3,21825 51669
−1,1	3,18550 19656	1,00	3,01995 02513	−1,1	3,80000 00000	1,00	3,19526 31579
−1,00	4,97029 60396	1,1	3,04598 31395	−1,00	4,72636 36364	1,1	3,20000 00000
−0,90	3,47490 00000	1,2	3,12289 79663	−0,95	6,70678 57143	1,2	3,26160 17316
−0,95	3,21794 63980	1,3	3,24351 73454	−0,90	∞	1,3	3,37090 90909
−0,85	3,17758 27243	1,4	3,40272 86325	−0,85	6,70723 68421	1,4	3,52157 19064
−0,80	3,19960 76023	1,5	3,59679 11589	−0,80	4,73000 00000	1,5	3,70904 76190
−0,75	3,26099 64912	1,6	3,82290 50266	−0,75	4,10348 03922	1,6	3,93000 00000
−0,70	3,35759 79116	1,7	4,07895 25774	−0,70	3,83000 00000	1,7	4,18192 30769
−0,65	3,49122 35294	1,8	4,36321 37102	−0,65	3,71250 00000	1,8	4,46289 76035
−0,60	3,66708 36906	1,9	4,67443 94628	−0,60	3,68809 52381	1,9	4,77142 85714
−0,55	3,89356 88312	2,0	5,01156 38376	−0,55	3,73315 93407	2,0	5,10633 39388
−0,50	4,18306 92677	2,1	5,37374 09130	−0,50	3,84000 00000	2,1	5,46666 66667
−0,45	4,55378 48631	2,2	5,76027 91815	−0,45	4,00967 17172	2,2	5,85165 89862
−0,40	5,03306 65978	2,3	6,17060 78483	−0,40	4,25000 00000	2,3	6,26068 18182
−0,35	5,66365 00000	2,4	6,60425 15879	−0,35	4,57613 63636	2,4	6,69321 47563
−0,30	6,51598 22814	2,5	7,06081 13819	−0,30	5,01333 33333	2,5	7,14882 35294
−0,25	7,71481 16424	2,6	7,53994 97951	−0,25	5,60304 94505	2,6	7,62714 28571
−0,20	9,50378 78843	2,7	8,04137 95338	−0,20	6,41571 42857	2,7	8,12786 32479
−0,15	12,43120 95238	2,8	8,56485 44642	−0,15	7,57916 66667	2,8	8,65072 07207
−0,10	18,04237 19101	2,9	9,11016 24954	−0,10	9,35000 00000	2,9	9,19548 87218
−0,05	33,03367 65957	3,0	9,67711 98892	−0,05	12,32779 41176	3,0	9,76197 17065

Г. Значения постоянной Якоби на оси x, $C=2\Omega(x, 0)$, для $\mu=0{,}2$ и $\mu=0{,}3$

$\mu=0{,}2$				$\mu=0{,}3$			
x	C	x	C	x	C	x	C
		0,00	8,66000 00000			0,00	5,73380 95238
−3,0	9,84181 81818	0,05	11,29975 49020	−3,0	9,89511 19895	0,05	6,61250 00000
−2,9	9,27660 52227	0,10	16,61444 44444	−2,9	9,33022 72727	0,10	7,97000 00000
−2,8	8,73333 33333	0,15	32,60855 26316	−2,8	8,78732 71889	0,15	10,27171 56863
−2,7	8,21225 04537	0,20	∞	−2,7	8,26666 66667	0,20	14,91666 66667
−2,6	7,71365 07937	0,25	32,60345 23810	−2,6	7,76854 80944	0,25	28,90467 89474
−2,5	7,23788 67102	0,30	16,61363 63636	−2,5	7,29333 33333	0,30	∞
−2,4	6,78538 46154	0,35	11,29699 27536	−2,4	6,84145 96950	0,35	28,90392 85714
−2,3	6,35666 66667	0,40	8,65333 33333	−2,3	6,41346 15385	0,40	14,91545 45455
−2,2	5,95238 09524	0,45	7,08250 00000	−2,2	6,01000 00000	0,45	10,26757 24638
−2,1	5,57334 44816	0,50	6,05102 56410	−2,1	5,63190 47619	0,50	7,96000 00000
−2,0	5,22060 60606	0,55	5,33022 48677	−2,0	5,28023 41137	0,55	6,59250 00000
−1,9	4,89554 11255	0,60	4,80571 42857	−1,9	4,95636 36364	0,60	5,69820 51282
−1,8	4,60000 00000	0,65	4,41391 76245	−1,8	4,66212 12121	0,65	5,07694 44444
−1,7	4,33654 97076	0,70	4,11066 66667	−1,7	4,40000 00000	0,70	4,62857 14286
−1,6	4,10688 88889	0,75	3,88965 54252	−1,6	4,17350 87719	0,75	4,29740 42146
−1,5	3,92260 50420	0,80	3,71666 66667	−1,5	3,98777 77778	0,80	4,05000 00000
−1,4	3,78666 66667	0,85	3,58646 27040	−1,4	3,85067 22689	0,85	3,86505 13196
−1,3	3,71666 66667	0,90	3,49100 84034	−1,3	3,77500 00000	0,90	3,72833 33333
−1,2	3,74285 71429	0,95	3,42440 47619	−1,2	3,78333 33333	0,95	3,62998 25175
−1,1	3,93410 25641	1,00	3,38222 22222	−1,1	3,92000 00000	1,00	3,56294 11765
−1,00	4,49333 33333	1,1	3,35830 40936	−1,00	4,28692 30769	1,1	3,50833 33333
−0,95	5,12047 10145	1,2	3,40000 00000	−0,95	4,83250 00000	1,2	3,52134 50292
−0,90	6,42454 54545	1,3	3,49502 16450	−0,90	5,18666 66667	1,3	3,60000 00000
−0,85	10,40630 95238	1,4	3,63515 15152	−0,85	6,14989 13043	1,4	3,72844 15584
−0,80	∞	1,5	3,81468 22742	−0,80	8,12272 72727	1,5	3,89939 39394
−0,75	10,40671 05263	1,6	4,02952 38095	−0,75	14,10583 33333	1,6	4,10779 26421
−0,70	6,42777 77778	1,7	4,27666 66667	−0,70	∞	1,7	4,35000 00000
−0,65	5,13151 96078	1,8	4,55384 61538	−0,65	14,10618 42105	1,8	4,62333 33333
−0,60	4,52000 00000	1,9	4,85932 46187	−0,60	8,12555 55556	1,9	4,92576 92308
−0,55	4,19583 33333	2,0	5,19174 60317	−0,55	6,15955 88235	2,0	5,25575 16340
−0,50	4,02904 76190	2,1	5,55003 62976	−0,50	5,21000 00000	2,1	5,61296 34921
−0,45	3,96689 56044	2,2	5,93333 33333	−0,45	4,67916 66667	2,2	5,99373 86370
−0,40	3,98666 66667	2,3	6,34093 70200	−0,40	4,37000 00000	2,3	6,40000 00000
−0,35	4,08047 97980	2,4	6,77227 27273	−0,35	4,20063 18681	2,4	6,83021 50538
−0,30	4,25000 00000	2,5	7,22686 42951	−0,30	4,13333 33333	2,5	7,28386 36364
−0,25	4,50532 82828	2,6	7,70431 37255	−0,25	4,15128 78788	2,6	7,76051 38310
−0,20	4,86666 66667	2,7	8,20428 57143	−0,20	4,25000 00000	2,7	8,25980 39216
−0,15	5,36931 31868	2,8	8,72649 57265	−0,15	4,43452 02020	2,8	8,78142 85714
−0,10	6,07476 19048	2,9	9,27070 07007	−0,10	4,72000 00000	2,9	9,32512 82051
−0,05	7,09583 33333	3,0	9,83669 17293	−0,05	5,13557 69231	3,0	9,89008 06807

Д. Значения постоянной Якоби на оси x, $C=2\Omega(x, 0)$, для $\mu=0{,}4$ и $\mu=0{,}5$

$\mu=0{,}4$				$\mu=0{,}5$	
x	C	x	C	x	C
		0,00	4,57333 33333	0,00	4,25000 00000
−3,0	9,92627 45098	0,05	4,90184 06593	0,05	4,29290 40404
−2,9	9,36146 24506	0,10	5,39285 71429	0,10	4,42666 66667
−2,8	8,81863 63636	0,15	6,12916 66667	0,15	4,66810 43956
−2,7	8,29804 91551	0,20	7,28000 00000	0,20	5,05190 47619
−2,6	7,80000 00000	0,25	9,24367 64706	0,25	5,64583 33333
−2,5	7,32484 57350	0,30	13,21888 88889	0,30	6,69000 00000
−2,4	6,87301 58730	0,35	25,20460 52632	0,35	8,21583 72549
−2,3	6,44503 26797	0,40	∞	0,40	11,52111 11111
−2,2	6,04153 84615	0,45	25,20440 47619	0,45	21,50513 15789
−2,1	5,66333 33333	0,50	13,21727 27273	0,50	∞
−2,0	5,31142 85714	0,55	9,23815 21739	0,55	21,50488 09524
−1,9	4,98712 37458	0,60	7,26666 66667	0,60	11,51909 09091
−1,8	4,69212 12121	0,65	6,10250 00000	0,65	8,20873 18841
−1,7	4,42870 12987	0,70	5,34538 46154	0,70	6,57333 33333
−1,6	4,20000 00000	0,75	4,82366 40212	0,75	5,61250 00000
−1,5	4,01046 78363	0,80	4,45142 85714	0,80	4,99256 41026
−1,4	3,86666 66667	0,85	4,18089 08046	0,85	4,57038 35979
−1,3	3,77873 94958	0,90	3,98333 33333	0,90	4,27428 57143
−1,2	3,76333 33333	0,95	4,84044 72141	0,95	4,06437 78946
−1,1	3,85000 00000	1,00	3,74000 00000	1,00	3,91666 66667
−1,00	4,09714 28571	1,1	3,63487 39496	1,1	3,75166 66667
−0,95	4,31710 31746	1,2	3,62444 44444	1,2	3,70680 67227
−0,90	4,63974 35897	1,3	3,68498 59649	1,3	3,74555 55556
−0,85	5,12250 00000	1,4	3,80000 00000	1,4	3,84742 69006
−0,80	5,88000 00000	1,5	3,96186 14719	1,5	4,00000 00000
−0,75	7,17931 15942	1,6	4,16363 63636	1,6	4,19328 13853
−0,70	9,82090 90909	1,7	4,40090 30100	1,7	4,42787 87879
−0,65	17,80335 71429	1,8	4,67047 61905	1,8	4,69401 33779
−0,60	∞	1,9	4,97000 00000	1,9	4,99095 23810
−0,55	17,80565 78947	2,0	5,29769 23077	2,0	5,31666 66667
−0,50	9,82333 33333	2,1	5,65217 86492	2,1	5,66961 53846
−0,45	7,18759 80392	2,2	6,03238 09524	2,2	6,04860 56645
−0,40	5,90000 00000	2,3	6,43744 10163	2,3	6,45269 84127
−0,35	5,16250 00000	2,4	6,86666 66667	2,4	6,88114 33757
−0,30	4,71095 23810	2,5	7,31949 30876	2,5	7,33333 33333
−0,25	4,43436 81319	2,6	7,79545 45455	2,6	7,80877 11214
−0,20	4,28000 00000	2,7	8,29416 33729	2,7	8,30704 54545
−0,15	4,22209 59596	2,8	8,81529 41176	2,8	8,82781 29117
−0,10	4,25000 00000	2,9	9,35857 14286	2,9	9,37078 43137
−0,05	4,36371 21212	3,0	9,92376 06838	3,0	9,93571 42857

Глава 5

ДВИЖЕНИЕ ВБЛИЗИ ТОЧЕК РАВНОВЕСИЯ

§ 5.1. Введение

Частицы, помещенные в пяти точках равновесия, являются стационарными; эти точки представляют собой пять частных решений ограниченной задачи и могут быть найдены путем отыскания решений в форме $x=\text{const}$, $y=\text{const}$. В этом случае дифференциальные уравнения движения требуют, чтобы $\Omega_x=\Omega_y=0$. Эти соотношения составляют основу исследования, проведенного в гл. 4.

С физической точки зрения пять равновесных решений представляют собой точки, где силы, действующие на третье тело во вращающейся системе, уравновешены. Так как решения являются стационарными, то движение относительно вращающейся системы отсутствует, причем рассматриваются только гравитационные и центробежные силы. Построив для треугольной и коллинеарной конфигураций простые фигуры, называемые иногда диаграммами свободного тела, читатель сможет проверить некоторые из результатов предыдущей главы без какой-либо информации относительно сложностей, присущих особенностям множества состояний движения.

Как уже говорилось, эти точки равновесия являются решениями уравнений движения, но, кроме того, вблизи этих точек существуют другие семейства решений. Рассмотрению этих решений и посвящена данная глава.

Существование точек либрации вообще можно рассматривать как пример важного математического предсказания. Лагранж в 1772 г. доказал существование таких решений для ограниченной задачи, образованной системой Солнце—Юпитер, а их физическое существование (астероиды группы Троянцев) было обнаружено наблюдениями в 1906 г. астероида этой группы Ахиллеса 588. Список четырнадцати обнаруженных астероидов группы Троянцев, орбитальные элементы которых были рассчитаны и опубликованы в 1965 г., приводятся в табл. I, пункт 5.6.1.

В 1960-х годах в связи с возросшим интересом к исследованиям космического пространства, естественно, встал вопрос о

существовании таких точек и роли их для других планет, в особенности для системы Земля—Луна.

Интересно отметить, что еще до получения подробных результатов, изложенных в этой главе, открытие Лагранжа, касающееся треугольных точек либрации, вообще говоря, можно было применить к Солнечной системе. Все планеты, образующие вместе с Солнцем ограниченную задачу трех тел, могут дать устойчивые стационарные решения, в том числе система Земля — Луна. Обнаружение физической реализации многих из этих решений пока еще только ожидается. С астрономической точки зрения интерес к этим решениям объясняется другими возможностями. Если имеются устойчивые стационарные решения для различных комбинаций небесных тел, то с практической точки зрения становится возможным расположение наблюдательных платформ в этих точках.

Не многие главы в работах по ограниченной задаче имеют такое большое значение и представляют такой большой общий интерес, как глава, посвященная точкам либрации. Нелинейные аспекты задачи представляют интерес для математиков. Потенциальные возможности, которые откроются в случае, если удастся поместить аппаратуру в точках либрации, смогут подсказать физикам новые пути исследования космического пространства. Проблемы, связанные с научными космическими станциями, занимают ведущих специалистов в области космической техники.

Излагаемый ниже материал состоит из четырех основных параграфов. В § 5.2 излагаются общие идеи устойчивости линейных и нелинейных систем. В §§ 5.3 и 5.4 приводятся решения линеаризованных уравнений и исследуется движение и устойчивость в окрестности точек равновесия. Распространение полученных результатов на нелинейные случаи производится в § 5.5. § 5.6 посвящен приложениям.

§ 5.2. Устойчивость решений линейных и нелинейных систем

В этом параграфе мы изложим некоторые математические идеи и теоремы, которые будут нам полезны в дальнейшем. В линейных и нелинейных задачах рассматривается поведение динамической системы в положениях равновесия и вблизи них.

Процесс линеаризации в точках либрации не встречает особых трудностей. Исследование устойчивости линейных систем в принципе тоже не приводит к каким-либо существенным сложностям. Мы коротко изложим здесь известную теорию устойчивости линейных дифференциальных уравнений, с тем чтобы сделать приложение их к нелинейной системе более точным.

Затем мы проведем интерпретацию идей Ляпунова и коротко изложим некоторые результаты Ла Салля и Лефшеца, Чезари и Коддингтона и Левинсона, после чего перейдем к нелинейным задачам.

В пункте 5.2.1 излагаются основные идеи устойчивости, в пункте 5.2.2 рассматриваются задачи устойчивости решений в положении равновесия, а в пункте 5.2.3 производится линеаризация уравнений ограниченной задачи вблизи точек либрации.

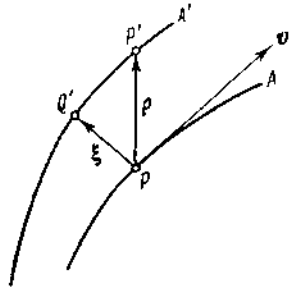


Рис. 5.1. Изохронное и нормальное соответствие.

5.2.1. Устойчивость по Ляпунову и орбитальная устойчивость. Задачу об устойчивости орбит можно сформулировать геометрически, следуя Сингу. На рис. 5.1 показаны первоначальная орбита A и возмущенная орбита A', т. е. две сравниваемые близкие орбиты, соотношение между которыми нам надлежит установить.

На рисунке вектор ρ выражает отклонение в момент времени t, а точки P и P' соответствуют положениям частицы на орбитах A и A' в этот же момент времени. Этот вектор определяет *изохронное соответствие* между двумя орбитами. Расстояние между точками равно

$$|\rho| = PP'.$$

Вектор ξ выражает нормальное отклонение. Расстояние

$$|\xi| = PQ'$$

не является расстоянием между точками, соответствующими одному и тому же моменту времени. Вектор ξ определяет *нормальное соответствие* между двумя орбитами.

Векторы ρ и ξ связаны между собой соотношением

$$\rho = \xi + \mathbf{v}\vartheta,$$

где $\mathbf{v}$ есть вектор скорости частицы в точке P, а ϑ равно

$$\vartheta = \frac{\rho \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}.$$

Это уравнение получается из предыдущего посредством скалярного умножения его на $\mathbf{v}$, так как

$$\mathbf{v} \cdot \xi = 0.$$

Бесконечно малый изохронный вектор ρ удовлетворяет уравне-

нию отклонения

$$\frac{\delta^2\rho^i}{\delta t^2}+R^i_{jkl}v^j\rho^k v^l=Q^i_{\cdot j}\rho^j,$$

где R есть тензор кривизны, равный

$$R^i_{jkl}=\frac{\partial}{\partial q^k}\left\{\begin{matrix}i\\jl\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial q^l}\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}m\\jl\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}i\\mk\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}m\\jk\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}i\\ml\end{matrix}\right\},$$

а $Q^i_{\cdot j}$ — ковариантная производная контравариантной силы Q по координате q^j:

$$Q^i_{\cdot j}=\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}+\left\{\begin{matrix}i\\kj\end{matrix}\right\}Q^k.$$

Символ Кристоффеля $\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}$ означает, что

$$\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}=\frac{g^{il}}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l}\right),$$

где метрический тензор g_{ij} дает кинематический элемент дуги ds:

$$ds^2=2T\,dt^2=g_{ij}dq^i dq^j;$$

здесь T — кинетическая энергия.

Уравнение отклонения для бесконечно малого нормального вектора ξ имеет вид

$$\frac{\delta^2\xi^i}{\delta t^2}+\frac{d^2\vartheta}{dt^2}v^i+2\frac{d\vartheta}{dt}Q^i+R^i_{jkl}v^j\xi^k v^l=Q^i_{\cdot j}\xi^j.$$

Понятие изохронного соответствия приводит к *устойчивости по Ляпунову*, а понятие нормального соответствия — к *орбитальной устойчивости.*

Решение $\psi(t)$ (определенное для $t\geqslant t_0$) уравнения

$$\mathbf{x}=\mathbf{F}(\mathbf{x},\ t)$$

устойчиво (по Ляпунову), если для любого заданного $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что любое решение $\varphi(t)$, для которого выполняется

$$|\varphi(t_0)-\psi(t_0)|<\delta,$$

удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t)-\psi(t)|<\varepsilon$$

для $t>t_0$.

Разность $\varphi-\psi$ соответствует вектору ρ на рис. 5.1, так как устойчивость по Ляпунову основывается на изохронной оценке отклонений. Заметим, что такое определение устойчивости равносильно требованию равномерной непрерывности функции $\psi(t)$ относительно начального положения $\psi(t_0)$.

Решение $\psi(t)$ асимптотически устойчиво, если

$$|\varphi(t)-\psi(t)|\to 0,$$

когда $t\to\infty$.

Когда условия устойчивости удовлетворяются только решениями заданной совокупности, устойчивость называют *условной*. Понятие *полной устойчивости* связано с асимптотической устойчивостью в целом. Следовательно, линейные системы, которые асимптотически устойчивы, обладают полной устойчивостью.

Условие для *орбитальной устойчивости* связано с нормальным соответствием следующим образом.

Периодическое решение $p(t)$ орбитально устойчиво, если для любого заданного $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что любое решение $\varphi(t)$, для которого

$$|\varphi(t_0)-p(t_0)|<\delta,$$

удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t)-p(t+c)|<\varepsilon$$

для $t>t_0$.

Асимптотическая устойчивость имеет место тогда, когда последнее неравенство заменяется условием

$$|\varphi(t)-p(t+c)|\to 0$$

при $t\to\infty$. Другими словами, периодическая орбита обладает асимптотической орбитальной устойчивостью тогда, когда орбита, которая проходит вблизи точки периодической орбиты, стремится к ней при $t\to\infty$.

5.2.2. Устойчивость равновесных решений.

5.2.2.1. Определение равновесных решений и их устойчивости. Если динамическая система находится в состоянии равновесия, то с математической точки зрения она остается в этом состоянии при $t\to\infty$. С другой стороны, реальная система подвержена возмущениям, и поэтому представляет практический интерес выяснить поведение ее при наличии этих возмущений. Устойчивость динамической системы описывает ее поведение при возмущениях. Движение, которое после его возмущения остается внутри малой окрестности точки равновесия, называют устойчивым. Более точное определение мы дадим после того, как введем понятие полиовесного решения.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{X}(\mathbf{x}),$$

которая имеет точку равновесия в $\mathbf{x}=\mathbf{a}$. Здесь n-вектор $\mathbf{x}$ имеет составляющие $x_1,\ldots,x_n$, а n-вектор $\mathbf{X}$ — составляющие $X_1,\ldots$

..., X_n. Предположим, что обычные теоремы существования, такие, как теорема Коши — Липшица, выполняются.

Решение $\mathbf{x}(t)$ называется полновесным решением, если траекторня в пространстве x представляется одной точкой a, где $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{a}$. Эта точка получается из уравнения $\mathbf{X}(\mathbf{x})=0$, т. е. из $\dot{\mathbf{x}}=0$ и называется точкой равновесия, стационарной точкой или крнтической точкой.

Дадим теперь определение устойчивости равновесного решения (справа, т. е. для $t_0 \leqslant t < +\infty$).

Решение $\mathbf{x}=\mathbf{a}$ (или точка a) называется устойчивым, если для заданного $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при возмущениях, удовлетворяющих неравенству

$$|\mathbf{x}(t_0)-\mathbf{a}| \leqslant \delta,$$

выполняется условие

$$|\mathbf{x}(t)-\mathbf{a}| < \varepsilon$$

для всех $t>t_0$.

В противном случае равновесное решение $\mathbf{x}=\mathbf{a}$ называется неустойчивым. Если возмущенное решение приближается к точке равновесия, когда $t\to\infty$, то равновесное решение называется асимптотически устойчивым; формальное условие асимптотической устойчивости записывается так:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)=\mathbf{a}.$$

Равновесное решение называется полностью устойчивым (как в общем случае), когда оно является асимптотически устойчивым в большом, т. е. в области, где расположены такие начальные условия, которые приводят к асимптотической устойчивости.

5.2.2.2. Линеаризация и устойчивость линейных систем. Рассмотрим снова автономную систему дифференцнальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{X}(\mathbf{x}).$$

Если это уравненне можно записать в форме

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

то линеаризованная система уравнений будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Здесь A есть постоянная матрица, а $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — вектор-функция, такая, что для $t\geqslant 0$

$$\frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|}\to 0, \quad \text{когда} \quad |\mathbf{x}|\to 0.$$

Это требование в отношении $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ удовлетворяется, например,

тогда, когда составляющие $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ представляют собой сходящиеся степенные ряды, начинающиеся с членов второй степени относительно $\mathbf{x}$.

Иначе это требоваине можно представить так:

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})| = O(|\mathbf{x}|), \text{ когда } |\mathbf{x}| \to 0,$$

или существует функция $\eta(\sigma) > 0$, $\eta(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$, такая, что

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leqslant |\mathbf{x}| \eta(|\mathbf{x}|).$$

Для $t \geqslant t_0$ свойства устойчивостн линеаризованной системы могут быть легко установлены.

А) Для комплексных корией характернстического уравнения матрицы $\mathbf{A}$ мы имеем следующие свойства.

а) Когда все характеристические корни имеют отрицательные вещественные части, точка равиовесия является асимптотически устойчивой. Это верно и тогда, когда некоторые из корней являются кратиыми.

б) Когда некоторые или все характеристические корни имеют положительные вещественные части, точка равновесия является неустойчивой. Это верно и тогда, когда некоторые из корней являются кратиыми.

Б) При чисто мнимых корнях движение является колебательным, и решение устойчиво, хотя и не асимптотически устойчиво. Если имеются кратные корни, то решение может содержать смешанные члены (периодические и вековые), и тогда точка равновесия будет неустойчива.

В) Если корни вещественны и все отрицательны, то решение устойчиво. Если какой-лнбо из корией положителен, то точка неустойчива. Это верно и в случае кратных корией.

Динамическая система с двумя степенями свободы описывается в четырехмерном фазовом пространстве. Размерность этого описания можно понизить до трех, изучая трехмерное подпространство какой-лнбо нзоэнергетической гиперповерхности.

С другой стороны, дииамическая система с одной степенью свободы может быть представлена в фазовом пространстве двух измерений. Такое описание приводит к следующей классификации точек равновесия. Когда оба характеристнческих корня вещественны и одного знака, точка называется узлом и является устойчивой или неустойчивой, в зависимости от того, отрицательны или положительны корни. Если один корень положителен, а другой отрицателен, мы имеем неустойчивость в седловой точке. Если корни чисто мнимые, то седловая точка равновесия называется центром. Наконец, если корни являются комплексно-сопряженными с отрицательными (положительными) веществен-

ными частями, то устойчивая (неустойчивая) точка называется фокусом.

Заметим, что асимптотическая устойчивость линейной системы всегда является асимптотической устойчивостью в целом, так как если она существует, то существует для любого начального условия. Это означает, что асимптотически устойчивая критическая точка линейной системы всегда является полностью устойчивой. Это, конечно, неверно для нелинейной системы, где размер области полной устойчивости должен быть определен из нелинейных членов.

5.2.2.3. Устойчивость нелинейных систем. При некоторых условиях задачу об устойчивости нелинейной системы можно решить, используя результаты, полученные при исследовании устойчивости линеаризованной системы. Другими словами, характеристические корни линеаризованной системы можно использовать для изучения устойчивости нелинейной системы.

С помощью второго метода Ляпунова можно доказать так называемую теорему Перрона. Достаточным условием того, чтобы точка равновесия нелинейной системы

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

была асимптотически устойчивой, является условие, чтобы все характеристические корни линеаризованной системы имели отрицательные вещественные части. Если какая-либо из вещественных частей положительна, то точка равновесия неустойчива. Если же какой-либо характеристический корень равен нулю или является чисто мнимым, то мы имеем так называемый критический случай, и получить условие устойчивости нелинейной системы непосредственно из исследования линейной части нельзя.

Случай чисто мнимых корней представляет большой практический интерес. Термин «устойчива в бесконечно малом», применяемый для описания условия устойчивости нелинейной системы, хотя и может некоторых ввести в заблуждение, но это все же лучше, чем совершать ошибку, перенося условия устойчивости с линейной системы на нелинейную.

Если k из n корней имеют отрицательные вещественные части, а $n-k$ — положительные вещественные части, то решение неустойчиво, однако оно является условно асимптотически устойчивым.

Если рассмотренная в предыдущем пункте линеаризованная система описывается посредством матрицы $\mathbf{A}$ с периодическими элементами, то полученные результаты остаются справедливыми, и, таким образом, система асимптотически устойчива тогда, когда все характеристические показатели имеют отрицательные вещественные части. Система является неустойчивой, если хотя

бы один характеристический показатель имеет положительную вещественную часть.

Задача об устойчивости точек равновесия связана с постоянной матрицей $\mathbf{A}$, а вопрос об устойчивости периодических орбит вокруг точек равновесия требует изучения периодической матрицы $\mathbf{A}(t)$.

Для получения условия устойчивости можно использовать также потенциальную энергию динамической системы. Еще Лагранж показал, что когда потенциальная энергия имеет в точке равновесия изолированный минимум, она является устойчивой точкой. Если в критической точке потенциальная энергия не имеет минимума, то точка является неустойчивой (при некоторых ограничениях).

Другие определения устойчивости здесь подробно рассматриваться не будут. С некоторыми из них мы встретимся в гл. 8, так как их приложение к теории периодических движений имеет более важное значение, чем к решениям в положении равновесия.

Решая задачу об устойчивости в небесной механике, Хагихара ставил следующий вопрос: «Чему равен интервал времени, в конце которого Солнечная система отклоняется от своей конфигурации на заранее заданную небольшую величину?» Читатель не должен удивляться тому, что в настоящее время математики едва ли могут ответить на этот глобальный вопрос, значительно более простые вопросы устойчивости пока еще не получили ответа.

Устойчивость по Пуассону требует, чтобы система бесконечно часто возвращалась в положение, произвольно близкое к своему первоначальному, причем возникающие колебания могут быть при этом любой величины. Это, а также теоремы возвращения и цикличности Пуанкаре и Биркгофа (см. § 8.4) исключают, например, вековые возмущения в средних расстояниях планет от Солнца, если система устойчива.

Согласно другой точке зрения, устойчивая система ограничивается некоторой областью фазового пространства или пространства конфигураций. Следовательно, продемонстрированное Хиллом расположение орбиты Луны внутри ее замкнутой кривой нулевой скорости указывает на устойчивость.

Согласно Лапласу, устойчивость системы n тел определяется отсутствием столкновений и исчезновений тел из системы. Системами с вековой устойчивостью являются такие системы, которые имеют колебательные решения и, следовательно, чисто мнимые корни характеристических уравнений плюс затухание, которое ослабляет колебания. К этому можно еще добавить определение устойчивости точек равновесия или установившихся движений посредством импульсивных возмущений, данное Клейном и Зом-

мерфельдом, тригонометрическую и пертурбационную устойчивость по Биркгофу (последияя соответствует устойчивости по Ляпунову для линейных систем с постояниыми коэффициентами и полной устойчивости в смысле Ляпунова, если система устойчива до всех порядков) и современные задачи структурной устойчивости.

Важность исследований нелинейной устойчивости трудно переоценить. Существует много примеров в литературе, указывающих с достаточной ясностью на необходимость проведения исследований в нелинейной области.

Лефшец настаивает на том, чтобы определение «практической устойчивости» было связано с полной устойчивостью, или асимптотической устойчивостью в целом. Для линейной системы это является тривиальной задачей, но для нелинейного случая — это основная задача. Другой вопрос касается соотношения между ограниченностью и устойчивостью; два независимых понятия для нелинейных систем оказываются тесно связанными между собой для линейных систем.

5.2.3. **Уравнения в вариациях.** Два дифференциальных уравнения движения второго порядка

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \ddot{y}+2\dot{x}=\frac{\partial\Omega}{\partial y}$$

могут быть записаны в виде системы четырех уравнений первого порядка. Для этого введем следующие переменные:

$$x_1=x, \; x_2=y, \; x_3=\dot{x}, \; x_4=\dot{y}.$$

Новая система будет иметь вид

$$\dot{x}_1=x_3, \quad \dot{x}_2=x_4,$$

$$\dot{x}_3=2x_4+\frac{\partial\Omega(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad \dot{x}_4=-2x_3+\frac{\partial\Omega(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

Эта система соответствует приведенному в пункте 5.2.2 уравнению

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{X}(\mathbf{x}).$$

Равновесные решения получаются из следующих четырех уравнений для составляющих четырехмерного вектора $\mathbf{x}$:

$$x_3=0, \quad x_4=0,$$

$$2x_4+\frac{\partial\Omega(x_1, x_2)}{\partial x_1}=0, \quad -2x_3+\frac{\partial\Omega(x_1, x_2)}{\partial x_2}=0.$$

Решениями, естественно, будут пять точек равновесия, так как два первых уравнения дают нули для составляющих скорости:

$$x_3=\dot{x}=0 \text{ и } x_4=\dot{y}=0,$$

а два последних уравнения дают нули для составляющих градиента:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=\frac{\partial\Omega}{\partial y}=0.$$

Для того чтобы исследовать движение вблизи какой-либо точки равновесия $L(a, b)$, положим

$$x=a+\xi \text{ и } y=b+\eta, \tag{1}$$

где ξ и η — координаты относительно L. Для коллинеарных точек $L_{1,2,3}$ имеем $a=x_{1,2,3}$, $b=0$, а для треугольных точек равновесия $L_{4,5}$ $a=\mu-{}^1/_2$, $b=\pm{}^1/_2\sqrt{3}$.

Функция Ω может быть разложена в ряд около точки L:

$$\Omega=\Omega(a, b)+\Omega_x(a, b)\,\xi+\Omega_y(a, b)\,\eta+\frac{1}{2!}\Omega_{xx}(a, b)\,\xi^2+$$
$$+\Omega_{xy}(a, b)\,\xi\eta+\frac{1}{2!}\Omega_{yy}(a, b)\,\eta^2+O(3). \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения движения

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\Omega_x, \quad \ddot{y}+2\dot{x}=\Omega_y \tag{3}$$

принимают вид

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}&=\Omega_{xx}(a, b)\,\xi+\Omega_{xy}(a, b)\,\eta+O(2),\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}&=\Omega_{xy}(a, b)\,\xi+\Omega_{yy}(a, b)\,\eta+O(2).\end{aligned} \tag{4}$$

Символами $O(2)$ и $O(3)$ в уравнениях (2) и (4) обозначены члены второго и более высокого порядка относительно ξ и η. Если их опустить, то уравнения (4) становятся *уравнениями в вариациях* (точнее, линейными уравнениями в вариациях); ξ и η называют вариациями. Заметим, что уравнения (4) получаются из уравнений (3) с помощью уравнения (2) и с учетом того факта, что так как $L(a, b)$ есть точка равновесия, то $\Omega_x(a, b)=\Omega_y(a, b)=0$.

Характеристические корни уравнений (4) получаются из уравнения

$$\begin{vmatrix}\lambda^2-\Omega^0_{xx} & -2\lambda-\Omega^0_{xy}\\ 2\lambda-\Omega^0_{xy} & \lambda^2-\Omega^0_{yy}\end{vmatrix}=0, \tag{5}$$

частные производные в котором вычисляются в точке равновесия

$$\Omega^0_{\alpha\beta}=\Omega_{\alpha\beta}(a, b),$$

здесь α и β стоят вместо x или y.

Уравнение четвертой степени относительно λ имеет вид

$$\lambda^4+(4-\Omega^0_{xx}-\Omega^0_{yy})\,\lambda^2+\Omega^0_{xx}\Omega^0_{yy}-(\Omega^0_{xy})^2=0. \tag{6}$$

Дифференциальные уравнения (4) второго порядка могут быть преобразованы в систему уравнений первого порядка, если положить

$$x_1=\xi,\ x_2=\eta,\ x_3=\dot{\xi},\ x_4=\dot{\eta}.$$

Таким образом, уравнения в вариациях принимают форму

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x},$$

где матрица A имеет вид

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ \mathbf{B} & \mathbf{C}\end{pmatrix}$$

и

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\Omega^0_{xx} & \Omega^0_{xy}\\ \Omega^0_{xy} & \Omega^0_{yy}\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

§ 5.3. Движение вокруг коллинеарных точек

В пункте 4.6.2 было показано, что в трех коллинеарных точках равновесия при $0<\mu<{}^1/_2$

$$\Omega_{xy}=0,\ \Omega_{xx}>0,\ \Omega_{yy}<0.$$

Следовательно,

$$\Omega_{xx}\Omega_{yy}-\Omega^2{}_{xy}<0.$$

Характеристическое уравнение (6) можно записать в виде

$$\Lambda^2+2\beta_1\Lambda-\beta^2{}_2=0, \tag{7}$$

где

$$\beta_1=2-\frac{\Omega^0_{xx}+\Omega^0_{yy}}{2},\quad \beta_2{}^2=-\Omega^0_{xx}\Omega^0_{yy}>0 \tag{8}$$

и

$$\lambda=\pm\Lambda^{1/2}.$$

Заметим, что два (вещественных) корня уравнения (7) имеют противоположные знаки:

$$\begin{aligned}\Lambda_1&=-\beta_1+(\beta_1^2+\beta_2^2)^{1/2}>0,\\ \Lambda_2&=-\beta_1-(\beta_1^2+\beta_2^2)^{1/2}<0.\end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2}=\pm\Lambda_1^{1/2}\quad\text{и}\quad\lambda_{3,4}=\pm\Lambda_2^{1/2}.$$

Следовательно, корни λ_1 и λ_2 вещественны, а λ_3 и λ_4 — мнимы.

Так как решение уравнений в вариациях имеет вид

$$\xi=\sum_{i=1}^{4} A_i e^{\lambda_i t}, \quad \eta=\sum_{i=1}^{4} B_i e^{\lambda_i t}, \tag{10}$$

то в общем случае всегда будет один член, который дает неограниченные значения для ξ и η, когда $t\to\infty$ (соответствующие $\lambda_i>0$). Решение будет неустойчивым.

Коэффициенты $A_1, \ldots, A_4, B_1, \ldots, B_4$ не независимы, так как из уравнения (5) следует, что

$$(\lambda_i^2-\Omega_{xx}^0)A_i=(2\lambda_i+\Omega_{xy}^0)B_i \tag{11}$$

и, следовательно, четыре начальных условия для уравнений (4), скажем, $\xi(t_0)$, $\eta(t_0)$, $\dot{\xi}(t_0)$ и $\dot{\eta}(t_0)$, полностью определяют восемь коэффициентов A_i, B_i. В самом деле, в коллинеарных точках Ω_{xy}^0 равно нулю, и мы имеем

$$B_i=\frac{\lambda_i^2-\Omega_{xx}^0}{2\lambda_i}A_i=\alpha_i A_i, \tag{12}$$

так что

$$\begin{aligned}
\xi_0&=\xi(t_0)=\sum A_i e^{\lambda_i t_0},\\
\dot{\xi}_0&=\dot{\xi}(t_0)=\sum \lambda_i A_i e^{\lambda_i t_0},\\
\eta_0&=\eta(t_0)=\sum \alpha_i A_i e^{\lambda_i t_0},\\
\dot{\eta}_0&=\dot{\eta}(t_0)=\sum \alpha_i\lambda_i A_i e^{\lambda_i t_0}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Коэффициенты могут быть выражены как функции начальных условий, так как определитель Δ системы (13) не равен нулю. Для того чтобы показать это, вычислим

$$\Delta=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_4)t_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_1\lambda_1 & \alpha_2\lambda_2 & \alpha_3\lambda_3 & \alpha_4\lambda_4 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Так как

$$\sum\lambda_i=0,\ \lambda_2=-\lambda_1,\ \lambda_4=-\lambda_3,\ \alpha_2=-\alpha_1,\ \alpha_4=-\alpha_3,$$

то имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & -\lambda_1 & \lambda_3 & -\lambda_3\\ \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_3 & -\alpha_3\\ \alpha_1\lambda_1 & \alpha_1\lambda_1 & \alpha_3\lambda_3 & \alpha_3\lambda_3 \end{vmatrix}=-\left(\frac{\Omega_{xx}^0}{\Omega_{yy}^0}\right)^{\frac{1}{2}}(\lambda_1^2-\lambda_3^2)^2. \tag{15}$$

Отсюда следует, что $\Delta\neq 0$, так как в гл. 4 мы видели, что $\Omega_{xx}^0\neq\neq 0$ и $\lambda_1^2=\Lambda_1\neq\Lambda_2=\lambda_3^2$. Последнее становится ясным, если обра-

титься к уравненню (9), согласно которому $\Lambda_1=\Lambda_2$, если $\beta_1{}^2+\beta_2{}^2=0$. Но β_2 и β_1 вещественны и $\beta_2\neq 0$ (для $\mu\neq 0$), следовательно, $\Lambda_1\neq\Lambda_2$.

Инверсия уравнений (13) дает коэффициенты

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{e^{-\lambda_1 t_0}}{\lambda_1^2-\lambda_3^2}(-\xi_0\alpha_3\lambda_3-\dot{\xi}_0\alpha_3\delta+\eta_0\lambda_3\delta+\dot{\eta}_0),\\
A_2 &= \frac{e^{\lambda_1 t_0}}{\lambda_1^2-\lambda_3^2}(-\xi_0\alpha_3\lambda_3+\dot{\xi}_0\alpha_3\delta-\eta_0\lambda_3\delta+\dot{\eta}_0),\\
A_3 &= \frac{e^{-\lambda_3 t_0}}{\lambda_1^2-\lambda_3^2}(\xi_0\alpha_1\lambda_1+\dot{\xi}_0\alpha_1\delta-\eta_0\lambda_1\delta-\dot{\eta}_0),\\
A_4 &= \frac{e^{\lambda_3 t_0}}{\lambda_1^2-\lambda_3^2}(\xi_0\alpha_1\lambda_1-\dot{\xi}_0\alpha_1\delta+\eta_0\lambda_1\delta-\dot{\eta}_0),
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\delta=\left(\frac{\Omega^0_{yy}}{\Omega^0_{xx}}\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Коэффициенты A_1 и A_2 связаны с вещественнымн показателями степени (λ_1 и λ_2); следовательно, два первых члена в правой части уравиений (10) в решении представляют экспоненциальное возрастание и убывание со временем. Выбирая начальные условия такими, чтобы $A_1=A_2=0$, получаем частное решение, содержащее только функцин синуса и косинуса времени. Это решенне будет содержать только две произвольные постоянные: A_3 и A_4, так что четыре начальные условия не могут быть выбраны произвольно.

Когда $A_1=A_2=0$, из уравнений (10) имеем

$$\xi=A_3e^{\lambda_3 t}+A_4e^{-\lambda_3 t},\quad \eta=A_3\alpha_3e^{\lambda_3 t}-A_4\alpha_3e^{-\lambda_3 t}. \tag{18}$$

Обозначая, как и ранее, $\xi(t_0)$ через ξ_0 и $\eta(t_0)$ через η_0, вычисляем A_3 и A_4 как функции λ_3, t_0, α_3, ξ_0 и η_0. Подставляя этн результаты обратно в уравнения (18), получаем

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi_0\cos s(t-t_0)+\frac{\eta_0}{\beta_3}\sin s(t-t_0),\\
\eta &= \eta_0\cos s(t-t_0)-\beta_3\xi_0\sin s(t-t_0),
\end{aligned} \tag{19}$$

где действительные величины s и β_3 имеют следующие выражения:

$$s=+\left[\beta_1+(\beta_1{}^2+\beta_2{}^2)^{1/2}\right]^{1/2}\quad\text{или}\quad \lambda_3=is \tag{20}$$

и

$$\beta_3=\frac{s^2+\Omega^0_{xx}}{2s}\quad\text{или}\quad \alpha_3=i\beta_3. \tag{21}$$

Из уравнений (19) после несложных преобразований находим

$$\dot{\xi}_0 = \frac{\eta_0 s}{\beta_3} \quad \text{и} \quad \dot{\eta}_0 = -\beta_3 \xi_0 s. \tag{22}$$

Отсюда следует, что если начальные условия ξ_0, η_0 выбраны, то соответствующие начальные скорости не могут быть взяты произвольно.

Задача. Выведите уравнения (22) из уравнений (16) при $A_1 = A_2 = 0$.

Если уравнения (18) решить относительно $A_3 e^{\lambda_3 t}$ и $A_4 e^{-\lambda_3 t}$, то увидим, что орбита представляет собой эллипс. Таким способом можно исключить время и получить следующее равенство:

$$\xi^2 + \eta^2/\beta_3^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2/\beta_3^2. \tag{23}$$

Здесь $\beta_3^2 > 3$, в чем легко можно убедиться. Из уравнения (21) имеем

$$\beta_3 = \frac{1}{2}\left(s + \frac{\Omega_{xx}^0}{s}\right),$$

где $\Omega_{xx}^0 > 3$ и $s > 0$. Следовательно,

$$\beta_3 > \frac{1}{2}\left(s + \frac{3}{s}\right).$$

Минимальное значение правой части этого неравенства равно $3^{1/2}$ и достигается при $s = 3^{1/2}$; стало быть $\beta_3 > 3^{1/2}$, что и требовалось доказать.

Так как $\beta_3^2 > 1$, то большая полуось орбиты параллельна оси y, а ее малой полуосью всегда является ось ξ (или x). Центр эллипса расположен в коллинеарной точке либрации. Эксцентриситет орбиты равен $e = (1 - \beta_3^{-2})^{1/2}$. Во вращающейся системе координат движение является периодическим с синодическим периодом $T = 2\pi/s$.

Движение вдоль орбиты является попятным, так как при $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0 = 0$ из уравнений (22) имеем $\dot{\xi}_0 = 0$ и $\dot{\eta}_0 = -\beta_3 \xi_0 s$. Здесь $\beta_3 s > 0$, так что знак η_0 противоположен знаку ξ_0. Следовательно, для $\xi_0 \gtrless 0$ мы имеем $\eta_0 \lessgtr 0$, где верхние знаки относятся к правой стороне от коллинеарной точки либрации, а нижние — к левой стороне. Поэтому в первом случае скорость направлена вниз, а во втором случае — вверх, как показано на рис. 5.2.

Рис. 5.2. Периодические орбиты вокруг коллинеарных точек.

Согласно пункту 4.6.2, в двух первых коллинеарных точках либрации при стремлении массового параметра к нулю мы имеем $\Omega_{xx}=9$ и $\Omega_{yy}=-3$. Следовательно, при $\mu=0$

$$s=(2\cdot 7^{1/2}-1)^{1/2}=2{,}0715942224,$$
$$\lambda_1=(2\cdot 7^{1/2}+1)^{1/2}=2{,}5082867902,$$
$$\beta_3=(2\cdot 7^{1/2}+5)^{1/2}=3{,}2080371915,$$
$$e=(2/3)^{1/2}(4-7^{1/2})^{1/2}=0{,}9501749625.$$

В третьей коллинеарной точке при $\mu\to 0$ имеем $\Omega_{xx}=3$ и $\Omega_{yy}=-3$, так что $s=1$, $\lambda_1=0$, $\beta_3=2$ и

$$e=3^{1/2}/2=0{,}8660254038.$$

В случае симметрии относительно основных тел ($\mu=1/2$) во второй коллинеарной точке мы имеем $\Omega_{xx}=17$ и $\Omega_{yy}=-7$. Следовательно,

$$s=(8\cdot 2^{1/2}-3)^{1/2}=2{,}8833502214,$$
$$\lambda_1=(8\cdot 2^{1/2}+3)^{1/2}=3{,}7833462040,$$
$$\beta_3=\left(\frac{67+48\cdot 2^{1/2}}{7}\right)^{1/2}=4{,}3896347228,$$
$$e=(2/119)(3357)^{1/2}=0{,}9737751890.$$

Корни характеристического уравнения (уравнение (6)) приводятся в Приложении I. В частях А—Е Приложения I указаны значения λ_1 и s для различных величин μ в трех коллинеарных точках либрации. Части А—В содержат данные для $0\leqslant\mu\leqslant 0{,}5$, часть Г — данные для μ, близких к массовому параметру Юпитера (0,00095), часть Д — данные для μ, близких к массовому параметру системы Земля — Луна (0,012), и часть Е — данные для μ, соответствующих планетам Солнечной системы. В четырех столбцах таблиц указаны значения μ, L_1, L_2 и L_3. Для каждой комбинации μL_i даны две величины: λ_1 и s. Например, для $\mu=0{,}1$ в первой точке либрации L_1 имеем $\lambda_1=1{,}8094550539$, $s=1{,}6635459768$. Соответствующее значение $\Omega_{xx}{}^0=6{,}0134847506$ получается из табл. Б Приложения I, гл. 4. Вычисление $\beta_3=2{,}63920267$ и $e=0{,}92543667$ не представляет труда. Принимая малую полуось $\xi_0=0{,}01$, имеем $\dot\eta_0=-0{,}04390435$, длина большой полуоси получается равной $\beta_3\xi_0=0{,}02639203$. Синодический период равен 3,77698326. Постоянная Якоби для такой частицы может быть вычислена по формуле

$$C=2\Omega(x_0,\ 0)-\dot\eta_0{}^2,$$

где $x_0=x_{L_1}+\xi_0=-1{,}2496998$. Отсюда находим $2\Omega(x_0, 0)=3{,}55730$ и $C=3{,}55537$. Заметим, что в табл. Б Приложения I, гл. 4 значение $C_1=3{,}556684$ соответствует нулевой скорости в точке L_1 для

$\mu=0{,}1$. Предыдущее значение $2\Omega(x_0, 0)=C^*$ представляет собой значение постоянной Якоби для частицы в x_0 при нулевой скорости. Кривая нулевой скорости, проходящая через эту точку $(x_0, 0)$, будет соответствовать поэтому $C^*=3{,}55730$. Так как $C^*>C_1$, то кривая нулевой скорости, проходящая через точку $(x_0, 0)$, как и можно было ожидать, относится к гантелеобразным кривым. С другой стороны, постоянная Якоби частицы C меньше, чем C^*, а также чем C_1, и кривая нулевой скорости частицы относится к подковообразным кривым, так как $C_1>C>C_3=3{,}189578$. Орбита частицы находится в зоне допустимого движения между двумя концами ее подковообразной кривой нулевой скорости. Итак, $C^*>C_1>C>C_3$ или $3{,}55730>3{,}556684>3{,}555370>3{,}189578$.

Задача 1. Покажите, что $s(L_3)<s(L_1)\leqslant s(L_2)$, где $s(L_i)$ есть среднее движение (определяемое уравнением (20)) в коллинеарной точке либрации L_i; знак равенства относится к $\mu=1/2$.

Задача 2. Найдите значение постоянной Якоби C для линеаризованной орбиты с начальными условиями $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0=0$, $\dot{\xi}=\dot{\xi}_0=0$, $\dot{\eta}=\dot{\eta}_0=-\xi_0\beta_3 s$ и постройте кривые $C=C(\xi_0)$ для L_1, L_2, L_3 при $\mu=0{,}1$.

Влияние вещественных корней $\lambda_{1,2}$ сказывается в погашении периодических движений. Положительный вещественный корень λ_1 приводит к неограниченному движению, а корень $\lambda_2<0$ не влияет на устойчивость, так как он создает стягивающуюся орбиту. Если в уравнениях (10) положить, например, $A_3=A_4=0$, то получим

$$\begin{aligned}\xi&=\xi_0\operatorname{ch}\lambda_1(t-t_0)+\frac{\eta_0}{\alpha_1}\operatorname{sh}\lambda_1(t-t_0),\\ \eta&=\eta_0\operatorname{ch}\lambda_1(t-t_0)+\xi_0\alpha_1\operatorname{sh}\lambda_1(t-t_0).\end{aligned}\tag{24}$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (19). Исключив время, мы увидим, что орбиты представляют собой гиперболы с осями, параллельными осям координатной системы ξ, η.

Можно получить также комбинации случаев, дающие решения, содержащие тригонометрические и гиперболические функции одновременно.

Нужно помнить, что полученные здесь результаты следуют из процесса линеаризации, и те из результатов, которые относятся к неограниченным движениям, требуют соответствующей интерпретации. Нелинейные аспекты рассматриваются в § 5.5. Здесь же мы укажем лишь на ограничения результатов процесса линеаризации.

а) Поскольку один из корней характеристического уравнения (6) для любого μ, лежащего в пределах $0<\mu<1/2$, является вещественным положительным числом, можно сделать заключение, что коллинеарные точки либрации образуют неустойчивые решения. Этот результат справедлив также и тогда, когда

линеаризация не произведена, включение нелинейных членов не изменяет неустойчивый характр этих решений. К этому вопросу мы еще вернемся в § 5.5, где рассмотрим его подробным образом.

Существование начальных условий, приводящих к тригонометрическим функциям в решении (уравнения (19)), означает, что коллинеарные точки либрации, хотя и являются неустойчивыми, но обладают условной устойчивостью в линейном смысле.

б) Неустойчивые коллинеарные точки либрации сами представляют решения ограниченной задачи в точном смысле, и эти стационарные решения также удовлетворяют дифференциальным уравнениям нелинейной задачи. Решения, приведенные в этом разделе, которые представляют движение *в окрестности* прямолинейных конфигураций, справедливы только для линеаризованной задачи.

Существование периодических орбит, аналогичных тем, что описываются уравнениями (19), можно доказать также в нелинейном случае для любого значения μ посредством аналитического продолжения. В § 5.5 в качестве основных решений для образования периодических орбит вокруг коллинеарных точек используются эллиптические орбиты, определяемые уравнениями (19). Начальными условиями для этих орбит в линейном случае являются ξ_0 и η_0, которые из уравнений (22) непосредственно определяют ξ_0 и η_0. В нелинейном случае эти соотношения вывести нельзя. Действительно, нам известно только то, что уравнения (22) *не выполняются*, когда в функции Ω остаются члены высшего порядка. Тем не менее система начальных условий ξ_0, η_0, $\dot{\xi}_0$ и $\dot{\eta}_0$, определяемая уравнениями (22), служит начальной точкой для итерации, которая приводит к нужным начальным условиям для нелинейного случая. Чем ближе начальная точка ξ_0, η_0 находится к точкам L_i, т. е. чем меньше ξ_0 и η_0, тем лучше действует схема дифференциальной коррекции, дающая начальные условия, требуемые для получения периодических орбит в нелинейных задачах.

Описанное ранее образование трех семейств периодических орбит (вокруг L_1, L_2, L_3) требует дополнительных уточнений, так как эти семейства содержат особые точки. Это обстоятельство можно обнаружить, если начертить эллипсообразные овалы возрастающих размеров вокруг, скажем, точки L_1. Когда орбиты достигают основного тела, расположенного в m_2, происходит соударение. При дальнейшем увеличении размеров образуются петли вокруг m_2. Такие орбиты обнаруживают мало сходства с эллиптическими орбитами, с которых началось семейство. В гл. 9, посвященной количественным аспектам ограниченной задачи, этот вопрос будет рассмотрен значительно подробней.

в) Решения линеаризованных уравнений, соответствующих вещественному характеристическому корню λ_i, тоже могут быть использованы для образования орбиты для нелинейной задачи. Они представляют собой гиперболические орбиты в окрестности точек либрации. Орбиты, которые в окрестности точек L_i приближенно являются прямыми, можно рассматривать как вырожденные случаи гиперболических дуг. Такие орбиты также будут рассмотрены в гл. 9.

§ 5.4. Движение вокруг треугольных точек

Характеристическое уравнение (6) для точек L_4 и L_5 можно написать сразу, так как значения вторых производных мы вычислили в § 4.6:

$$\Omega_{xx}(L_{4,5}) = 3/4, \qquad \Omega_{xy}(L_4) = +\frac{3\cdot 3^{1/2}}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}\right),$$

$$\Omega_{xy}(L_5) = -\frac{3\cdot 3^{1/2}}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}\right), \quad \Omega_{yy}(L_{4,5}) = 9/4.$$

Поэтому характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0. \tag{25}$$

Полагая, как и ранее, $\Lambda = \lambda^2$, получаем уравнение

$$\Lambda^2 + \Lambda + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0, \tag{26}$$

решением которого будет

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\{-1 \pm [1 - 27\mu(1-\mu)]^{1/2}\}. \tag{27}$$

Следовательно, корни $\lambda_1 = +\Lambda_1^{1/2}$, $\lambda_2 = -\Lambda_1^{1/2}$, $\lambda_3 = +\Lambda_2^{1/2}$ и $\lambda_4 = -\Lambda_2^{1/2}$ выражаются простым образом через массовый параметр. Следует различать три случая, связанные со знаком дискриминанта, определяющего характер корней. На рис. 5.3 показаны дискриминант $d = 1 - 27\mu(1-\mu)$ и критическое значение массового параметра. Корни уравнения $d = 0$ равны

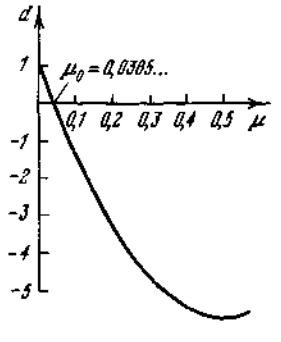


Рис. 5.3. Дискриминант в треугольных точках равновесия.

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\left[1 - (69)^{1/2}/9\right] = 0{,}038520896504551$$

и $\mu_1 = 1 - \mu_0$. Другое выражение для μ_0 имеет вид $\mu_0 = \frac{1}{2}[1 - (23/27)^{1/2}]$. Отсюда $\gamma_0 = 1 - 2\mu_0 = (23/27)^{1/2}$.

Рассмотрим по отдельности три области значений μ. Когда $0<\mu<\mu_0$, движение является ограниченным и представляет собой суперпозицию двух гармонических колебаний с разными частотами (см. пункт 5.4.1). Мы имеем устойчивость в линейном смысле. В области $\mu_0<\mu\leqslant 0{,}5$ движение является неустойчивым (см. пункт 5.4.2). При $\mu=\mu_0$ решение содержит вековые члены (см. пункт 5.4.3).

5.4.1. Устойчивые решения линеаризованных уравнений. В первом случае $0<1-27\mu(1-\mu)\leqslant 1$ или $\mu_0>\mu\geqslant 0$. Следовательно, $-1/2<\Lambda_1\leqslant 0$ и $-1/2>\Lambda_2\geqslant -1$, т. е. оба значения Λ отрицательны. Все четыре корня характеристического уравнения являются чисто мнимыми:

$$\lambda_{1,2}=\pm i(-\Lambda_1)^{1/2}=\pm is_1 \quad \text{и} \quad \lambda_{3,4}=\pm i(-\Lambda_2)^{1/2}=\pm is_2.$$

Решение имеет вид

$$\begin{aligned}\xi&=C_1\cos s_1t+S_1\sin s_1t+C_2\cos s_2t+S_2\sin s_2t,\\ \eta&=\overline{C}_1\cos s_1t+\overline{S}_1\sin s_1t+\overline{C}_2\cos s_2t+\overline{S}_2\sin s_2t,\end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\overline{C}_i=\Gamma_i(2s_iS_i-\Omega^0_{xy}C_i),\quad \overline{S}_i=-\Gamma_i(2s_iC_i+\Omega^0_{xy}S_i) \tag{29}$$

и

$$\Gamma_i=\frac{s_i^2+\Omega^0_{xx}}{4s_i^2+(\Omega^0_{xy})^2}=\frac{1}{s_i^2+\Omega^0_{yy}}>0. \tag{30}$$

На рис. 5.4 показано изменение угловых частот, или средних движений s_1, s_2 в зависимости от массового параметра. Для $\mu\approx 0$ имеем

$$s_1\approx\left(\frac{27}{4}\mu\right)^{1/2}=(6{,}75\,\mu)^{1/2} \text{ и}$$

$$s_2\approx 1-\frac{27}{8}\mu=1-3{,}375\,\mu.$$

При $\mu=0$ кривая $s_1(\mu)$ перпендикулярна оси μ, при $\mu=\mu_0$ тангенс угла наклона обеих кривых $s_1(\mu)$ и $s_2(\mu)$ равен бесконечности, и $s_1(\mu_0)=s_2(\mu)=1/2^{1/2}$. Как видно из рисунка, $s_1\leqslant s_2$.

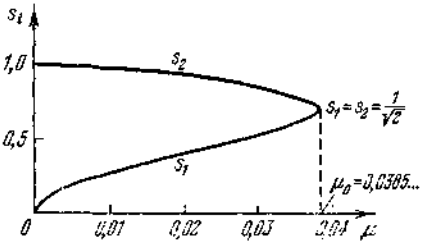


Рис. 5.4. Средние движения в треугольных точках либрации.

В части А Приложения II приводятся значения s_1 и s_2 для μ, находящихся в пределах $0<\mu\leqslant\mu_0$. В частях Б и В Приложения II указаны s_1 и s_2 для значений μ, близких к отношениям масс в системах Юпитер — Солнце и Луна — Земля. Часть Г содержит s_1 и s_2 для массового параметра планет Солнечной системы.

Предыдущее решение (уравнение (28)) содержало как члены малого периода, так и члены большого периода, соответствующие большим (s_2) и малым (s_1) значениям среднего движения s. Члены с s_2 называют «короткопериодическими членами», а члены с коэффициентами C_1, S_1, $\bar{C}_1$ и $\bar{S}_1$ — «долгопериодическими членами». Например, для $\mu=0{,}001$ имеем $s_1=0{,}0824$ и $s_2=0{,}9966$, что соответствует периодам $T_1=2\pi/s_1=76{,}4$ и $T_2=2\pi/s_2=6{,}3$.

Действительно, для малых значений μ, встречающихся в Солнечной системе (для μ порядка 10^{-3}—10^{-6}), s_1 лежит в пределах от 0,002 до 0,08. Соответствующие большие периоды превышают в 12—500 раз период вращения основных тел. Малый период приблизительно равен периоду вращения основных тел, так как $s_2\approx 1$.

При критическом значении $\mu=\mu_0$ малый и большой периоды равны друг другу. Этот критический период приблизительно на 41,4% больше периода вращения основных тел.

Как короткопериодические члены, так и долгопериодические члены можно исключить из решения путем соответствующего выбора начальных условий. Четыре начальные условия (ξ_0, η_0, $\dot{\xi}_0$ и $\dot{\eta}_0$ при $t=0$) связаны линейным образом с четырьмя независимыми коэффициентами, входящими в решение. Поэтому выбор нужных начальных условий не представляет большого труда. Например, если надлежит исключить короткопериодические члены, то нужно удовлетворить следующим четырем уравнениям: $C_2=S_2=\bar{C}_2=\bar{S}_2=0$. Из уравнений (29) следует, что два последних из этих четырех уравнений удовлетворяются тогда, когда удовлетворяются два первых. Начальные условия выражаются через коэффициенты уравнений (28) следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_0&=C_1+C_2, & \eta_0&=\bar{C}_1+\bar{C}_2,\\ \dot{\xi}_0&=S_1s_1+S_2s_2, & \dot{\eta}_0&=\bar{S}_1s_1+\bar{S}_2s_1. \end{aligned} \tag{31}$$

Задача. Покажите, что определитель системы линейных уравнений (31) для определения коэффициентов C_1, ..., $\bar{S}_2$ при заданных начальных условиях ξ_0, ..., $\dot{\eta}_0$ отличен от нуля, если $\mu\neq\mu_0$.

Короткопериодические члены не войдут в решение, если будут выполняться следующие равенства:

$$\begin{aligned} \xi_0&=C_1, & \eta_0&=\bar{C}_1,\\ \dot{\xi}_0&=S_1s_1, & \dot{\eta}_0&=\bar{S}_1s_1. \end{aligned} \tag{32}$$

Это значит, что при заданном значении μ и произвольно выбранных значениях ξ_0 и η_0 первое уравнение (29) дает S_1. Зная S_1, можно из второго уравнения (29) найти $\bar{S}_1$. Таким об-

разом, получаем четыре начальные условия: ξ_0 и η_0, выбираемые произвольно, и $\dot{\xi}_0$ и $\dot{\eta}_0$, вычисляемые с помощью уравнений (29) и (32). В результате получаем

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_0 &= \frac{1}{2}\left(\xi_0\Omega^0_{xy} + \frac{\eta_0}{\Gamma_1}\right),\\ \dot{\eta}_0 &= -\frac{1}{2}\left[\xi_0(s_1^2 + \Omega^0_{xx}) + \eta_0\Omega^0_{xy}\right].\end{aligned} \tag{33}$$

После исключения короткопериодических и долгопериодических членов получаем эллиптическую орбиту. Это можно видеть, если уравнения (28) переписать для долгопериодического решения в виде

$$\begin{aligned}\xi &= C_1\cos s_1 t + S_1\sin s_1 t,\\ \eta &= \bar{C}_1\cos s_1 t + \bar{S}_1\sin s_1 t\end{aligned} \tag{34}$$

и исключить время. Умножая первое из этих уравнений на $\bar{C}_1$, а второе — на $(-C_1)$ и складывая, получаем

$$\xi\bar{C}_1 - \eta C_1 = (S_1\bar{C}_1 - C_1\bar{S}_1)\sin s_1 t. \tag{35}$$

Затем, умножая первое из уравнений (34) на $\bar{S}_1$, а второе — на $(-S_1)$ и снова складывая, находим

$$\xi\bar{S}_1 - \eta S_1 = -(S_1\bar{C}_1 - C_1\bar{S}_1)\cos s_1 t. \tag{36}$$

После возведения в квадрат и сложения уравнений (35) и (36) тригонометрические члены исключаются, и мы приходим к желаемому результату:

$$\xi^2(\bar{C}_1^2 + \bar{S}_1^2) + \eta^2(C_1^2 + S_1^2) - 2\xi\eta(C_1\bar{C}_1 + S_1\bar{S}_1) = (S_1\bar{C}_1 - C_1\bar{S}_1)^2 \tag{37}$$

или

$$\xi^2\Gamma_1^2[4s_1^2 + (\Omega^0_{xy})^2] + \eta^2 + 2\xi\eta\Gamma_1\Omega^0_{xy} = 4s_1^2\Gamma_1^2(S_1^2 + C_1^2). \tag{38}$$

Это есть уравнение эллипса, так как

$$\begin{vmatrix}\Gamma_1^2\left[4s_1^2 + (\Omega^0_{xy})^2\right] & \Gamma_1\Omega^0_{xy}\\ \Gamma_1\Omega^0_{xy} & 1\end{vmatrix} = 4s_1^2\Gamma_1^2 > 0. \tag{39}$$

Центр эллипса находится в начале системы координат ξ, η, т. е. в точке L_4. Главные оси эллипса повернуты относительно координатных осей ξ, η; угол поворота и длину малой и большой полуосей эллипса можно найти из уравнения (38). Проделать это мы предоставляем читателям самостоятельно в качестве упражнения.

Уравнения движения вокруг коллинеарных точек отличаются от уравнений движения вокруг треугольных точек тем, что в них отсутствуют смешанные члены в правых частях уравнений (4). Причина заключается в том, что $\Omega_{xy}(L_{1,2,3}) = 0$, а $\Omega_{xy}(L_{4,5}) \neq \neq 0$. Сравнивая уравнение (21) с уравнением (30), видим так-

же различие, обусловленное членом Ω_{xy}. Влияние члена Ω_{xy} можно еще усмотреть из уравнения (38), где этот член обусловлен поворотом осей эллипса относительно координатных осей ξ, η, так как Ω_{xy} входит в качестве коэффициента билинейного члена. Все эти обстоятельства наводят на мысль о повороте координатной системы перед тем, как составлять уравнения движения, тогда в новой системе Ω_{xy} не появится.

Другими словами, выражение для функции Ω вокруг точек $L_{4,5}$, определяемое уравнением (2),

$$\Omega=\Omega^0+\Omega^0_{xx}\frac{\xi^2}{2}+\Omega^0_{xy}\xi\eta+\Omega^0_{yy}\frac{\eta^2}{2}+O(\xi^3,\eta^3), \tag{40}$$

надлежит привести к системе $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, называемой часто нормальной системой координат, в которой будут только квадратные члены, а билинейный член $\xi\eta$ будет отсутствовать. В результате мы получим уравнения движения, аналогичные по форме уравнениям, которые мы имели, когда рассматривали движение вокруг коллинеарных точек.

Такое преобразование координат мы выполняли в гл. 4, когда исследовали кривые нулевой скорости вокруг точек L_4 и L_5. Из уравнения (109) гл. 4 имеем

$$\Omega=\frac{3}{8}\xi^2+\frac{9}{8}\eta^2-\frac{3\cdot 3^{1/2}}{4}(1-2\mu)\xi\eta+\frac{3}{2}, \tag{41}$$

что соответствует предыдущему уравнению (40). Введение переменных $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ посредством преобразования

$$\begin{aligned}\xi&=\bar{\eta}\cos\alpha-\bar{\eta}\sin\alpha,\\ \eta&=\bar{\xi}\sin\alpha+\bar{\eta}\cos\alpha\end{aligned} \tag{42}$$

эквивалентно, конечно, повороту координатной системы на угол α. Новая квадратичная форма принимает вид

$$\Omega=\frac{\bar{\lambda}_2}{2}\bar{\xi}^2+\frac{\bar{\lambda}_1}{2}\bar{\eta}^2+\frac{3}{2}, \tag{43}$$

где $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$ — корни характеристического уравнения

$$\bar{\lambda}_{1,2}=\frac{3}{2}\{1\pm[1-3\mu(1-\mu)]^{1/2}\} \tag{44}$$

(см. уравнение (111) гл. 4). Ориентация главных осей кривых нулевой скорости определяется уравнением

$$\operatorname{tg}2\alpha=3^{1/2}(1-2\mu) \tag{45}$$

(см. уравнение (113) гл. 4).

На рис. 5.5 показано простое построение, из которого определяются главные направления кривых нулевой скорости, или

нормальные координаты линеаризованных эллиптических орбит. Точка Q есть центр равностороннего треугольника, образованного точками m_1, m_2 и L_4. Точки пересечения линии QO

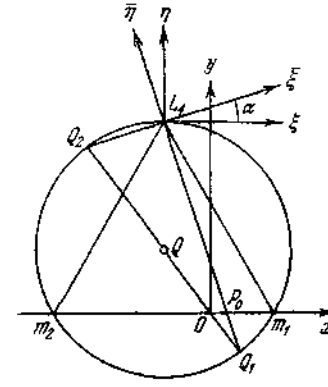


Рис. 5.5. Построение основной системы координат (Депри, 1965 [39]).

с окружностью обозначены через Q_1 и Q_2. Два главных направления, $\bar{\eta}$ и $\bar{\xi}$, получаются, если провести линии Q_1L_4 и Q_2L_4.

Задача 1. Покажите, что ось $\bar{\eta}$ пересекает ось x в точке $P_0(x_0, 0)$, где

$$x_0 = \frac{2\mu(1-\mu) - 1 + [1 - 3\mu(1-\mu)]^{1/2}}{1-2\mu}$$

и где для малых значений μ можно принять $x_0 = \mu/2 + O(\mu^2)$, см. рис. 5.5.

Задача 2. Докажите правильность построения, изображенного на рис. 5.5.

Уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\xi}} - 2\dot{\bar{\eta}} &= \bar{\lambda}_2\bar{\xi}, \\ \ddot{\bar{\eta}} + 2\dot{\bar{\xi}} &= \bar{\lambda}_1\bar{\eta}. \end{aligned} \tag{46}$$

Теперь они имеют ту же форму, что уравнения движения частицы вокруг коллинеарных точек.

Уравнения (46) могут быть получены различными способами. Ниже предлагается вывод с помощью матриц. Уравнение (42) можно представить в матричной форме как $\dot{\varsigma} = \mathbf{B}\varsigma$, где векторы $\varsigma(\xi, \eta)$ и $\bar{\varsigma}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ связаны между собой матрицей поворота $\mathbf{B}$. Уравнение (41) в матричной форме записывается следующим образом: $\Omega = \varsigma\mathbf{A}\varsigma + 3/2$, где матрица $\mathbf{A}$ равна

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{-3\cdot 3^{1/2}}{8}(1-2\mu) \\ \frac{-3\cdot 3^{1/2}}{8}(1-2\mu) & \frac{9}{8} \end{pmatrix}. \tag{47}$$

В этих обозначениях новая квадратичная форма принимает вид

$$\Omega = \bar{\varsigma}\mathbf{B}^*\mathbf{A}\mathbf{B}\bar{\varsigma} + \frac{3}{2} = \bar{\varsigma}\mathbf{M}\bar{\varsigma} + \frac{3}{2}, \tag{48}$$

где $\mathbf{B}^*$ есть транспонированная матрица $\mathbf{B}$, а

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\lambda}_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\lambda}_1}{2} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Отсюда сразу получаем уравненне (43).

Для того чтобы получнть уравненне (46), напишем сначала уравнения движения в первоначальной системе координат ξ, η в виде

$$\ddot{\varsigma} + 2\mathbf{k} \times \dot{\varsigma} = \mathbf{grad}_{\varsigma}\Omega = 2\mathbf{A}\varsigma. \tag{50}$$

Затем преобразуем его с помощью формулы $\varsigma = \mathbf{B}\bar{\varsigma}$. После подстановки и умножения на $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}^{-1}$, получим

$$\ddot{\bar{\varsigma}} + 2\mathbf{B}^*(\mathbf{k} \times \mathbf{B}\dot{\bar{\varsigma}}) = 2(\mathbf{B}^*\mathbf{A}\mathbf{B})\bar{\varsigma} \tag{51}$$

или

$$\ddot{\bar{\varsigma}} + 2\mathbf{k} \times \dot{\bar{\varsigma}} = 2\mathbf{M}\bar{\varsigma}, \tag{52}$$

так как

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{k} \times \mathbf{B}\mathbf{x}) = \mathbf{k} \times \mathbf{x}. \tag{53}$$

Это последнее уравнение справедлнво при любом векторе $\mathbf{x}$, лежащем в плоскости $\xi\eta$. Здесь $\mathbf{k}$ есть единнчный вектор вдоль нормали к этой плоскости, так что операция умножения $\mathbf{k} \times \mathbf{x}$ производнт поворот вектора $\mathbf{x}$ на 90° против движения часовой стрелки. Операцня $\mathbf{Bx}$ производит поворот вектора $\mathbf{x}$ на угол α, а операция $\mathbf{B}^*\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ — поворот на угол $-\alpha$. Таким образом, уравнение (53) устанавливает перестановочность последовательности поворотов в плоскостн вокруг точки.

Так как уравнение (52) тождественно с уравнениями (46), то доказательство на этом заканчивается.

Дальнейшее решение уравнений (46) производится обычным способом. Характернстические корни равны $\lambda_{1,2} = \pm\Lambda_1^{1/2}$ и $\lambda_{3,4} = \pm\Lambda_2^{1/2}$, где Λ_1 и Λ_2 определяются уравненнем (27). Этот факт не является неожиданным, так как собственные частоты динамической системы не зависят от выбранной системы координат. Следовательно, характернстическне корни уравнений (46) определяются уравненнем (25). Это можно показать также формально, путем составления характеристнческого уравнения для системы дифференциальных уравненнй в координатной

системе $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ и установления его эквивалентности с уравнением (25). Из уравнения (46) имеем

$$\begin{vmatrix} \lambda^2-\bar{\lambda}_2 & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2-\bar{\lambda}_1 \end{vmatrix}=0 \tag{54}$$

или

$$\lambda^4+\lambda^2(4-\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2)+\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2=0. \tag{55}$$

Здесь $\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2=\frac{27}{4}\mu(1-\mu)$, так как это есть значение определителя (110) гл. 4. Это же выражение стоит в конце левой части уравнения (25). Кроме того, из уравнения (111) гл. 4, а также из условия $\Omega_{xx}(L_{4,5})+\Omega_{yy}(L_{4,5})=3$ следует, что $\bar{\lambda}_1+\bar{\lambda}_2=3$. На этом заканчивается доказательство тождественности уравнений (25) и (55).

Таким образом, решение уравнений (46) можно написать в форме, аналогичной решению (28):

$$\begin{aligned} \bar{\xi}&=A_1\cos s_1t+B_1\sin s_1t+A_2\cos s_2t+B_2\sin s_2t,\\ \bar{\eta}&=\bar{A}_1\cos s_1t+\bar{B}_1\sin s_1t+\bar{A}_2\cos s_2t+\bar{B}_2\sin s_2t, \end{aligned} \tag{56}$$

где средние движения s_1 и s_2 те же, что и раньше. Соотношения между коэффициентами A_i, B_i, $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$ теперь упрощаются по сравнению с уравнениями (29) и принимают вид

$$\bar{A}_i=\bar{\alpha}_iB_i, \quad \bar{B}_i=-\bar{\alpha}_iA_i, \tag{57}$$

где

$$\bar{\alpha}_i=\frac{s_i^2+\bar{\lambda}_2}{2s_i}=\frac{2s_i}{s_i^2+\bar{\lambda}_1}. \tag{58}$$

Средние движения или частоты, можно получить из равенств $s_1=\mp i\lambda_{1,2}$ и $s_2=\mp i\lambda_{3,4}$ или $s_1=+(-\Lambda_1)^{1/2}$ и $s_2=+(-\Lambda_2)^{1/2}$. Заметим, что s удовлетворяет модификации уравнения (55):

$$s^4-s^2(4-\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_2)+\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2=0. \tag{59}$$

Долгопериодическое решение, относящееся к собственной частоте s_1, равно

$$\begin{aligned} \bar{\xi}&=A_1\cos s_1t+B_1\sin s_1t,\\ \bar{\eta}&=\bar{\alpha}_1B_1\cos s_1t-\bar{\alpha}_1A_1\sin s_1t \end{aligned} \tag{60}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{\xi}&=\bar{\xi}_0\cos s_1t+\frac{\bar{\eta}_0}{\bar{\alpha}_1}\sin s_1t,\\ \bar{\eta}&=\bar{\eta}_0\cos s_1t-\bar{\alpha}_1\bar{\xi}_0\sin s_1t. \end{aligned} \tag{61}$$

Составляющие начальной скорости не могут быть выбраны произвольно, так как уравнения (60) представляют собой частное решение всего лишь с двумя произвольными постоянными. Скорости в момент $t_0=0$ могут быть получены из уравнений (60):

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\xi}}_0&=\frac{\bar{\eta}_0 s_1}{\bar{\alpha}_1},\\ \dot{\bar{\eta}}_0&=-\bar{\xi}_0\bar{\alpha}_1 s_1.\end{aligned}\tag{62}$$

Этот результат совершенно аналогичен уравнению (22) и снова указывает на попятные движения.

Эллиптическая орбита, определяемая уравнениями (61), может быть выражена уравнением

$$\bar{\xi}^2+\frac{\bar{\eta}^2}{\bar{\alpha}_1^2}=\bar{\xi}_0^2+\frac{\bar{\eta}_0^2}{\bar{\alpha}_1^2}.\tag{63}$$

Так как $0<\bar{\alpha}_1{}^2<1$, то большая полуось эллипса направлена вдоль координатной оси $\bar{\xi}$. Доказательство неравенства $\bar{\alpha}_1{}^2<1$ предлагается читателю провести самостоятельно в виде упражнения, так как оно аналогично тому, которое относилось к уравнению (23).

Задача. Покажите, что $0<\bar{\alpha}_i=\frac{s_i}{2}+\frac{\bar{\lambda}_2}{2s_i}<1$.

Общее решение представлено графически на рис. 5.6, который можно сравнить с рис. 4.19 гл. 4. Длина большой полуоси эллипса равна

$$\bar{a}_i=\left(\bar{\xi}_0^2+\frac{\bar{\eta}_0^2}{\bar{\alpha}_i^2}\right)^{1/2},$$

а малой полуоси —

$$\bar{b}_i=(\bar{\alpha}_i^2\bar{\xi}_0^2+\bar{\eta}_0^2)^{1/2}.$$

Отношение длин осей эллипса равно $\bar{a}_i/\bar{b}_i=1/\bar{\alpha}_i$. Эксцентриситет орбиты равен $e_i=(1-\bar{\alpha}_i^2)^{1/2}$. Заметим, что e_i не зависит от начальных условий, а зависит только от значения массового параметра μ.

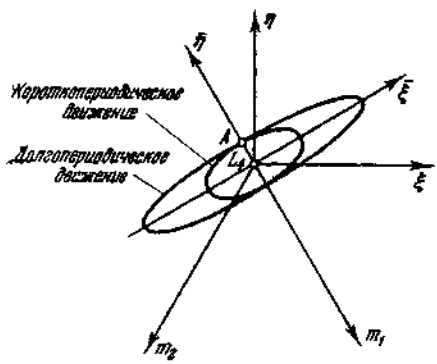


Рис. 5.6. Долгопериодическое и короткопериодическое движения вокруг L_4.

Короткопериодические члены исследуются совершенно таким же образом, в предыдущем уравнении полагают $i=2$

Так как $\bar{\alpha}_2 > \bar{\alpha}_1$, то $e_1 > e_2$. Действительно, $e_1 \approx 1 - 3\mu/2$ и $e_2 \approx (3^{1/2}/2)(1 + 3\mu/8)$; ошибка при этом для $0 < \mu < 0{,}03$ не превышает 1%.

Две орбиты (долгопериодическая и короткопериодическая) совпадают при $\mu = \mu_0$, и эксцентриситет становится равным $e_1 = e_2 = [2(2^{1/2} - 1)]^{1/2}$. Уравнение для эксцентриситетов получается путем подстановки уравнения (58) в равенство $e_i = (1 - \bar{\alpha}_i^2)^{1/2}$. При этом получаем

$$e_i = 2^{1/2} \sin \varepsilon_i,$$

причем

$$\operatorname{tg}^2 \varepsilon_i = \frac{3[1 - 3\mu(1-\mu)]^{1/2}}{4 \pm [1 - 27\mu(1-\mu)]^{1/2}}.$$

Здесь знак плюс соответствует e_2, а знак минус соответствует e_1. На рис. 5.7 показана зависимость эксцентриситетов от массового параметра.

В гл. 4 мы указывали на сходство между некоторыми кривыми нулевой скорости и некоторыми орбитами. Сейчас интересно сравнить кривые нулевой скорости вокруг точки L_4, описанные в пункте 4.7.2, часть IV, с эллиптическими орбитами, рассмотренными здесь. Оба результата следуют из линеаризации динамической системы. В пункте 4.7.2 мы потенциальную функцию ограничивали квадратными членами в уравнении (109), а здесь будем решать результирующие линейные дифференциальные уравнения.

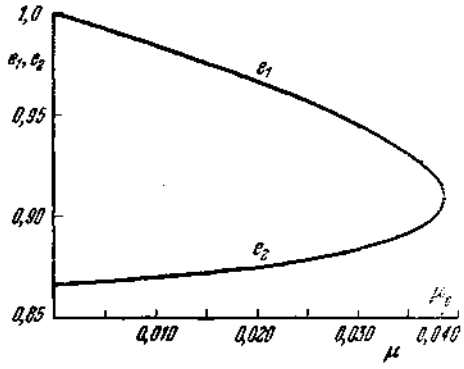


Рис. 5.7. Эксцентриситеты долгопериодического (e_1) и короткопериодического (e_2) решений линеаризованных уравнений.

Ориентация эллипсов нулевой скорости полностью совпадает с ориентацией эллиптических орбит. Однако эксцентриситеты различаются. При малых значениях μ для орбит с большим и малым периодами соответственно имеем

$$\bar{\alpha}_1 \approx (3\mu)^{1/2} \quad \text{и} \quad \bar{\alpha}_2 \approx \frac{1}{4}\left(1 - \frac{9}{4}\mu\right).$$

Параметром, определяющим эксцентриситет кривых нулевой

скорости, является $\bar{\alpha}_3$. Из уравнений (114) пункта 4.7.2 он равен

$$\bar{\alpha}_3 = \frac{b}{a} = \left(\frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{3}{4}\mu\right)^{1/2}.$$

Эксцентриситеты во всех случаях определяются равенством $e_i = (1-\bar{\alpha}_i^2)^{1/2}$, и, следовательно, $e_3 > e_1 > e_2$. Эксцентриситет кривых нулевой скорости больше эксцентриситета орбит.

Задача 1. Покажите, что для долгопериодических линеаризованных решений вокруг треугольных точек либрации $C > 3$, а для короткопериодических решений $C < 3$. Покажите также, что $C = 3$, когда $s_1 = s_2 = 1/2^{1/2}$.

Задача 2. Пользуясь линеаризованной системой, покажите, что долгопериодическая орбита располагается снаружи кривой нулевой скорости, при условии, что и орбита, и кривая нулевой скорости соответствуют одному и тому же значению постоянной Якоби $C > 3$. Кроме того, покажите, что отношение площадей этих эллипсов равно

$$\frac{A}{B} = \frac{s_2^2 - s_1^2}{2s_2} < 1,$$

где A — площадь эллипса нулевой скорости, а B — площадь долгопериодической эллиптической орбиты.

Задача 3. Покажите, что для долгопериодических и короткопериодических линеаризованных решений $de/d\mu \to \infty$, когда $\mu \to \mu_0$.

Так как в области $0 < \mu < \mu_0 = 0{,}03852$ характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни, то решение в общем случае состоит из двух гармонических колебаний с разными частотами. Линейная система дифференциальных уравнений (46), описывающих движение, имеет поэтому ограниченные решения при любых начальных условиях. Решение линейной системы указывает на устойчивость. Поведение соответствующей нелинейной системы нельзя предсказать заранее, так как чисто мнимые корни относятся к так называемому критическому условию; в этом случае требуются дополнительные исследования.

5.4.2. Неустойчивые решения линеаризованных уравнений. Когда $\mu_0 < \mu < 1/2$, дискриминант характеристического уравнения отрицателен,

$$0 > d = 1 - 27\mu(1-\mu) > -23/4,$$

и уравнение (27) принимает вид

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\delta), \tag{64}$$

где

$$0 < \delta = (-d)^{1/2} = [27\mu(1-\mu) - 1]^{1/2} < \frac{1}{2}(23)^{1/2} = 2{,}3979157617.$$

Корни характеристического уравнения, как и раньше, равны

$$\lambda_{1,2} = \pm \Lambda_1^{1/2} \quad \text{и} \quad \lambda_{3,4} = \pm \Lambda_2^{1/2}$$

или

$$\lambda_1 = \frac{1}{2^{1/2}}(-1+i\delta)^{1/2} = \alpha_1 + i\beta_1,$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{2^{1/2}}(-1+i\delta)^{1/2} = \alpha_2 + i\beta_2,$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{2^{1/2}}(-1-i\delta)^{1/2} = \alpha_3 + i\beta_3, \tag{65}$$
$$\lambda_4 = -\frac{1}{2^{1/2}}(-1-i\delta)^{1/2} = \alpha_4 + i\beta_4.$$

Абсолютные значения этих корней равны

$$|\lambda| = |\lambda_{1,2,3,4}| = \frac{1}{2^{1/2}}[27\mu(1-\mu)]^{1/4}. \tag{66}$$

Отсюда следует, что для $\mu_0 < \mu < 1/2$ мы имеем

$$\frac{1}{2^{1/2}} < |\lambda| < \frac{1}{2}(27)^{1/4} = 1{,}1397535285.$$

Главный аргумент θ первого корня равен

$$\theta = \theta_1 = \operatorname{arctg}\frac{1+(1+\delta^2)^{1/2}}{\delta}, \tag{67}$$

так что для $\mu_0 < \mu < 1/2$

$$\frac{\pi}{2} > \theta > \operatorname{arctg}\frac{3\cdot 3^{1/2}+2}{23^{1/2}} = 56°{,}3187717113.$$

Аргументы четырех корней связаны между собой соотношениями

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 - \pi = 2\pi - \theta_3 = \pi - \theta_4.$$

Вещественные и мнимые части корней, α_i и β_i, равны

$$\alpha = \alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_3 = -\alpha_4$$

и

$$\beta = \beta_1 = -\beta_2 = -\beta_3 = \beta_4,$$

где

$$\alpha = \frac{\delta}{2(1+2|\lambda|^2)^{1/2}}, \quad \beta = \frac{(1+2|\lambda|^2)^{1/2}}{2}, \tag{68}$$

или

$$\alpha = \frac{\{[27\mu(1-\mu)]^{1/2}-1\}^{1/2}}{2}, \quad \beta = \frac{\{[27\mu(1-\mu)]^{1/2}+1\}^{1/2}}{2}.$$

Отсюда следует, что вещественные части двух характеристических корней положительны (и равны), так что точка равновесия в этом случае неустойчива. Этот результат применим так-

же и к нелинейным уравнениям, и треугольные точки либрации при наличии нелинейностей остаются неустойчивыми.

Предельные значения α и β, соответствующие $\mu=\mu_0$ и $\mu=1/2$, равны

$$0<\alpha<\left(\frac{23}{(2+3\cdot 3^{1/2})8}\right)^{1/2}=0{,}6320751956$$

и

$$\frac{1}{2^{1/2}}<\beta<\left(\frac{2+3\cdot 3^{1/2}}{8}\right)^{1/2}=0{,}9484297828.$$

Абсолютное значение корней $|\lambda|$, определяемое уравнением (66), главный аргумент θ, определяемый уравнением (67), а также вещественные и мнимые части первого корня, α и β, определяемые формулами (68), приводятся в указанном здесь порядке в Приложении III.

Решением системы дифференциальных уравнений (46) будет

$$\begin{aligned}\bar{\xi}&=\sum_{k=1}^{4}A_k e^{\alpha_k t}(\cos\beta_k t+i\sin\beta_k t),\\ \bar{\eta}&=\sum_{k=1}^{4}B_k e^{\alpha_k t}(\cos\beta_k t+i\sin\beta_k t),\end{aligned}\tag{69}$$

где

$$B_k=A_k\varkappa_k$$

и

$$\varkappa_k=\frac{\lambda_k^2-\bar{\lambda}_2}{2\lambda_k}=\frac{2\lambda_k}{\bar{\lambda}_1-\lambda_k^2},$$

или

$$\varkappa_k=\frac{\alpha_k(|\lambda|^2-\bar{\lambda}_2)+i\beta_k(|\lambda|^2+\bar{\lambda}_2)}{2|\lambda|^2}.\tag{70}$$

Здесь $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$ *не являются* сопряженными комплексными числами с $\lambda_{1,2}$, а представляют собой корни характеристического уравнения, рассмотренного ранее в пункте 4.7.2, часть IV, и приведенного в этой главе в пункте 5.4.1 (уравнение (44)).

Решение (69) можно записать также в форме

$$\begin{aligned}\bar{\xi}&=e^{\alpha t}(a_1\cos\beta t+a_2\sin\beta t)+e^{-\alpha t}(a_3\cos\beta t+a_4\sin\beta t),\\ \bar{\eta}&=e^{\alpha t}(b_1\cos\beta t+b_2\sin\beta t)+e^{-\alpha t}(b_3\cos\beta t+b_4\sin\beta t),\end{aligned}\tag{71}$$

где новые коэффициенты $a_1,\ldots,a_4$, $b_1,\ldots,b_4$ связаны между

собой соотношениями

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1\alpha' + a_2\beta', \\ b_2 &= -a_1\beta' + a_2\alpha', \\ b_3 &= -a_3\alpha' + a_4\beta', \\ b_4 &= -a_3\beta' - a_4\alpha'. \end{aligned} \tag{72}$$

Здесь

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2|\lambda|^2}(|\lambda|^2 - \bar{\lambda}_2) \quad \text{и} \quad \beta' = \frac{\beta(|\lambda|^2 + \bar{\lambda}_2)}{2|\lambda|^2}. \tag{73}$$

Четыре начальные условия ξ_0, η_0, $\dot{\xi}_0$ и $\dot{\eta}_0$ являются линейными функциями четырех постоянных $a_1, \ldots, a_4$. Полагая $a_1 = a_2 = 0$, видим, что решение асимптотически приближается к точке либрации, так как из уравнений (71) следует, что $\bar{\xi} \to 0$, $\bar{\eta} \to 0$, когда $t \to \infty$. В общем случае решение неустойчиво, и при произвольно выбранных начальных условиях решение неограниченно.

5.4.3. Вековые решения линеаризованных уравнений. Когда $\mu = \mu_0 = 0{,}0385208965\ldots$, мы имеем $d = 1 - 27\mu(1-\mu) = 0$, и, следовательно, $\Lambda_{1,2} = -1/2$ и $\lambda_1 = \lambda_3 = i/2^{1/2}$, $\lambda_2 = \lambda_4 = -i/2^{1/2}$. При двукратных корнях в решении уравнений (46) появляются вековые члены, так что точка равновесия является неустойчивой. Уравнения движения можно также рассматривать в осях ξ, η, которые параллельны осям x, y, тем не менее некоторые расчеты проще производить в системе $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, какой мы пользовались в пунктах 5.4.1 и 5.4.2. Общий вид решения следующий:

$$\begin{aligned} \xi &= (a_1 + a_2 t)\cos(t/2^{1/2}) + (a_3 + a_4 t)\sin(t/2^{1/2}), \\ \eta &= (b_1 + b_2 t)\cos(t/2^{1/2}) + (b_3 + b_4 t)\sin(t/2^{1/2}). \end{aligned} \tag{74}$$

Соотношения между a_i и b_i, с одной стороны, и между начальными условиями и этими коэффициентами, с другой стороны, зависят от выбора системы координат. В системе ξ, η имеем

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \Omega^*_{xx}(L_4)\,\xi + \Omega^*_{xy}(L_4)\,\eta, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \Omega^*_{xy}(L_4)\,\xi + \Omega^*_{yy}(L_4)\,\eta, \end{aligned} \tag{75}$$

где звездочки указывают на то, что частные производные вычисляются при $\mu = \mu_0 = 0{,}03852$. Так как $\Omega_{xx}(L_4)$ и $\Omega_{yy}(L_4)$ не зависят от μ, то

$$\Omega^*_{xx}(L_4) = \Omega_{xx}(L_4) = 3/4$$

и

$$\Omega^*_{yy}(L_4) = \Omega_{yy}(L_4) = 9/4.$$

Смешанная частная производная равна

$$\Omega_{xy}(L_4)=\frac{3\cdot 3^{1/2}}{2}(\mu-1/2),$$

и так как μ_0 есть решение уравнения

$$27\mu_0(1-\mu_0)=1,$$

то имеем

$$\Omega^*_{xy}(L_4)=-\frac{23^{1/2}}{4}.$$

Подставляя решения (74) в уравнениях движения (75) и используя приведенные выше значения частных производных, можно получить соотношения между коэффициентами b_i и a_i.

В системе координат $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, оси которой направлены вдоль главных осей эквипотенциальных эллипсов или вдоль осей эллиптических орбит (см. пункт 5.4.1), мы получаем решение в виде

$$\begin{aligned}\bar{\xi}&=(\alpha_1+\alpha_2 t)\cos t/2^{1/2}+(\alpha_3+\alpha_4 t)\sin t/2^{1/2},\\ \bar{\eta}&=(\beta_1+\beta_2 t)\cos t/2^{1/2}+(\beta_3+\beta_4 t)\sin t/2^{1/2}.\end{aligned}\tag{76}$$

Дифференциальные уравнения движения в этом случае имеют тот же вид, что и уравнения (46):

$$\ddot{\bar{\xi}}-2\dot{\bar{\eta}}=\bar{\lambda}^*_2\bar{\xi},\quad \ddot{\bar{\eta}}+2\dot{\bar{\xi}}=\bar{\lambda}^*_1\bar{\eta},\tag{77}$$

где

$$\bar{\lambda}^*_{1,2}=\frac{3}{2}\{1\pm[1-3\mu_0(1-\mu_0)]^{1/2}\}=\frac{3}{2}\pm 2^{1/2}.\tag{78}$$

Соотношения между коэффициентами, входящими в решение (76), принимают вид

$$\begin{aligned}\beta_1&=(\alpha_2+\alpha_3)\bar{\gamma},\\ \beta_2&=\alpha_4\bar{\gamma},\\ \beta_3&=(\alpha_4-\alpha_1)\bar{\gamma},\\ \beta_4&=-\alpha_2\bar{\gamma},\end{aligned}\tag{79}$$

где $\bar{\gamma}=2^{1/2}-1$.

И наконец, связь начальных условий $(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \dot{\bar{\xi}}_0, \dot{\bar{\eta}}_0, t_0=0)$ с коэффициентами решения $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ определяется матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \bar{\gamma} & \bar{\gamma} & 0\\ 0 & 1 & 1/2^{1/2} & 0\\ -\bar{\gamma}/2^{1/2} & 0 & 0 & 1/2^{1/2}\end{pmatrix},\tag{80}$$

обращение которой дает уравнения

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \bar{\xi}_0, \\
\alpha_2 &= -\frac{\bar{\eta}_0}{\bar{\gamma}^2} + \frac{2^{1/2}}{\bar{\gamma}}\dot{\bar{\xi}}_0, \\
\alpha_3 &= \frac{2^{1/2}}{\bar{\gamma}^2}\bar{\eta}_0 - \frac{2^{1/2}}{\bar{\gamma}}\dot{\bar{\xi}}_0, \\
\alpha_4 &= \bar{\gamma}\bar{\xi}_0 + 2^{1/2}\dot{\bar{\eta}}_0.
\end{aligned} \tag{81}$$

Эти уравнения показывают, что когда произвольно выбранные начальные координаты $\bar{\xi}_0$ и $\bar{\eta}_0$ связаны с должным образом выбраннымн начальными скоростями $\dot{\bar{\xi}}_0$ и $\dot{\bar{\eta}}_0$, вековые члены могут быть исключены. В самом деле, при начальных скоростях

$$\dot{\bar{\xi}}_0 = \frac{\bar{\eta}_0}{\bar{\gamma}2^{1/2}} \quad \text{и} \quad \dot{\bar{\eta}}_0 = -\frac{\bar{\xi}_0\bar{\gamma}}{2^{1/2}}$$

мы получаем решение

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 \cos\frac{t}{2^{1/2}} + \frac{\bar{\eta}_0}{\bar{\gamma}}\sin\frac{t}{2^{1/2}}, \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_0\cos\frac{t}{2^{1/2}} - \bar{\xi}_0\bar{\gamma}\sin\frac{t}{2^{1/2}}, \tag{82}$$

которое и следовало ожидать, исходя из уравнений (61).

Задача. Покажите, что постоянная Якоби периодического решения (82) линеаризованных уравнений движения вокруг точки L_4 при $\mu=\mu_0$ равна $C=3$.

§ 5.5. Нелинейные явления вблизи точек равновесия

5.5.1. Введение. В §§ 5.3 и 5.4 мы решили линеаризованные уравнения движения. При линеаризации учитываются только члены первого порядка относительно координат и скоростей. Следовательно, существенные результаты должны быть связаны с малыми значениями этих переменных. Разложение функции Ω около точки либрации в ряд Тейлора по степеням «вариаций можно закончить квадратами переменных, что даст линейные дифференциальные уравнения движения. Члены более высокого порядка, если оставить их в разложении, приведут к уравнениям вида

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \Omega_{xx}(a, b)\,\xi - \Omega_{xy}(a, b)\,\eta &= X(\xi, \eta; \mu), \\
\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \Omega_{xy}(a, b)\,\xi - \Omega_{yy}(a, b)\,\eta &= Y(\xi, \eta; \mu),
\end{aligned}$$

где функции $X(\xi, \eta; \mu)$ и $Y(\xi, \eta; \mu)$ представляют собой ряды вида $a_2\xi^2 + b_2\eta^2 + c_2\xi\eta + \ldots$ Так как вторые частные производные функции Ω в треугольных точках либрации либо постоянны, либо являются линейными функциями массового парамет-

ра, то коэффициенты a_2, b_2, c_2, ... в предыдущем разложении также будут либо постоянными, либо линейно зависящими от μ, так как эти коэффициенты являются частными производными высшего порядка от функции Ω.

Когда $X=0$ и $Y=0$, линейную систему можно исследовать, если не всегда простым, то во всяком случае непосредственным образом. Такое исследование было проведено нами в § 5.3 для коллинеарных точек либрации, а в § 5.4 было рассмотрено линеаризованное движение вокруг треугольных точек либрации. В этих параграфах мы сделали ряд замечаний относительно нелинейной задачи. Ниже мы рассмотрим нелинейные эффекты более подробно. Сначала мы исследуем орбиты вблизи коллинеарных точек, затем — орбиты вблизи треугольных точек и в конце рассмотрим условия устойчивости.

Данный параграф можно рассматривать как приложение некоторых основных идей, изложенных в § 5.2, к ряду задач.

5.5.2. Коллинеарные точки. Общее решение линеаризованных уравнений движения вокруг коллинеарных точек неограниченно из-за наличия положительного вещественного корня характеристического уравнения при любом значении μ. Частные решения вокруг коллинеарных точек можно получить. Эти решения существуют для любого значения μ и представляют собой бесконечно малые (линеаризованные) периодические орбиты, соответствующие мнимому корню. Период этих орбит зависит только от значения μ; от (бесконечно малого) размера орбиты он не зависит. Эта независимость частоты от амплитуды характерна для линейных явлений.

Если ряд содержит члены высшего порядка, то среднее движение изменяется в зависимости от размера орбиты. Существование периодических орбит в качестве решений нелинейных уравнений следует из теоремы Хорна, если провести аналитическое продолжение эллиптических периодических орбит. Влияние размера орбиты на ее период также следует из теоремы Хорна и может быть представлено в виде

$$T_i(\mu, \varepsilon)=T_{i0}(\mu)+P_i(\mu, \varepsilon), \tag{82a}$$

где функция P_i является аналитической в ε, и $P_i(\mu, \varepsilon)\to 0$, когда орбитальный параметр $\varepsilon\to 0$. Величина ε может представлять начальное условие, определяющее размер орбиты, как, например, в системе

$$\xi_0=\varepsilon, \quad \eta_0=0, \quad \dot{\xi}_0=0, \quad \dot{\eta}_0=-\varepsilon\beta_3 s$$

(сравните с уравнениями (22)). Из уравнений (19) получаем

$$\xi=\varepsilon\cos st \quad \text{и} \quad \eta=-\varepsilon\beta_3\sin st,$$

откуда видно, что при $\varepsilon\to 0$ орбита стягивается к точке либра-

ции. В предыдущем уравнении для периода (уравнение (82а)) индекс i пробегает значения 1, 2, 3; им соответствуют рассматриваемые коллинеарные точки. Величина $T_{i0}(\mu)$ выражает период бесконечно малой орбиты, равный $2\pi/s_i$; численные значения s_i приводятся в Приложении I, А—В.

Теория Пламмера третьего порядка определяет влияние частоты на амплитуду в виде соотношения $P_i = K\varepsilon^2$, где K положительно. Строго говоря, это равенство справедливо только при $\varepsilon \to 0$.

При рассмотрении полных (нелинейных) уравнений движения аналитическое продолжение указывает на существование обратных периодических орбит для всех значений μ около всех коллинеарных точек либрации для достаточно малого, но не равного нулю ε. Малым параметром аналитического продолжения в данном случае *не является* массовый параметр μ, как это обычно бывает при изучении периодических орбит в ограниченной задаче. Следовательно, такие периодические орбиты существуют не только для малых значений μ, но также и для $\mu = 1/2$, что подробно будет показано в гл. 9.

Внитнер установил аналитическую связь между «параметром продолжения» ε и постоянной Якоби посредством интеграла Якоби, так что в формуле для T_i вместо ε можно использовать C; последние связаны между собой соотношением $\varepsilon = (C_i - C)^{1/2}$.

Аналитическое продолжение общего решения, содержащего тригонометрические и гиперболические функции, или решения, содержащего только члены, связанные с вещественными корнями характеристического уравнения, представляет значительный интерес; на это указывал Депри. В пункте 9.4.2 приводятся орбиты, которые асимптотически, по прямой линии, приближаются к коллинеарным точкам либрации с бесконечным периодом. В окрестности коллинеарных точек либрации эти орбиты могут быть получены из решений линеаризованных уравнений.

5.5.3. Треугольные точки.

5.5.3.1. Периодические орбиты конечной амплитуды для $\mu < \mu_0$. Влияние нелинейности на движение вокруг треугольных точек равновесия носит более сложный характер, чем влияние на движение вокруг коллинеарных точек, вследствие большего многообразия форм возможных решений соответствующих линеаризованных уравнений. Из трех общих типов решения либрационное движение, происходящее в области $0 < \mu < \mu_0$, представляет наибольший интерес. С него мы и начнем.

Когда $0 < \mu < \mu_0$, линеаризованные уравнения дают колебательное движение, так как корни характеристического урав-

нения являются чисто мнимыми. Для заданного значения μ в указанной выше области существуют два периода, T_1 и T_2, соответствующие двум угловым скоростям, или средним движениям s_1 и s_2. Так как $s_1<s_2$, то $T_1>T_2$, и поэтому решение, соответствующее s_1, называют долгопериодическим, или либрационным, движением. Метод линеаризации дает в качестве решения бесконечно малые орбиты, и они могут быть продолжены до орбит конечных размеров с помощью процесса, аналогичного описанному выше для коллинеарных точек.

Периодические орбиты конечных размеров, образованные из бесконечно малых долгопериодических орбит и удовлетворяющие полным нелинейным уравнениям движения, образуют семейство долгопериодических орбит. Семейство короткопериодических орбит может быть образовано аналогичным образом из решения линеаризованного уравнения, соответствующего s_2. Оба семейства стягиваются к точкам $L_{4,5}$, когда орбитальный параметр ε стремится к нулю.

Формально, пользуясь уравнением (61) при $\bar{\xi}_0=\varepsilon$, $\bar{\eta}_0=0$, получаем

$$\bar{\xi}=\varepsilon\cos s_i t+O(\varepsilon^2),$$
$$\bar{\eta}=-\bar{\alpha}_i\varepsilon\sin s_i t+O(\varepsilon^2).$$

Период находится из теоремы Хориа:

$$T_i(\mu,\varepsilon)=2\pi/s_i+P_i(\mu,\varepsilon),$$

где $\bar{\alpha}_i$ и s_i определяются уравнениями (58) и (59) и зависят от μ, но не зависят от ε. Функция P_i обладает тем свойством, что $P_i(\mu,\varepsilon)\to 0$, когда $\varepsilon\to 0$. Индексы 1 и 2 соответствуют долгопериодическому и короткопериодическому движениям. Теория Педерсена третьего порядка дает, например, $P_i(\mu,\varepsilon)=K\varepsilon^2$, где $K=K(s_i)$ или, поскольку $s_i=s_i(\mu)$, $K=K(\mu)$.

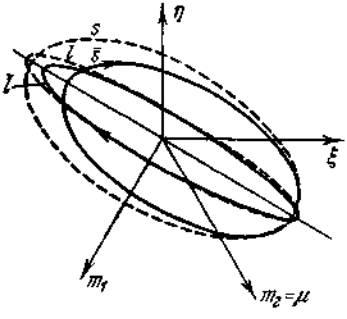


Рис. 5.8. Долгопериодическая (l) и короткопериодическая (s) образующие орбиты и соответствующие фактические решения $\bar{l}$ и $\bar{s}$ для $\mu=0{,}01$ и $\varepsilon_2=\varepsilon_s=0{,}00111$, $\varepsilon_1=\varepsilon_l=0{,}00115$ (Мультон, 1920 [40]).

На рис. 5.8 показаны долгопериодическая и короткопериодическая образующие орбиты для $\mu=0{,}01$. Соответствующие средние движения, взятые из таблицы Приложения II А, равны $s_1=0{,}26835$ и $s_2=0{,}96332$. Кроме того, на рисунке приведены заимствованные из работы Мультона решения нелинейных уравнений для $\varepsilon_1=0{,}0015$ и $\varepsilon_2=0{,}00111$.

На рис. 5.9 и 5.10, заимствованных из работы Педерсена, показывается продолжение бесконечно малых периодических орбит с $s_2^2=0{,}6$ и $s_1^2=0{,}3$; первое значение соответствует короткопериодическому семейству с $\mu=0{,}0369185$, второе — долгопериодическому семейству с $\mu=0{,}0321444$. Значения K приближенно равны -9 и $+27$, что дает изменения периодов, равные приблизительно $\Delta T_2=-0{,}36$ и $\Delta T_1=+1{,}08$. Линейная теория дает $T=2\pi/s_1=11{,}45$ и $T_2=8{,}12$, так что изменения в периодах, вызываемые нелинейным эффектом, не являются пренебрежимо малыми.

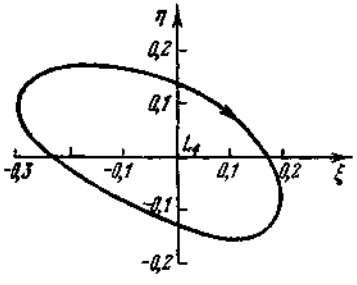


Рис. 5.9. Периодическая орбита вокруг точки L_4 для $\varepsilon=0{,}2$ и $\mu=0{,}0369$. Продолжение короткопериодической бесконечно малой орбиты с $s_2=0{,}7746$ (Педерсен, 1935 [60]).

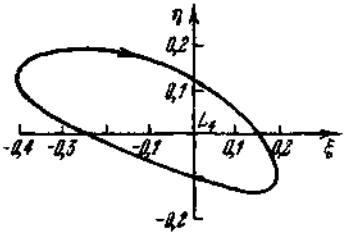


Рис. 5.10. Периодическая орбита вокруг точки L_4 для $\varepsilon=0{,}2$ и $\mu=0{,}0322$. Продолжение долгопериодической бесконечно малой орбиты с $s_1=0{,}5477$ (Педерсен, 1935 [60]).

Существенное различие между двумя семействами состоит в том, что короткопериодические орбиты могут быть образованы посредством аналитического продолжения из бесконечно малых периодических орбит при *любом* значении массового параметра, тогда как при образовании долгопериодических семейств имеются некоторые дискретные запрещенные значения μ, при которых они образованы быть не могут. Эти запрещенные значения следуют из теоремы Хорна, впервые они были установлены Педерсеном. Они соответствуют случаю, когда отношение периодов бесконечно малых долгопериодических и короткопериодических орбит $T_1/T_2=s_2/s_1$ есть число целое. Обозначив его через k, будем иметь

$$k^2=\frac{1+[1-27\mu(1-\mu)]^{1/2}}{1-[1-27\mu(1-\mu)]^{1/2}}$$

и

$$s_1 = \frac{1}{(1+k^2)^{1/2}}, \quad s_2 = ks_1.$$

Критическое значение массового параметра становится равным

$$\mu = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\left(k^4 + \frac{38k^2}{27} + 1\right)^{1/2}}{1+k^2}\right].$$

Существование критических значений μ обусловлено обращением в нуль (при $s_2/s_1 = k$) определителя линейных алгебраических уравнений, применяемых при определении коэффициентов Фурье в решении нелинейных уравнений. Например, при $k=2$ мы имеем $s_1 = 1/5^{1/2}$, $s_2 = 2/5^{1/2}$ и $\mu = 0{,}024294$. Предыдущие выражения для k^2 и μ показывают, что в случае критических значений массового параметра частота возрастает, когда $\mu \to 0$.

Семейства короткопериодических орбит обладают тем свойством, что период каждой орбиты заданного семейства, соответствующего фиксированному значению μ, уменьшается с увеличением размеров орбиты. Такие же отрицательные характеристики для соотношения между периодом и амплитудой, согласно теории Педерсена третьего порядка, имеют место для долгопериодического решения, при условии, что $s_{10}^2 = 0{,}1188979 < s_1^2 < 0{,}2$. Период долгопериодического решения возрастает с увеличением размеров орбиты, если для образующего решения $0 < s_1^2 < s_{10}^2$ и $0{,}2 < s_1^2 < \frac{1}{2}$. Решения линеаризованных уравнений, конечно, не дают соотношения между частотой и амплитудой. Указанный выше нелинейный эффект, согласно которому период влияет на амплитуду, можно получить из исследования третьего порядка, т. е. при сохранении в уравнениях движения членов третьего порядка относительно размеров орбиты: ξ^3 и η^3.

Для системы Солнце — Юпитер $s_1 = 0{,}080464$, а для системы Земля — Луна $s_1 = 0{,}29808$, следовательно, периоды нелинейных долгопериодических решений возрастают с увеличением размеров орбит для обеих систем. Численные расчеты в этой области провел Рабе (см. § 9.6).

На этом мы закончим рассмотрение нелинейных аспектов движения вокруг треугольных точек либрации в интервале изменения массового параметра от $\mu = 0$ до $\mu = \mu_0$.

5.5.3.2. Периодические орбиты конечной амплитуды для $\mu > \mu_0$. Для значений массового параметра, больших μ_0, корни характеристического уравнения имеют отличные от нуля вещественные части, и орбиты принимают форму спиралей. Следовательно, в линейной теории не существует периодических (бесконечно малых) орбит вокруг точек $L_{4,5}$.

когда $\mu > \mu_0$. Спиральные орбиты асимптотически приближаются к треугольным точкам либрации или отходят от них. Численные и графические исследования Стрёмгрена показывают, как периодические орбиты преобразовываются в спирали, когда μ изменяется от $\mu < \mu_0$ до $\mu > \mu_0$.

Естественно, возникает вопрос, допускает ли эффект нелинейности существование периодических орбит для $\mu > \mu_0$. Иначе говоря, существуют ли периодические орбиты конечных размеров для $\mu > \mu_0$, несмотря на то, что бесконечно малых периодических орбит для этих значений μ не существует. Ответ на этот вопрос оказывается положительным. Сначала мы рассмотрим продолжение случая $\mu = \mu_0$.

Значение массового параметра $\mu_0 = 0{,}03852$ дает вековое решение, которое при соответствующих начальных условиях может перейти в периодическую орбиту, как показано в пункте 5.4.3 (уравнения (82)). Та же орбита и те же уравнения могут быть получены как предельный случай для либрационного движения (уравнения (61)). Это предельное условие имеет место тогда, когда долгопериодическая и короткопериодическая орбиты совпадают и период движения в $2^{1/2}$ раза превышает время обращения основных тел: $s_1 = s_2 = 1/2^{1/2}$. Оба представления, уравнения (61) и уравнения (82), выражены в системе координат $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, оси которой параллельны главным направлениям эллипсов нулевой скорости. Уравнения орбиты можно также написать в системе ξ, η, оси которой параллельны осям первоначальной системы координат x, y; см. уравнения (34) и (74).

Пусть начальными условиями будут $\xi_0 = \varepsilon$, $\eta_0 = 0$; тогда из уравнений (33) будем иметь $\dot{\xi}_0 = -3(3^{1/2}/8)\varepsilon\gamma$ и $\dot{\eta}_0 = -\varepsilon(s_1^2 + {}^3/_4)/2$. Среднее движение $s_1 = 1/2^{1/2}$ и значение $\gamma = (23/27)^{1/2}$, соответствующие $\mu = \mu_0$, дают

$$\xi = \varepsilon \cos \frac{t}{2^{1/2}} - \frac{46^{1/2}}{8} \varepsilon \sin \frac{t}{2^{1/2}},$$

$$\eta = -\frac{5 \cdot 2^{1/2}}{8} \varepsilon \sin \frac{t}{2^{1/2}}.$$

Эти уравнения следуют из уравнений (32) и (34) или из уравнений (74) при $a_2 = a_4 = b_1 = b_2 = b_4 = 0$, $a_1 = \varepsilon$, $a_3 = -3 \cdot 3^{1/2}\varepsilon\gamma/8s_1 = \varepsilon 46^{1/2}/8$ и $b_3 = -\frac{1}{2}(s_1 + 3/4s_1)\varepsilon = -5 \cdot 2^{1/2}\varepsilon/8$.

Периодические орбиты, определяемые предыдущими уравнениями, существуют только для бесконечно малых значений ε и представляют собой решение линеаризованных дифференциальных уравнений. Если в дифференциальных уравнениях движения сохранить члены высшего порядка, то это решение можно продолжить до периодических орбит конечных размеров.

Рассмотрим заданное значение массового параметра $\mu = \mu_0 + \delta$, где δ — достаточно малая положительная величина. Тогда для этого фиксированного значения $\mu > \mu_0$ будет существовать одна периодическая орбита конечных размеров с периодом $T_1 = T_2 = 2\pi 2^{1/2}$. Периодические орбиты для различных значений δ, имеющие один и тот же период $2\pi 2^{1/2}$, следуя Брауну, называют предельными орбитами. Они образованы из предельной бесконечно малой периодической орбиты (см. предыдущие уравнения). Вековое решение (см. пункт 5.4.3) при соответствующих начальных условиях становится предельной периодической орбитой, так как оно ограничивает и соединяет долгопериодическую и короткопериодическую орбиты.

То же самое мы имеем в нелинейном случае. Когда значение массового параметра фиксировано и $\mu > \mu_0$, можно ожидать, что существует семейство долгопериодических орбит с периодами $T_l \neq 2\pi 2^{1/2}$, устанавливающих соотношение между амплитудой и периодом. Аналогично может существовать семейство короткопериодических орбит с периодами $T_s < T_e$, которые тоже изменяются с изменением амплитуд. Так как периоды орбит, как короткопериодических, так и долгопериодических, при фиксированном значении $\mu > \mu_0$ изменяются с изменением амплитуды, то значение $T_l = T_s = 2\pi 2^{1/2}$ достигается тогда, когда эти орбиты совпадают друг с другом и с предельной орбитой конечной амплитуды.

Совокупность периодических орбит можно исследовать также, рассматривая фиксированное значение μ и заданное значение орбитального параметра ε. Когда $\mu < \mu_0$ при заданном значении ε, существуют две периодические орбиты: одна, образованная из бесконечно малой долгопериодической орбиты, и другая, полученная посредством продолжения бесконечно малой короткопериодической орбиты. Период долгопериодической орбиты конечных размеров равен $T_e > T_1 = 2\pi/s_1$, а короткопериодической орбиты конечных размеров $T_s > T_2 = 2\pi/s_2$. (Следует помнить, конечно, об указанных ранее исключениях.)

Аналогично, когда $\mu > \mu_0$ и ε и μ, как и ранее, фиксированы, можно ожидать, что существуют две периодические орбиты конечных размеров, одна с большим периодом, другая с малым. Изменяя значение орбитального параметра ε, можно достигнуть критического значения ε_0, при котором обе периодические орбиты совмещаются и их периоды становятся равными. Отсюда следует, что если имеется предельная орбита, соответствующая ранее указанному фиксированному значению μ, то период ее будет равен $T = 2\pi 2^{1/2}$.

Предельные орбиты были рассчитаны Депри с высокой степенью точности до $\mu_1 = 0{,}044$ с помощью его теории четырнадцатого порядка. Полученные им результаты представлены

графически на рис. 5.11 и 5.12. Постоянные Якоби предельных орбит увеличиваются с ростом массового параметра, что видно из рис. 5.11. При $\mu=\mu_0$ предельная орбита стягивается к точке

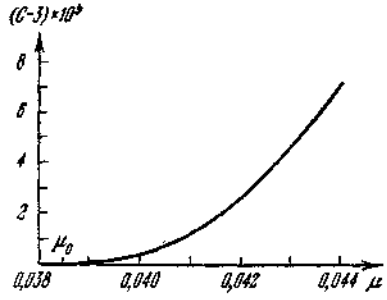


Рис. 5.11. Зависимость постоянной Якоби от массового параметра для предельных орбит треугольной точки либрации.

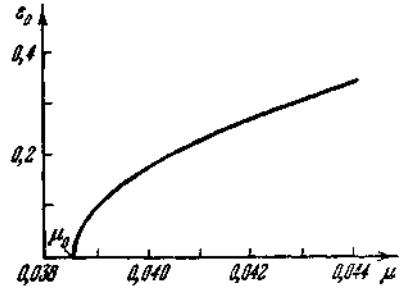


Рис. 5.12. Зависимость орбитального параметра от массового параметра для предельных орбит вокруг треугольной точки либрации.

либрации и значение постоянной Якоби становится равным трем. На рис. 5.12 показан орбитальный параметр для предельных орбит в функции от массового параметра. При $\mu=\mu_0$ имеем $\varepsilon_0=0$. На рис. 5.13 изображены две предельные орбиты, относящиеся к двум различным значениям массового параметра. Точка либрации, к которой стягивается предельная орбита при $\mu=\mu_0$, имеет следующие координаты: $x=1/2-\mu_0=$ $=0{,}46148$, $y=3^{1/2}/2=0{,}86603$.

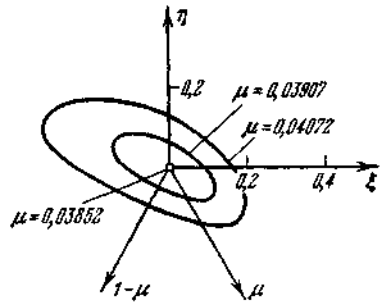


Рис. 5.13. Предельные орбиты вокруг треугольной точки либрации (Педерсен, 1933 [75]).

Как уже говорилось, идея предельных орбит для $\mu>\mu_0$ впервые была высказана Брауном. Ниже мы приводим его рассуждения.

Характеристическое уравнение (25), относящееся к треугольным точкам либрации, если применить подстановку $\lambda=is$, принимает следующий вид:

$$s^4-s^2+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0.$$

Следовательно, бесконечно малые периодические орбиты суще-

ствуют тогда, когда дискриминант положителен, или

$$0<1-27\mu(1-\mu).$$

Браун рассматривает следующее уравнение:

$$s^4-s^2+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=k\varepsilon^2,$$

где $k=k(\mu)$, а ε пропорционально линейным размерам орбиты. Согласно новому характеристическому уравнению мы можем иметь положительный дискриминант

$$0<1-27\mu(1-\mu)+4k\varepsilon^2,$$

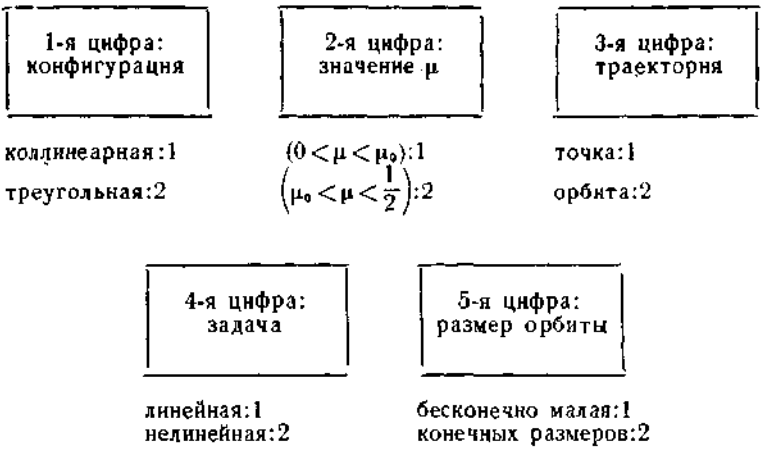
и, следовательно, вещественные значения для s даже тогда, когда $\mu>\mu_0$, при условии, что $\varepsilon\neq 0$ достаточно велико и $k>0$. Замечая, что в теории более высокого порядка, чем первый, появляется член $k\varepsilon^2$, Браун заключает, что существуют предельные орбиты (см. пункт 5.5.3.2).

5.5.4. Устойчивость. Исследование устойчивости точек равновесия и периодических орбит вокруг них можно провести следующим образом. Сначала проведем классификацию по положению точки либрации. Таким образом, речь будет идти о коллинеарных точках (1) и треугольных точках (2). Следующую классификацию мы проведем по значению массового параметра. Если $0<\mu<\mu_0$ и рассматриваются коллинеарные точки, то будем иметь случай 11. Для той же области изменения массового параметра, но для треугольных точек мы будем иметь случай 21. Когда $\mu_0<\mu<1/2$, классификация дает 12 и 22. Заметим, что случаи 11 и 12 одинаковы, так как для коллинеарных точек не существует критического значения μ.

Далее, мы проведем различие между точками либрации и орбитами вокруг них. Если третья цифра 1, то это будет означать точки равновесия, если же третья цифра 2, то это будет означать, что мы подразумеваем периодические орбиты вокруг точек. В исследовании устойчивости точек равновесия и орбит вокруг них мы будем различать линейную задачу устойчивости и нелинейную задачу устойчивости: четвертая цифра 1 будет относиться к линейной задаче, а цифра 2 — к нелинейной задаче. Пятая, она же последняя классификация будет производиться по размерам орбиты: цифра 1 будет относиться к бесконечно малой орбите, цифра 2 — к орбите конечных размеров. Под бесконечно малой орбитой мы будем понимать решение для линеаризованных дифференциальных уравнений движения.

Изложенную выше классификацию можно представить в виде схемы 5.1.

Схема 5.1



Таким образом, мы получаем $2^5=32$ комбинации. Однако некоторые из них можно исключить на основании следующих соображений.

Мы уже отмечали, что случаи, выражаемые числами, начинающимися с 11 и 12, одинаковы. Это позволяет исключить 8 случаев, остается 24. Далее, если рассматривается точка равновесия (а не орбита вокруг нее), то отпадает вопрос о размере орбиты, так что когда третьей цифрой является 1, пятая цифра теряет смысл. Это позволяет исключить еще 6 случаев, остается 18. Заметим теперь, что нелинейная задача устойчивости неприменима к орбите бесконечно малого размера; следовательно, все случаи, для которых четвертой цифрой является цифра 2, а последней цифрой 1, исключаются, при условии, что третьей цифрой является 2, так как этот критерий мы применяем к орбитам, а не к точкам. Таким путем мы исключаем еще 3 случая, остается 15. Кроме того, мы знаем, что вокруг треугольных точек бесконечно малых периодических орбит не существует, если $\mu_0<\mu<{}^1/_2$; следовательно, случаи 22211 и 22221 могут быть исключены. Это уменьшает число случаев до 14, так как случай 22221 мы уже исключили как относящийся к нелинейной задаче для бесконечно малой орбиты. Наконец, исключаются случаи 11211 и 21211. Они относятся к линейным задачам устойчивости для бесконечно малых периодических орбит вокруг коллинеарных и треугольных точек соответственно, для $0<\mu<\mu_0$, поэтому заключение об их устойчивости будет таким же, как в случае соответствующих точек либрации. Иными словами, случаи 11111 и 11211, с одной стороны, и

случаи 21111 и 21211, с другой стороны, тождественны в отношении устойчивости.

Остается 12 случаев: 11111, 11121, 11212, 11222, 21111, 21121, 21212, 21222, 22111, 22121, 22212 и 22222. Четыре первых случая относятся к коллинеарной конфигурации, остальные — к треугольной. Характеристики каждого из 12 случаев приводятся ниже.

Случай 11111. Исследование устойчивости линейной системы относительно коллинеарных точек указывает на неустойчивость при любом значении массового параметра, как было показано в § 5.3. Если говорить более точно, то эти точки неустойчивы, но условно устойчивы в линейном смысле.

Случай 11121. Решение нелинейной задачи об устойчивости коллинеарных точек также показывает неустойчивость для любого значения массового параметра, как отмечалось в пункте 5.2.2.3. Условной устойчивости в этом случае не существует.

Случай 11212. Решение нелинейной задачи об устойчивости периодических орбит конечных размеров вокруг коллинеарных точек, как показал в своей работе Г. Н. Дубошин, является неустойчивым при любом значении массового параметра.

Случай 11222. Нелинейная задача об устойчивости периодических орбит конечных размеров вокруг коллинеарных точек не решена. Можно предполагать неустойчивость при любом значении массового параметра.

Случай 21111. Согласно линейной теории устойчивости, треугольные точки, как показано в пункте 5.4.1, устойчивы при $0<\mu<\mu_0=0{,}03852$.

Случай 21121. Нелинейная задача об устойчивости треугольных точек в области $0<\mu<\mu_0$ была решена Леонтовичем; он установил устойчивость их.

Случай 21212. Периодические орбиты конечных размеров вокруг треугольных точек, исключая подковообразные орбиты, являются устойчивыми в линейном смысле в области $0<\mu<\mu_0$; это показали Педерсен, Депри и Рабе.

Случай 21222. Задача об устойчивости (в нелинейном смысле) периодических орбит конечных размеров вокруг треугольных точек для $0<\mu<\mu_0$ не решена.

Случай 22111. Согласно линейной теории, треугольные точки в области $\mu_0<\mu<1/2$ неустойчивы, см. пункт 5.4.2.

Случай 22121. Согласно нелинейной теории, кратко изложенной в пункте 5.2.2.3, треугольные точки в области $\mu_0<\mu<1/2$ неустойчивы.

Случай 22212. Согласно линейной теории, периодические орбиты конечных размеров (предельные орбиты) вокруг треугольных точек при $\mu_0<\mu<\mu_1=0{,}044$ устойчивы; это показал Депри.

Случай 22222. Нелинейная задача об устойчивости периодических орбит конечных размеров (предельных орбит) вокруг треугольных точек для $\mu_0 < \mu < 1/2$ не решена.

Из приведенных рассуждений можно заключить, что нелинейная задача об устойчивости периодических орбит вокруг треугольных точек при значении массового параметра, меньшем критического ($\mu_0 = 0{,}03852$), не решена. Соответствующая линейная задача приводит к критическому случаю с чисто мнимыми характеристическими корнями, и экстраполяция результатов исследования устойчивости от линейного случая к нелинейному непосредственно выполнена быть не может. Остальные случаи либо решены, либо позволяют сделать определенные предположения.

§ 5.6. Приложения

5.6.1. Троянцы. Известным и классическим приложением гл. 5 может служить теория астероидов, названных Троянцами. Они были предсказаны Лагранжем в 1772 г. Наблюдения подтвердили правильность предсказания: в 1906 г. первый астероид этой группы, 588 Ахиллес, был открыт вблизи треугольной точки либрации системы Солнце—Юпитер.

В табл. I перечисляются астероиды группы Троянцев; таблица взята из списка малых планет, составленного в 1965 г.

Таблица I. Троянцы

№	Название	$\bar{n}$	a	k
588	Ахиллес	298,264	5,2112	5
617	Патрокл	298,645	5,2068	4
624	Гектор	306,170	5,1211	5
659	Нестор	296,080	5,2368	5
884	Приам	297,814	5,2164	4
911	Агамемнон	305,120	5,1328	5
1143	Одиссей	300,443	5,1860	5
1172	Эней	300,254	5,1881	4
1173	Анхис	308,455	5,0958	4
1208	Троил	302,757	5,1595	4
1404	Аякс	302,437	5,1631	5
1437	Диомед	304,209	5,1431	5
1583	Антилох	292,784	5,2760	5
1647	Менелай	297,306	5,2224	5

Символом $\bar{n}$ обозначено среднее движение за эфемеридные сутки в дуговых секундах, а символом a — большая полуось в

астрономических единицах. Для Юпитера $\bar{n}=299'',13$ и $a=5{,}2027$. В последнем столбце таблицы указан номер точки либрации. Номер 4, например, определяет точку L_4, т. е. треугольную точку либрации с положительной ординатой. Планета вблизи этой точки находится за Юпитером. Астероиды с $k=5$ находятся впереди Юпитера. Помимо этих четырнадцати Троянцев, в 1965 г. было открыто еще тринадцать астероидов этой группы слабого блеска. Окончательная каталогизация не производилась с 1966 г.

Важность отклонений системы Солнце — Юпитер — астероид от предположений ограниченной задачи зависит от причин, которые надлежит еще изучить. Эксцентриситетом орбиты Юпитера (равным приблизительно 0,05) и возмущающим эффектом других планет при первом исследовании устойчивости треугольных точек либрации можно пренебречь.

Массовый параметр системы Солнце — Юпитер равен 0,000953875 и, стало быть, меньше, чем $\mu_0=0{,}03852$. Следовательно, возможно гармоническое движение вокруг точек $L_{4,5}$. Собственные значения характеристического уравнения дают две различных частоты (см. Приложение II Г) $s_1=0{,}080464$ и $s_2=0{,}996758$. Заметим, что приближенные формулы $s_1=(6{,}75\,\mu)^{1/2}$ и $s_2=1-3{,}375\,\mu$, приведенные в пункте 5.4.1, дают те же значения с ошибкой, меньшей, чем 1/300.

Безразмерные угловые скорости, или средние движения s_1 и s_2 дают безразмерные периоды колебания $t_1=2\pi/s_1=78{,}090790$ и $t_2=6{,}303621$. Период вращения системы координат в безразмерных единицах равен $t_0=2\pi$, так как угловая скорость равна единице. Период вращения системы в размерных единицах равен орбитальному периоду обращения Юпитера: $T_J=11{,}862$ тропических лет. Среднее движение системы то же, что и у Юпитера: $n_J=2\pi/T_J=0{,}52977$ рад/год. Соотношение между размерным временем t^* и безразмерным временем t равно $t=n_J t^*$, и, следовательно, размерный период колебания равен

$$t_i^*=\frac{t_i}{n_J}=\frac{2\pi}{s_i}\,\frac{T_J}{2\pi}=\frac{T_J}{s_i}. \tag{83}$$

Из этого уравнения получаем, что $t_1^*=147{,}4$ года и $t_2^*=11{,}90$ года. Мы видим, что малый период приблизительно такой же, как орбитальный период Юпитера. Колебание с большим периодом t_1^* называется *либрацией*.

Значение массового параметра для других планет меньше, чем для Юпитера. Критерий устойчивости для треугольных точек либрации, $\mu<\mu_0=0{,}03852$, выполняется поэтому для всех планет, когда каждая из них рассматривается вместе с Солнцем как ограниченная задача. Однако совокупности астероидов в

точках L_4 и L_5 наблюдались только у Юпитера, по-видимому, по той причине, что условия ограниченной задачи для других планет выполняются менее точно. Отклонения от предположений ограниченной задачи происходят в основном от возмущающего действия Юпитера в точках равновесия других планет и от не равных нулю эксцентриситетов орбит планет.

5.6.2. Треугольные точки либрации в системе Земля—Луна. Представляет большой интерес исследовать динамику частиц, движущихся вокруг треугольных точек либрации системы Земля — Луна. На устойчивость треугольных точек либрации и орбит тел малой массы, движущихся вокруг них, оказывают влияние гравитационный эффект и эксцентриситет орбиты Луны. Массовый параметр равен $\mu=0{,}012141$, и, следовательно, условие $\mu<\mu_0$ выполняется. Солнце, Земля, Луна и частица образуют систему четырех тел, которая *ограниченна* в том смысле, что на орбиты трех основных тел четвертое тело влияния не оказывает, будь это искусственный спутник, зонд, посылаемый в космос, или астероид.

Положение треугольной точки либрации в системе Земля — Луна для задачи четырех тел имеет только геометрическое значение, так как гравитационное поле Солнца нарушает равновесие сил, действующих на четвертое тело. Систематическое изучение этой задачи проводится следующим образом. Сначала принимаются предположения ограниченной задачи трех тел и исследуются линеаризованные и нелинейные уравнения, пункт 5.6.2.1 А и Б. Затем модель расширяется: в нее включается Солнце, пункт 5.6.2.2; в части А рассматривается ограниченная задача четырех тел, в части Б — фактически существующие эфемериды.

5.6.2.1. Линейные и нелинейные эффекты в ограниченной задаче трех тел. А. Здесь мы рассмотрим линеаризованные уравнения ограниченной задачи и их решения для системы Земля — Луна при $\mu=0{,}012141$. Влиянием Солнца будем пренебрегать. Безразмерные частоты равны

$$s_1=0{,}29808 \quad \text{и} \quad s_2=0{,}95454.$$

Принимая орбитальный период Луны равным $T_{\mathbb{C}}=27^d{,}322$, будем иметь следующие большой и малый периоды: $t_1^*=91^d{,}66$ и $t_2^*=28^d{,}62$. В зависимости от начальных условий движение может содержать оба периода или только один. Если решение содержит только движение с большим периодом, то отношение большой оси к малой равно $1/\bar{\alpha}_1=5{,}13557$. В случае движения с малым периодом это отношение равно $1/\bar{\alpha}_2=2{,}03444$; оба результата получаются из формулы (58). Направление большой оси находим из формулы (45): $\alpha=29°{,}6932$.

Точка пересечения оси $\bar{\eta}$ с осью x определяется координатой $x_0=0{,}005982$.

Движение, представляющее комбинацию долгопериодического и короткопериодического решений, является общим решением линеаризованной задачи. Коэффициенты $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ дают общее решение вида (56). Если при $t=0$ $\bar{\xi}_0=\bar{\eta}_0=0$ и, кроме того, $\dot{\bar{\xi}}_0=0$, то решение принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{\xi}&=\frac{2\dot{\bar{\eta}}_0}{s_2^2-s_1^2}(\cos s_1 t-\cos s_2 t),\\ \bar{\eta}&=\frac{2\dot{\bar{\eta}}_0}{s_2^2-s_1^2}(\bar{\alpha}_2\sin s_2 t-\bar{\alpha}_1\sin s_1 t).\end{aligned}\tag{84}$$

Для малых значений t это решение можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{\xi}&\approx\dot{\bar{\eta}}_0 t^2,\\ \bar{\eta}&\approx\dot{\bar{\eta}}_0 t.\end{aligned}$$

Исключая t, получаем

$$\bar{\xi}\approx\frac{\bar{\eta}^2}{\dot{\bar{\eta}}_0}.\tag{85}$$

При положительном $\dot{\bar{\eta}}_0$ частица переходит из начала координат в первую четверть плоскости $\bar{\xi}\bar{\eta}$ с $\bar{\xi}>0$, $\bar{\eta}>0$, а при отрицательном $\dot{\bar{\eta}}_0$ начальный участок орбиты располагается в третьей четверти с $\bar{\xi}<0$, $\bar{\eta}<0$. На рис. 5.14 показан начальный участок орбиты.

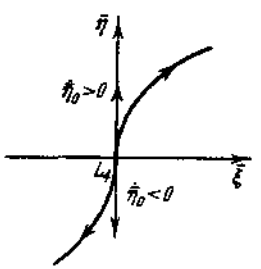


Рис. 5.14. Орбиты, оставляющие треугольную точку либрации.

Когда начальные условия выбраны таким образом, что в решение входит только одна частота, можно получить периодические решения (см. рис. 5.6). Периодические решения можно получить даже тогда, когда решение содержит обе частоты, при условии, что отношение s_1/s_2 есть число рациональное: $s_1/s_2=n/m$, где n и m — целые положительные числа. Для произвольного значения μ имеем

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{1-[1-27\mu(1-\mu)]^{1/2}}{[27\mu(1-\mu)]^{1/2}},\tag{86}$$

и, следовательно, в общем случае отношение s_1/s_2 иррационально. С другой стороны, фактическое значение μ как физической

величины никогда не задается точно. Следовательно, периодические орбиты всегда можно получить, производя небольшие модификации значения μ. Например, в данном случае можно положить

$$A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}. \tag{87}$$

Тогда для того, чтобы отношение s_1/s_2 было рациональным, должно выполняться условие

$$\mu=\frac{1-[1-4/27\,(1-A^2)]^{1/2}}{2}. \tag{88}$$

Так как $s_2/s_1=3{,}2023\approx 16/5$, то будем иметь $n=5$, $m=16$, $A^2=0{,}67579$ и $\mu=0{,}01213$. Уравнения (87) и (88) получаются, если правую часть уравнения (86) приравнять отношению n/m и разрешить полученное соотношение относительно μ.

На рис. 5.15 показана орбита, содержащая обе частоты и соответствующая уравнениям (84). Начальные условия были

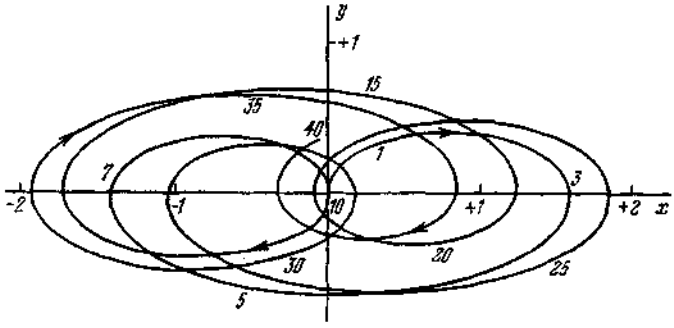


Рис. 5.15. Линеаризованное решение вокруг треугольной точки либрации системы Земли—Луна за 1/2 года.

указаны раньше, кроме значения $\dot{\bar{\eta}}_0$. Вводя новые переменные

$$\tilde{x}=\frac{\bar{\xi}\,(s_2^2-s_1^2)}{2\dot{\bar{\eta}}_0} \quad \text{и} \quad \tilde{y}=\frac{\bar{\eta}\,(s_2^2-s_1^2)}{2\dot{\bar{\eta}}_0},$$

находим из уравнения (84)

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=\cos s_1 t-\cos s_2 t,\\ \tilde{y}&=\bar{\alpha}_2\sin s_2 t-\bar{\alpha}_1\sin s_1 t.\end{aligned} \tag{89}$$

Область движения определяется следующими пределами: $-2\leqslant\tilde{x}\leqslant 2$ и $-(\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2)=-0{,}6863\leqslant\tilde{y}\leqslant 0{,}6863=\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2$. Приближенно уравнение огибающей можно записать в виде

$$\frac{\tilde{x}^2}{4}+\frac{\tilde{y}^2}{0{,}4710}=1, \tag{90}$$

поскольку малая и большая полуоси равны соответственно 0,6863 и 2.

Орбита начинается при $\dot{\tilde{y}}>0$, так как из уравнения (89) имеем $\dot{\tilde{y}}(0)=\bar{\alpha}_2 s_2-\bar{\alpha}_1 s_1=\frac{1}{2}(s_2^2-s_1^2)>0$. Безразмерное время t связано с действительным временем t^* и средним движением Луны $n_{\leftmoon}$ соотношением

$$t^*=\frac{t}{n_{\leftmoon}}=\frac{tT_{\leftmoon}}{2\pi}=\frac{27{,}322}{2\pi}t=4{,}348\ t,$$

где t^* выражается в сутках, поскольку период Луны равен $T_{\leftmoon}=27^d{,}322$. Полное фактическое время согласно рис. 5.15 равно приблизительно половине года. Числа, указанные на орбите, выражают протекшее безразмерное время.

Орбита *не является* периодической, так как отношение s_1/s_2 есть число иррациональное. С другой стороны, если в качестве действительных средних движений принять $s_1=0{,}29808$ и $s_2=0{,}95454$, то отношение s_1/s_2 станет числом рациональным и орбита будет периодической. Если периоды, соответствующие s_1 и s_2, будут $T_1=2\pi/s_2$, $T_2=2\pi/s_2$ и

$$s_2/s_1=T_1/T_2=m/n,$$

то период результирующего движения будет равен

$$T^*=mT_2=nT_1=\frac{2\pi m}{s_2}=\frac{2\pi n}{s_1}=\frac{2\pi}{s^*}, \tag{91}$$

где s^* есть среднее движение результирующей орбиты. (Эти и некоторые последующие соображения будут рассмотрены с других позиций в § 8.2.)

После того как значения m и n найдены, из уравнения (91) можно вычислить T^*. Если s_2/s_1 аппроксимировано выбранным отношением m/n, то, конечно, $mT_2\neq nT_1$ и повторение происходит с ошибкой ε. Неравенство

$$|T^*/T_i-n_i|<\varepsilon \tag{92}$$

должно удовлетворяться для каждого i, в нашем случае для $i=1$ и 2.

Выбрав $m=16$, $n=5$, будем иметь

$$s_2/s_1=3{,}202294685 \quad \text{и} \quad m/n=3{,}20.$$

Два значения s^* будут равны

$$s_1^* = s_1/n = 0{,}059616 \quad \text{и} \quad s_2^* = s_2/m = 0{,}059659.$$

Соответствующие периоды будут равны

$$T_1^* = 2\pi/s_1^* = 105{,}3943 \quad \text{и} \quad T_2^* = 105{,}3188.$$

Округленное среднее значение этих периодов в безразмерных единицах времени будет равно $T^* = 105{,}36$, что соответствует $458^d{,}105$. Ошибки повторения будут равны

$$T^*/T_1 - n = -0{,}001625 \quad \text{и} \quad T^*/T_2 - m = 0{,}006271.$$

Таким образом, орбиту можно считать периодической с периодом T^* и ошибкой повторения $\varepsilon < 0{,}0063$ или $4^h{,}32$, что составляет 0,4% от периода T^*. Эта ошибка вызывает ошибку в положении

$$\varepsilon^* = \{[\tilde{x}(T^*) - \tilde{x}(0)]^2 + [\tilde{y}(T^*) - \tilde{y}(0)]^2\}^{1/2},$$

которая для данного примера дает $\varepsilon^* < 0{,}021 = 8073$ км.

Ошибку повторения можно уменьшить, если взять более точное приближение для s_2/s_1. Например, если принять $m = 1601$ и $n = 500$ и, стало быть, $m/n = 3{,}202$, то будем иметь $T^* = 10\,538{,}94$ или $125^a{,}54$ и $\varepsilon \approx 0{,}02\%$ от периода.

Если отношение s_1/s_2 есть число иррациональное, то орбита будет равномерно покрывать площадь эллипса, определяемого уравнением (90). В действительном рассчитанном случае, когда s_1 и s_2 аппроксимированы с точностью до пятого десятичного знака, орбита является периодической, даже если соизмеримость имеет очень высокий порядок, и, следовательно, орбита не будет покрывать полностью внутреннюю часть области движения, когда $t \to \infty$.

На рис. 5.16 показано развитие орбиты с ростом времени. Безразмерное время в конце орбиты равно $T = 110$, и, следовательно, рисунок показывает достаточно точное повторение в момент $T^* = 105{,}36$. Подобные признаки движения проявляются снова в момент T^*, даже если орбита не повторяет себя точно. На рис. 5.17 и 5.18 показана орбита до $t \approx 500$ и $t \approx 1500$, что приблизительно соответствует 5 и 15 приближенным повторениям или 6,3 и 19 годам.

На этом мы закончим рассмотрение линейных аспектов задачи о движении вокруг треугольных точек либрации в поле системы Земля — Луна. Следует иметь в виду, что предыдущие замечания относятся только к линеаризованным уравнениям движения, для которых они точно выполняются.

Б. С увеличением размеров орбиты период долгопериодической орбиты возрастает, а короткопериодической — убывает

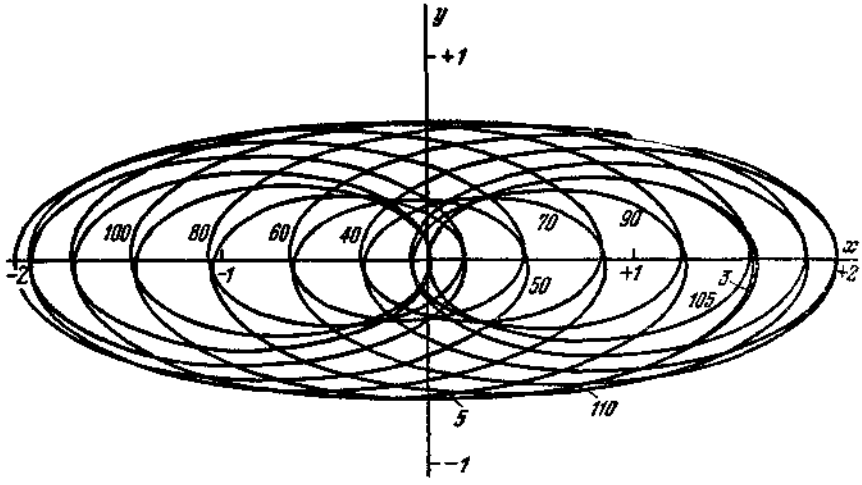


Рис. 5.16. Линеаризованное решение вокруг треугольной точки либрации системы Земля—Луна для одного возвращения за ~1,3 года.

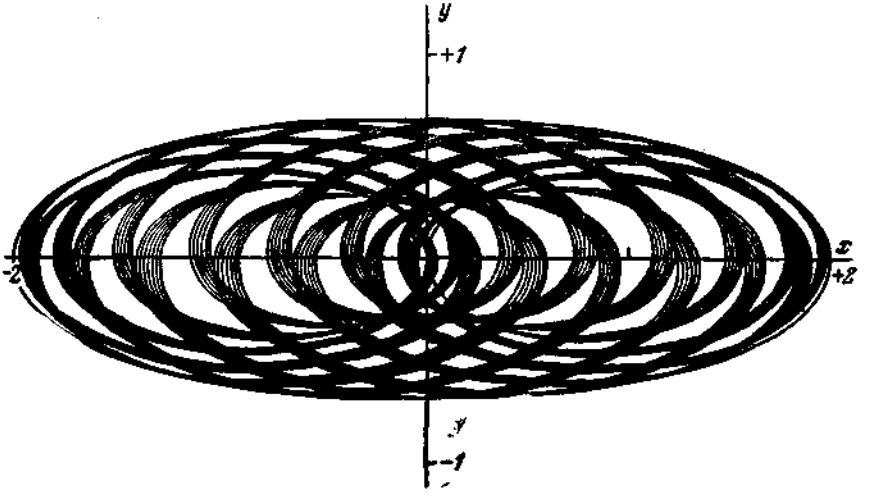


Рис. 5.17. Линеаризованное решение вокруг треугольной точки либрации системы Земля—Луна для пяти возвращений за ~6,3 года.

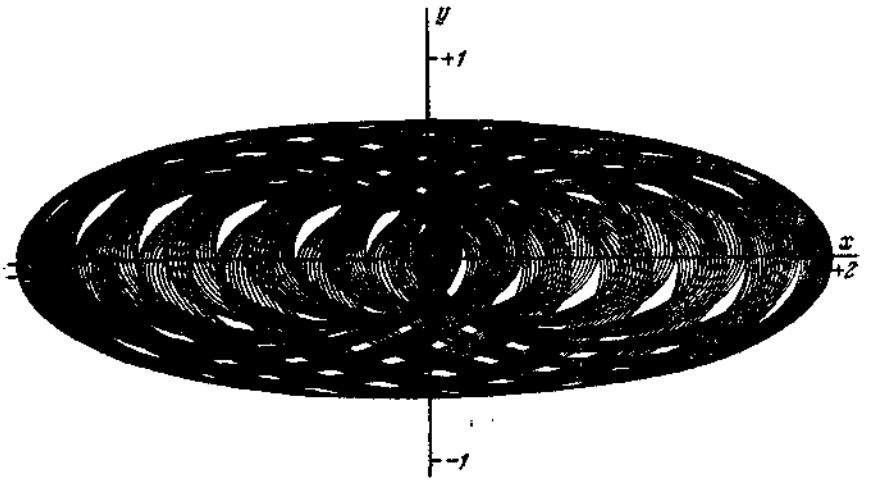


Рис. 5.18. Линеаризованное решение вокруг треугольной точки либрации системы Земля—Луна для пятнадцати возвращений за ~19 лет.

(см. пункт 5.5.3.1) и, следовательно, отношение $s_2/s_1=T_1/T_2$ увеличивается, начиная от своего значения 3,2023, соответствующего бесконечно малым амплитудам. Это важно, поскольку означает, что нелинейность отодвигает соизмеримость от отношения 3 : 1. Изменение в периоде можно вычислить из уравнения, предложенного Педерсеном (см. пункт 5.5.3.1):

$$T_i=\frac{2\pi}{s_i}+K(s_i)\varepsilon^2,$$

где $K(s_1)\approx 13{,}9$ и $K(s_2)\approx -0{,}6$. На рис. 5.19 показано долгопериодическое решение для $\varepsilon=0{,}033$. Этот рисунок можно сравнить с рис. 5.8, где μ близко к значению, применимому для системы Земля — Луна. Заметим, что рис. 5.8 был получен посредством аналитического приближения, тогда как на рис. 5.19 представлены результаты численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. На рис. 5.6 точку A можно рассматривать как начальную точку орбиты, полученной после линеаризации, при $\bar{\xi}_0=0$, $\bar{\eta}_0=\varepsilon\bar{\alpha}_1$, $\dot{\bar{\xi}}_0=\varepsilon s_1$, $\dot{\bar{\eta}}_0=0$. Сравнивая рис. 5.19 с рис. 5.6, видим, что наибольшее искажение имеет место на концах больших осей, так как начальные условия определяют переменные на концах малых осей, и в точке A не должно быть разницы между действительным и линеаризованным решениями. Решение нелинейных уравнений показывает

меньшие значения η в стороне от точки A, как если бы большая ось эллипса была изогнута в виде дуги вокруг m_1. Эти соображения, естественно, отпадают, когда размеры эллипса возрастают и нелинейные эффекты становятся более ощутимыми.

С другой стороны, из рис. 5.19, заимствованного из работы Микаэля, видно, что влияние нелинейности ограничивается лишь небольшим видоизменением орбиты, даже тогда, когда полное либрационное движение имеет порядок 18 000 км.

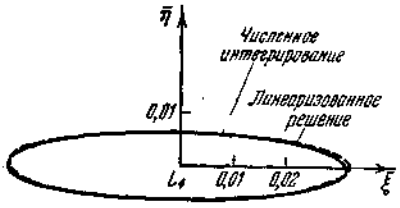


Рис. 5.19. Влияние нелинейных эффектов в ограниченной задаче трех тел на долгопериодическую орбиту вокруг треугольной точки либрации системы Земля—Луна (Микаэль, 1963 [83]).

Образование семейств периодических орбит, начинающихся с небольших эллиптических периодических орбит, с одной частотой, при изменяющихся начальных условиях, обеспечивающих наличие нелинейности, будет рассмотрено в гл. 9, посвященной количественным результатам в ограниченной задаче. Здесь же мы лишь отметим, что периодические орбиты с большим периодом вокруг треугольных точек либрации для Троянцев могут быть получены таким же образом, как для задачи для системы Земля — Луна.

Влияние конечной амплитуды на орбиты при наличии обеих частот показано на рис. 5.20, заимствованном из работы Микаэля.

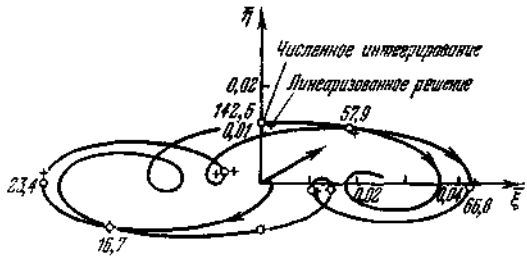


Рис. 5.20. Сравнение результатов численного интегрирования и линеаризованного решения при наличии обеих частот в ограниченной задаче трех тел. Время указано в сутках (Микаэль, 1963 [83]).

5.6.2.2. Задача четырех тел. А. Введение в систему четвертого тела, в данном случае Солнца, можно осуществить различными способами. Ограниченная задача четырех тел теперь будет состоять из трех основных тел — Солнца, Земли и Луны — и четвертого тела бесконечно малой массы, которое не

оказывает влияние на движение первых трех тел. В ограниченной задаче трех тел движение основных тел точно описывается уравнениями движения задачи двух тел. Следовательно, путем логического обобщения мы можем наметить следующий план решения: сначала будем искать решение задачи трех тел, а затем найдем движение четвертого тела в поле, создаваемом движением трех основных тел, которое будем предполагать уже известным. Так как для задачи трех тел, Солнца, Земли и Луны, решение в конечном виде неизвестно, то такое обобщение ограниченной задачи трех тел довольно затруднительно.

Другой возможный способ решения состоит в том, чтобы задаться движениями трех основных тел и, не пытаясь получить точного решения уравнений, описывающих эти движения, принять приближенное решение. Таким приближением может быть, например, предположение, что центр масс системы Земля — Луна движется по эллиптической орбите вокруг Солнца, а Земля и Луна тоже движутся по эллиптическим орбитам вокруг их центра масс. Плоскость орбиты центра масс системы Земля — Луна, плоскость эклиптики, наклонена к плоскости, содержащей орбиты Земли и Луны.

Более простым приближением будет принять круговые орбиты, а наклонением пренебречь.

Каково бы ни было приближение, основная идея состоит в следующем: поскольку орбиты основных тел являются известными функциями времени, дифференциальное уравнение движения четвертого тела может быть записано в виде $\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$. Кроме того, если орбиты трех основных тел могут быть выражены сравнительно простыми функциями времени, то решение дифференциальных уравнений движения четвертого тела может быть аппроксимировано аналитическими методами. С другой стороны, если решение задачи трех тел, представляющих собой три основных тела, возможно только в табулированной форме, то уравнения движения четвертого тела допускают решение методом численного интегрирования. Этот метод соответствует последнему этапу в описанной выше процедуре (подробней см. пункт 5.6.2.2 Б).

Следует заметить, что такие ограниченные задачи четырех тел подвергаются критике, так как в них, естественно, пренебрегается влиянием так называемых косвенных эффектов, и, следовательно, важные вековые возмущения могут оказаться неучтенными. Солнце отклоняет четвертое тело бесконечно малой массы, но не оказывает влияние — по крайней мере, в ограниченной модели четырех тел — на движение Луны. Оценить достоинства такой модели четырех тел, не производя подробного исследования, достаточно трудно. Но, несмотря на

имеющиеся динамические противоречия, есть основания полагать, что для некоторых задач эта модель может дать достоверные результаты. Для полноты изложения основные результаты этого метода приводятся ниже. Применяя эту модель, читатель должен проявлять известную осторожность.

Рассмотрим искусственную систему предположений: круговое движение центра масс системы Земля — Луна вокруг Солнца, круговые орбиты Земли и Луны вокруг их центра масс и постоянный угол наклонения между эклиптикой и плоскостью Земля — Луна. На рис. 5.21, заимствованном из работы Тэпли, показана орбита четвертого тела бесконечно малой массы относительно треугольной точки либрации системы Земля — Луна в орбитальной плоскости Земли и Луны. Ось ξ параллельна линии, соединяющей Землю с Луной, а ось η перпендикулярна оси ξ и лежит в плоскости орбит Земли и Луны. Движение начинается в момент, когда Земля, Луна и Солнце находятся на одной линии, в указанной здесь последовательности. Так как L_4 *не является* точкой равновесия в этой системе, то четвертое тело испытывает действие результирующей силы и начинает двигаться от точки L_4 даже если начальная скорость равна нулю. На рис. 5.21 показано движение за первые 250 дней, а на рис. 5.22, тоже заимствованном из работы Тэпли, изображены огибающие перемещения в зависимости от кривой времени. Имеется указание, что обе огибающие, как верхняя, так и нижняя, обнаруживают периодичность приблизительно в 1600 дней. Такое долгопериодическое изменение перемещения соответствует пульсирующему движению орбиты и может быть связано с близкой соизмеримостью в системе.

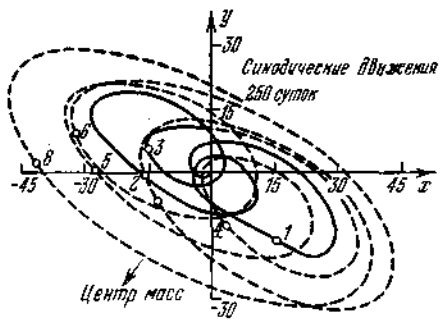


Рис. 5.21. Движение вокруг L_4 в ограниченной задаче четырех тел. По осям x и y отложены расстояния в тысячах километров (Тэпли, 1965 [89]).

Рис. 5.21 построен по данным расчетов, в которых период кругового движения центра масс системы Земля — Луна вокруг Солнца принимался равным $T_S = 365^d,287$, а период системы Земля — Луна вокруг ее центра масс $T_M = 27^d,287$. Долгопериодическое движение линеаризованной орбиты вокруг треугольной точки либрации имеет поэтому период $T_1 = T_M/s_1 = 91^d,537$, что дает почти-соизмеримость $T_S/T_1 = 3,991$. Нелинейные эффекты вносят изменение в величину T_1, равное $\Delta T_1 =$

$=5^d,32$: оно вычислено по формуле $\Delta T_1=(T_м/2\pi)K(s_1)\varepsilon^2$ при указанном ранее значении $K=13{,}86$ и $\varepsilon=0{,}3$, как приемлемом среднем значении. Период долгопериодического движения с

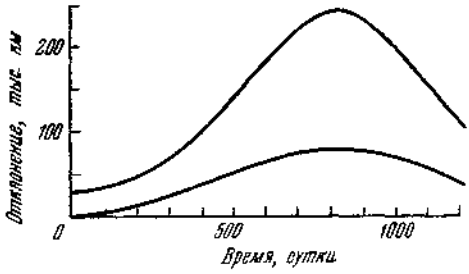


Рис. 5.22. Огибающие смещения в зависимости от кривой времени для движения вокруг L_4 в ограниченной задаче четырех тел (Тэпли, 1965 [89а]).

учетом нелинейных эффектов равен $\overline{T}_1=96^d,86$, а малый делитель равен $4\overline{T}_1-T_S=22^d,15$. Период возмущения, соответствующий этой почти-соизмеримости, становится равным

$$\frac{\overline{T}_1T_S}{4\overline{T}_1-T_S}=1597^d,4. \tag{93}$$

В дальнейшем читатель сможет сравнить изложенное выше с результатами наблюдений, приведенными в § 8.2 Г в примере, носящем название «большое неравенство». Соизмеримость периодов Юпитера и Сатурна приближенно равна 5:2, и $5T_{24}-2T_{24}=144^d,5$, откуда

$$\frac{T_{24}T_{24}}{5T_{24}-2T_{24}}=883^d.$$

Ограниченная задача четырех тел также может быть линеаризована. Дифференциальные уравнения движения в этом случае содержат периодические вынуждающие члены с угловой скоростью $\omega-\Omega$ и $2(\omega-\Omega)$, где ω и Ω — средние движения Луны и Солнца. Решение линеаризованных уравнений показано на рис. 5.23, а орбита, полученная методом численного интегрирования полных уравнений ограниченной задачи четырех тел — на рис. 5.24; обе орбиты заимствованы из работы Деврие. Начальная конфигурация на обоих рисунках представляет собой тот случай, когда Солнце, Земля и Луна образуют прямую линию, в указанной здесь последовательности. Начальные условия для четвертого тела те же, что и для точки либрации ограниченной задачи трех тел. Рис. 5.23 и 5.24 показывают хорошее согласование.

Б. Последний шаг в процессе перехода от ограниченной задачи трех тел к действительной физической задаче состоит в использовании эфемерид Солнца, Земли и Луны для расчета движения четвертого тела вокруг треугольных точек либрации.

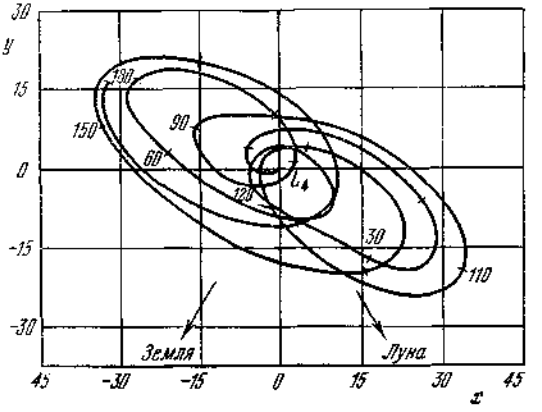


Рис. 5.23. Орбита линеаризованной ограниченной задачи четырех тел. По осям x и y отложены расстояния в тысячах километров (Деврие, 1964 [88]).

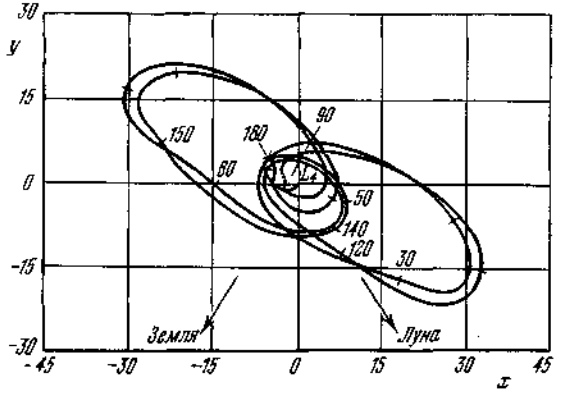


Рис. 5.24. Орбита полной ограниченной задачи четырех тел. По осям x и y отложены расстояния в тысячах километров (Деврие, 1964 [88]).

При этом нужно иметь в виду возможность ряда промежуточных шагов между ограниченной моделью четырех тел и полной физической картиной. В качестве примера можно указать на аналитический подход к задаче эллиптических орбит основных

тел. В этом случае можно легко доказать существование точек равновесия. Эта задача рассматривается в гл. 10. Другим примером приближения аналитического характера может служить замена Солнца однородным кольцом, оказывающим требуемый вековой эффект.

Одной из задач, имеющих важное значение с практической точки зрения, является определение начальных условий, при которых смещение от треугольной точки либрации является минимальным. Ранее указывалось, что точки либрации, как положения равновесия, в общем случае не существует, если не выполняются предположения ограниченной задачи трех тел, и частица, расположенная в точке L_4 — или, по этой причине, где угодно — не будет сохранять своей нулевой скорости относительно основных тел. Естественно возникает вопрос: каковы должны быть начальные условия третьего тела — вместо нулевой начальной скорости, которая требуется в ограниченной задаче, — чтобы амплитуда его движения была настолько малой, насколько это только возможно, по крайней мере, для некоторого ограниченного промежутка времени. Это как раз есть задача, решение которой может быть аппроксимировано линеаризованной задачей четырех тел.

Результаты такого исследования могут быть улучшены посредством метода проб и ошибок и метода численного интегрирования, с использованием действительных эфемеридов участвующих тел. Пример, рассчитанный Волавером, с начальными данными, относящимися к началу июля 1964 г., показал, что выбранные должным образом начальные условия уменьшают огибающую движения на 55% за первые 200 сут. и на 30% за следующие 275 сут. Эти числа дают сравнение численно проинтегрированных смещений относительно мгновенных треугольных точек, когда четвертое тело бесконечно малой массы в одном случае начинает движение с нулевой скоростью, а в другом случае для нее выбрана система «соответствующих» начальных условий. Пример демонстрирует два факта. Во-первых, он показывает, что линеаризованная ограниченная модель четырех тел может быть использована для аппроксимации результата определенных задач, и то, что она не рекомендуется в качестве основного способа аналитического исследования возмущений, не обязательно должно означать, что ее нельзя применять разумным образом. Во-вторых, пример указывает на важность начальных условий для дальнейшего действительного движения. Система начальных условий в этом случае включает также календарную дату начала движения, так как начальная конфигурация системы Солнце—Земля—Луна имеет важное значение. Это не относится к случаю, когда в качестве модели используется ограниченная задача трех

тел. На рис. 5.25 показаны результаты численного интегрирования, при получении которых использовались эфемериды Солнца, Земли и Луны.

На этом мы заканчиваем рассмотрение треугольных точек либрации в пространстве Земля—Луна. Остается сделать несколько замечаний динамического характера.

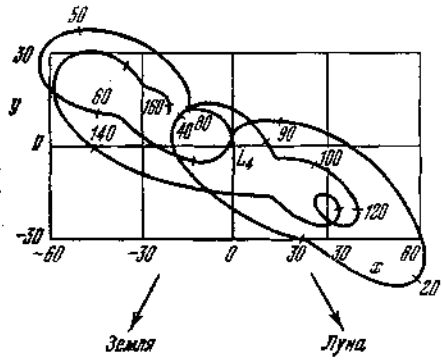


Рис. 5.25. Орбита, полученная по эфемеридным значениям. По осям x и y отложены расстояния в тысячах километров (Деврие, 1964 [88]).

В то время, как система Солнце — Юпитер в треугольных точках либрации имеет скопление астероидов, Троянцев, способность системы Земля — Луна образовывать в соответствующих точках скопление осколков или пыли, сомнительна. Согласно неподтвержденным сообщениям Кордылевского, в окрестности точки L_4 в пространстве системы Земля—Луна существуют облака (величиной с Противосияние или вдвое слабее). Основное возмущающее действие на Троянцы оказывает Сатурн, тогда как стабилизирующие силы исходят от Солнца и Юпитера. Основное же возмущение облаков в точке либрации системы Земля — Луна вызывает Солнце, а стабилизирующее действие оказывают Земля и Луна. Это объясняет, почему существование аккумулированного вещества в точке L_4 или L_5 в системе Земля — Луна совсем не очевидно. Тела в треугольных точках либрации систем Солнце — планета испытывают возмущения со стороны Юпитера, и поэтому неудивительно, что известные в настоящее время скопления вещества ограничиваются системой Солнце — Юпитер.

Если система Земля—Луна способна сохранить вещество в точке L_4 или L_5, то согласно некоторым теориям это вещество может быть лунного происхождения, т. е. образовано при ударе метеоритов о поверхность Луны. Во время ударов метеоров и метеорных тел о лунную поверхность образуется пыль и частицы вещества. Некоторые из этих частиц действительно могут скапливаться в треугольных точках либрации. Земля не является источником пыли в точке L_4 или L_5, так как наличие земной атмосферы не способствует частым ударам или выделению пыли. Не исключено и то, что частицы в точке L_4 или L_5, если они там имеются, произошли не от Луны, а от какого-нибудь другого тела Солнечной системы. Можно чисто умозри-

тельно предполагать, что в точках либрации системы Земля—Луна вероятность захвата частиц общего происхождения меньше, чем вероятность захвата частиц лунного происхождения.

Постоянная относительной энергии частиц, захватываемых в треугольных точках либрации, должна иметь большое значение, так как эти точки окружены кривыми нулевой скорости, проникновение через которые для частиц с $C>3$ является запретным. Частицы, для которых $C\leqslant 3$, могут перемещаться всюду в плоскости движения, так что для них не существует запрещенных зон. Для того чтобы оказаться захваченными, частицы должны не только быть в состоянии войти в области высокой относительной энергии, но, кроме того, они должны иметь при этом низкие относительные скорости. Орбитой точки L_4 в ограниченной задаче трех тел является окружность единичного радиуса в неподвижной системе, в рамках ограниченной задачи есть окружность радиуса $1-\mu$, т. е. почти такого же, как для точки L_4. Поэтому не так уж невероятно, чтобы пыль, выделяющаяся с лунной поверхности при ударах метеорных тел, приобретала соответствующую скорость и оказывалась захваченной в окрестности треугольной точки либрации.

В связи с этой задачей возникает парадокс треугольных точек либрации. Если модель ограниченной задачи трех тел считать справедливой, то треугольная точка либрации будет устойчивой для достаточно малых значений μ, и частица бесконечно малой массы в точке L_4 или L_5 там не останется. Так как в точках либрации частица имеет нулевую относительную скорость, то она должна и прийти туда с этой скоростью. Но это невозможно, ибо если третьего тело может прийти в точку L_4 с нулевой скоростью, то согласно свойствам симметрии, рассматриваемым в пункте 8.6.3, она также должна быть в состоянии покинуть точку L_5, имея нулевую начальную скорость. Последнего не происходит, так как L_5 есть точка равновесия. Асимптотическое приближение к точкам $L_{4,5}$ (или удаление от них) имеет место тогда, когда $\mu>\mu_0$. Когда же $\mu<\mu_0$, треугольные точки либрации устойчивы, но частицы туда прийти не могут. Когда $\mu>\mu_0$, частицы могут иметь траектории, заканчивающиеся в точках $L_{4,5}$, но эти точки неустойчивы. Парадокс состоит в том, что частицы не могут подойти к треугольным точкам либрации в условиях устойчивости, а могут подойти к ним только в условиях неустойчивости, когда, конечно, малые возмущения рассеят частицы. Тривиальное решение парадокса частично можно усмотреть в том факте, что частицы находятся не в самих центрах либрации, а вблизи их.

Следующее замечание относится к возможности определения отношения масс основных тел путем инвертирования ха-

рактеристического уравнения и решения его относительно массового параметра. Принимая в качестве первого приближения линеаризованную трактовку задачи, а также предположения ограниченной задачи, можно для получения массового параметра основных тел использовать частоту движения искусственного или естественного тела. Если третье тело располагается на орбите с одной частотой и наблюдаемый период ее равен τ, то $s=T_{\mathbb{C}}/\tau$ можно получить весьма точно, и массовый параметр системы Земля—Луна можно определить из экспериментальной формулы

$$\mu=\frac{1-[1-16s^2(1-s^2)/27]^{1/2}}{2}.$$

Гармонический анализ позволяет получить s_1 и s_2 орбиты, которая не образована с помощью специальных начальных условий, и μ может быть еще раз определено, при условии, что наблюдения проводились в течение более 90 дней.

5.6.3. Коллинеарные точки. Неустойчивый характер этих точек допускает лишь небольшое число приложений, но все же можно указать на три аспекта: важность движения вокруг точки L_1 в астрономическом отношении, возможный интерес при исследовании в космосе движения вокруг точки L_2 и движение вокруг всех трех коллинеарных точек при больших значениях массового параметра при изучении двойных звезд.

Положение точки L_1 в системе Солнце—Земля определяется координатой $x_1=-1{,}01007019377695$ (см. Приложение I Д, гл. 4), и так как $\mu=3{,}0359\cdot10^{-6}$, то безразмерное расстояние между Землей и точкой L_1 равно $\mu-1-x_1=0{,}0100732336695$ а. е. или $1{,}50696\cdot10^6$ км, что равно расстоянию до Противосияния от Земли и эквивалентно геоцентрическому параллаксу в 15 дуговых минут. Можно предполагать, что частицы пыли скапливаются у этой точки и, несмотря на неустойчивый характер точки L_1, остаются здесь на небольшое время, если они прибыли с соответствующими начальными условиями.

Приняв $\Omega_{xx}(L_1)=8{,}8811025512$ (Приложение I Д, гл. 4) и $s=2{,}0570213486$ (Приложение I Е, гл. 5), получаем эксцентриситет орбит, соответствующих линеаризованной теории Противосияния, равным $e=0{,}9495053$. Если период Земли вокруг Солнца принять равным $365^d{,}25636$, то орбитальный период захваченных частиц будет равен $T=177^d{,}56578$.

Заметим, что соответствующие значения в предельном случае $\mu\to0$ равны $e=0{,}9501749625$ и $T=176^d{,}31656$.

Движение вокруг точки L_2 в системе Земля — Луна может представить значительный интерес при исследовании космического пространства. Положение точки L_2 определяется координатой $x_2=-0{,}836963$ (Приложение II Д, гл. 4), следовательно, без-

размерное расстояние между Луной и точкой L_2 для $\mu=0{,}012141$ равно $1-\mu+x_2=0{,}150896$. Точка L_2 расположена на расстоянии 58 000 км от Луны и 326 400 км от Земли. Не исключено, что со временем в этой точке будут располагаться автоматические научно-исследовательские станции, снабженные устройствами для сохранения положения, несмотря на тот факт, что влияние Солнца, казалось бы, таково, что ограниченных орбит в окрестности точки L_2 не существует. Три периода бесконечно малого эллиптического движения вокруг точек L_1, L_2 и L_3 в системе Земля — Луна равны $14^d{,}67$, $11^d{,}71$ и $27^d{,}04$.

Наконец, интересно отметить, что частицы, прибывающие в коллинеарные точки либрации с начальными условиями, близкими к «требуемым», обнаруживают присущую им значительную неустойчивость. Подтверждающие это численные результаты будут подробно рассмотрены в гл. 9, посвященной количественным аспектам ограниченной задачи. Здесь же мы остановимся на результатах исследования для случая $\mu=0{,}1$. Это значение массового параметра представляет интерес при изучении близких двойных звезд. Результаты показывают, что даже тогда, когда начальные условия выбраны в соответствии с требованиями линеаризованной теории (см. уравнения (22)), частицы совершают всего лишь одну или две овальных орбиты вокруг L_1 или L_3, прежде, чем выйти из окрестности коллинеарных точек. Следует заметить, что периодические орбиты могут быть получены при небольшой модификации начальных условий, которые следуют из линеаризованного решения. Но вопрос заключается в том, что орбиты весьма чувствительны к изменениям начальных условий.

В заключение заметим, что оба объяснения, данные для Противосияния и расположения автоматических научно-исследовательских станций в неустойчивых точках либрации, встречают много обоснованных возражений. Это оставляет широкие возможности для приложений коллинеарных точек либрации к области звездной динамики.

§ 5.7. Замечания

Линеаризованная теория, которой посвящена часть этой главы, основывается на уравнениях в вариациях, называемых иногда уравнениями Якоби, а в некоторых областях прикладной математики — уравнениями возмущений. Первый термин обычно встречается в литературе по небесной механике, второй не рекомендуется, поскольку чаще применяется для других уравнений, а третий тоже не очень удачен и может ввести в заблуждение. В книге Винтнера [1, стр. 65] общая дискуссия по поводу

понятия линеаризации предшествует рассматриваемым в ней примерам приложения к ограниченной задаче [1, стр. 370].

Подробности линейного анализа изложены в тексте. Искушение опустить все выводы и ограничиться ссылками на стандартные учебники, в первую очередь, на «Аналитическую динамику» Уиттекера [2], а также на упомянутые выше примеры в книге Винтнера, нами было преодолено; приложение общих теорем к нашей относительно простой системе едва ли было бы оправдано. Вместо имеющихся в распоряжении изящных общих методов, использовались благоприятные возможности, предоставляемые специальной структурой нашей системы.

В пункте 5.2.1 рассматривается устойчивость по Ляпунову. Обескураживающее замечание Винтнера [1, стр. 98] компенсируется изучением замечательных высказываний: Ла Салля и Лефшеца [3] или Четаева [4]. Обширный труд Чезари [5] или одну из сравнительно недавних работ Саатн и Брэма [6] также можно смело рекомендовать. Общее представление об устойчивости в небесной механике можно получить из работы Хагихары [7]. Весьма полезными являются учебники Коддингтона и Левинсона [8] и Синга [9].

По линеаризованной теории движения вокруг треугольных точек либрации (§ 5.4) следует, в первую очередь, рекомендовать работы Пламмера [10], Мартина [11], Гашо [12], а среди более ранних — Рауса [13], Гильдена [14] и Шарлье [15]. Интересные рассуждения можно найти в книге Брауэра и Клеменса [16, стр. 262] и в трактате Пламмера [17, стр. 241]. Книга Шарлье [18, стр. 117] отличается подробностями, книга Мультона [19, стр. 298] — популярностью и книга Маккаски [21, стр. 115] — краткостью; их тоже можно рекомендовать. Особенно интересно изложены вопросы, относящиеся к данной главе, в книге Полларда [22, стр. 83].

Результаты Пламмера [10], касающиеся свойств поверхности $z=\Omega(x, y)$, изложенные в пункте 4.6.2, находят применение в пункте 5.2.3. Характеристическое уравнение (6) может быть выражено через кривизны:

$$\lambda^4+(4-2M)\lambda^2+K=0,$$

где K и M — гауссова и средняя кривизны поверхности. Следовательно,

$$\lambda_1^2\lambda_3^2=C_1C_2 \text{ и } \lambda_1^2+\lambda_3^2=C_1+C_2-4.$$

Эти уравнения устанавливают связь между корнями характеристического уравнения и главными кривизнами C_1, C_2.

Существует много примеров определения орбит Троянцев (§ 5.1 и пункт 5.6.1). Здесь мы сошлемся лишь на работу Бра-

уэра [23], посвященную Ахиллесу, и статью Эккерта [24], в которой исследуется орбита Гектора. В более общем виде исследование аналогичных групп астероидов провели Браун [25], Герц [26], Браун и Шук [27] и Ловетт [28, стр. 263].

Полученное Лагранжем стационарное решение (§ 5.1 и пункт 5.6.1) можно найти в его основном труде [29, стр. 272], но первоначальная работа датирована 1772 г. и опубликована в «Трудах» (см. наши замечания по работе [29] в списке литературы к гл. 5).

В некоторых работах (например, в книге Полларда [22, стр. 48, 50, 58]), когда рассматриваются треугольная и коллинеарная конфигурации общей задачи трех тел, говорится о решении Лагранжа и решении Эйлера, при этом используется та же терминология, что и при описании стационарных решений ограниченной задачи. Автор настоящей книги исследовал историю этого вопроса; он изучил книгу Винтнера [1, стр. 284], замечание, сделанное Зигелем [30, стр. 75], ссылки на работы Лагранжа [27] и, наконец, первоначальную работу Эйлера [31], 1765 г. Эйлер решил задачу трех тел, которые движутся по неподвижной прямой, сохраняя постоянное отношение своих расстояний: $\overline{m_1m_2}/\overline{m_3m_2}=\text{const}$. Это отношение по существу удовлетворяет тому же алгебраическому уравнению пятой степени, которое приведено у нас в тексте (уравнение (15), § 4.3) и образует первое частное решение задачи трех тел. Решение Эйлера можно рассматривать как частный случай задачи Лагранжа, и поэтому здесь может быть применена терминология, указанная в начале этого параграфа. С другой стороны, в динамическом отношении задача Эйлера, конечно, отличается от ограниченной задачи, в которой два тела фиксированы, а линия, на которой находятся три тела, вращается. По этой причине автор предпочитает говорить о точках Лагранжа исключительно в ограниченной задаче и старается избегать таких терминов как «точка Лагранжа» или «точка Эйлера». (Здесь следует упомянуть статью Эберта [31a] об обобщении задачи Эйлера и ее связи с методом Контопулоса нахождения «третьего интеграла», § 2.10.)

Таблицы, аналогичные тем, что содержатся в Приложениях I, II и III, но с меньшим числом граф, приводятся у Розенталя [32], Депри [33] и у других авторов. В той же работе Депри [33] рассматриваются предельные значения частот при $\mu\to 0$ в коллинеарных точках либрации (сравните с § 5.3). Значения для коллинеарных точек при $\mu=1/2$, данные в тексте, можно сравнить с результатами Барро и Стрёмгрена [34].

Линеаризованная задача о движении вокруг коллинеарных точек либрации, помимо указанных выше учебников [1, 16, 17, 19—22], рассматривается у Шарлье [35] и Пламмера [36].

Задача об особых точках, встречающихся в семействах периодических орбит вокруг коллинеарных точек, была нами рассмотрена в гл. 3, и мы снова к ней вернемся в гл. 9, но уже с численных позиций. В качестве основной литературы по этому вопросу можно назвать работу Барро и Стрёмгрена [34]. Решения в коллинеарных точках, соответствующие вещественным корням характеристического уравнения, исследовали Депри и Анрар [37], мы их подробно рассмотрим в гл. 9.

Переход к нормальным координатам посредством матрицы поворота (пункт 5.4.1) осуществляли также Мартин [11], Ланцано [38] и некоторые другие авторы. Построение, показанное на рис. 5.5, можно встретить в работе Депри и Дёли [39]. Уравнения для эксцентриситетов эллиптических орбит вокруг точек $L_{4,5}$ приводятся в работе Пламмера [10], там же содержатся два примера, которые мы дали в конце пункта 5.4.1. Полезно также познакомиться со статьей Мартина [11] и книгой Мультона [40, стр. 502].

Спиральные движения вокруг треугольных точек либрации (пункт 5.4.2) рассматриваются опять таки в работах Мартина [11] и Пламмера [10], а также в статьях Стремгрена [41—43]; в двух последних его статьях показывается переход от случая $\mu > \mu_0$ к случаю $\mu = \mu_0$.

Исследование нелинейных явлений (§ 5.5) и существование аналитически продолженных периодических орбит основывается на статье Винтнера [44], в которой, в свою очередь, используются результаты работы Хорна [45]. Теорема Хорна в конечном счете связана с теорией центров Пуанкаре [46]. (Напомним еще раз, что в аналитических продолжениях в гл. 8 в качестве малого параметра используется массовый параметр μ, а не характеристический размер орбиты ε.) Другие доказательства существования, проведенные Мультоном и его школой [40], как заметил Винтнер [44], иногда недостаточно строго обоснованы, так как после сложных преобразований и аналитических продолжений конечные результаты не всегда оказываются в действительной области. В самом деле, даже Пуанкаре [47, т. 1, стр. 160], по-видимому, забыл об условии, которое в связи с аналитическим продолжением неустойчивых орбит вокруг одной коллинеарной точки либрации в задаче Хилла Винтнер называет «Realitätsdiscussion». Вероятно это — результат забывчивости, присущей гениальным людям, так как в т. 1 своих *Méthodes* [47] Пуанкаре обещает, что такое исследование будет включено в т. 3.

Семейство периодических орбит (образованных из бесконечно малых эллиптических орбит, см. пункт 5.5.2) вокруг коллинеарных точек либрации Барро изучал численными методами, а Першо и Маскар [49] — аналитически, учитывая рекомендации Тиссерана [50, т. 4, стр. 492] и пользуясь методом Пуанкаре [51].

Кроме того, это семейство исследовали, численным методом, Дарвин [52] и аналитически — Пламмер [53]; последний применял теорию второго порядка, а также свою теорию третьего порядка [54]. Несколько семейств с различными значениями μ рассматриваются нами в гл. 9. Основной литературой здесь являются Доклады Копенгагенской обсерватории.

Что касается семейства вокруг наружных коллинеарных точек при $\mu={}^1/_2$, то здесь можно рекомендовать статьи Стремгрена [55, 56], а для орбит вокруг внутренней точки либрации L_2 — доклады Мюллера [57, 58]. Частицы, движущиеся вокруг коллинеарных (а иногда и вокруг треугольных) точек либрации, Дарвин и его последователи называют колеблющимися спутниками. Исследования, проводимые школой Мультона по аналитическому продолжению бесконечно малых периодических орбит вокруг коллинеарных точек либрации, отражены в книге Мультона [40, стр. 151—216].

Задача аналитического продолжения бесконечно малых периодических орбит вокруг треугольных точек либрации для $\mu<\mu_0$ (пункт 5.5.3.1) изучалась Мультоном [40, стр. 299 и 501], Гревсом [59], Педерсеном [60], Зигелем [61], Депри и Дели [39] и Ланцано [38]. Приведенный нами рис. 5.7, заимствован из книги Мультона [40], а рис. 5.8 и 5.9 — из работы Педерсена [60]. Уравнение, определяющее изменение периода в зависимости от амплитуды, в его общем виде, основывается на теореме Хорна [45], а в его специальной форме ($P=K\varepsilon^2$) — на работе Педерсена [60]. Критические значения массового параметра следуют непосредственно из работы Хорна [45] или из теоремы Зигеля — Ляпунова, их рассматривали также Педерсен [60] и Депри и Дели [39]. Теория Педерсена [60] является теорией третьего порядка, а теория Депри и Дели [39] — четырнадцатого порядка. Единственное значение $k=s_2/s_1$, которое исследовалось более или менее подробно, равно двум; исследование было проведено Педерсеном [62].

Доказательство существования этих орбит для $\varepsilon\neq 0$ следует, как уже говорилось, из теоремы Хорна. Книга [40], на которую мы уже неоднократно ссылались, частично была написана Мультоном и вышла под его редакцией. Содержащаяся в ней статья о существовании периодических орбит была подготовлена Бакком [63]. Другое, не зависящее от Бакка доказательство Гривса [59] могло быть закончено до появления работы Бакка. Заметим, что Бакк рассмотрел весьма подробно семь различных типов образующих решений, которых нет в статье Гривса. Кроме того, следует отметить, что ни Бакк, ни Гривс не использовали теорему Хорна, которая, несмотря на то, что была опубликована в 1903 г., не применялась к этой задаче до 1930 г., когда ею воспользовался Винтнер [44]. Полезно также познако-

миться со статьей Перрона [64], в которой приводятся доказательства существования для всех случаев. Эти доказательства также основываются на работе Хорна.

Изменяющийся характер зависимости периода от амплитуды для долгопериодического решения (знак производной $dT_1/d\varepsilon = 2K(s_1)$) относится, строго говоря, к предельному случаю $\varepsilon \to 0$; он исследован Педерсеном [60].

Важный частный случай треугольной точки либрации системы Юпитер — Солнце исследовали Браун [65], Тюринг [66, 67], Депри и Дели [39], Рабе [68], Уиллард [69] и Гудрич [70]; два последних автора рассматривали короткопериодическое движение, показывающее отрицательные характеристики для соотношения между амплитудой и периодом.

В гл. 9 нашей книги рассматриваются примеры аналитически продолженных орбит. Здесь же мы только укажем на предположение Брауна, согласно которому долгопериодические орбиты с увеличением значения ε становятся все более и более удлиненными и остаются вблизи дуги единичной окружности. Когда орбита достигает оси x, она соединяется со своей симметричной дополняющей частью, образуя подковообразные орбиты. В работах Рабе [68, 71] и Рабе и Шанцле [72] на основании численных расчетов (см. гл. 9) показывается, что это предположение верно, однако Тюринг, исходя из аналитических соображений [66], а также на основании проведенных им численных расчетов [67, 73] расходится с ними во мнении по вопросу о существовании этих подковообразных орбит.

Понятие «предельные орбиты», с которым мы встретились в пункте 5.5.3.2, когда приняли $\mu = \mu_0 + \delta$, где $\delta > 0$, впервые ввел Браун [74], проводивший исследование третьего порядка. Затем его использовал Педерсен [75, 76] в своей теории третьего порядка. Депри [77] тоже рассчитывал такие орбиты; пользуясь разложением четырнадцатого порядка, он полагал, что его ряд Даламбера не может дать бо́льшие предельные орбиты, чем та, что соответствует $\mu = 0{,}044$. (Приложения рядов Даламбера к небесной механике рассматриваются в работе [16, стр. 79].) Вопрос о существовании периодических орбит вокруг точки L_4, принадлежащих этому семейству, для $\mu = {}^1/_2$, по-видимому, не может быть решен с помощью этого метода (см. пункт 9.4.9). Рис. 5.11 и 5.12, на которых изображены характеристики предельных орбит, заимствованы из работы Депри [77], а рис. 5.13 — из работы Педерсена [76]. Теория третьего порядка не дает зависимости постоянной Якоби от орбитального параметра, а теория Депри более высокого порядка дает ее в виде $C = 3 + a\varepsilon^4 + \ldots$, где $a > 0$.

Существование двух дискретных семейств периодических орбит для $\mu > \mu_0$, описанных в тексте, было предсказано Брауном

[74]. Хотя его статья не отличается подробностью изложения, основная идея в ней высказана вполне ясно. Нужно отдать должное таланту автора, внесшего существенный вклад в данный вопрос. Его идея в общих чертах изложена в пункте 5.5.3.2.

Исследование вопросов устойчивости в пункте 5.5.4 можно разбить на две части. Первая часть содержит результаты линейной теории устойчивости, сводящиеся к общеизвестным методам, которые могут быть применены к движениям с конечной амплитудой. Вторая часть относится к нелинейным аспектам устойчивости и, естественно, является значительно более сложной. Литература по устойчивости линеаризованных уравнений, конечно, та же, что и по решениям линеаризованных уравнений: [10—18 и др.]. Исследование устойчивости орбит конечных размеров вокруг треугольных точек либрации в линеаризованном случае проводили Депри и Дели [39] и Педерсен [60]. Такое же исследование, но для коллинеарных точек провел Г. Н. Дубошин, он показал неустойчивость и, пользуясь методом Ляпунова, доказал существование этих орбит.

Исследование устойчивости в нелинейном случае для треугольной точки либрации мы провели, основываясь на работе Леонтовича [80]. Кроме того, использовалась процедура нормализации Биркгофа (см. также Ланцано [38]) и теорему Арнольда [81], которую мы изложим позже, в гл. 8. Утверждение Ричардса [82], что треугольные точки не являются асимптотически устойчивыми, тесным образом связано с парадоксом точек либрации, о котором говорилось в пункте 5.6.2.2 и который подробно излагался автором данной книги на лекциях в Йельском университете. Все эти вопросы связаны с тем фактом, что если движение вокруг треугольных точек либрации таково, что постоянная Якоби для него больше трех, то движение должно происходить снаружи кривой нулевой скорости, которая окружает точку либрации. Поэтому кривая нулевой скорости в этом случае не представляет собой наружной границы для орбиты. Если же постоянная Якоби частицы меньше трех, то кривых нулевой скорости для движения не существует вовсе. Объяснение парадокса требует знакомства со свойствами симметрии, они излагаются в пункте 8.6.3.

Пункт 5.6.2.1 приложений посвящен задачам о точках либрации системы Земля — Луна. Мера ошибки в повторении, определяемая уравнением (92), и определение рекуррентного времени T^*, выражаемого уравнением (91), основаны на статьях Пуанкаре, Биркгофа, Чандрасекара и Фриша; они указаны в списке литературы к гл. 5: [11, 12, 14, 15]. Рис. 5.15 — 5.18 были выполнены Д. Пирсом.

Рис. 5.19 и 5.20, пункт 5.6.2.1, выполнены Микаэлем [83], работа которого представляет большой интерес также для

выяснения вопроса о том, каким образом пыль лунного происхождения может оказаться вблизи треугольных точек либрации.

Понятие ограниченной задачи четырех тел, с ее преимуществами и ошибками рассматривалось Хуангом [84], Дэнби [85] и Волавером [86, 87]. Аргументацию Хуанга «за» и аргументацию Дэнби «против» интерпретирует и использует в своей работе Волавер [86], который (основываясь частично на работе Деврие [88]) получил начальные условия, дающие минимальные смещения. Круговая ограниченная задача четырех тел была проинтегрирована для более, чем 2000 дней Тэпли и Шутцем [89, 89а]; из этих работ и заимствованы рис. 5.21 и 5.22. Предложенное объяснение периода Тэпли в 1600 дней близкой соизмеримостью, приведенное в пункте 5.6.2.2 А, дано Себехеем [90]. Нелинейное влияние амплитуды на период, использованное для получения $\overline{T}_1$ в уравнении (93), вычислялось на основе работы Педерсена [75]. Резонанс в задаче четырех тел досконально рассмотрен в статье Брекуэлла и Пригла [91]. Линейные уравнения для ограниченной задачи четырех тел рассматривал Деврие [88]; из его работы заимствованы рис. 5.23, 5.24 и 5.25. Подробное исследование с рассмотреннем приложений провели Стег и Деврие [91а].

Следует отметить статью Сехиала [92], в ней убедительно доказывается, что Солнце нарушает устойчивость треугольных точек либрации системы Земля — Луна. По мнению Волавера [86], принятые Сехналом предположения являются чересчур строгими с физической точки зрения.

Облака пыли в окрестности треугольных точек либрации системы Земля — Луна (пункт 5.6.2.2 Б) описаны в нескольких сообщениях журнала Sky and Telescope [93], а также в статье открывшего их Кордылевского [94].

Идея определять отношение масс Земли и Луны по среднему движению либрирующего искусственного спутника впервые была высказана, по-видимому, Бенедиктом [95]. Термин «селеноидальный спутник» был введен им и Клемперером [96] для тел вблизи точки L_4. Можно, пожалуй, согласиться с Волавером [87], заметившем, что, к счастью, этот термин не получил широкого распространения.

Абъянкар [97] исследовал численными методами высокую чувствительность орбит к начальным условиям вблизи коллинеарных точек (пункт 5.6.2), однако его результаты не подтвердили те объяснения, которые привели Гильден [14] и Мультон [98] для Противосияния. «Последний удар» (coup de grâce) соотношению между точкой L_1 и Противосиянием нанес на основе теоретических соображений Моисеев [99], который предложил либо тщательное повторное изучение результатов наблюдений,

либо проведение дополнительных наблюдений (возможно с помощью спутников).

Тот факт, что в точке L_2 не существует ограниченных орбит, следует из приближенного расчета влияния Солнца в ограниченной задаче четырех тел. Эти приближенные результаты принадлежат Ричардсу [100].

Дополнительные приложения рассмотрели Себехей и Уильямс [101], кроме того, они дали затабулированные и иллюстрированные численные результаты исследования свойств точек либрации. Устойчивость однородных эллипсоидальных скоплений исследовал Чандрасекар [102, стр. 221], пользуясь при этом уравнениями, аналогичными уравнениям (4), пункт 5.2.3. Следует отметить также приложение работы Ляпунова [79] к проблемам управления. Помимо работы [3], следует указать основную статью Хэлкина [103], в которой читатель найдет систематический перечень литературы, а также очень ясно составленную систему понятий и утверждений.

Вычисление орбиты относится к области, выходящей за рамки нашей книги, но этот вопрос существенен, в особенности для малых планет, рассмотренных в этой главе. В качестве основной литературы здесь можно рекомендовать книгу Эрже [104].

Приложение понятия кривой нулевой скорости и интеграла Якоби к задаче об искусственном спутнике встречается в работе О'Кифи [105] и Порицкого [106]. Следующий шаг сделал Блитцер [107]; пользуясь методами линеаризации, аналогичными изложенным в этой главе, он исследовал устойчивость равновесных решений в задаче об искусственном спутнике.

Тот факт, что линеаризованные уравнения ограниченной задачи вокруг точек равновесия имеют тот же вид, что и конечные уравнения управления для маневров встречи в космодинамике, отмечался многими исследователями. Подробное исследование задачи встречи, включая ее аналитические аспекты, можно найти в статье Хуболта [108]. Приложения ограниченной задачи к управлению на расстоянии, представляющие интерес для специалистов, занятых в области космической техники, выходят за рамки данной книги. Заметим все же, что основные законы наведения, а также уравнения, выражающие приближенные решения ограниченной задачи, вместо уравнений задачи двух тел, могут открыть новые пути в этой области, которые так хорошо представлены в книге Бэттина [109].

§ 5.8. Литература

1. Wintner A. The Analytical Foundations of Celestial Mechanics.— Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1941. [Русский перевод: Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.]

2. Whittaker E. T. Analytical Dynamics. 4th ed. London; New York: Cambridge Univ. Press, 1937. Reprinted by Dover, New York, 1944. [Русский перевод: Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1937.]
3. La Salle J., Lefschetz S. Stability by Liapunov's Direct Method.— New York: Academic Press, 1961. [Русский перевод: Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова.— М.: Мир, 1964.]
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. 2-е изд.— М.: Гостехиздат, 1955.
5. Cesari L. Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Berlin: Springer, 1959; 2nd ed.: New York, Academic Press, and Berlin, Springer, 1963. [Русский перевод: Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1964.]
6. Saaty T. L., Bram J. Nonlinear Mathematics.— New York: McGraw-Hill, 1964.
7. Hagihara Y. Stability in Celestial Mechanics.— Tokyo: Kasai, 1957.
8. Coddington E. A., Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations.— New York: McGraw-Hill, 1955.
9. Synge J. L. Classical dynamics. Handbuch der Physik. V. 3, Pt. 1, p. 141.— Berlin: Springer, 1960. [Русский перевод: Синг Дж. Л. Классическая динамика.— М.: Физматгиз, 1963.]
10. Plummer H. C. On motion in the neighbourhood of the equilateral poins of libration.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1932, 92, 442.
11. Martin M. Upon the solutions of the equations of variation belonging to the equilateral Lagrangian libration points in the restricted problem of three bodies.— Astron. Nachr., 1931, 244, 161.
12. Gascheau G. Examen d'une classe d'équations differentielles et applications à un cas particulier du problème des trois corps.— Compt. Rend., 1943, 16, 393.
13. Routh E. J. On Laplaces three particles, with a supplement on the stability of steady motion.— Proc. London Math. Soc., 1875, 6, 86.
14. Gyldén H. Sur un cas particulier du problème des trois corps.— Bull. Astron., 1884, 1, 361.
15. Charlier C. V. L. On periodic orbits.— Öfv. Kgl. Svenska Vetenskapsaka. № 9 (1900); or Medd. Lunds Astron. Obs. No. 18 (1901).
16. Brouwer D., Clemence G. M. Methods of Celestial Mechanics.— New York: Academic Press, 1961. [Русский перевод: Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики.— М.: Мир, 1964.]
17. Plummer H. C. An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy. London; New York: Cambridge Univ. Press, 1918. Reprinted by Dover, New York, 1960.
18. Charlier C. V. L. Die Mechanik des Himmels. V. 2.— Leipzig: Von Veit, 1907. [Русский перевод: Шарлье К. Небесная механика.— М.: Наука, 1966.]
19. Moulton F. R. An Introduction to Celestial Mechanics.— New York: Macmillan, 1914. [Русский перевод: Мультон Ф. Ваедение в небесную механику.— М.: ОНТИ, 1935.]
20. Danby J. M. A. Fundamentals of Celestial Mechanics.— New York: Macmillan, 1962.
21. McCuskey S. W. Introduction to Celestial Mechanics.— Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1963.
22. Pollard H. Mathematical Introduction to Celestial Mechanics.— Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1966.
23. Brouwer D. Theory and tables of the motion of (588) Achilles.— Trans. Yale Obs., 1933, 6, 177.

24. Eckert W. J. The general orbit of Hector.— Trans. Yale Obs., 1933, 6, 161.
25. Brown E. W. Theory of the perturbations produced by Jupiter.— Trans. Yale Obs., 1926, 3, 87. Also Astron. J., 1923, 35, 69.
26. Hertz H. G. On the theory of the Trojan asteroids.— Astron. J., 1943, 50, 121.
27. Brown E. W., Shook C. A. Planetary Theory.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1933. Reprinted by Dover, New York, 1964.
28. Lovett E. O. Generalization of the problem of several bodies, its inversion, and an introductory account of recent progress in its solution.— Quart. J. Pure Appl. Math., 1911, 42, 252.
29. Lagrange J. Œuvres (Serret M. J. A, éd.). Paris: Gauthier-Villars, 1873; v. 6. 14 томов были опубликованы издательством Gauthier-Villars (Париж) в 1967—1892 г. Открытие Лагранжа впервые появилось в «Сборнике работ, удостоенных премий Королевской академии наук», т. IX. Работа была озаглавлена «Essai d'une nouvelle méthode pour résoudre le problème des trois corps». Решение в треугольном случае дается на с. 61 (гл. II, разд. XXV), а прямолинейный случай излагается на с. 63 (гл. II, разд. XXVI). Статья в т. IX датирована Лагранжем 1772 г., но том не был издан до 1777 г.
30. Siegel C. L. Vorlesungen über Himmelsmechanik.— Berlin: Springer, 1956. [Русский перевод: Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.— М.: Изд-во иностр. лит., 1959.]
31. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium.— Nov. Comm. Petrop., 1765, 11, 144.
31a. Ebert W. Über die Eigenschaften gewisser Probleme, auf welche das Dreikörperproblem zurückgeführt werden kann.— Astron. Ges. Vierteljahrsschr., 1902, 37, 238.
32. Rosenthal J. E. Tables for the libration points of the restricted problem of three bodies.— Astron. Nachr., 1931, 244, 169.
33. Deprit A. A note concerning the collinear libration centers.— Icarus, 1965, 4, 273.
34. Burrau C., Strömgren E. Über Librationen und Ejecktionsbahen.— Astron. Nachr., 1913, 197, 273; also: Copenhagen Obs. Publ., 1914, No. 18.
35. Charlier C. V. L. On periodic orbits.— Lund Obs. Publ., 1901, No. 18.
36. Plummer H. C. On periodic orbits in the neighbourhood of centres of libration.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1901, 62, 6.
37. Deprit A., Henrard J. Symmetric doubly asymptotic orbits in the restricted three-body problem.— Astron. J., 1965, 70, 271.
38. Lanzano P. Periodic motion about a Lagrangian triangular point.— Icarus, 1965, 4, 223.
39. Deprit A., Delie A. Trojan orbits. I. d'Alambert series at L_4.— Icarus, 1965, 4, 242.
40. Moulton F. R., ed. Periodic Orbits.— Carnegie Inst. of Wash., Washington, D. C., 1920.
41. Strömgren E. Ein asymptotischer Fall im Dreikörperproblem. Astron. Nachr., 1905, 168, 105.
42. Strömgren E. Das kritische Massenverhältnis bei der Bewegung um L_4 and L_5 im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ. 1930, № 70.
43. Strömgren E. Über die Kritische Masse im Problème Restreint und über das Problème Restreint im allgemeinen.— Copenhagen Obs. Publ., 1930, № 72.
44. Wintner A. Librationstheorie des restringierten Dreikörperproblems.— Math. Z., 1930, 32, 657; also Copenhagen Obs. Publ., 1930. No. 71.
45. Horn J. Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen.— Z. Math. Phys., 1903, 48, 409.

46. Poincaré H. Sur les courbes définies par les équations différentielles. Theorie des centres.— J. Math., 1885, [4] 1, 172.
47. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. 3 vols. — Paris: Gauthier-Villars, 1892—1899. Reprinted by Dover, New York, 1957. [Русский перевод: Пуанкаре А., Новые методы небесной механики.— Избр. тр., т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1972.]
48. Burrau C. Über einige in Aussicht genommene Berechnung, betreffend einen Spezialfall des Dreikörperproblems.— Astron. Ges. Vierteljahrsschr., 1906, 41, 261.
49. Perchot J., Mascart J. Sur une class de solutions périodiques dans un cas spécial du problème des trois corps.— Bull. Astron., 1895, 12, 329.
50. Tisserand F. Traité de Mécanique Céleste. 4 vols.— Paris: Gauthier-Villars, 1896.
51. Poincaré H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps.— Bull. Astron., 1884, 1, 65.
52. Darwin G. Periodic orbits.— Acta Math., 1897, 21, 99; also Scientific Papers. V. 4, p. 1.— London, New York: Cambridge Univ. Press, 1911.
53. Plummer H. C. On oscillating satellites.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1903, 63, 436.
54. Plummer H. C. On oscillating satellites.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1904, 64, 98.
55. Strömgren E. Über Librationen und Ejecktionsbahnen.— Copenhagen Obs. Publ., 1913, No. 14.
56. Strömgren E. Fortsetzung und Abschluss der Librationen um L_2 und L_3 im Restringierten Dreikörperproblem (Problème Restreint).— Copenhagen Obs. Publ., 1929, No. 63.
57. Möller J. P. Vier Bahnklassen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1928, No. 60; also Astron. Nachr., 1928, 233, 81.
58. Möller J. P. Zwei Bahnklassen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1935, No. 99.
59. Greaves W. M. H. The existence theorem for certain periodic orbits in the restricted problem of three bodies.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1922, 82, 139.
60. Pedersen P. Fourier series for the periodic orbits around the triangular libration points.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1935, 95, 482; also Copenhagen Obs. Publ., 1935, No. 101.
61. Siegel C. L. Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung.— Math. Ann., 1954, 128, 144.
62. Pedersen P. Über eine Klasse infinitesimaler, periodischer Bahnen um die Dreieckslibrationspunkte im Problème Restreint.— Astron. Nachr., 1939, 269, 31; also Copenhagen Obs. Publ., 1939, No. 119.
63. Buck T. Oscillating satellites near the Lagrangian equilateral triangular points.— Periodic Orbits (Moulton F. R., ed.), p. 299.— Washington, D. C.: Carnegie Inst. of Washington, 1920.
64. Perron O. Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem.— Monatsh. Math. Phys., 1936, 43, 81.
65. Brown E. W. On a new family of periodic orbits in the problem of three bodies.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1911, 71, 438.
66. Thüring B. Die Librationsbahnen der Trojaner als nichtgeschlossene Bahnkurven.— Astron. Nachr., 1952, 280, 226.
67. Thüring B. Numerische Untersuchungen zu den Bewegungstheorien der Planeten der Jupitergruppe.— Astron. Nachr., 1951, 279, 217.
68. Rabe E. Determination and survey of periodic Trojan orbits in the restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1961, 66, 500.

69. Willard H. R. On a family of oscillating orbits of short period.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1913, 73, 471.
70. Goodrich E. F. Numerical determination of short period Trojan orbits in the restricted three body problem.— NASA X-643-65-420 (1965).
71. Rabe E. Additional periodic Trojan orbits and further studies of their stability features.— Astron. J., 1962, 67, 382.
72. Rabe E., Schanzle A. Periodic librations about the triangular solutions of the restricted earth-moon problem and their orbital stabilities.— Astron. J., 1962, 67, 732.
73. Thüring B. Programmgesteuerte Berechnung von Librationsbahnen.— Astron. Nachr., 1959, 285, 71.
74. Brown E. W. On the oscillating orbits about the triangular equilibrium points in the problem of three bodies.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1911, 71, 492.
75. Pedersen P. On the periodic orbits in the neighborhood of the triangular equilibrium points in the restricted problem of three bodies.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1933, 94, 167; also Copenhagen Obs. Publ., 1933, No. 91.
76. Pedersen P. Fourier expansions for periodic orbits around the triangular libration points.— Copenhagen Obs. Publ., 1939, No. 120.
77. Deprit A. Routh's critical mass-ratio at the triangular libration centers.— Astron. J., 1966, 71, 77.
78. Дубошин Г. Н. О неустойчивости периодических движений вблизи коллинеарных точек либрации в ограниченной задаче о трех телах.— Астрономический журнал, 1938, 15, с. 209.
79. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— Харьков, 1892; М., Гостехиздат, 1950.
80. Леонтович А. М. Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел.— ДАН СССР, 1962, 143, № 3, с. 525 — 529.
81. Арнольд В. И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае.— ДАН СССР, 1961, 137, № 2, с. 255 — 257.
82. Richards P. B. On asymptotic stability in the restricted three-body problem.— Icarus, 1963, 1, 334.
83. Michael W. H., Jr. Considerations of the motion of a small body in the vicinity of the stable libration points of the earth-moon system.— NASA TR R-160 (1963).
84. Huang S. Very restricted four-body problem — NASA TN D-501 (1960).
85. Danby J. M. A. Inclusion of extra forces in the problem of three bodies.— Astron. J., 1965, 70, 181.
86. Wolaver L. E. Effect of initial configurations on libration point motion.— AIAA paper No. 65—684 (1965).
87. Wolaver L. E. Stability of certain trajectories in the four body problem.— OAR Review 2, 1963, No. 11.
88. deVries J. P. The sun's perturbing effect on motion near a triangular Lagrange point.— Proc. 13th Intern. Astronaut. Congr., Varna, 1962, p. 432. New York: Springer, 1964.
89. Tapley R. D., Lewallen J. M. Solar influence on satellite motion near the stable earth-moon libration points.— *AIAA* J. 1964, 2, 728.
89a. Tapley R. D., Schutz B. E. Some additional results in solar influenced libration point motion.— *AIAA* Paper, 1965, No. 65—88.
90. Szebehely V. Theory and application of motion around equilibrium positions.— Methods of Celestial Mechanics and Astrodynamics (Duncombe R., Szebehely V., eds.), p. 3. Progr. Astronaut. Aeronaut. 17. New York: Academic Press, 1966.

91. Breakwell J. V., Pringle R. Resonances affecting motion near earth-moon equilateral libration points.— Methods of Celestial Mechanics and Astrodynamics (Duncombe R., Szebehely V. eds.) p. 55. Progr. Astronaut. Aeronaut. 17. New York: Academic Press, 1966.
91a. Steg L., de Vries J. P. Earth-moon libration points: Theory, existence and applications.— Space Sci. Rev., 1966, **5**, 210.
92. Sehnal L. The stability of the libration points L_4 and L_5 in the system earth-moon.— Bull. Astron. Inst. Czech., 1960, **11**, 130.
93. New natural satellites of the earth? — Sky and Telescope, 1961, **22**, 10. More about the earth's cloud satellites.— Ibid., 1961, **22**, 63.
94. Kordylewski K. Photographische Untersuchungen des Librationspunktes L_5 im System Erde-Mond.— Acta Astronomica, 1961, **11**, 165; also Trans. Cambridge Res. Labs., Office of Aerospace Res. E-T-G-64-35 (1964).
95. Benedikt E. T. Exact determination of the lunar mass by means of selenoid satellites.— Nature, 1961, **192**, 442.
96. Klemperer W. B., Benedikt E. T. Selenoid satellites.— Astronaut. Acta, 1958, **4**, 25.
97. Abhyankar K. D. Stability of straight-line solutions in the restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1959, **64**, 163.
98. Moulton F. R. A meteoritic theory of Gegenschein.— Astron. J., 1900, **21**, 17.
99. Моисеев Н. О гипотезе Гильдена—Мультона о происхождении противосияния.— Астрономический журнал, 1938, **15**, с. 217—231.
100. Richards P. B. Approximate effect of the sun on satellites near the interior earth-moon libration point.— *AIAA* Paper No. 65—512 (1965).
101. Szebehely V., Williams C. Collinear libration points.— Astron. J., 1964, **69**, 460.
102. Chandrasekhar S. Principles of Stellar Dynamics. Chicago, Illinois: The Univ. of Chicago Press, 1942. Reprinted by Dover, New York, 1960.
103. Halkin H. On the necessary condition for optimal control of nonlinear systems.— J. Anal. Math., 1964, **12**, 1.
104. Herget P. The Computation of Orbits. Published privately by the author, Cincinnati, Ohio, 1948.
105. O'Keefe J. A. An application of Jacobi's integral to the motion of an earth satellite.— Astron. J., 1957, **62**, 265.
106. Poritsky H. Motion of a satellite around an oblate earth.— Astron. J., 1962, **67**, 212.
107. Blitzer L. Equilibrium positions and stability of 24-hour satellite orbits.— J. Geophys. Res., 1965, **70**, 3987.
108. Houbolt J. C. Problems and potentialities of space rendezvous.— Astronaut. Acta, 1961, **7**, 406.
109. Battin R. H. Astronautical Guidance.— New York: McGraw-Hill, 1964. [Русский перевод: Бэттин Р. Наведение в космосе.— М.: Машиностроение, 1966.]

Приложение I. КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КОЛЛИНЕАРНЫХ ТОЧКАХ

А. Корни характеристического уравнения в коллинеарных точках для $0 \leqslant \mu \leqslant 0{,}009$

μ		L_1	L_2	L_3
0,0	λ	2,50828 67902	2,50828 67902	0,0
	s	2,07159 42224	2,07159 42224	1,0
0,000001	λ	2,49169 87840	2,52503 75693	0,00162 018
	s	2,06150 07684	2,08182 14185	1,00000 087
0,000002	λ	2,48741 80143	2,52946 05820	0,00229 129
	s	2,05889 86598	2,08450 14835	1,00000 175
0,000003	λ	2,48442 25586	2,53254 97940	0,00280 624
	s	2,05707 84929	2,08638 68005	1,00000 262
0,000004	λ	2,48204 22021	2,53501 35773	0,00324 037
	s	2,05563 24696	2,08789 08184	1,00000 350
0,000005	λ	2,48003 50425	2,53709 72189	0,00362 284
	s	2,05441 34206	2,08916 30510	1,00000 437
0,000006	λ	2,47828 27591	2,53892 08579	0,00396 862
	s	2,05334 93688	2,09027 67354	1,00000 525
0,000007	λ	2,47671 75705	2,54055 33949	0,00428 660
	s	2,05239 90841	2,09127 38767	1,00000 612
0,000008	λ	2,47529 66024	2,54203 84552	0,00458 256
	s	2,05153 64888	2,09218 10729	1,00000 700
0,000009	λ	2,47399 08117	2,54340 55163	0,00486 054
	s	2,05074 39192	2,09301 63580	1,00000 787
0,00001	λ	2,47277 95083	2,54467 59359	0,00512 346
	s	2,05000 87920	2,09379 25906	1,00000 875
0,00002	λ	2,46368 72713	2,55427 63183	0,00724 564
	s	2,04449 36472	2,09966 17460	1,00001 750
0,00003	λ	2,45734 11991	2,56104 47030	0,00887 403
	s	2,04064 72440	2,10380 27221	1,00002 625
0,00004	λ	2,45230 74940	2,56645 27785	0,01024 681
	s	2,03759 80288	2,10711 33000	1,00003 500
0,00005	λ	2,44806 91990	2,57103 32121	0,01145 624
	s	2,03503 18479	2,10991 85158	1,00004 375
0,00006	λ	2,44437 36586	2,57504 70987	0,01254 963
	s	2,03279 51950	2,11237 77223	1,00005 249
0,00007	λ	2,44107 62324	2,57864 42740	0,01355 511
	s	2,03080 02057	2,11458 23827	1,00006 124
0,00008	λ	2,43808 54826	2,58191 96606	0,01449 097
	s	2,02899 13431	2,11659 04480	1,00006 999
0,00009	λ	2,43533 95019	2,58493 76466	0,01536 994
	s	2,02733 10110	2,11844 12329	1,00007 874
0,0001	λ	2,43279 42078	2,58774 41597	0,01620 12783
	s	2,02579 24417	2,12016 27831	1,00008 74849
0,0002	λ	2,41374 74318	2,60902 09794	0,02291 12574
	s	2,01429 20158	2,13322 83040	1,00017 49395
0,0003	λ	2,40051 10155	2,62408 92785	0,02805 94539
	s	2,00631 34039	2,14249 62052	1,00026 23640
0,0004	λ	2,39004 28628	2,63616 68635	0,03239 91236
	s	2,00001 13834	2,14993 34251	1,00034 97584

Продолжение

μ		L_1	L_2	L_3
0,0005	λ	2,38124 86747	2,64642 09381	0,03622 20450
	s	1,99472 25920	2,15625 38273	1,00043 71226
0,0006	λ	2,37359 45622	2,65542 45557	0,03957 78656
	s	1,99012 35343	2,16180 80365	1,00052 44568
0,0007	λ	2,36677 53289	2,66350 70206	0,04285 54863
	s	1,98602 93546	2,16679 76073	0,00061 17609
0,0008	λ	2,36059 82825	2,67087 71950	0,04581 28330
	s	1,98232 33791	2,17135 04144	1,00069 90351
0,0009	λ	2,35493 31094	2,67767 69033	0,04859 01427
	s	1,97892 67270	2,17555 33122	1,00078 62794
0,001	λ	2,34968 71129	2,68400 74035	0,05121 67129
	s	1,97578 33027	2,17946 83264	1,00087 34937
0,002	λ	2,31056 33638	2,73220 38755	0,07240 61496
	s	1,95239 86945	2,20934 11928	1,00174 40017
0,003	λ	2,28347 58257	2,76651 78860	0,08864 85267
	s	1,93626 98853	2,23067 94063	1,00261 15635
0,004	λ	2,26208 56013	2,79410 32959	0,10232 76487
	s	1,92356 99524	2,24787 43955	1,00347 62180
0,005	λ	2,24412 39065	2,81756 69425	0,11436 72690
	s	1,91293 09704	2,26252 82490	1,00433 80033
0,006	λ	2,22848 80206	2,83819 31077	0,12524 13520
	s	1,90368 87229	2,27543 09491	1,00519 69568
0,007	λ	2,21454 95492	2,85672 19227	0,13523 15797
	s	1,89546 50068	2,28703 80996	1,00605 31152
0,008	λ	2,20191 28184	2,87362 39921	0,14452 15666
	s	1,88802 18499	2,29763 95787	1,00690 65145
0,009	λ	2,19031 08884	2,88921 95860	0,15323 89103
	s	1,88119 88050	2,30743 27780	1,00775 71903

Б. Корни характеристического уравнения в коллинеарных точках для $0{,}01 \leqslant \mu \leqslant 0{,}39$

μ		L_1	L_2	L_3
0,01	λ	2,17955 42907	2,90373 78316	0,16147 65578
	s	1,87488 20534	2,31655 89900	1,00860 51771
0,02	λ	2,09870 62620	3,01397 61640	0,22767 88648
	s	1,82769 47047	2,38614 45202	1,01694 43793
0,03	λ	2,04174 17762	3,09174 10196	0,27810 16814
	s	1,79476 77185	2,43552 43431	1,02504 87434
0,04	λ	1,99594 36519	3,15351 53767	0,32035 50175
	s	1,76849 74578	2,47491 24191	1,03294 45788
0,05	λ	1,95680 43211	3,20536 57702	0,35740 17712
	s	1,74619 53987	2,50807 85236	1,04065 43464
0,06	λ	1,92214 80086	3,25030 34682	0,39076 81162
	s	1,72656 60609	2,53689 79834	1,04819 73989

Продолжение

μ		L_1	L_2	L_3
0,07	λ	1,89074 14956	3,29007 46284	0,42136 39141
	s	1,70887 62116	2,56246 02957	1,05559 05499
0,08	λ	1,86181 16571	3,32579 53969	0,44978 36712
	s	1,69266 67241	2,58546 30320	1,06284 85165
0,09	λ	1,83483 87756	3,35822 88459	0,47644 12236
	s	1,67762 92977	2,60638 38230	1,06998 42690
0,10	λ	1,80945 50539	3,38792 30677	0,50163 83508
	s	1,66354 59768	2,62556 62167	1,07700 93102
0,11	λ	1,78538 97088	3,41528 69212	0,52560 31071
	s	1,65025 64572	2,64326 68224	1,08393 39007
0,12	λ	1,76243 70166	3,44063 46672	0,54851 27744
	s	1,63763 90746	2,65968 31175	1,09076 72420
0,13	λ	1,74043 65271	3,46421 37859	0,57050 83705
	s	1,62559 90985	2,67497 07942	1,09751 76282
0,14	λ	1,71926 08635	3,48622 31137	0,59170 42293
	s	1,61406 11864	2,68925 50777	1,10419 25702
0,15	λ	1,69880 62146	3,50682 51137	0,61219 45579
	s	1,60296 43302	2,70263 83907	1,11079 89003
0,16	λ	1,67898 74511	3,52615 44409	0,63205 80605
	s	1,59225 83644	2,71520 57080	1,11734 28600
0,17	λ	1,65973 34457	3,54432 40814	0,65136 12853
	s	1,58190 14858	2,72702 83957	1,12383 01745
0,18	λ	1,64098 41327	3,56142 98527	0,67016 10988
	s	1,57185 84510	2,73816 70298	1,13026 61153
0,19	λ	1,62268 82520	3,57755 37703	0,68850 65519
	s	1,56209 92387	2,74867 35039	1,13665 55551
0,20	λ	1,60480 16447	3,59276 66097	0,70644 03108
	s	1,55259 80406	2,75859 26360	1,14300 30137
0,21	λ	1,58728 59439	3,60712 98862	0,72399 97703
	s	1,54333 24857	2,76796 34101	1,14931 26990
0,22	λ	1,57010 75568	3,62069 74059	0,74121 79320
	s	1,53428 30380	2,77681 99499	1,15558 85417
0,23	λ	1,55323 68604	3,63351 64969	0,75812 41057
	s	1,52543 25210	2,78519 22914	1,16183 42265
0,24	λ	1,53664 75608	3,64562 89959	0,77474 44746
	s	1,51676 57389	2,79310 70037	1,16805 32185
0,25	λ	1,52031 61768	3,65707 20475	0,79110 25567
	s	1,50826 91715	2,80058 76911	1,17424 87875
0,26	λ	1,50422 16186	3,66787 87580	0,80721 95836
	s	1,49993 07258	2,80765 54046	1,18042 40291
0,27	λ	1,48834 48424	3,67807 87340	0,82311 48149
	s	1,49173 95321	2,81432 89804	1,18658 18834
0,28	λ	1,47266 85645	3,68769 85294	0,83880 58013
	s	1,48368 57759	2,82062 53226	1,19272 51520
0,29	λ	1,45717 70222	3,69676 20199	0,85430 86052
	s	1,47576 05574	2,82655 96376	1,19885 65131
0,30	λ	1,44185 57729	3,70529 07166	0,86963 79884
	s	1,46795 57732	2,83214 56333	1,20497 85354
0,31	λ	1,42669 15244	3,71330 40330	0,88480 75718
	s	1,46026 40176	2,83739 56863	1,21109 36902

Продолжение

μ		L_1	L_2	L_3
0,32	λ	1,41167 19897	3,72081 95107	0,89982 99726
	s	1,45267 84972	2,84232 09852	1,21720 43633
0,33	λ	1,39678 57633	3,72785 30124	0,91471 69228
	s	1,44519 29590	2,84693 16517	1,22331 28654
0,34	λ	1,38202 22137	3,73441 88881	0,92947 93716
	s	1,43780 16284	2,85123 68463	1,22942 14413
0,35	λ	1,36737 13906	3,74053 01171	0,94412 75755
	s	1,43049 91551	2,85524 48573	1,23553 22794
0,36	λ	1,35282 39437	3,74619 84310	0,95867 11767
	s	1,42328 05673	2,85896 31790	1,24164 75201
0,37	λ	1,33837 10518	3,75143 44202	0,97311 92727
	s	1,41614 12301	2,86239 85791	1,24776 92635
0,38	λ	1,32400 43594	3,75624 76259	0,98748 04779
	s	1,40907 68109	2,86555 71563	1,25389 95771
0,39	λ	1,30971 59213	3,76064 66197	1,00176 29786
	s	1,40208 32476	2,86844 43914	1,26004 05027

В. Корни характеристического уравнения в коллинеарных точках для $0{,}4 \leqslant \mu \leqslant 0{,}5$

μ		L_1	L_2	L_3
0,40	λ	1,29549 81524	3,76463 90730	1,01597 45821
	s	1,39515 67209	2,87106 51909	1,26619 40640
0,41	λ	1,28134 37826	3,76823 18171	1,03012 27616
	s	1,38829 36300	2,87342 39247	1,27236 22725
0,42	λ	1,26724 58167	3,77143 08944	1,04421 46964
	s	1,38149 05709	2,87552 44594	1,27854 71347
0,43	λ	1,25319 74968	3,77424 16036	1,05825 73089
	s	1,37474 43163	2,87737 01858	1,28475 06583
0,44	λ	1,23919 22682	3,77666 85375	1,07225 72986
	s	1,36805 17985	2,87896 40437	1,29097 48587
0,45	λ	1,22522 37483	3,77871 56153	1,08622 11738
	s	1,36141 00936	2,88030 85424	1,29722 17656
0,46	λ	1,21128 56964	3,78038 61097	1,10015 52811
	s	1,35481 64068	2,88140 57771	1,30349 34294
0,47	λ	1,19737 19866	3,78168 26692	1,11406 58331
	s	1,34826 80595	2,88225 74438	1,30979 19279
0,48	λ	1,18347 65813	3,78260 73359	1,12795 89349
	s	1,34176 24775	2,88286 48503	1,31611 93733
0,49	λ	1,16959 35054	3,78316 15589	1,14184 06094
	s	1,33529 71798	2,88322 89247	1,32247 79193
0,50	λ	1,15571 68222	3,78334 62040	1,15571 68222
	s	1,32886 97684	2,88335 02214	1,32886 97684

Г. Корни характеристического уравнения в коллинеарных точках для системы Солнце—Юпитер

μ		L_1	L_2	L_3
0,00085	λ	2,35770 81927	2,67434 12861	0,04722 19588
	s	1,98059 03099	2,17349 12708	1,00074 26610
0,00086	λ	2,35714 43378	2,67501 82916	0,04749 87562
	s	1,98025 22536	2,17390 97418	1,00075 13853
0,00087	λ	2,35658 49876	2,67569 02625	0,04777 39460
	s	1,97991 69190	2,17432 51241	1,00076 01092
0,00088	λ	2,35603 00552	2,67635 72937	0,04804 75560
	s	1,97958 42534	2,17473 74759	1,00076 88329
0,00089	λ	2,35547 94564	2,67701 94775	0,04831 96128
	s	1,97925 42059	2,17514 68536	1,00077 75563
0,00090	λ	2,35493 31094	2,67767 69033	0,04859 01427
	s	1,97892 67270	2,17555 33122	1,00078 62794
0,00091	λ	2,35439 09347	2,67832 96579	0,04885 91709
	s	1,97860 17686	2,17595 69047	1,00079 50022
0,00092	λ	2,35385 28555	2,67897 78258	0,04912 67222
	s	1,97827 92842	2,17635 76829	1,00080 37246
0,00093	λ	2,35331 87969	2,67962 14887	0,04939 28205
	s	1,97795 92285	2,17675 56969	1,00081 24468
0,00094	λ	2,35278 86862	2,68026 07263	0,04965 74892
	s	1,97764 15575	2,17715 09955	1,00082 11687
0,00095	λ	2,35226 24530	2,68089 56158	0,04992 07511
	s	1,97732 62286	2,17754 36260	1,00082 98903
0,00096	λ	2,35174 00286	2,68152 62325	0,05018 26283
	s	1,97701 32004	2,17793 36345	1,00083 86116
0,00097	λ	2,35122 13463	2,68215 26495	0,05044 31423
	s	1,97670 24323	2,17832 10658	1,00084 73326
0,00098	λ	2,35070 63414	2,68277 49378	0,05070 23141
	s	1,97639 38853	2,17870 59635	1,00085 60533
0,00099	λ	2,35019 49507	2,68339 31667	0,05096 01643
	s	1,97608 75211	2,17908 83699	1,00086 47736
0,00100	λ	2,34968 71129	2,68400 74035	0,05121 67129
	s	1,97578 33027	2,17946 83264	1,00087 34937
0,00101	λ	2,34918 27683	2,68461 77139	0,05147 19791
	s	1,97548 11940	2,17984 58731	1,00088 22135
0,00102	λ	2,34868 18588	2,68522 41615	0,05172 59822
	s	1,97518 11596	2,18022 10492	1,00089 09330
0,00103	λ	2,34818 43276	2,68582 68088	0,05197 87405
	s	1,97488 31655	2,18059 38927	1,00089 96522
0,00104	λ	2,34769 01197	2,68642 57161	0,05223 02721
	s	1,97458 71782	2,18096 44408	1,00090 83711
0,00105	λ	2,34719 91814	2,68702 09427	0,05248 05948
	s	1,97429 31653	2,18133 27297	1,00091 70897

Д. Корни характеристического уравнения в коллинеарных точках для системы Земля—Луна

μ		L_1	L_2	L_3
0,0110	λ	2,16950 31964	2,91734 90608	0,16930 47098
	s	1,86898 76395	2,32512 33025	1,00945 05093
0,0111	λ	2,16853 25639	2,91866 55963	0,17006 72117
	s	1,86841 88303	2,32595 20994	1,00953 48978
0,0112	λ	2,16756 78114	2,91997 45024	0,17082 62209
	s	1,86785 35394	2,32677 61666	1,00961 92601
0,0113	λ	2,16660 88495	2,92127 58895	0,17158 17840
	s	1,86729 17131	2,32759 55723	1,00970 35963
0,0114	λ	2,16565 55909	2,92256 98652	0,17233 39463
	s	1,86673 32990	2,32841 03829	1,00978 79063
0,0115	λ	2,16470 79504	2,92385 65347	0,17308 27525
	s	1,86617 82459	2,32922 06634	1,00987 21903
0,0116	λ	2,16376 58445	2,92513 60008	0,17382 82459
	s	1,86562 65038	2,33002 64772	1,00995 64483
0,0117	λ	2,16282 91920	2,92640 83640	0,17457 04693
	s	1,86507 80240	2,33082 78864	1,01004 03802
0,0118	λ	2,16189 79134	2,92767 37225	0,17530 94643
	s	1,86453 27588	2,33162 49517	1,01012 48861
0,0119	λ	2,16097 19311	2,92893 21722	0,17604 52717
	s	1,86399 06617	2,33241 77323	1,01020 90661
0,0120	λ	2,16005 11691	2,93018 38072	0,17677 79315
	s	1,86345 16870	2,33320 62862	1,01029 32202
0,0121	λ	2,15913 55533	2,93142 87192	0,17750 74827
	s	1,86291 57903	2,33399 06702	1,01037 73484
0,0122	λ	2,15822 50111	2,93266 69982	0,17823 39638
	s	1,86238 29282	2,33477 09397	1,01046 14508
0,0123	λ	2,15731 94716	2,93389 87319	0,17895 74123
	s	1,86185 30580	2,33554 71492	1,01054 55273
0,0124	λ	2,15641 88654	2,93512 40066	0,17967 78649
	s	1,86132 61381	2,33631 93516	1,01062 95781
0,0125	λ	2,15552 31246	2,93634 29063	0,18039 53577
	s	1,86080 21279	2,33708 75992	1,01071 36031
0,0126	λ	2,15463 21828	2,93755 55136	0,18110 99260
	s	1,86028 09875	2,33785 19427	1,01079 76023
0,0127	λ	2,15374 59750	2,93876 19092	0,18182 16045
	s	1,85976 26780	2,33861 24321	1,01088 15759
0,0128	λ	2,15286 44377	2,93996 21722	0,18253 04270
	s	1,85924 71613	2,33936 91162	1,01096 55239
0,0129	λ	2,15198 75084	2,94115 63800	0,18323 64270
	s	1,85873 43999	2,34012 20429	1,01104 94462
0,0130	λ	2,15111 51264	2,94234 46084	0,18393 96369
	s	1,85822 43573	2,34087 12590	1,01113 33429

Е. Корни характеристического уравнения в коллинеарных точках для планет Солнечной системы

	μ		L_1	L_2	L_3
Меркурий и Солнце	0,00000 01667	λ	2,49913 45093	2,51749 77806	0,00066 144
		s	2,06602 32389	2,07720 59094	1,00000 015
Венера и Солнце	0,00000 24510	λ	2,48596 56423	2,53095 68491	0,00253 649
		s	2,05801 60695	2,08541 45725	1,00000 214
Земля—Луна и Солнце	0,00000 30359	λ	2,48432 85016	2,53264 69976	0,00282 298
		s	2,05702 13486	2,08644 61319	1,00000 266
Марс и Солнце	0,00000 03233	λ	2,49688 19318	2,51978 28025	0,00092 117
		s	2,06465 28561	2,07859 87993	1,00000 028
Юпитер и Солнце	0,00095 38754	λ	2,35205 95465	2,68114 05054	0,05002 240
		s	1,97720 46482	2,17769 59769	1,00083 327
Сатурн и Солнце	0,00028 55022	λ	2,40221 99948	2,62213 09485	0,02737 320
		s	2,00734 29092	2,14129 10251	1,00024 969
Уран и Солнце	0,00004 37254	λ	2,45065 24720	2,56823 84787	0,01071 334
		s	2,03659 58230	2,10820 67848	1,00003 826
Нептун и Солнце	0,00005 17732	λ	2,44737 94103	2,57178 10075	0,01165 761
		s	2,03461 43029	2,11037 66030	1,00004 530
Плутон и Солнце	0,00000 27778	λ	2,48502 22165	2,53193 03650	0,00270 030
		s	2,05744 28277	2,08600 87247	1,00000 243
Луна и Земля	0,01214 09319	λ	2,15876 22415	2,93193 63676	0,17780 521
		s	1,86269 73151	2,33431 05439	1,01041 178
Луна и Земля	0,01215 06683	λ	2,15867 35676	2,93205 69574	0,17787 596
		s	1,86264 54216	2,33438 65302	1,01041 996
Критическое значение	0,03852 08965	λ	2,00222 63097	3,14510 18945	0,31448 249
		s	1,77209 02929	2,46953 97106	1,03178 893
Значение Дарвина	0,09090 90909	λ	1,83247 01415	3,36103 45364	0,47878 835
		s	1,67631 23209	2,60819 51360	1,07062 732

Приложение II. КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ УСТОЙЧИВОГО РЕШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧКАХ

А. Корни характеристического уравнения для устойчивого решения в треугольных точках

μ	s_1	s_2
0,0	0,0	1,0
0,000001	0,00259 80837	0,99999 66250
0,000002	0,00367 42557	0,99999 32499
0,000003	0,00450 00388	0,99998 98748
0,000004	0,00519 62122	0,99998 64996
0,000005	0,00580 95585	0,99998 31244
0,000006	0,00636 40708	0,99997 97491
0,000007	0,00687 40019	0,99997 63738
0,000008	0,00734 86383	0,99997 29984
0,000009	0,00779 44303	0,99996 96230
0,00001	0,00821 60746	0,99996 62475
0,00002	0,01161 96183	0,99993 24900
0,00003	0,01423 14773	0,99989 87274
0,00004	0,01643 35673	0,99986 49598
0,00005	0,01837 38155	0,99983 11872
0,00006	0,02012 80858	0,99979 74096
0,00007	0,02174 14434	0,99976 36269
0,00008	0,02324 32500	0,99972 98392
0,00009	0,02465 38996	0,99969 60464
0,0001	0,02598 82406	0,99966 22486
0,0002	0,03676 35241	0,99932 39932
0,0003	0,04503 89536	0,99898 52315
0,0004	0,05202 15701	0,99864 59614
0,0005	0,05817 87690	0,99830 61809
0,0006	0,06375 01906	0,99796 58878
0,0007	0,06887 81528	0,99762 50799
0,0008	0,07365 53585	0,99728 37551
0,0009	0,07814 61824	0,99694 19111
0,001	0,08239 74830	0,99659 95459
0,002	0,11687 42240	0,99314 67242
0,003	0,14357 64432	0,98963 92297
0,004	0,16630 36511	0,98607 45893
0,005	0,18652 53691	0,98245 01446
0,006	0,20499 49422	0,97876 30324
0,007	0,22216 02669	0,97501 01619
0,008	0,23831 38726	0,97118 81888
0,009	0,25365 98348	0,96729 34861
0,01	0,26834 77485	0,96332 21091
0,02	0,39613 84405	0,91819 07950
0,03	0,51820 58086	0,85525 59500
0,038521	0,70710 67812	0,70710 67812

Б. Корни характеристического уравнения в треугольных точках для системы Солнце — Юпитер

μ	s_1	s_2
0,00085	0,07593 33152	0,99711 28981
0,00086	0,07638 09123	0,99707 87112
0,00087	0,07682 59540	0,99704 45190
0,00088	0,07726 84845	0,99701 03216
0,00089	0,07770 85467	0,99697 61190
0,00090	0,07814 61824	0,99694 19111
0,00091	0,07858 14320	0,99690 76981
0,00092	0,07901 43352	0,99687 34799
0,00093	0,07944 49301	0,99683 92564
0,00094	0,07987 32542	0,99680 50277
0,00095	0,08029 93439	0,99677 07938
0,00096	0,08072 32345	0,99673 65547
0,00097	0,08114 49606	0,99670 23103
0,00098	0,08156 45556	0,99666 80607
0,00099	0,08198 20525	0,99663 38059
0,00100	0,08239 74830	0,99659 95459
0,00101	0,08281 08783	0,99656 52805
0,00102	0,08322 22688	0,99653 10100
0,00103	0,08363 16841	0,99649 67343
0,00104	0,08403 91529	0,99646 24533
0,00105	0,08444 47036	0,99642 81670

В. Корни характеристического уравнения в треугольных точках для системы Земля — Луна

μ	s_1	s_2
0,0110	0,28249 16547	0,95926 97561
0,0111	0,28387 97488	0,95885 99898
0,0112	0,28526 33937	0,95844 91620
0,0113	0,28664 26668	0,95803 75679
0,0114	0,28801 76439	0,95762 51024
0,0115	0,28938 83993	0,95721 17604
0,0116	0,29075 50060	0,95679 75368
0,0117	0,29211 75353	0,95638 24264
0,0118	0,29347 60572	0,95596 64240
0,0119	0,29483 06407	0,95554 95243
0,0120	0,29618 13529	0,95513 17219
0,0121	0,29752 82603	0,95471 30115
0,0122	0,29887 14276	0,95429 33877
0,0123	0,30021 09188	0,95387 28449
0,0124	0,30154 67965	0,95345 13776
0,0125	0,30287 91222	0,95302 89803
0,0126	0,30420 79564	0,95260 56473
0,0127	0,30553 33586	0,95218 13728
0,0128	0,30685 53872	0,95175 61512
0,0129	0,30817 40097	0,95132 99766
0,0130	0,30948 95525	0,95090 28430

Г. Корни характеристического уравнения в треугольных точках для планет Солнечной системы

		μ	s_1	s_2
Меркурий	и Солнце	0,00000 01667	0,00106 06606	0,99999 94375
Венера	и Солнце	0,00000 24510	0,00406 74698	0,99999 17278
Земля — Луна	и Солнце	0,00000 30359	0,00452 68887	0,99998 97536
Марс	и Солнце	0,00000 03233	0,00147 71587	0,99999 89090
Юпитер	и Солнце	0,00095 38754	0,08046 38757	0,99575 75255
Сатурн	и Солнце	0,00028 55022	0,04393 53588	0,99903 43759
Уран	и Солнце	0,00004 37254	0,01718 19885	0,99985 23787
Нептун	и Солнце	0,00005 17732	0,01869 68830	0,99982 51980
Плутон	и Солнце	0,00000 27778	0,00433 01556	0,99999 06248
Луна	и Земля	0,01214 09319	0,29807 84932	0,95454 13621
Луна	и Земля	0,01215 06683	0,29820 92835	0,95450 05098
Критическое значение		0,03852 08965	0,70710 67812	0,70710 67812
Значение Дарвина		0,09090 90909	$\lvert\lambda\rvert = 0,86423\ 05228$ $\theta = 66,01187\ 83680$	$\alpha = 0,35135\ 05348$ $\beta = 0,78958\ 67263$

Приложение III. **КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕУСТОЙЧИВОГО РЕШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧКАХ**

μ	$\lvert\lambda\rvert$	θ	α	β
0,04	0,71352 42690	84,57034 43660	0,06751 62294	0,71032 27726
0,05	0,75248 75963	76,00451 49541	0,18198 56899	0,73014 98417
0,06	0,78549 91496	72,06561 16729	0,24187 69460	0,74733 15576
0,07	0,81418 14256	69,48087 21935	0,28538 69249	0,76252 58664
0,08	0,83954 77398	67,59226 43731	0,32003 15668	0,77615 73318
0,09	0,86227 72315	66,12918 89470	0,34894 27058	0,78851 82382
0,10	0,88284 92869	64,95189 21062	0,37377 99242	0,79981 96245
0,11	0,90161 60127	63,97861 79990	0,39554 48358	0,81021 95487
0,12	0,91884 42941	63,15750 22064	0,41489 44666	0,81983 98736
0,13	0,93474 16503	62,45368 39790	0,43228 57578	0,82877 67953
0,14	0,94947 28812	61,84268 36650	0,44805 06400	0,83710 77446
0,15	0,96317 12027	61,30670 87595	0,46243 85179	0,84489 60782
0,16	0,97594 59370	60,83246 07819	0,47564 19199	0,85219 43651
0,17	0,98788 79695	60,40976 72709	0,48781 27922	0,85904 67509
0,18	0,99907 37138	60,03069 34269	0,49907 32840	0,86549 06948
0,19	1,00956 80506	59,68894 55681	0,50952 31343	0,87155 82737
0,20	1,01942 65469	59,37945 90020	0,51924 48770	0,87727 71753
0,21	1,02869 71573	59,09810 62608	0,52830 76005	0,88267 14682
0,22	1,03742 15473	58,84148 61136	0,53676 97211	0,88776 22055
0,23	1,04563 61359	58,60676 81152	0,54468 10666	0,89256 79046
0,24	1,05337 29257	58,39157 61636	0,55208 44684	0,89710 49327
0,25	1,06066 01718	58,19389 99806	0,55901 69944	0,90138 78189
0,26	1,06752 29247	58,01202 69214	0,56551 09171	0,90542 95099
0,27	1,07398 34755	57,84448 88140	0,57159 44828	0,90924 15811
0,28	1,08006 17231	57,69002 00645	0,57729 25280	0,91283 44115
0,29	1,08577 54802	57,54752 43142	0,58262 69790	0,91621 73305
0,30	1,09114 07288	57,41604 76646	0,58761 72606	0,91939 87410
0,31	1,09617 18356	57,29475 70008	0,59228 06316	0,92238 62242
0,32	1,10088 17342	57,18292 23108	0,59663 24633	0,92518 66278
0,33	1,10528 20800	57,07990 21674	0,60068 64725	0,92780 61426
0,34	1,10938 33827	56,98513 17334	0,60445 49155	0,93025 03668
0,35	1,11319 51191	56,89811 27974	0,60794 87532	0,93252 43625
0,36	1,11672 58309	56,81840 54561	0,61117 77898	0,93463 27036
0,37	1,11998 32087	56,74562 11421	0,61415 07909	0,93657 95182
0,38	1,12297 41642	56,67941 67589	0,61687 55845	0,93836 85239
0,39	1,12570 48928	56,61948 97336	0,61935 91469	0,94000 30600
0,40	1,12818 09279	56,56557 38365	0,62160 76762	0,94148 61141
0,41	1,13040 71877	56,51743 56451	0,62362 66551	0,94282 03461
0,42	1,13238 80149	56,47487 15543	0,62542 09048	0,94400 81081
0,43	1,13412 72122	56,43770 52547	0,62699 46306	0,94505 14625
0,44	1,13562 80710	56,40578 56129	0,62835 14604	0,94595 21964
0,45	1,13689 33967	56,37898 49030	0,62949 44779	0,94671 18346
0,46	1,13792 55298	56,35719 73467	0,63042 62492	0,94733 16503
0,47	1,13872 63626	56,34033 79283	0,63114 88449	0,94781 26737
0,48	1,13929 73533	56,32834 14592	0,63166 38581	0,94815 56990
0,49	1,13963 95360	56,32116 18691	0,63197 24171	0,94836 12898
0,50	1,13975 35285	56,31877 17113	0,63207 51956	0,94842 97828

Глава 6

ДИНАМИКА ГАМИЛЬТОНА В РАСШИРЕННОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 6.1. Введение

В этой главе мы изложим те аспекты динамики Гамильтона, которые потребуются нам в дальнейшем, причем особое внимание уделим операциям в расширенном фазовом пространстве (называемом иногда пространством состояний и энергии), так как преобразования, необходимые для процесса регуляризации, будут выполняться в этом пространстве.

Ниже мы объясним это подробней и постараемся обосновать данное утверждение. Сначала мы опишем пространство конфигураций и фазовое пространство. В n-мерном пространстве конфигурации, или конфигурационном пространстве координат точки мы имеем n обобщенных координат q_k динамической системы. В $2n$-мерном фазовом пространстве координат точки мы имеем n обобщенных координат q_k и n обобщенных импульсов p_k динамической системы. Точки в конфигурационном пространстве соответствуют заданным конфигурациям, а точки в фазовом пространстве — определенным состояниям системы.

Описание динамической системы с n степенями свободы в n-мерном пространстве конфигураций и в $2n$-мерном фазовом пространстве обладает известными преимуществами для определенных типов задач, но для наших целей оно является недостаточно общим. Представление посредством фазового пространства связано с динамикой Гамильтона, которая, в свою очередь, использует понятие канонических преобразований. Такое представление несомненно является мощным инструментом в арсенале формалистических методов динамики. $2n$ координат фазового пространства не включают время, поэтому канонические преобразования не могут быть непосредственно применены к задачам, в которых кроме преобразования переменных состояния необходимо еще преобразование независимой переменной. Если производится регуляризация ограниченной задачи, то, как было показано в гл. 3, преобразование времени играет важную роль. Поэтому, если мы хотим использовать в процессе регуляризации ограниченной задачи наиболее эффективный метод канонических переменных и контактных преобразований, то он должен обеспечивать возможность преобразований времени.

Читателю, которому быть может покажется излишним предлагаемое представление уравнений движения и процесса регуляризации в каноинческой системе переменных, помимо приведенных ранее форм, напомним, что динамика Гамильтона отличается особой эффективностью. Цель формалистического метода в динамике состоит в том, чтобы формулировать динамическую задачу «наиболее подходящим» образом для аналитического или численного ее решения. Выбор «наилучшей» системы переменных для данной конкретной динамической задачи имеет первостепенное значение. Приводимые ниже выводы помогут читателю найти соответствующую пронзводящую функцию для данной задачи.

Уравнения движения и канонические преобразования рассматриваются в §§ 6.2 и 6.3. Понятие расширенного фазового пространства вводится в § 6.4, здесь же рассматриваются операции в этой системе. Далее, в § 6.5 приводятся примеры из динамики Гамильтона в расширенном фазовом пространстве, после чего в § 6.6 излагается наш метод преобразования обобщенного временн.

§ 6.2. Уравнения движения

Конфигурация динамической системы с n степенями свободы и независимыми координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ будет известна в любой момент времени, если координаты будут известными функциями времени. Пространство, образованное координатами q_i, называется пространством конфигураций. $2n$ начальных условия $q_i = q_i^0$ и $\dot{q}_i = \dot{q}_i^0$ в момент $t = t_0$ определяют решение в форме

$$q_i = q_i(t,\ q_i^0,\ \dot{q}_i^0).$$

Пространство конфигураций является n-мерным, т. е. размерность его совпадает с числом степеней свободы. Точкн в пространстве конфигураций не соответствуют системе переменных состояния q_i, $\dot{q}_i$; точка пространства конфигурацнй выражает движение неоднозначно. Точка $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в пространстве конфигураций не определяет поведенне системы, так как для этой цели требуется $2n$ начальных условнй, тогда как точка в пространстве конфигураций соответствует только n начальным условням. В одной заданной точке конфигурацнй начинается много орбнт, каждая из которых соответствует своей системе n начальных скоростей.

Пространство конфигураций связано с динамнкой Лагранжа, где уравнения движения представляют собой n дифференциаль-

ных уравнений второго порядка:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь $L = T - V$ есть кинетический потенциал, или функция Лагранжа.

Уравнения Лагранжа можно рассматривать также как решение Эйлера — Лагранжа вариационной задачи

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0, \tag{1}$$

известной как принцип Гамильтона для консервативных систем, согласно которому движение системы с момента времени t_1 до момента времени t_2 происходит таким образом, что криволинейный интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

имеет для траектории локальный экстремум.

Заметим, что точки n-мерного пространства конфигураций описывают систему в данный момент времени, и для выяснения ее дальнейшего поведения требуется дополнительная информация. Эта информация содержится в описании фазового пространства, где $2n$ «координат» представляют собой обобщенные координаты и импульсы $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Обобщенные импульсы определяются следующим образом:

$$p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Гамильтониан динамической системы равен

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \tag{3}$$

где обобщенные скорости надлежит исключить посредством решения системы уравнений (2) относительно $\dot{q}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\dot{q}_i = f_i(q, p, t).$$

Такое исключение, вообще говоря, можно выполнить, поскольку кинетическая энергия есть положительно определенная форма относительно скоростей и, следовательно,

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \neq 0.$$

Заметим, что в уравнении (3) и в последнем выражении применен сокращенный способ обозначения суммирования: повторяющийся индекс означает суммирование по этому

индексу,

$$\dot{q}_i p_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i.$$

Вычисляя полный дифференциал функции H из уравнения (3),

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

и замечая, что для $H = H(q_i, p_i, t)$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

мы находим

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

и

$$\left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i.$$

На основании уравнений движения Лагранжа и системы (2) последнее уравнение можно представить в виде

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) образуют систему $2n$-го порядка и носят название канонических уравнений Гамильтона.

Покажем теперь, что из уравнения (4) непосредственно следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}. \tag{7}$$

Этот результат потребуется нам, когда мы будем рассматривать расширенное фазовое пространство. Из верхнего соотношения и уравнения (4) получаем

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Левую часть этого равенства с помощью уравнения (3) можно представить в виде

$$\frac{dH}{dt} = p_i \ddot{q}_i + \dot{p}_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Первый и четвертый члены правой части взаимно уничтожаются на основании уравнения (2), а второй и третий члены взаимно уничтожаются, так как

$$\dot{p}_l = \frac{\partial L}{\partial q_l}.$$

Следовательно,

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Таким образом, применяя фазовое пространство, мы приходим к $2n$ переменным q_i, p_i и к $2n$ дифференциальным уравнениям движения первого порядка. Точка q_i^0, p_i^0 в $2n$-мерном фазовом пространстве соответствует системе начальных условий $q_i = q_i^0$, $p_i = p_i^0$, когда $t = 0$, что в общем случае определяет последующее движение системы. $2n$ координаты фазового пространства не только определяют мгновенную конфигурацию системы, но и полностью описывают ее динамическое состояние. Их называют переменными состояния движения, число их равно порядку дифференциальных уравнений, описывающих движение динамической системы.

Переменные q_i, p_i образуют каноническую систему; переменные q_i называют обобщенными координатами, а переменные p_i — сопряженными (обобщенными) импульсами.

§ 6.3. Каноническое преобразование в фазовом пространстве

Пусть $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ представляют систему $2n$ канонических переменных, а $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n$ — другую систему, такую, что

$$\begin{aligned}
Q_1 &= Q_1(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t),\\
&\vdots\\
Q_n &= Q_n(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t),\\
P_1 &= P_1(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t),\\
&\vdots\\
P_n &= P_n(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t).
\end{aligned} \tag{8}$$

Если теперь преобразование, определяемое уравнением (8), будет таким, что новые переменные $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n$ снова будут каноническими и мы будем иметь

$$\dot{Q}_l = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l}, \quad \dot{P}_l = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l}, \tag{9}$$

где $\tilde{H}$ — новый гамильтониан, то уравнения (8) будут представлять каноническое преобразование.

Один из способов получения некоторых, но не всех таких преобразований следует из принципа Гамильтона в его модифицированной форме. Из уравнений (1) и (3) получаем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H)\, dt = 0, \tag{10}$$

и после выполнения преобразования будем иметь

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - \tilde{H})\, dt = 0. \tag{11}$$

Разность между этими вариациями равна

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i - H + \tilde{H})\, dt = 0. \tag{12}$$

Свяжем новые и старые переменные соотношением

$$p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i - H + \tilde{H} = \frac{dW}{dt}. \tag{12а}$$

Оно удовлетворяет уравнению (12), так как

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt}\, dt = \delta [W(t_2) - W(t_1)] = 0.$$

Заметим, что обозначение $W(t_i)$ здесь не означает, что функция W зависит только от t, а лишь то, что значение функции W должно быть вычислено при $t = t_i$.

Уравнение (12а) часто записывают в форме дифференциалов (с уже упоминавшимся ранее сокращенным способом обозначения суммирования):

$$p_i dq_i - P_i dQ_i = dW + (H - \tilde{H})\, dt, \tag{12б}$$

где W – «производящая функция», зависящая в принципе от $4n+1$ переменных, т. е.

$$W = W(q_i, Q_i, p_i, P_i, t).$$

Так как уравнения (8) представляют $2n$ соотношений между упомянутыми выше $4n+1$ переменными, то функция W фактически зависит только от $2n$ независимых переменных и времени. Отсюда сразу можно указать четыре возможные формы за-

висимости функции W:

$$\begin{aligned} W_1 &= W_1(q, Q, t), \\ W_2 &= W_2(q, P, t), \\ W_3 &= W_3(p, Q, t), \\ W_4 &= W_4(p, P, t). \end{aligned} \tag{13}$$

Для функции W_1 имеем

$$dW_1 = \frac{\partial W_1}{\partial q_i}\, dq_i + \frac{\partial W_1}{\partial Q_i}\, dQ_i + \frac{\partial W_1}{\partial t}\, dt. \tag{14}$$

Подставляя это выражение для dW_1 в уравнение (12б) вместо dW, получаем

$$p_i dq_i - P_i dQ_i = \frac{\partial W_1}{\partial q_i}\, dq_i + \frac{\partial W_1}{\partial Q_i} dQ_i + \left(\frac{\partial W_1}{\partial t} + H - \tilde{H}\right) dt$$

и, следовательно,

$$p_i = \frac{\partial W_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_i} \tag{15}$$

и

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial W_1}{\partial t}. \tag{16}$$

$2n+1$ уравнений (уравнения (15) и (16)) образуют новую каноническую систему $2n$ переменных и новый гамильтониан. Если производящая функция не зависит от времени, то, конечно,

$$\tilde{H} = H$$

и гамильтониан является инвариантом преобразования.

Так как $W_1 = W_1(q, Q, t)$, то из уравнений (15) в общем случае получаем после вычисления частных производных

$$p_i = p_i(q, Q, t) \tag{17}$$

и

$$P_i = P_i(q, Q, t). \tag{18}$$

Поэтому нужно решить уравнение (17) относительно Q_i:

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \tag{19}$$

и подставить эти соотношения в уравнение (18):

$$P_i = P_i(q, p, t), \tag{20}$$

для того, чтобы выразить новые переменные через старые. Аналогичную процедуру нужно выполнить и для нового гамильтониана, так как результат, получаемый из уравнения (16), вообще имеет вид

$$\tilde{H} = \tilde{H}(q, p, Q, t), \tag{21}$$

тогда как канонические уравнения движения Гамильтона (9) требуют, чтобы гамильтониан имел формул

$$\tilde{H}=\tilde{H}(Q,\ P,\ t). \tag{22}$$

Произведя инверсирование уравнений (19) и (20) и подставив результаты в уравнение (21), получим гамильтониан в требуемой форме (22).

Мы предполагаем, что якобиан преобразования и все четыре его низших определителя $\partial Q_i/\partial q_j, \ldots, \partial P_i/\partial p_j$ отличны от нуля. Первое условие, которое может быть выражено либо первыми частными производными от новых переменных по старым переменным, либо вторыми частными производными от функции W, удовлетворяется, и можно показать, что определитель Якоби канонических преобразований имеет значение, равное единице.

Аналогичные рассуждения можно провести и для трех других производящих функций (W_2, W_3 и W_4), которые, как можно показать, связаны с функцией W_1 следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} W_2&=W_1+Q_iP_i,\\ W_3&=W_1-q_ip_i,\\ W_4&=W_1+Q_iP_i-q_ip_i. \end{aligned} \tag{22a}$$

Уравнения преобразования приводятся в табл. I.

Таблица 1. Канонические преобразования в фазовом пространстве

	$q_i=$	$p_i=$	$Q_i=$	$P_i=$	$\tilde{H}-H=$
$W_1(q_i, Q_i, t)$		$\dfrac{\partial W_1}{\partial q_i}$		$-\dfrac{\partial W_1}{\partial Q_i}$	$\dfrac{\partial W_1}{\partial t}$
$W_2(q_i, P_i, t)$		$\dfrac{\partial W_2}{\partial q_i}$	$\dfrac{\partial W_2}{\partial P_i}$		$\dfrac{\partial W_2}{\partial t}$
$W_3(p_i, Q_i, t)$	$-\dfrac{\partial W_3}{\partial p_i}$			$-\dfrac{\partial W_3}{\partial Q_i}$	$\dfrac{\partial W_3}{\partial t}$
$W_4(p_i, P_i, t)$	$-\dfrac{\partial W_4}{\partial p_i}$		$\dfrac{\partial W_4}{\partial P_i}$		$\dfrac{\partial W_4}{\partial t}$

Рассмотрим для примера две первых строки таблицы:

$$P_i=-\frac{\partial W_1}{\partial Q_i},\quad p_i=\frac{\partial W_1}{\partial q_i},$$
$$Q_i=-\frac{\partial W_2}{\partial P_i},\quad p_i=\frac{\partial W_2}{\partial q_i}.$$

Взяв производные от $W_2=W_1+Q_iP_i$, читатель легко сможет убедиться в правильности этих соотношений.

Заметим, что для $r=1,\ldots,4$ имеем

$$\tilde{H}=H+\frac{\partial W_r}{\partial t}$$

и соотношение между новым и старым гамильтонианами, найденное для W_1 (уравнение (16)), применимо для всех четырех производящих функций.

Специальные и важные преобразования получаются при билинейных производящих функциях. Для первой производящей функции имеем

$$W_1(q_i,\ Q_i,\ t)=q_iQ_i,$$

откуда

$$Q_i=p_i,\quad P_i=-q_i.$$

Следовательно, новая и старая переменные «асимметрично заменяют друг друга».

Специализация второй производящей функции,

$$W_2(q_i,\ P_i,\ t)=q_iP_i$$

приводит к тождественному преобразованию

$$Q_i=q_i,\quad P_i=p_i.$$

Производящая функция $W_3(p_i,\ Q_i,\ t)=p_iQ_i$ дает тот же результат с отрицательным знаком. С другой стороны, следует заметить, что если $W_3=p_iQ_i$ есть производящая функция, то ясно, что $W_3=-p_iQ_i$ тоже будет производящей функцией. Последняя снова дает тождественное преобразование.

И, наконец, производящая функция $W_4(p_i,\ P_i,\ t)=p_iP_i$, как и первая производящая функция, приводит к асимметричной замене.

Теперь, после того как мы кратко изложили основу динамики Гамильтона и канонические преобразования в фазовом пространстве, мы можем обобщить полученные результаты на случай «расширенного фазового пространства», или «пространства состояний и энергии».

§ 6.4. Расширенное фазовое пространство

Вводя время в качестве $(n+1)$-й обобщенной координаты, мы получаем сопряженный с этой координатой импульс, равный $-H$. Динамическая система с n степенями свободы теперь будет представляться $2n+2$ переменными в расширенном фазовом пространстве, где координатами будут

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n,\ q_{n+1},$$

и

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ p_{n+1},$$

причем $q_{n+1}=t$ и $p_{n+1}=-H$.

Канонические преобразования теперь будут включать преобразование временн, поскольку в расширенном фазовом пространстве время есть одна нз обобщенных координат.

Для того чтобы сделать результаты более яснымн и получить возможность вывести принцип Гамильтона в расширенном фазовом пространстве, введем другую систему обозначений. Рассмотрим динамическую систему с n степенямн свободы с обобщеннымн координатами $q_1, \ldots, q_n$ и импульсами $p_1, \ldots, p_n$. Пусть

$$q_\rho = x_\rho,\ p_\rho = y_\rho \text{ для } \rho = 1, \ldots, n \tag{23а}$$

и

$$t = x_{n+1},\ -H = y_{n+1}. \tag{23б}$$

При такнх обозначениях мы вводим $(n+1)$-векторы x_i и y_i как систему представления в расширенном фазовом пространстве $(i=1, \ldots, n+1)$, оставляя n-векторы q_ρ и p_ρ для фазового пространства $(\rho=1, \ldots, n)$.

В фазовом пространстве принцип Гамильтона, естественно, может быть применен к

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_\rho p_\rho - H)\, dt = 0,$$

где, как и ранее, использовано сокращенное обозначение суммирования:

$$\dot{q}_\rho p_\rho = \sum_{\rho=1}^{n} \dot{q}_\rho p_\rho.$$

Введем теперь спецнальный параметр w, чтобы можно было различать новую $(n+1)$-ую координату $t=x_{n+1}$ и независимую переменную $t=w$. Тогда принцнп Гамильтона можно будет записать в виде

$$\delta \int_{w_1}^{w_2} \left(y_\rho \frac{dx_\rho}{dw} - H \frac{dt}{dw} \right) dw = 0.$$

С помощью уравнений (23б) получаем

$$\delta \int_{w_1}^{w_2} \sum_{i=1}^{n+1} y_i \frac{dx_i}{dw}\, dw = 0. \tag{24}$$

Это равенство выражает принцип Гамильтона в расширенном фазовом пространстве.

В этой связи следует сделать два следующих замечания. Во-первых, читатель вероятно обратил внимание на простоту и симметрию этого результата. Это две характерные особенности любой операции в рамках формалистической динамики, имеющие первостепенную важность. Во-вторых, хочется подчеркнуть важность уравнения (24). Обобщение канонических преобразований требует новой формулировки и обобщения принципа Гамильтона, так как понятие производящей функции вводится посредством принципа Гамильтона в фазовом пространстве (уравнение (10)). Производящие функции в расширенном фазовом пространстве вводятся аналогичным образом посредством уравнения (24), которое соответствует уравнению (10).

Покажем теперь, что уравнения движения в расширенном фазовом пространстве имеют вид

$$\frac{dx_i}{dw}=\frac{\partial\Gamma}{\partial y_i} \quad \text{и} \quad \frac{dy_i}{dw}=-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}, \tag{25}$$

где $i=1, 2, \ldots, n, n+1$, $w=t$ и

$$\Gamma=y_{n+1}+\gamma(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_n), \tag{26}$$

здесь

$$\gamma(q_1, \ldots, q_n, t, p_1, \ldots, p_n)=H. \tag{27}$$

Так как $y_{n+1}=-H$, то из уравнения (26) следует, что гамильтониан в расширенном фазовом пространстве равен нулю, $\Gamma=0$, и поэтому нужно всегда помнить о различии между переменной H и функцией Гамильтона H. Эта двойная роль H, однако, не приводит к путанице в приложениях, что достаточно ясно показывают приводимые в следующем параграфе примеры.

Проверить уравнение (25) для $i=n+1$ достаточно просто, так как для этого случая мы имеем

$$\frac{dx_{n+1}}{dw}=\frac{\partial\Gamma}{\partial y_{n+1}} \quad \text{и} \quad \frac{dy_{n+1}}{dw}=-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_{n+1}}$$

или

$$\frac{dt}{dw}=\frac{\partial\Gamma}{\partial y_{n+1}}=1 \quad \text{и} \quad \frac{d(-H)}{dw}=-\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Следовательно, $t=w+\text{const}$ и

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{28}$$

Это уравнение мы уже имели раньше, см. уравнение (7). На этом проверка уравнения (25) для $i=n+1$ заканчивается. Остается доказать уравнения (25) для $i=1, \ldots, n$. Левая

часть первого уравнения равна

$$\frac{dx_i}{dw}=\frac{dq_i}{dw}=\frac{dq_i}{dt},$$

а правая часть равна

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial y_i}=\frac{\partial\Gamma}{\partial p_i}=\frac{\partial\nu}{\partial p_i}=\frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Следовательно, из первого уравнения (25) для $i=1,\ldots,n$ получаем

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Это есть первая система уравнений движения Гамильтона (сравните с уравнением (5)).

Левая часть второго уравнения (25) равна

$$\frac{dy_i}{dw}=\frac{dp_i}{dw}=\frac{dp_i}{dt},$$

а правая часть равна

$$-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}=-\frac{\partial\Gamma}{\partial q_i}=-\frac{\partial\nu}{\partial q_i}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Следовательно, из второй системы уравнений (25) находим

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Это есть вторая система уравнений движения Гамильтона (сравните с уравненнем (6)).

На этом мы заканчиваем проверку уравнений (25).

Канонические преобразования в расширенном фазовом пространстве основываются на уравнении (24). Модифицированная форма принципа Гамильтона в старых переменных $x_1,\ldots,x_{n+1}$, $y_1,\ldots,y_{n+1}$ записывается следующим образом:

$$\delta\int_{w_1}^{w_2}\left(y_i\frac{dx_i}{dw}\right)dw=0. \tag{29}$$

После выполнения канонического преобразования она принимает вид

$$\delta\int_{w_1}^{w_2}\left(Y_i\frac{dX_i}{dw}\right)dw=0. \tag{30}$$

Заметим, что две из старых переменных имеют особый смысл: $x_{n+1}=t$ и $y_{n+1}=-H$. После преобразования эти особенности переменных, имеющих индекс $n+1$, исчезают, так как в общем случае при преобразовании физический смысл переменных не сохраняется. Кроме того, заметим, что хотя $x_{n+1}=t$ и, следо-

вательно, $w=t+\text{const}$, или $w=x_{n+1}+\text{const}$, переменная X_{n+1} вообще не связана с параметром w столь простым образом. Причина того, что при выводе уравнения (24) мы в качестве нового параметра ввели w, теперь становится более ясной. Мы подвергаем t каноническому преобразованию как $(n+1)$-ю координату, тогда как w, конечно, остается нашим параметром, который сам не меняется при каноническом преобразовании.

Вычитая уравнение (30) из уравнения (29), получаем основную формулу для производящей функции в $(2n+2)$-мерном расширенном фазовом пространстве, аналогичную уравнению (12), которое, однако, применялось только к первоначальному $2n$-мерному фазовому пространству. Результат вычитания равен

$$y_i dx_i - Y_i dX_i = dW, \tag{31}$$

где W в принципе зависит от $2n+2$ старых переменных, $2n+2$ новых переменных и параметра w, т. е. всего от $4n+5$ переменных. Благодаря $2n+2$ соотношениям между старыми и новыми переменными число независимых переменных в действительности равно всего лишь $2n+3$. Этот факт, аналогично уравнениям (13), приводит нас к четырем производящим функциям, которые идентичны с производящими функциями, данными в уравнении (13), за исключением того, что вместо независимой переменной t мы имеем w. Кроме того, заметим, что $i=1, \ldots, n+1$. Следовательно, табл. I применима также и в расширенном фазовом пространстве.

Ниже приводятся примеры, служащие двум целям. Они способствуют лучшему пониманию приложения понятия расширенного фазового пространства к ограниченной задаче, а также делают более ясной изложенную нами методику.

§ 6.5. Примеры приложения динамики Гамильтона в расширенном фазовом пространстве

Рассмотрим динамическую систему с двумя степенями свободы, с гамильтонианом, не зависящим от времени, который в четырехмерном фазовом пространстве имеет следующий вид:

$$H=H(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

Уравнения движения образуют систему четвертого порядка

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i=1, 2. \tag{32}$$

Каноническое преобразование, которое мы здесь выполним, называется расширенным точечным преобразованием; оно

выражается уравнением

$$W_3 = -[p_1 f_1(Q_1, Q_2) + p_2 f_2(Q_1, Q_2)]. \tag{33}$$

Отсюда приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(Q_1, Q_2), \quad P_1 = p_1 \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} + p_2 \frac{\partial f_2}{\partial Q_1}, \\ q_2 &= f_2(Q_1, Q_2), \quad P_2 = p_1 \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} + p_2 \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} \end{aligned} \tag{34}$$

и $\tilde{H} = H$.

Заметим, что уравнения преобразования (34) непосредственно связывают новые и старые обобщенные координаты и не содержат импульсов. Поэтому уравнения $q_i = f_i(Q)$ преобразуют точки плоскости $q_1 q_2$ в точки плоскости $Q_1 Q_2$.

В расширенном 6-мерном фазовом пространстве для этой же динамической системы мы имеем

$$\Gamma = p_3 + \gamma(q_1, q_2, p_1, p_2), \tag{35}$$

где

$$p_3 = -H$$

и

$$\gamma(q_1, q_2, p_1, p_2) = H(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

Заметим, что q_3 не входит в Γ, так как первоначальный гамильтониан не зависит явно от времени.

Уравнения движения в расширенном фазовом пространстве имеют вид

$$\frac{dq_i}{dw} = \frac{\partial \Gamma}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \frac{dp_i}{dw} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, 3. \tag{36}$$

Для $i = 3$ имеем

$$\frac{dq_3}{dw} = \frac{\partial \Gamma}{\partial p_3} \quad \text{или} \quad \frac{dt}{dw} = 1$$

и

$$\frac{dp_3}{dw} = 0 \quad \text{или} \quad p_3 = \text{const}.$$

Мы видим, что тот факт, что первоначальный гамильтониан не содержит явно время, выражается равенством $p_3 = -H = \text{const}$.

Уравнения (36) в случае $i = 1, 2$, конечно, идентичны с уравнениями (32) в случае $i = 1, 2$.

Каноническое преобразование в расширенном фазовом пространстве мы теперь получим путем обобщения уравнения (33):

$$W_3 = -p_i f_i(Q_1, Q_2, Q_3), \tag{37}$$

где суммирование производится от 1 до 3.

Из табл. I находим

$$q_i = f_i(Q_1, Q_2, Q_3) \quad \text{и} \quad P_i = p_j \frac{\partial f_j}{\partial Q_i}, \tag{38}$$

где суммирование обозначено повторением индекса j.

Обозначив теперь входящие в уравнения (38) частные производные через a_{ij}, будем иметь

$$P_i = a_{ij}(Q_1, Q_2, Q_3)\, p_j$$

или

$$p_i = b_{ij}(Q_1, Q_2, Q_3)\, P_j, \tag{39}$$

где матрица (b_{ij}) есть обратная матрица $(a_{ij}) = (\partial f_j/\partial Q_i)$.

Так как функция W_3, определяемая уравнением (37), не содержит w, то

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma,$$

так что

$$\tilde{\Gamma} = p_3 + \gamma(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

куда нужно еще ввести новые переменные. Проделав это, получим

$$\tilde{\Gamma} = b_{3j} P_j + \tilde{\gamma}(Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3). \tag{40}$$

где $\tilde{\gamma}$ получается из γ с помощью первой системы уравнений (38) и уравнения (39). Первый член в уравнении (40) следует из уравнения (39), согласно которому

$$p_3 = b_{3j} P_j = b_{31} P_1 + b_{32} P_2 + b_{33} P_3.$$

Заметим, что в то время как γ зависит только от q_1, q_2, p_1 и p_2, после преобразования $\tilde{\gamma}$ будет зависеть от всех шести новых переменных.

Уравнения движения в преобразованном расширенном фазовом пространстве записываются следующим образом:

$$\frac{dQ_i}{dw} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial P_i} \quad \text{и} \quad \frac{dP_i}{dw} = -\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial Q_i}. \tag{41}$$

Для $i = 3$ они принимают вид

$$\frac{dQ_3}{dw} = b_{33}(Q_1, Q_2, Q_3) + \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial P_3} \tag{42}$$

и

$$\frac{dP_3}{dw} = -P_j \frac{\partial b_{3j}(Q_1, Q_2, Q_3)}{dQ_3} - \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial Q_3}. \tag{43}$$

Величина w не преобразуется, так что уравнение $dw=dt$ остается справедливым, и уравнение (42) связывает старую временную переменную t с переменной Q_3. Последнюю можно рассматривать как новую временну́ю переменную, но такая терминология не обязательно передает физический смысл.

Рассмотрим в этом примере три специальные случая, представляющие для нас интерес.

А. Если

$$\frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial P_3}=0, \tag{44}$$

т. е. если первоначальный гамильтониан и каноническое преобразование, представленное уравнением (37), таковы, что выполняется верхнее соотношение, то из уравнения (42) имеем

$$dQ_3=b_{33}(Q_1, Q_2, Q_3)\,dt. \tag{45}$$

Мы видим, что на преобразование времени оказывают влияние все три обобщенные координаты.

Б. Если функции f_i, определяющие преобразование (уравнение (37)), задать в виде

$$\begin{aligned} f_1&=f_1(Q_1, Q_2),\\ f_2&=f_2(Q_1, Q_2),\\ f_3&=f_3(Q_3), \end{aligned} \tag{46}$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} q_1&=q_1(Q_1, Q_2),\\ q_2&=q_2(Q_1, Q_2),\\ q_3&=q_3(Q_3) \end{aligned} \tag{47}$$

и

$$\begin{aligned} P_1&=p_1\frac{\partial f_1}{\partial Q_1}+p_2\frac{\partial f_2}{\partial Q_1},\\ P_2&=p_1\frac{\partial f_1}{\partial Q_2}+p_2\frac{\partial f_2}{\partial Q_2},\\ P_3&=p_3\frac{\partial f_3}{\partial Q_3}. \end{aligned} \tag{48}$$

Два первых уравнения (47) и два первых уравнения (48) идентичны с системой уравнений (34) в первоначальном фазовом пространстве, и система q_1, q_2, p_1, p_2 преобразуется в систему Q_1, Q_2, P_1, P_2, причем переменные q_3, p_3, Q_3 и P_3 в нее не входят.

Новый гамильтониан в расширенном фазовом пространстве принимает теперь следующий вид:

$$\tilde{\Gamma}=P_3 f_4(Q_3)+\tilde{\gamma}(Q_1, Q_2, P_1, P_2), \tag{49}$$

где

$$f_4(Q_3)=\left(\frac{df_3}{dQ_3}\right)^{-1}. \tag{50}$$

Уравнения движения в преобразованном расширенном фазовом пространстве имеют вид уравнений (41), которые для $i=3$ принимают форму

$$\frac{dQ_3}{dw}=f_4(Q_3) \quad \text{и} \quad \frac{dP_3}{dw}=-P_3\frac{df_4}{dQ_3}. \tag{51}$$

Первое уравнение (51) определяет преобразование времени, оно идентично с третьим уравнением (47), так как

$$w=\int\frac{dQ_3}{f_4(Q_3)}$$

или

$$t=f_3(Q_3).$$

Из второго уравнения (51) после объединения его с первым получаем

$$\frac{dP_3}{dw}=-\frac{P_3}{f_4}\frac{df_4}{dw},$$

откуда $P_3f_4(Q_3)=\text{const}$, что и следовало ожидать, так как $P_3f_4=p_3=-H$ и H не содержит явно время.

Заметим, что

$$P_3=-\frac{H}{f_4(Q_3)}$$

не является величиной постоянной, несмотря на то что $p_3=\text{const}$. Действительно,

$$P_3=-H\frac{df_3}{dQ_3},$$

т. е. новый «импульс» P_3 и старый «импульс» p_3 связаны между собой посредством преобразования времени, или посредством старой «координаты» q_3 и новой «координаты» Q_3. Кавычки мы здесь поставили для того, чтобы подчеркнуть степень обобщения, так как ясно, что старый «импульс» представляет собой гамильтониан, а старая «координата» — время.

В. Если мы хотим, чтобы преобразование касалось только времени, то зададим следующие функции f_i.

Примем $f_1=Q_1$, $f_2=Q_2$ и $f_3=\int f(Q_3)\,dQ_3$ при произвольной функции $f(Q_3)$. Производящей функцией этого преобразования будет

$$W_3=-\left[p_1Q_1+p_2Q_2+p_3\int f(Q_3)\,dQ_3\right]. \tag{52}$$

Она дает тождественное преобразование для переменных с индексами 1 и 2, так как, применяя уравнения преобразования (34), получаем

$$q_1 = Q_1, \quad q_2 = Q_2,$$
$$p_1 = P_1, \quad p_2 = P_2.$$

Для переменных с индексом 3 имеем

$$q_3 = \int f(Q_3)\, dQ_3 \quad \text{и} \quad P_3 = p_3 f(Q_3).$$

Таким образом, время преобразовывается согласно уравнению

$$dt = f(Q_3)\, dQ_3. \tag{53}$$

Новый гамильтониан принимает вид

$$\tilde{\Gamma} = \frac{P_3}{f(Q_3)} + \gamma(Q_1, Q_2, P_1, P_2),$$

где знак тильда над γ опущен, так как для q_1, q_2, p_1, p_2 мы имеем тождественное преобразование.

Уравнения движения снова имеют вид (41), и мы получаем

$$\frac{\partial \gamma}{\partial P_i} = \frac{dQ_i}{dw} \quad \text{и} \quad -\frac{\partial \gamma}{\partial Q_i} = \frac{dP_i}{dw} \quad \text{для} \quad i = 1 \text{ и } 2, \tag{54}$$

$$\frac{1}{f(Q_3)} = \frac{dQ_3}{dw} \quad \text{и} \quad -P_3 \frac{d}{dQ_3}\frac{1}{f(Q_3)} = \frac{dP_3}{dw} \quad \text{для} \quad i = 3. \tag{55}$$

Первое уравнение (55) идентично с уравнением (53), а второе, как и следовало ожидать, показывает, что $p_3 = \text{const}$. Более интересными являются уравнения (54). Замечая, что $dw = dt$, а функция γ представляет собой первоначальный гамильтониан, можем уравнения (54) записать в виде

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt} \quad \text{и} \quad -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt}. \tag{56}$$

Следует помнить, что координаты и импульсы, обозначенные строчными буквами и заглавными буквами, для $i = 1, 2$ одинаковы.

С помощью уравнения (53) система Гамильтона (56) может быть приведена к виду

$$\frac{\partial H^*}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dT} \quad \text{и} \quad -\frac{\partial H^*}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dT}, \tag{57}$$

где $H^* = Hf(Q_3)$, а $Q_3 = T$ есть новая временна́я переменная.

Уравнения (57) образуют каноническую систему с новым гамильтонианом H^* и новой временно́й переменной T.

Рассматривая первоначальный гамильтониан в форме (35) и образуя новую функцию Γ^* путем умножения уравнения (35)

на $f(Q_3)$, получаем

$$\Gamma^* = f(Q_3)\,\Gamma = p_3 f(Q_3) + f(Q_3)\,\gamma(q_1, q_2, p_1, p_2) \tag{58}$$

или

$$\Gamma^* = P_3 + f(Q_3)\,\gamma(Q_1, Q_2, P_1, P_2). \tag{59}$$

Уравнения движения в преобразованном расширенном фазовом пространстве по аналогии с уравнениями (57) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \Gamma^*}{\partial P_i} = \frac{dQ_i}{dT} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Gamma^*}{\partial Q_i} = -\frac{dP_i}{dT}. \tag{60}$$

Отсюда для $i=3$ получаем

$$1 = 1 \quad \text{и} \quad -\gamma \frac{df}{dQ_3} = \frac{dP_3}{dT}$$

или $p_3 f(Q_3) = P_3$.

Для $i=1$ и 2 снова получаем уравнения (57).

Заменяя Γ на $\Gamma^* = f(Q_3)\Gamma$ и вводя с помощью уравнения $dt = f(Q_3)\,dQ_3$ новую временну́ю переменную $Q_3 = T$, мы сохраняем канонические формы уравнений.

§ 6.6. Обобщенные преобразования времени

В предыдущем примере (пункт В) преобразование времени включало только новую и старую временные переменные. Необходимое обобщение для задач регуляризации заключается в приведении уравнения преобразования к виду

$$dt = f(q_1, q_2)\,dT. \tag{61}$$

Мы покажем, что если Γ заменить на $\Gamma^* = f(q_1, q_2)\,\Gamma$, то получим следующую каноническую систему:

$$\frac{dq_i}{dT} = \frac{\partial \Gamma^*}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \frac{dp_i}{dT} = -\frac{\partial \Gamma^*}{\partial q_i}, \tag{62}$$

где, как и раньше, первоначальные переменные q_1, q_2, p_1, p_2 не преобразовываются.

Проверку начнем с $i=3$:

$$\frac{dq_3}{dT} = f(q_1, q_2) \quad \text{или} \quad dt = f(q_1, q_2)\,dT,$$

$$\frac{dp_3}{dT} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dp_3}{dt} f(q_1, q_2) = 0,$$

так что $p_3 = \text{const}$.

Здесь мы использовали, что

$$\Gamma = p_3 + \gamma(q_1, q_2, p_1, p_2)$$

и

$$\Gamma^* = p_3 f(q_1, q_2) + f(q_1, q_2)\,\gamma(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

Для $i=1$ или 2 из первого уравнения (62) имеем

$$\frac{dq_i}{dT} = f(q_1, q_2)\frac{\partial \gamma}{\partial p_i} \quad \text{или} \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

а из второй системы уравнений —

$$\frac{dp_i}{dT} = -p_3\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial f\gamma}{\partial q_i}$$

или

$$\frac{dp_i}{dT} = -(p_3+\gamma)\frac{\partial f}{\partial q_i} - f\frac{\partial \gamma}{\partial q_i},$$

что можно записать в виде

$$\frac{dp_i}{dT} = -f\frac{\partial \gamma}{\partial q_i},$$

так как вдоль решения $p_3+\gamma=\Gamma=0$.

Наконец, последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

На этом доказательство заканчивается.

Заметим, что в общем случае описанный выше метод не может быть применен в фазовом пространстве, и поэтому введение понятия расширенного фазового пространства играет существенную роль. Для того чтобы показать это, примем гамильтониан динамической системы с n степенями свободы равным $H(q, p)$. Каноническими уравнениями движения будут

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{63}$$

Пусть преобразование времени определяется уравнением

$$dt = f(q_1, \ldots, q_n)\,dT. \tag{64}$$

Для того чтобы подставить уравнение (64) в уравнение (63), введем обозначения

$$\dot{q}_i = q_i' f^{-1} \quad \text{и} \quad \dot{p}_i = p_i' f^{-1},$$

где точками обозначено дифференцирование по t, штрихами — дифференцирование по T, а f^{-1} обозначает функцию, обратную $f(q_1, \ldots, q_n)$.

Тогда уравнения (63) примут вид

$$q_i' = f\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad p_i' = -f\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{65}$$

Для того чтобы сохранить канонический характер этих уравнений, нужно, чтобы

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H^*}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i}. \tag{66}$$

Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти функцию H^*, удовлетворяющую уравнениям

$$\frac{\partial H^*}{\partial p_i} = f\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial H^*}{\partial q_i} = f\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{67}$$

Так как

$$\frac{\partial^2 H^*}{\partial p_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 H^*}{\partial q_j \partial p_i},$$

то из уравнений (67) имеем

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(f\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(f\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Как следует из уравнения (64), f зависит только от q_i, следовательно, $\partial f/\partial p_i = 0$ и

$$\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial q_j} = 0,$$

так как в общем случае

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \neq 0.$$

Таким образом, f постоянно и преобразование времени является линейным — случай тривиальный и неинтересный. (Заметим, что случай $f(p_1, \ldots, p_n)$ приводит к аналогичному результату.)

Важным случаем для приложений является преобразование времени, определяемое уравнением (61), для которого, как было показано ранее, представление в фазовом пространстве испытывает недостаток в общности.

Итак, подведем краткий итог. Если заданный гамильтониан Γ в расширенном фазовом пространстве преобразовывается в $\Gamma^* = f(q_1, q_2)\Gamma$ и одновременно на основании уравнения $dt = f(q_1, q_2)dT$ вводится новая временная переменная T, то канонический характер уравнений при этом сохраняется. Уравнения

движения в первоначальной системе имеют вид

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial q_i},$$

а в преобразованной системе —

$$\frac{dq_i}{dT} = \frac{\partial \Gamma^*}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \frac{dp_i}{dT} = -\frac{\partial \Gamma^*}{\partial q_i}.$$

§ 6.7. Замечания

Изложение гл. 6 не претендует на полноту, единственная цель ее — это познакомить читателей с понятиями и методами расширенного фазового пространства.

По затронутым в главе вопросам имеется достаточное количество учебников и научных трудов на различных уровнях. В первую очередь здесь следует назвать известные книги Уиттекера [1] и Парса [2]. По вопросам, изложенным в §§ 6.1—6.3, можно рекомендовать учебник Голдстейна [3], а по материалу, содержащемуся в §§ 6.4—6.6, — статью Синга [4]. Приложение динамики Гамильтона и каноннческих преобразований к небесной механике рассмотрено в книге Брауэра и Клеменса [5, стр. 530]. Читателям, имеющим склонность к аналитическим исследованиям, можно рекомендовать работы Винтнера [6] и Зигеля [6а].

Термин «расширенное фазовое пространство» ввел Ланцош [7], Синг отдает предпочтение термину «пространство состояний и энергии».

Зависимость гамильтониана от координат и импульсов в научной литературе и учебниках обозначается по-разному, например $H(q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$, или $H(q_i, p_i)$, или $H(q, p)$, или же $H(\mathrm{q}, \mathrm{p})$. Эти формы обозначения применяются в зависимости от того, как формулируется рассматриваемая задача.

Четыре типа производящих функций введены в § 6.3 исключительно ради удобства. Поскольку уравнения (22а) связывают производящие функции W_2, W_3 и W_4 с W_1, достаточно применить только одну из четырех функций. Этот метод предложили Брауэр и Клеменс [5].

В § 6.4 рассматривается расширенное фазовое пространство и $2n+2$ его переменных. Параграф носит вводный характер, основное внимание в нем уделяется идеям и методам, которые используются в дальнейшем, полнотой изложения он не отличается. Уравнения движения (25) в переменных расширенного фазового пространства можно вывести из уравнений (24) и (26). Однако доказательство, приведенное в тексте, нам кажется более полезным для ознакомления читателей с операциями в фазовом пространстве.

Пример, связанный с расширенным точечным преобразованием, приведенный в его общей форме в § 6.5, был применен Оллонгреном [8] к задаче звездной динамики: преобразование галактических орбит в фигуры Лиссажу. В самом деле, канонические преобразования, способные преобразовывать время, а также координаты и импульсы, имеют значительно более широкую область приложения, чем осуществление регуляризации уравнений движения Гамильтона ограниченной задачи.

В конце пункта Б, § 6.5, указывается на спорность терминов «координаты» и «импульсы», когда они используются в описании канонических переменных после нескольких преобразований. Такая точка зрения была высказана Браузром и Клеменсом [5]. С этим вопросом мы вновь встретимся в пункте 7.7.3.

В § 6.6 канонические преобразования приводятся к виду, удобному для преобразований, с помощью которых осуществляется регуляризация. Большинство авторов, применяющих каноническое преобразования независимой переменной, редко следуют формалистическому методу, описанному в § 6.6 и выраженному уравнениями (61) и (62). Тем не менее основная идея содержится почти во всех трудах авторов, начиная от Леви-Чивита [9] и кончая Брауэром и Клеменсом [5]. Эта фундаментальная идея иногда недостаточно хорошо формулируется. Примером может служить подстрочное примечание Биркгофа [10]. (Заметим, что в этой статье Биркгоф не рассматривает преобразований регуляризации посредством канонических методов.) § 6.5 и приведенные в нем результаты избавляют нас от необходимости специально рассматривать эти вопросы.

Читателям, желающим познакомиться с оригинальными источниками, можно рекомендовать основную статью Гамильтона [11].

§ 6.8. Литература

1. Whittaker E. T. Analytical Dinamics.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1937, 4th ed., p. 263. Reprinted by Dover, New York, 1944. [Русский перевод: Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1937.]
2. Pars L. A. A Treatise on Analytical Dynamics.— New York: Wiley, 1965. [Русский перевод: Парс Л. А. Аналитическая динамика.— М.; Наука, 1971.]
3. Goldstein H. Classical Mechanics.— Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1950, p. 215. [Русский перевод: Голдстейн Г. Классическая механика.— 1-е изд.— М.: Гостехиздат, 1957; 2-е изд.— М.: Наука, 1975.]
4. Synge J. L. Classical dynamics.— Handbuch der Physik (Flügge S., ed.). V. 3, Pt. 1. Berlin: Springer, 1960. [Русский перевод: Синг Дж. Л. Классическая динамика.— М.: Физматгиз, 1963.]
5. Brouwer D., Clemence G. M., Methods in Celestial Mechanics. New York: Academic Press, 1961. [Русский перевод: Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики.— М.: Мир, 1964.]

6. Wintner A. The Analytical Foundations of Celestial Mechanics.— Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1941. [Русский перевод: Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики,— М.: Наука, 1967.]
6а. Siegel C. L. Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin: Springer, 1956, p. 5. [Русский перевод: Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.— М.: Изд-во иностр. лит., 1959.]
7. Lanczos C. The Variational Principles of Mechanics.— Toronto, Canada: Univ. of Toronto Press, 1949, p. 199. [Русский перевод: Ланцош К. Вариационные принципы механики.— М.: Мир, 1965.]
8. Ollongren A. Construction of galactic stellar orbits similar to harmonic oscillators.— Astron. J., 1967 April, 72.
9. Levi-Civita T. Traiettorie singolari ed urti nei problema ristretto dei tre corpi.— Ann. Mat. Pura Appl., 1904, [3] 9, 1.
10. Birkhoff G. R. The restricted problem of three bodies.— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1914, 39, 1; also Collected Mathematical Papers. New York: Am. Math. Soc., 1950, v. 1, p. 682.
11. Hamilton W. R. On a general method in dynamics.— Phil. Trans. Roy. Soc. London, Pt. 2, 1834, 247. Second essay on a general method in dynamics.— Phil. Trans. Roy. Soc. London, Pt. 1, 95 (1935); see also Conway A. W. and Synge J. L. (eds). The Mathematical Papers of Sir Hamulton W. R.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1931, v. 1. Conway A. W. and McConnel A. J. (eds.). The Mathematical Papers of Sir Hamilton W. R.— London; New York: Cambridge Univ. Press, v. 2. Hamilton's basic papers are in v. 2, pp. 103 ard 162 with editorial comments on pp. 613, 622 and 623.

Глава 7

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ

§ 7.1. Введение

Целью предыдущей главы было познакомить читателей с основами динамики Гамильтона и каноническими преобразованиями в фазовом пространстве и в расширенном фазовом пространстве. Полученные там результаты мы применим здесь к ограниченной задаче.

В гл. 1 мы показали, что вращающаяся система координат имеет существенные преимущества по сравнению с неподвижной системой. Выбор соответствующей вращающейся системы позволяет получить интеграл движения. В рамках динамики Гамильтона каноническое преобразование неподвижной системы во вращающуюся позволяет исключить время, входящее явно в функцию Гамильтона, и, таким образом, превратить ее в интеграл. Данная глава начинается (§ 7.2) с описания канонического преобразования, посредством которого осуществляется переход от сидерической системы координат к синодической. Физический смысл двух систем координат и связанных с ними импульсов раскрывается в § 7.3, там же рассматривается соотношение между функцией Гамильтона и интегралом Якоби. Ради полноты изложения в § 7.4 приводятся преобразования, изменяющие положение начала координат системы.

Параграф 7.5 посвящен преобразованию синодических прямоугольных декартовых координат в полярные координаты и получению уравнений движения в полярных координатах. Другое каноническое преобразование, осуществляющее переход от полярных координат к элементам Делоне, и раскрытие физического смысла новых переменных приведено в § 7.6. В § 7.7 с помощью канонических преобразований получается несколько модификаций переменных Делоне, там же рассматриваются переменные Пуанкаре.

Последний параграф посвящен процессу регуляризации в рамках канонических преобразований. Сначала, в пункте 7.8.1 выполняется регуляризующее преобразование для задачи двух тел в шестимерном расширенном фазовом пространстве. Оно проводится в общем виде, в конце пункта подробно разбирается пример Леви-Чивита. Затем к ограниченной задаче приме-

няется процесс канонической регуляризации и результаты пункта 7.8.2 коррелируются с результатами, полученными в гл. 3.

Поскольку в теории возмущений используется динамика Гамильтона, а для решения многих новых задач существенную роль играет регуляризация, эта глава, в особенности ее пункт 7.8.2, весьма важна для случаев, когда теория возмущений применяется к задачам динамики космического полета. В частности, изложенная здесь методика с успехом может быть использована для получения так называемых межпланетных и лунных траекторий.

Биркгоф однажды отметил «почти непостижимое значение» уравнений Гамильтона. Математическое исследование этих уравнений связано с известными трудностями, вызванными недостаточной гибкостью основной группы преобразований. В связи с этим появился ряд сложных формальных математических работ. Эти работы частично предназначались для физиков, проявляющих интерес к математическим методам. Эти уравнения и связанный с ними вариационный принцип несомненно могут быть использованы в некоторых областях физики. Применение их может произвести на математиков такое же сильное впечатление, как развитие математических методов на физиков.

Судить о том, насколько все это будет способствовать исследованию лунных и межпланетных траекторий, пока еще трудно из-за недостаточного количества рассмотренных приложений.

§ 7.2. Каноническое преобразование сидерической системы в синодическую

В гл. 1 была введена неподвижная, или сидерическая, система координат X, Y и были выведены уравнения движения третьего тела в ограниченной задаче. Затем с помощью формул $\xi = X/l$, $\eta = Y/l$ (см. уравнения (39), § 1.5) мы от переменных X, Y перешли к безразмерным переменным ξ, η. Переходя теперь к обычным обозначениям обобщенных координат, положим $\xi = q_1$, $\eta = q_2$. В этих обобщенных координатах функция Лагранжа принимает вид

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \Phi(q_1, q_2, t), \tag{1}$$

где Φ — силовая функция в безразмерной форме,

$$\Phi = \frac{\mu_1}{\rho_1} + \frac{\mu_2}{\rho_2}, \tag{2}$$

а точками обозначены производные по безразмерному времени t.

Обобщенные импульсы, равные по определению $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$, получают из уравнения (1) простой вид:

$$p_1 = \dot{q}_1 \quad \text{и} \quad p_2 = \dot{q}_2,$$

т. е. представляют собой составляющие скорости относительно неподвижной системы координат.

Функция Гамильтона определяется следующим образом:

$$H = \sum_{i=1}^{2} p_i \dot{q}_i - L,$$

и, следовательно, равна

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \Phi(q_1, q_2, t). \tag{3}$$

Функция $\Phi(q_1, q_2, t)$ содержит время t в явном виде, поскольку ρ_1 и ρ_2 — функции времени (см. уравнения (42), § 1.5), и, следовательно, гамильтониан не является постоянным.

Уравнения движения Гамильтона в сидерической системе координат имеют следующий вид:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

или

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{q}_2 = p_2 \tag{4}$$

и

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

или

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}, \quad \dot{p}_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}. \tag{5}$$

Заметим, что уравнения (4) вместе с уравнениями (5) тождественны с уравнениями (40), § 1.5.

Применим теперь билинейное каноническое преобразование типа W_3 с зависящими от времени коэффициентами, представляющее равномерное вращение:

$$W_3(p_1, p_2, Q_1, Q_2, t) = -a_{ij}(t)\, p_i Q_j, \tag{6}$$

где, как и ранее, повторяющиеся индексы предполагают суммирование и где матрица

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{7}$$

представляет равномерное вращение с единичной угловой скоростью. Эта матрица тождественна с матрицей **A** (уравнение (25), § 1.4).

Согласно табл. 1, приведенной в § 6.3, формулами преобразования будут

$$q_i = -\frac{\partial W_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial W_3}{\partial Q_i}$$

и

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial W_3}{\partial t}.$$

Подставляя сюда выражение (6) для W_3, получаем

$$q_i = a_{ij} Q_j, \quad P_i = a_{ji} p_j \tag{8}$$

и

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + Q_2 P_1 - Q_1 P_2 - F(Q_1, Q_2). \tag{9}$$

Заметим, что равенство (6) может быть получено путем обращения. Мы хотим получить выражения для ρ_1 и ρ_2, которые не зависели бы явно от времени. Этому требованию должно отвечать применяемое преобразование. Так как массы m_1 и m_2 лежат на вращающейся прямой, то ρ_1 и ρ_2 не будут обнаруживать явную зависимость от времени в том случае, когда эта вращающаяся прямая является одной из координатных осей, скажем, осью Q_1 на рис. 7.1. Вторая ось, Q_2, образует с ней правую декартову систему координат; следовательно, формулами преобразования будут известные формулы, связывающие неподвижную систему q_1, q_2 с вращающейся системой Q_1, Q_2:

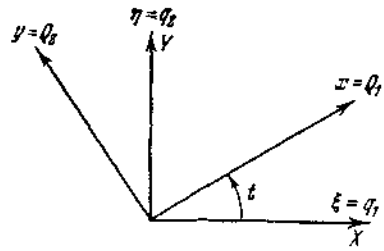


Рис. 7.1. Канонические переменные в сидерической и синодической системах координат.

$$q_1 = Q_1 \cos t - Q_2 \sin t, \quad q_2 = Q_1 \sin t + Q_2 \cos t$$

или

$$q_i = a_{ij} Q_j.$$

Так как $q_i = -\partial W_3 / \partial p_i$, то производящая функция получается с помощью метода, описанного в § 1.7. Таким образом,

$$W_3 = -\int a_{ij} Q_j dp_i + G(Q_i).$$

Если G принять здесь равным нулю, то получим выражение, тождественное с выражением (6).

Вывод уравнений (8) требует вычисления частных производных от билинейной формы W_3. После замены в уравнении (6)

индекса i на k находим

$$\frac{\partial}{\partial p_i} a_{kj} p_k Q_j = a_{kj} Q_j \delta_{ik} = a_{ij} Q_j,$$

и аналогично

$$\frac{\partial}{\partial Q_i} a_{kj} p_k Q_j = a_{kj} p_k \delta_{ij} = a_{ji} p_j.$$

Уравнения (8) можно также представнть в матричной форме

$$\mathbf{q} = \mathbf{AQ} \quad \text{и} \quad \mathbf{P} = \mathbf{A}^* \mathbf{p}, \tag{10}$$

где $\mathbf{A} = (a_{ij})$, а $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$, так как инверсия ортогональной матрицы $\mathbf{A}$ равносильна ее транспонированию. Таким образом, обращая уравнения (8), получаем

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^* \mathbf{q} \quad \text{и} \quad \mathbf{p} = \mathbf{AP}. \tag{11}$$

Проверка уравнения (9) требует вычисления

$$\frac{\partial}{\partial t}(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{A}^* \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого соотношения и равенства $\mathbf{p} = \mathbf{AP}$ находим

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} = -\mathbf{p} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{Q} = -\mathbf{PA}^* \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{Q}$$

или

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} = Q_2 P_1 - Q_1 P_2.$$

Следовательно,

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \Phi(q_1, q_2, t) + Q_2 P_1 - Q_1 P_2, \tag{12}$$

где в первый и второй члены правой части нужно еще ввести новые переменные. Для этого, воспользовавшись равенством $\mathbf{p} = \mathbf{AP}$, выразим сначала $p_1^2 + p_2^2 = \mathbf{p}^2$ в новых переменных. Тогда будем иметь

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{APAP} = \mathbf{PA}^*\mathbf{AP} = \mathbf{P}^2, \tag{13}$$

т. е. величина импульса является инвариантом преобразования.

Аналогично $\mathbf{q}^2 = \mathbf{Q}^2$, и, следовательно, из уравнений (42) § 1.5 имеем

$$\rho_1^2 = (q_1 - \mu_2 \cos t)^2 + (q_2 - \mu_2 \sin t)^2 = \mathbf{Q}^2 + \mu_2^2 - 2\mu_2 Q_1,$$
$$\rho_2^2 = (q_1 + \mu_1 \cos t)^2 + (q_2 + \mu_1 \sin t)^2 = \mathbf{Q}^2 + \mu_1^2 + 2\mu_1 Q_1$$

или

$$\rho_1^2 = Q_2^2 + (Q_1 - \mu_2)^2, \quad \rho_2^2 = Q_2^2 + (Q_1 + \mu_1)^2, \tag{14}$$

где $\mu_1 = 1 - \mu$, а $\mu_2 = \mu$.

Так как ρ_1 и ρ_2, выраженные в новых переменных, не содержат явно время, то $\Phi(q_1, q_2, t) = \tilde{F}(Q_1, Q_2)$ и новый гамильтониан $\tilde{H}$ не зависит от времени.

Для полноты изложения и удобства напишем функцию $\Phi(q_1, q_2, t)$ и $\tilde{F}(Q_1, Q_2)$ в подробном виде:

$$\Phi(q_1, q_2, t) = \mu_1 [(q_1 - \mu_2 \cos t)^2 + (q_2 - \mu_2 \sin t)^2]^{-1/2} + \\ + \mu_2 [(q_1 + \mu_1 \cos t)^2 + (q_2 + \mu_1 \sin t)^2]^{-1/2} \tag{15}$$

и

$$\tilde{F}(Q_1, Q_2) = \mu_1 [(Q_1 - \mu_2)^2 + Q_2^2]^{-1/2} + \mu_2 [(Q_1 + \mu_1)^2 + Q_2^2]^{-1/2}. \tag{16}$$

На этом заканчивается вывод нового гамильтониана

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + Q_2 P_1 - Q_1 P_2 - \tilde{F}(Q_1, Q_2),$$

и мы можем написать уравнения движения:

$$\dot{Q}_1 = P_1 + Q_2, \quad \dot{Q}_2 = P_2 - Q_1, \tag{17}$$

$$\dot{P}_1 = P_2 + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q_1}, \quad \dot{P}_2 = -P_1 + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q_2}. \tag{18}$$

§ 7.3. Интерпретация новых переменных

Неподвижная, или сидерическая, система координат ξ, η с соответствующими каноническими переменными q_1, q_2, p_1, p_2 имеет гамильтониан, который зависит явно от времени.

В § 1.5 было показано, что введение равномерно вращающейся, или синодической системы координат x, y позволяет получить не зависящий от времени гамильтониан, который тесным образом связан с интегралом Якоби. Такое преобразование осуществляется с помощью производящей функции, определяемой уравнением (6), и сидерическая система q_1, q_2 преобразовывается в синодическую систему Q_1, Q_2. Импульсы p_1, p_2 в неподвижной системе представляют собой просто скорости, точнее составляющие скорости третьего тела относительно сидерической системы, вдоль осей ξ, η (см. уравнения (4)). С другой стороны, во вращающейся (синодической) системе уравнения (17) показывают, что $\dot{Q}_1$ и $\dot{Q}_2$ являются составляющими относительной скорости (относительно вращающейся системы) вдоль вращающихся осей. Импульсы P_1, P_2 представляют собой составляющие скорости (относительно неподвижной системы) вдоль вращающихся осей.

При выражении скорости третьего тела во вращающейся системе или в неподвижной системе никаких трудностей не возникает. Кроме того, вектор скорости можно разложить на составляющие вдоль неподвижных осей или вдоль вращающихся осей. Имеются четыре возможности:

а) скорость относительно неподвижной системы, составляющие вдоль неподвижных осей: $\dot{q}_1=p_1$, $\dot{q}_2=p_2$,

б) скорость относительно неподвижной системы, составляющие вдоль вращающихся осей: $P_1=\dot{Q}_1-Q_2$, $P_2=\dot{Q}_2+Q_1$,

в) скорость относительно вращающейся системы, составляющие вдоль неподвижных осей: $\dot{q}_1+q_2$, $\dot{q}_2-q_1$,

г) скорость относительно вращающейся системы, составляющие вдоль вращающихся осей $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_2$.

В векторной форме имеем

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}+\mathbf{k}\times\mathbf{r}, \tag{19}$$

где $\mathbf{v}$ есть вектор скорости относительно неподвижной системы, $\mathbf{r}$ — вектор скорости относительно вращающейся системы, $\mathbf{k}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости $\xi\eta$ и образующий правую систему, и $\mathbf{k}\times\mathbf{r}$ — вектор скорости вращающейся системы в $\mathbf{r}$.

Это векторное уравнение можно спроектировать на неподвижные оси, соответственно пунктам а) и в), или на вращающиеся оси, соответственно пунктам б) и г).

Величина скорости является инвариантом преобразования, так что $p^2=P^2$, что было показано раньше: «скорость» относительно неподвижной системы одна и та же, независимо от того, направлены ли составляющие вдоль неподвижных осей или вдоль вращающихся осей (сравните с пунктами а) и б)). То же самое справедливо для скоростей относительно вращающейся системы:

$$(\dot{q}_1+q_2)^2+(\dot{q}_2-q_1)^2=\dot{Q}_1^2+\dot{Q}_2^2,$$

соответственно пунктам в) и г). Подробности вывода верхнего уравнения мы опускаем, предоставляя читателям разобраться в этом самостоятельно. Заметим лишь, что правую часть его можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{Q}}^2=\left(\frac{d}{dt}\mathbf{A}^*\mathbf{q}\right)^2,$$

что можно раскрыть и упростить на основании равенств $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^*=\mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}^*=\mathbf{I}$ и $\mathbf{A}^*\dot{\mathbf{A}}=\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^*$.

Сопряженными импульсами для q_1, q_2 являются p_1, p_2; они равны $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$. Следовательно, в неподвижной системе скорости равны сопряженным импульсам координат. Это, однако, не име-

ет место во вращающейся системе, где сопряженными импульсами по отношению к Q_1, Q_2 являются P_1, P_2, которые не равны скоростям относительно вращающейся системы.

Гамильтониан можно выразить как в системе q_1, q_2, p_1, p_2 (уравнение (3)), так и в системе Q_1, Q_2, P_1, P_2 (уравнение (9)). В последнем случае его обычно называют интегралом Якоби. Во вращающейся прямоугольной системе координат интеграл Якоби можно представить в двух формах, в зависимости от того, применяются ли сопряженные импульсы P_1, P_2, или составляющие скорости $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_2$. В уравнении (9) используются канонические переменные, и оно выражает гамильтониан $\tilde{H}$ в виде суммы трех членов. Первый член представляет кинетическую энергию (на единицу массы) третьего тела, так как $\mathbf{P}^2=\dot{\mathbf{q}}^2$. Второй член равен $\partial W_3/\partial t$ и соответствует моменту количества движения, так как

$$\frac{\partial W_3}{\partial t}=Q_2P_1-Q_1P_2=|\mathbf{P}\times\mathbf{Q}|.$$

В неподвижной системе координат момент количества движения остается таким же. Читатель легко может доказать, что

$$|\mathbf{P}\times\mathbf{Q}|=|\mathbf{p}\times\mathbf{q}|.$$

Третий член уравнения (9) представляет собой силовую функцию.

С помощью уравнений (17) можно импульсы P_1, P_2 выразить через скорости $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_2$ и представить гамильтониан $\tilde{H}$ в форме, содержащей координаты и скорости во вращающейся системе:

$$\tilde{H}=\frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2+\dot{Q}_2^2)-\frac{1}{2}(Q_1^2+Q_2^2)-\tilde{F}(Q_1, Q_2) \qquad (20)$$

или в векторном виде

$$\tilde{H}=\frac{1}{2}\dot{Q}^2-\frac{1}{2}Q^2-F.$$

Первый член здесь равен половине квадрата скорости относительно вращающейся системы, второй член представляет собой центробежный потенциал, а третий член — гравитационную силовую функцию.

Интересно сравнить уравнение (20) с интегралом Якоби, представленным уравнением (54) в § 1.5:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega-C, \qquad (21)$$

где $\dot{x}=\dot{Q}_1$, $\dot{y}=\dot{Q}_2$ и

$$\Omega=\frac{1}{2}\mu_1\mu_2+\frac{1}{2}(Q_1^2+Q_2^2)+\tilde{F}. \qquad (2)$$

Складывая уравнения (20) и (22), получаем

$$\tilde{H}+\Omega=\frac{1}{2}\mu_1\mu_2+\frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2+\dot{Q}_2^2). \tag{23}$$

Если гамильтониан постоянен (равен $\tilde{H}_0$), то из уравнения (23) имеем

$$2\Omega-(\dot{Q}_1^2+\dot{Q}^2_2)=\mu_1\mu_2-2\tilde{H}_0=C, \tag{24}$$

где C есть постоянная Якоби, определяемая уравнением (54), § 1.5. Таким образом, интеграл Якоби и уравнение $\tilde{H}_0=\text{const}$ тождественны между собой. Соотношение между постоянной Гамильтона и постоянной Якоби имеет вид

$$\tilde{H}_0=\frac{\mu_1\mu_2-C}{2}=-\frac{\tilde{C}}{2}, \tag{25}$$

где последняя часть уравнения получена из уравнения (55), § 1.5.

В том случае, когда динамическая система имеет не зависящий от времени гамильтониан, этот гамильтониан может играть двоякую роль. Он является функцией соответствующих координат и импульсов и потому играет существенную роль при выводе канонических уравнений движения. Кроме того, он представляет интеграл движения; в этом случае он играет роль постоянной, аналогичной постоянной Якоби в уравнении (21). В этом смысле мы можем сравнивать *постоянные* H_0 и C, определяемые уравнением (25), и *функции* H и Ω, определяемые уравнением (23).

Наконец, сравнение уравнений движения Гамильтона (уравнения (17) и (18)) с уравнениями, приведенными в § 1.5, описывающими движение в синодической системе (уравнения (52)), показывает, что они могут быть написаны в одной и той же форме.

Решая уравнения (17) относительно P_1 и P_2 и подставляя результаты в уравнения (18), получаем

$$\ddot{Q}_1-2\dot{Q}_2=Q_1+\frac{\partial\tilde{F}}{\partial Q_1},\quad \ddot{Q}_2+2\dot{Q}_1=Q_2+\frac{\partial\tilde{F}}{\partial Q_2}. \tag{26}$$

Согласно уравнению (22) имеем

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Q_i}=Q_i+\frac{\partial\tilde{F}}{\partial Q_i} \tag{27}$$

и, следовательно, уравнения (26) принимают вид

$$\ddot{Q}_1-2\dot{Q}_2=\frac{\partial\Omega}{\partial Q_1},\quad \ddot{Q}_2+2\dot{Q}_1=\frac{\partial\Omega}{\partial Q_2}, \tag{28}$$

идентичный с уравнениями (52), § 1.5, так как $Q_1=x$, $Q_2=y$.

§ 7.4. Перенос начала координат посредством канонических преобразований

Начала координатных систем Q_1, Q_2 и q_1, q_2 расположены в центре масс основных тел. Часто бывает удобно совмещать начало координат с одним из основных тел. Поэтому рассмотрим канонические преобразования, осуществляющие такой перенос начала синодической системы.

Начнем с системы Q_1, Q_2 и переместим ее начало в точку с координатами $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Тогда будем иметь

$$Q_1 = Q_1' + \varkappa_1, \quad Q_2 = Q_2' + \varkappa_2. \tag{29}$$

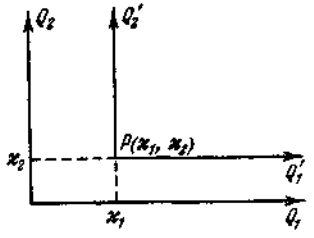


Рис. 7.2. Канонические переменные при переносе начала координат.

Эти уравнения определяют систему Q_1', Q_2' (см. рис. 7.2).

Для того чтобы найти каноническое преобразование, осуществляющее такой перенос начала координат, рассмотрим функцию $W_3(Q_1', Q_2', P_1, P_2)$, где штрихами обозначены новые переменные.

Согласно табл. I имеем

$$Q_i = -\frac{\partial W_3}{\partial P_i}, \quad P_i' = -\frac{\partial W_3}{\partial Q_i'}. \tag{30}$$

Уравнения (29) вместе с первым уравнением (30) дают

$$Q_1' + \varkappa_1 = -\frac{\partial W_3}{\partial P_1} \text{ и } Q_2' + \varkappa_2 = -\frac{\partial W_3}{\partial P_2}.$$

Отсюда с помощью метода, изложенного в § 1.7, получаем

$$W_3 = -(Q_1' + \varkappa_1) P_1 - (Q_2' + \varkappa_2) P_2 + f(Q_1', Q_2'), \tag{31}$$

где f — произвольная функция, выбор которой влияет на новые сопряженные импульсы P'_1, P'_2 через вторую систему уравнений (30). Но какой бы ни была выбрана функция $f(Q'_1, Q'_2)$, это не оказывает влияния на перемещение начала координат, поскольку этот выбор не влияет на первую систему уравнений (30). Новыми сопряженными импульсами будут

$$P_1' = P_1 - \frac{\partial f}{\partial Q_1'}, \quad P_2' = P_2 - \frac{\partial f}{\partial Q_2'}. \tag{32}$$

Согласно уравнению (9) новый гамильтониан будет иметь вид

$$\tilde{H}' = \frac{1}{2}\left[\left(P_1' + \frac{\partial f}{\partial Q_1'}\right)^2 + \left(P_2' + \frac{\partial f}{\partial Q_2'}\right)^2\right] + (Q_2' + \varkappa_2)\left(P_1' + \frac{\partial f}{\partial Q_1'}\right) - (Q_1' + \varkappa_1)\left(P_2' + \frac{\partial f}{\partial Q_2'}\right) - \tilde{F}'(Q_1', Q_2'). \tag{33}$$

Уравнения движения теперь запишутся в виде

$$\dot{Q}_1' = Q_2' + \frac{\partial f}{\partial Q_1'} + \varkappa_2 + P_1', \tag{34}$$

$$\dot{Q}'_2 = -Q_1' + \frac{\partial f}{\partial Q_2'} - \varkappa_1 + P_2', \tag{35}$$

$$\dot{P}_1' = -\frac{\partial^2 f}{\partial Q_1'^2}\left[Q_2' + \frac{\partial f}{\partial Q_1'} + \varkappa_2 + P_1'\right] + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial Q_1' \partial Q_2'}\left[Q_1' - \frac{\partial f}{\partial Q_2'} + \varkappa_1 - P_2'\right] + \frac{\partial f}{\partial Q_2'} + P_2' + \frac{\partial \tilde{F}'}{\partial Q_1'} \tag{36}$$

и

$$\dot{P}_2' = \frac{\partial^2 f}{\partial Q_2'^2}\left[Q_1' - \frac{\partial f}{\partial Q_2'} + \varkappa_1 - P_2'\right] - \\ - \frac{\partial^2 f}{\partial Q_1' \partial Q_2'}\left[Q_2' + \frac{\partial f}{\partial Q_1'} + \varkappa_2 + P_1'\right] - \frac{\partial f}{\partial Q_1'} - P_1' + \frac{\partial \tilde{F}'}{\partial Q_2'}, \tag{37}$$

где $\tilde{F}'$ и $\tilde{F}$ выражаются через новые переменные Q_1', Q_2'.

В частном случае $\varkappa_1 = \mu$, $\varkappa_2 = 0$, $f \equiv 0$ происходит перемещение начала координат в место расположения основного тела с массой $1-\mu$. Предыдущие уравнения принимают вид

$$Q_1' = Q_1 - \mu, \quad Q_2' = Q_2, \quad P_1' = P_1, \quad P_2' = P_2,$$

$$\tilde{H}' = \frac{1}{2}(P_1'^2 + P_2'^2) + Q_2' P_1' - (Q_1' + \mu) P_2' - \tilde{F}'(Q_1', Q_2'), \tag{38}$$

$$\dot{Q}_1' = Q_2' + P_1', \tag{39}$$

$$\dot{Q}_2' = -(Q_1' + \mu) + P_2', \tag{40}$$

$$\dot{P}_1' = P_2' + \frac{\partial \tilde{F}'}{\partial Q_1'}, \tag{41}$$

$$\dot{P}_2' = -P_1' + \frac{\partial \tilde{F}'}{\partial Q_2'}. \tag{42}$$

Задача. Покажите, что переменным Леви-Чивита соответствует выбор $\varkappa_2 = 0$, $f = \varkappa_1 Q_2'$. Эти переменные смещают начало координат только вдоль оси Q_1 на $\varkappa_1$ и приводят к следующей системе уравнений движения:

$$\dot{Q}_1' = P_1' + Q_2', \qquad \dot{Q}_2' = P_2' - Q_1',$$
$$\dot{P}_1' = P_2' + \varkappa_1 + \frac{\partial \tilde{F}'}{\partial Q_1'}, \quad \dot{P}_2' = -P_1' + \frac{\partial \tilde{F}'}{\partial Q_2'}. \tag{43}$$

§ 7.5. Преобразование прямоугольной синодической системы в полярную

В конце § 7.2 приведены канонические уравнения движения в переменных Q_1, Q_2, P_1, P_2 (уравнения (17) и (18)). Соответствующий гамильтониан определен уравнением (9). Координаты Q_1, Q_2 относятся к равномерно вращающейся прямо-

угольной декартовой системе координат с началом в центре масс тел m_1 и m_2. Найдем каноническое преобразование, осуществляющее переход от этой системы координат к полярной. Переменные новой системы будем обозначать со штрихами. (Читатель не должен их смешивать с теми, что применялись в предыдущем параграфе. § 7.4 можно рассматривать как полезное и своевременное введение, однако непосредственного отношения к рассматриваемым преобразованиям он не имеет.)

Вместо того, чтобы непосредственно представить производящую функцию, приведем следующий вывод. Так как новые координаты известны заранее, то производящие функции найдем из известных соотношений между старыми и новыми координатами. Выражения старых координат Q_1, Q_2 через новые Q_1', Q_2' проще, чем выражения новых координат через старые. Поэтому будем пользоваться соотношениями вида

$$Q_1=Q_1(Q_1',\ Q_2'),\quad Q_2=Q_2(Q_1',\ Q_2').$$

Табл. 1 § 6.3 непосредственно указывает на то, что для преобразований, представляющих старые координаты как частные производные производящей функции, целесообразно использовать функцию W_3 или W_4. Но функция W_4 не подходит, так как содержит только импульсы и потому не позволяет использовать соотношение между координатами.

После выбора функции $W_3=W_3(Q_1',\ Q_2',\ P_1,\ P_2)$ можно произвести упрощение. Как отмечалось ранее, знак производящей функции несущественен, если только она не содержит явно время (см. уравнения (15) и (16) гл. 6). Поэтому в задачах, подобных рассматриваемой, когда $\partial W_3/\partial t=0$, мы вместо уравнений, приведенных в третьей строке табл. I § 6.3, будем пользоваться уравнениями

$$Q_i=\frac{\partial W_3}{\partial P_i},\quad P_i'=\frac{\partial W_3}{\partial Q_i'}. \tag{44}$$

Введем новые (полярные) координаты $Q_1'=r$ и $Q_2'=\theta$. Радиальная координата Q_1' выражает расстояние третьего тела от начала системы Q_1, Q_2, а угловая координата Q_2' — угол между (вращающейся) осью Q_1 и радиусом-вектором. Как видно из рис. 7.3,

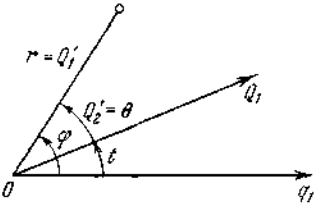


Рис. 7.3. Полярные координаты в качестве канонических переменных.

$$Q_1=Q_1'\cos Q_2'\quad\text{и}\quad Q_2=Q_1'\sin Q_2'. \tag{45}$$

Из первого уравнения (44) для $i=1,\ 2$ и уравнений (45) получаем два дифференциальных уравнения в част-

ных производных для определения W_3:

$$Q_1' \cos Q_2' = \frac{\partial W_3}{\partial P_1} \quad \text{и} \quad Q_1' \sin Q_2' = \frac{\partial W_3}{\partial P_2}. \tag{46}$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$W_3 = Q_2' (P_1 \cos Q_2' + P_2 \sin Q_2') + f(Q_1', Q_2'). \tag{47}$$

Новые импульсы получаются из второй системы уравнений (44):

$$\begin{aligned} P_1' &= P_1 \cos Q_2' + P_2 \sin Q_2' + \frac{\partial f}{\partial Q_1'}, \\ P_2' &= Q_1' (-P_1 \sin Q_2' + P_2 \cos Q_2') + \frac{\partial f}{\partial Q_2'}. \end{aligned} \tag{48}$$

Вводя вектор $\mathbf{P}'$ с составляющими P_1' и P_2'/Q_1' и вектор $\mathbf{P}$ с составляющими P_1 и P_2, можно уравнения (48) представить в виде

$$\mathbf{P}' = \mathbf{A}^* (Q_2') \mathbf{P} + \operatorname{grad} f, \tag{49}$$

где матрица $\mathbf{A}(Q_2')$ определяется уравнением (7) с аргументом Q_2' вместо t и составляющими вектора $\operatorname{grad} f$ $\partial f/\partial Q_1'$ и $(\partial f/\partial Q_2')(Q_1')^{-1}$.

Обращение уравнения (49) дает

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(Q_2')(\mathbf{P}' - \operatorname{grad} f), \tag{50}$$

и новый гамильтониан $\tilde{H}'$ теперь можно вычислить с помощью уравнений (45) и (50). Подставляя в уравнение (9), получаем

$$\tilde{H}' = \frac{1}{2}\left(P_1'^2 + \frac{P_2'^2}{Q_1'^2}\right) - P_2' - \tilde{F}'(Q_1', Q_2'), \tag{51}$$

где произвольная функция f в уравнении (47) принята равной $f = \text{const}$.

Вычисление членов, входящих в уравнение (9), производится следующим образом. Во-первых,

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{A}\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P}' = \mathbf{P}'\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{P}' = \mathbf{P}'^2 = P_1'^2 + \frac{P_2'^2}{Q_1'^2}.$$

Второй и третий члены в уравнении (9) образуют отрицательный момент количества движения, равный $-P_2'$, в чем читатель может убедиться посредством простой подстановки.

Уравнения движения записываются в виде

$$\dot{Q}_1' = P_1', \quad \dot{Q}_2' = \frac{P_2'}{Q_1'^2} - 1 \tag{52}$$

и

$$\dot{P}_1' = \frac{P_2'^2}{Q_1'^3} + \frac{\partial \tilde{F}'}{\partial Q_1'}, \quad \dot{P}_2' = \frac{\partial \tilde{F}'}{\partial Q_2'}. \tag{53}$$

Зная физический смысл Q_1' и Q_2', можно с помощью уравнения (52) интерпретировать P_1' и P_2'. Так как $Q_1' = r$, $P_1' = \dot{r}$, то первый сопряженный импульс представляет собой радиальную скорость. Далее, $Q_2' = \theta$ и, следовательно, $P_2' = r^2(\dot{\theta} + 1)$ или

$$P_2' = r^2 \frac{d}{dt}(\theta + t) = r^2\dot{\varphi}. \tag{54}$$

Таким образом, второй сопряженный импульс представляет собой момент количества движения. Заметим, что введенная ранее вторая составляющая вектора P',

$$\frac{P_2'}{Q_1'} = r \frac{d}{dt}(\theta + t) = r\dot{\varphi}, \tag{55}$$

равна составляющей скорости относительно неподвижной оси нормальной к r.

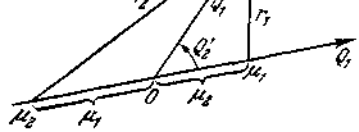


Рис. 7.4. Обозначения, применяемые при вычислении силовой функции.

Силовая функция $\tilde{F}'$ вычисляется из уравнения (16):

$$\tilde{F}' = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}, \tag{56}$$

где

$$\begin{aligned} r_1^2 &= Q_1'^2 + \mu_2^2 - 2\mu_2 Q_1' \cos Q_2', \\ r_2^2 &= Q_1'^2 + \mu_1^2 + 2\mu_1 Q_1' \cos Q_2' \end{aligned} \tag{57}$$

(см. рис. 7.4).

Если $\mu = \mu_2 = 0$ и, следовательно, $\mu_1 = 1$, то силовая функция принимает вид

$$\tilde{F}' = 1/Q_1', \tag{58}$$

так как $r_1 = r = Q_1'$, и задача сводится к случаю ньютоновской центральной силы.

Наконец, как уже отмечалось, если в уравнение (51) подставить

$$\begin{aligned} P_1' &= \dot{r}, \quad P_2' = r^2 \frac{d}{dt}(\theta + t), \\ Q_1' &= r, \quad Q_2' = \theta, \end{aligned} \tag{59}$$

получим

$$\bar{H}' = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}r^2 - \bar{F}'(r, \theta), \tag{60}$$

где первый член в правой части есть квадрат скорости относительно вращающейся системы, т. е.

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

а второй член равен

$$-\frac{1}{2}r^2 = -\frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Следовательно, уравнение (60) приводится к уравнению (20).

§ 7.6. Преобразование полярных координат в переменные Делоне

Полярная система, принятая нами в § 7.5, была обозначена заглавными буквами со штрихами: Q_1', Q_2', P_1', P_2'. Новые переменные, к которым мы перейдем в этом параграфе, мы обозначим строчными буквами со штрихами: q_1', q_2', p_1', p_2'. Для удобства принятые обозначения сведены в таблицу.

Таблица 1. Принятые обозначения

Символы	Приложение
q_i, p_i	Неподвижная прямоугольная декартова система координат
Q_i, P_i	Вращающаяся прямоугольная декартова система координат
Q_i', P_i'	Полярные координаты
q_i', p_i'	Переменные Делоне

Соображения, по которым вводятся переменные Делоне, частично связаны с идеями Пуанкаре. Сначала будет получена производящая функция, затем новым переменным будет дана физическая интерпретация и, наконец, будут выведены уравнения движения. Преобразование определяется производящей функцией второго типа, т. е.

$$W_2 = W_2(Q_1', Q_2', p_1', p_2'),$$

и, согласно табл. I § 6.3,

$$P_i' = \frac{\partial W_2}{\partial Q_i'}, \tag{61}$$

$$q_i' = \frac{\partial W_2}{\partial p_i'}. \tag{62}$$

Инвариантные свойства для момента количества движения третьей частицы выражаются условием $p_2' = P_2'$. При $i=2$ уравнение (61) принимает вид

$$P_2' = \frac{\partial W_2}{\partial Q_2'} = p_2',$$

так что

$$W_2 = p_2' Q_2' + f(Q_1', p_1', p_2'), \tag{63}$$

что объясняет сделанный нами выбор производящей функции W_2.

Напомним, что P_1' выражает радиальную скорость: $P_1' = \dot{r}$. Для того чтобы определить функцию $f(Q_1', p_1', p_2')$ в верхнем уравнении, воспользуемся снова уравнением (61), на этот раз при $i=1$. Подставляя уравнение (63) в уравнение (61), получаем

$$P_1' = \dot{r} = \frac{\partial f}{\partial Q_1'}. \tag{64}$$

Это уравнение полезно, когда $\dot{r}$ выражено через Q_1', p_1' и p_2', так как от этих переменных зависит функция f. Можно показать, что

$$\dot{r} = \left[-\frac{a(1-e^2)}{Q_1'^2} + \frac{2}{Q_1'} - \frac{1}{a} \right]^{1/2}, \tag{65}$$

где a и e — большая полуось и эксцентриситет эллипса, представляющего движение третьей частицы, когда на нее действует одна только единичная масса, расположенная в начале координат, $\mu = \mu_2 = 0$, $\mu_1 = 1$. Таким образом, уравнение (65) определяет $\dot{r}$ для задачи двух тел, а также для ограниченной задачи, если a и e рассматриваются как переменные.

Интеграл энергии этой задачи двух тел в сидерической системе имеет вид

$$v^2 = 2/r - 1/a, \tag{66}$$

где v — скорость относительно неподвижной системы. Квадрат этой скорости равен

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \tag{67}$$

где $\varphi = t + \theta$ есть полярный угол, отсчитываемый от неподвижной оси q_1 (см. рис. 7.3).

Момент количества движения этой задачи двух тел равен

$$r^2\dot{\varphi} = [a(1-e^2)]^{1/2}, \tag{68}$$

так как из уравнения (66) в перигелии

$$r = a(1-e) \quad \text{и} \quad v = r\dot{\varphi} = \frac{1}{a^{1/2}}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}.$$

Подставляя решение уравнения (68) для $\dot{\varphi}$ в уравнение (67), находим

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{a(1-e^2)}{r^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

откуда, полагая $r = Q_1'$ и разрешая относительно $\dot{r}$, получаем уравнение (65). На этом вывод уравнения (65) заканчивается.

Напишем теперь в уравнении (65) p_2' вместо $[a(1-e^2)]^{1/2}$, так как обе эти величины представляют собой момент количества движения, и p_1' вместо $a^{1/2}$, так как p_1' по определению есть переменная Делоне. Функция f будет теперь выражаться через Q_1', p_1' и p_2', как и требовалось, и уравнение (64) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial Q_1'} = \left(-\frac{p_2'^2}{Q_1'^2} + \frac{2}{Q_1'} - \frac{1}{p_1'^2}\right)^{1/2}. \tag{69}$$

Следовательно,

$$f = \int \left(-\frac{p_2'^2}{Q_1'^2} + \frac{2}{Q_1'} - \frac{1}{p_1'^2}\right)^{1/2} dQ_1' + g(p_1', p_2'). \tag{70}$$

Вернемся теперь к уравнению (63) и к задаче нахождения производящей функции. Имеем

$$W_2 = p_2'Q_2' + I + g(p_1', p_2'), \tag{71}$$

где I стоит здесь вместо квадратуры, входящей в уравнение (70); таким образом, $f = I + g$.

Иначе, I можно представить в форме

$$I = \int_z^{Q_1'} \left(-\frac{p_2'^2}{\xi^2} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{p_1'^2}\right)^{1/2} d\xi,$$

где ξ — переменная интегрирования, а z не зависит от Q_1' и Q_2', но в остальном произвольно.

Заметим, что

$$\frac{\partial I}{\partial Q_1'} = \left(-\frac{p_2'^2}{Q_1'^2} + \frac{2}{Q_1'} - \frac{1}{p_1'^2}\right)^{1/2},$$

так как производная от интеграла по его верхнему пределу равна подынтегральному выражению, вычисленному при верхнем

пределе, согласно известному положению

$$\frac{d}{dx}\int_z^x f(\xi)\,d\xi = f(x),$$

при условии, что z не зависит от x.

Член $p_2'Q_2'$ в правой части уравнения (71) дает соотношение $p_2' = P_2'$, а член I удовлетворяет требованию, чтобы

$$\dot{r} = P_1' = \frac{\partial W_2}{\partial Q_1'}.$$

Функцию $g(p_1', p_2')$ еще надлежит выбрать, и, как показывают уравнения (62), она будет влиять на переменные q_1', q_2'. Заметим, что новые импульсы p_1', p_2' мы уже имеем из соотношений

$$p_2' = P_2' \tag{72}$$

и

$$P_1' = \left(-\frac{p_2'^2}{Q_1'^2} + \frac{2}{Q_1'} - \frac{1}{p_1'^2}\right)^{1/2}, \tag{73}$$

так что p_1' и p_2' могут быть выражены через старые переменные Q_1', P_1' и P_2'.

Две дополнительные переменные Делоне q_1', q_2' определяются уравнениями (62) и (71):

$$q_1' = \frac{\partial I}{\partial p_1'} + \frac{\partial g}{\partial p_1'} \quad \text{и} \quad q_2' = Q_2' + \frac{\partial I}{\partial p_2'} + \frac{\partial g}{\partial p_2'}.$$

Вместо того чтобы выбирать функцию g, можно выбрать нижний предел интеграла I

$$z = z(p_1', p_2')$$

и положить $g(p_1', p_2') \equiv 0$. После вычисления I и подстановки пределов получаем $I = I(Q_1', p_1', p_2')$, и W_2 определяется из уравнения (71) с $g = 0$. Обозначая подынтегральное выражение через $h(\xi, p_1', p_2')$, будем иметь

$$I = \int_{z(p_1', p_2')}^{Q_1'} h(\xi, p_1', p_2')\,d\xi, \tag{74}$$

и, полагая

$$\int h(\xi, p_1', p_2')\,d\xi = \mathcal{H}(\xi, p_1', p_2') + C,$$

находим

$$I = \mathcal{H}(Q_1', p_1', p_2') - \mathcal{H}[z(p_1', p_2'), p_1', p_2']. \tag{75}$$

Из уравнения (75) следует, что

$$h(Q_1', p_1', p_2') = P_1'$$

$$\mathcal{H}(z, p_1', p_2') = -g(p_1', p_2').$$

Последнее равенство связывает функции $\mathcal{H}$ и g.

Теперь имеем

$$W_2 = p_2' Q_2' + I, \tag{76}$$

где I определяется уравнением (74). Остается только определить нижний предел интеграла, $z(p_1', p_2')$.

Можно показать, что, выбирая в качестве нижнего предела точку перигелия,

$$z = p_1' [p_1' - (p_1'^2 - p_2'^2)^{1/2}], \tag{77}$$

получаем из уравнения (76) две остальные переменные Делоне, q_1' и q_2'. Доказательство проводится непосредственным образом и состоит из оценки I и вычисления затем его частных производных по p_1' и p_2'.

Интересно заметить, что, подставляя в уравнение (77) $p_1' = a^{1/2}$ и $p_2' = [a(1-e^2)]^{1/2}$, мы устанавливаем уже найденный ранее физический смысл: $z = a(1-e)$. Следовательно, интегрирование нужно выполнять от перигелия до произвольной точки на эллипсе в задаче двух тел (см., например, уравнение (74)).

Уравнения (62) теперь можно использовать для нахождения q_1' и q_2'. Имеем

$$q_1' = \arccos\left\{\frac{1 - Q_1'/p_1'^2}{[1-(p_2'/p_1')^2]^{1/2}}\right\} - \frac{Q_1'}{p_1'}\left(-\frac{p_2'^2}{Q_1'^2} + \frac{2}{Q_1'} - \frac{1}{p_1'^2}\right) \tag{78}$$

$$q_2' = Q_2' - \arccos\frac{p_2'^2/Q_1' - 1}{[1-(p_2'/p_1')^2]^{1/2}}. \tag{79}$$

Новые переменные можно интерпретировать следующим образом. Заменяя Q_1' на r, $p_2'^2$ на a, $p_2'^2$ на $a(1-e^2)$ и последний коэффициент в уравнении (78) — на $\dot{r}$, получаем

$$q_1' = \arccos\frac{1 - r/a}{e} - \frac{r\dot{r}}{a^{1/2}}. \tag{80}$$

Но для задачи двух тел

$$\frac{r\dot{r}}{a^{1/2}} = e\sin u, \tag{81}$$

где, как будет показано позже, u есть эксцентрическая аномалия. Из уравнения (80) имеем

$$r = a[1 - e\cos(q_1' + e\sin u)]. \tag{82}$$

Отсюда с помощью равенства

$$r = a(1 - e\cos u)$$

получаем уравнение Кеплера

$$q_1' = u - e\sin u \tag{83}$$

со средней аномалией $q_1' = l$.

Таким образом, мы видим, что первая переменная Делоне q_1' представляет среднюю аномалию в задаче двух тел.

Производя необходимые подстановки в уравнение (79) и пользуясь переменными r, a, e и θ, получаем

$$q_2' = \theta - \arccos\frac{(a/r)(1-e^2)-1}{e}.$$

Отсюда

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta - q_2')}. \tag{84}$$

Сравнивая уравнение (84) с выражением для r,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f},$$

где f — истинная аномалия, находим

$$q_2' = \theta - f. \tag{85}$$

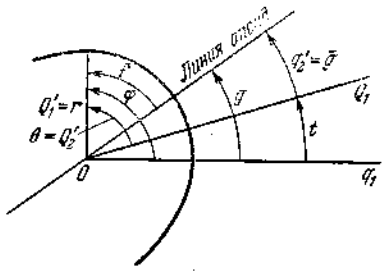


Рис. 7.5. Угловые переменные.

Таким образом, вторая переменная Делоне q_2' представляет долготу линии апсид (или аргумент перигелия) относительно вращающейся системы, отмеряемую от вращающейся оси Q_1 (см. рис. 7.5).

На этом мы закончим исследование производящей функции W_2, определяемой уравнением (76). Остается вывести формулу (81). Для этой цели рассмотрим выражение $r = a(1 - e\cos u)$. Дифференцируя его, находим $\dot{r} = ae\dot{u}\sin u$. Из уравнения Кеплера

$$l = \bar{n}(t - t_0) = u - e\sin u$$

посредством дифференцирования получаем

$$\dot{l} = \bar{n} = \dot{u}(1 - e\cos u) = \dot{u}r/a.$$

Здесь $\bar{n}$ есть среднее движенне по эллипсу, оно равно $\bar{n}=a^{-3/2}$ и, следовательно, $a^{-3/2}=\dot{u}r/a$ или $\dot{u}=(ra^{1/2})^{-1}$. Из последнего уравнения и равенства $\dot{r}=ae\dot{u}\sin u$ получаем формулу (81).

Прежде чем переходить к вычислению нового гамильтониана, систематизируем полученные здесь результаты. Итак, производящая функция

$$W_2=Q_2'p_2'+\int_{p_1'\left[p_1'-\left(p_1'^2-p_2'^2\right)^{1/2}\right]}^{Q_2'}\left(-\frac{p_2'^2}{\xi^2}+\frac{2}{\xi}-\frac{1}{p_1'^2}\right)^{1/2}d\xi \qquad (86)$$

осуществляет каноническое преобразование системы полярных координат

$$Q_1'=r, \quad Q_2'=\theta,$$
$$P_1'=\dot{r}, \quad P_2'=r^2\frac{d}{dt}(t+\theta)$$

и переход к системе переменных Делоне

$$q_1'=l, \qquad q_2'=\theta-f,$$
$$p_1'=a^{1/2}, \quad p_2'=[a(1-e^2)]^{1/2}.$$

Здесь r есть радиальная координата, θ — угол между r и вращающейся осью Q_1, на которой расположены основные тела, l — средняя аномалия, f — истинная аномалия, $(\theta-f)$ — аргумент перигелия во вращающейся системе и a и e — большая полуось и эксцентриситет эллипса, который был описан раньше. Для переменных Делоне введем следующие обозначения: $q_1'=l$, $q_2'=\bar{g}$, $p_1'=L$, $p_2'=G$.

Новый гамильтониан получается из уравнения (51), если подставить в него новые переменные. Первый член в уравнении (51) получаем с помощью уравнений (72) и (73):

$$\frac{1}{2}\left(P_1'^2+\frac{P_2'^2}{Q_1'^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{Q_1'}-\frac{1}{p_1'^2}\right).$$

Новый гамильтониан $\tilde{h}'$ принимает вид

$$\tilde{h}'=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{Q_1'}-\frac{1}{p_1'^2}\right)-p_2'-\tilde{f}'. \qquad (87)$$

Заметим, что $\tilde{h}'$ еще содержит одну старую переменную, Q_1', а $\tilde{f}'$ нам еще нужно выразить через новые переменные. Имеем

$$\tilde{f}'=\frac{\mu_1}{r_1}+\frac{\mu_2}{r_2}=\frac{1}{r_1}+\mu\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right), \qquad (88)$$

так что при $\mu=0$ $\tilde{f}'=1/Q_1'$ (сравните с уравнением (58)) и

$$\tilde{h}'=-\frac{1}{2p_1'^2}-p_2'. \tag{89}$$

Если $\mu\neq 0$, то, представляя силовую функцию в виде

$$\tilde{f}'=\frac{1}{Q_1'}+R,$$

получаем из уравнения (87)

$$\tilde{h}'=-\frac{1}{2p_1'^2}-p_2'-R, \tag{90}$$

где R представляет отклонение $\tilde{f}'=1/Q_1'$ от действительного $\tilde{f}'$. Другими словами, R выражает возмущение в описанной ранее задаче двух тел, или в задаче с центральной силой:

$$R=\tilde{f}'-\frac{1}{Q_1'}.$$

Уравнения движения записываются в виде

$$\dot{q}_i'=\frac{\partial\tilde{h}'}{\partial p_i'} \quad \text{и} \quad \dot{p}_i'=-\frac{\partial\tilde{h}'}{\partial q_i'}. \tag{91}$$

С помощью уравнения (90) они принимают вид

$$\dot{q}_1'=\frac{1}{p_1'^3}-\frac{\partial R}{\partial p_1'}, \quad \dot{q}_2'=-1-\frac{\partial R}{\partial p_2'} \tag{92}$$

и

$$\dot{p}_1'=\frac{\partial R}{\partial q_1'}, \quad \dot{p}_2'=\frac{\partial R}{\partial q_2'}. \tag{93}$$

Для $\mu=0$ имеем $R=0$, и уравнения движения (уравнения (91) и (92)) принимают форму

$$\dot{q}_1'=\frac{1}{p_1'^3}, \quad \dot{q}_2'=-1, \quad \dot{p}_1'=0, \quad \dot{p}_2'=0. \tag{94}$$

Первое уравнение эквивалентно уравнению $\bar{n}a^{3/2}=1$, так как $\dot{q}_1'=\dot{l}=\bar{n}$, а из третьего уравнения следует, что $p_1'=a^{1/2}=\text{const}$. Второе уравнение дает $q_2'=-t+\text{const}$ и, стало быть, линия апсид во вращающейся системе вращается с единичной угловой скоростью против хода часовой стрелки или, иначе говоря, перигелий остается неподвижным относительно неподвижной системы.

Наконец, третье и четвертое уравнения показывают, что a и e постоянны. Итак, четыре уравнения (94) описывают эллиптическое движение в задаче двух тел.

Система q_1', q_2', p_1', p_2' вместе с $\bar{h}'$ представляет окончательный результат этого параграфа. Эта система переменных образует элементы Делоне. Важно установить, что различные комбинации их могут тоже образовывать канонические системы переменных. Этому вопросу посвящен следующий параграф.

§ 7.7. Модификации элементов Делоне

7.7.1. Введение. К принятым ранее обозначениям

$$q_1'=l, \quad q_2'=\bar{g}, \quad p_1'=L, \quad p_2'=G \tag{95}$$

мы теперь добавим еще одно, $\bar{h}'=H$, надеясь, что это не приведет к путанице. Когда выполняется последовательно большое колнчество канонических преобразований, такие знаки, как тильда, черта, штрих и т. п. не особенно удобны. В литературе гамильтониан, как правило, обозначается через H, независимо от того, какие применяются переменные, однако это редко вызывает неверное понимание существа дела.

В переменных (95) гамильтониан, определяемый уравнением (90), записывается следующим образом:

$$H=-\frac{1}{2L^2}-G-R. \tag{96}$$

Уравнения движения принимают теперь вид

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt}&=\frac{1}{L^3}-\frac{\partial R}{\partial L}, & \frac{d\bar{g}}{dt}&=-1-\frac{\partial R}{\partial G},\\ \frac{dL}{dt}&=\frac{\partial R}{\partial l}, & \frac{dG}{dt}&=\frac{\partial R}{\partial \bar{g}}. \end{aligned} \tag{97}$$

Эти уравнения, разумеется, эквивалентны уравнениям (92) и (93). Читатель должен всегда помнить о различии между координатами $(l, \bar{g})$ и сопряженными с ними импульсами (L, G), во избежание путаницы, которая может привести к ошибке в знаке в уравнениях движения. К этому вопросу мы еще вернемся в пункте 7.7.3.

В литературе можно встретить много различных модификаций и вариаций переменных Делоне. Ниже мы рассмотрим те из систем, которые наиболее популярны.

7.7.2. Уравнения в неподвижной системе. Уравнения (97) даны нами во вращающейся системе, так как $\bar{g}=g_2'=\theta-f$ есть аргумент перицентра относительно вращающейся системы. На рис. 7.5 $g=\bar{g}+t$ есть аргумент перигелия, отмеряемый от неподвижной оси q_1. Если вместо $\bar{g}$ принять в качестве канонической переменной величину g, то для того чтобы выполнить преобразование и перейти от системы $(q; p)=(l, \bar{g}; L, G)$ к переменным $(Q; P)=(l, g; L, G)$, нужно найти производящую функ-

цию, зависящую также и от времени. При наличии известного опыта такую производящую функцию можно написать сразу, однако ниже мы ее выведем, что явится полезным упражнением.

Производящая функция должна давать тождественное преобразование для всех переменных, кроме $\bar{g}$. Поэтому следует ожидать, что функция $W_2 = W_2(q_1, q_2, P_1, P_2, t)$ будет удовлетворять нашим требованиям. Из табл. I § 6.3 имеем

$$p_i = \frac{\partial W_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W_2}{\partial P_i} \tag{98}$$

и

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial W_2}{\partial t}. \tag{99}$$

Так как $Q_2 = g = \bar{g} + t = q_2 + t$, то из уравнений (98) находим

$$\frac{\partial W_2}{\partial P_2} = q_2 + t$$

или

$$W_2 = (q_2 + t) P_2 + \alpha(q_1, q_2, P_1, t).$$

Кроме того, так как $Q_1 = l = q_1$, то имеем

$$\frac{\partial W_2}{\partial P_1} = q_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial P_1}.$$

Отсюда

$$\alpha(q_1, q_2, P_1, t) = q_1 P_1 + \beta(q_1, q_2, t)$$

и, следовательно,

$$W_2 = (q_2 + t) P_2 + q_1 P_1 + \beta(q_1, q_2, t).$$

Для того чтобы сохранялись импульсы, нужно чтобы

$$p_1 = P_1 = \frac{\partial W_2}{\partial q_1} = P_1 + \frac{\partial \beta}{\partial q_1}$$

и

$$p_2 = P_2 = \frac{\partial W_2}{\partial q_2} = P_2 + \frac{\partial \beta}{\partial q_2}.$$

Следовательно, функция β может зависеть только от времени, и, записывая $\beta(0, 0, t) = \gamma(t)$, получаем производящую функцию в виде

$$W_2 = (q_2 + t) P_2 + q_1 P_1 + \gamma(t),$$

где функция $\gamma(t)$ не задана.

Новый гамильтониан $\tilde{H}$ получается из уравнения (99):

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2P_1^2} - P_2 - R + P_2 + \frac{d\gamma}{dt},$$

так как

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = P_2 + \frac{d\gamma(t)}{dt}.$$

Для того чтобы прийти к гамильтониану, не зависящему от времени, положим $\gamma(t) = \text{const}$. Тогда получим

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2L^2} - R. \tag{100}$$

Заметим, что гамильтониан получился проще, чем он был до преобразования: в нем отсутствует член $-G$ (сравните с уравнением (96)).

Уравнения движения в новых переменных l, g, L, G в неподвижной системе координат записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \frac{1}{L^3} - \frac{\partial R}{\partial L}, & \dot{g} &= -\frac{\partial R}{\partial G}, \\ \dot{L} &= \frac{\partial R}{\partial l}, & \dot{G} &= \frac{\partial R}{\partial g}. \end{aligned} \tag{101}$$

Для задачи двух тел в неподвижной системе координат эти уравнения принимают вид

$$\dot{l} = \frac{1}{L^3} \quad \text{и} \quad \dot{g} = \dot{L} = \dot{G} = 0.$$

Первое уравнение выражает закон Кеплера, а остальные показывают, что ориентация линии апсид, длина большой полуоси и эксцентриситет эллипса остаются постоянными.

7.7.3. Перестановка координат и импульсов. Уравнения (101) следуют из уравнений движения Гамильтона, если $\tilde{H}$ принять в них в форме (100). Полагая $F = -\tilde{H}$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{l} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, & \dot{L} &= \frac{\partial F}{\partial l}, \\ \dot{g} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, & \dot{G} &= \frac{\partial F}{\partial g}. \end{aligned} \tag{102}$$

В этих канонических уравнениях гамильтонианом является F, «координатами» являются L, G и «импульсами» являются l, g.

Выше, в связи с уравнением (97) мы указывали, что терминология в отношении координат и импульсов должна строго соблюдаться, и предостерегали читателей от возможной ошибки в знаке в уравнениях движения. Это предостережение не означает, конечно, что с «координатами» и «импульсами» мы связываем какой-то специальный физический смысл.

В общем случае уравнения Гамильтона и канонические переменные обладают следующими свойствами. При координа-

тах q_i, импульсах p_i и гамильтониане H мы имеем

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{102а}$$

Если же $F = -H$, то

$$\dot{q}_i = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \dot{p}_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}. \tag{102б}$$

Эти последние уравнения являются каноническими с гамильтонианом F только тогда, когда переменные q_1 означают импульсы, а p_i — обобщенные координаты.

7.7.4. Линейные комбинации элементов Делоне. В последующих модификациях мы в качестве исходной системы примем следующую: $q_1 = L$, $q_2 = G$, $P_1 = l$, $P_2 = g$ с гамильтонианом

$$F = \frac{1}{2L^2} + R.$$

Линейные комбинации элементов Делоне можно получить с помощью производящих функций типа W_2. Примем эту функцию в виде

$$W_2(q_i, P_i) = a_{ij} P_i q_j, \tag{103}$$

где элементы неособенной матрицы a_{ij} являются постоянными. Тогда, согласно табл. I § 6.3 будем иметь

$$p_k = \frac{\partial W_2}{\partial q_k} = a_{ik} P_i, \quad Q_k = \frac{\partial W_2}{\partial P_k} = a_{ki} q_i. \tag{104}$$

Если матрицей, обратной a_{ij}, будет матрица b_{ij}, то будем иметь

$$P_i = b_{ik} p_k \quad \text{и} \quad Q_i = a_{ik} q_k.$$

Мы видим, что если новыми координатами являются линейные комбинации старых координат, то новые импульсы тоже будут связаны со старыми импульсами линейным образом.

Наибольший интерес представляют три случая, соответствующие матрицам

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

А. В случае первой матрицы уравнение (103) принимает вид

$$W_2 = q_1 (P_1 - P_2) + q_2 P_2$$

и из уравнений (104) имеем

$$p_1 = P_1 - P_2, \quad p_2 = P_2, \quad Q_1 = q_1, \quad Q_2 = q_2 - q_1.$$

При $q_1 = L$, $q_2 = G$, $p_1 = l$, $p_2 = g$ новой канонической системой будет

$$Q_1 = L, \quad Q_2 = G - L, \quad P_1 = l + g, \quad P_2 = g.$$

Б. Применяя вторую матрицу к полученному выше результату (случаю А), находим новую систему канонических переменных. При производящей функции

$$W_2 = q_1 P_1 - q_2 P_2$$

будем иметь

$$p_1 = P_1, \quad p_2 = -P_2, \quad Q_1 = q_1, \quad Q_2 = -q_2.$$

Новыми переменными будут

$$Q_1 = L, \quad Q = L - G, \quad P_1 = l + g, \quad P_2 = -g.$$

В. Наконец, при третьей матрице мы получаем следующие новые переменные (из новых переменных пункта Б):

$$Q_1 = L - G, \quad Q_2 = G, \quad P_1 = l, \quad P_2 = l + g.$$

7.7.5. Переменные Пуанкаре. А. Производящая функция, которая, будучи применена к задаче о гармоническом осцилляторе, вводит циклические координаты, имеет следующий вид:

$$W_1(q, Q) = Cq^2 \operatorname{ctg} Q.$$

Слегка модифицируя ее, получаем

$$W_4(p_i, P_i) = \frac{P_1^2}{2} \operatorname{ctg} p_1 + \frac{P_2^2}{2} \operatorname{ctg} p_2. \tag{105}$$

В небесной механике эта производящая функция позволяет ввести переменные Пуанкаре. Согласно табл. I § 6.3, формулами преобразования будут

$$q_i = -\frac{\partial W_4}{\partial p_i} \text{ и } Q_i = \frac{\partial W_4}{\partial P_i}.$$

Они дают (без суммирования)

$$q_i = \frac{P_i^2}{2} \frac{1}{\sin^2 p_i} \text{ и } Q_i = P_i \operatorname{ctg} p_i.$$

Соответственно,

$$Q_i = (2q_i)^{\frac{1}{2}} \cos p_i \text{ и } P_i = (2q_i)^{\frac{1}{2}} \sin p_i.$$

Применяя эти результаты к переменным, данным в пункте 7.7.4 В, и рассматривая в качестве старых переменных систему

$$q_1 = L - G, \quad q_2 = G, \quad p_1 = l, \quad p_2 = l + g,$$

получаем

$$\begin{aligned} Q_1 &= [2(L-G)]^{1/2} \cos l, \quad & Q_2 &= (2G)^{1/2} \cos(l+g), \\ P_1 &= [2(L-G)]^{1/2} \sin l, \quad & P_2 &= (2G)^{1/2} \sin(l+g). \end{aligned} \tag{106}$$

Уравнения (106) определяют одну из комбинаций переменных Пуанкаре.

Б. Поскольку производящая функция W_4 не может быть использована для совершения тождественного преобразования, часто бывает необходимо вводить переменные Пуанкаре с помощью другой производящей функции, такой как

$$W_3(Q, p)=\frac{Q_1^2}{2}\operatorname{tg} p_1+\frac{Q_2^2}{2}\operatorname{tg} p_2.$$

Эта производящая функция может быть объединена с тождественным преобразованием, и результат может быть применен к системе переменных, данных в пункте 7.7.4 Б. Введенная таким путем система переменных частично относится к системе Пуанкаре, а частично к системе Делоне. Действительно, пусть

$$q_1=L, \quad q_2=L-G, \quad p_1=l+g, \quad p_2=-g$$

и

$$W_3(Q, p)=Q_1p_1+\frac{Q_2^2}{2}\operatorname{tg} p_2.$$

Первая часть функции W_3 дает

$$q_1=\frac{\partial W_3}{\partial p_1}=Q_1 \text{ и } P_1=\frac{\partial W_3}{\partial Q_1}=p_1,$$

а вторая часть —

$$q_2=\frac{Q_2^2}{2\cos^2 p_2} \text{ и } P_2=Q_2\operatorname{tg} p_2$$

или

$$Q_2=(2q_2)^{1/2}\cos p_2 \text{ и } P_2=(2q_2)^{1/2}\sin p_2.$$

Новая система переменных принимает вид

$$\begin{aligned} Q_1&=L, & Q_2&=[2(L-G)]^{1/2}\cos g,\\ P_1&=l+g, & P_2&=-[2(L-G)]^{1/2}\sin g. \end{aligned}$$

Заметьте, что знаки минус в формуле для W_3 и в формулах преобразования опущены.

§ 7.8. Регуляризация в случае канонических переменных

7.8.1. Задача двух тел. Регуляризация ограниченной задачи трех тел (исключение одной или обеих особенностей уравнений движения) состоит из двух этапов: преобразования координат и соответствующего преобразования времени. Эти два этапа мы теперь выполним, применяя каноническое преобразование в фазовом пространстве для координат и еще другое преобра-

зование в расширенном фазовом пространстве для осуществления требуемого преобразования времени.

Эту программу мы осуществим, в качестве упражнения, сначала для задачи с ньютоновским центральным силовым полем (задачи двух тел). В неподвижной прямоугольной декартовой системе координат $(x, y) = (q_1, q_2)$ задача двух тел при соответствующим образом выбранных единицах имеет гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}, \tag{107}$$

где сопряженные импульсы равны

$$p_i = \dot{q}_i, \qquad i = 1, 2. \tag{108}$$

Канонические уравнения движения дают, в дополнение к уравнениям (108),

$$\dot{p}_1 = -\frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}. \tag{109}$$

Преобразование координат, рассматривавшееся нами в § 6.5 (уравнение (33)), при изменении знака принимает вид

$$W_3(p_i, Q_i) = p_1 f(Q_1, Q_2) + p_2 g(Q_1, Q_2), \tag{110}$$

где f и g — пока произвольные функции, за исключением того, что они являются сопряженными гармоническими функциями и потому удовлетворяют условию Коши — Римана

$$\frac{\partial f}{\partial Q_1} = \frac{\partial g}{\partial Q_2} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial Q_2} = -\frac{\partial g}{\partial Q_1}. \tag{111}$$

Так как W_3 в форме (110) не содержит явно время, то можно принять

$$q_i = \frac{\partial W_3}{\partial p_i} \text{ и } P_i = \frac{\partial W_3}{\partial Q_i},$$

пренебрегая отрицательными знаками, указанными в табл. I § 6.3.

Формулы преобразования принимают вид

$$q_1 = f(Q_1, Q_2), \quad q_2 = g(Q_1, Q_2), \tag{112}$$

$$P_1 = p_1 \frac{\partial f}{\partial Q_1} + p_2 \frac{\partial g}{\partial Q_1}, \quad P_2 = p_1 \frac{\partial f}{\partial Q_2} + p_2 \frac{\partial g}{\partial Q_2}. \tag{113}$$

Обозначая

$$\frac{\partial f}{\partial Q_1} = a_{11}, \quad \frac{\partial g}{\partial Q_1} = a_{12}$$

и используя уравнения (111), получаем уравнения (113) в виде

$$P_1 = a_{11} p_1 + a_{12} p_2, \quad P_2 = -a_{12} p_1 + a_{11} p_2.$$

Их можно записать также в матричной форме

$$\mathbf{P}=\mathbf{A}\mathbf{p}, \tag{114}$$

где неособенная матрица $\mathbf{A}$ равна

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix},$$

а

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}^*}{D},$$

где

$$D(Q_1, Q_2)=\det \mathbf{A}=\left(\frac{\partial f}{\partial Q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial Q_1}\right)^2. \tag{115}$$

Инверсия уравнения (114) дает

$$\mathbf{p}=\mathbf{A}^*\mathbf{P}/D$$

и, следовательно,

$$\mathbf{p}^2=\mathbf{P}^2/D.$$

Новый гамильтониан принимает вид

$$\tilde{H}=\frac{1}{2}\frac{P_1^2+P_2^2}{D}-\frac{1}{(f^2+g^2)^{1/2}}, \tag{116}$$

и уравнения движения записываются в виде

$$\dot{Q}_1=P_1/D, \quad \dot{Q}_2=P_2/D, \tag{117}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_1&=\frac{1}{2}\frac{P_1^2+P_2^2}{D^2}\frac{\partial D}{\partial Q_1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(f^2+g^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial Q_1}(f^2+g^2), \\ \dot{P}_2&=\frac{1}{2}\frac{P_1^2+P_2^2}{D^2}\frac{\partial D}{\partial Q_2}-\frac{1}{2}\frac{1}{(f^2+g^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial Q_2}(f^2+g^2). \end{aligned} \tag{118}$$

К этим же результатам можно прийти с помощью гамильтониана в расширенном фазовом пространстве

$$\Gamma=P_3+\frac{P_1^2+P_2^2}{2D}-\frac{1}{(f^2+g^2)^{1/2}} \tag{119}$$

и соответствующих уравнений движения (см. уравнения (25) § 6.4)

$$\frac{dQ_i}{d\varpi}=\frac{\partial \Gamma}{\partial P_i} \quad \text{и} \quad \frac{dP_i}{d\varpi}=-\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_i}. \tag{120}$$

Подставляя функцию Γ, определяемую уравнением (119), в первую систему уравнений (120), получаем

$$\frac{dQ_1}{d\varpi}=\frac{P_1}{D}, \quad \frac{dQ_2}{d\varpi}=\frac{P_2}{D}, \quad \frac{dQ_3}{d\varpi}=1. \tag{121}$$

Так как $Q_3 = t$, то $w = t + \text{const}$ и

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{P_i}{D}, \qquad i = 1, 2.$$

Эти уравнения идентичны уравнениям (117). Вторая система уравнений (120) приводит к аналогичным выводам, за исключением случая $i = 3$, для которого

$$\frac{dP_3}{dw} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_3}$$

или $P_3 = 0$, чего и следовало ожидать, так как $P_3 = -H = \text{const}$.

Для того чтобы осуществить изменение временно́й переменной, можно воспользоваться методом, описанным в § 6.6. Пусть преобразование определяется уравнением

$$dt = D(Q_1, Q_2)\, d\tau, \tag{122}$$

где D выражается равенством (115), а τ здесь — новая временна́я переменная. Заметим, что преобразованное время T в уравнении (61) § 6.6 теперь становится регуляризованным временем τ гл. 3.

Новый гамильтониан в расширенном фазовом пространстве равняется $\Gamma^* = D\Gamma$ или

$$\Gamma^* = DP_3 + \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) - \frac{D}{(f^2 + g^2)^{1/2}}. \tag{123}$$

Применяя уравнения (62) § 6.6, получаем уравнения движения

$$\frac{dQ_i}{d\tau} = P_i \tag{124}$$

и

$$\frac{dP_i}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial Q_i}\left[D\left(P_3 - \frac{1}{(f^2 + g^2)^{1/2}}\right)\right], \tag{125}$$

здесь в обоих уравнениях $i = 1, 2$.

Для $i = 3$ уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial \Gamma^*}{\partial P_3} = \frac{dQ_3}{d\tau} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Gamma^*}{\partial Q_3} = -\frac{dP_3}{d\tau}$$

или

$$D = \frac{dt}{d\tau} \quad \text{и} \quad P_3 = \text{const},$$

что полностью согласуется с уравнением (122) и с равенством $P_3 = -H = \text{const}$.

Поскольку особенность задачи связана с членом

$$\frac{D}{(f^2 + g^2)^{1/2}} = \frac{D}{r}$$

в уравнении (125), при выборе функций f и g нужно иметь в виду, что это выражение в интересующей нас области должно быть регулярным. Если ввести функцию $f+ig=\Phi$, где $i=(-1)^{1/2}$, то верхнее выражение примет вид

$$\frac{D}{(f^2+g^2)^{1/2}}=\frac{|\Phi'|^2}{|\Phi|},$$

где

$$\Phi'=\frac{\partial f}{\partial Q_1}+i\frac{\partial g}{\partial Q_1}.$$

Леви-Чивита выбирал функцию Φ в виде

$$\Phi=(Q_1+iQ_2)^2,$$

она соответствует функции (64) § 3.3.

Отсюда получаем

$$D=4(Q_1^2+Q_2^2),$$
$$f^2+g^2=(Q_1^2+Q_2^2)^2$$

и, следовательно,

$$\frac{D}{(f^2+g^2)^{1/2}}=4.$$

Уравнения движения следуют из уравнений (124) и (125):

$$\frac{dQ_i}{d\tau}=P_i,\quad \frac{dP_i}{d\tau}=-P_3\frac{\partial D}{\partial Q_i}\qquad i=1,2. \tag{126}$$

Подставляя $-\tilde{H}$ вместо P_3, вычисляя частные производные и обозначая производные по новой временной переменной штрихами, получаем

$$Q_1'=P_1,\quad Q_2'=P_2,\quad P_1'=8\tilde{H}Q_1,\quad P_2'=8\tilde{H}Q_2. \tag{127}$$

Дифференциальные уравнения второго порядка для Q_1 и Q_2 принимают вид

$$Q_i''=8\tilde{H}Q_i,\qquad i=1,2. \tag{128}$$

Решение будет выражаться тригонометрическими или гиперболическими функциями, в зависимости от знака $\tilde{H}$. Эллиптическим (гиперболическим) движениям соответствует $\tilde{H}<0$ ($\tilde{H}>0$), и решения выражаются тригонометрическими (гиперболическими или экспоненциальными) функциями. В случае $\tilde{H}=0$ для функций $Q_i(\tau)$ имеем линейные соотношения. Уравнения (128) идентичны уравнениям (68) § 3.3: $\Phi=w^2$, $Q_1=u$, $Q_2=v$ и $\tilde{H}=-C/2$ при $\mu=\mu_2=0$, согласно уравнению (25) § 7.3. Сделанные выше замечания относительно эллиптических и гиперболи-

ческих решений выражаются уравнениями (87), (88) и (89) § 3.3.

После того, как решение уравнений (128) получено в форме $Q_i = Q_i(\tau)$, его следует подставить в уравнение

$$dt = 4(Q_1^2 + Q_2^2)\,d\tau$$

и получить соотношение между t и τ. Проделав это, получим функции $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ и окончательное решение $q_1(t)$, $q_2(t)$ найдем из соотношений $q_1 = Q_1^2 - Q_2^2$, $q_2 = 2Q_1Q_2$.

7.8.2. Регуляризация ограниченной задачи. Основная цель данного пункта состоит в том, чтобы показать, каким образом выполняется регуляризация в рамках канонических переменных при использовании понятия расширенного фазового пространства. Исследование проводится на обобщенном уровне, так что читатель сможет использовать полученные здесь результаты для решения различных новых задач. Исследование начинается с гамильтониана во вращающейся прямоугольной декартовой системе координат (уравнение (9)). Для обозначений будем использовать строчные буквы, вместо заглавных, которые позже найдут применение для обозначения преобразованных координат. Итак, имеем

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2p_1 - q_1p_2 - F(q_1, q_2), \qquad (129)$$

где q_1 и q_2 — координаты равномерно вращающейся прямоугольной декартовой системы, p_1 и p_2 — сопряженные импульсы, а функция F равна

$$F(q_1, q_2) = \mu_1/r_1 + \mu_2/r_2,$$

здесь

$$r_1 = [(q_1 - \mu_2)^2 + q_2^2]^{1/2} \quad \text{и} \quad r_2 = [(q_1 + \mu_1)^2 + q_2^2]^{1/2} \qquad (130)$$

(сравните с уравнением (16)).

Сначала выполним преобразование координат в фазовом пространстве, затем в расширенном фазовом пространстве.

Воспользуемся производящей функцией, определенной уравнением (110):

$$W_3 = p_1 f(Q_1, Q_2) + p_2 g(Q_1, Q_2).$$

Формулами преобразования пусть будут опять

$$q_i = \frac{\partial W_3}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad P_i = \frac{\partial W_3}{\partial Q_i} \qquad i = 1, 2.$$

Следовательно, уравнения (111)—(115) не изменятся, и мы снова будем иметь

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{P}^2/D.$$

Для получения нового гамильтониана нужно вычислить величину $q_2p_1-p_2q_1$, которой не было в задаче двух тел. Посредством подстановки получаем

$$q_2p_1-p_2q_1=\frac{1}{2D}\left[P_1\frac{\partial}{\partial Q_2}(f^2+g^2)-P_2\frac{\partial}{\partial Q_1}(f^2+g^2)\right].$$

Из уравнения (129) находим новый гамильтониан:

$$\bar{H}=\frac{1}{2D}\left[P_1^2+P_2^2+P_1\frac{\partial}{\partial Q_2}(g^2+f^2)-\right.$$
$$\left.-P_2\frac{\partial}{\partial Q_1}(g^2+f^2)-\tilde{F}(Q_1, Q_2)\right. \quad (131)$$

Вычисляя $\tilde{F}$, мы здесь написали $f(Q_1, Q_2)$ вместо q_1, и $g(Q_1, Q_2)$ вместо q_2 в уравнениях (130).

Уравнения движения запишутся теперь в виде

$$\left.\begin{aligned}\dot{Q}_1&=\frac{1}{2D}\left[2P_1+\frac{\partial}{\partial Q_2}(f^2+g^2)\right],\\ \dot{Q}_2&=\frac{1}{2D}\left[2P_2-\frac{\partial}{\partial Q_1}(f^2+g^2)\right],\end{aligned}\right\} \quad (132)$$

$$\dot{P}_1=-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial Q_1},\quad \dot{P}_2=-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial Q_2}. \quad (133)$$

В расширенном фазовом пространстве гамильтониан будет иметь вид

$$\Gamma=P_3+\frac{1}{2D}\left[P_1^2+P_2^2+P_1\frac{\partial}{\partial Q_2}(f^2+g^2)-\right.$$
$$\left.-P_2\frac{\partial}{\partial Q_1}(f^2+g^2)\right]-\tilde{F}(Q_1, Q_2), \quad (134)$$

и уравнения движения примут в сущности тот же вид, что и уравнения (132) и (133).

Новый гамильтониан в расширенном фазовом пространстве будет равен $\Gamma^*=D\Gamma$ или

$$\Gamma^*=DP_3+\frac{1}{2}\left[P_1^2+P_2^2+P_1\frac{\partial}{\partial Q_2}(f^2+g^2)-\right.$$
$$\left.-P_2\frac{\partial}{\partial Q_1}(f^2+g^2)\right]-D\tilde{F}. \quad (135)$$

Отсюда, применяя новую временную переменную τ, можно получить уравнения движения. Воспользуемся уже применявшимся ранее соотношением между dt и $d\tau$: $dt=Dd\tau$. Обозначая производные по τ штрихами, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}Q_1'&=P_1+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial Q_2}|\Phi|^2,\\ Q_2'&=P_2-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial Q_1}|\Phi|^2,\\ Q_3'&=D.\end{aligned}\right\} \quad (136)$$

Последним уравнением, как и следовало ожидать, будет $dt = Dd\tau$, и, как и ранее,

$$\Phi(Q_1, Q_2) = f(Q_1, Q_2) + ig(Q_1, Q_2).$$

Вторая система уравнений движения Гамильтона записывается в виде

$$\begin{aligned}
P_1' &= -P_3\frac{\partial D}{\partial Q_1} - \frac{1}{2}\left[P_1\frac{\partial^2|\Phi|^2}{\partial Q_1\partial Q_2} - P_2\frac{\partial^2|\Phi|^2}{\partial Q_1^2}\right] + \frac{\partial}{\partial Q_1}(D\tilde{F}),\\
P_2' &= -P_3\frac{\partial D}{\partial Q_2} - \frac{1}{2}\left[P_1\frac{\partial^2|\Phi|^2}{\partial Q_2^2} - P_2\frac{\partial^2|\Phi|^2}{\partial Q_2\partial Q_1}\right] + \frac{\partial}{\partial Q_2}(D\tilde{F}),\\
P_3' &= 0.
\end{aligned} \tag{137}$$

Последнее уравнение выражает тот факт, что H постоянно. Последний член в двух первых уравнениях системы (137) содержит особенность, аналогично члену $D(f^2+g^2)^{-1/2}$ в задаче двух тел.

Уравнения (136) и (137) представляют систему шестого порядка. Опуская последнее тривиальное уравнение в обеих группах, можно показать, что остающаяся система уравнений четвертого порядка эквивалентна уравнению (92′) § 3.4. Для этого требуется вычислить Q_1'' и Q_2'' из уравнений (136) и подставить в результирующие уравнения P_1' и P_2' из уравнений (137) и P_1 и P_2 из уравнений (136). Проделав это, получим два уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned}
Q_1'' - 2DQ_2' &= \frac{\partial}{\partial Q_1}D\left(\frac{1}{2}|\Phi|^2 - P_3 + \tilde{F}\right),\\
Q_2'' + 2DQ_1' &= \frac{\partial}{\partial Q_2}D\left(\frac{1}{2}|\Phi|^2 - P_3 + \tilde{F}\right).
\end{aligned} \tag{138}$$

Для того чтобы сравнить эти уравнения с соответствующим единственным уравнением (92′) § 3.4, рассмотрим сначала уравнение (22) в форме

$$\frac{1}{2}(f^2+g^2) + \tilde{F} = \Omega - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2.$$

Здесь вместо величин Q_1 и Q_2, входящих в уравнение (22) и представляющих координаты прямоугольной декартовой синодической системы, мы приняли $q_1 = f$ и $q_2 = g$. Так как $|\Phi|^2 = f^2+g^2$, то последнее уравнение принимает вид

$$\frac{1}{2}|\Phi|^2 + \tilde{F} = \Omega - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2.$$

Вычитая из него уравнение (25) в форме

$$P_3 = -\tilde{H}_0 = \frac{C - \mu_1\mu_2}{2},$$

находим

$$\frac{1}{2}|\Phi|^2 - P_3 + F = \Omega - C/2. \tag{139}$$

Подставляя уравнение (139) в (138), получаем

$$\begin{aligned} Q_1'' - 2DQ_2' &= \frac{\partial}{\partial Q_1} D\,(\Omega - C/2), \\ Q_2'' + 2DQ_1' &= \frac{\partial}{\partial Q_2} D\,(\Omega - C/2). \end{aligned} \tag{140}$$

Для того чтобы провести сравнение с уравненнем (92′) § 3.4, положим $w = Q_1 + iQ_2$ и $D = |\Phi|^2 = |f'(w)|^2$. В этих обозначениях уравнения (140) запишутся в виде

$$w'' + 2i\,|f'(w)|^2 w' = \operatorname{grad}_w |f'|^2 (\Omega - C/2).$$

Мы видим, что это уравнение идентично уравнению (92′) § 3.4, что и требовалось показать.

На этом мы заканчиваем рассмотрение общего метода регуляризации уравненнй движения в рамках динамики Гамильтона.

§ 7.9. Замечания

Некоторые из представленных в этой главе канонических преобразований приводятся у Уиттекера [1], Брауэра и Клеменса [2, стр. 539—540] и Пуанкаре [3].

Подробное описание в § 7.3 скоростей и импульсов в сидерической и синодической системах координат объясняется тем, что в литературе встречаются неверные утверждения и ошибочные интерпретации этих переменных. Даже в книге Уиттекера [1], вообще отличающейся ясным изложением, некоторые утверждения могут быть неверно истолкованы.

Вывод переменных Делоне, данный в § 7.6, содержится у Пуанкаре [3] и у Уиттекера [1] (который ссылается на Пуанкаре). Он лишь слегка отличается от стандартного способа введения переменных Делоне в более поздних работах, таких как книги Смарта [4], Голдстейна [5], Брауна и Шука [6], и другие.

Обозначение гамильтониана буквой F вместо H в пункте 7.7.3 возможно позволит избежать путаницы, так как в трехмерном случае третья переменная Делоне обычно тоже обозначается через H. Отличить «координаты» от «импульсов» нужно для того, чтобы получить правильный арифметический результат; большого (или вообще какого-либо) физического значения это не имеет. Мы об этом говорили в §§ 6.5, 6.7 и 7.7 и снова к этому вопросу вернулись при выводе уравнений (102а) и (102б) в пункте 7.7.3. (См. также Брауэра и Клеменса [2, стр. 291].)

Три системы переменных Делоне, рассмотренные в пункте 7.7.4, являются их комбинациями и представляют интерес для небесной механики; они имеют отношение к некоторым примерам, приведенным в работе [2, стр. 540].

Пункты 7.8.1 и 7.8.2 посвящены систематическому изложению канонической регуляризации. Некоторые из вариантов могут быть выполнены; один, наиболее важный, может объединить два преобразования (координат и временн) в одно [7].

Высказывание Биркгофа [8], приведенное нами во введении к этой главе, взято из одной его статьи, представленной им на собрание Американского математического общества в 1926 г.

Общие методы теории возмущений, излагаемые позже в гл. 8, а также применение переменных Делоне, с которыми мы познакомили читателей в этой главе, и аналитическое исследование «качающихся» траекторий, которое будет проведено в гл. 10, — все это содержится и связывается между собой в статье Гори [9].

§ 7.10. Литература

1. Whittaker E. T. Analytical Dynamics — 4th ed.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1937. Reprinted by Dover, New York, 1944. [Русский перевод: Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.— М.: Л. Гостехиздат, 1937.]
2. Brouwer D., Clemence G. M. Methods in Celestial Mechanics.— New York: Academic Press, 1961. [Русский перевод: Брауер Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики.— М.: Мир, 1964.]
3. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.— Paris: Gauthier-Villars, 1892—1899, 3 vols. Reprinted by Dover, New York, 1957. [Русский перевод: Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр., т. 1, 2 — М.: Наука, 1971, 1972.]
4. Smart W. M. Celestial Mechanics.— New York: Longmans Green, 1953. [Русский перевод: Смарт У. Небесная механика.— М.: Мир, 1965.]
5. Goldstein H. Classical Mechanics. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1950. [Русский перевод: Голдстейн Г. Классическая механика. 1-е изд.— М.: Гостехиздат, 1957; 2-е изд.— М.: Наука, 1975.]
6. Brown E. W., Shook C. A. Planetary Theory. London; New York: Cambridge Univ. Press, 1933. Reprinted by Dover, New York, 1964.
7. Levi-Civita T. Sur la régularisation du problème des trois corps.— Acta Math., 1920, **42**, 99.
8. Birkhoff G. D. Stability and the equations of dynamics.— Am. J. Math., 1927, **49**, 1; also Collected Mathematical Papers. New York: Am. Math. Soc., 1950, v. 2, p. 295.
9. Hori G. The motion of a hyperbolic artificial satellite around the oblate earth.— Astron. J., 1961, **66**, 258.

Глава 8

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ

§ 8.1. Введение

Лучшим введением в главу о периодических орбитах будет, пожалуй, перечисление причин, объясняющих их важность. «Право на существование» (*raison d'être*), т. е. основные причины, побуждающие изучать теоретические аспекты периодических орбит, для большинства студентов чаще всего бывают неизвестны, поэтому мы коротко на них остановимся. Затем мы познакомим читателей с основным содержанием главы.

Пуанкаре в первом томе своих *Méthodes Nouvelles* рассматривает периодические орбиты как единственный путь в исследовании задачи трех тел и подчеркивает их важную роль. Если дано частное решение ограниченной задачи, то всегда можно найти периодическое решение (с периодом, который может быть очень большим) такое, что разница между двумя этими решениями будет сколь угодно малой для любого заданного отрезка времени. Весьма интересна интерпретация Шварцшильда по поводу высказывания Пуанкаре, данная им на языке фазового пространства. В произвольно близкой окрестности любой точки в фазовом пространстве имеется точка, представляющая периодическую орбиту. Иначе говоря, небольшие изменения любых начальных условий приводят к периодической орбите, в общем случае с весьма большим периодом. Как в своей первоначальной форме, так и в модифицированной предложение Пуанкаре сводится к использованию периодических орбит в качестве исходных орбит. Именно так поступили Энке и Хилл: первый из них в качестве исходной орбиты использовал эллипс, второй — вариационную орбиту.

Для неинтегрируемых динамических систем, по-видимому, невозможно получить полную информацию относительно *любой* орбиты, если только она не является асимптотической, периодической или почти периодической. Не существует численных методов, с помощью которых можно было бы решить задачу при $t \to \infty$, и потому, если поведение решения не известно из каких-либо других, не численных соображений, когда $t \to \infty$, то оно вообще не может быть установлено. С другой стороны, поведение системы в течение продолжительного времени считается

известным, если движение является периодическим, почти периодическим или асимптотическим. Это замечание относится к точной информации относительно орбит, а не к статистическим (т. е. эргодическим) свойствам.

Другая причина, объясняющая интерес к периодическим орбитам, заключается в том, что в ограниченной задаче несколько семейств таких орбит могут быть получены из решений задачи двух тел, и с помощью аналитического продолжения можно доказать существование этих периодических орбит. Кроме того, некоторые асимптотические и периодические решения можно получить из линеаризованных решений, которые мы рассматривали раньше в связи с движением вокруг точек либрации.

Как отмечает Дарвин, периодические орбиты играют также важную роль в классификации совокупности орбит и разделении их на классы. Это тоже в определенной мере оправдывает интерес, проявляемый к периодическим орбитам.

Важно отметить, что изучение периодических орбит позволяет понизить размерность задачи в фазовом пространстве. Рассмотрим, например, орбиты с начальными условиями $x=x_0$, $y=0$, $\dot{x}=0$ и $\dot{y}=\dot{y}_0$, т. е. орбиты, пересекающие под прямым углом ось x в $x=x_0$ со скоростями, перпендикулярными к оси x. Совокупность таких начальных условий соответствует точкам плоскости $x_0\dot{y}_0$. Если рассматриваются простые периодические орбиты, то можно получить соотношение $\dot{y}_0=\dot{y}_0(x_0)$ (с возможными точками разветвления), и совокупность начальных условий будет соответствовать тогда точкам кривой $\dot{y}_0(x_0)$.

Выше мы привели пять причин, указывающих на важность изучения периодических орбит в рамках ограниченной задачи. К этим аргументам можно добавить важность вообще периодических явлений в небесной механике и физических науках.

В этой главе проводятся также доказательства существования некоторых типов периодических орбит. Сначала рассматривается задача двух тел и выводится условие существования периодических орбит во вращающейся системе координат. Затем устанавливается совокупность (эллиптических) движений вокруг основного тела единичной массы внутри кривой нулевой скорости. Состояния движения представляются точками внутри полого цилиндра и на нем. После этого дается описание движения на торе, предложенное А. Н. Колмогоровым, и рассматривается отображение кольца в самого себя, проделанное Биркгофом.

Преобразование кольца продолжается от случая двух тел до случая $\mu\neq 0$. На этом основывается доказательство существования тех периодических орбит, которые Пуанкаре называет *première sorte* (т. е. «первого сорта», или, как мы будем говорить в дальнейшем, первого рода). Эти орбиты получаются

посредством аналитического продолжения круговых орбит в задаче двух тел.

Представление динамической задачи как отображения поверхности в самое себя впервые было высказано Пуанкаре. Предполагается, что в множестве состояний движения может быть образована двумерная поверхность, обладающая тем свойством, что линии тока (см. гл. 2) пересекают поверхность по крайней мере один раз за фиксированный промежуток времени. Пуанкаре и Биркгоф изучали эти пересечения линий тока с «поверхностью сечения» и установили, что когда одна и та же линия тока с возрастанием времени пересекает поверхность в различных точках, поверхность отображается в самое себя. Число степеней свободы в ограниченной задаче равно $n=2$, а размерность множества состояний движения (или порядок системы) равна $2n=4$ и может быть понижена с помощью интеграла Якоби до $2n-1=3$. Это трехмерное множество состояний движения (существующее для каждого фиксированного значения постоянной Якоби) имеет $(2n-2=2)$-мерные поверхности, некоторые из которых мы выше определили как поверхности сечения. Тот факт, что ограниченная задача имеет две степени свободы, существенен для этих исследований. Трехмерный вариант ограниченной задачи соответствует $n=3$, и так как имеется только один интеграл, то поверхность сечения становится четырехмерной.

Поскольку динамическая система связана с преобразованием (T) поверхности в самое себя, мы будем свойства динамической системы выражать посредством T. Периодичность динамической системы выражается просто в инвариантности определенных точек поверхности в отношении преобразования T.

Существование решений *deuxième sorte* (второго сорта) представлено в переменных Делоне. Эти решения образованы эллиптическими решениями соответствующей задачи двух тел. Периодические орбиты третьего рода требуют введения третьей координаты (дополнительно к x и y); эти орбиты рассматриваются в гл. 10.

В главу включены короткие параграфы 8.7 и 8.8 об условии Уиттекера для периодических орбит и о характеристических показателях Пуанкаре. Установлена тесная связь с гл. 5, и рассмотренные в § 5.2 задачи об устойчивости (по Ляпунову) линейных и нелинейных систем будут полезны нам здесь.

Поскольку результаты численных расчетов орбит излагаются в гл. 9, периодические орбиты, полученные численными методами, естественно, отнесены к той главе. Часто бывает трудно решить, какие аспекты, аналитические или численные, имеют более важное значение для периодических орбит. С действительными орбитами читатель встретится в гл. 9, здесь же основное

внимание уделяется общим вопросам аналитического характера.

Полное исследование периодических орбит выходит за рамки данной книги. Однако было бы полезно, прежде чем переходить к приложениям к ограниченной задаче, изучить результаты Пуанкаре, Биркгофа, русской школы, последних топологических исследований, а также познакомиться с результатами предпринятых усилий придать классическим методам теории возмущений в небесной механике точный аналитический смысл.

§ 8.2. Определения

А. Мы будем говорить о *периодическом движении* динамической системы, когда одна и та же конфигурация повторяется через равные промежутки времени. Например, в неподвижной системе координат существует решение задачи двух тел, которое повторяется через период

$$T_{\text{сид}}=\frac{2\pi}{n},$$

где n — среднее движение, а индекс «сид» указывает на то, что применяется *сидерическая* система. Рассмотрим теперь вращающуюся систему координат с периодом вращения $T_{\text{сист}}=2\pi$; здесь индекс «сист» указывает на то, что имеется в виду период самой вращающейся *системы*. Периодическое движение в этой вращающейся системе существует тогда, когда $n=p/q$, где p и q — целые числа, или, другими словами, когда n есть число рациональное. Синодическая траектория (орбита во вращающейся системе) замыкается (начинает повторять себя) через промежуток времени, равный $|p|$ сидерическим периодам ($|p|T_{\text{сид}}=2\pi p/n=2\pi q$), так что

$$T_{\text{син}}=2\pi q,$$

где индекс «син» означает *синодическую* систему координат.

Эти периоды равны, когда $2\pi q=2\pi/n$, т. е. когда среднее движение (в неподвижной системе) равно обратной величине целого числа ($n=1/q$).

Сделанные выше замечания относятся к эллиптическим орбитам, а не к круговым движениям, которые в обеих системах всегда являются периодическими. Пусть снова n будет средним движением и $T^c_{\text{сид}}=2\pi/n$, где верхний индекс «c» означает круговое движение. Для прямой круговой орбиты, чтобы получить среднее движение частицы относительно вращающейся системы, ее среднее движение нужно уменьшить на единицу; таким образом, будем иметь

$$T^c_{\text{син}}=\frac{2\pi}{n-1},$$

где n может быть как рациональным числом, так и иррациональным. Подробней об этих уравнениях будет сказано позже, сейчас же мы лишь заметим, что периодичность не обязательно является абсолютным (физическим) свойством динамической системы. Эллиптические движения в задаче двух тел в неподвижной системе всегда являются периодическими, но отсюда совсем еще не следует, что то же самое будет иметь место во вращающейся системе координат. С другой стороны, круговые движения всегда являются периодическими в обеих системах. В этом по существу и состоит основное различие между орбитами Пуанкаре первого и второго рода.

Б. Пусть система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

имеет частное решение $x_i = \varphi_i(t)$. Если функции φ_i обладают тем свойством, что

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(T),$$

или, другими словами, если начальное значение функций φ_i равно их значению в эпоху T и, следовательно, $\varphi_i(t) = \varphi_i(t+T)$, то функции φ_i являются периодическими по t с периодом T, а $x_i = \varphi_i(t)$ является *периодическим решением* дифференциальных уравнений.

В. Непрерывная функция $x(t)$ является *почти периодической* (по Бору), если для заданного $\varepsilon > 0$ существует $E(\varepsilon)$, такое, что для любого действительного числа α существует такое T (почти период), которое удовлетворяет неравенствам $\alpha \leqslant T \leqslant \alpha + E(\varepsilon)$ и для которого при всех t

$$|x(t+T) - x(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Когда $x(t)$ является периодической функцией, $\varepsilon = 0$ и T становится периодом. Поэтому можно сказать, что почти периодическая функция есть «периодическая» функция с «ошибкой» ε.

Заметим, что каждая почти периодическая функция $x(t)$ может быть равномерно аппроксимирована тригонометрическим многочленом, так что

$$\left| x(t) - \sum_n a_n e^{t\lambda_n t} \right| < \varepsilon^*$$

для заданного ε^*, при конечном числе членов.

Специальный класс почти периодических функций включает *квазипериодические функции* (по Болю). Квазипериодическая функция имеет только конечное число основных частот ω_i и может быть представлена в виде

$$x(t) = X(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t),$$

где X — непрерывная периодическая функция аргументов $\omega_i t$.

Г. Проблема малых делителей в небесной механике известна как явление резонанса в общей динамике. Эти делители определяются выражением

$$\omega_i k_i = \sum_{i=n}^{n} \omega_i k_i,$$

где величины ω_i означают средние движения, или собственные частоты, или собственные значения динамической системы, а k_i — целые числа. Частоты несоизмеримы при $\omega_i k_i = 0$ тогда и только тогда, когда $k_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Иными словами, мы будем говорить о несоизмеримости частот тогда, когда нельзя найти систему целых чисел (отличных от нуля) таких, чтобы верхняя сумма обращалась в нуль. Это можно проиллюстрировать, например, при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2^{1/2}$, когда отношение ω_2/ω_1 иррационально. При больших абсолютных значениях k_1 и k_2 величина $k_1 + 2^{1/2} k_2$ может быть сделана сколь угодно малой, но при малых целых числах $|k_1|$ и $|k_2|$ сумма $\omega_i k_i$ не будет близка к нулю.

Если отношения частот выражаются числами рациональными, то сумма $\omega_i k_i$ может обращаться в нуль без того, чтобы $k_i = 0$, и в этом случае мы говорим о соизмеримости. Эта сумма входит в разложение возмущающей функции в небесной механике:

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n} a_{k_1, \ldots, k_n} e^{i(k_j \omega_j)t}.$$

Это выражение после интегрирования вводит указанные выше малые знаменатели.

Рассмотрим пример, носящий название «большого неравенства» и относящийся к движению Юпитера и Сатурна. Орбитальные периоды равны $T_{♃} = 4332^d{,}58$ и $T_{♄} = 10\,759^d{,}20$ и, следовательно, $5T_{♃} - 2T_{♄} = 144^d{,}5$. Эту «почти соизмеримость» можно выразить через частоты, или средние движения, так как за сутки, в течение которых Юпитер перемещается на угол $\varphi_{♃} = 299''{,}12893$, Сатурн перемещается на угол $\varphi_{♄} = 120''{,}45505$ и, следовательно, $2\varphi_{♃} - 5\varphi_{♄} = 4''{,}01739$. Безразмерный делитель имеет, конечно, одно и то же значение, вычисляется ли он через средние движения или через периоды:

$$\frac{5T_{♃} - 2T_{♄}}{(T_{♃} + T_{♄})/2} = 0{,}02.$$

Точка соединения требует 883 года, чтобы завершить обращение, и с этим долгим периодом связаны большие возмущения, обусловленные появлением малого делителя.

Д. Введем *понятие тора* посредством системы дифференциальных уравнений m-го порядка

$$x_i = f_i(x_1, \ldots, x_m),$$

при условии, что выполняется следующее условие периодичности.

Пусть α_i будут постоянными и

$$f_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m) = f_i(x_1 + \alpha_i, \ldots, x_j + \alpha_j, \ldots, x_m + \alpha_m)$$

для $i = 1, \ldots, m$. Если x_i — угловые переменные, то α_i являются собственными «периодами» и x_i должны сводиться к $\bmod \alpha_i$. Можно показать, что функции $x_i(t)$, представляющие решение, лежат в этом случае на торе.

В качестве простого, но важного для небесной механики примера рассмотрим следующий: $\dot{x}_i = \beta_i = \text{const}$. В этом случае $x_i = \beta_i t + x_i^0$. В синодической системе координат аргумент перигелия (скажем, x_1) вращается с постоянной угловой скоростью $\beta_1 = 1$ и средняя аномалия (скажем, x_2) есть линейная функция времени ($\beta_2 = n$); обе переменные относятся к эллиптической орбите в задаче двух тел.

Когда отношение β_1/β_2 есть число рациональное, движение во вращающейся системе является периодическим и орбита на торе замыкается на себя. В случае, когда это отношение иррационально, кривая после достаточно большого числа оборотов приближается сколь угодно близко к своей начальной точке, и мы имеем квазипериодическое движение.

В то время как траектория периодической орбиты на торе не покрывает всей поверхности тора, почти периодическое решение является всюду плотным, фактически равномерно распределенным. Под этим мы понимаем, что время τ, которое точка, описывающая траекторию, тратит в заданной области, при большом τ пропорционально размеру этой области.

Е. Система является *рекуррентной*, если система начальных условий повторяет себя, с точностью до произвольной малой «ошибки» ε, бесконечно часто. Точная рекуррентность имеет место при $\varepsilon = 0$. Если фазовое пространство ограничено для динамической системы, состоящей из материальных точек, на которые действуют силы, зависящие только от позиционных координат, то выполняется циклическая теорема Пуанкаре, т. е. система является рекуррентной.

Если угловые переменные имеют частоты ω_i, то условие для точной рекуррентности такое же, как и для соизмеримости: $\sum_{i=1}^{N} k_i \omega_i = 0$, $k_i \neq 0$. Время возвращения T^* в этом слу-

чае равно

$$T^* = \frac{n_i 2\pi}{\omega_i},$$

где n_i — положительные целые числа и

$$\omega_1 : \omega_2 : \ldots : \omega_n = n_1 : n_2 : \ldots : n_N.$$

Когда возвращение происходит с точностью до ошибки ε, мы имеем

$$\left| \frac{T^* \omega_i}{2\pi} - n_i \right| < \varepsilon.$$

Это неравенство должно выполняться одновременно для всех i. (См. пункт 5.6.1 и анализ рис. 5.14 и 5.15 в гл. 5.)

Ж. *Асимптотические* орбиты определяются их свойством приближаться все ближе и ближе к заданной орбите, когда $t \to \infty$ или когда $t \to -\infty$. (Примером второго рода может служить неустойчивая периодическая орбита, которая после возмущения не приближается к своей первоначальной форме, а наоборот, удаляется от нее.) Орбита, к которой стремится асимптотическая орбита, может представлять равновесное решение, т. е. точку, к которой орбита приближается по спирали, когда $t \to \infty$. Примеры асимптотическн-периодическнх решений рассматриваются в гл. 9, а решения, связанные с неустойчивыми точками Лагранжа, были исследованы нами в гл. 5.

З. Динамическую систему называют *квазиэргодической*, когда орбита приходит в непосредственную близость к каждой точке, принадлежащей ее энергетической поверхности. Орбита оставляет свою начальную точку в фазовом пространстве, и ее начальные условия определяют поверхность постоянной энергии, которая проходит через эту начальную точку. Орбита остается на этой энергетической поверхности, и если система является квазиэргодической, то она плотно покрывает поверхность. Квазиэргодическим свойством обладает каждая динамическая система, которая удовлетворяет следующим («нормальным») условиям (по Хопфу):

а) гамильтониан H не зависит явно от времени,

б) $H = \Sigma \mu^i H_i(x, y)$,

в) функция H_i $(i \neq 0)$ является периодической по x,

г) H_0 не зависит от x.

Это общее представление тесным образом связано, конечно, с интегральными инвариантами Пуанкаре, о которых упоминалось в гл. 2, а также с тем, что говорилось выше, в пункте Д этого параграфа.

§ 8.3. Поверхностные преобразования и изображение на торе

В этом параграфе мы рассмотрим теоремы отображения Мозера, Пуанкаре и Брауэра и теорему о возмущениях Колмогорова.

А. *Теорему Мозера* об инвариантных кривых отображений кольца, при которых сохраняется площадь, можно доказать следующим образом.

Рассмотрим полярные координаты r и φ при $0<a_1\leqslant r\leqslant a_2$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, т. е. круговое кольцо шириной a_2-a_1. Простейшее, чисто поворотное преобразование (соответствующее повороту твердого тела) описывается уравнениями

$$r_1=r,\ \varphi_1=\varphi+f_0, \tag{1}$$

где $f_0=\text{const}$. Каждая точка поворачивается при этом на один и тот же постоянный угол f_0. Более интересным является случай «скручивающего преобразования», определяемого формулами

$$r_1=r,\ \varphi_1=\varphi+f(r). \tag{2}$$

При этом преобразовании угол поворота зависит от радиальной координаты и выражается монотонной функцией $f(r)$. Вдоль любой окружности $r=r_0=\text{const}$ угол поворота один и тот же: $\varphi_1-\varphi=f(r_0)=\text{const}$. При отображении сохраняются окружности и происходит поворот их на угол, возрастающий или убывающий с радиусом, в зависимости от знака производной df/dr. Якобиан обоих отображений (уравнения (1) и (2)) равен единице, и следовательно, при этих преобразованиях площадь сохраняется неизменной.

Модификацией скручивающего преобразования является следующее:

$$r_1=r+g(r,\varphi),\ \varphi_1=\varphi+f(r_1)+h(r,\varphi). \tag{3}$$

Когда функции $|g|$ и $|h|$ малы, это преобразование можно рассматривать как отклоняющее отображение по отношению к предыдущему. Если, кроме того, функция g и h являются периодическими по φ, с периодом 2π, мы получаем отображение, имеющее важное значение в небесной механике. В уравнениях (3) r обозначает большую полуось, а φ — аргумент перигелия невозмущенного эллиптического движения. Рассмотренное выше скручивающее преобразование (2) имеет инвариантные кривые, представляющие собой окружности. При некоторых условиях можно ожидать, что удастся найти инвариантные кривые также и при преобразовании (3). Эти кривые должны

быть близки к окружностям скручивающего преобразования, так как g и h представляют собой малые возмущения.

Теорема Мозера устанавливает условие, при котором возмущенное скручивающее преобразование имеет инвариантные кривые, и указывает способ их построения. Аналитичности функций f, g и h здесь не требуется (в отличие от теоремы Колмогорова), предполагается лишь существование конечного числа производных.

Существенно, чтобы при преобразовании (3) каждая замкнутая кривая (находящаяся вблизи окружности) и кривая, являющаяся образом, пересекались. Пусть для некоторого постоянного $c>1$

$$c^{-1} \leqslant \frac{df(r)}{dr} \leqslant c$$

и для $\delta > 0$

$$|g| + |h| < \delta.$$

Кроме того, потребуем, чтобы g и h имели непрерывные производные до l-го порядка и

$$|f|_l + |g|_l + |h|_l < c,$$

где

$$|F(r, \varphi)|_z = \sup \left| \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^{\beta} F(r, \varphi) \right|$$

и $\alpha + \beta \leqslant z$.

Инвариантная кривая определяется уравнениями

$$\bar{\varphi} = \varphi + p(\varphi), \quad \bar{r} = r_0 + q(\varphi),$$

где периодические функции p и q имеют z непрерывных производных и

$$|p|_z + |q|_z < \varepsilon.$$

Заметим, что $l = l(z)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, z, c)$. Кроме того, преобразование инвариантной кривой дает

$$\varphi_1 = \varphi + f(r_0),$$

где $f(r_0) = \omega$ есть число вращения и

$$f(a) + \varepsilon < f(r_0) < f(b) - \varepsilon,$$

где $b - a \geqslant 1$.

Наконец существенно, что отношение $f(r_0)/2\pi$ не может быть особенно точно аппроксимировано рациональными числами, т. е. для всех целых чисел n, m при $n > 0$

$$|n\omega - 2\pi m| \geqslant \varepsilon n^{-3/2}.$$

Читателей, желающих познакомиться с доказательством и получить дополнительные разъяснения по этой теореме, мы отсылаем к соответствующей литературе.

Б. Интересующая нас *теорема Пуанкаре* известна как его последняя геометрическая теорема. Преобразование (имеющее инвариантный интеграл) кольца оставляет две точки инвариантными, если коэффициенты поворота на границах имеют противоположные знаки. Рассмотрим отображение кольца в самого себя, и пусть кольцо будет образовано двумя концентрическими окружностями. Преобразование перемещает точки наружной окружности в положительном направлении, а точки внутренней окружности — в отрицательном направлении. Отображение имеет инвариантный интеграл, например, оно сохраняет неизменной площадь. Таким образом, теорема устанавливает, что имеется по крайней мере две неподвижные точки этого преобразования. Первоначальная теорема относится к круговым кольцам и предполагает наличие интегрального инварианта. Посредством интегрального инварианта можно осуществить преобразование, при котором сохраняется площадь, а из круговых границ получить обобщение на случай произвольных замкнутых кривых, одна внутри другой.

Еще одну теорему о неподвижной точке доказал *Брауэр*. Она заключается в следующем.

Если R, $(a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i=1, 2, \ldots, n)$ есть замкнутый интервал евклидова пространства и если T $(y=f(x),\ x \in R)$ есть непрерывное отображение R в самого себя (т. е. если $f_i=f_i(x_1, \ldots, x_n)$ и $a_i \leqslant f_i \leqslant b_i$ для всех $x \in R$), то имеется по крайней мере одна точка $x_0 \in R$ (неподвижная точка) такая, что $Tx_0=x_0$, т. е. $f(x_0)=x_0$.

В. В доказательстве теоремы Колмогорова используется гамильтониан, зависящий только от обобщенных импульсов: $H=H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. В этом случае канонические уравнения движения принимают вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad p_i = \text{const} \tag{4}$$

и

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \omega_i(p_1, \ldots, p_n) = \text{const} \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Если обобщенными координатами q_i являются угловые переменные $\bmod 2\pi$, то для обозначения угловых скоростей применяются ω_i. Движение можно представить на n-мерном торе. Соизмеримость соответствует условию $\sum_{i=1}^{n} \omega_i k_i = 0$, где k_i — целые числа, из которых по крайней мере одно отлично от нуля.

Рассмотрим теперь «нормальную» динамическую систему (см. § 8.2) с гамильтонианом

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = H_0(p_1, \ldots, p_n) + \\ + \mu H_1(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) + \ldots,$$

где μ есть (малый) параметр, а H_1 — периодическая функция относительно q_i:

$$H_1(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = H_1(q_1 + 2\pi, \ldots, q_n + 2\pi, p_1, \ldots, p_n).$$

Согласно теореме Колмогорова, если

$$\det \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} \neq 0 \tag{6}$$

и если H есть аналитическая функция, то бо́льшая часть торов в описанном выше случае (т. е., когда $H_0 = H$) не исчезает, а лишь слегка деформируется в результате возмущения.

Выражаясь более точно, если H есть аналитическая функция и H_0 не вырождается в области G, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $M(\varepsilon, G, H_0) > 0$ такое, что если $|H - H_0| \leqslant M$, то движение обладает следующими свойствами:

а) существует разбиение области такое, что

$$G = G_1 \cup G_2, \quad \mathrm{m}(G_2) \leqslant \varepsilon \mathrm{m}(G_1),$$

где G_1 инвариантно (т. е. содержит орбиту, которая в нем начинается), а m указывает меру G_i,

б) G_1 состоит из инвариантных n-мерных аналитических торов A_ω, определяемых уравнениями

$$p = p_\omega + f_\omega(Q), \quad q = Q + g_\omega(Q),$$

где f_ω и g_ω — аналитические функции, периодические по $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$, а ω — параметр, принадлежащий тору A_ω,

в) возмущения от первоначальных торов $p = p_\omega$ малы:

$$|f_\omega| < \varepsilon, \quad |g_\omega| < \varepsilon,$$

и инвариантные торы A_ω мало отличаются от торов $p = p_\omega$,

г) движение по торам является квазипериодическим с n частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и определяется уравнением

$$\dot{Q} = \omega,$$

где

$$\omega = \left(\frac{\partial H_0}{\partial p}\right)_{p_\omega},$$

при условии, что

$$\left| \sum_{i=1}^{n} k_i \omega_i \right| \geqslant \frac{c}{\sum_{i=1}^{n} |k_i|^\alpha}$$

для любой системы целых чисел $k_1, \ldots, k_n$, $\alpha > 0$ и $c = \text{const}$. Последнее условие соответствует «нерезонансному» условию Мозера.

Теорема Колмогорова не может быть непосредственно применена к вырожденному случаю, столь важному в небесной механике. Когда движение невозмущенной системы H_0 описывается меньшим числом частот, чем возмущенная система H_1, мы имеем

$$H_0 = H_0(p_1, \ldots, p_k)$$

и

$$H_1 = H_1(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n),$$

где $n > k$ и

$$\det \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} = 0.$$

Для этого так называемого вырожденного случая возможны модификации теоремы Колмогорова.

Гамильтониан ограниченной задачи в форме уравнения 90) § 7.6 или уравнения (96) § 7.7 равен

$$H = -\frac{1}{2p_1^2} - p_2 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \ldots$$

и, следовательно,

$$H_0 = -\frac{1}{2p_1^2} - p_2,$$

где $p_1 = L$ и $p_2 = G$ представляют собой переменные Делоне.

Гессиан системы H_0 равен нулю, так как H_0 есть линейная функция одной из его переменных (p_2). Пуанкаре показал, что можно образовать другую функцию Гамильтона, гессиан которой будет отличен от нуля. Введем для этой цели новый гамильтониан $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \frac{H^2}{2h},$$

где $h = H$ — интеграл энергии. (Заметим, что H не зависит явно от времени, а h постоянно.)

Уравнения движения при новом гамильтониане будут иметь вид

$$\dot{q}_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} \quad \text{и} \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r}, \qquad r = 1, 2,$$

в чем можно убедиться посредством подстановки в первоначальные уравнения движения

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad \text{и} \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}.$$

Новый гамильтониан можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mu\mathcal{H}_1 + \mu^2\mathcal{H}_2 + \ldots$$

Новый невозмущенный гамильтониан записывается в форме

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2h}\left(\frac{1}{4p_1^4} + \frac{p_2}{p_1^2} + p_2^2\right),$$

и гессиан принимает вид

$$\frac{3}{2h^2p_1^6}(1 + 2p_2p_1^2) \neq 0.$$

Г. Для того чтобы лучше понять смысл теоремы Колмогорова, напомним слова Пуанкаре, что основная задача динамики состоит в том, чтобы найти влияние возмущения (μH_1) на поведение орбиты, когда $t \to \infty$. Ответ на этот вопрос не может основываться на сомнительной сходимости рядов в известных методах теории возмущений. Ниже мы коротко изложим основы теории возмущений, что позволит выяснить основные трудности и способы их преодоления. Нужно помнить, что под возмущением мы понимаем отклонение динамической системы от *интегрируемой* системы. Возможно было бы лучше рассматривать отклонение от *проинтегрированной* системы, так как вопрос об интегрируемости является сложным. Кроме того, интегрируемость системы легко может быть нарушена вследствие небольших возмущений, поэтому, если динамическая система описывается лишь с определенной степенью точности, то мы не в состоянии отличить интегрируемую систему от неинтегрируемой. В этих условиях теорема Колмогорова особенно важна, так как она устанавливает, что определенные инвариантные поверхности будут существовать, несмотря на малые возмущения или несмотря на наши ограниченные знания относительно точности описания динамической системы.

Рассмотрим гамильтониан динамической системы с n степенями свободы:

$$H(q, p) = H_0(p) + \mu H_1(q, p) + \mu^2 H_2(q, p) + \ldots,$$

где $p = p_i$ и $q = q_i$ обозначают n импульсов и координат и представляют собой n-векторы. Кроме того, пусть $\mu \ll 1$, и пусть выполняется условие (6).

При $\mu = 0$, как можно видеть, $H = H_0$ и, следовательно,

$$\dot{q} = \frac{\partial H_0}{\partial p} = \omega(p) \quad \text{и} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} = 0.$$

Решением невозмущенных уравнений будет

$$q = \omega t + \alpha \quad \text{и} \quad p = \beta.$$

В небесной механике функция H является периодической по координатам, так что для $k=1, 2, \ldots, n$ мы имеем

$$H_k(q, p)=H_k(q+2\pi, p).$$

Вопрос, поставленный Пуанкаре, о том, как члены

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k H_k$$

влияют на поведение системы, когда $t\to\infty$, теперь может быть сформулирован иначе, а именно, инвариантны ли торы заранее заданного решения

$$q=\omega t+\alpha,\ p=\beta?$$

Можно ли ожидать, что так как составляющие p не остаются постоянными, то решение будет оставаться вблизи тора

$$p=\text{const},$$

когда $\mu\neq 0$?

Рассмотрим преобразование переменных q, p в переменные $q^{(1)}, p^{(1)}$ такое, при котором

$$H=H_0(p)+\mu H_1(p, q)+\ldots$$

принимает вид

$$H=H_0^{(1)}(p^{(1)})+\mu^2 H_1^{(1)}(q^{(1)}, p^{(1)})+\ldots$$

Продолжая этот процесс

$$\text{от } q^{(1)},\ p^{(1)} \quad \text{до} \quad q^{(2)},\ p^{(2)},$$

получаем

$$H=H_0^{(2)}(p^{(2)})+\mu^3 H_1^{(2)}(q^{(2)}, p^{(2)})+\ldots$$

После ν шагов будем иметь

$$H=H_0^{(\nu)}(p^{(\nu)})+\mu^{\nu+1}H_1^{(\nu)}(q^{(\nu)}, p^{(\nu)})+\ldots$$

В пределе, если таковой существует,

$$H=H_0^{(\infty)}(p^{(\infty)}),$$

и система может быть проинтегрирована при $p^{(\infty)}=\text{const}$ и $q^{(\infty)}=\omega^{(\infty)}t+\alpha^{(\infty)}$.

При этом процессе решение возмущенной задачи может все меньше и меньше отклоняться от решения задачи, представляемой гамильтонианом

$$H_0^{(\nu)}(p^{(\nu)}),$$

вследствие возрастания степени μ, входящей в возмущающие члены. Рассмотрим ν-й шаг и напишем уравнения движения

в виде

$$\dot{q}^{(\nu)} = \frac{\partial H_0^{(\nu)}}{\partial p^{(\nu)}} + \mu^{\nu+1} \frac{\partial H_1^{(\nu)}}{\partial p^{(\nu)}} + \ldots$$

или

$$\dot{q}^{(\nu)} = \omega^{(\nu)}(p^{(\nu)}) + \mu^{\nu+1} f^{(\nu)}(q^{(\nu)}, p^{(\nu)}) + \ldots$$

и

$$\dot{p}^{(\nu)} = -\frac{\partial H_0^{(\nu)}}{\partial q^{(\nu)}} - \mu^{\nu+1} \frac{\partial H_1^{(\nu)}}{\partial q^{(\nu)}} + \ldots$$

или

$$\dot{p}^{(\nu)} = -\mu^{\nu+1} g^{(\nu)}(q^{(\nu)}, p^{(\nu)}) + \ldots$$

При $\mu = 0$ решение принимает вид

$$\dot{q}^{(\nu)} = \omega^{(\nu)}(p^{(\nu)}) \quad \text{и} \quad \dot{p}^{(\nu)} = 0$$

или

$$q^{(\nu)} = \omega^{(\nu)} t + \alpha^{(\nu)} \quad \text{и} \quad p^{(\nu)} = \beta^{(\nu)},$$

где $\alpha^{(\nu)}$, $\beta^{(\nu)}$ и $\omega^{(\nu)}$ — постоянные векторы.

Когда $\mu \neq 0$, мы имеем

$$q^{(\nu)} = \tilde{\omega}^{(\nu)} t + t\mu^{\nu+1} \tilde{f}^{(\nu)}$$

и

$$p^{(\nu)} = -t\mu^{\nu+1} \tilde{g}^{(\nu)},$$

где $\tilde{\omega}^{(\nu)}$, $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ означают средние значения.

Таким образом, в течение интервала времени t движение отклоняется от невозмущенного квазипериодического движения на величину, пропорциональную $t\mu^{\nu+1}$. Интервал времени для равных отклонений равен $t \sim \mu^{-(\nu+1)}$, или, другими словами, когда порядок приближения (ν) повышается, t увеличивается, так как $\mu < 1$. Следовательно, с увеличением ν последовательные приближения становятся «лучше».

Малые делители могут препятствовать приложению этих идей, если только влияние возрастающих степеней малого параметра μ^{ν} не будет компенсироваться малостью знаменателей ωk. Чтобы показать это, рассмотрим производящую функцию

$$W_2(q, P) = qP + \mu S(q, P),$$

которая приводит к следующим формулам преобразования:

$$p = P + \mu \frac{\partial S}{\partial q} \quad \text{и} \quad Q = q + \mu \frac{\partial S}{\partial P},$$

где p, q, P, Q — n-векторы.

Прежде чем подставлять новые переменные в выражение для гамильтониана, напишем сначала два разложения в ряд Тейлора, снабжая соответствующие величины индексами, чтобы избежать возможной путаницы из-за наличия вторых производных скалярной величины по вектору:

$$H_0(p_j)=H_0(P_j)+\mu\frac{\partial H_0}{\partial p_j}\frac{\partial S}{\partial q_j}+\frac{\mu^2}{2!}\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_j \partial p_k}\frac{\partial S}{\partial q_j}\frac{\partial S}{\partial q_k}+\ldots$$

и

$$H_1(q_j, p_j)=\overline{H}_1(q_j, P_j)+\mu\frac{\partial H_1}{\partial p_j}\frac{\partial S}{\partial q_j}+\mu^2(\ \ )+\ldots$$

Подставляя теперь это выражение в гамильтониан

$$H=H_0(p)+\mu H_1(p, q)+\mu^2 H_2(p, q)+\ldots$$

и возвращаясь к векторным обозначениям, получаем

$$H=H_0(P)+\mu\left[\frac{\partial H_0}{\partial p}\frac{\partial S}{\partial q}+\overline{H}_1(q, p)\right]+$$
$$+\mu^2\left[\frac{1}{2!}\frac{\partial S}{\partial q}\frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2}\frac{\partial S}{\partial q}+\frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{\partial S}{\partial q}+\overline{H}_2(q, P)\right]+\ldots,$$

где векторы градиента $\partial f/\partial x$ и их производные $\partial^2 f/\partial x^2$ определяются результатами, данными в обозначениях (с индексами) предыдущих выражений с $f=H_0$, H_1, S и $x=p$, q.

Для того чтобы исключить коэффициент при первой степени μ в выражении для H, положим

$$\frac{\partial H_0}{\partial p}\frac{\partial S}{\partial q}+\overline{H}_1=0 \text{ или } \omega\frac{\partial S}{\partial q}+\overline{H}_1=0.$$

Как уже отмечалось, H_k есть периодическая функция q и, следовательно, то же самое верно и для $\overline{H}_1(q, P)$:

$$\overline{H}_1=\sum_{k_1}\ldots\sum_{k_n}h_{k_1,\ldots,k_n}(P)\,e^{i(kq)}=\sum_k h_k(P)\,e^{i(kq)},$$

где мы снова применяем сокращенный способ обозначения суммирования: $k_\nu q_\nu=kq=\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu q_\nu$. Заметим относительно n суммирований $k_1, \ldots, k_n$, что в общем случае суммирование распространяется от $-\infty$ до $+\infty$ по всем индексам и включает все целые числа, отличные от нуля, после исключения вековых членов.

Решение линейного дифференциального уравнения в частных производных теперь можно записать в форме

$$S=\sum\ldots\sum S_{k_1,\ldots,k_n}(P)\,e^{i(kq)},$$

где

$$S_{k_1,\ldots,k_n}(P)=\frac{ih_{k_1,\ldots,k_n}(P)}{k\omega}.$$

Последнее уравнение получено путем приравнивания коэффициентов при различных экспоненциальных членах в дифференциальном уравнении в частных производных после выполнения подстановки.

Малые делители встречаются тогда, когда собственные значения, или средние движения невозмущенного движения, ω, обнаруживают почти-соизмеримость.

Когда ω_i несоизмеримы, малые делители появляются только при высокой степени приближения. Поскольку система рациональных чисел имеет меру нуль, случайно выбранные ω_i несоизмеримы. Поэтому для всех ω_i мы имеем $\omega_i k_i \neq 0$ для всех целых чисел k_i, за исключением системы с мерой нуль. Это положение приводит нас снова к нерезонансным требованиям Мозера и Колмогорова.

Задача ставится следующим образом. Исключение члена μH_1 из ряда дает $\mu^2 H_1^{(1)}$. Спрашивается, будет ли $H_1^{(1)}$ таким, что метод покажет (квадратичную) сходимость? Другими словами, будет ли $H_1^{(1)}$ удовлетворять неравенству $|\mu^2 H_1^{(1)}|<\alpha M^2$, когда $|\mu H_1|<M$? Ответ на этот вопрос оказывается утвердительным, и можно быть уверенным, что при улучшенной сходимости ряда $H^{(k)}$ члены $\mu^k H^{(k)}$ будут сходиться. Эта быстрая сходимость компенсирует влияние малых делителей, и ряд будет сходиться «почти для всех» ω_j.

§ 8.4. Аналитическое продолжение

При доказательстве существования периодических орбит чаще всего применяются четыре следующие метода: метод аналитического продолжения, процесс приравнивания коэффициентов Фурье, теорема о неподвижной точке и метод степенных рядов. Идея первого метода состоит в использовании известного периодического решения и продолжения его путем небольших изменений параметров и начальных условий.

Мы будем в дальнейшем говорить о *периодических орбитах* в небесной механике, *периодических решениях* в теории дифференциальных уравнений и *периодических движениях* динамических систем. Терминология, конечно, — вопрос второстепенный, главная идея заключается в том, что мы продолжаем аналитически известное периодическое решение, учитывая свойства основных дифференциальных уравнений и известного решения.

Метод приравнивания коэффициентов при равных частотах тригонометрических членов не требует знания образующего решения, однако он может привести к трудностям не только практического, но и принципиального характера. К этому вопросу мы еще вернемся в гл. 10, когда будем рассматривать задачу Хилла.

Третий метод не требует рассмотрения бесконечных определителей, а также знания периодической орбиты, он основывается на установлении эквивалентности поверхностного преобразования с динамической задачей. С этим методом, предложенным Пуанкаре, мы познакомимся подробней немного позже, в этой же главе.

Четвертый метод уже применялся нами в гл. 5 при получении периодических орбит конечных размеров вокруг точек либрации; в том контексте он был связан с теоремой Хорна.

Перейдем теперь к рассмотрению первого метода — метода аналитического продолжения. Составим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mu),$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ — m-мерные векторы, а μ — скалярный параметр. Систему можно записать также в виде

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_m, \mu) \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$$

или просто ξ, можно представить в форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi, \mu),$$

причем

$$\xi = \mathbf{x}(0, \xi, \mu).$$

Рассмотрим теперь частное решение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi^*, \mu^*),$$

Специальный выбор μ^* и ξ^* дает периодическое решение, если

$$\mathbf{x}(t, \xi^*, \mu^*) = \mathbf{x}(t + \tau^*, \xi^*, \mu^*);$$

для этого вследствие теоремы о единственности решений дифференциальных уравнений, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{x}(0, \xi^*, \mu^*) = \mathbf{x}(\tau^*, \xi^*, \mu^*) = \xi^*.$$

В дальнейшем мы будем требовать, чтобы $\mathbf{X}$ была регулярной функцией в той области пространства $m+1$, где решение $\mathbf{x}$ и μ^* имеет место в течение $0 \leqslant t \leqslant \tau^*$. Кроме того, мы ограничим наше исследование теми образующими решениями, которые *не являются* равновесными решениями.

Задача аналитического продолжения заключается в том, чтобы найти периодические решения для различных значений ξ^* и μ^*. Условие, которому должно удовлетворять образующее решение

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\ \xi^*,\ \mu^*)$$

и дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{X},$$

содержит ответ на вопрос о возможности выполнения аналитического продолжения и доказательства таким путем существования новых периодических орбит.

Наши исследования связаны с неявными функциями и с их функциональными определителями. Пусть n аналитических соотношений имеют следующий вид:

$$\psi_i(y_k,\ \alpha)=0, \qquad i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Пусть, далее, решением этой системы уравнений для $\alpha=\bar{\alpha}$ будет $y_k=\bar{y}_k$.

Если теперь функциональный определитель

$$D=\det\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial y_k}\right),$$

вычисленый при $\bar{\alpha}$ и $\bar{y}_k$, отличен от нуля, то решение в окрестности $\bar{\alpha}$ существует и может быть выражено в виде ряда

$$y_k-\bar{y}_k=A_k(\alpha-\bar{\alpha})+B_k(\alpha-\bar{\alpha})^2+\ldots,$$

где A_k, B_k,... — постоянные.

Не проводя доказательства, разложим функцию $\psi_i(y_k,\ \alpha)$ в ряд Тейлора около $(\bar{y}_k,\ \bar{\alpha})$:

$$\psi_i(y_k,\ \alpha)=\psi_i(\bar{y}_k,\ \bar{\alpha})+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial y_k}\right)_{\bar{\alpha},\bar{y}_k}(y_k-\bar{y}_k)+\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}\right)_{\bar{\alpha},\bar{y}_k}(\alpha-\bar{\alpha})+\ldots$$

Для того чтобы линейная система имела решение для y_k, нужно, как уже говорилось, чтобы определитель, составленный из коэффициентов

$$\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial y_k}\right)_{\bar{\alpha},\bar{y}_k},$$

был отличен от нуля. Следует помнить, что аналитическое продолжение относится только к тем значениям y_k, α, которые настолько близки к значениям $\bar{y}_k$, $\bar{\alpha}$, что линейное приближение имеет смысл.

Вернемся теперь к первоначальным уравнениям и решим следующую задачу. Найдем такие периодические решения диффе-

ренциальных уравнений движения

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{X}(\mathbf{x},\ \mu),$$

которые близки к периодическому решению

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\ \xi^*,\ \mu)$$

с периодом τ^*. Искомые решения относятся к $\mu\neq\mu^*$, имеют начальное условие $\xi\neq\xi^*$ и период их $\tau\neq\tau^*$.

Заметим, что возможны такие изменения начальных условий, которые не приводят к новым орбитам. Если $\xi\neq\xi^*$, но ξ есть другая точка на орбите, то мы изменяем только эпоху, а не орбиту. Для того чтобы исключить такое вырождение, зафиксируем одну составляющую вектора ξ^*, скажем, ξ^*_m, и изменим все остальные. Тогда будем иметь

$$\xi_m=\xi_m^*$$

и

$$\xi_k\neq\xi_k^*,\qquad k=1,\ldots,\ m-1.$$

Образующая орбита удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{x}(\tau^*,\ \xi^*,\ \mu^*)-\xi^*=0,$$

для новых (образующих) орбит мы аналогично будем иметь

$$\varphi(\tau,\ \xi,\ \mu)\equiv\mathbf{x}(\tau,\ \xi,\ \mu)-\xi=0.$$

Эти m уравнений содержат $m+1$ неизвестных для заданного μ: m составляющих вектора ξ и новый период τ. $(m+1)$-м уравнением будет $\xi_m=\xi_m^*$.

Уравнения

$$\varphi(\tau,\ \xi,\ \mu)=0$$

имеют решение, когда $\mu=\mu^*$, и решением является $\xi=\xi^*$ и $\tau=\tau^*$. Выясним, будут ли эти уравнения иметь решения, когда μ близко к μ^*, но не равно ему. Эти решения с периодом τ обозначим через ξ.

$m+1$ уравнений в подробном виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_k,\ \ldots,\ \xi_m,\ \mu)=0,\\
&\varphi_2(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_k,\ \ldots,\ \xi_m,\ \mu)=0,\\
&\vdots\\
&\varphi_k(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_k,\ \ldots,\ \xi_m,\ \mu)=0,\\
&\vdots\\
&\varphi_m(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_k,\ \ldots,\ \xi_m,\ \mu)=0
\end{aligned}$$

и

$$\xi_m=\xi_m^*.$$

Функциональный определитель для этой системы равен

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{m-1}} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_{m-1}} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial\xi_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial\xi_{m-1}} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial\tau} \end{vmatrix}.$$

Его надлежит вычислить при $\tau=\tau^*$, $\xi=\xi^*$ и $\mu=\mu^*$.

Вектор, стоящий в последнем столбце определителя, равен

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\dot{\mathbf{x}}(\tau,\xi,\mu)=\mathbf{X}[\mathbf{x}(\tau,\xi,\mu),\mu],$$

так как начальное условие ξ не зависит от времени. При τ^*, ξ^*, μ^* вектор $\partial\varphi/\partial\tau$ равняется

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\mathbf{X}(\xi^*,\mu^*),$$

так что элементы, стоящие в последнем столбце, вычисляются достаточно просто.

Остальные элементы получаются из формулы

$$\frac{\partial\varphi_l}{\partial\xi_k}=\frac{\partial x_l}{\partial\xi_k}-\delta_{lk}$$

при τ^*, ξ^*, μ^*, и их можно считать известными, поскольку известна зависимость образующего решения от начального условия.

Рассмотрим снова первоначальные дифференциальные уравнения движения и продифференцируем обе части по начальному условию. Проделав это, будем иметь

$$\frac{\partial\dot{x}_l}{\partial\xi_k}=\frac{\partial X_l}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial\xi_k},$$

где в отношении j применен уже знакомый нам способ обозначения суммирования.

Так как начальное условие и время являются независимыми переменными, то

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{dx_l}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\partial x_l}{\partial\xi_k}.$$

Таким образом, элементы, стоящие в первых $m-1$ столбцах функционального определителя, могут быть получены посредством интегрирования линейных уравнений в вариациях

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_l}{\partial\xi_k}=\frac{\partial X_l}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial\xi_k},$$

где

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = Y_{ij}[\mathbf{x}(t, \xi^*, \mu^*), \mu^*]$$

вычисляется вдоль образующего решения.

Если $D \neq 0$, то можно решить систему m уравнений относительно m неизвестных и решение представить в виде

$$\xi_i - \xi_i^* = A_i(\mu - \mu^*) + B_i(\mu - \mu^*)^2 + \ldots, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1,$$
$$\xi_m - \xi_m^* = 0,$$
$$\tau - \tau^* = A(\mu - \mu^*) + B(\mu - \mu^*)^2 + \ldots,$$

где A_i, B_i, A и B — постоянные.

§ 8.5. Задача двух тел во вращающейся системе координат

8.5.1. Кривые нулевой скорости и эллиптические орбиты. Рассмотрим движение частицы, когда $\mu = 0$. Как было показано в пункте 4.7.1, силовая функция в этом случае имеет вид

$$\Omega = \frac{1}{2} r_1^2 + \frac{1}{r_1}. \tag{7}$$

На рис. 8.1 показано одно из основных тел, P_1, единичной

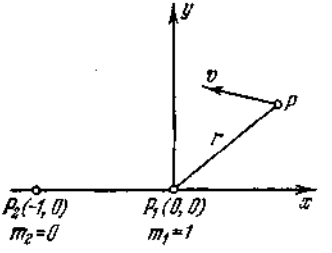


Рис. 8.1. К задаче двух тел во вращающейся системе координат.

массы, расположенное в начале координат, и другое, с нулевой массой в точке $P_2(-1, 0)$. Следовательно, $r_1 = r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ и

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{r},$$
$$\Omega_x = x(1 - 1/r^3), \tag{8}$$
$$\Omega_y = y(1 - 1/r^3).$$

Уравнения движения записываются в виде

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \tag{9}$$

а интеграл Якоби принимает вид

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C$$

или

$$v^2 = r^2 + 2/r - C \equiv U(r), \tag{10}$$

где v есть скорость относительно синодической системы координат x, y. Как можно видеть, уравнение (10) тождественно с уравнением (76) § 4.7.

Движение частицы P происходит по коническому сечению, неподвижному в пространстве. Во вращающейся системе координат коническое сечение выглядит вращающимся в отрицательном направлении с единичной угловой скоростью. Решение уравнений (9) можно получить, преобразуя известное решение задачи двух тел к вращающимся координатам. Это, однако, не представляет для нас интереса.

Кривые Хилла, или кривые нулевой скорости, определяются уравнением

$$rU = r^3 - Cr + 2 = 0. \tag{11}$$

Оно непосредственно следует из уравнения (10), если исключить случай $r=0$. На рис. 8.2 функция $rU(r)$ представлена в зависимости от r для различных значений C.

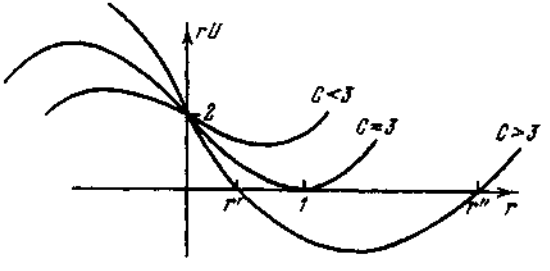


Рис. 8.2. Радиусы r' и r'' кривых нулевой скорости для $\mu=0$.

Если $C=3$, $rU=(r-1)^2(r+2)$, то так как $r>0$, кривая нулевой скорости представляет собой единичную окружность. Если $C<3$, то в соответствии с полученными ранее результатами кривых нулевой скорости не существует. При $C>3$ имеем две окружности нулевой скорости с радиусами r' и r'', так что

$$0<r'<1<r''<C.$$

Задача. Покажите, что если $C>3$, то $r''<C$.

По мере убывания C от значения $C>3$ обе окружности приближаются к единичной окружности, и при $C=3$ мы имеем $r'=r''=1$. При увеличении C, когда $C\geqslant 3$, происходит убывание r' и, следовательно, возможно движение внутри окружности радиуса r'. Для второй окружности справедливо обратное: с уве-

личением C она расширяется, и поэтому возможно движение снаружи окружности радиуса r''. На рис. 8.3 показаны кривые нулевой скорости и области возможного движения.

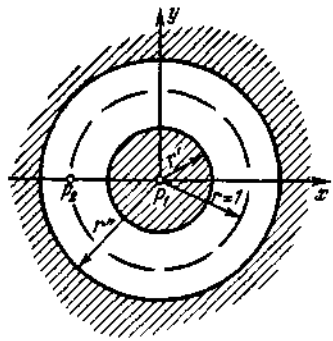


Рис. 8.3. Кривые нулевой скорости для $\mu=0$, $C>3$. Области возможного движения показаны штриховкой.

Движение внутри окружности радиуса r' в неподвижной системе является эллиптическим (или круговым), так как оно ограниченно. Фокус эллипса находится в точке P_1, и эллипс будет полностью известен, если будут заданы его большая полуось a, эксцентриситет e (или малая полуось b) и направление линии апсид. Так как движение частицы ограничено внутренней областью окружности радиуса r', то имеем $(1+e)a<r'<1$.

На рис. 8.4 показаны неподвижная эллиптическая орбита и две системы координат: неподвижная и вращающаяся. Угол между неподвижной осью X и вращающейся осью x обозначен, как и ранее, через t. Положение большой полуоси определяется углом θ_0, если отсчитывать от неподвижной оси X, и углом $\bar{\theta}$, если отсчитывать от вращающейся оси x.

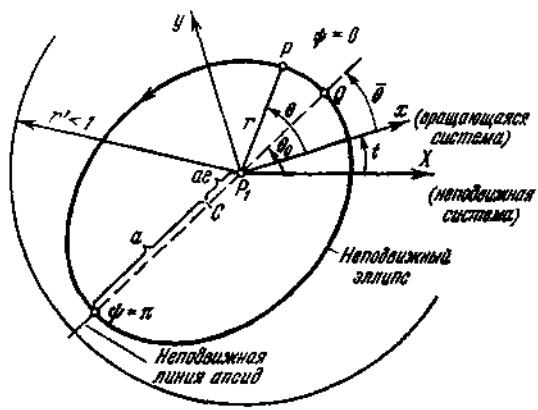


Рис. 8.4. Неподвижная эллиптическая орбита и системы координат.

Интересно сравнить этот рисунок с рис. 7.5 гл. 7. Переменная Делоне g (гл. 7) переходит в постоянный угол θ_0, а $\bar{g}$ становится углом θ, изменяющимся линейным образом. Истинная долгота, отмеряемая от вращающейся оси, на обоих рисунках обозначена через θ.

Стрелка на орбите указывает прямую орбиту относительно неподвижной системы. Если частица движется в противоположном направлении, то орбита будет попятной. Если движение является попятным в неподвижной системе, то оно будет попятным и во вращающейся системе. Инвариантность «характера направления» орбиты в обеих системах требует доказательства. Среднее движение (угловая скорость) вращающейся системы равно единице. Среднее движение частицы в неподвижной системе равно $n=a^{-3/2}$, так как

$$n^2a^3=1.$$

Но $a<1$, так что $n>1$, если движение происходит внутри кривой нулевой скорости радиуса $r'<1$ и, следовательно, средняя угловая скорость частицы больше, чем средняя угловая скорость вращающейся системы координат. Этот результат равносилен утверждению, что если орбита является прямой орбитой в неподвижной системе, то она будет прямой орбитой и во вращающейся системе, если $a<1$.

Вопрос о *мгновенной* ориентации орбит решается иначе, чем рассмотренная выше задача о «движении в среднем». Задача определения знака производной

$$\frac{d}{dt}(\theta-\bar{\theta}-t)=\dot{\theta}$$

не вызывает труда.

Остальную часть этого параграфа мы посвятим исследованию совокупности движений внутри окружности $r'<1$. Будут установлены соотношения для всех возможных эллиптических и круговых движений во вращающейся системе координат.

Из теоремы о сохранении момента количества движения (или теоремы площадей) мы имеем

$$r^2\frac{d}{dt}(\theta+t)=\pm[a(1-e^2)]^{1/2}, \tag{12}$$

что можно доказать следующим образом.

В точке Q на рис. 8.4 мы имеем $r_Q=a(1-e)$, и в неподвижной системе координат интеграл энергии записывается следующим образом:

$$V^2=2/r-1/a, \tag{13}$$

где V — абсолютное значение вектора скорости в неподвижной системе координат.

Скорость в точке Q поэтому равна

$$V_Q=\pm\left(\frac{1+e}{a(1-e)}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Мгновенная угловая скорость частицы в точке Q в неподвижной системе равна V_Q/r_Q, а ее момент количества движе-

ния равен

$$V_Q r_Q = \pm [a(1-e^2)]^{1/2}.$$

Выражение

$$r^2 \frac{d}{dt}(\theta + t)$$

представляет собой момент количества движения частицы в неподвижной системе в точке P, так как $(\theta + t - \theta_0)$ есть истинная аномалия в неподвижной системе, а r — раднус-вектор. Таким образом, уравнение (12) выражает условие сохранения момента количества движения.

Знак плюс относится к прямой орбите, знак минус — к попятной орбите; этого условия мы будем придерживаться и в дальнейшем.

Мы видим, что в этой точке, в апогее (верхнее апсидальное прохождение, афелий, апоцентр и апофокус) и в точке Q, в перигее (нижнее апсидальное прохождение, перигелий, перицентр и перифокус) вектор скорости в неподвижной и во вращающейся системах координат перпендикулярен радиусу-вектору, так как радиальная составляющая скорости в этих точках равна нулю. Используя этот факт, можно вычислить величину скорости в точке Q относительно вращающейся системы координат:

$$v_Q = V_Q - r_Q, \tag{15}$$

или, применяя уравнение (14),

$$v_Q = \pm \left[\frac{1+e}{a(1-e)}\right]^{1/2} - a(1-e). \tag{16}$$

Уравнение (15) мы получаем, замечая, что r_Q есть скорость вращающейся (с единичной угловой скоростью) системы в точке r_Q, определяемой радиусом-вектором r_Q. Кроме того, скорость в точке Q можно выразить относительно вращающейся системы в виде

$$v_Q = r_Q \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_Q,$$

а относительно неподвижной системы в виде

$$V_Q = r_Q \left[1 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_Q\right] \quad \text{или} \quad V_Q = r_Q \left[\frac{d}{dt}(\theta + t)\right]_Q.$$

Для того чтобы выразить скорость в точке Q через постоянную Якоби, вычислим v_Q из уравнения (10), а r запишем в виде $r = r_Q = a(1-e)$. Тогда будем иметь

$$v_Q^2 = a^2(1-e)^2 + \frac{2}{a(1-e)} - C. \tag{17}$$

Приравнивая теперь v_Q из уравнений (16) и (17), получаем

$$\pm a(1-e^2)^{1/2}=\frac{C}{2}a^{1/2}-\frac{1}{2a^{1/2}} \tag{18}$$

или

$$\pm b=\frac{C}{2}a^{1/2}-\frac{1}{2a^{1/2}}, \tag{19}$$

так как

$$b=a(1-e^2)^{1/2}.$$

Заметим, что уравнение (18) фактически нам уже знакомо: оно встречалось в § 8.3 В, а еще раньше в § 7.6 (уравнение (90)). При

$$C=-2H_0, \quad p_1=L=a^{1/2}, \quad p_2=G=|a(1-e^2)|^{1/2}$$

уравнение (18) переходит в уравнение (90) § 7.6, если последнее умножить на $a^{1/2}$.

Уравнение (19) связывает длину большой полуоси эллипса с длиной малой полуоси при заданном C; эта зависимость представлена графически на рис. 8.5.

Кривая $b=b(a)$ пересекает линию $b=a$ в точке N, которая поэтому соответствует круговой орбите. Так как $b>0$, то круговая орбита с радиусом a_2 будет прямой орбитой. Аналогично точка M соответствует попятной круговой орбите с радиусом a_1. Участок MN на изображенной кривой представляет все возможные эллиптические движения внутри окружности радиуса r', так как между M и N $b<a$. Точка пересечения с горизонтальной осью соответствует вырожденному эллипсу с $e=1$. Заметим, что b само всегда положительно, однако знак в правой части уравнения (19) будет положительным или отрицательным, в зависимости от того, является ли орбита прямой или попятной.

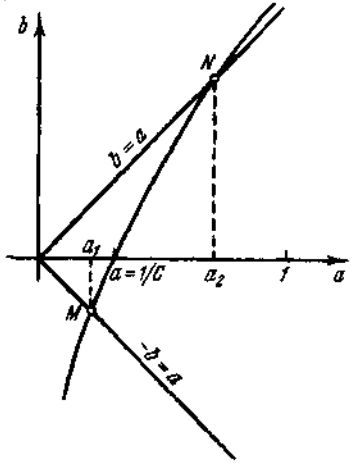


Рис. 8.5. Зависимость между большой полуосью и малой (Биркгоф, 1915 [2]).

Функция $b(a)$ является монотонно возрастающей и

$$\frac{db}{da}\to 0, \quad \text{когда} \quad a\to\infty.$$

Для любого значения a, лежащего в пределах $0<a\leqslant 1$, имеем

$$\frac{db}{da}=\frac{1}{4a^{1/2}}\left(C+\frac{1}{a}\right)\geqslant 1,$$

так как $C\geqslant 3$. Следовательно, кривая $b(a)$ пересекает линию $b=a$ в области, где a лежит между 0 и 1, только один раз.

Из уравнения (19) имеем

$$C=\frac{1}{a}\pm\frac{2b}{a^{1/2}},$$

и подставляя $b=a=a_2$ и $-b=a=a_1$, находим

$$C=\frac{1}{a_2}+2a_2^{1/2},\quad C=\frac{1}{a_1}-2a_1^{1/2}. \tag{20}$$

По этим уравнениям построены кривые, изображенные на рис. 8.6. Мы видим, что когда $3\to C\to\infty$, $1/4\to a_1\to 0$, $1\to a_2\to 0$ и, как было показано раньше, $1\to r'\to 0$. Заметим, что при заданном значении C $r'>a_2>a_1$.

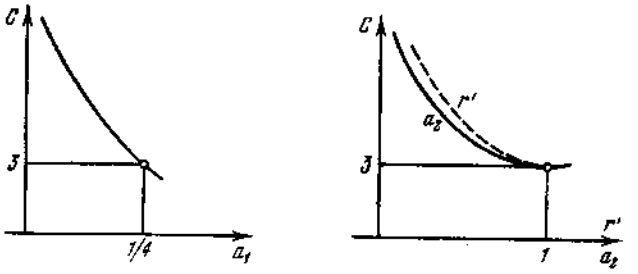


Рис. 8.6. Изменение постоянной Якоби в зависимости от радиуса (a_1) попятной круговой орбиты и радиуса (a_2) прямой круговой орбиты.

Совокупность движений представляется участком MN на кривой, изображенной на рис. 8.5, при условии, что исследуется только круговая область $r'<1$. Существует только два круговых движения, все остальные движения эллиптические. Эти круговые орбиты показаны на рис. 8.7.

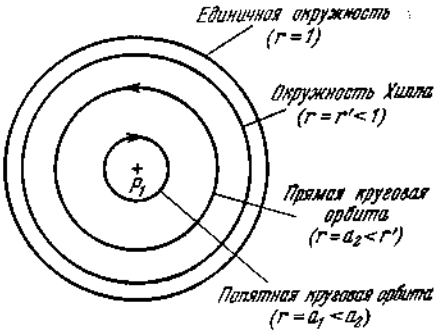


Рис. 8.7. Круговые орбиты для $\mu=0$.

8.5.2. Представление состояний движения. В качестве переменных состояния движения мы выбрали величины a, θ и ψ и с их помощью представили совокупность движений (рис. 8.4). Переменную a мы определи-

ли выше, угол $\bar{\theta}$ представляет долготу линии апсид, отсчитываемую от вращающейся оси x, а ψ есть средняя аномалия. Для заданного C значение a определяет b и e, а также направление движения. Переменная $\bar{\theta}$ определяет мгновенное положение эллипса, а ψ определяет положение движущейся точки на эллипсе. За исключением случаев $a=a_1$ и $a=a_2$, когда $\bar{\theta}$ и ψ неопределенны, система значений $(a, \bar{\theta}, \psi)$ для заданного C определяет единственное состояние движения.

Так как $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$ и $0 \leqslant \bar{\theta} \leqslant 2\pi$, то состояния движения можно представить точками полого цилиндра, рис. 8.8. Если C задано, то можно вычислить a_1 и a_2 из уравнений (20) и построить цилиндр. Так как ψ измеряется вдоль оси цилиндра, то нижнее кольцевое основание представляет состояния движения, для которых $\psi=0$ (перигей), а верхнему кольцевому сечению соответствует $\psi=2\pi$. Длина большой полуоси эллипса a измеряется вдоль раднуса, а $\bar{\theta}$ играет роль полярного угла. Если орбнта идет от $\psi=0$ до $\psi=2\pi$, то a не изменяется, так как орбитой является заданный эллипс. Угол $\bar{\theta}$ при этом изменяется от θ до $\bar{\theta}'$, где $\bar{\theta}$ определяет положение линии апсид во вращающейся системе в начале движения (скажем, в перигее $\psi=0$, а θ' определяет положение линии апсид в этой же системе после того, как частица сделает один оборот по эллипсу ($\psi=2\pi$). На рис. 8.8 P и P' — точки на заданной орбите, нижнее кольцевое основание цилиндра ($\psi=0$) — совокупность движений в перигее, внутренняя поверхность цилиндра ($a=a_1$) — попятные круговые орбиты ($\bar{\theta}-\psi=\text{const}$), а наружная поверхность цилиндра ($a=a_2$) — прямые круговые орбнты ($\bar{\theta}+\psi=\text{const}$).

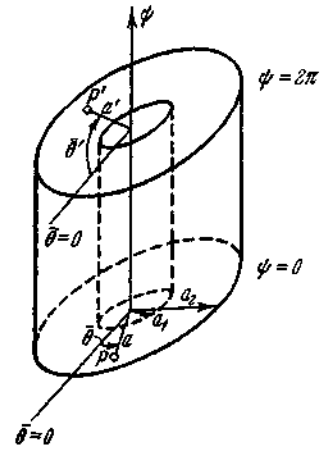


Рис. 8.8. Изображение состояний движения при $\mu=0$ помощью полого цилинд ра.

Поскольку положение частицы на эллипсе полностью определяется переменной ψ, сечения полого цилиндра $\psi=\pm 2k\pi$ ($k=0, 1, \ldots$) представляют идентичные положения частицы на его эллипсе. Поэтому, соединив концы полого цилиндра $\psi=0$ и $\psi=2\pi$, можно образовать тор, который будет иметь внутреннюю торообразную полость с раднусом сечения a_1. Орбнта будет пересекать кольцо $\psi=0$ (которое теперь совпадает с кольцом $\psi=2\pi$) после каждого витка, который частица сделает по свое-

му эллипсу. Таким путем на одном кольце получаются точки пересечения P, P', P'', ... Все эти точки лежат на одной и той же окружности, так как движение происходит по заданному эллипсу таким образом, что $a=a'=a''=\ldots=\text{const}$. Имеют место только полярные перемещения $\bar{\theta}$ между P, P', P'', ..., поэтому, когда происходит движение, кольцо преобразуется в самого себя.

Зависимость переменных a, $\bar{\theta}$, ψ от времени для орбиты выражается следующим образом:

$$\bar{\theta}=\theta_0-t, \quad a=a_0, \quad \psi=a_0^{-3/2}t+\psi_0. \tag{21}$$

Первое из этих равенств следует из рис. 8.4, на котором видно, что $\theta_0=\bar{\theta}+t$ есть положение линии апсид относительно неподвижной оси X и, следовательно, является постоянным. Далее, для заданного эллипса $a=a_0=\text{const}$, что объясняет второе равенство. Последнее равенство является непосредственным следствием того, что средняя аномалия равна $\psi=n(t-t_0)$, где $n=a_0^{-3/2}$ есть среднее движение.

Движение представляется спиралью на цилиндрической поверхности радиуса a_0. Постоянный шаг спирали равен

$$\frac{d\psi}{d\bar{\theta}}=\frac{d\left(a_0^{-3/2}t+\psi_0\right)}{-dt}=-a_0^{-3/2}.$$

8.5.3. Кольцевое преобразование. Более подробное исследование кольцевого преобразования позволяет получить условие для периодического движения в синодической системе. Рассмотрим точку K на кольце $\psi=\psi_0$. Координаты точки K будут определять состояние движения, систему начальных условий или орбиту, в зависимости от того, как мы будем смотреть на точку K. Пусть координатами точки K будут $\bar{\theta}=\theta_0$, $\psi=\psi_0$, $a=a_0$, и пусть $t=0$ соответствует моменту, когда частица проникает через кольцо $\psi=\psi_0$. Пусть далее L будет точкой на кольце $\psi=\psi_0+2\pi$, в которой частица пересекает это кольцо. Время, которое требуется, чтобы пройти от плоскости ψ_0 до плоскости $\psi_0+2\pi$, равно времени необходимому, чтобы обойти один раз вокруг неподвижного эллипса, т. е. $2\pi/n=2\pi a_0^{3/2}$. Это следует также формально из третьего равенства (21), если положить в нем $\psi_0+2\pi=\psi$ и разрешить его относительно t. Координату $\bar{\theta}$ точки L мы получим из условия, что время одного оборота равно $2\pi a_0^{3/2}$, и за это время $\bar{\theta}$ изменяется до $\theta_0-2\pi a_0^{3/2}$. Третья координата точки L инвариантна (a_0), так как размер эллипса не изменяется. Таким образом, координаты точки K в момент $t=0$ равны $K(a_0, \theta_0, \psi_0)$, а координаты точки L в момент $t=2\pi a_0^{3/2}$ равны

$$L(a_0, \theta_0-2\pi a_0^{3/2}, \psi_0+2\pi).$$

Упростим систему обозначений, представив систему $(a, \bar{\theta}, 0)$ как K, а систему $(a', \bar{\theta}', 2\pi)$ как L. Тогда равенства

$$a' = a, \quad \bar{\theta}' = \bar{\theta} - 2\pi a^{3/2} \tag{22}$$

будут формулами преобразования (T), переводящими K в L. Как уже отмечалось, такое преобразование представляет собой чистый поворот в отрицательном направлении. Величина поворота определяется размером эллипса a. Различные точки кольца $a_1 < a < a_2$ будут поворачиваться на разную величину, и кольцо будет преобразовываться в самого себя.

Уравнения (2) § 8.3 можно идентифицировать с уравнениями (22). Для этого нужно произвести следующие подстановки: $r = a$, $r_1 = a'$, $\varphi = \bar{\theta}$, $\varphi_1 = \bar{\theta}'$, $f(r) = -2\pi a^{3/2}$. Возмущения переводят уравнения (22) в следующие:

$$a' = a + g(a, \bar{\theta}), \quad \bar{\theta}' = \bar{\theta} - 2\pi a^{3/2} + h(a, \bar{\theta}).$$

Они аналогичны уравнениям (3).

Теперь можно опять применить преобразование к L, чтобы получить M, и т. д. Координаты M выражают изменение направления линии апсид $(\bar{\theta})$ после того, как окончится второй обход частицы вокруг эллипса. Вообще, если начинать с точки, для которой $\bar{\theta} = \bar{\theta}$ и $a = a$, когда она находится в перигее $\psi = 0$), преобразование T дает

$$\bar{\theta}' = \bar{\theta} - 2\pi a^{3/2} = \bar{\theta}^{(1)}.$$

Применив еще раз T, получим

$$\bar{\theta}'' = \bar{\theta}' - 2\pi a^{3/2}$$

или

$$\bar{\theta}^{(2)} = \bar{\theta} - 4\pi a^{3/2}.$$

Поле k-го применения T будем иметь

$$\bar{\theta}^{(k)} = \bar{\theta} - 2\pi k a^{3/2},$$

что соответствует углу между линией апсид и вращающейся осью x после того, как частица завершит k оборотов по своей эллиптической орбите. Если в течение этого времени угол $\bar{\theta}$ уменьшится на $2\pi l$, то будем иметь

$$\bar{\theta} - 2\pi l = \bar{\theta}^{(k)}$$

или

$$a^{-3/2} = k/l, \tag{23}$$

что является необходимым и достаточным условием существования периодических орбит этого типа. Заметим, что за то вре-

мя, что эллипс сделает l оборотов (во вращающейся системе), частица совершит k витков. В случае, когда $l=1=k$, т. е. когда среднее движение частицы равно среднему движению вращающейся системы, получаем $a=1$, чего для окружности $r'<1$ быть не может.

При условии (23), т. е. когда $a=(l/k)^{2/3}$, орбита будет «замкнута» во вращающейся системе. Так как $a<1$, то эллипс делает меньше оборотов (l) относительно вращающейся системы, чем частица по своему эллипсу (k). Длина большой полуоси должна равняться рациональному числу меньше единицы в степени 2/3.

Отношение k/l можно рассматривать также как среднее движение частицы в неподвижной системе, поскольку вращающаяся система имеет единичное среднее движение.

Линия апсид после k витков поворачивается в отрицательном направлении на угол $2\pi l$, следовательно, как уже показывалось раньше, за один виток она поворачивается на угол $2\pi l/k=2\pi a^{3/2}$. Коэффициент прогрессии апсидальной линии — $2\pi a^{3/2}$ часто называют коэффициентом вращения Пуанкаре и обозначают через σ.

На рис. 8.9 показано кольцо и ряд последовательных точек, полученных посредством преобразования T.

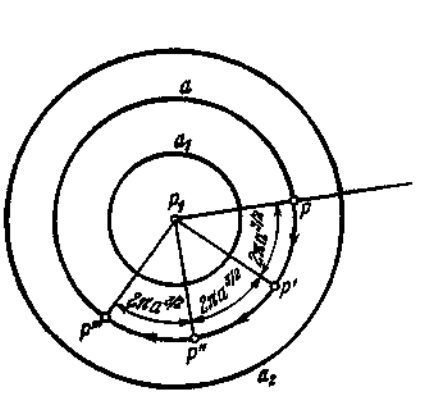


Рис. 8.9. Кольцевое преобразование: $P'=T(P)$, $P''=T(P')$, $P'''=T(P'')$, ...

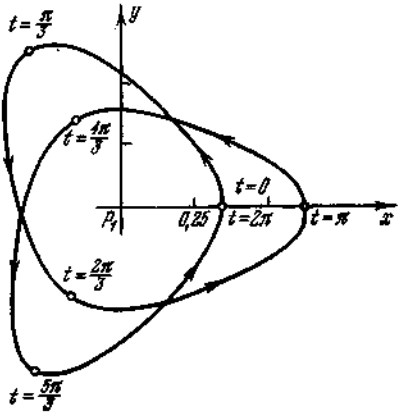


Рис. 8.10. Орбита во вращающейся системе координат; $\mu=0$, $e=0{,}3$, $a=0{,}4807499$.

8.5.4. Интерпретация в синодической системе. В неподвижной системе координат орбита представляет собой эллипс, во вращающейся системе координат x, y она выглядит более сложным образом, например так, как кривая Ноулса, пока-

занная на рис. 8.10. Причина, побуждающая нас рассматривать орбиту во вращающейся системе, состоит в том, что для ограниченной задачи трех тел существование интеграла Якоби находится в зависимости от использования такой системы. Рассмотренная в этой главе задача двух тел необязательно становится сложней, когда применяется вращающаяся система, и если результаты этой задачи «продолжаются» на ограниченную задачу, применение вращающейся системы координат становится не только оправданным, но просто необходимым.

На рис. 8.10 частица начинает свое движение в момент $t=0$, соответствующий точке перигея $\psi=0$ на ее неподвижной эллиптической орбите. В момент $t=\pi/3$ частица находится в апогее $\psi=\pi$, а в момент $t=2\pi/3$ — снова в перигее $\psi=2\pi$. Среднее движение по неподвижному эллипсу равно $n=3$, и длина большой полуоси равна $3^{-2/3}$. В течение одного витка по эллипсу (продолжающегося $2\pi/3$ безразмерных единиц времени) линия апсид перемещается относительно вращающейся оси на $-2\pi/3$, а сама вращающаяся ось перемещается на $2\pi/3$ относительно неподвижной линии апсид. Точки перигея приходятся в моменты времени $t=0$, $2\pi/3$, $4\pi/3$ и 2π, а точки апогея — в моменты времени $t=\pi/3$, $3\pi/3$ и $5\pi/3$, что можно видеть на рис. 8.10.

В первой точке перигея $t=0$ орбита имеет положительное касание с окружностью, проходящей через эту точку, с центром в точке P_1, и направлена так, как при прямой орбите. (Мы говорим о положительном касании одной кривой с другой, если в общей точке они имеют одну и ту же касательную и если обе кривые имеют одинаковые направления обхода.) При $t=0$ частица на неподвижном эллипсе находится в перигее, и в неподвижной системе координат ее вектор скорости перпендикулярен радиусу-вектору. То же самое верно и для орбиты во вращающейся системе в перигее.

Заметим, что если эксцентриситет эллипса выбран равным $e=0{,}3$, то постоянную Якоби можно вычислить из уравнения (18), приняв положительный знак и положив $a=3^{-2/3}$. Проделав вычисления, получим $C=3{,}4029327$. В гл. 9 эта орбита будет продолжена для $\mu\neq 0$.

Вернемся теперь к окружности, которая имеет положительное касание с орбитой во вращающейся системе при $t=0$, и найдем следующее положительное касание между орбитой и этой окружностью. Оно происходит в момент $t=2\pi/3$. Следующее за ним (после $t=2\pi/3$) положительное касание имеет место в момент $t=4\pi/3$. За время между двумя последовательными положительными касаниями частица совершает один оборот по своему эллипсу, т. е. ψ изменяется от 0 до 2π. Положе-

ние точки положительного касания (происходящего в момент $t=2\pi/3$) определяется углом $-2\pi/3$ (см. рис. 8.10), равным углу поворота апсидальной линии. Поэтому можно дать другое определение точки L, когда точка K задана (сравните с рис. 8.3). Кольцевое преобразование, переводящее точку P в точку P', затем P' в P'', и т. д., выглядит как ряд точек, в которых последовательно происходит положительное касание с одной и той же окружностью.

Рассмотрим теперь ряд орбит в синодической системе координат x, y с начальными условиями $0<x_0<a_2$, $y_0=0$, $\dot{x}_0=0$ и $\dot{y}_0>0$, относящимися к одному заданному значению C. Они будут прямыми орбитами и будут указывать точку перигея в момент времени $t=0$. (При $x_0=a_1$ существует прямая эллиптическая орбита, а круговая орбита при $x_0=a_1$ будет попятной.) При $x_0=a_2$ мы имеем прямую круговую орбиту. Когда x_0 увеличивается от a_2 до r', орбиты с $y_0>0$ будут указывать точки апогея. Попятные орбиты ($\dot{y}_0<0$, $\dot{x}_0=0$, $\dot{y}_0=0$) указывают периген, когда x_0 лежит между 0 и a_1. Таким образом, периген связаны с прямыми орбитами, когда $0\leqslant x_0\leqslant a_2$, и с попятными орбитами, когда $0\leqslant x_0\leqslant a_1$.

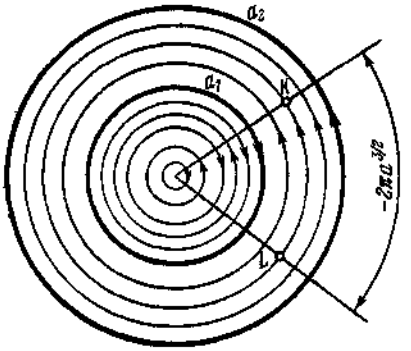


Рис. 8.11. Двулистное кольцо состояний движения.

С учетом этих условий построен рис. 8.11. На нем изображены две серии вспомогательных окружностей (*все они* не являются орбитами для заданного C) с центром в точке P_1 в плоскости xy. Первая серия окружностей, соответствующая попятному движению, имеет радиусы меньше, чем a_1, а вторая серия, соответствующая прямому движению, имеет радиусы меньше, чем a_2. Эти две серии окружностей образуют двулистное кольцо в плоскости xy (см. рис. 8.11).

Заметим, что a_1 и a_2 *не являются* большими полуосями описанных выше эллипсов, а представляют собой радиусы попятной и прямой круговых орбит, принадлежащих заданному значению C.

Состояниями движения, соответствующими перигею ($\psi=0$), будут те, для которых траектория имеет положительное касание с одной из этих двух серий окружностей. Пусть теперь точка K представляет состояние движения с заданным a, и пусть она представляет точку перигея. Рассмотренное выше преобразование T переводит эту точку в точку L, где орбита в плос-

кости xy снова имеет положительное касание с той же самой вспомогательной окружностью. Для любой точки K существует орбита, имеющая положительное касание с вспомогательной окружностью в точке K. Преобразование, которое переводит точку K в точку L, является преобразованием кольца в самого себя, при котором радиальные расстояния остаются неизменными, а каждая точка совершает попятный поворот на угол $2\pi a^{3/2}$ вокруг точки P_1. Все это относится к одному заданному значению C. Для другого значения C можно вычислить новые значения a_1 и a_2 и снова выполнить построение. Это означает, что вспомогательные окружности на рис. 8.11 можно рассматривать как окружности радиусов a_1 и a_2, принадлежащие различным значениям C. Такая точка зрения, как мы увидим позже, оказывается весьма полезной.

В пункте 8.5.2 предлагалось соединить два конца полого цилиндра, изображенного на рис. 8.8, и образовать тор. Внутренняя поверхность такого полого тора будет соответствовать попятным круговым орбитам, а наружная поверхность — прямым круговым орбитам. Любые другие эллиптические орбиты будут иметь место внутри тела тора, между внутренней и наружной поверхностями.

Можно образовать сплошной тор (без внутренней полости) и эллиптическое движение изобразить на его поверхности; это проделано на рис. 8.12. Описанное выше преобразование кольца в самого себя теперь можно представить движением по тору. Рассмотрим это подробней (см. также §§ 8.2 и 8.3).

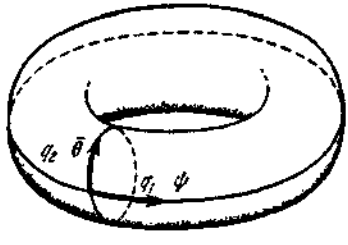


Рис. 8.12. Тор (соответствующий цилиндру) для изображения состояний движения.

Когда $q_1=\Psi$ увеличивается от 0 до 2π, что соответствует одному полному обороту точки по эллипсу за период $T=2\pi/n$, неизменная линия апсид $q_2=\bar{\theta}$ меняет свое положение от θ_0 до $\theta_0-2\pi/n$, где $n=a^{-3/2}$. Угловые скорости (средние движения), соответствующие двум угловым перемещениям q_1 и q_2, равны

$$\omega_1=\dot{q}_1=n \quad \text{и} \quad \omega_2=\dot{q}_2=-1. \tag{24}$$

Условие для периодического движения выглядит на торе в виде спирали, которая замыкается на самое себя. Если одному обороту вдоль q_2 соответствует один оборот вдоль q_1, то мы будем говорить о простой периодической орбите. В общем случае мы имеем дело с многопериодическими орбитами, когда частица совершает k оборотов по эллипсу, а эллипс за это время

делает l оборотов относительно вращающейся системы координат. Если

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right| = \frac{k}{l} = n = a_0^{-3/2}$$

есть число рациональное, мы получаем кривые, обвивающие тор и в конце концов замыкающиеся. Если ω_1/ω_2 есть число иррациональное, то кривые не замыкаются.

§ 8.6. Ограниченная задача с малым массовым параметром

8.6.1. Периодические орбиты первого рода. В предыдущем параграфе мы рассмотрели кольцевое преобразование, посредством которого можно исследовать совокупность движений, и вывели условие для периодических орбит во вращающейся системе координат. Полученные там результаты относились к случаю $\mu=0$, когда одно из основных тел имело нулевую массу ($m_2=0$).

Эти исследования для $\mu=0$ мы теперь с помощью метода аналитического продолжения распространим на случай $\mu\neq 0$. Основная задача будет состоять в том, чтобы показать, что круговые орбиты (a_1 и a_2) в задаче двух тел при $\mu\neq 0$ переходят в (некруговые) периодические орбиты. Таким способом мы докажем существование прямых и попятных периодических орбит для $\mu\neq 0$ (см. § 8.4). Это те орбиты, которые Пуанкаре называл орбитами «premiére sorte» («первого сорта»); они образованы из плоских круговых орбит ($e=0$, $i=0$).

Метод аналитического продолжения, применяемый нами для доказательства существования этих орбит, по существу представляет собой метод Пуанкаре, которым он пользовался при решении ограниченной задачи с «малыми» значениями μ. Если задачу малых возмущений Пуанкаре, фигурально выражаясь, считать находящейся на «одном конце шкалы», то на противоположном конце окажется ограниченная задача с $\mu=1/2$. Задача Пуанкаре наибольший интерес представляет для динамики Солнечной системы, тогда как задача Стрёмгрена ($\mu=1/2$) важна, в первую очередь, для звездной динамики. Тот факт, что некоторые семейства периодических орбит представлены численно для $\mu\approx 0$ и $\mu=1/2$ так же, как для всей области $0<\mu<1/2$, мы объясним позже, в пункте 8.6.2, а также в гл. 9. Здесь же мы рассмотрим только задачу Пуанкаре.

Уравнения движения для случая $\mu\neq 0$ можно написать в виде (см. уравнения (8), (9) и (10))

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= x(1-1/r^3) + f(\mu, x, y), \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y(1-1/r^3) + g(\mu, x, y), \end{aligned} \tag{25}$$

а интеграл Якоби можно представить в форме

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=r^2+\frac{2}{r}-C+h(\mu, x, y), \tag{26}$$

где функции f, g и h стремятся к нулю, когда $\mu\to 0$. Заметим, что особенности либо исключены из уравнений, либо мы их просто исключаем из рассмотрения.

Прямая круговая орбита, как решение будет удовлетворять верхним уравнениям для $\mu=0$ с начальными условиями

$$x=\bar{x}=a_2, \quad y=0, \quad \dot{x}=0, \quad \dot{y}=1/a_2^{1/2}-a_2,$$

так как $a_2^{-1/2}$ есть скорость движения по круговой орбите в неподвижной системе координат, а a_2 — местная скорость вращающейся системы координат.

Постоянная Якоби, принадлежащая этому решению, согласно уравнению (10), равна

$$C=1/a_2+2a_2^{1/2},$$

и решение во вращающейся системе координат можно написать в виде

$$x=a_2\cos(n-1)t$$

и

$$y=a_2\sin(n-1)t.$$

Решением для $\mu\neq 0$ во вращающейся системе будет

$$x=x(\mu, \bar{x}, t), \quad y=y(\mu, \bar{x}, t).$$

Условия, накладываемые на это решение для $\mu\neq 0$, следующие: при $t=0$ $x=\bar{x}$, $y=0$, $\dot{y}>0$ и $\dot{x}=0$, а при $t=\bar{t}$ $x=\bar{x}$, $y=0$, $\dot{y}<0$ и $\dot{x}=0$. Здесь $\bar{t}$ есть время, когда орбита снова пересекает ось x. Поэтому решением, представляющим интерес, будет орбита, которая при $\mu\neq 0$ пересекает ось x перпендикулярно два раза, соответственно прямой круговой орбите (для $\mu=0$), пересекающей ось x перпендикулярно в точках $x=\pm a_2$. Таким решением для $\mu\neq 0$ будет аналитическое продолжение верхней половины круговой орбиты (для $\mu=0$). Так как при замене x, y, t на x, $-y$, $-t$ уравнения движения не изменяются, то можно заключить, что введение верхней половины ($y>0$) орбиты для $\mu\neq 0$ устанавливает существование полной симметричной периодической орбиты.

Для того чтобы доказать существование орбиты, заданной указанными выше условиями, заметим, что если $\bar{x}=a_2$ и $\mu=0$, то орбита будет дважды пересекать ось x под прямым углом (в точках пересечения $\dot{x}=0$). Если $\mu\neq 0$, то значение $\dot{x}$ во второй точке пересечения будет зависеть от начального значе-

ния $x=\bar{x}$ и от μ. Обозначив $\dot{x}$ во второй точке пересечения через ψ, будем иметь

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\bar{t}}=\psi(\mu, \bar{x}).$$

Функция $\psi(\mu, \bar{x})$ является аналитической, ибо она есть аналитическая функция угла между осью x и орбитой, который, в свою очередь, зависит аналитическим образом от μ и $\bar{x}$. Поэтому функцию $\psi(\mu, \bar{x})$ можно записать в виде ряда

$$\psi=\alpha_2(\bar{x}-a_2)+\beta_2\mu+\gamma_2(\bar{x}-a_2)^2+\delta_2\mu(\bar{x}-a_2)^2+\ldots,$$

где

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right]_{\substack{\bar{x}=a_2\\ \mu=0}}=\alpha_2.$$

Следовательно, условием для нахождения решения $\bar{x}=\bar{x}(\mu)$, удовлетворяющего уравнению $\psi(\mu, \bar{x})=0$, будет следующее: $\alpha_2\neq 0$ (сравните с § 8.4).

Если μ близко к нулю, а $\bar{x}$ близко к a_2, то

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right]_{\substack{\bar{x}\approx a_2\\ \mu\approx 0}}\approx\alpha_2$$

и, следовательно, два условия $\partial\psi/\partial\bar{x}\neq 0$ и $\alpha_2\neq 0$ для обращения уравнения $\psi(\mu, \bar{x})=0$ эквивалентны друг другу.

Прежде чем переходить к нахождению условий, которые приводят к равенству $\alpha_2=0$, заметим, что во второй точке пересечения $y(\mu, \bar{x}, \bar{t})=0$, откуда можно получить $\bar{t}=\bar{t}(\mu, \bar{x})$, если уравнение $y(\mu, \bar{x}, \bar{t})=0$ может быть инверсировано. Условиями для этого являются следующие: $dy/dt\neq 0$ при $t=\bar{t}$, $x=\bar{x}$ и $\mu\neq 0$. Для того чтобы показать, что эти условия удовлетворяются, заметим сначала, что соотношение $y=y(0, a_2, t^*)=0$ может быть инверсировано, так как $dy/dt=-1/a_2^{1/2}+a_2\neq 0$ при $t=t^*$, где t^* есть время второго пересечения при $\mu=0$. Этого результата (что $\dot{y}(t^*)\neq 0$), конечно, следовало ожидать, так как орбита пересекает ось x под прямым углом. Рассуждая более формально, можно заключить, что поскольку $\bar{x}$ мало отличается от a_2 и μ мало отличается от нуля, t^* будет мало отличаться от $\bar{t}$ и, следовательно,

$$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{\substack{t=\bar{t}\\ x=\bar{x}\\ \mu\neq 0}}\neq 0.$$

Условие $\alpha_2=0$ можно получить из задачи двух тел; это следует из определения α_2. Необходимым и достаточным условием того, чтобы α_2 равнялось нулю, является условие, чтобы время t^* для частицы (в ее движении по круговой орбите от $t=0$ до момента ее второго пересечения с осью x) было кратно с полупериодом в неподвижной плоскости. Иначе говоря, критическое условие имеет место тогда, когда период во вращающейся плоскости есть кратное периода в неподвижной плоскости. Это следует из равенства

$$\alpha_2=a_2(\dot{f}\sin f)_{t=t^*}, \tag{27}$$

где $f=\theta-\bar{\theta}$ есть истинная аномалия. Из уравнения (27) видно, что $\alpha_2=0$, когда $f=k\pi$.

Задача. Выведите уравнение (27).

В отношении попятных круговых орбит можно высказать те же соображения, что мы приводили выше. Существование этих орбит связано с условием неравенства α_1 нулю, которое получается аналогично тому, как это делалось для α_2.

Пусть теперь n будет средним движением частицы относительно неподвижной системы, а $n\mp1$, следовательно, — относительно синодической системы. Верхний знак здесь соответствует прямому круговому движению, а нижний — попятному. В этих обозначениях

$$t^*=\frac{\pi}{n\mp1},$$

и условие $\alpha_2=0$ будет выполняться при $t^*=k\pi/n$, так как полупериод во вращающейся системе t^* равен k-кратному полупериода в неподвижной системе π/n. В иной форме можно написать

$$n=\pm\frac{k}{k-1},$$

где $k>1$ есть целое число. Так как $n>0$, то нижний знак исключается и, следовательно, для попятных круговых орбит критических значений не существует. Исключительными значениями n будут 2/1, 3/2, 4/3, ...; первое представляет соизмеримость для группы малых планет Гекуба в Солнечной системе.

Среднее движение связано с радиусом a_2 уравнением Кеплера $a_2=n^{-2/3}$, а с постоянной Якоби — уравнением (20):

$$C=\frac{2+n}{n^{1/3}}. \tag{28}$$

Функция $C(n)$ монотонно возрастает, когда $1\leqslant n\leqslant2$, так как ее производная равна $(2/3)(n-1)n^{-4/3}$. Кроме того, $C(1)=C_{\min}=3$, а $C(2)=C_{\max}=32^{1/2}=3{,}174802104\ldots$, когда n лежит

между 1 и 2. Отсюда можно заключить, что попятные круговые орбиты, данные для $\mu=0$, могут быть продолжены на случай $\mu\neq 0$, и можно получить симметричные (относительно оси x) попятные периодические орбиты для любого $C>3$. Продолжение прямых круговых орбит, данных для $\mu=0$, возможно в том случае, когда $C>32^{1/3}$, и эти орбиты получаются симметричными, периодическими и прямыми. Когда $3\leqslant C\leqslant 32^{1/3}$, аналитическое продолжение прямых круговых орбит возможно для любого C, а не только для одного из исключительных значений.

Существование периодических орбит первого рода для $\mu\neq 0$, образованных из круговых орбит с $\mu=0$, было доказано выше.

Близкое сходство с этими периодическими орбитами обнаруживают орбиты, которые находятся снаружи окружности нулевой скорости радиуса r'' (см. рис. 8.3).

В случае, когда $\mu=0$, мы имеем круговое движение с радиусом $r>r''>1$, со скоростью относительно неподвижной системы, равной $1/r^{1/2}$. Скорость относительно вращающейся системы равна $v=\pm 1/r^{1/2}-r$; здесь верхний знак относится к прямым орбитам в неподвижной системе, а нижний — к попятным орбитам.

Напомним, что внутренняя область круговых орбит ($r<r'<1$) обладает инвариантным свойством в отношении направления движения при переходе от неподвижной системы к вращающейся. Для орбит, для которых $r>r''$, это не имеет места. Как прямые, так и попятные орбиты в неподвижной системе становятся синодически попятными для наружной области круговых орбит. Инвариантность попятных орбит не требует доказательства, что же касается прямых сидерических орбит, то инвариантность следует из того условия, что при $r>1$ скорость равна $v=+1/r^{1/2}-r<0$.

Сидерически попятные орбиты в случае $r>1$ могут быть продолжены от $\mu=0$ до $\mu\neq 0$ и приведены к симметричным периодическим орбитам совершенно таким же способом, как это было сделано для попятных орбит при $r<1$, т. е. аналитическое продолжение не имеет исключительных значений C. Сидерические прямые наружные орбиты обнаруживают сингулярное поведение такого же рода в отношении аналитического продолжения, что и сидерические прямые внутренние орбиты, и исключительными значениями n являются 1/2, 2/3, 3/4, ..., а критическим значением C: $C(1/2)=C_{\max}=(31{,}25)^{1/3}=3{,}149802625\ldots$.

Первое критическое значение $C=32^{1/3}$ может относиться к трем значениям μ, в зависимости от того, какая выбрана точка либрации. Если $C_1=32^{1/3}$, то $\mu_1=0{,}011116722$, если $C_2=32^{1/3}$, то $\mu_2=0{,}009753256$ и если $C_3=32^{1/3}$, то $\mu_3=0{,}091782889$. Для вто-

рого критического значения C, $C=(32{,}25)^{1/3}$, имеем $\mu_1=0{,}008566815$, $\mu_2=0{,}007618194$ и $\mu_3=0{,}078061547$. Эти значения приведены лишь для общей ориентации. Поскольку доказательство существования периодических орбит первого рода основывается на аналитических продолжениях от $\mu=0$, предел, до которого могут быть продолжены круговые орбиты, остается неизвестным. Большие значения C по оказываемому действию одинаковы с малыми значениями μ: в обоих случаях возмущения, вызываемые вторым основным телом (массы μ), малы. Когда C велико, т. е. $C\gg C_{\max}$, движение происходит либо вблизи первого основного тела ($C\approx 2/r$), либо вдали от него ($C\approx r^2$); в обоих случаях возмущения малы.

Метод аналитического продолжения не дает ответа на эти вопросы. Результат применения аналитического продолжения состоит в том, что для неисключительных значений C прямые орбиты могут быть продолжены от $\mu=0$ до $\mu\neq 0$.

Следуя Виитнеру, мы предприняли попытку представить графически допустимые области μ, см. рис. 8.13. При $k=2$ аналитическое продолжение, как было показано раньше, невозможно; поэтому кривая на рис. 8.13 касается линии $\mu=0$. Как велико значение μ, скажем, $k=2{,}5$, неизвестно, и кривая на рисунке проведена лишь для того чтобы показать, что «полного» продолжения (до $\mu=1/2$) ожидать нельзя. Из рисунка видно, что при малом значении $\mu=\mu_0$ вблизи критических значений k орбиты могут быть продолжены. Это указывает на то, что хотя в критических значениях имеются пропуски, окрестности этих значений могут быть заполнены периодическими орбитами, *при условии*, что физическая модель имеет достаточно малое зна-

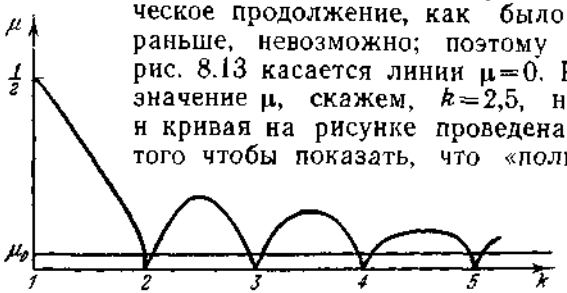


Рис. 8.13. Аналитическое продолжение в зависимости от среднего движения, постоянной Якоби, периода и т. д. для прямых внутренних круговых орбит.

1	2	3	4	5	k
0	1	2	3	4	m
∞	2/1	3/2	4/3	5/4	n
∞	32	343/12	250/9	2197/80	C^2
∞	−3,175	−3,057	−3,023	−3,017	C
0	2π	4π	6π	8π	T^*
0	4	9/4	16/9	25/16	$a_2\cdot^3$
	−0,630	−0,763	−0,825	−0,862	a_3
	Группа Гекуба	Группа Хилда	Группа Туле		

чение μ. Значения, указанные внизу рисунка, вычислены по следующим формулам:

$$n=\frac{k}{k-1}, \quad m=k-1, \quad n=1+\frac{1}{m},$$
$$C=\frac{2+n}{n^{1/3}}, \quad T^*=\frac{2\pi}{n-1}, \quad a_2=n^{-2/3}. \tag{29}$$

Здесь n есть среднее движение в неподвижной системе, k — целое положительное число, m — характеристическое число Пуанкаре, C — постоянная Якоби, T^* — период во вращающейся системе и a_2 — радиус прямой круговой орбиты. Значения $m=1$, 2, 3 соответствуют следующим группам малых планет: Гекуба, Хилда и Туле.

Четырнадцати Троянцам на рисунке соответствуют $n=1$, $m\to\infty$, $k\to\infty$, $T^*\to\infty$, $C=3$ и $a_2=1$. Они рассматривались нами в гл. 5. Группы Хилда включает 20 малых планет, некоторые из которых имеют большие эксцентриситеты (0,25), в то время как все Троянцы имеют $e<0{,}15$. Планеты группы Хилда имеют наклонение плоскости орбиты менее 15°, тогда как один из Троянцев имеет наклонение 35°.

Следует отметить, что масштабы различных приведенных на рис. 8.13 величин не связаны линейным образом с масштабом k. Кроме того, нужно иметь в виду, что рисунок относится только к прямым внутренним орбитам. Попятные внутренние орбиты могут быть продолжены при любом значении $C\geqslant 3$. Сидерически попятные наружные орбиты не имеют критических значений C, и, следовательно, для них нельзя построить рисунка, подобного рис. 8.13. Читателям, обладающим известной фантазией, можно предложить самостоятельно построить такой график для сидерически прямых наружных орбит.

В дополнение к сказанному выше приведем краткое содержание работы Биркгофа о существовании попятной и прямой периодических орбит при произвольном значении массового параметра ($0<\mu<1/2$).

Двулистное кольцо, состоящее из круговых орбит для $\mu=0$, можно аналитически продолжить для малых μ и образовать новое кольцо из симметричных периодических орбит первого рода. Таким способом мы раньше доказали существование прямых и попятных периодических орбит для малых μ. С другой стороны, исследование дифференциальных уравнений движения позволило Биркгофу доказать (не пользуясь аналитическим продолжением) теорему, справедливую для *произвольного* значения μ: для любого значения C, для которого существует замкнутый овал нулевой скорости вокруг m_1, имеется по крайней мере одна периодическая орбита, делающая один-единственный *попятный* оборот вокруг m_1. Эта орбита симметрична относительно

оси x, и касательные к орбите *параллельны* оси y в двух точках, где орбита пересекает ось x. На орбите имеется две точки, симметрично расположенные относительно оси x, где касательные к орбите параллельны оси x.

Биркгоф пошел дальше и доказал существование *прямых* периодических орбит для произвольного μ. Если учитывать тот факт, что для произвольного μ можно доказать существование попятных орбит, то можно попытаться отыскать такое (кольцевое) преобразование, которое не основывалось бы на существовании прямых и попятных круговых орбит, а основывалось бы лишь на существовании указанного выше попятного кругового движения. Выбрав такое (кольцевое) преобразование, мы смогли бы перейти от $\mu=0$ к произвольному μ, так как попятные периодические орбиты существуют в обоих случаях. Получив прямые круговые орбиты из этого нового преобразования для $\mu=0$, а прямые периодические орбиты для $\mu\neq 0$ — из соответствующего преобразования, мы завершим доказательство существования прямых периодических орбит для произвольного μ.

Для того чтобы получить (кольцевое) преобразование, основанное на одних только попятных круговых орбитах (для $\mu=0$), подвергнем кольцевое преобразование, описанное в пункте 8.5.3, следующему преобразованию:

$$a^*=1/a-1/a_2,\quad \theta^*=\bar{\theta},\quad \psi^*=\psi-\bar{\theta}.$$

Система переменных a^*, θ^*, ψ^* может быть представлена теперь сплошным цилиндром, а «кольцо» — сплошным кругом, или диском. Этот диск преобразуется в самого себя (точно так же, как кольцо в пункте 8.5.3) согласно формулам

$$(\theta^*)'=-2\pi\left[(a^*+1/a_2)^{3/2}+1\right]^{-1}+\theta^* \text{ и } (a^*)'=a^*.$$

Следовательно, преобразование представляет чистый поворот.

Наружная окружность кольца (в пункте 8.5.3) радиуса a_2 представляет прямую орбиту для заданного C. Посредством верхних формул эта окружность преобразовывается в нулевую окружность, а внутренняя окружность попятных орбит (a_1) становится границей нового диска.

Теперь соответствие между попятной орбитой для $\mu=0$ (окружностью радиуса a_1) и попятной орбитой для $\mu\neq 0$ установлено. Пусть также состояния движения ($\mu\neq 0$) внутри замкнутого овала соответствуют состояниям движения ($\mu=0$) внутри окружности. Для этого можно подвергнуть непрерывной деформации область движения для $\mu\neq 0$ (т. е. внутреннюю часть овала нулевой скорости), не изменяя окрестности особой точки P_1, так что кривая нулевой скорости для $\mu\neq 0$ ста-

нет окружностью нулевой скорости для $\mu=0$. При этом процессе попятная орбита ($\mu\neq0$) тоже деформируется и становится попятной окружностью ($\mu=0$). Согласно теореме Брауэра о неподвижной точке, преобразование диска в самого себя для $\mu\neq0$ будет иметь инвариантную точку. Она будет соответствовать прямой орбите, существование которой было рассмотрено нами выше. Для различных значений C мы получаем совокупность прямых орбит этого типа.

8.6.2. Периодические орбиты второго рода. Периодические орбиты второго рода Пуанкаре определяет как орбиты, которые образованы из эллиптических орбит в плоскости основных тел: $e\neq0$, $i=0$ (задача двух тел). Начальные условия можно принять те же, что и для периодических орбит первого рода: при $t=0$ $y(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$. Кроме того, во второй точке пересечения оси x мы имеем $y(T_{\text{син}}/2)=0$, $\dot{x}(T_{\text{син}}/2)=0$, так что период во вращающейся системе равен $T_{\text{син}}$.

Система переменных, которыми мы здесь будем пользоваться, была описана в § 7.7 (уравнения (96) и (97)). Для $\mu=0$ имеем $L=\text{const}$, $G=\text{const}$, $\dot{l}=L^{-3}$ и $\dot{\bar{g}}=-1$, или, что то же, $L=L_0=a^{1/2}$, $G=G_0=[a(1-e^2)]^{1/2}$, $l=t/L_0^3+l(0)$ и $\bar{g}=-t+\bar{g}(0)$. Начальными условиями в новых переменных будут просто условия для прохождения апоцентра:

$$\bar{g}(0)=-\pi,\quad l(0)=\pi.$$

При втором пересечении время равно $t=T_{\text{син}}/2$. Период в неподвижной системе равен $T_{\text{сид}}=2\pi L_0^3$, так как среднее движение равно $a^{-3/2}=L_0^{-3}$. Орбита будет периодической также и во вращающейся системе, если $T_{\text{син}}=pT_{\text{сид}}=2\pi q$, или $a^{3/2}=q/p$ (см. § 8.2). Таким образом, прохождение перицентра происходит в момент времени $t=\pi q$, и

$$l(\pi q)=\pi(1+p),\quad \bar{g}(\pi q)=-\pi(1+q),$$

что получается, если начальные условия ($t=0$) и условия для второго пересечения ($t=T_{\text{син}}/2$) подставить в решение уравнений движения для $\mu=0$. (Заметим, что в обозначениях пункта 8.5.3 $q/p=l/k$.)

Функциональный определитель $\partial(l,g)/\partial(t,L)$ при $t=T_{\text{син}}/2$ и $\mu=0$ равен $-3\pi pa^{-1/2}\neq0$, следовательно, обращение рассматриваемых функций можно выполнить, и требование теоремы о неявных функциях выполняется.

Применяя указанные выше переменные, нужно проявлять известную осторожность, чтобы избежать возможных противоречий. Поскольку апо- и перицентры рассматриваемых орбит находятся на оси x, на которой также расположены и основные

тела, когда μ не равно нулю, но близко к нему, особенность имеет место вблизи точки $x=-1$, $y=0$. Исключение некоторых точек плоскости ea, для которых решение теряет свой аналитический характер, особого труда не составляет.

Вопрос об ограничении протяженности аналитического продолжения орбит второго рода оказывается несколько более сложным, чем в случае орбит первого рода. Картина, изображенная на рис. 8.13, должна быть заменена трехмерной, т. е. нужно для заданных (n, e), или, что то же, для системы (C, e) исследовать продолжение заданного эллипса (в задаче двух тел) от $\mu=0$ до $\mu\neq 0$.

С литературой по этому вопросу читатель может познакомиться в конце этой главы, в § 8.9.

8.6.3. Свойства симметрии решений. В отношении выбора начальных условий для периодических орбит первого и второго рода (пункты 8.6.1 и 8.6.2) нужно сделать несколько дополнительных замечаний. Уравнения движения ограниченной задачи обладают тем свойством, что если $x=x(t)$, $y=y(t)$ есть частное решение, то $x=x(-t)$, $y=-y(-t)$ тоже будет решением. В этом можно убедиться, исследовав шесть членов, входящих в дифференциальные уравнения

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\Omega_x, \quad \ddot{y}+2\dot{x}=\Omega_y,$$

где Ω зависит только от x и y^2 и, следовательно,

$$\Omega(x, y)=\Omega(x, -y),$$
$$\Omega_x(x, y)=\Omega_x(x, -y),$$
$$\Omega_y(x, y)=-\Omega_y(x, -y).$$

Заменяя t на $-t$, y на $-y$, а x оставляя без изменения, видим, что $\ddot{x}$ остается таким же, $\dot{y}\to\dot{y}$, $\Omega_x\to\Omega_x$, $\ddot{y}\to-\ddot{y}$, $\dot{x}\to-\dot{x}$ и $\Omega_y\to-\Omega_y$; такой переход убеждает нас в правильности высказанного выше утверждения.

Геометрически это представлено на рис. 8.14, *а*. В момент $t=t_1$ частица находится в точке $R_1[x(t_1), y(t_1)]$ и движется с $\dot{x}>0$, $\dot{y}>0$ в направлении, указанном стрелкой, к точке $R_2[x(t_2), y(t_2)]$. Если эта кривая представляет собой орбиту, т. е. решение уравнений движения, то ее зеркальное отображение $(y\to-y)$ относительно оси x тоже будет решением с $t\to-t$. По этой второй орбите частица движется от точки $R_2'[x(-t_2)=x(t_2), -y(t_2)=y(-t_2)]$ с $\dot{x}<0$, $\dot{y}<0$ в направлении, указанном стрелкой, к точке $R_1'[x(-t_1)=x(t_1), -y(t_1)=y(-t_1)]$. Отметим, что при переходе от первоначальной кривой к ее зеркальному отображению $\dot{x}$ меняет знак, а $\dot{y}$ не меняет. Кроме того, $t_2>t_1$ и, следовательно, $-t_1>-t_2$; кривые обходятся в противоположных направлениях.

Одним из следствий, вытекающих из этого свойства симметрии, является то, что если точки R_1 и R_2 лежат на оси x, то их зеркальные отображения будут совпадать с первоначальными точками (см. рис. 8.14, *б*), и вычисление орбиты «возвращения» становится излишним, так как если траектория от R_1

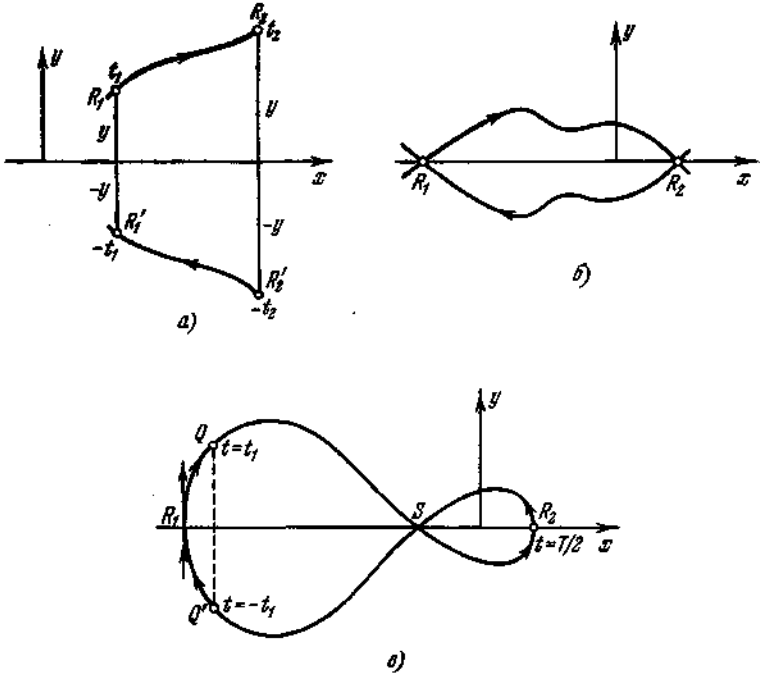


Рис. 8.14. Изображение траекторий.

к R_2 установлена, то она может быть использована и как траектория от R_2 к R_1. Заметим, что благодаря этому свойству решения, все последовательные орбиты соударения, вычисленные и показанные на рис. 3.14, 3.15 и 9.35, могут быть обращены. Первоначальные орбиты представляли собой траектории от Земли к Луне. Отражая эти орбиты от оси x, получаем, как показал Миеле, траектории от Луны к Земле.

Пусть теперь скорость в точке R_1 на оси x будет перпендикулярна этой оси (рис. 8.14, *в*). Тогда начальными условиями в точке R_1 будут $x<0$, $y=0$, $\dot{x}=0$, $\dot{y}>0$. Существует другая орбита, которая является зеркальным отображением орбиты R_1Q; она проходит ниже оси сизигий и пересекает точку Q' в момент $t=-t_1$. Каждый раз, когда продолжение кривой R_1Q пересекает ось x, продолжение ее зеркального отображения

(R_1Q') тоже имеет нулевую ординату (точка S на рис. 8.14,*в*). (Фактически речь идет о продолжении по времени кривой R_1Q, представляющей орбиту, начинающуюся в момент $t=0$ с точки R_1; когда же получаем точку Q', мы имеем соответственно попятное движение.)

Когда орбита пересекает ось x под прямым углом (точка R_2 на рис. 8.14, *в*), то же самое происходит и с ее зеркальным отображением, и получается периодическая орбита. Если пересечение в точке S перпендикулярно, то получается простая периодическая орбита. Поэтому условием существования периодической орбиты является наличие двух перпендикулярных пересечений. Это условие является достаточным, но не необходимым, так как известно, что периодические орбиты существуют и без перпендикулярных пересечений, а также при отсутствии симметрии относительно оси x. Если орбита пересекает ось x перпендикулярно по крайней мере дважды, то она должна быть симметричной (относительно оси x) периодической орбитой. Другими словами, периодическая орбита, которая несимметрична относительно оси x, не может иметь двух перпендикулярных пересечений. (См. также пункт 9.9.3.)

§ 8.7. Критерий Уиттекера существования периодических орбит

Принцип Гамильтона (см. уравнение (1), § 6.2), согласно которому интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt,$$

вычисленный по прямому пути, имеет стационарное значение по сравнению со значениями, которые он принимает при движении системы по окольным путям, близким к прямому, дает условие существования периодических орбит. Когда кинетический потенциал L не содержит явно время, принцип Гамильтона можно записать в виде

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\,dt=0. \tag{30}$$

Этот интеграл называют действием, а принцип известен как принцип наименьшего действия. (В уравнении (30) использован уже знакомый нам сокращенный способ записи суммирования.) Если потенциальная функция не зависит от скорости, а кинетическая энергия есть квадратичная функция составляю-

щих скоростей $T=a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j/2$, то уравнение (30) можно переписать в виде

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T\,dt=0.$$

Наконец, меняя независимую переменную и переходя от времени к длине дуги вдоль орбиты согласно формуле

$$ds=(a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j)^{1/2}dt,$$

мы приходим к окончательной форме вариационного принципа для консервативных динамических систем:

$$\delta I=\delta\int_{s_1}^{s_2} T^{1/2}ds=\delta\int_{s_1}^{s_2}\left(\Omega-\frac{C}{2}\right)^{1/2}ds=0. \tag{31}$$

Здесь Ω есть силовая функция (отрицательный потенциал), а C — удвоенное отрицательное значение постоянной энергии. Таким образом, интеграл энергии принимает вид

$$\Omega-T=C/2.$$

Рассмотрим в качестве конкретного примера консервативную динамическую систему с двумя степенями свободы, описываемую следующими уравнениями движения:

$$\ddot{x}=\Omega_x \text{ и } \ddot{y}=\Omega_y.$$

Интеграл энергии запишется в виде

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega-C.$$

Можно показать, что выражение, определяющее знак δI, имеет вид

$$W=\frac{2\Omega-C}{\rho}+\Omega_x\cos\gamma+\Omega_y\sin\gamma, \tag{32}$$

где ρ — радиус кривизны замкнутой кривой, а γ — угол между нормалью к кривой и осью x.

С помощью уравнения (32) Уиттекер установил критерий существования периодических орбит. Пусть одна замкнутая кривая (A_1) охватывается другой замкнутой кривой (A_2). Вычислим W по обеим кривым. Если $W(A_1)$ и $W(A_2)$ имеют противоположные знаки и в кольце между A_1 и A_2 нет особенностей, то в кольце существует периодическая орбита и ее постоянная энергии равна C.

Задача. Покажите, что при $\Omega=1/r$, т. е. для задачи двух тел имеют место две следующие формулы:

$$W(A_1)=\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_0}\right) \text{ и } W(A_2)=\frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_0}\right),$$

где A_1 и A_2 — концентрические окружности с радиусами r_1 и r_2 и центром в начале координат, а r_0 — радиус периодической круговой орбиты между A_1 и A_2 с $C=1/r_0$.

Этот метод можно обобщить на случай ограниченной задачи. При этом выражение для W слегка изменится и примет вид

$$W=\frac{2\Omega-C}{\rho}+\Omega_x\cos\gamma+\Omega_y\sin\gamma+(2\Omega-C)^{1/2}. \tag{33}$$

«Потенциальная функция» в этом случае зависит от скоростей, так что и сам вывод и получаемый результат для ограниченной задачи будут отличаться. Основное различие состоит в том, что принцип наименьшего действия формулируется для модифицированной функции Лагранжа (см. § 8.9).

§ 8.8. Характеристические показатели

Пусть

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{34}$$

представляют систему обыкновенных дифференциальных уравнений с правыми частями (X_i), являющимися функциями $x_1, \ldots, x_n$, и либо они не содержат явно время, либо содержат только периодические функции t.

Пусть, далее,

$$x_i=\varphi_i(t) \tag{35}$$

представляют периодическое решение. Для того чтобы составить вариационные уравнения, положим

$$x_i=\varphi_i(t)+\xi_i. \tag{36}$$

Вариационное уравнение, соответствующее системе уравнений (34), будет иметь вид

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\xi_j, \tag{37}$$

где коэффициенты $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ вычисляются посредством подстановки $x_i=\varphi_i(t)$. Следовательно, уравнение (37) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, которые являются периодическими функциями времени.

Согласно теории Фукса и Флокэ, общее решение уравнения (37) для n различных α_j имеет вид

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}(t)\, e^{\alpha_j t}, \tag{38}$$

где $\alpha_j = \text{const}$ и называются характеристическими показателями Пуанкаре, а периодические функции S_{ij} имеют тот же период, что и $\varphi_i(t)$.

Заметим, что если вариация применяется к стационарному решению ($x_i = x_i^0 = \text{const}$), то $S_{ij} = \text{const}$. Уравнение в вариациях всегда линейно, его коэффициенты либо постоянны, либо являются функциями независимой переменной, в зависимости от того, является варьируемое решение стационарным или нет.

Рассмотрим теперь начальные условия для вариации:

$$\xi_i(0) = \beta_i \tag{39}$$

и, следовательно,

$$x_i(0) = \varphi_i(0) + \beta_i.$$

Спустя период (в момент времени T) вариации будут иметь значение

$$\xi_i(T) = \beta_i + \psi_i. \tag{40}$$

Решение уравнений в вариациях в общем случае не будет периодическим и, во всяком случае, не будет иметь период T:

$$\xi_i(0) = \beta_i \neq \xi_i(T) = \beta_i + \psi_i.$$

Тем не менее заданная система β_i определяет систему ψ_i, так как β_i определяют решение (38) рассматриваемой системы линейных дифференциальных уравнений. Действительно, если $\beta_i = 0$, то $\psi_i = 0$ и «образующее решение» $\varphi_i(t)$ не варьируется. Раскладывая функцию $\psi_i = \psi_i(\beta_j)$ в ряд около $\beta_j = 0$, получаем

$$\psi_i = \sum_{j}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta_j} \beta_j + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \beta_j \partial \beta_k} \frac{\beta_j \beta_k}{2!} + \dots \tag{41}$$

Это разложение часто называют леммой Пуанкаре.

Способ определения j-го характеристического значения следующий. Частное решение, соответствующее этому характеристическому значению, имеет вид

$$\xi_i = S_{ij}(t)\, e^{\alpha_j t}, \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{42}$$

при фиксированном значении j.

Между β_i и ψ_i можно установить соответствующее соотношение, поскольку $S_{ij}(t) = S_{ij}(t+T)$. В самом деле, из

уравнений (40) и (42) имеем

$$\beta_i + \psi_i = \xi_i(T) = S_{ij}(T)\, e^{\alpha_j T} = \beta_i e^{\alpha_j T}, \tag{43}$$

так как, согласно уравнениям (39) и (42),

$$S_{ij}(T) = S_{ij}(0) = \xi_i(0) = \beta_i.$$

Подставляя ряд (41) в уравнение (43), получаем следующую систему уравнений для $i = 1, 2, \ldots, n$ и *фиксированного значения* j:

$$\beta_i (1 - e^{\alpha_j T}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta_k} \beta_k = 0. \tag{44}$$

Эта система однородных уравнений имеет решения, отличные от тривиального, если ее определитель равен нулю. Элементами по главной диагонали (стоящими в i-м ряду и i-м столбце) этого определителя будут

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \beta_i} + 1 - e^{\alpha_j T},$$

где суммирование по i, конечно, не производится. Элементами, стоящими в i-м ряду и k-м столбце ($i \neq k$), будут $\partial \psi_i / \partial \beta_k$.

Раскрыв определитель, получим алгебраическое уравнение относительно $e^{\alpha T}$ n-го порядка, из которого можно найти значения характеристических показателей (так как T известно), если мы знаем производные $\partial \psi_i / \partial \beta_k$. Если определяющее решение известно только численно, то коэффициенты $\partial \psi_i / \partial \beta_k$ находятся методом численного интегрирования.

Задача. Покажите, что когда дифференциальные уравнения образуют гамильтонову систему, т. е. когда $x_1, \ldots, x_{2n} = q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, характеристические показатели периодического решения образуют пары, равные по величине и противоположные по знаку.

Когда система уравнений автономна (время не входит в функции X_i), один из характеристических показателей равен нулю, а когда система имеет общий интеграл, тогда в общем случае еще один характеристический показатель равен нулю.

Знак действительной части характеристического показателя определяет устойчивость (в линейном смысле) периодического решения. Так как корни для гамильтоновой системы входят попарно, то наличие характеристического показателя с отличной от нуля действительной частью сразу указывает на неустойчивость. Необходимым условием устойчивости периодической орбиты является условие, чтобы все характеристические показатели были чисто мнимыми.

Поэтому метод Пуанкаре по существу сводится к линейному анализу. Динамическая система, носящая название ограничен-

ной задачи трех тел, является гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Следовательно, характеристические показатели равны (0, 0, α, $-\alpha$). Если действительная часть показателя α не равна нулю, то периодическая орбита неустойчива. Этот результат может быть распространен на нелинейную систему, поэтому он имеет важное значение. Если же действительная часть показателя α равна нулю, то решение уравнения в вариациях может быть выражено тригонометрическими функциями времени. Это указывает на устойчивость в линейном смысле, однако для нелинейной системы это имеет меньшее значение и относится к случаю, который в литературе называют критическим.

Но даже и в этом случае не следует недооценивать важности характеристических показателей. Для семейства периодических орбит характеристический показатель может служить в качестве параметра, изменяющегося (непрерывным образом) в процессе развития семейства. Такое приложение не зависит от того, имеет ли характеристический показатель значение для устойчивости в нелинейном смысле, или же он существен только для линейной системы.

Параметры, описывающие семейства периодических орбит, необходимы для их систематического изучения. Чтобы решить вопрос, какие из параметров важней, нужно использовать как экспериментальные (численные) методы, так и теоретические, но даже при таком исследовании преимущества одних параметров над другими, установленные для одного семейства, бывает трудно распространить на другое семейство периодических орбит. Вообще предпочтительней параметры с инвариантными свойствами, но, к счастью, характеристические показатели не зависят от выбора переменных. С другой стороны, периодичность не является инвариантным свойством в отношении преобразования координат, и следовательно, тот факт, что характеристические показатели могут указывать на (линейную) устойчивость или неустойчивость, в зависимости от выбора переменных, не обязательно должен умалять их значение для классификации периодических орбит.

Другой, несомненно более короткий, но в то же время более ограниченный способ представления вариационной задачи периодических решений заключается в составлении уравнения нормального смещения и исследования с его помощью вопроса об устойчивости. Действительно, уравнения движения ограниченной задачи могут быть преобразованы изоэнергетически посредством перехода от системы x, y к системе u, v, что мы видели в гл. 3.

Применяя полученные результаты, будем иметь для бесконечно малого нормального смещения δn следующее уравнение

в вариациях:

$$\frac{d^2\delta n}{dt^2}+\Theta\delta n=0, \tag{45}$$

где

$$\Theta=1+3(\dot z+1)^2-\frac{\partial^2\Omega}{\partial n^2}, \tag{46}$$

или

$$\Theta=\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dt^2}+2+2(\dot z+1)^2-\Omega_{xx}-\Omega_{yy}. \tag{47}$$

В уравнениях (46) и (47) символом z обозначен угол между касательной к орбите и положительным направлением оси x (сравните с обозначениями в гл. 2), а $v^2=\dot x^2+\dot y^2$. Функция Θ должна вычисляться вдоль орбиты, следовательно, $\Theta=\Theta(t)$, и если исследуемая орбита является периодической, то периодической будет и функция $\Theta(t)$. Действительно, в этом случае общее решение может быть написано (аналогично уравнению (38)) в виде

$$\delta n=S_1(t)\,e^{\alpha t}+S_2(t)\,e^{-\alpha t},$$

где $S_i(t)$ имеет такой же период, что и $\Theta(t)$.

Существуют и другие способы изучения устойчивости периодических орбит. В § 9.10 описывается другой способ вычисления α. Он основывается на пересечении орбиты с поверхностью сечения. В центре внимания находится вопрос об устойчивости неподвижной точки преобразования, представляющей периодическую орбиту.

§ 8.9. Замечания

В качестве основной литературы к этой главе, в первую очередь, следует назвать *Méthodes Nouvelles* Пуанкаре [1] и известную статью Биркгофа [2]. На последней основывается работа Клозе [3], она несомненно доставит читателю удовольствие. Кроме того, эта статья Биркгофа явилась «отправной точкой» для важной статьи Мермана [4].

С рассуждениями Пуанкаре относительно плотности периодических орбит (§ 8.1) можно познакомиться в т. 1, стр. 82, его *Méthodes*, а с интерпретацией Шварцшильда — в двух его статьях [5]. Другое, правда, несколько сомнительное предположение высказал Дарвин в своей известной первой работе по периодическим орбитам [6]. Несмотря на определенную привлекательность, предложение Дарвина о классификации орбит на основе периодических орбит как категории делителей имеет

тот недостаток, что не обладает необходимой четкостью. Как узнать, какая орбита — среди «периодических» орбит — тоже является периодической, а какая нет? Положение здесь не идентично (хотя и имеет некоторое сходство) первоначальной идее Барро, согласно которой классы периодических орбит разделяются орбитами соударения. В настоящее время совершенно ясно, что если бы классы Стрёмгрена определялись по Барро, то нельзя было бы пользоваться окончательным принципом Стрёмгрена, и его классификация не обладала бы такой простотой. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже — в главе 9.

Основными работами по почти-периодическим функциям (§ 8.2 В) являются статьи Бора [7], а по квазипериодическим функциям — статья Боля [7а]. Интересный обзор составил Джессен [8].

Литературы по задаче малых делителей (§ 8.2 Г) и аналитическим методам ее решения, можно считать, вообще еще не существует. Здесь уместно привести одно высказывание Пуанкаре: «Трудности в небесной механике, вызываемые наличием малых делителей и соответствующими приближениями соизмеримостями средних движений, связаны с фактической природой вещей, и потому обойти их нельзя». Эту же точку зрения разделяют Л. Брауэр [9] и Гарфинкель [9а]; в ставшей теперь классической теории искусственных спутников, а также в других публикациях они отмечают не только математическое, но и важное физическое значение малых двигателей. Диссертация Уиттекера, посвященная адельфическому интегралу [10], тоже проливает свет на этот вопрос. Классическое и часто чрезмерное упрощенное представление Мультона, Брауна и других, подчеркивающее «практические» аспекты, такие, как одновременное появление высоких степеней наклонений и эксцентриситетов, малых коэффициентов и малых делителей, не оказывает помощи при установлении сходимости, но, конечно, полезно при решении существующих проблем астрономии. Можно надеяться, что изложенные в этой главе (§ 8.3 Г) некоторые идеи, касающиеся возмущений, будут полезны как тем, кто интересуется астрономией, так и тем, кто интересуется математикой.

Теорема возвращения (§ 8.2 Е) приводится Пуанкаре в двух его работах [11], точная же формулировка ее дается Биркгофом [12]. Одной из основных работ является работа Хопфа [13]. Чандрасекар [14] и Фриш [15] установили фундаментальные соотношения между обратимостью и рекуррентностью, первый — общего вида, второй — частного вида. Доказательство, что механическая нормальная система в общем случае является квазиэргодической (§ 8.2.3), дано Ферми

[16]. Настоятельно рекомендуем читателям познакомиться с замечаниями лорда Кельвина [16а]. Вопрос об *интегрируемых* и *проинтегрированных* динамических системах является крайне важным. Наиболее ощутимый вклад в развитие математических методов в современной небесной механике внесли в 1960-е годы В. И. Арнольд и Дж. Мозер. Их результаты можно рассматривать как решение фундаментальной задачи, имеющей непосредственное отношение к теории Колмогорова (§ 8.3 В). Имеются две статьи А. Н. Колмогорова, в которых он формулирует и разъясняет свою теорему, но строгого доказательства в них не приводится [17].

Несколько статей В. И. Арнольда имеют близкое отношение к данной главе и представляют большой интерес. Наиболее важной из них, пожалуй, является статья [19] объемом в 100 страниц. В статье [20] он дает свое доказательство теоремы Колмогорова, а в статье [21] исследует отображение кругов в самих себя.

В работе [22] Мозер приводит доказательство своей теоремы отображения (§ 8.3 А), а в статьях [23] и [23а] показывает значение своей работы для математиков и астрономов. Основополагающий материал содержится в фундаментальной работе Данжуа [23б].

Последняя геометрическая теорема Пуанкаре (§ 8.3 Б) содержится в статье [24], но приводится там без доказательства. Доказательство этой теоремы можно найти в статье Биркгофа [25], а дополнительные замечания — в его статье [26]; в статье [27] он расширяет теорему Пуанкаре.

Идея аналитического продолжения (§ 8.4) принадлежит Зигелю [28, стр. 118] и, в то же время, тесно связана с исследованиями Пуанкаре [1, т. 1, стр. 79]. Метод Шарлье [29, т. 2, стр. 187] тоже основывается на исследованиях Пуанкаре. Работу Зигеля следует считать предпочтительней. Теорема Брауэра о неподвижной точке содержится в его работе [30].

Изложение задачи двух тел (§ 8.5) основывается на работе Биркгофа [2]. Тождественность уравнения (18) с гамильтонианом (см. уравнение (90) § 7.6) была установлена д-ром В. Джеффри (частная служба связи). Рис. 8.12 заимствован из работы Д. Кимболла из Иельской обсерватории.

Орбиты снаружи замкнутых кривых нулевой скорости, охватывающих оба основных тела, рассматривали Купмен [31] и Коу [31а]. В работе Купмена для этих наружных орбит вводится поверхность сечения, аналогичная поверхности сечения Биркгофа—Пуанкаре, применяемой для орбит вблизи и вокруг одного из основных тел. Так как кривые нулевой скорости дают только нижнюю границу для наружных орбит, то соответствующая поверхность сечения распространяется до бесконеч-

ности. В. Себехей представил этот результат посредством тора. В основе этих соображений лежат идеи Биркгофа, изложенные им в его книге [12] и в одной из его статей [33]. У Пуанкаре этому вопросу посвящены страницы 196 и 372 тома 3 его *Méthodes*.

Установить различие между прямым и попятным движением можно только в самых простых случаях. Глобальная характеристика возможна в среднем в тех случаях, когда среднее движение частицы сравнивается с движением синодической системы (сравните с пунктом 8.5.1). Локальная (т. е. в данном случае мгновенная) характеристика направления движения рассматривается (правда, не очень подробно) у Винтнера в его книге [34, стр. 224]. Весьма детально в этой книге [34, стр. 232] исследуется задача двух тел, там же приводится таблица критических значений постоянной Якобн (см. пункт 8.6.1).

В статье Винтнера [35] затрагиваются вопросы, имеющие отношение к нашему рис. 8.13, § 8.6. В этой сравнительно большой статье он собрал все те скудные сведения относительно ограничений метода аналитического продолжения, которыми он располагал. Кривую на рис. 8.13 получают экспериментально, т. е. путем численных расчетов периодических орбит для возрастающих значений μ, начиная с $\mu=0$. В гл. 9 будет показано, что периодическая орбита, представленная на рис. 8.10 (выполненном Ноулсом), может быть продолжена приблизительно до $\mu=0{,}24$, т. е. что поверхность $\mu=\mu(C, e)$ над плоскостью Ce, рассмотренной в конце пункта 8.6.2, имеет координаты $C\approx 3{,}4$, $e=0{,}3$, $\mu\approx 0{,}24$. Если рассматривать $\mu=\mu(n, e)$, то соответственно будем иметь $\mu\approx 0{,}24$, $n=3$, $e=0{,}3$.

В этой статье [35] Винтнер, подобно некоторым другим, выступает с критикой теории Пуанкаре представления периодических орбит различного рода. Хотя все, что пишет Винтнер, верно, однако его критические замечания можно интерпретировать скорее как недостаточно ясное понимание основного принципа Пуанкаре. Как уже отмечалось, ограниченная задача рассматривается Пуанкаре только для малых значений μ и для орбит, которые могут быть получены посредством продолжения орбит для задачи двух тел. Иными словами, его классификация не обязательно должна иметь смысл для значений μ, которые не являются малыми.

Приведенная в пункте 8.6.1 задача, в которой читателям предлагается самостоятельно вывести уравнение (27), содержится в работе Биркгофа [2, стр. 33], однако читатели, возможно, будут неудовлетворены его выводом и попытаются дать свой. Рекомендуем также познакомиться с книгами Зигеля [28, стр. 128] и Винтнера [34, стр. 226].

По динамике Троянцев имеется статья Брауна [36]; группу Гекуба исследовал Пуанкаре [37, т. 1, стр. 35], его метод был применен Шубартом [38] для группы Хилда.

Доказательство существования периодических орбит второго рода (пункт 8.6.2) приводнтся в статье Барара [39], причем в нем используются переменные Делоне. Аренсторф дал доказательство, пользуясь прямоугольной декартовой системой координат; между его доказательством существования периодических орбит второго рода и доказательством существования периодических орбит первого рода, данным Биркгофом, легко провести параллель.

Общеизвестно, что метод доказательства тесным образом связан с получаемыми результатами. Применение переменных Делоне позволяет установнть периодические орбиты, за исключеннем орбит соударения, тогда как при использовании прямоугольных координат, как показал Аренсторф, исключаются орбиты, для которых

$$e=(1-a^{-3})^{1/2},$$

где

$$a>1.$$

Оба доказательства основываются на методе аналитического продолжения и потому относятся к орбитам с «достаточно малыми» значеннями μ.

Предыдущие попытки доказать существование периодических орбит второго рода терпели неудачу по той причине, что принималось иное условие периодичности. Важность применения симметричных условий была установлена Биркгофом в его известной статье [2], появившейся еще в 1915 г. в Палермо. До ее опубликования Пуанкаре [1, т. 1, стр. 139], Шварцшильд [5] и Шарлье [29, т. 2, стр. 215] пробовали применить другое условие периодичности. На их ошнбки указали Штеккель [41] и Винтнер [35].

Существование периодических орбит, которые замыкаются только после нескольких оборотов, доказали Биркгоф [33] и Мозер [42], используя теорему о неподвижной точке.

Различные семейства периодических орбит, полученных численными методами, не охваченных в этой главе, будут подробно рассмотрены в гл. 9. Пернодические орбиты модифицированных форм ограниченной задачи, такие, как трехмерная задача, эллиптическое движение основных тел и задача Хилла, будут рассмотрены в гл. 10.

Метод, использующий свойства симметрин (пункт 8.6.3), называемый иногда «методом изображенний», был развнт Миеле и применен им к расчету лунных траекторий [43]. Свойство симметрии дифференцнальных уравнений движения нзвестен со

времени опубликования Эйлером в 1772 г. своей второй теории движения Луны.

Вывод критерия существования периодических орбит (уравнение (32) § 8.7) дан Уиттекером [44], им же этот критерий распространен на ограниченную задачу (уравнение (33)). Полезно также познакомиться с замечаниями по результатам Уиттекера, сделанными Тонелли [45], Синьорини [46], Биркгофом [47] и Пламмером [48, стр. 248]. Простой вывод уравнения (30) § 8.7 нами дан в связи с уравнением (143), пункт 10.5.2 Г.

Характеристические показатели рассматриваются у Уиттекера [4], до него их исследовал Пуанкаре, см. его книгу [1, т. 1, стр. 174] и статью [11, в особенности стр. 88]. Полезно также познакомиться с книгами Инса [49, стр. 382] и Чезари [49а, стр. 66]. Задача, приведенная в § 8.8, взята нами из книги Пуанкаре [1, т. 1, стр. 174].

Дифференциальные уравнения для нормального смещения приводятся в ряде стандартных учебников, см. например, Пламмера [48, стр. 245]. Вывод, на который мы ссылаемся в тексте (§ 8.8), дан Биркгофом [33]. Другие формы даны Месседжем [50]. Исследованию соотношения между уравнением второго порядка для нормального смещения и уравнениями в вариациях четвертого порядка посвящена статья Винтнера [51]. Розенталь [52] получил уравнения в вариациях, применив регуляризованные переменные Тиле — Барро. Физическая картина здесь, конечно, не очень достоверна, так как метод характеристических показателей и нормальных смещений является в своей основе линеаризованным процессом, который часто дает только необходимые условия устойчивости. Математическая задача заключается в решении дифференциальных уравнений Хилла. Для практических задач интерес представляют только свойства характеристических корней, и для исследования их мы располагаем методом Флоке; см. также Дэнби [53]. Попыток сделать обзор по проблемам устойчивости в небесной механике или по решениям ограниченной задачи не предпринималось. Единственная работа, которую здесь можно назвать, — это книга Хагихары [54]; в ней, между прочим, приводится список литературы в несколько сот названий.

Обратим еще раз внимание читателей на то, что в § 5.2 приводятся несколько теорем, которые могут быть применены к задаче об устойчивости периодических орбит. (Работы, в особенности по нелинейным задачам устойчивости, указанные в списке литературы к гл. 5, для данной главы тоже представляют интерес.) Исследование характеристических показателей выходит за рамки задачи устойчивости; не исключено, что семейства периодических орбит возрастут за счет значений характеристических показателей, как это полагал Эно [55],

кроме того, он занимался вопросом линейной устойчивости Копенгагенской задачи (см. § 9.10).

В гл. 9, посвященной количественным аспектам ограниченной задачи, предлагаются альтернативные методы расчета характеристик устойчивости периодических орбит. (Уделите особое внимание §§ 9.10 и 9.11.)

Фундаментальным трудом является книга Парса [56], периодическим орбитам в ней посвящена гл. XXX, стр. 602—607 русского издания.

Поскольку в этой главе достаточно подробно рассматривается задач двух тел, нам пришлось уделить внимание методу годографа. Отображение пространства конфигураций в пространство скоростей или вообще в пространство каких-либо векторов в настоящее время рассматривают как метод годографа. Сам годограф можно определить как отображение траектории чаще всего в пространство скоростей. Первым, кто предложил эту идею, был, очевидно, Мёбиус [57, стр. 36]; у него она встречается раньше, чем у Гамильтона [58]. Тиссеран [59, т. 1, стр. 96] рассматривал уравнения годографа для задачи двух тел в связи с интегралами Лапласа [60]. Приложения к космодинамике можно найти в двух статьях Альтмана, [61] и [62], в работе Пистинера [63] и в докладе Идеса [64].

Приложения методов Пуанкаре, Биркгофа, Арнольда и Мозера к различным задачам можно встретить в ряде статей Диліберто, Кинера и Фройнда, например, в [65] и [66].

§ 8.10. Литература

1. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Paris: Gauthier-Villars, 1892—1899, 3 vols. Reprinted by Dover, New York, 1957. [Русский перевод: Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр., т. 1, 2.— М.: Наука, 1971, 1972.]
2. Birkhoff G. D. The restricted problem of three bodies.— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1915, **39**, 1. Collected Mathematical Papers. New York: Am. Math. Soc., 1950, v. 1, p. 682.
3. Klose A. Topologische Dynamik der interplanetaren Massen.— Vierteljschr. Astron. Ges., 1932, 67, 61.
4. Мерман Г. А. Почти-периодические решения и расходимость рядов Линдштедта в плоской ограниченной задаче трех тел.— Труды института теоретической астрономии АН СССР, 1961, вып. 8, с. 5—134.
5. Schwarzschild K. Über eine Classe periodischer Lösungen des Dreikörperproblems.— Astron. Nachr., 1898, **147**, 17, 289.
6. Darwin G. H. Periodic orbits.— Acta Math., 1897, **21**, 99. Collected Works. London; New York: Cambridge Univ. Press, 1911, v. 4, p. 1.
7. Bohr H. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I. Eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen.— Acta Math., 1924, **45**, 29. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. II. Zusammenhang der fastperiodischen Funktionen mit Funktionen von unendlich vielen Variablen; gleichmässige Approximation durch trigonometrische Summen.— Ibid., 1925, **46**, 101. Über analytische fastperiodische Funktionen.— Math. Ann., 1930, **103**, 1.

7a. Bohl P. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie.— J. Reine Angew. Math. (Crelle), 1906, **131**, 268.
8. Jessen B. Some aspects of the theory of almost periodic functions.— Proc. Intern. Congr. Math. Amsterdam, 1954, v. 1, p. 305. North Holland Publ., Amsterdam, 1957.
9. Brouwer D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag.— Astron. J., 1959, **64**, 378.
9a. Garfinkel B. Formal solution in the problem of small divisors.— Astron. J., 1966, **71**, 657.
10. Whittaker E. T. On the adelphic integral of the differential equations of dynamics.— Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1916, **37**, 95.
11. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.— Acta Math., 1890, **13**, 1, especially pp. 67—72; also «Méthodes Nouvelles». Paris: Gauthier—Villars, 1892—1899, v. 3, pp. 140—157.
12. Birkhoff G. D. Dynamical Systems.— New York: Am. Math. Soc., 1927, p. 199. [Русский перевод: Биркгоф Дж. Д. Динамические системы.— М.; Л.: Гостехиздат, 1941.]
13. Hopf E. Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen dynamischer Systeme.— Math. Ann., 1930, **103**, 710.
14. Chandrasekhar S. Stochastic problems in physics and astronomy.— Rev. Mod. Phys., 1943, **15**, 1.
15. Frisch H. L. Poincaré recurrences.— Phys. Rev., 1956, **104**, 1.
16. Fermi E. Beweiss, dass ein mechanisches Normalsystem im allgemeinen quasiergodisch ist.— Z. Physik, 1923, **24**, 261.
16a. Thomson W. On periodic motion of a finite conservative system.— Phil. Mag., 1891, [5] **32**, 375. On instability of periodic motion.— Ibid., p. 555.
17. Колмогоров А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— ДАН СССР, 1954, **98**, № 4, с. 527—530. The general theory of dynamical systems and classical mechanics.— Proc. Intern. Cong. Math., Amsterdam, 1954, v. 1, p. 315. Amsterdam: North Holland Publ., 1957.
18. Арнольд В. И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае.— ДАН СССР, 1961, **137**, № 2, с. 255—257. О рождении условно периодического движения семейства периодических движений.— ДАН СССР, 1961, **138**, № 1, с. 13—15. О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона.— ДАН СССР, 1962, **142**, № 4, с. 758—761. О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем.— ДАН СССР, 1962, **145**, № 3, с. 487—490.
19. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.— Успехи математических наук, 1963, **18**, вып. 6, с. 91—192.
20. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Успехи математических наук, 1963, **18**, вып. 5, с. 13—40.
21. Арнольд В. И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя.— Изв. АН СССР, серия математическая, 1961, **25**, № 1, с. 21—86.
22. Moser J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus.— Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Physik. Kl. № 1 (1962).
23. Moser J. A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations.— Proc. Natl. Acad. Sci. US, 1961, **47**, 1824. Stability of the asteroids.— Astron. J., 1958, **63**, 439.

23a. Moser J. On the theory of quasiperiodic motions.— *SIAM* Review, 1966, **8**, 145.
23б. Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore.— J. Math. Pures Appl., 1932, [9] **11**, 333.
24. Poincaré H. Sur un théorème de géometrie.—Rend. Circ. Mat. Palermo, 1912, **33**, 375.
25. Birkhoff G. D. Proof of Poincaré's geometric theorem.— Trans. Am. Math. Soc., 1913, **14**, 14; also Collected Mathematical Papers, v. 1, p. 673.
26. Birkhoff G. D. Sur la démonstration directe du dernier théorème de Henri Poincaré par M. Dantzig.— Soc. Math. France, Bull. **42**, 41 (1918); also Collected Mathematical Papers, v. II, p. 103.
27. Birkhoff G. D. An extension of Poincaré's last geometric theorem.— Acta Math., 1925, **47**, 297; also Collected Mathematical Papers, v. II, p. 252.
28. Siegel C. L. Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin: Springer, 1956. [Русский перевод: Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.— М.: Изд-во иностр. лит., 1959.]
29. Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels. Leipzig: Von Veit, 1903— 1907, 2 vols. [Русский перевод: Шарлье К. Небесная механика.— Наука, 1966.]
30. Brouwer L. E. J. Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich.— Math. Ann., 1909, **69**, 176.
31. Koopman K. O. On rejection to infinity and exterior motion in the restricted problem of three bodies.— Trans. Am. Math. Soc., 1927, **29**, 287.
31a. Coe C. J. Exterior motion in the restricted problem of three bodies.— Trans. Am. Math. Soc., 1932, **34**, 811.
32. Szebehely V. Application of the restricted problem of three bodies to space mechanics.— Space Sci. Rev., 1963, **2**, 219.
33. Birkhoff G. D. Surface transformations and their dynamical application.— Acta Math., 1920, **43**, 1, Collected Mathematical Papers. New York: Am. Math. Soc., 1950, v. 2, p. 111.
34. Wintner A. The Analytical Foundations of Celestial Mechanics. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1941. [Русский перевод: Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.]
35. Wintner A. Grundlagen einer Genealogie der periodischen Bahnen im restringierten Dreikörperproblem.— Math. Z., 1931, **34**, 350.
36. Brown E. W. On the oscillating orbits about the triangular equilibrium poins in the problem of three bodies.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1911, **71**, 492.
37. Poincaré H. Leçons de Mécanique Céleste. Paris: Gauthier-Villars, v. 1 (1905); v. 2, Pt. 1 (1907); v. 2, Pt. 2 (1909); v. 3 (1910).
38. Schubart J. Long-period effects in nearly commensurable cases of the restricted three-body problem.— Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Special Rept., 1964, No 149.
39. Barrar R. B. Existence of periodic orbits of the second kind in the restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1965, **70**, 3.
40. Arenstorf R. F. Periodic solutions of the restricted three body problem representing analytic continuations of Keplerian elliptic motions.— Am. J. Math., 1963, **85**, 27.
41. Stäckel P. Periodische Lösungen, zweiter Art beim Dreikörperproblem.— Jahresber. Deut. Math.-Ver., 1919, **28**, 180.
42. Moser J. Periodische Lösungen des restringierten Dreikörperproblems, die sich erst nach vielen Umläuf schliessen.— Math. Ann., 1953, **126**, 325.
43. Miele A. Theorem of image trajectories in the earth-moon space.— Astronautica Acta, 1960, **6**, 225.

44. Whittaker E. T. Analytical Dynamics.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1904. Reprinted by Dover, New York, 1944. [Русский перевод: Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1937.] On periodic orbits in the restricted problem of three bodies.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1902, **62**, 346.
45. Tonelli L. Sui massimi e minimi assoluti del calcolo delle variazioni.— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1911, **32**, 297.
46. Signorini A. Esistenza di un'estremale chiusa dentro un contorno di Whittaker.— Rend. Cir. Mat. Palermo, 1912, **33**, 187.
47. Birkhoff G. D. Dynamical systems with two degrees of freedom.— Trans. Am. Math. Soc., 1917, **18**, 199. Collected Mathematical Papers.— New York, Am. Math. Soc., 1950, v. 2, p. 1.
48. Plummer H. C. Dynamical Astronomy.— London, New York: Cambridge Univ. Press, 1918. Reprinted by Dover, New York, 1960.
49. Ince E. L. Ordinary Differential Equations.— New York: Longmans Green, 1926. Reprinted by Dover, New York, 1956.
49a. Cesari L. Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations.— Berlin: Springer, 1959. 2nd ed., New York: Academic Press; Berlin: Springer, 1963. [Русский перевод: Чезари Л. Асимптотические поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1964.]
50. Message J. Some periodic orbits in the restricted problem of three bodies and their stabilities.— Astron. J., 1959, **64**, 226.
51. Wintner A. Three notes on characteristic exponents and equations of variation in celestial mechanics.— Am. J. Math., 1931, **53**, 605; also Copenhagen Obs. Publ., 1931, No. 78.
52. Rosenthal J. E. The equation of stability of periodic orbits of the restricted problem of three bodies in Thiele's regularising coordinates.— Am. J. Math., 1931, **53**, 626; also Copenhagen Obs. Publ., 1931, No. 78.
53. Danby J. M. A. Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1964, **69**, 165.
54. Hagihara Y. Stability in Celestial Mechanics.— Tokyo: Kasai, 1957.
55. Hénon M. Exploration numérique du problème restreint.— Ann. Astrophys., 1965, **28**, 499, 992.
56. Pars L. A. Analytical Dynamics.— New York: Wiley, 1965. [Русский перевод: Парс Л. А. Аналитическая динамика.— М.: Наука, 1971.]
57. Möbius A. F. Die Elemente der Mechanik des Himmels.— Leipzig: Wiedmann, 1843. Collected Works.— Leipzig: Hirzel; v. 1, 1885; v. 2, 1886; v. 3, 1886; v. 4, 1887.
58. Hamilton W. R. The hodograph or a new method of expressing in symbolical language the Newtonian law of attraction.— Proc. Roy. Irish Acad., 1847, **3**, 344; actual presentation by Hamilton in 1846. On a theorem of hodographic isochronism.— Ibid., 1847, **3**, p. 417. See also Cunningham Memoir No. XIV «The Mathematical Papers by Sir W. R. Hamilton» (Conway A. W., Synge J. L. eds.), v. 1, 1931; v. 2 (Conway A. W., McConnell A. J. eds.), 1940, and both volumes published by Cambridge University Press, London, New York. Hamilton's papers on hodographs are in v. 2, pp. 287, 293 with the editorial comments on p. 630.
59. Tisserand F. Traité de Mécanique Céleste.— Paris: Gauthier-Villars, v. 1, 1889; v. 2, 1891; v. 3, 1894, v. 4, 1896.
60. Laplace P. S. Traité de Méchanique Céleste. v. 1, 2, 1799; v. 3, 1802; v. 4, 1805; v. 5, 1825.
61. Altman S. P. Orbital transfer for satellites.— Proc. 4th Ballistic Missiles Space Technol. Symp. Los Angeles, 1959, p. 132. Oxford: Pergamon Press, 1961.

62. Altman S. P. Orbital Hodograph Transformation Theory.— Am. Inst. Aeronautics and Astronautics, Paper No. 65—686 (1965).
63. Pistiner J. S. Some characteristics of the planar satellite orbit.— Am. Rocket Soc. J., 1960, **30**, 275.
64. Eades J. B. The Hodograph and its Application to Space Flight.— Virginia Eng. Expt. Sta. Bull. No. 157, Blacksburg, Virginia, 1964.
65. Diliberto S. P., Kyner W. T., Freund R. B. Application of periodic surface theory to the study of satellite orbits.— Astron. J., 1961, **66**, 118.
66. Kyner W. T. Qualitative properties of orbits about an oblate planet.— Comm. Pure Appl. Math., 1964, **17**, 227.

Глава 9

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 9.1. Введение

Одно из наиболее важных современных направлений в динамике связано с широким использованием в качестве экспериментального инструмента быстродействующих электронных вычислительных машин. Благодаря сходству между процессами вычисления в динамике и экспериментами в физических науках, первые тоже можно отнести к *экспериментам*. Рассмотрим сложную динамическую систему (скажем, ограниченную задачу) и исследуем поведение этой системы в отношении периодического движения. Если семейство периодических орбит этой системы существует, то для его нахождения часто приходится прибегать к численному интегрированию. С другой стороны, имеется большой класс периодических орбит, к которому трудно применить существующие аналитические методы доказательства существования, но тем не менее можно найти орбиты, которые с определенной степенью приближения являются периодическими. Получив такие орбиты численным методом, мы можем затем попытаться доказать существование этих орбит аналитически.

Экспериментальная динамика позволяет установить с помощью численных методов определенные свойства заданной динамической системы, которые можно затем попытаться обосновать теоретически.

Помимо этого, численные методы обладают тем важным свойством, что сразу дают ответы на вопросы, которые ставит практика. Для того чтобы выбрать требуемую траекторию полета, нужно знать совокупность возможных орбит. Поскольку аналитических выражений в конечном виде (а тем более простых), представляющих решение сложных динамических систем, не существует, решение, получаемое с помощью ЭВМ, является единственно возможным, позволяющим найти орбиту определенного назначения.

Цель динамики состоит в том, чтобы дать характеристики динамических систем путем описания совокупности движений и изучения их свойств. В достижении этой цели численное интегрирование играет весьма важную роль. Еще в начале 1930-х

годов такие видные ученые, как Зундман и Винтнер высказывались в пользу численного экспериментирования в связи с задачей трех тел и отмечали, что достигнутые успехи и прогресс в будущем связаны с использованием численных методов. Наиболее ярким примером тому служат результаты, полученные Элисом Стрёмгреном и Копенгагенской школой за период с 1913 по 1939 г.

Количественные результаты ограниченной задачи могут быть представлены различным способом, например, в хронологическом порядке или в зависимости от значения массового параметра или же на основе классификации по характеру получаемых орбит. Однако основная идея заключается в следующем. Точка в фазовом пространстве с координатами x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ определяет орбиту (будем считать, что особенности отсутствуют). Поэтому ∞^4 орбит, представляющих совокупность возможных движений, могут быть описаны и классифицированы для заданного значения μ. Уровень наших знаний в 1967 г. не позволял осуществить такое представление для любого значения массового параметра, кроме $\mu=0$. Фактически почти все орбиты, существование которых доказано аналитически, найдены и представлены численно (часто раньше, чем было доказано их существование). Это замечание в первую очередь относится к орбитам, обладающим специальными свойствами, например, к периодическим или асимптотическим орбитам, так как известно, что в общем случае после исключения особенностей можно доказать существование решений.

Классификацию численно полученных орбит можно провести наиболее простым способом, разбив их на две группы: на орбиты аналитического характера и орбиты, определяемые практическими требованиями. В первую группу тогда войдут все периодические, почти периодические и асимптотические орбиты, которые имеют ясно выраженный аналитический характер. Для большей части из них существование может быть доказано аналитически. Ко второй группе будут относиться непериодические орбиты специального назначения, которые отвечают определенным требованиям, например, соединяют две точки в плоскости xy (граничная задача двух точек) или две определенные орбиты (т. е. представляют орбиты перехода) и т. д.

Оба типа орбит зависят от значения массового параметра. Эта зависимость обычно бывает неизвестна. Однако можно привести два следующих соображения. Во-первых, известно, что имеются дискретные значения массового параметра, при которых либо существуют определенные специальные орбиты, либо меняется характер некоторой группы орбит. Примером могут служить орбиты, связанные с точками либрации. Во-вторых,

как мы уже видели, аналитическое продолжение указывает на существование определенных типов периодических орбит для малых значений μ. Имеется ряд классов периодических орбит для $\mu=0$, который продолжает существовать и при малых μ, и при $\mu=1/2$. Поэтому влияние μ на некоторые классы носит только качественный характер, и система орбит обнаруживает топологическую инвариантность в отношении изменений μ. Это имеет место для большей части классов орбит, полученных для $\mu=1/2$. Периодические орбиты с малой амплитудой, существующие вокруг треугольных точек либрации для $\mu<\mu_0=0{,}0385\ldots$, становятся асимптотическими орбитами для $\mu>\mu_0$, и характер их совершенно меняется. Поэтому к этим орбитам нельзя применить процесс продолжения. С другой стороны, исследования при $\mu=1/2$ играют важную роль, так как многие орбиты, представляющие интерес для астрономии, могут быть получены для всех значений μ, от $\mu=0$ до $\mu=1/2$.

По этой причине в основу классификации орбит можно положить в качестве критерия значение массового параметра. Такой принцип обладает рядом практических удобств, так как при постановке астрономической задачи значение массового параметра, как правило, задается. Кроме того, такая классификация оправдана и с формальной точки зрения, так как бо́льшая часть научной литературы состоит из статей, в которых рассматриваются семейства орбит для одного фиксированного значения μ.

В дальнейшем основное внимание мы уделим двум видам классификации. Мы будем строго различать орбиты аналитического характера и практического назначения (грубо говоря, с одной стороны, периодические и асимптотические орбиты, а с другой стороны, так называемые одноцелевые орбиты технического назначения, такие, как траектории от Земли к Луне). Кроме того, мы в качестве основного критерия классификации примем значение массового параметра. Результаты двойной классификации, представляющие обычно большой интерес, согласуются также с результатами хронологической классификации. Завершая эту систему представлений как для различных, так и для фиксированных значений массового параметра, покажем влияние μ на различные семейства орбит.

Описывая различные типы орбит, обладающие некоторыми общими свойствами, мы будем пользоваться такими терминами как *группа*, *семейство*, *класс*, *род* и т. д.; единых терминов здесь не существует. Некоторые группы орбит мы иногда будем называть по имени ученых, которые занимались их исследованием. Основная задача классификации состоит в том, чтобы множество ∞^5 орбит, соответственно четырем начальным

условиям и значению массового параметра, разбить на классы таким образом, чтобы обнаруживались их основные свойства. До сих пор эта задача не получила удовлетворительного решения даже для совокупности периодических орбит.

И все же при таком положении дел мы попытаемся в этой главе в какой-то мере систематизировать имеющийся неполный материал. Возможно читатель обнаружит, что некоторые орбиты выпадают из определенных групп или, наоборот, какие-либо орбиты одновременно входят в две группы. Кроме того, читатель может быть найдет, что предложенная классификация в какой-то своей части искусственна. Короче говоря, если читатель сочтет, что изложенная здесь классификация существующих орбит далека от совершенства, то он несомненно будет прав. Возможно у него возникнет свежая мысль и появится свой взгляд на этот вопрос.

Ввиду отсутствия единой терминологии, касающейся различных категорий орбит, можно, конечно, рекомендовать читателям познакомиться с соответствующей справочной литературой по единицам измерения, обозначениям и системам координат. Здесь же мы будем придерживаться следующего правила. Рисунки и обозначения на них мы сохраним такими же, как в первоисточниках, откуда они заимствованы, а в тексте во всей книге будем пользоваться теми обозначениями и единицами измерения, которые мы выбрали.

В этой главе мы снова основное внимание будем уделять периодическим орбитам. Когда применяется численное интегрирование, движение получают для того интервала времени, для которого был произведен расчет. Если же будет доказано, что движение является периодическим (или асимптотическим), то оно будет известно для всего времени, как прошедшего, так и будущего.

§ 9.2. Систематизация имеющихся численных результатов

А. Первая полная система численных результатов была опубликована сотрудниками Копенгагенской обсерватории во главе с Элисом Стрёмгреном за период с 1913 по 1939 г. Расчеты, за редким исключением, проводились для значения массового параметра $\mu = 1/2$, т. е. для случая, когда массы основных тел одинаковы. До этого сэр Джордж Говард Дарвин за период с 1897 по 1910 г. рассчитал несколько систематических, но неполных (в смысле Стрёмгрена) семейств периодических орбит для $\mu = 1/11$ (или в наших обозначениях, при которых основные тела занимают противоположные места относительно центра масс, $\mu = 10/11$). Приблизительно в тот же период (1900—1917) школа

Ф. Р. Мультона провела теоретические и численные исследования орбит, причем расчеты большей частью выполнялись для $\mu=0{,}5$ и $\mu=0{,}2$.

Все три указанные выше исследования относятся к периоду, предшествующему 1930-м годам и расчеты в них производились, как мы видели, для μ, лежащих в пределах от 0,1 до 0,5. Целью этих исследований было получение систем периодических орбит, причем основным методом был численный метод, аналитические исследования играли второстепенную роль. Результаты Стрёмгрена — Дарвина — Мультона образуют первую группу исследований, которую мы рассмотрим в первую очередь. Среди них группы орбит, полученные коллективом под руководством Стрёмгрена, отличаются наибольшей полнотой. Результаты этих трех исследователей включены нами в один параграф под общим названием «Копенгагенская категория».

Б. Вторую категорию мы будем характеризовать значением $\mu\approx 0{,}012$, т. е. величиной массового параметра на порядок ниже, чем он принимался первой группой исследователей.

Массовый параметр для системы Земля — Луна равен

$$\mu=\frac{1}{82{,}302\pm 0{,}005},$$

что лежит между 0,01214 и 0,01215.

Первое систематическое исследование периодических орбит для системы Земля — Луна было проведено в Советском Союзе В. А. Егоровым в 1957 г. Позднее, в 1962 г. появилась более полная и в некоторой своей части более пространная работа Р. Брукке (Лувенский университет). Некоторые специальные типы периодических орбит изучали Р. Ньютон (1959), С. Хуанг (1962) и Р. Аренсторф (1963).

Таким образом, вторая категория относится к системе Земля — Луна и соответствует $\mu\approx 0{,}012$. Этой группой ученых были установлены семейства (часто неполные) периодических орбит; их результаты были опубликованы в период с 1957 по 1963 г. Орбиты этой группы рассматриваются нами в параграфе «Периодические лунные орбиты».

В. Третью категорию составляют периодические орбиты вокруг треугольных точек либрации. Эти орбиты представляют собой продолжения бесконечно малых эллиптических орбит; они исследовались нами достаточно подробно в гл. 5. Здесь эти семейства орбит рассматриваются при двух значениях массового параметра: $\mu\approx 0{,}01214$ и $\mu\approx 0{,}0009538$. Первое значение соответствует системе Земля — Луна, второе — системе Солнце — Юпитер. Этот раздел можно рассматривать как ряд примеров; подробное исследование читатель найдет в гл. 5.

Г. Четвертая категория состоит из непериодических орбит, вычисленных для $\mu \approx 0{,}012$. Эти орбиты имеют важное практическое значение для исследования космического пространства. Даже самый общий поверхностный обзор всех этих орбит немыслимо составить, и не столько из-за их колеблющегося числа, сколько из-за их неопределенного характера. Наши усилия будут направлены на то, чтобы установить хотя бы семейства орбит. К сожалению, нам приходится идти на это ограничение, так как других возможностей, по-видимому, не существует. Первой работой, как мы уже говорили, явилась работа В. А. Егорова (1957), затем вышли работы Б. Тюринга (1959), Р. Бухгейма (1959), К. Эрике (1962), В. Себехея и др. (1964) и некоторые другие работы. Эти орбиты рассматриваются в параграфе,

Таблица I. Систематизация полученных количественных результатов

№ параграфа	Название параграфа	Основной исполнитель	Даты	Тип исследованных орбит	μ
9.4	Копенгагенская категория	Дарвин Мультон Стрёмгрен	1897—1910 1900—1917 1913—39— —64*)	Семейства периодических орбит	1/11 1/5, 1/2 1/2
9.5	Периодические лунные орбиты	Егоров Ньютон Брукке Хуанг Аренсторф	1957 1958 1962 1962 1963	Семейства периодических орбит	$\sim 0{,}012$
9.6	Движение вокруг треугольных точек либрации	Рабе Рабе Депри	1961 1962 1965	Семейства периодических орбит	$\sim 0{,}00095$ $\sim 0{,}012$
9.7	Лунные траектории	Егоров Тюринг Бухгейм Эрике Себехей, Пирс и Стендиш	1957 1959 1959 1962 1964 1965	Семейства специальных непериодических орбит	$\sim 0{,}012$
9.8	Приложения к двойным системам	Койпер Копал Абъянкар Гулд	1941 1956 1959 1959	Семейства непериодических орбит	от 0,1 до 0,5
9.9	Дополнительные периодические орбиты	Месседж Депри Себехей и Наулес	1959 1965 1965	Соизмеримость 2:1 Асимптотически-периодические орбиты Соизмеримость 1:3	$\sim 0{,}00095$ разные от 0 до 0,24

*) См. наши замечания в § 9.11.

названном нами «Лунные траектории», так как либо все семейство орбит, либо некоторые из них могут быть использованы для полета с Земли на Луну. Большой вклад в разрешение этих вопросов внес Хоулкер; семейство орбит, носящее его имя, рассматривается в гл. 10, поскольку оно является по существу трехмерным.

Д. Следующую категорию составляют непериодические орбиты, рассчитанные для нужд звездной динамики. Значения массового параметра в этом случае лежат в тех же пределах, что и в Копенгагенской группе, $0{,}1 \leqslant \mu \leqslant 0{,}5$, но орбиты являются непериодическими и весьма специфическими. В числе ученых, опубликовавших результаты своих исследований этих орбит, были Дж. П. Койпер (1941), З. Копал (1956), К. Д. Абъянкар (1959), Н. Гулд (1959) и другие. Параграф, в котором рассматриваются эти орбиты, мы назвали «Приложения к двойным системам».

Е. Последняя категория включает в себя три темы: асимметричные и симметричные периодические орбиты в системе Солнце — Юпитер, рассчитанные Месседжем (1959), асимптотически-периодические орбиты вблизи коллинеарных точек либрации, исследованные Депри и Хенрардом (1965), и трехкратное аналитическое продолжение периодической орбиты второго рода. Этот параграф носит у нас название «Дополнительные периодические орбиты».

Все имеющиеся количественные результаты систематизированы в табл. I. Указанные в ней даты относятся ко времени опубликования результатов, полученных отдельными учеными или коллективами ученых.

§ 9.3. Связь между различными системами координат

В этом параграфе мы опишем и сравним системы координат, которые применялись при расчете орбит различными авторами. Основой для таких сравнений будет служить система, введенная в § 1.5, в которой были получены уравнения (52), (54) и (7). С этой основной, или стандартной, системой мы будем сравнивать системы, которыми пользовались Биркгоф, Винтнер, Дарвин, Стрёмгрен, Мультон, Брукке, Шарлье и Рабе.

В системе координат, изображенной на рис. 9.1,*а*, массы основных тел равны $1-\mu$ и μ и расположены соответственно в точках $P_1(\mu, 0)$ и $P_2(\mu-1, 0)$. Функция $\bar{\Omega}$ имеет следующий вид (см. уравнение (47) § 1.5):

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \tag{1}$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2$$

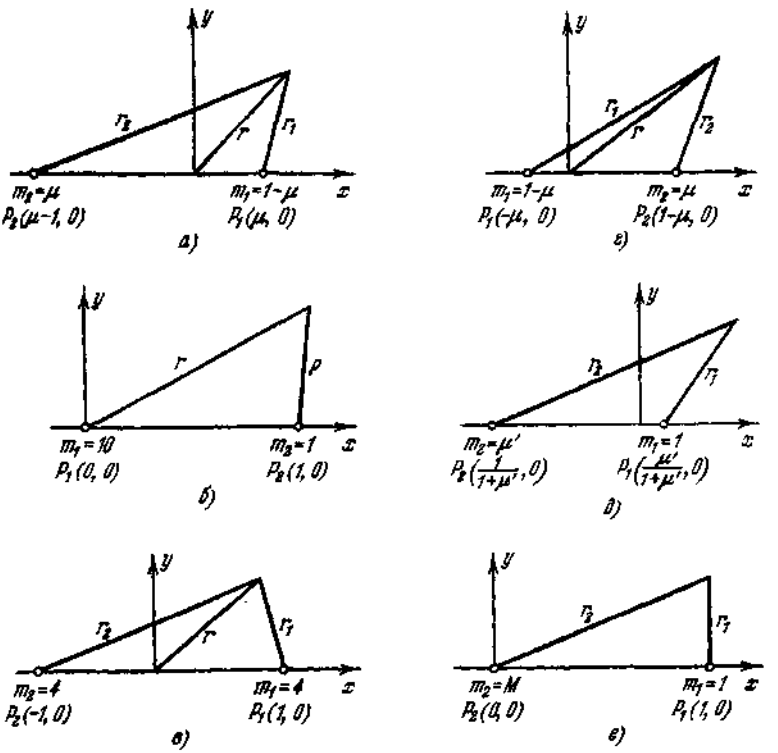


Рис. 9.1. Различные системы координат: *а*) стандартная система, *б*) система Дарвина, *в*) система Стрёмгрена, *г*) система Мультона, *д*) система Шарлье, *е*) система Рабе.

и

$$r_2^2 = (x-\mu+1)^2 + y^2.$$

Функция Ω равна

$$\Omega = \bar{\Omega} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu). \tag{2}$$

Следовательно,

$$\Omega = \frac{1}{2}\left[(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2\right] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

или

$$\Omega = (1-\mu)(1/r_1 + r_1^2/2) + \mu(1/r_2 + r_2^2/2).$$

Уравнения движения записываются следующим образом:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x = \bar{\Omega}_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y = \bar{\Omega}_y. \tag{3}$$

Интеграл Якоби имеет вид

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega-C, \tag{4}$$

откуда можно определить постоянную Якоби C. Соответственно $\bar{\Omega}$ введем $\bar{C}$:

$$C=\bar{C}+\mu(1-\mu). \tag{5}$$

Заметим, что $C(L_{4,5})=3$, а $\bar{C}(L_{4,5})=3-\mu(1-\mu)$, так что постоянная C имеет известное преимущество перед $\bar{C}$: она не зависит от массового параметра в треугольных точках либрации.

Теперь мы можем провести сравнение между нашей системой отсчета, с одной стороны, и системами Биркгофа и Винтнера, с другой стороны, так как наше C совпадает с постоянной Якоби, которую применял Биркгоф, $C=C_B$, а наше $\bar{C}$ — с постоянной Якоби, которую применял Винтнер, $\bar{C}=C_W$. Например, $C_B(L_{4,5})=3$ и $C_W(L_{4,5})=3-\mu(\mu-1)\leqslant 3$. Кроме того, $C_B(L_{4,5}, \mu)=3$ и $C_W(L_{4,5}, 0)=3$. Для Копенгагенского значения массового параметра ($\mu=1/2$) имеем $C_B=3$, $C_W=11/4$, а для значений, которые применял Дарвин ($\mu=1/11$ или $10/11$), имеем $C_B=3$, $C_W=3-10/121$; все эти значения вычислены для точек $L_{4,5}$. (В коллинеарных точках либрации значение постоянной Якоби, вообще говоря, зависит от μ, так как положения самих этих точек зависит от значения μ.)

В начале координат имеем

$$\bar{\Omega}(0, 0, \mu)=\frac{1-\mu}{\mu}+\frac{\mu}{1-\mu},$$

так что $\bar{\Omega}(0, 0, 1/2)=2$. Когда $\mu=1/2$, одна из коллинеарных точек либрации (точка L_2) находится в начале координат, и так как $2\bar{\Omega}=\bar{C}$, то $\bar{C}(L_2, 1/2)=4$ и $C(L_2, 1/2)=17/4$.

Соотношение между постоянными Якоби в случаях Биркгофа и Винтнера такое же, как между нашими C и $\bar{C}$, а именно,

$$C_B=C_W+\mu(1-\mu). \tag{6}$$

Начало системы координат, которой пользовался Дарвин (рис. 9.1,*б*), совпадает с расположенным слева основным телом, имеющим бóльшую массу. Это приводит к параллельному переносу системы координат, и m_1 и m_2 меняются ролями. Отношение масс в работе Дарвина равно десяти, следовательно, $\mu=10/11$ (а не $1/11$, так как происходит замена: $m_1\to m_2$). В обозначениях Дарвина интеграл Якоби имеет вид

$$v^2=10(2/r+r^2)+\left(\frac{2}{\rho}+\rho^2\right)-C_D, \tag{7}$$

где v — скорость относительно вращающейся системы, $r^2 = x^2+y^2$, $\rho^2=(x-1)^2+y^2$ и C_D — постоянная Якоби в системе Дарвина. В треугольных точках либрации $C_D(L_{4,5}, 10/11)=33$, и так как $C(L_{4,5})=3$, то вследствие изменения масштаба имеем

$$C_D=11C \quad \text{или} \quad C_D=11\bar{C}+10/11. \tag{8}$$

Копенгагенская система (рис. 9.1в) описывается функцией

$$\Omega=\frac{1}{2}r^2+\frac{4}{r_1}+\frac{4}{r_2}, \tag{9}$$

где $r^2=x^2+y^2$, $r_1^2=(x+1)^2+y^2$ и $r_2^2=(x-1)^2+y^2$. Основные тела располагаются в точках $P_1(1, 0)$ и $P_2(-1, 0)$. Постоянная Якоби для Копенгагенской системы, C_K, находится из уравнения

$$v^2=2\Omega-C_K, \tag{10}$$

и следовательно, $C_K(L_{4,5})=11$, так как в точке L_4 $r=3^{1/2}$ и $r_1=r_2=2$.

С другой стороны, $\bar{C}(L_{4,5}, \mu)=3+\mu(\mu-1)$ и $\bar{C}(L_{4,5}, 1/2)=C_W(L_{4,5}, 1/2)=11/4$, так что

$$\bar{C}=C_K/4. \tag{11}$$

В начале координат Копенгагенской системы (в точке L_2) имеем $C_K=16$, так как здесь $r=0$ и $r_1=r_2=1$. Соответствующее значение для $\bar{C}=4$ было найдено раньше, так что, как и следовало ожидать, $C_K=4\bar{C}$.

Заметим, что постоянная Якоби подчиняется тому же масштабному закону, что и квадрат скорости, поэтому, если вопрос об использовании C или $\bar{C}$ в качестве эталона для сравнения решен, то для того чтобы найти масштабный закон для постоянной Якоби, нужно только определить новые масштабы длины и времени. В Копенгагенской задаче масштаб длины при сравнении с нашей стандартной системой умножается на два, а масштаб времени остается тем же самым, так что соответствующие постоянные Якоби относятся как 1 : 4. В случае задачи Дарвина масштабы длины одинаковы, а масштаб времени изменяется в n раз, где $n=(m_1+m_2)^{1/2}=11^{1/2}$, и следовательно, постоянные Якоби различаются в 11 раз. Если применить закон Кеплера $n^2a^3=k^2(m_1+m_2)$ с $k^2=1$, то сравнение будет выглядеть следующим образом. В нашем (стандартном) случае $m_1+m_2=1$, $n=1$, $a=1$, так как среднее движение координатной системы равно единице и расстоянне между основными телами равно единице. В Копенгагенской задаче $m_1+m_2=8$, $n=1$, $a=2$, а в системе Дарвина $m_1+m_2=11$, $a=1$, $n=11^{1/2}$. Соответствующие скорости (равные na) имеют следующие значения: 1, 2 и $11^{1/2}$.

Мультон поменял местами тела m_1 и m_2, но пользовался нашей стандартной системой (рис. 9.1,г), следовательно, $C_M=\bar{C}$.

В системе Брукке (рис. 9.1,*г*) тело с меньшей массой расположено, как и у Мультона, справа от центра масс (в отличие от стандартной системы). Постоянную Якоби он обозначал через E, следовательно,

$$C_L = E = -\bar{C}/2, \tag{12}$$

поскольку у него

$$v^2 = r^2 + 2(1-\mu)/r_1 + 2\mu/r_2 + 2E. \tag{13}$$

Перейдем теперь к системе Шарлье (рис. 9.1,*д*). Читателю может сначала показаться, что эта система совпадает с одной из рассмотренных выше. Однако это не так. Массы основных тел Шарлье принимал равными $m_1 = 1$ и $0 < m_2 = \mu' < 1$. (Его первоначальное обозначение $m_2 = \mu_1$ нами изменено, чтобы не вызвать путаницы.) Среднее движение принятой им координатной системы равно $(1+\mu')^{1/2}$, и так как расстояние между основными телами равно единице, то масштабный коэффициент для постоянной Якоби равен $1+\mu'$. Постоянная Якоби, как ее определяет Шарлье,

$$C_C = r_1^2 + 2/r_1 + \mu'(r_2^2 + 2/r_2), \tag{14}$$

соответствует нашему стандартному C (в противоположность $\bar{C}$), следовательно,

$$C = \frac{C_C}{1+\mu'}. \tag{15}$$

При

$$\mu = \frac{\mu'}{1+\mu'} \tag{16}$$

формула преобразования принимает вид

$$C = C_C(1-\mu). \tag{17}$$

Например, при $\mu' = 1/10$, что соответствует задаче Дарвина, имеем $C = (10/11)\ C_C$, откуда $C_C = 3{,}3$ в точке L_4. Система Шарлье является обобщением системы Дарвина, и сравнивая уравнение (8) с уравнением (17), видим, что когда для случая $\mu' = 0{,}1$ применяется постоянная Якоби для системы Шарлье, $C_D = 10\ C_C$.

У Рабе постоянная Якоби такая же, как у Шарлье, если принять $\mu' = M = 1/1047{,}355$, что соответствует системе Солнце — Юпитер. Но его система отличается от всех предыдущих тем, что меньшая масса расположена в начале координат, а большая находится справа от нее на единичном расстоянии (рис. 9.1,*е*). Постоянная Якоби у Рабе выражается через C следующим

образом:

$$C_R=(1+M)C, \tag{18}$$

что следует из уравнения (15). В треугольной точке либрации имеем $C_R=3{,}00286436$.

Приведенные выше результаты сведены в табл. II.

Таблица II. Массовый параметр и постоянная Якоби для различных систем

Система	Значение массового параметра	Выражение постоянной Якоби через C	Выражение постоянной Якоби через $\bar{C}$
Стандартная	μ	$C=C$	$C=\bar{C}+\mu(1-\mu)$
Биркгофа	μ	$C_B=C$	$C_B=\bar{C}+\mu(1-\mu)$
Винтнера	μ	$C_W=C+\mu(\mu-1)$	$C_W=\bar{C}$
Дарвина	10/11	$C_D=11C$	$C_D=11\bar{C}+10/11$
Стрёмгрена	1/2	$C_K=4C-1$	$C_K=4\bar{C}$
Мультона	1/5, 1/2	$C_M=C+\mu(\mu-1)$	$C_M=\bar{C}$
Брукке	0,012155099	$C_L=-\frac{1}{2}C+$ $+0{,}0060036763$	$C_L=-\bar{C}/2$
Шарлье	μ	$C_C=C/(1-\mu)$	$C_C=\bar{C}/(1-\mu)+\mu$
Рабе	0,0009538754	$C_R=1{,}0009547861C$	$C_R=1{,}0009547861\bar{C}+$ $+0{,}0009538754$

Сделаем несколько замечаний к таблице. Для заданного значения μ определенная орбита в нашей стандартной системе будет связана со значением постоянной Якоби C или с $\bar{C}$. При сравнении ее с орбитой, вычисленной в Копенгагенской системе, нужно помнить, что постоянная Якоби этой системы относится к $\mu=1/2$. Поясним это на примере. Рассмотрим вторую коллинеарную точку либрации (L_2). Значение постоянной Якоби в Копенгагенской системе, как мы видели, равно $C_K=16$. Постоянная Якоби в системе Дарвина равна $C_D=40{,}18$; это значение указано в работе Дарвина, при желании читатель может проверить это сам.

Мы видели, что значение $C(L_2)$ зависит от того, какое значение μ принимается при расчете, так как $C_{L_2}=C_{L_2}(\mu)$, что было подробно рассмотрено нами в гл. 4. Когда $\mu=1/2$, $C(L_2)=4{,}25$, а когда $\mu=10/11$, $C(L_2)=3{,}652916$. Для краткости записи эти значения C обозначим соответственно как $C_{1/2}$ и $C_{10/11}$. Аналогично $\bar{C}_{1/2}=C_{1/2}-1/4=4$ и $\bar{C}_{10/11}=C_{10/11}-10/121=3{,}570271$, так как при любом μ величина $\bar{C}$ равна $\bar{C}=C-\mu(1-\mu)$. Значение $C_K=16$ теперь может быть получено из $\bar{C}_{1/2}$ с помощью уравнения (11). Из табл. II имеем $C_K=4\,C_{1/2}-1$, откуда и находим нужное значение C_K. Заметим, что всюду применяются те значения C, которые соответствуют $\mu=1/2$.

Что касается значений Дарвина, то из уравнения (8) имеем $C_D = 11\,C_{10/11} = 40{,}18$; то же самое можно получить из табл. II: $C_D = 11\,\bar{C}_{1/2} + 10/11 = 40{,}18$, в чем читатель может убедиться непосредственной подстановкой. (Заметим, что указанное выше значение для системы Дарвина верно лишь до второго десятичного знака.)

Уравнения, приведенные в тексте и указанные в табл. II, справедливы при условии, что они применяются для одного и того же значения μ. Например, соотношение между постоянной Якоби для Копенгагенской системы и для стандартной системы согласно уравнению (11) равно $C_K = 4\,\bar{C}$. Из этого уравнения следует, что $\bar{C}$ нужно вычислять при $\mu = 1/2$, т. е.

$$C_K = 4\bar{C}_{1/2} \tag{19}$$

и аналогично

$$C_K = 4C_{1/2} - 1. \tag{20}$$

Соответствующие уравнения для постоянной Якоби в случае системы Дарвина имеют вид

$$C_D = 11C_{10/11} \tag{21}$$

и

$$C_D = 11\bar{C}_{10/11} + 10/11. \tag{22}$$

Для того чтобы найти соотношение между C_K и C_D, воспользуемся уравнениями (19) и (22). Имеем

$$C_K = 4C_D/11 - 40/121 + 4\,(\bar{C}_{1/2} - \bar{C}_{10/11}), \tag{23}$$

или, что то же,

$$C_K = 4C_D/11 - 1 + 4\,(C_{1/2} - C_{10/11}). \tag{24}$$

В треугольных точках либрации $C_{1/2} = C_{10/11} = 3$. Учитывая это, из уравнения (24) находим

$$C_K = 4C_D/11 - 1. \tag{25}$$

Это условие выполняется при $C_K = 11$, $C_D = 33$. Кроме того, $\bar{C}_{1/2}(L_4, 5) = 3 - 1/4$, $\bar{C}_{10/11}(L_4, 5) = 3 - 10/121$, и уравнение (23) приводится к уравнению (25). Заметим, что если в уравнениях (19) — (22) опустить индексы 1/2 и 10/11, т. е. принять $C_{1/2} = C_{10/11}$ и $\bar{C}_{1/2} = \bar{C}_{10/11}$, то уравнения (23) и (24) дадут противоречивые ошибочные результаты.

§ 9.4. Копенгагенская категория

В работах Копенгагенской обсерватории по ограниченной задаче отношение масс принимается равным единице. Это приводит к конфигурации, симметричной относительно оси y. При

этом условии основная форма семейств орбит, полученных для $\mu=1/2$, *в общем случае* не отличается от формы семейств, которые получены для других значений μ. Значение того факта, что $\mu=1/2>\mu_0=0{,}0385\ldots$, не ограничивается условием симметрии. При $\mu=1/2$, кроме того, не существует бесконечно малых периодических орбит вокруг треугольных точек либрации. Поэтому Копенгагенская школа находила асимптотические орбиты, стремящиеся к точкам L_4 и L_5, и с их помощью устанавливала семейства орбит.

Наиболее полной работой для $0{,}1<\mu\leqslant 1/2$ является работа, выполненная в Копенгагене под руководством Элиса Стрёмгрена, поэтому мы с нее и начнем. Работы Дарвина и Мультона, как мы увидим, содержат ценные комментарии и являются по существу продолжением исследований Стрёмгрена, однако по полноте и строгости изложения уступают работам коллектива ученых Копенгагенской обсерватории.

Классификация семейств орбит Стрёмгрена связана с семью специальными точками в плоскости ограниченной задачи: пятью точками равновесия и двумя точками, в которых располагаются основные тела.

Сделаем несколько замечаний относительно обозначений. Рис. 9. 2*а* и *б* позволяют сравнить систему координат Стрёмгрена с той, которой мы пользуемся в нашей книге. Начало координат у Стрёмгрена выбрано в первой точке либрации (L_1), тогда как у нас в стандартной системе оно совпадает со второй точкой либрации (L_2). Следовательно, в системе Стрёмгрена координаты ξ, η точки L_1 равны нулю, а в нашей стандартной системе координаты равны $x=-1{,}1984$, $y=0$. Кроме того, в то время как Стрёмгрен говорит о движениях вокруг точки L_2, мы рассматриваем движение вокруг точки L_3. Дальнейшее сравнение этих двух систем координат проводится в табл. III.

Таблица III. Сравнение системы Стрёмгрена со стандартной системой

	x	ξ	y	η	$\bar{c}$	c	c_K
m_1	0,5	−1	0	0	∞	∞	∞
m_2	−0,5	1	0	0	∞	∞	∞
L_1	−1,1984	0	0	0	3,4568	3,7068	16
L_2	0	2,3968	0	0	4,0000	4,2500	13,8272
L_3	+1,1984	−2,3968	0	0	3,4568	3,7068	13,8272
L_4	0	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$	2,7500	3,0000	11
L_5	0	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$	2,7500	3,0000	11

Так как дальше в нашей книге мы будем пользоваться системой координат, изображенной на рис. 9.1, *а*, то табл. III и рис. 9.2, *а* и *б* потребуются читателю только в том случае, если он захочет обратиться к оригинальным трудам Копенгагенской обсерватории.

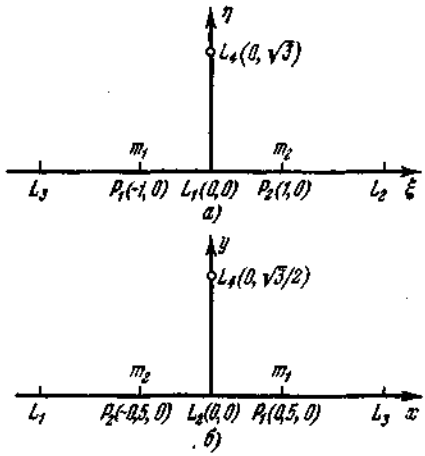


Рис. 9.2. *а*) Система Стрёмгрена, $\xi_{L_2}=2{,}3968$. *б*) Система отсчета для $\mu=1/2$, $x_{L_3}=1{,}1984$.

Вследствие симметрии относительно оси y, движения, относящиеся к m_1 и L_3, являются зеркальными отображениями движений вблизи m_2 и L_1. Выражением «движение вблизи» широко пользуются в литературе. Однако, когда первоначально бесконечно малые эллиптические орбиты вблизи коллинеарных точек становятся конечными и фактически имеют большие амплитуды, слово «вблизи» теряет свой смысл. Применение слова «вблизи» оправдано лишь тогда, когда использование его ограничивается образующими орбитами. В этом смысле мы и говорим о семи специальных точках и о бесконечно малых периодических образующих орбитах вокруг, или вблизи них, если таковые существуют. В силу симметрии, в Копенгагенской задаче в качестве единственных центров мы имеем L_1, m_2, L_2 (или L_2, m_1, L_3) и L_4 (или L_5). Последняя точка (L_4) не охватывается бесконечно малыми периодическими орбитами при $\mu=1/2$, и потому остаются три специальные точки. Прямых бесконечно малых периодических орбит вокруг коллинеарных точек не существует, существуют только попятные орбиты. Вблизи же основных тел существуют как прямые, так и попятные периодические орбиты. Об этом уже говорилось в гл. 5 и гл. 8.

Применяя слово «вблизи» в указанном выше смысле, представим классификацию периодических орбит по Стрёмгрену:

a) попятные периодические орбиты вблизи L_3; прямых орбит не существует,

b) попятные периодические орбиты вблизи L_1; прямых орбит не существует,

c) попятные периодические орбиты вблизи L_2; прямых орбит не существует,

d) периодические орбиты вблизи L_4; для $\mu = 1/2$ их не существует,

e) периодические орбиты вблизи L_5; для $\mu = 1/2$ их не существует,

f) попятные периодические орбиты вблизи m_1,

g) прямые периодические орбиты вблизи m_1,

h) попятные периодические орбиты вблизи m_2,

i) прямые периодические орбиты вблизи m_2.

Направление движения здесь указано относительно вращающейся системы координат. Существенно различными являются случаи (a), (c), (f) и (g), остальные случаи попарно тождественны: (b) = (a), (h) = (f) и (i) = (g). Если правильно интерпретировать слово «вблизи», то классов (d) и (e) не существует. Подробней об этом будет сказано позже.

Дополнительно к четырем случаям ((a), (c), (f) и (g)) Стрёмгрен рассматривает еще три класса орбит вблизи обоих основных тел:

k) периодические орбиты вблизи m_1 и m_2; во вращающейся системе координат движение является прямым;

l) периодические орбиты вблизи m_1 и m_2; во вращающейся системе координат движение является попятным, в неподвижной системе координат — прямым;

m) периодические орбиты вблизи m_1 и m_2; в обеих системах координат движение является попятным.

Стрёмгрен нашел еще одно семейство периодических орбит, которые не образуются ни из бесконечно малых орбит, ни из орбит из задачи двух тел:

n) попятные периодические орбиты асимметричные относительно оси y; они относятся к орбитам класса (c), но *не образуются* из бесконечно малых орбит вблизи L_2.

Хотя бесконечно малых периодических орбит вблизи треугольных точек либрации при $\mu = 1/2$ не существует, однако, как было показано в гл. 5, при этом значении μ существуют асимптотические орбиты, стремящиеся к этим точкам (или выходящих из них) по спирали. Те асимптотические орбиты, которые пересекают ось x под прямым углом, Стрёмгрен назвал асимптотически-периодическими; он нашел пять таких орбит. Эти орбиты можно использовать для того, чтобы образовать дополнительные семейства периодических орбит, для которых две из указанных выше асимптотически-периодических орбит будут предельными. Таких семейств будет десять (или двадцать, если считать отражения относительно оси y). Приведем два из этих семейств:

o) попятные периодические орбиты, которые *асимметричны* относительно оси y и образуют семейство, ограниченное двумя асимптотически-периодическими орбитами,

г) попятные периодические орбиты, которые *симметричны* относительно оси y и образуют семейство, ограниченное двумя асимптотически-периодическими орбитами.

Асимптотически-периодические орбиты, стремящиеся к треугольным точкам либрации, в общем случае не пересекают ни ось x, ни ось y. Отмеченные выше десять орбит пересекают ось x под прямым углом при первом пересечении после оставления точки либрации, т. е. после первой четверти полной простой периодической орбиты. Существуют также простые периодические орбиты, которые пересекают ось y под прямым углом, после того как выходят из окрестности точки либрации, т. е. после первой половины оборота. Известно семь таких орбит, которые несимметричны относительно оси x, но симметричны относительно оси y. Если L_4 и L_5 рассматривать отдельно, т. е. если первые семь орбит отражаются от оси x, то их будет четырнадцать.

В следующем пункте рассматривается несколько таких семейств. Приводимые там рисунки взяты из отчетов Копенгагенской обсерватории, если специально не оговорено другое.

9.4.1. Попятные периодические орбиты вокруг точки L_3; класс (а) Копенгагенской категории. Это семейство орбит образовано из бесконечно малых эллиптических орбит вокруг точки L_3. Значение постоянной Якоби для $\mu=1/2$ в точке L_3 ($x=1{,}1984$) равно $C=3{,}7068$. На рис. 9.3*а* показаны попятные орбиты для $C\approx 3{,}71$, 3,55, 3,00 и 2,50; последнее значение соответствует орбите соударения с массой

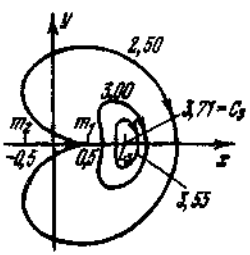


Рис. 9.3*а*. Орбиты класса (а) копенгагенской категории $\mu=1/2$, C равно от 3,71 до 2,50 (Стрёмгрен, 1922 [19]).

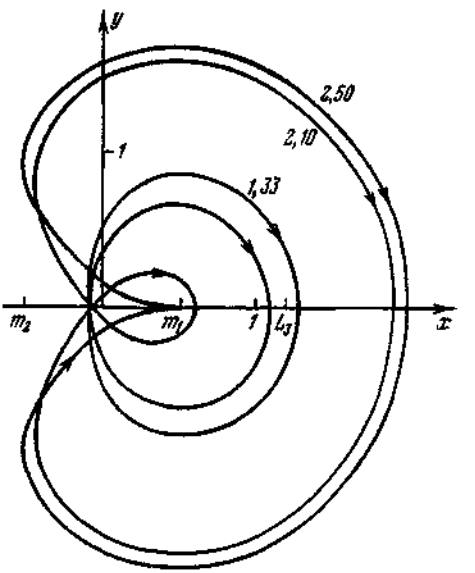


Рис. 9.3*б*. Орбиты класса (а) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$, C равно от 2,50 до 1,33 (Стрёмгрен, 1929 [22]).

m_1, расположенной в точке $P_1(1/2, 0)$. Эта орбита соударения рассматривалась нами в гл. 3, посвященной регуляризации. Окончание орбит этого типа, т. е. окончание орбит класса (а) впервые установил Барро, занимавшийся их исследованием.

Орбита соударения фактически может быть продолжена до орбиты с петлей вокруг m_1 (см. рис. 9.3*б*, $C=2{,}10$). При уменьшении C до значения, скажем, 1,33 размер меньшей внутренней петли увеличивается, а размер большей (наружной) петли уменьшается до тех пор, пока обе эти петли не совпадут и не образуют одну овальную орбиту, пересекающую ось x приблизительно в точке L_3. Это происходит при $C\approx 1{,}31$. Семейство теперь продолжается путем возвращения к орбите соударения и к стационарной точке L_3. Иными словами, после того как получена двухконтурная орбита для $C=1{,}33$ и одноконтурная орбита для $C\approx 1{,}31$, внутренний контур становится наружным, и наоборот.

В семействе, показанном на рис. 9.3*в*, минимальным значением C является $C=1{,}31$. Точки на этом рисунке, помеченные кре-

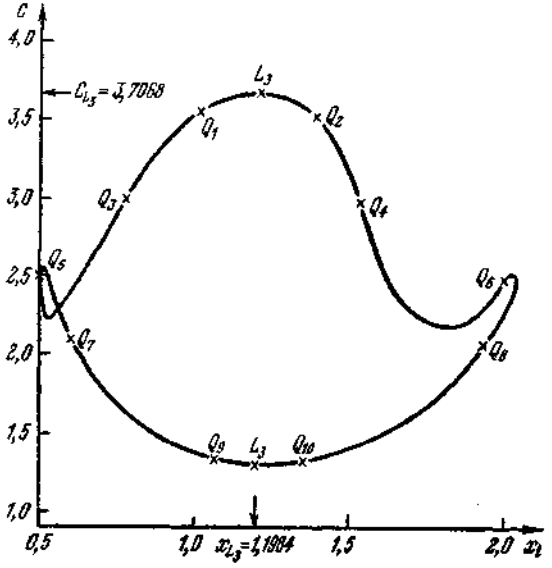


Рис. 9.3*в*. Начальные условия для орбит класса (*а*) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$.

стиками, соответствуют орбитам, изображенным на рис. 9.3*а* и *б*. Стационарное решение (точка L_3) показана крестиком в высшей точке кривой $C=C(x)$. При уменьшении C до $C=3{,}55$ получаем

два перпендикулярных пересечения орбиты с осью x в точках $x_1=1$ и $x_2=1{,}37$ (точки Q_1 и Q_2). При $C\approx 3{,}00$ пересечения происходят в точках $x_1\approx 0{,}76$ и $x_2\approx 1{,}52$ (точки Q_3 и Q_4). Орбита соударения (точки Q_5 и Q_6) пересекает ось x в точках $x_1=0{,}5$ (т. е. в m_1) и $x_2\approx 2{,}01$. Первая двухконтурная орбита для $C=2{,}10$ пересекает ось x в точках $x_1\approx 0{,}6$ и $x_2\approx 1{,}93$ (точки Q_7 и Q_8).

Второй двухконтурной орбите на рис. 9.3*б* с $C=1{,}33$ соответствуют точки $x_1\approx 1{,}07$ и $x_2=1{,}35$ (точки Q_9 и Q_{10}). Приблизительно в точке L_3, соответствующей точке минимума кривой $C=C(x)$, оба контура совпадают и пересекают ось x. Затем точка Q_9 занимает положение точки Q_{10}, точка Q_7 — положение точки Q_8 и т. д., и изображающие точки на кривой $C(x)$ перемещаются вверх и в конце концов достигают точки максимума (L_3).

Семейство начинается и заканчивается в крайней коллинеарной точке либрации (L_3), и все орбиты являются попятными периодическими. Семейство является замкнутым, т. е. если начать с некоторой орбиты, то система орбит, принадлежащих семейству, приведет нас обратно к той орбите, с которой мы начали.

Если x заменить на $-x$, то класс (b) становится тождественным с классом (a).

9.4.2. Попятные периодические орбиты вокруг точки L_2; класс (c) Копенгагенской категории. Аналогично классу (a) класс (c) начинается с бесконечно малых эллиптических орбит вокруг точки L_2 (см. гл. 5). С увеличением амплитуды эти орбиты (рис. 9.4*а*), сохраняя симметрию относительно обеих осей, показывают последовательные соударения (см. гл. 3) с обеими массами ($C=2{,}432913$). При дальнейшем развитии эта орбита соударения переходит в орбиты, образующие петли, и если амплитуда продолжает увеличиваться, то снова обнаруживаются последовательные соударения; размеры орбит при этом процессе возрастают от нуля (в точке L_2) до бесконечности.

Линеаризованные уравнения дают значение 0,2278093... для отношения малой оси к большой оси бесконечно малых эллиптических орбит, когда $C\to C_2=4{,}25$, а это есть значение постоянной Якоби, с которого начинается семейство орбит. Окончание этого класса орбит достигается тогда, когда размеры их становятся бесконечно большими. При убывании постоянной Якоби, начиная с $C=C_2$, размеры орбиты возрастают сначала монотонно, но по мере увеличения ее размеров монотонный характер пропадает. На рис. 9.4*а* показано развитие семейств орбит.

Орбиты начинаются со второй коллинеарной точки либрации при следующих начальных условиях: $x_i=y_i=\dot{x}_i=\dot{y}_i=0$. Затем

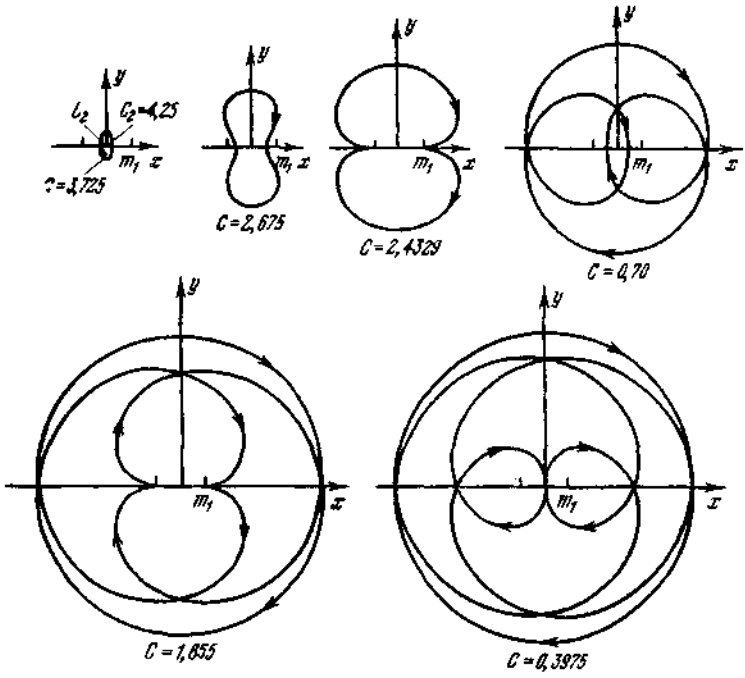


Рис. 9.4а. Орбиты класса (c) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Мюллер, 1935 [22]).

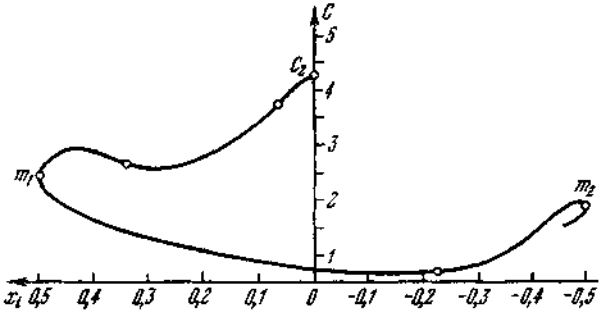


Рис. 9.4б. Начальные условия для орбит класса (c) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$.

начальная точка перемещается в точку $x_i>0$, $y_i=0$ с $\dot{x}_i=0$, $\dot{y}_i<0$. Начальные условия в течение всего времени развития класса могут быть представлены функцией $C=C(x_i)$. Это следует из того факта, что для всех орбит двумя начальными усло-

виями всегда являются $y_i=0$ и $\dot{x}_i=0$, так что, зная значения x_i и C, можно определить оставшееся начальное условие $\dot{y}_i$. На рис. 9.4*б* показана кривая $C=C(x_i)$; точки C_2, m_1 и m_2 на ней устанавливают соответствие начальных условий с действительными орбитами, показанными на рис. 9.4*а*.

На рис. 9.4*в* показано «конечное» условие, т. е. положение точки y_f перпендикулярного пересечения орбиты после первой четверти оборота с отрицательным направлением оси y. В этой

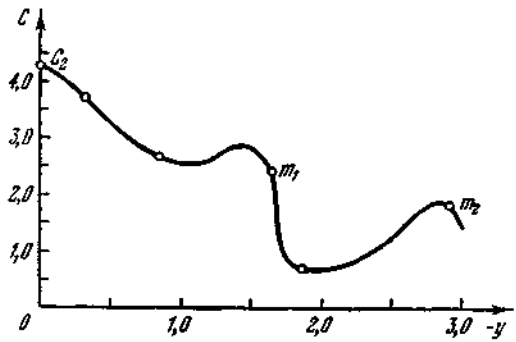


Рис. 9.4*в*. Конечные условия для орбит класса (c) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$.

точке $y_f\leqslant 0$, $x_f=0$, $\dot{y}_f=0$, $\dot{x}_f\leqslant 0$. С помощью кривой $C=C(y_f)$ можно образовать все семейство из этих «конечных» условий, если их использовать как начальные условия. Заметим, что в процессе развития класса величина $|y_f|$ монотонно возрастает.

9.4.3. Попятные периодические орбиты вокруг m_1; класс (f) Копенгагенской категории. Это семейство орбит образовано из бесконечно малых круговых орбит вокруг m_1, поэтому начало семейства в известном смысле соответствует группе орбит, которую Пуанкаре называл группой первого рода. Значение постоянной Якоби в начале семейства $C_{m_1}\to\infty$, и с увеличением размеров овальной орбиты постоянная Якоби уменьшается. Можно установить соотношение между постоянной Якоби и радиусом попятной *круговой* орбиты для задачи двух тел и таким способом вычислить приближенные начальные условия, по крайней мере для больших значений C.

Когда попятные орбиты образуются путем перемещения начальной точки вправо от m_1, орбиты, имевшие сначала круглую форму, все более и более искажаются и при $C=2{,}0444$ образуется орбита соударения. За ней следуют орбиты, образующие петлю вокруг m_2. Размеры петли возрастают, и при $C=1{,}74$ происходит соударение с m_1. Этот процесс повторяется, т. е. при ие-

прерывном увеличении размеров орбиты мы имеем сначала петлю, затем соударение, затем опять петлю, затем опять соударение, и т. д.

На рис. 9.5*а*, *б* и *в* показан процесс развития семейств, а на рис. 9.5*г* и *д* приводятся начальные и конечные условия.

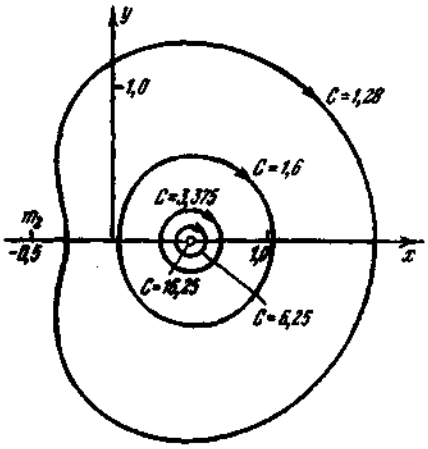


Рис. 9.5*а*. Орбиты класса (f) Копенгагенской категории, фаза первая, $\mu=1/2$ (Барро и Стрёмгрен, 1916 [22]).

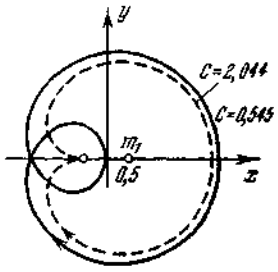


Рис. 9.5*б*. Орбиты класса (f) Копенгагенской категории, фаза вторая, $\mu=1/2$ (Мюллер, 1935 [22]).

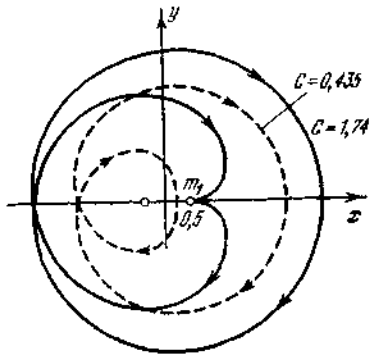


Рис. 9,5*в*. Орбиты класса (*f*) Коненгагенской категории, фаза третья, $\mu=1/2$ (Мюллер, 1935 [22]).

Начальными условиями являются следующие: $|x_i|\leqslant 0{,}5$, $\dot{x}_i=0$, $y_i=0$, $\dot{y}_i\neq 0$. При $C\to\infty$ семейства, изображенные на рис. 9.5*г* и *д*, асимптотически приближаются к $x_i=x_f=0{,}5$. Конечными условиями являются $x_f\geqslant 0{,}5$, $\dot{x}_f=0$, $y_f=0$, $\dot{y}_f<0$.

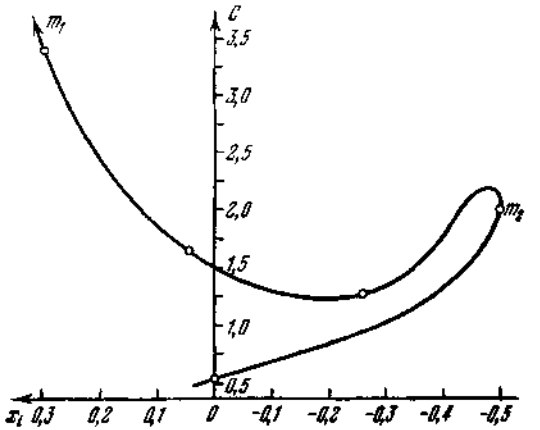


Рис. 9.5*г*. Начальные условия для орбит класса (f) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$.

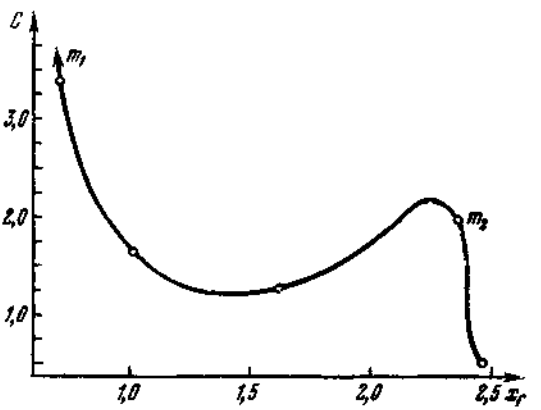


Рис. 9.5*д*. Конечные условия для орбит класса (f) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$.

9.4.4. Прямые периодические орбиты вокруг m_1; класс (g) Копенгагенской категории. Этот класс орбит образуется совершенно аналогично предыдущему семейству, т. е. образуется из круговых орбит вокруг m_1. Но вектор начальной скорости имеет противоположное направление, и семейство начинается с прямых круговых орбит малых радиусов, соответствующих большим значениям постоянной Якоби. Для $C=50{,}25$, 16,25 и 6,25 средние радиусы равны соответственно $r\approx 0{,}0103$, 0,0347 и 0,118. Орбиты вокруг m_1 приблизительно круговые показаны на рис. 9.6*а*.

Рассмотрим теперь эти орбиты, начинающиеся от точки на оси x, для которой $0<x=x_i\leqslant 0{,}5$. Пусть начальными скоростями будут $\dot{y}_i<0$ и $\dot{x}_i=0$. Если начальная точка на оси x перемещается влево от m_1, то при $x_i\approx 0{,}081$ достигается условие, когда орбита уже больше не делает оборотов вокруг m_1 и происходит соударение. Пересечения с осью x происходят в точках $x_i=0{,}382$, 0,181, 0,095 и 0,081, соответствующих $C=16{,}25$, 3,989, 4,087 и 3,7361. На этом мы заканчиваем рассмотрение первой фазы класса (g), изображенной на рис. 9.6*а*.

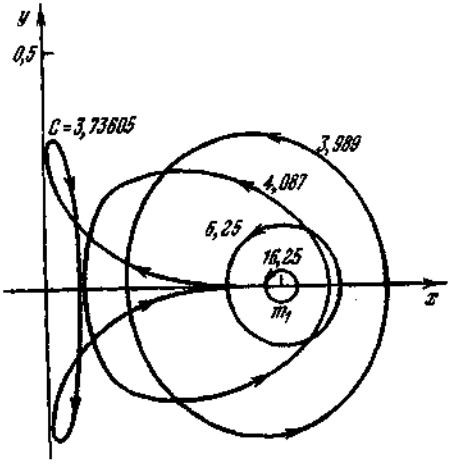


Рис. 9.6*а*. Орбиты класса (g) Копенгагенской категории, фаза первая, $\mu=1/2$ (Барро и Стрёмгрен, 1915 [19]).

За орбитой соударения, являющейся последней орбитой первой фазы, следует орбита, делающая петлю вокруг m_1; на рис. 9.6*б* это первая орбита. Начальные условия здесь те же: $\dot{y}_i<0$, $\dot{x}_i=0$, $y_i=0$, $0<x_i<0{,}5$, но при втором перпендикулярном пересечении мы имеем $\dot{y}_f<0$, тогда как в первой фазе мы имели $\dot{y}_f>0$. Пересечения с осью x происходят в точках $x_i\approx 0{,}094$, 0,182, 0,310 и 0,350, соответствующих $C=3{,}548$, 3,053, 2,760 и 2,907. Последней орбитой второй фазы опять является орбита соударения. Соударение происходит при $x_f\to 0{,}5$, как показано на рис. 9.6*б*.

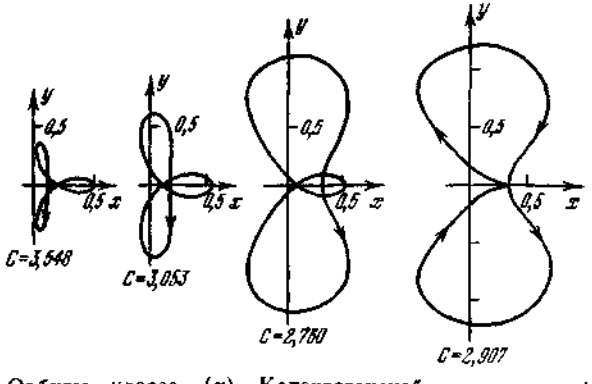


Рис. 9.6*б*. Орбиты класса (g) Копенгагенской категории, фаза вторая, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен, 1922 [19]).

Третья фаза (рис. 9.6*в*) начинается с орбиты *вокруг* m_1 при $\dot{y}_1>0$. Переход от орбиты с $C=2{,}809$ к орбите с $C=3{,}814$ происходит при уменьшении размеров петель над осью x и под осью x. Заметим, что третью орбиту третьей фазы *не следует принимать* за орбиту первой фазы. Следующая за ней орбита ($C=3{,}650$) представляет собой орбиту Хардтля, а последняя опять является орбитой соударения. Сравнивая последние орбиты на рис. 9.6*б* и 9.6*в*, замечаем, что направления у них различны: в фазах 1 и 2 они направлены к m_2, а в фазе 3 — от m_2.

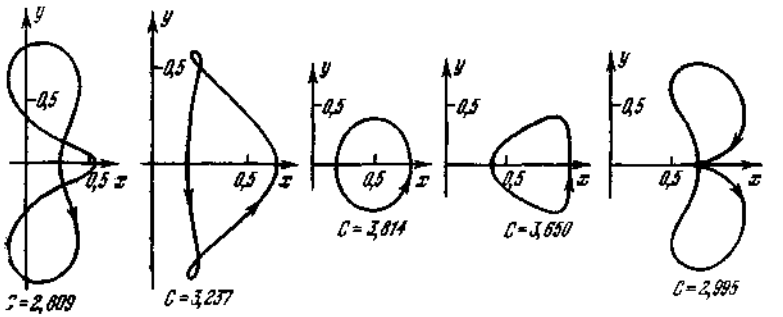


Рис. 9.6*в*. Орбиты класса (g) Коленгагенской категории, фаза третья, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен, 1922 [19]).

У одних орбит направление выражено совершенно ясно, у других — менее ясно. На рис. 9.6*а* кривые, соответствующие $C=16{,}25$, 6,25, 3,989 и 4,087, представляют собой прямые орбиты, то же можно сказать относительно кривых на рис. 9.6*в*, соответствующих $C=3{,}814$ и $C=3{,}650$. Однако направление последней орбиты на рис. 9.6*в* не очень ясно. Фактически каждую орбиту соударения можно рассматривать как средство изменения направления. В этом смысле рис. 9.6*а* содержит прямые орбиты, фаза 2 (рис. 9.6*б*) состоит из попятных орбит, фаза 3 (рис. 9.6*в*) — из прямых орбит, а орбиты, которые следуют за последней орбитой фазы 3, будут обладать ретроградными свойствами.

Сравнивая первые несколько орбит (соответствующих большим значениям C) класса (f) и класса (g), замечаем, что развитие класса (f) происходит медленней, т. е. в классе (f) круговые формы орбит сохраняются при $\infty>C>1{,}6$, тогда как в классе (g) — при $\infty>C>6{,}25$.

Фаза 4 (рис. 9.6*г*) начинается, как и следовало ожидать, с орбиты с петлей, так как она следует за орбитой соударения, показанной на рис. 9.6*в* (крайняя справа). Эта фаза тоже состоит из нескольких орбит соударения, которые показаны схема-

тически. После крайней орбиты этой фазы класс продолжается, и образуются две петли, как на первой орбите на рис. 9.6*д*.

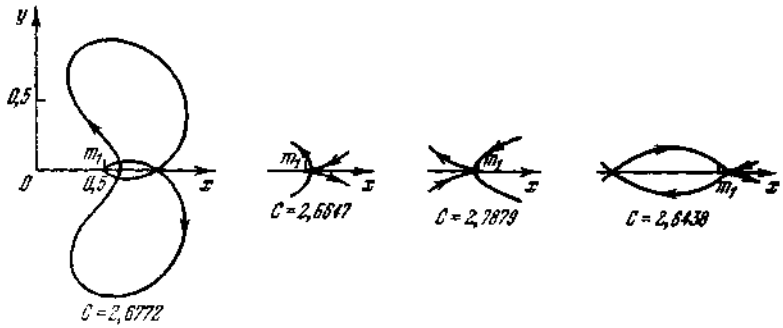


Рис. 9.6*г*. Орбиты класса (g) Копенгагенской категории, фаза четвертая, $\mu = 1/2$ (Стрёмгрен, 1922 [19]).

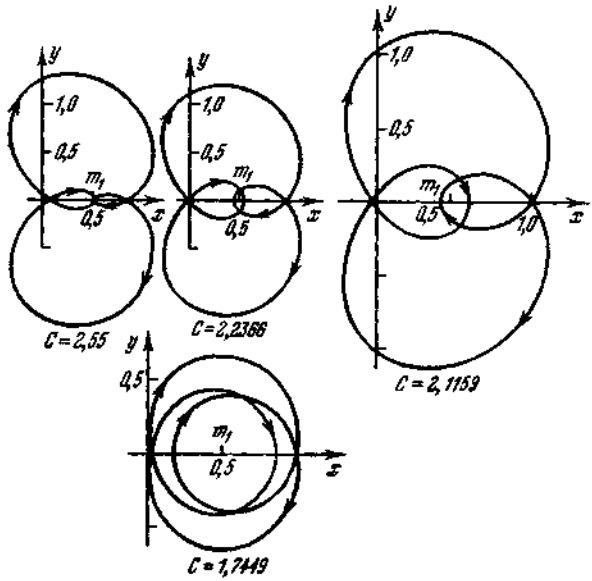


Рис. 9.7*а*. Орбита с последовательными соударениями в классе (*k*) Копенгагенской категории, $\mu = 1/2$ (Барро и Стрёмгрен, 1917 [22]).

По мере того как постоянная Якоби монотонно убывает, внутренние петли увеличиваются в своих размерах, а наружные сокращаются. Когда начинается шестая фаза (рис. 9.6*е*), две системы петель становятся неразличимы, и петли меняются ролями. Другими словами, вторая орбита на рис. 9.6*е* может быть

получена из последней орбиты на рис. 9.6*д* посредством поворота ее на 90° и небольшого изменения. С этого момента внутренние петли сокращаются в своих размерах, а наружные расширяются по мере того как постоянная Якоби монотонно возрастает. Таким путем получается орбита с совершенно исчезнувшими

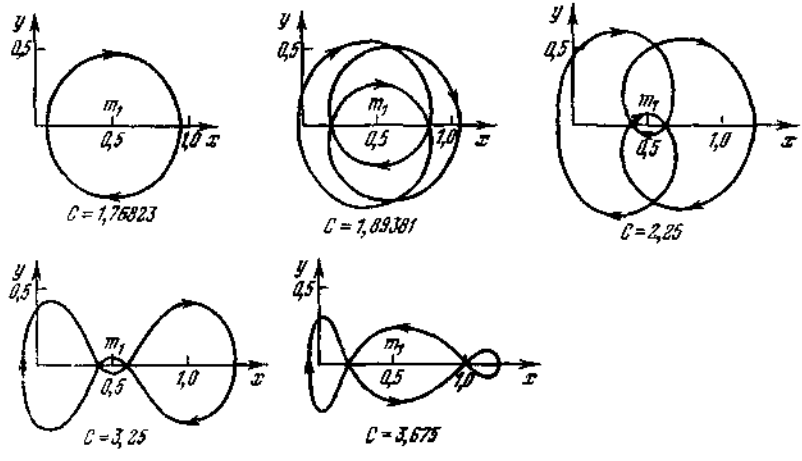


Рис. 9.6*е*. Орбиты класса (g) Копенгагенской категории, фаза шестая, $\mu = 1/2$.

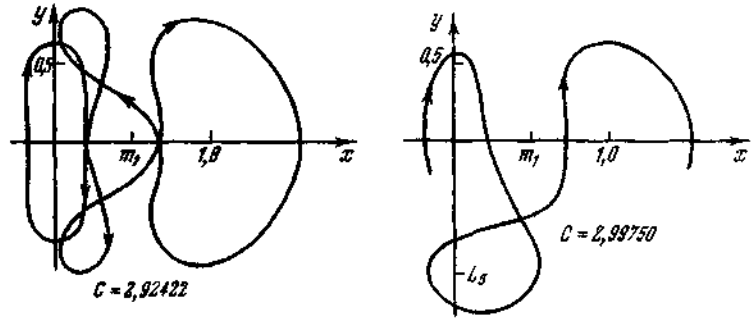


Рис. 9.6*ж*. Орбиты класса (g) Копенгагенской категории, фаза седьмая, $\mu = 1/2$.

петлями ($C = 3{,}25$). Последняя орбита этой (шестой) фазы показывает, что средняя часть орбиты увеличивается в своих размерах.

Последняя, седьмая фаза представлена на рис. 9.6*ж*. Постоянная Якоби, достигнув относительного максимума $C \approx 3{,}68$, начинает убывать до $C \approx 2{,}87$. Первая орбита на рис. 9.6*ж* соответствует последующему увеличению постоянной C, которая при-

ближается к трем. Вторая орбита на рис. 9.6*ж* является естественным следствием, но точными начальными условиями мы здесь не располагаем.

Ряд орбит, представленных на рис. 9.6, заимствован из работ Стрёмгрена, за исключением орбит последней фазы, вычисленных Лиске. Окончание этого класса мы не рассматриваем. К этому вопросу мы еще вернемся в пункте 9.4.10 и § 9.11.

Классы (h) и (i) подобны классам (f) и (g), и это подобие переходит в тождество, когда при $\mu = {}^1/_2$ m_1 и m_2 меняются ролями. Как будет показано позже, при $\mu \neq {}^1/_2$ имеет место топологическое тождество.

9.4.5. *Синодически прямые периодические орбиты вокруг* m_1 *и* m_2. Класс (k) Копенгагенской категории. Основная орбита этого класса показана на рис. 9.7*а*. Так как третье тело сталкивается с обоими основными телами, то в Трудах Копенгагенской

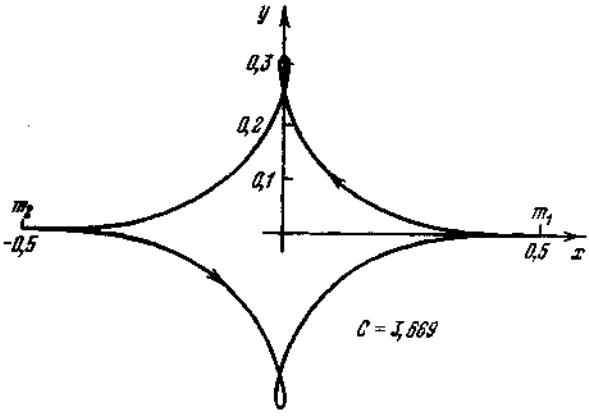


Рис. 9.7*а*. Орбита с последовательными соударениями в классе (k) Копенгагенской категории, $\mu = 1/2$ (Барро и Стрёмгрен, 1917 [22]).

обсерватории ее обычно называют орбитой двойного соударения. У нас же ее чаще называют орбитой с последовательными соударениями. Эта орбита, разумеется, не является «возмущенной орбитой в задаче двух тел». Она была открыта Копенгагенской группой при исследовании некоторых орбит других типов. Пересечение ее с осью y происходит приблизительно при $y = 0{,}28$ и $y = 0{,}34$, постоянная Якоби равна 3,669.

Симметрия Копенгагенской задачи ($\mu = {}^1/_2$) играет важную роль в вопросе существования периодических орбит с последовательными соударениями, так как при $\mu \neq {}^1/_2$ такие орбиты не известны. На рис. 9.4 показаны орбиты с последовательными

соударениями ($C=2{,}4329$ и $C=1{,}855$), относящиеся к классу (c). В случае асимметричного расположения масс ($\mu \neq 1/2$) ни одной такой орбиты не найдено.

Орбита, изображенная на рис. 9.7*а* является основной в классе (k): начиная с нее, можно образовать два подкласса. Подкласс (k_1) пересекает ось x в области $1/2 < |x|$. Иными словами, орбиты, принадлежащие этому подклассу, не пересекают ось x на участке между основными телами.

На рис. 9.7*б* показана специальная орбита этого подкласса для $C=3{,}742$, с точкой заострения на оси y приблизительно при 0,311, что соответствует точке, где кривая нулевой скорости для того же значения C пересекает ось y.

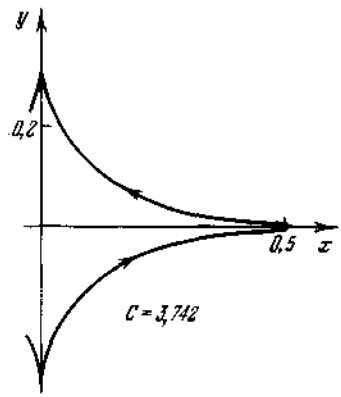


Рис. 9.7*б*. Орбита подкласса (k_1) в классе (k) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Барро и Стрёмгрен, 1917 [22]).

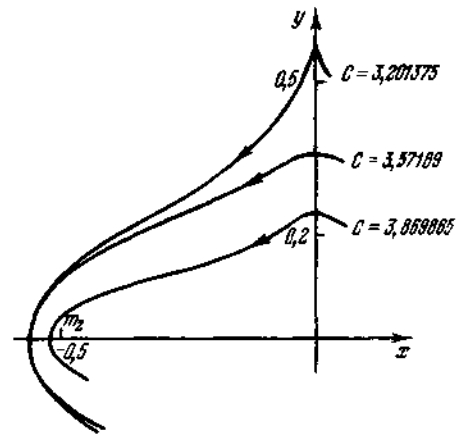


Рис. 9.7*в*. Орбиты подкласса (k_1) в классе (k) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Лаус, 1919 [22]).

Следующие орбиты этого подкласса показаны на рис. 9.7*в*. Они образованы посредством перемещения точки перпендикулярного пересечения с осью x за m_1 или m_2. Пересечения с ляются продолжением орбит, принадлежащих подклассу (k_1). осью y — в точках 0,243, 0,356 и 0,578, соответственно значениям $C \approx 3{,}87$, 3,57 и 3,20. Наибольшее значение x_i, дающее еще периодические орбиты, равно 0,572, а соответствующее значение C равно 3,375. Кривая для $C \approx 3{,}20$ начинается при несколько меньшем значении x_i и *не образует* точки заострения на оси y.

Орбиты, образующие петли, изображенные на рис. 9.7*г*, являются продолжением орбит, принадлежащих подклассу (k_1).

Пересечения этих орбит с осью x происходят в диапазоне $^1/_2<|x_i|<0{,}572$. Только две из показанных на рис. 9.7*г* орбит с $C\approx 2{,}9$ и 3,01 имеют максимумы при $x=0$, равные $y\approx 1{,}1$ и 0,75. Третья кривая ($C=3$) на этом рисунке представляет собой асимптотическую орбиту, которая закручивается в спираль (или раскручивается) вокруг четвертой точки либрации и пересекает ось x под прямым углом в указанном выше диапазоне. Эта асимптотическая кривая с периодом, приближающимся к бесконечности, является предельной орбитой, к которой стремятся орбиты, образующие петли, по мере развития подкласса. Поэтому подкласс (k_1) характеризуется орбитами, расположенными за пределами m_1 и m_2. Он начинается с орбиты с последовательными соударениями (рис. 9.7*а*) и заканчивается асимптотической орбитой (рис. 9.7*г*).

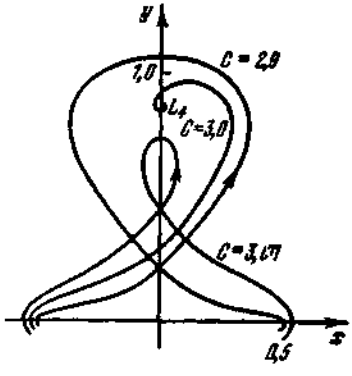


Рис. 9.7*г*. Орбиты подкласса (k_1) в классе (k) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$. Кроме того, показана орбита, асимптотически приближающаяся к L_4, с $C=3$ (Стрёмгрен, 1931 [22]).

Возвращаясь теперь к орбите с последовательными соударениями (рис. 9.7*а*), образуем другой подкласс (k_2) посредством продолжения (изменения) точек заострения в m_1 и m_2 и превращения их в петли. (Фактически в общем случае имеется две возможности для продолжения орбит соударения: введение петель, полностью охватывающих m_1 или m_2, или введение орбит, которые окружают особую точку, но не охватывают полностью основное тело.) Эти орбиты имеют петли вокруг m_1 и m_2, а также вдоль оси y, как показано на рис. 9.7*д*. На этом рисунке изображены две орбиты, также как и на рис. 9.7*г*. Кроме того, на рис. 9.7*е* показна асимптотическая кривая, которая закручивается в спираль (или раскручивается) вокруг $L_{4,5}$ и пересекает ось x под прямым углом, после того как образует петлю вокруг основного тела. Орбиты, принадлежащие подклассу (k_2), начинаются с орбиты с последовательными соударениями (рис. 9.7*а*) и заканчиваются асимптотической орбитой (рис. 9.7*е*) с бесконечно большим периодом.

Поэтому класс (k) в некотором смысле имеет начало и конец в орбите с последовательными соударениями (рис. 9.7*а*), так как два подкласса (k_1) и (k_2) соединяются в этой орбите вначале, а при продолжении переходят друг в друга в асимптотических орбитах. Заметим, однако, что подклассы (k_1) и (k_2) приближаются к различным асимптотическим орбитам.

На рис. 9.7*ж* и *з* показаны начальные и конечные условия для класса (k). Точки на кривых указывают соответствующие номера рисунков. Семейство начинается с рис. 9.7*а*, т. е. с орбиты с последовательными соударениями и развивается по двум

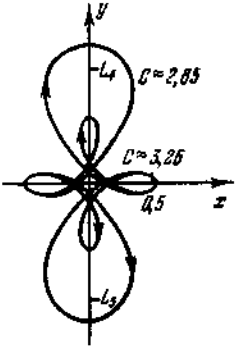


Рис. 9.7*д*. Орбиты подкласса (k_2) в классе (k) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен, 1924 [22]).

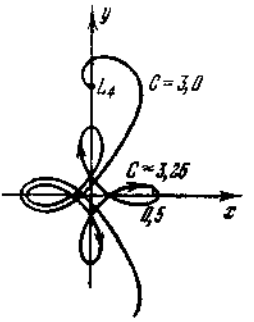


Рис. 9.7*е*. Орбита подкласса (k_2) в классе (k) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$, $C\approx 3{,}26$. Кроме того, показана орбита, асимптотически приближающаяся к L_4, с $C=3$ (Стрёмгрен, 1924 [22]).

ветвям, (k_1) и (k_2), что на рис. 9.7*ж* и 9.7*з* показано стрелками противоположного направления. Когда подклассы (k_1) и (k_2) приближаются к соответственным предельным асимптотическим периодическим орбитам, конечная ордината (y_f) становится равной $3^{1/2}/2$. Поэтому, когда ветви, обозначенные через (k_1) и (k_2), встречаются в точке L_4, кривая на рис. 9.7*з* становится замкнутой. Значения x_i для асимптотических периодических орбит, к которым стремятся подклассы (k_1) и (k_2), неодинаковы, и поэтому кривая на рис. 9.7*ж* не замыкается.

9.4.6. Синодически попятные, сидерически прямые периодические орбиты вокруг m_1 и m_2. Класс (1) Копенгагенской категории. Рассмотрим круговые орбиты радиуса r в неподвижной (сидерической) системе координат для задачи двух тел. Окружная скорость в этой неподвижной системе равна $V=1/r^{1/2}$. Скорость точки вращающейся системы, находящейся на расстоянии r от начала координат, перпендикулярна r и равна $+r$. Следовательно, круговая скорость во вращающейся (синодической) системе равна

$$v=\pm\frac{1}{r^{1/2}}-r,$$

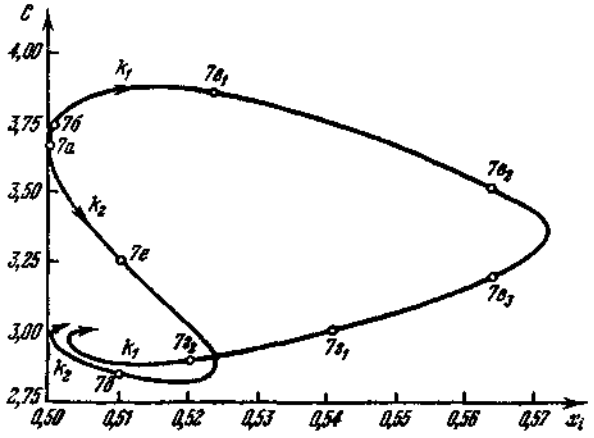


Рис. 9.7ж. Начальные условия для орбит класса (k) Копенгагенской категории, $\mu = 1/2$.

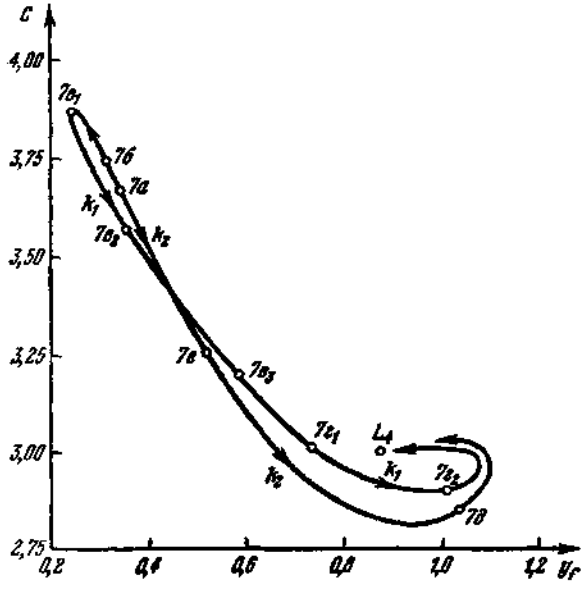


Рис. 9.7з. Конечные условия для орбит класса (k) Копенгагенской категории, $\mu = 1/2$.

где знаки ± указывают направление скорости относительно неподвижной системы координат: знак плюс относится к прямому движению (против хода часовой стрелки). Выше мы видели, что для $r<1$ сидерически прямое движение является синодически прямым ($v=+1/r^{1/2}-r>0$), а сидерически попятное — синодически попятным ($v=-1/r^{1/2}-r<0$). Для $r>1$ инвариантное поведение в отношении направления движения относительно неподвижной и вращающейся систем координат меняется: сидерически прямое движение становится синодически попятным, а сидерически попятное движение сохраняет свое направление, что было показано в гл. 8.

Следовательно, возможно образовать два семейства периодических орбит, начиная с орбит, близких к круговым ($r\gg 1$), которые в неподвижной системе являются или прямыми или попятными. Когда применяются сидерически прямые орбиты, результирующие попятные орбиты во вращающейся системе координат принадлежат к классу (l). С другой стороны, когда семейство образовано из орбит, близких к круговым, с радиусом $r\gg 1$, которые являются сидерически попятными, результирующие попятные орбиты во вращающейся системе координат принадлежат к классу (m).

Образование первых орбит класса (l) с большими значениями r происходит следующим образом. Рассмотрим точку на оси x: $x=x_i=r\gg 1$, и пусть начальная скорость в этой точке будет равна $\dot{y}=\dot{y}_i=1/r^{1/2}-r<0$ и $\dot{x}=x_i=0$. Постоянная Якоби будет равна

$$C=2\Omega-(\dot{y}_i)^2,$$

где

$$2\Omega=r^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{r-0{,}5}+\frac{1}{r+0{,}5}.$$

Подставляя это выражение в верхнее равенство, получаем после несложных преобразований

$$C=2r^{1/2}+\frac{4r^2+1}{(4r^2-1)\,r}+\frac{1}{4}.$$

При $r\to\infty$ постоянная Якоби $C\to 2r^{1/2}$. При $r=2{,}5$ имеем $C=3{,}8456$, точное значение равно 3,859025. Расхождение объясняется тем, что скорость ($\dot{y}_i$) взята для задачи двух тел, а «точное» значение C получено для ограниченной задачи. Таким образом, мы видим, что значение $\dot{y}_i$, полученное для модели двух тел, служит достаточно хорошим приближением.

На рис. 9.8*а* показаны три орбиты: орбита с начальным условием $x_i=2{,}5$ ($C=3{,}86$), орбита, близкая к круговой, для $C\approx 3{,}40$, пересекающая ось x в точке $x_i=1{,}78$ и ось y в точке

$y=1{,}5$, и орбита с «впадиной» (предшествующей образованию точки заострения) вблизи $|y_f|\approx 1{,}2$, пересекающая ось x под прямым углом в точке $x_f=1{,}775$ и соответствующая постоянной Якоби $C=3{,}19$. На рис. 9.8*б* показано продолжение семейства, рисунок дает представление о поведении семейства вблизи

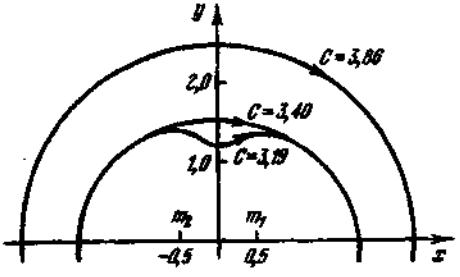


Рис. 9.8*а*. Орбиты класса (I) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен и Фишер-Петерсен, 1919 [22]).

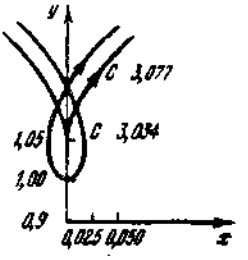


Рис. 9.8*б*. Орбита с точкой заострения и орбита с петлей класса (I) в Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен и Фишер-Петерсен, 1919 [22]).

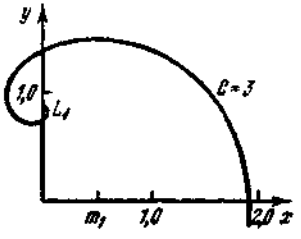


Рис. 9.8*в*. Асимптотически-периодическая орбита для точки L_4 Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен, 1924 [22]).

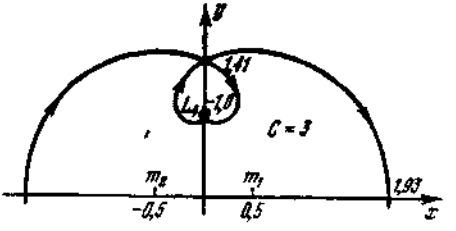


Рис. 9.8*г*. Конечная орбита класса (I) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен, 1924 [22]).

$x=0$. Орбита, образующая точку заострения, получена для $C=3{,}077$, точка заострения имеет координаты $x=0$, $|y_f|=1{,}055$, а перпендикулярное пересечение этой орбиты с осью x происходит в точке $x_f\approx 1{,}8$. После орбиты с точкой заострения идет, как и следовало ожидать, орбита с петлей, окружающей точку заострения. Изображенная на рис. 9.8*б* орбита с петлей пересекает ось x под прямым углом в точке $x_f=1{,}815$, и постоянная Якоби ее равна $C=3{,}034$.

Дальнейшее развитие этого класса связано с треугольными точками либрации, обладающими неустойчивым характером. На рис. 9.8*в* изображена асимптотическая орбита (совершенно

аналогичная орбитам, показанным на рис. 9.7*г* и 9.7*е*), закручивающаяся в спираль вокруг точки L_4 и пересекающая ось x под прямым углом в точке $x_i \approx 1{,}92$. Вследствие перпендикулярного пересечения с осью x, эта асимптотическая орбита может образовать периодическую орбиту (с бесконечно большим периодом), такую, как орбита, показанная на рис. 9.8*г*; эта периодическая орбита становится конечной орбитой этого класса.

На рис. 9.8*д* и 9.8*е* показаны начальные и конечные условия для этого класса. Семейство начинается с правой стороны рисунков при больших значениях x_i и $|y_f|$ и заканчивается в

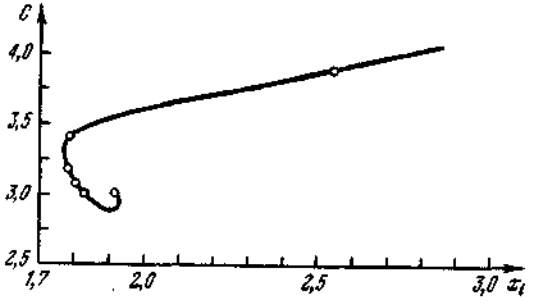


Рис. 9.8*д*. Начальные условия для орбит класса (l) Копенгагенской категории, $\mu = 1/2$.

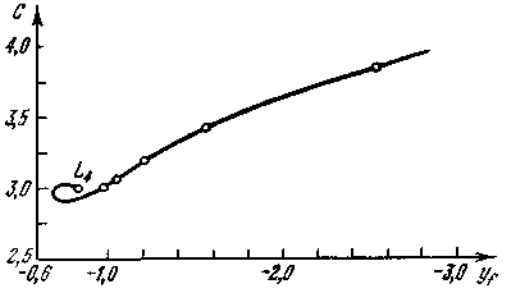


Рис. 9.8*е*. Конечные условия для орбит класса (l) Копенгагенской категории, $\mu = 1/2$.

точке L_4 с координатами $x_i \approx 1{,}92$ и $|y_f| = 3^{1/2}/2$. Точки на кривых указывают соответствующие орбиты, приведенные на рис. 9.8*а*, 9.8*б* и 9.8*г*.

9.4.7. Синодически и сидерически попятные периодические орбиты вокруг m_1 и m_2. Класс (m) Копенгагенской категории. Проблемы и методы образования орбит в этом классе те же,

что и в классе (l). Скорость во вращающейся системе координат для орбит, близких к круговым, вдали от основных тел, т. е. для $r \gg 1$ в пределе равна

$$v = -r - 1/r^{1/2}.$$

Например, для $r=2{,}5$ из этой формулы находим $v = -3{,}1325$, а действительная начальная скорость, при которой получается периодическая орбита при $x_i=0$, $y_i=2{,}5$, равна $\dot{x}_i = +3{,}1388$. Приближенное значение постоянной Якоби вычисляется по формуле

$$C = -2r^{1/2} + 1/4 - 1/r + 2/(r^2+1/4)^{1/2},$$

где r теперь есть расстояние от начала координат до точки пересечения орбиты с осью y, (y_i). В нашем примере при $y_i = r = 2{,}5$ имеем $C = -2{,}53$, а точный результат равен $-2{,}567665$. (Заметим, что существует альтернатива: при вычислении начальных или конечных условий начинать не с оси x, как в случае класса (l), а с оси y.)

Для больших значений r постоянная Якоби $C \to -2r^{1/2}$. Когда орбиты стягиваются к m_1 и m_2 и приближаются к прямолинейной предельной орбите между основными телами, $C \to -\infty$. Так как $C \to -\infty$ также и при увеличении размеров орбиты, то максимальное значение C достигается при $x_i \approx 0{,}61$, $y_i \approx 0{,}42$ и равно $C_{\max} \approx -0{,}37$.

На рис. 9.9*а* показаны три орбиты, принадлежащие этому

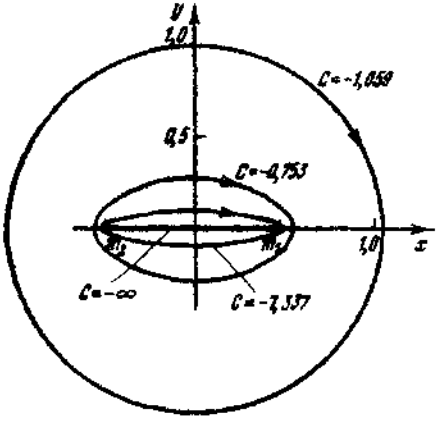


Рис. 9.9*а*. Орбиты класса (m) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Мюллер, 1924 [22]).

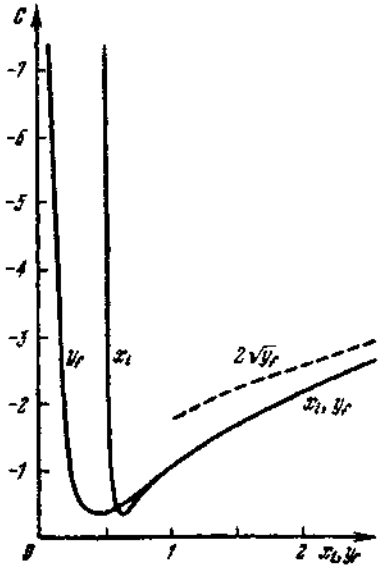


Рис. 9.9*б*. Начальные условия для орбит класса (m) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$.

классу. Соответственно имеем $C=-1{,}059$, $-0{,}753$, $-7{,}337$, $x_i=$ $=1{,}051$, $0{,}541$, $0{,}5025$ и $y_f=1$, $0{,}266$, $0{,}095$.

Изменение начальных условий в зависимости от C представлено на рис. 9.9*б*. Когда кривые асимптотически стремятся к значению $C=-2r^{1/2}$ при больших r, они сливаются. Кривая $C(x_i)$ имеет вертикальную асимптоту при $x_i=0{,}5$, где расположено основное тело, а кривая $C(y_f)$ имеет вертикальную асимптоту при $y_f=0$, соответствующую прямолинейной орбите.

9.4.8. Попятные периодические орбиты, асимметричные относительно оси y. Класс (п) Копенгагенской категории. Симметричная периодическая орбита с последовательными соударениями класса (с), показанная на рис. 9.4*а* и соответствующая $C=2{,}4329$, может дать начало классу орбит, асимметричных относительно оси y. Мы не относим этот класс к классу «вблизи L_2», так как, во-первых, это название мы оставляем для класса (с) и, во-вторых, бесконечно малых орбит класса «вблизи L_2» не существует.

Класс замыкается на самого себя, т. е. орбиты его могут быть расположены таким образом, чтобы образовывать замкнутую систему. На рис. 9.10*а* показано несколько характерных орбит. Класс начинается с орбиты (а) одиночного соударения. Затем следует орбита (б), при которой соударение с m_1 переходит в тесное сближение с m_1. Следующая орбита (в) является

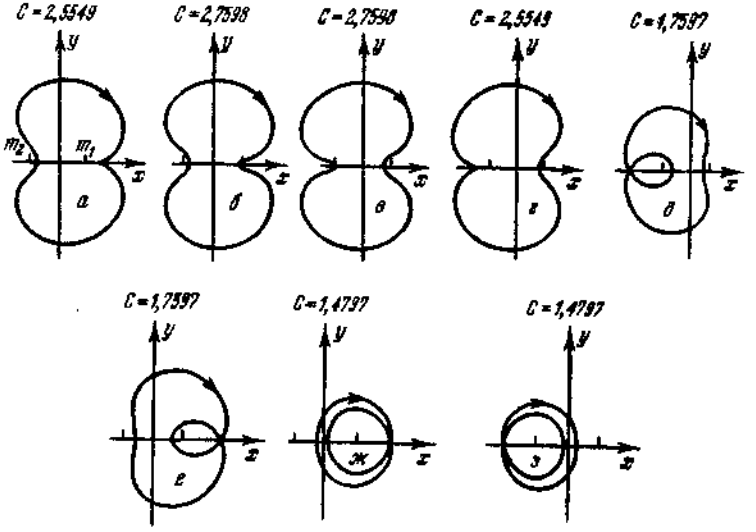


Рис. 9.10*а*. Орбиты класса (п) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен, 1934 [22]).

зеркальным отображением орбиты (б). За ней идет орбита (г), являющаяся зеркальным отображением орбиты (а), т. е. соударение здесь происходит с m_2. Орбита (д) образуется из орбиты (г): орбита соударения с m_2 переходит здесь в орбиту с петлей вокруг m_2. При увеличении петли и сокращении в размерах самой орбиты получается следующая орбита — орбита (з). После этого петля становится орбитой, а орбита — петлей, так что после орбиты (з) орбиты повторяются в обратном порядке: (д), (г), (в), (б) и (а). Теперь после орбиты (а), вместо того чтобы приблизиться к массе m_1, как это имело место в первом случае, орбита делает петлю вокруг нее, и вместо орбиты (б) мы в качестве следующей орбиты класса получаем орбиту (е). При увеличении размеров петли из орбиты (е) получается орбита (ж). Теперь петля и орбита снова меняются ролями, и смена орбит происходит в обратном порядке: после орбиты (ж) следуют орбиты (е) и (а). Таким образом, круг замыкается, орбиты следуют друг за другом в таком порядке: (а), (б), (в), (г), (д), (з), (з), (д), (г), (в), (б), (а), (е), (ж), (ж), (е), затем все повторяется снова, начиная с (а).

Заметим, что когда за (з) снова следует (з) или за (ж) снова следует (ж), предполагается, что между двумя одинаковыми

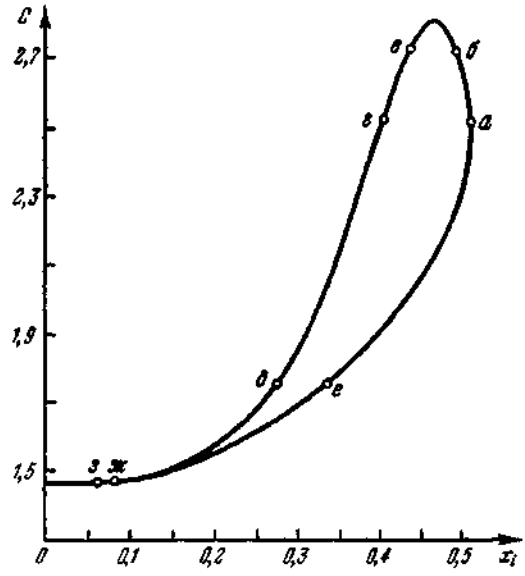


Рис. 9.10б. Начальные и конечные условия орбит класса (п) Копенгагенской категории, $\mu = 1/2$.

орбитами (з) существует простая периодическая орбита (без петли), в которой петля и орбита совпали. Постоянная Якоби для такой орбиты равна приблизительно 1,4675, а $x_i = x_f \approx$ $\approx -0{,}012$.

Единственной орбитой с последовательными соударениями, принадлежащей этому классу, является, как уже отмечалось, симметричная орбита класса (с), если мы ее пожелаем включить. Асимметричных орбит с последовательными соударениями, по-видимому, не существует.

Замкнутая система орбит, принадлежащих классу (п), изображается замкнутой кривой (см. рис. 9.10*б*). Абсцисса (x_i) показывает взаимозаменяемые начальные и конечные значения для точки перпендикулярного пересечения орбит с осью x. Буквы на кривой устанавливают соответствие между некоторыми ее точками и орбитами, показанными на рис. 9.10*а*.

9.4.9. Орбиты, асимптотически приближающиеся к треугольным точкам либрации. Дополнительные классы ((о) и (г)) периодических орбит в Копенгагенской категории. В пункте 5.4.2 мы подробно рассмотрели движение по спирали в малой окрестности треугольных точек либрации. Было показано, что для $\mu > \mu_0 = 0{,}03852\ldots$ решение линеаризованных уравнений движения имеет следующий вид:

$$x = x_0 + A_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t + \gamma_1) + A_2 e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \gamma_2),$$
$$y = y_0 + B_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t + \delta_1) + B_2 e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \delta_2).$$

Здесь x_0, y_0 — координаты точки либрации, A_1, A_2, B_1, B_2, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 — постоянные интегрирования (независимы из них только четыре), $\alpha = 0{,}63208$ и $\beta = 0{,}94843$, если $\mu = 1/2$.

Частные решения, представляющие для нас интерес, получаются при $A_1 = B_1 = 0$ или при $A_2 = B_2 = 0$, так как в этих случаях орбиты с увеличением времени закручиваются (или раскручиваются) по спирали вокруг треугольных точек либрации.

Эти орбиты, начинающиеся из L_4 или L_5, рассчитанные для больших расстояний от точек либрации, не изменяют свой характер, так как решения «спирального типа» справедливы только в малой окрестности точек $L_{4,5}$. Существует пять орбит, которые пересекают ось x под прямым углом, после того как выходят из окрестности точки L_4; они показаны на рис. 9.11.

Когда мы рассматривали класс (k), мы в пункте 9.4.5 отметили роль двух из пяти асимптотических орбит. Было показано, что подкласс (k_1) заканчивается асимптотической орбитой, обозначенной на рис. 9.11 цифрой *1*, а подкласс (k_2) заканчивается кривой *2* на этом рисунке. Кроме того, в пункте 9.4.6 было показано, что асимптотическая орбита с номером пять является завершающей орбитой класса (l).

Кривые *3* и *4* остаются для образования новых семейств. Симметричные относительно обеих осей попятные периодические орбиты между кривыми *3* и *4*, согласно классификации Стрёмгрена относятся к классу (г), а асимметричные относительно оси *y* попятные периодические орбиты между теми же асимптотическими кривыми *3* и *4* относятся к классу (о). На рис. 9.12

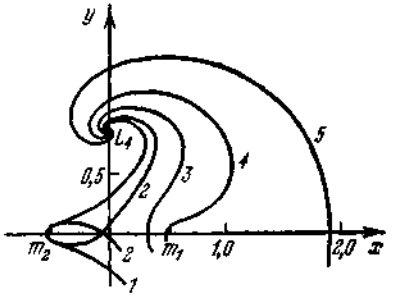


Рис. 9.11. Асимптотически-периодические орбиты для точки L_4 Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен, 1924 [22]).

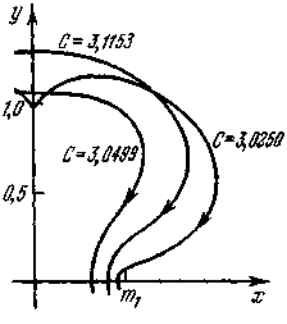


Рис. 9.12. Орбиты класса (г) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен, 1934 [22]).

показаны три орбиты класса (г). Орбита крайняя слева ($C=3{,}0499$) близка к кривой *3* на рис. 9.11, а крайняя справа ($C=3{,}0250$) — к кривой *4* на рис. 9.11. Соединяя правую сторону кривой *3* с левой стороной кривой *4*, и наоборот, можно получить асимметричный класс. Так как эти кривые (*3* и *4*) являются асимптотическими по отношению к L_4, то их можно рассматривать как продолжения друг друга (см. рис. 9.13). Этот

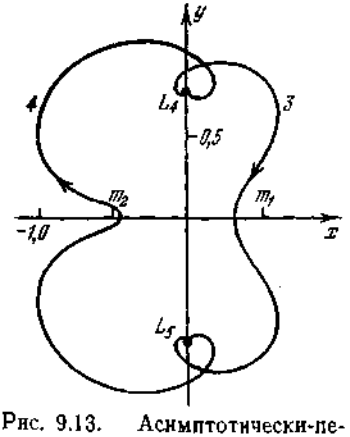


Рис. 9.13. Асимптотически-периодические орбиты 3 и 4 Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен, 1934 [22]).

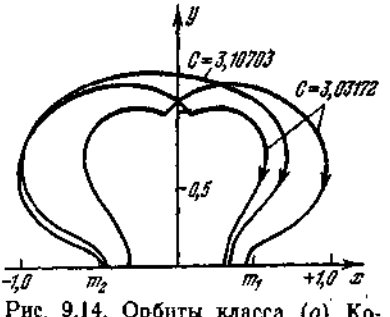


Рис. 9.14. Орбиты класса (о) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Стрёмгрен, 1934 [22]).

рисунок можно использовать теперь вместе с его зеркальным отображением (относительно оси y) для того, чтобы образовать асимметричный класс (о), о котором говорилось выше; он показан на рис. 9.14.

Другие возможные комбинации из пяти асимптотических орбит приводят к дополнительным классам симметричных и несимметричных орбит.

В § 9.4 были сделаны заключительные замечания относительно асимптотических орбит, которые пересекают ось y под прямым углом после одного полуоборота. Эти асимптотически периодические орбиты, симметричные относительно оси y, но несимметричные относительно оси x, могут быть использованы

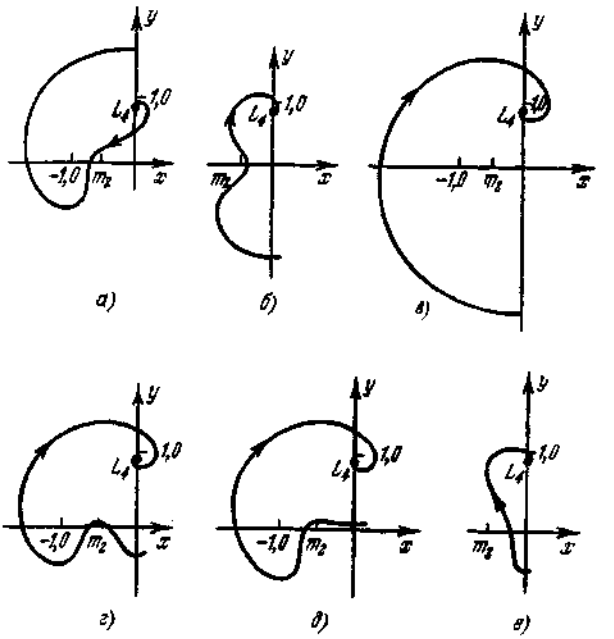


Рис. 9.15. Асимптотически-периодические орбиты, асимметричные относительно оси x в Копенгагенской категории, $\mu = 1/2$ (Стрёмгрен, 1930 [22]).

в отдельности или в комбинации для образования дальнейших классов периодических орбит. Несколько таких примеров показано на рис. 9.15.

9.4.10. Принцип окончания, установленный Стрёмгреном. Классы орбит, полученные школой Стрёмгрена, либо замыкаются на самих себя (т. е. повторяют себя), либо имеют естественные динамические начало и окончание. Такие естественные

начало и окончание могут быть в одной массе или в обеих массах, в одной точке либрации или в обеих точках либрации, или же в бесконечности.

Строго говоря, принцип окончания относится только к тем классам, которые образованы посредством аналитического продолжения из задачи двух тел или из бесконечно малых орбит. Поэтому такие классы, как (k) и (n) исключаются. В самом деле, как было показано, оба класса, и (k), и (n), подчиняются принципу: класс (k) — при специальной интерпретации, данной в пункте 9.4.5, а класс (n) — путем повторения себя.

Другой способ выражения принципа состоит в рассмотрении максимального размера (D) орбиты, ее периода (T) и постоянной Якоби (C). Пусть

$$m = D + T + |C|. \tag{26}$$

Естественное окончание или начало класса теперь соответствует $m \to \infty$, так как в местах расположения основных тел $C \to \infty$, в треугольных точках либрации $T \to \infty$ и при неограниченном увеличении размера орбиты $D \to \infty$.

Классы (a) и (n) являются замкнутыми, класс (c) начинается в точке L_2 и заканчивается в бесконечности, классы (l) и (m) начинаются в бесконечности и заканчиваются соответственно в треугольных точках либрации и в местах расположения основных тел, класс (f) начинается в m_1 и заканчивается в бесконечности, и наконец, классы (k), (o) и (r) начинаются и заканчиваются в треугольных точках либрации.

Класс (c), начинающийся в точке L_2, не удовлетворяет условию m, так как в L_2 $D = 0$, T конечно и $C = C_2$ тоже конечно. Поэтому, если принцип окончания выражен формулой (26), то этот класс следует рассматривать отдельно.

Модифицированная форма равенства (26), предложенная Биркгофом, включает все классы, исследованные Копенгагенской школой. Пусть D опять обозначает максимальный размер орбиты, T — ее период и d — минимальное значение всех расстояний между орбитой и основными телами и точками либрации. Тогда при окончании будем иметь

$$\lim (D + T + 1/d) = \infty \tag{27}$$

т. е. либо размер или период орбиты становятся неограниченными, либо орбита подходит сколь угодно близко к основным телам или точкам либрации. Эту форму принципа окончания можно сформулировать также следующим образом: орбиты класса либо образуют систему, периодическую по постоянной Якоби, т. е. класс является замкнутым, либо невозможно

положение, когда в начале или в конце класса

$$D \text{ и } T<K, \quad d>1/K,$$

где $K>0$ и конечно.

Предположим, что класс заканчивается при значении постоянной Якоби $C=C_0$ и $C=C(r)$ есть аналитическая функция параметра r. При окончании $C_0=C(r_0)$, и уравнение (27) принимает вид

$$\lim_{r\to r_0}(D+T+1/d)=\infty.$$

Принцип окончания можно доказать с помощью аналитического продолжения или метода поверхности сечений, рассмотренного нами в гл. 8; в обоих случаях используется известная теорема о неявных функциях.

Заметим, что в общем случае классы не заканчиваются орбитами соударения. В самом деле, орбиты соударения должны включаться как элементы класса, для того чтобы продолжить класс до его окончания. Единственным исключением является класс (m), он заканчивается прямолинейной орбитой с последовательными соударениями, соединяющей основные тела (с $C\to-\infty$, $d\to 0$). Класс (a), начинающийся в точке L_3 и замыкающийся на самого себя, может служить примером, так как включение орбиты соударения, изображенной на рис. 9.3*а* для $C=2{,}50$ (и его продолжение с орбитами, имеющими петли), существенно, для того чтобы класс замыкался на самого себя.

Два возможных окончания класса (g), удовлетворяющих принципу, рассматриваются в § 9.11.

9.4.11. Периодические орбиты Дарвина. В § 9.11, в той его части, которая посвящена Копенгагенской категории, рассматриваются семейства периодических орбит, рассчитанных Дарвиным, хотя значения массового параметра там отличаются. Как будет показано позже, существенных различий между представленными семействами не обнаруживается.

Система координат, которой пользовался Дарвин, показана на рис. 9.1*б*. Формула перевода постоянной Якоби, в том виде, в каком ее применял Дарвин, в постоянную Якоби, применяемую в нашей книге, следующая: $C=C_D/11$ (см. уравнение (8), § 9.3).

Значения постоянной Якоби в точках либрации и расстояния (r) точек либрации от основного тела большей массы приводятся в табл. IV.

На рис. 9,16,*а*, *б* и *в* проводится сравнение различных систем координат. Как видно из рисунков, система, показанная на рис. 9,16,*б*, может быть преобразована в систему, показанную на рис. 9.16,*в*, если принять $\mu=10/11$, а эту последнюю можно за-

тем преобразовать в систему, изображенную на рис. 9.16,*а*, посредством переноса начала координат в место расположения основного тела большей массы S (—1/11, 0). Дарвин основные

Таблица IV. Постоянные Якоби и положения коллинеарных точек равновесия

L_i	c_D	c	r
L_1	38,875991	3,534181	1,346994
L_2	40,182076	3,652916	0,717512
L_3	34,905442	3,173222	0,946927
$L_{4,5}$	33,000000	3,000000	1,000000

тела обозначал не через m_1 и m_2, а через S и J, по первым буквам английских слов Sun (Солнце) и Jupiter (Юпитер). Вследствие различия между системой Дарвина и системой, применяемой при определении положения основных тел, соотношение между системами устанавливалось при $\mu = 10/11$. Однако по соображениям симметрии одинаково приемлемо значение $\mu = 1/11$, если мысленно осуществить преобразование $x \rightarrow -x$.

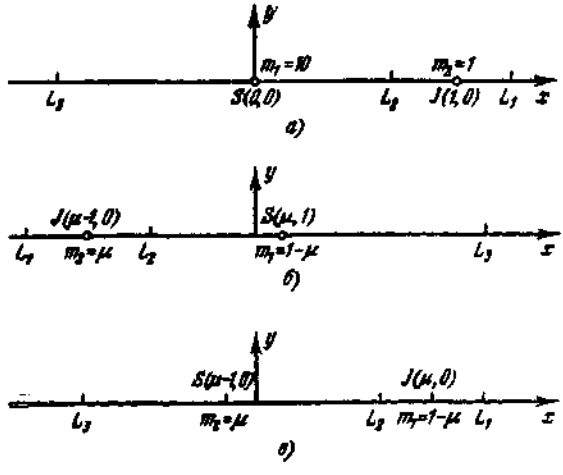


Рис. 9.16. *а*) Система Дарвина. *б*) Система отсчета для $\mu = 1/11$. *в*) Система отсчета для $\mu = 10/11$.

А. Бóльшая часть работ Дарвина посвящена орбитам класса (g). Так как условие симметрии Стрёмгрена здесь не имеет места, то сравнение Копенгагенского класса (g) и орбит Дарвина требует известной осторожности. Дарвин изучал прямые периоди-

ческие орбиты вокруг J, т. е. вокруг меньшего основного тела, и установил несколько семейств. Позже будет показано, что все их можно рассматривать, как элементы класса (g). На рис. 9.17*а* приводится одна из оригинальных фигур Дарвина,

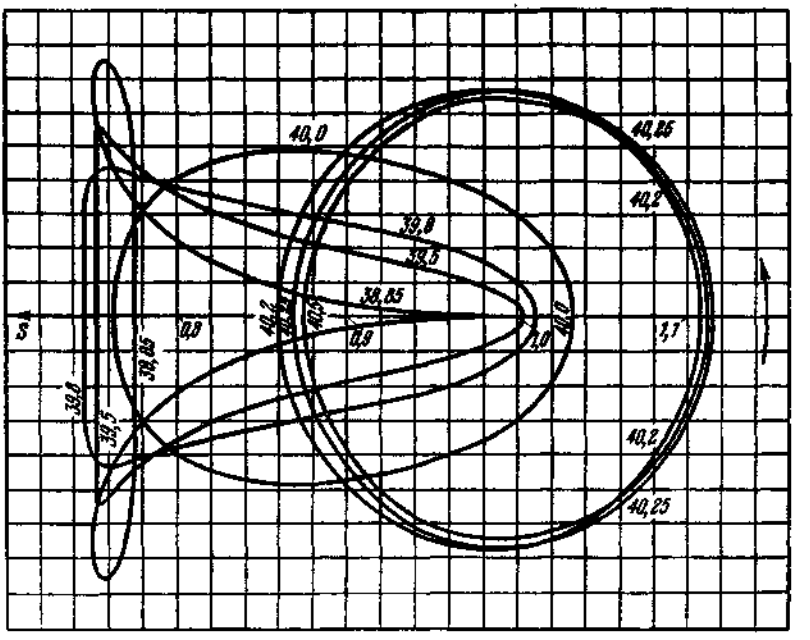


Рис. 9.17*а*. Семейство *A* спутников, $\mu=10/11$ (Дарвин, 1897 [2]).

представляющих орбиты, которые он назвал «семейством А спутников». Она соответствует рис. 9.6*а* § 9.4. Показанная орбита соударения соответствует $C_D=38{,}85$ или $C_{10/11}=3{,}53182$. Заметим, что для орбиты соударения на рис. 9.6*в* мы имели $C_{1/2}=3{,}73605$, т. е. $C_{1/2}>C_{10/11}$.

Орбита соударения с Юпитером (J), а фактически все семейство Дарвина возмущена Солнцем (S), масса которого в десять раз превышает массу J. В случае $\mu=1/2$ относительное возмущение поэтому меньше. Следовательно, можно ожидать, что в случае Дарвина соударение произойдет *раньше* (т. е. семейство будет развиваться *быстрей*), чем в случае Стрёмгрена. Другими словами, постоянная Якоби орбиты соударения в случае Дарвина будет больше, чем в случае Стрёмгрена. Таким образом, сравнение значений постоянной Якоби при различных значениях μ не всегда правильно отражает сущность явления,

и, кроме того, значение μ недостаточно полно представляет «величину возмущения».

Отметим еще одно расхождение между рис. 9.6*а* и 9.17*а*, а именно, изменение значения постоянной Якоби. При развитии группы от орбиты, близкой по форме к окружности, до орбиты соударения в семействе орбит Дарвина ($C_{10/11}$) происходит монотонное убывание постоянной Якоби, тогда как класс (g) обнаруживает при этом развитии минимальное значение $C_{1/2}=3{,}989$. Можно предполагать, что существует также минимальное значение $C_{10/11}$, отличное от того, что соответствует орбите соударения.

В табл. V приводятся значения постоянной Якоби для рис. 9.17а.

Таблица V. Значения постоянной Якоби на рис. 9.17*а*

C_D	40,5	40,25	40,2	40,0	39,8	39,5	38,85
$C_{10/11}$	3,682	3,659	3,655	3,636	3,618	3,591	3,532

На рис. 9.6*б* была показана фаза 2 класса (g) по Стрёмгрену. В работе Дарвина она полностью отсутствует; у него продолжение носит название «семейство В спутников». Это семейство начинается с орбиты с $C_D=39{,}3$ или $C_{10/11}=3{,}573$, и элементы его имеют убывающие значения C. Следующая группа орбит («семейство С спутников») тоже начинается с $C_D=39{,}3$, и значения постоянной Якоби ее элементов тоже убывают. На рис. 9.17*б* и 9.17*в*, взятых из работы Дарвина, показаны семейства В и С, которые соответствуют третьей фазе класса (g), см. рис. 9.6*в*. Заметим, что орбита, делающая петлю (рис. 9.17*в*), с $C_D=37{,}5$ или $C_{10/11}=3{,}409$ соответствует орбите между двумя последними орбитами на рис. 9.6*в*. Орбита соударения на рис. 9.6*в* имеет $C_{1/2}=2{,}995$ в качестве ее постоянной Якоби, а $C_{10/11}$ для соударения согласно рис. 9.17*в* должно быть меньше, чем $C_{10/11}=3{,}409$. Таким образом, можно заключить, что семейства А, В и С спутников у Дарвина соответствуют части класса (g) у Стрёмгрена. В табл. VI и VII приводятся значения постоянных Якоби в стандартной системе, которые указаны на рис. 9.17*б* и 9.17*в*. Мы видим, что «образующая» орбита

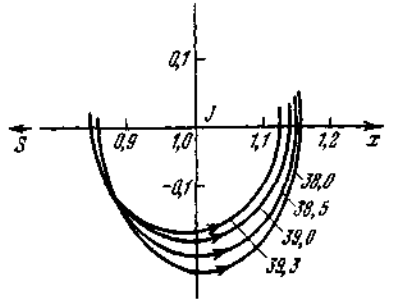


Рис. 9.17*б*. Семейство *B* спутников, μ=10/11 (Дарвин, 1897 [2]).

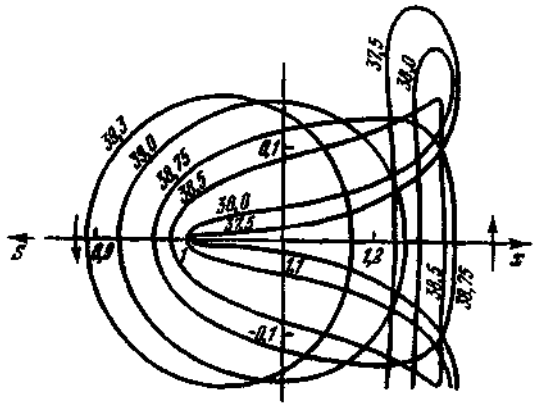


Рис. 9.17*в*. Семейство C спутников, $\mu = 10/11$ (Дарвин, 1897 [2]).

Дарвина с $C_D = 39{,}3$ соответствует, например, второй орбите на рис. 9.6*в* с $C_{1/2} = 3{,}814$. Значение постоянной Якоби в классе (g) убывает как до этой орбиты, так и после нее, подобно спутникам B и C Дарвина.

Таблица VI. Значения постоянной Якоби на рис. 9.17*б*

$C_Д$	39,3	39,0	38,5	38,0
$C_{10/11}$	3,573	3,545	3,500	3,455

Таблица VII. Значения постоянной Якоби на рис. 9.17*в*

C_D	39,3	39,0	38,75	38,5	38,0	37,5
$C_{10/11}$	3,573	3,545	3,523	3,500	3,455	3,409

Б. Дарвин рассчитал также шесть прямых периодических орбит вокруг большей массы, соответствующих началу класса (g). По терминологии Дарвина эти орбиты принадлежат «семейству A планет». Возмущение создается Юпитером (*J*), орбиты представляют собой овалы. Например, при $C_D = 40$ или $C_{10/11} = 3{,}636$ овал орбиты пересекает ось y в точках $\pm 0{,}447$, а ось x — в точках $+0{,}423$ и $-0{,}414$. Пять из этих орбит, взятых из работы Дарвина, показаны на рис. 9.17*г*.

В. Кроме того, существует шесть орбит, которые Дарвин называл *колеблющимися спутниками*. Они близки к линеаризованным эллиптическим орбитам вокруг либрационных точек со-

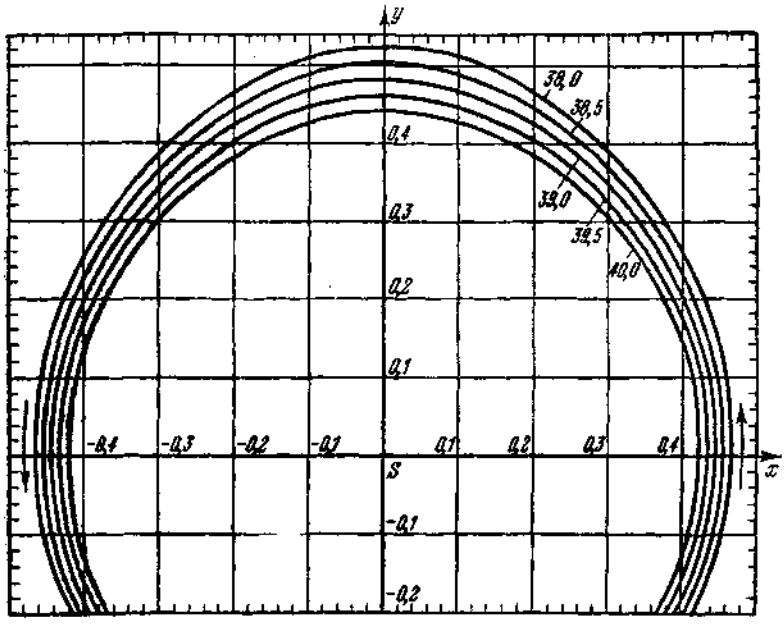


Рис. 9.17*г*. Семейство A планет, $\mu=10/11$ (Дарвин, 1897 [2]).

ударения L_1 и L_2, соответствующим началу фаз классов (a) и (c) по Стрёмгрену.

Г. Орбиты, охватывающие оба основных тела и принадлежащие классу (1), т. е. прямые в неподвижной системе и попятные в синодической системе, Дарвин относит к «семейству D верхних планет». Наименьшее значение постоянной Якоби, для которого Дарвин производил расчет такой орбиты, равнялось $C_D=37$ или $C_{10/11}=3{,}36$. Он не нашел ни одной орбиты семейства, которая бы показывала интересное развитие Стрёмгрена (см. рис. 9.8*а*).

Заканчивая обзор орбит Дарвина, заметим, что полученные им орбиты, соответствующим образом интерпретированные, связаны с классификацией орбит по Стрёмгрену. Это имеет существенное значение, так как указывает на то, что результаты, полученные для $\mu=1/2$, тождественны, по крайней мере качественно, с результатами, полученными для $\mu=10/11$ или $\mu=1/11$. Смысл, вкладываемый нами в слово «качественно», тот, что при переходе от $\mu=1/2$ к $\mu=10/11$ сначала формы орбит подвергаются топологическим преобразованиям. Однако значения постоянных Якоби, соответствующие специальным орбитам (т. е. орбитам соударения), в двух системах могут быть различны.

Наконец мы видим, что при различных значениях массового параметра развитие заданного класса происходит с разной скоростью.

9.4.12. Периодические орбиты Мультона. Системы координат, в которых представлены результаты, полученные школой Мультона, отличаются тем, что основные тела поменялись в них местами, а в качестве постоянной Якоби используется $\bar{C}$. Иными словами, у Мультона постоянная Якоби равна $C_M=\bar{C}=C-\mu(1-\mu)$. В некоторых численных расчетах он пользовался другой формулой: $C_M=\bar{C}=\bar{C}+\mu(1-\mu)$. В представленных ниже орбитах это обстоятельство учтено и приведенные в тексте значения постоянной Якоби соответственно согласованы.

А. Мультон получил интересное семейство попятных периодических орбит, охватывающих треугольную точку либрации L_4. Эти орбиты имеют близкое отношение к *асимптотически-периодическим* орбитам Стрёмгрена, асимметричным относительно оси x; они показаны на рис. 9.15. На рис. 9.18 приведены орбиты, найденные Мультоном для $\mu=1/2$, в подписи к рисунку указаны значения постоянных Якоби в нашей стандартной системе, чтобы избежать неправильного понимания.

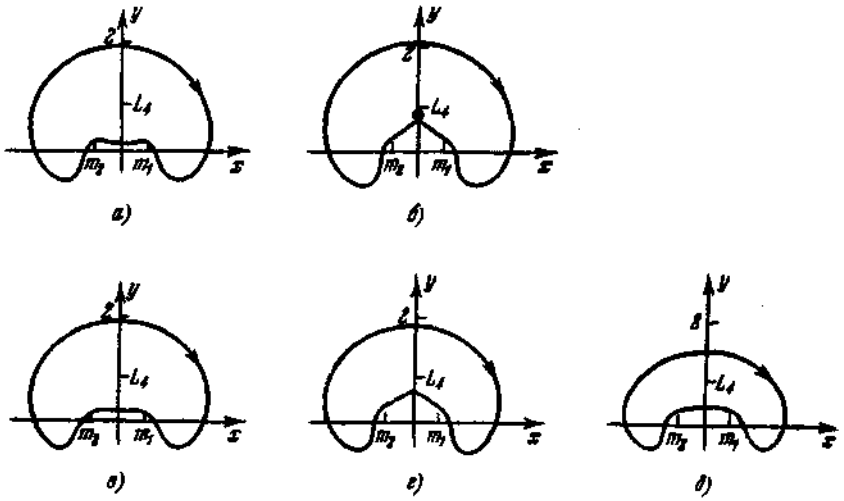


Рис. 9.18. Попятные периодические орбиты Мультона вокруг точки L_4 для $\mu=1/2$ (Мультон, 1920 [1]): *а*) $C=3{,}03$, *б*) $C=3{,}03$, *в*) $C=3{,}20$, *г*) $C=3{,}20$. $C\approx 3{,}3284$.

На рис. 9.18,*а*, *в* и *д* показаны орбиты, которые Мультон рассматривал как элементы класса. Мы видим, что предельными орбитами этого класса могут быть асимптотически-периодические орбиты, аналогичные орбитам, изображенным на рис. 9.15.

Действительно, Мультон нашел две периодические орбиты для каждого заданного значения постоянной Якоби ($C=3{,}03$ и 3,20), как показано на рис. 9.18,*а*, *б* и 9.18*в* и *г*, вплоть до $C\approx 3{,}3284$. При этом значении C два семейства объединяются на рис. 9.18,*д*.

Основываясь на том, что говорилось об асимптотически-периодических орбитах в пункте 9.4.9, можно дать следующее объяснение. Будем рассматривать фигуры, аналогичные фигурам, изображенным на рис. 9.15*а* и 9.15*е*, как предельные орбиты для классов. Тогда между двумя этими асимптотически-периодическими орбитами будет существовать класс, орбиты которого представлены на рис. 9.18,*а—д*. Действительно, класс может начинаться с фигуры, аналогичной той, что изображена на рис. 9.15,*а*, и заканчиваться фигурой, аналогичной той, что показана на рис. 9.15,*г*. Порядок орбит следующий: 9.15,*а* (?), 9.18,*б*, 9.18,*г*, 9.18,*д*, 9.18*в*, 9.18*а* и 9.15,*г* (?). «Двойные периодические орбиты» Мультона (две орбиты с одинаковым значением C, например, орбиты на рис. 9.18,*а* и 9.18,*б*) являются просто орбитами одного и того же класса при разных состояниях развития. Дискуссия по этим орбитам проводится в § 9.11.

Б. Открытие Мультона (независимо от других) орбит класса (k) (в особенности орбиты, показанной на рис. 9.7*б*) тоже обсуждается в § 9.11, так как некоторые весьма любопытные детали порождают здесь определенные сомнения. Помимо орбиты с последовательными соударениями класса (k) Мультон нашел также для $\mu=1/2$ ряд *орбит одиночного соударения*, таких, как орбита, принадлежащая классу (a) (рис. 9.3*а*), классу (f) (рис. 9.5*б*) и классу (g) (рис. 9.6*а* и последний рис. 9.6*в*).

В. Две *орбиты одиночного соударения*, вычисленные для $\mu=4/5$, мы рассмотрим подробней, поскольку они имеют отношение к вопросу о быстроте развития семейств. Сначала мы сравним орбиту соударения класса (a), показанную на рис. 9.3*а* и соответствующую $C=2{,}50$, с орбитой соударения Мультона, изображенной на

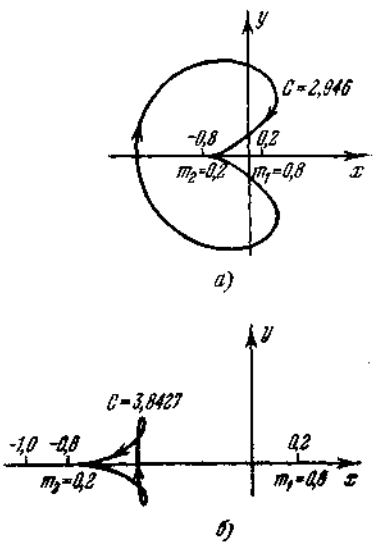


Рис. 9.19. *а*) Замкнутая орбита Мультона, $\mu=4/5$ (Мультон, 1920). *б*) Замкнутая орбита Мультона, $\mu=4/5$ (Мультон, 1920 [1]).

рис. 9.19*а*. Кривая Мультона одинакова с ней по форме и направлению (обе попятные), но постоянная Якоби ее равна $C_{4/5}=2{,}946$, т. е. для одной и той же орбиты одного и того же семейства $C_{1/2}<C_{4/5}$. Относительное возмущение в случае Мультона больше, чем на рис. 9.3*а*, поэтому можно ожидать, что понижение постоянной Якоби с $C_{1/2}(L_1)=3{,}706796$ до значения, соответствующего соударению ($C_{1/2}=2{,}5$), происходит медленней, чем понижение с $C_{4/5}(L_1)=3{,}712393$ до $C_{4/5}=2{,}946$. Численные результаты это подтверждают.

В случае орбиты соударения класса (g), показанной на рис. 9.19*б*, положение совершенно иное. Эту орбиту мы будем сравнивать с орбитами на рис. 9.6*а* и 9.17*а*, т. е. с результатами Стрёмгрена и Дарвина. Результаты такого сравнения показаны в табл. VIII.

Таблица VIII. Сравнение орбит соударения при различных значениях массового параметра

μ	C	№ рисунка	m_p/m_c	d
1/2	3,73605	9.6*а*	1	0,425
10/11	3,53183	9.17*а*	10	0,225
4/5	3,8427	9.19*б*	4	0,3

Все три орбиты являются прямыми периодическими орбитами соударения, принадлежащими классу (g). Во всех трех случаях третья частица вылетает по направлению к другой массе (а не из нее, как на последней фигуре на рис. 9.6*в* или на рис. 9.17*в*). Соударение во всех трех случаях происходит с основным телом (m_c), масса которого меньше или равна массе возмущенного основного тела (m_p). В таблице приводятся отношения возмущающих масс к массам, с которыми происходит соударение, (m_p/m_c), постоянные Якоби для орбит соударения и расстояния (d) между меньшей массой и точкой на оси x, в которой орбита пересекает ее под прямым углом. Не следует забывать, что орбиты в классе (g) начинаются с орбит вокруг основного тела при $C\to\infty$. Поэтому быстрое развитие семейства означает, что орбита соударения достигается при сравнительно высоком значении постоянной Якоби. Самое быстрое развитие происходит при $\mu=4/5$, менее быстрое — при $\mu=1/2$ и самое медленное — при $\mu=10/11$. Как мы уже отмечали, это нельзя объяснить величиной относительных возмущений.

В заключение еще раз отметим, что классификация Стрёмгрена и открытия общего характера дают возможность использовать результаты Мультона, если их интерпретировать надлежащим образом. Общий топологически инвариантный характер орбит при изменении μ, принцип окончания классов орбит, а также использование постоянной Якоби как параметра получило подтверждение в трудах Стрёмгрена — Дарвина — Мультона, по крайней мере, в рамках представленных результатов.

§ 9.5. Периодические лунные орбиты

К этой категории относятся периодические орбиты, при вычислении которых в качестве основных тел принимаются Земля и Луна.

Параграф разбит на четыре пункта. В пунктах 9.5.1 и 9.5.2 изучается влияние изменение массового параметра от $\mu=1/2$ до $\mu\approx 1/82{,}3$ путем сравнения орбит Копенгагенской категории с периодическими луннымн орбитами. В пункте 9.5.3 рассматриваются периодические орбиты Егорова. В пункте 9.5.4 исследуются специальные периодические орбиты, на которые ссылался еще Дарвин, но которые фактически были установлены только в 1960-е годы.

9.5.1. Движение вокруг коллинеарных точек. Орбиты вокруг точки L_3 класса (a) и орбиты вокруг точки L_2 класса (b) по Стрёмгрену, т. е. вокруг двух точек либрации, находящихся снаружи отрезка m_1m_2 на рис. 9.20*а*, являются симметричными относительно оси y. При $\mu\neq 1/2$ это не имеет места, однако общая форма семейств остается сходной. На рис. 9.20*а* показана

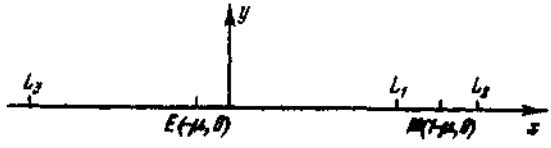


Рис. 9.20*а*. Расположение Земли, Луны и коллинеарных точек либрации при вычислении периодических лунных орбит.

система координат и расположение основных тел и точек либрации при расчете периодических лунных орбит. Массовый параметр равен $\mu=0{,}0121550992=1/82{,}27$, или $m_\oplus/m_\leftmoon=81{,}27$.

Движение вокруг точки L_3 показано на рис. 9.20*б*, заимствованном из работы Брукке. Между рис. 9.20*б* и рис. 9.3*а* и *б* легко обнаружить сходство. В обоих случаях бесконечно малые эллиптические попятные орбиты вокруг точки L_3 увеличиваются в своих размерах (с убыванием постоянной Якоби) пока не достигается орбита соударения. После этого орбита образует петлю, в Копенгагенской задаче вокруг m_1, а в рассматриваемом случае вокруг Земли. Приблизительно при $C=-0{,}816$ петли меняются ролями, и семейство орбит замыкается на самого себя посредством изменения направления на обратное. Поражает инвариантность общей формы орбит и построение семейства при изменении μ от 1/2 до 1/82,27 для класса (a).

Соответствующее семейство, которое может быть образовано из бесконечно малых эллиптических орбит вокруг точки L_2 (рис. 9.20*а*), содержит также орбиту соударения с $C=2{,}744564$.

Семейство попятных орбит вокруг точки либрации, расположенной между основными телами, начинается с бесконечно малых эллиптических орбит, соответствующих классу (c) по Стрёмгрену. Орбиты семейства (после начального эллиптического движения с малой амплитудой) обнаружнвают сходство с некоторыми орбитами Стрёмгрена несимметричного класса

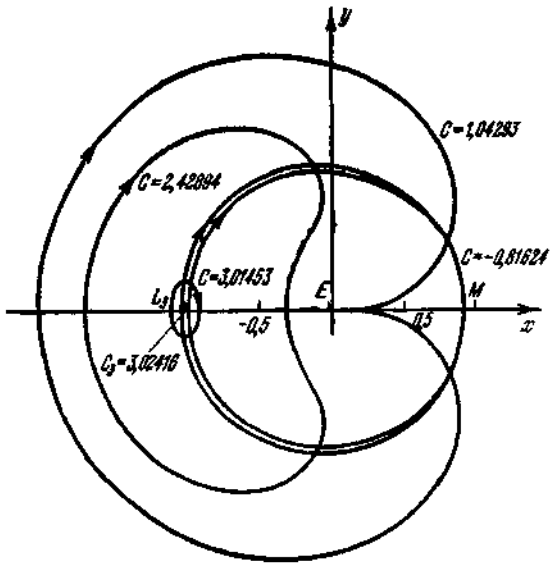


Рис. 9.20б. Периодические лунные орбиты, класс (b), $\mu = 1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

(n), вследствие асимметрии, присущей системе Земля — Луна. В процессе развития, прн $C = 1{,}434059$ происходит соударение с E. После этой орбиты соударения следуют орбиты, делающие петли. Окончание этого класса может происходить двумя способами, в зависимости от выбранного расположения. В первом случае, когда появление петель рассматрнвается в соответствии с классом (n), при увеличении размеров внутренней петли и стягивании наружной петли образуется овальная орбита. Затем развитие идет в обратном порядке, петли меняются ролями и мы получаем замкнутый класс. Второй возможный случай мы получаем в процессе развития класса (c) при повторяющихся соударениях, сначала с одним основным телом, затем с другим. Следовательно, петли развиваются и размеры орбиты неограниченно возрастают.

9.5.2. Движение вокруг основных тел. Существует четыре различных класса для $\mu \neq 1/2$, которые соответствуют классам

Стрёмгрена (i), (f), (g) и (h); они показаны на рис. 9.21*а* — и заимствованы из работы Брукке. Этими классами являются:

класс (h), содержащий попятные орбиты вокруг E,
класс (*f*), содержащий попятные орбиты вокруг M,
класс (*g*), содержащий прямые орбиты вокруг M,
класс (i), содержащий прямые орбиты вокруг E.

Попятные орбиты вокруг E показаны на рис. 9.21*а* и *б* и сравниваются с орбитами на рис. 9.5*а*, *б* и *в* после отражения

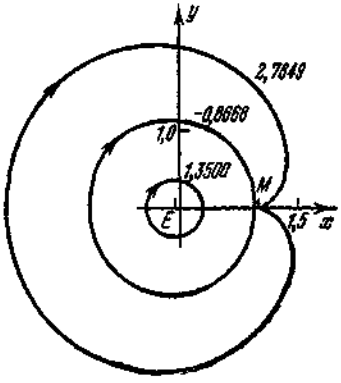


Рис. 9.21*а*. Периодические лунные орбиты, класс (h), $\mu = 1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

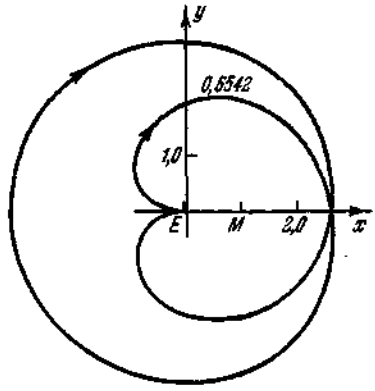


Рис. 9.21*б*. Периодическая лунная орбита, класс (e), $\mu = 1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

последних от оси y. По этой причине эти орбиты образуют класс (h), а не класс (f). Началом этого класса орбит (фактически всех четырех классов: (i), (f), (g) и (h)) является бесконечно малая круговая орбита с $C \to \infty$. При увеличении размеров этих овалов достигается орбита соударения с M (рис. 9.21*а*), соответствующая орбите на рис. 9.5*б*. Затем орбита соударения переходит в орбиту с петлей вокруг M. При расширении этой петли происходит соударение с E (рис. 9.21*б*). Далее эта орбита соударения продолжается с петлей вокруг E, совершенно аналогично орбите на рис. 9.5*в*. Когда семейство заканчивается, размеры орбит неограниченно возрастают.

На рис. 9.21*в* и *г* показаны попятные орбиты вокруг M. Они соответствуют орбитам на рис. 9.5*а*, *б* и *в*, представляющим класс (f). В дополнение к нескольким орбитам овальной формы снова показаны две орбиты соударения (сначала с E, затем с M). После второй орбиты соударения следуют орбиты,

образующие петли, и семейство заканчивается при неограниченном увеличении размеров.

Прямые периодические орбиты вокруг M соответствуют классу (g) по Стрёмгрену. На рис. 9.21*д* показаны первая и вторая фазы, аналогично рис. 9.6*а* и *б* Копенгагенской категории. Рис. 9.21*е* относится к третьей фазе и к первой орбите

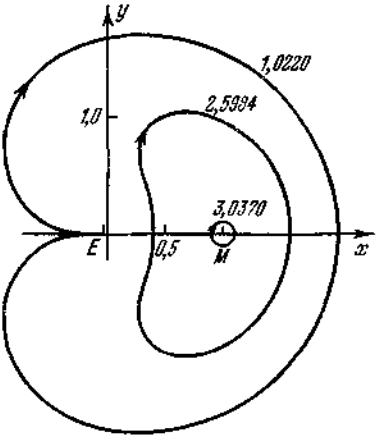


Рис. 9.21*в*. Периодические лунные орбиты, класс (f), $\mu=1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

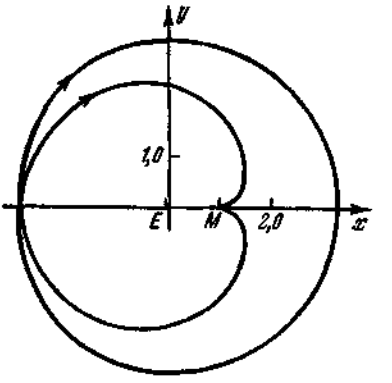


Рис. 9.21*г*. Периодическая лунная орбита, класс (f), $\mu=1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

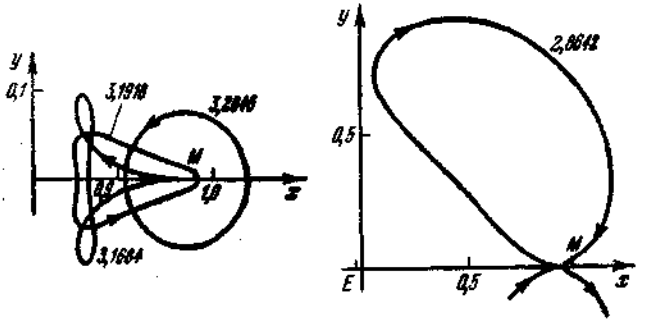


Рис. 9.21*д*. Периодические лунные орбиты, класс (g), $\mu=1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

четвертой фазы класса (g), показанной на рис. 9.6*в*. Продолжением класса (g) служат орбиты вокруг E.

Прямые орбиты вокруг E образуют класс, который в Копенгагенской категории обозначен как класс (i), который в свою очередь является зеркальным отображением класса (g) относительно оси y. Начало класса не показано (см. прямые

орбиты вокруг M). На рис. 9.21*ж* показаны орбиты, которые в пункте 9.4.4 были отнесены к пятой фазе класса (g) (см. рис. 9.6*д*). Рис. 9.21*з* относится к орбитам шестой фазы (рис. 9.6*е*). Рис. 9.21*и* можно сравнить с рис. 9.6*ж*. Развитие

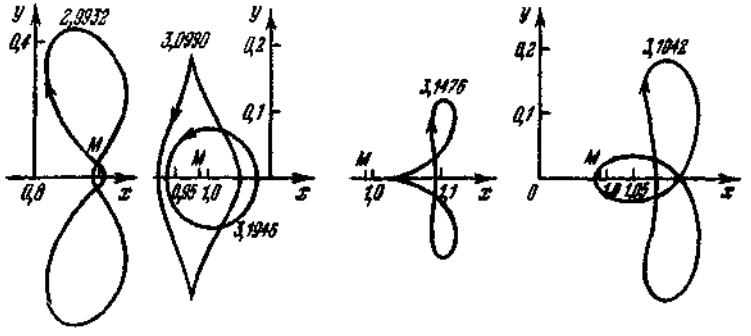


Рис. 9.21*е*. Периодические лунные орбиты, класс (g), $\mu = 1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

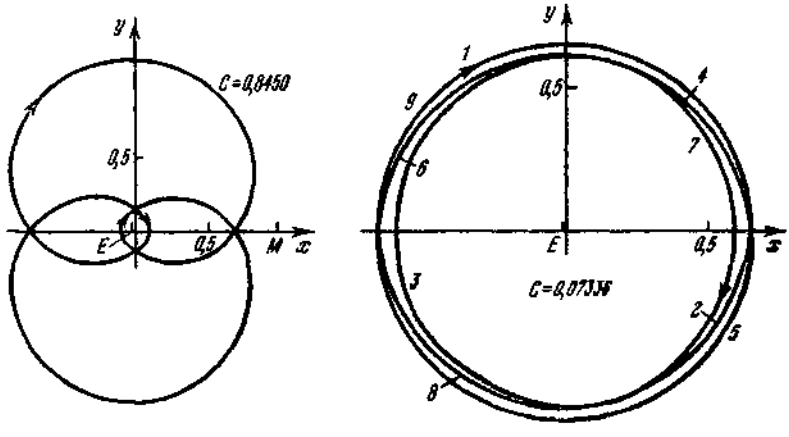


Рис. 9.21*ж*. Периодические лунные орбиты, класс (i), $\mu = 1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

семейства, показанное на этих рисунках для $\mu = 1/82{,}27$, подобно во всех отношениях процессам, протекающим в классе (g) Копенгагенской категории.

На рис. 9.22*а* показано движение вокруг обоих основных тел, орбиты здесь обнаруживают сходство с орбитами класса (m) по Стрёмгрену (рис. 9.9*а*). Следует, однако, отметить влияние асимметрии основных тел, в результате чего орбиты при-

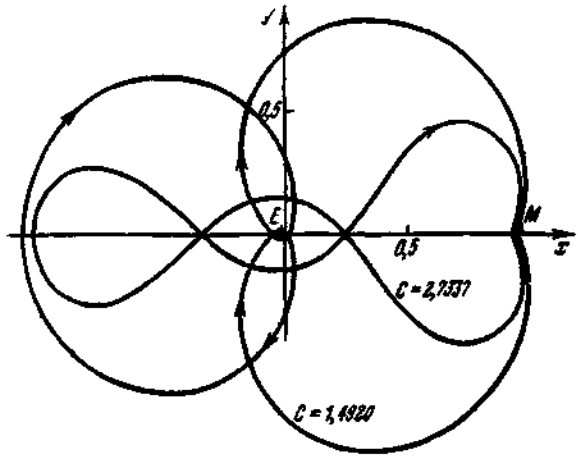


Рис. 9.21з. Периодические лунные орбиты, класс (i), $\mu = 1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

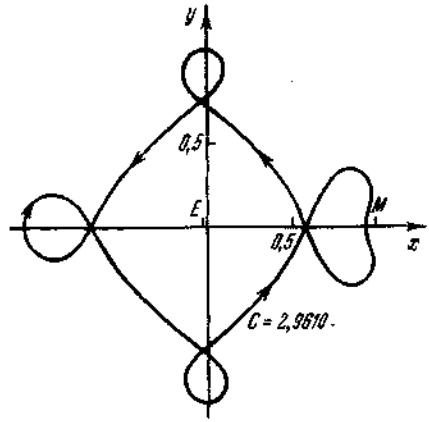


Рис. 9.21*и*. Периодическая лунная орбита, класс (i), $\mu = 1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

ближаются к M, в то время как расстояние в перигее остается достаточно большим. Это можно видеть из рис. 9.22*б* (схожего в некоторой степени с рис. 9.9*б*). Кривая слева показывает расстояние между точкой перпендикулярного пересечения орбиты с отрицательным направлением оси x и Землей. Кривая справа дает соответствующие расстояния до Луны.

В табл. IX приведены численные значения, относящиеся к рис. 9.22*а* и *б*.

Отметим некоторые аспекты, представляющие интерес. Во-первых, существует максимальное значение постоянной Якоби ($C_{max} \approx -0{,}43$), аналогично тому, что мы имели в классе (m) Копенгагенской категории, где $C_{max} \approx -0{,}37$. Асимметричное семейство, описываемое в табл. IX, начинается с попятных круговых орбит с радиусами, стремящимися к бесконечности, и $C = -\infty$. Затем C увеличивается до C_{max}, после чего убывает снова. Заканчивается семейство прямолинейной орбитой, соединяющей основные тела ($C \to -\infty$). Овальные орбиты наводят на мысль о создании научно-исследовательской станции Земля — Луна перманентного действия. Несмотря на заманчивость этой идеи, осуществить практически ее не легко, на что указывают два последних столбца таблицы. Они получены из двух предыдущих столбцов для расстояния между Луной и Землей, равного $l = 384400{,}2$ км. Принимая экваториальный радиус Земли равным $(6378{,}160 \pm 0{,}02)$ км, а Луны — 1738 км, можно устано-

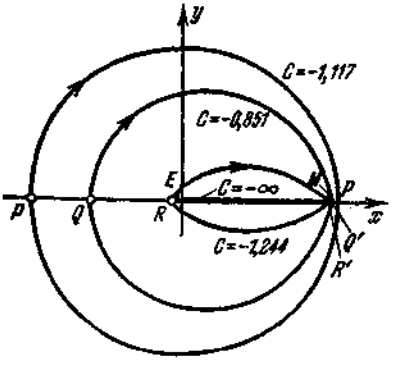


Рис. 9.22*а*. Периодические лунные орбиты, класс (m), $\mu = 1/82{,}27$ (Егоров, 1957 [38] и Брукке, 1962 [4]).

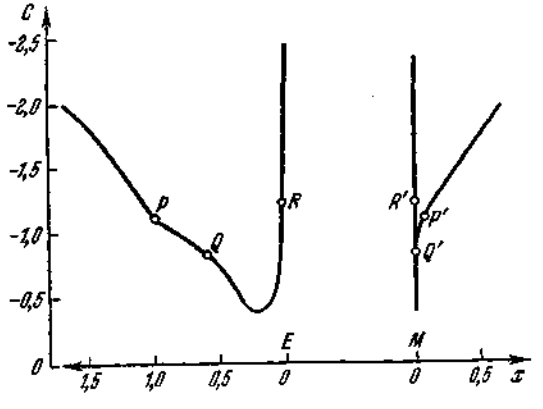


Рис. 9.22*б*. Зависимость постоянной Якоби от расстояний от M и E для периодических лунных орбит класса (*m*).

Таблица IX. Наименьшие расстояния, на которые периодические лунные орбиты класса (m) приближается к Земле и к Луне (см. рис. 9.22 *а* и *б*)

Постоянная Якоби C	Безразмерное расстояние от Земли	Безразмерное расстояние от Луны	Расстояние от Земли в км	Расстояние от Луны в км
—1,9021	1,587845	0,614799	610 367,9	236 328,9
—1,7825	1,487845	0,515888	571 927,9	198 307,5
—1,6555	1,387845	0,417656	533 487,9	160 547,0
—1,5208	1,287845	0,320758	495 047,9	123 299,4
—1,3795	1,187845	0,226835	456 607,9	87 195,4
—1,2379	1,087845	0,140594	418 167,9	54 044,4
—1,1173 (P)	0,987845	0,074282	379 727,8	28 554,0
—1,0166	0,854463	0,032155	328 455,8	12 360,4
—0,8514 (Q)	0,609906	0,012155	234 448,0	4672,4
—0,4485	0,238960	0,004155	91 856,3	1597,2
—0,5401	0,087845	0,001746	33 767,6	671,2
—1,2442 (R)	0,037845	0,000770	14 547,6	296,0
—2,5016	0,017845	0,000349	6859,6	134,2

вить, что все орбиты, проходящие от Земли ближе, чем приблизительно на 100 000 км, будут проходить через поверхность Луны, т. е. наименьший перигей, который может быть получен, равен около 100 000 км, что, учитывая эксцентриситет орбиты Луны и возмущение, вызываемое Солнцем, можно принять в качестве оценки снизу.

9.5.3. Периодические орбиты Егорова. В этом пункте мы рассмотрим орбиты Земля — Луна, относящиеся к классам (m) и (n) (или (c)) по классификации Стрёмгрена, и некоторые более сложные периодические орбиты. Все орбиты, которые будут нами рассмотрены, обладают одним общим свойством: проходят вблизи Земли и вблизи Луны. Класс (m), отличающийся неудовлетворительным поведением из-за больших перигелиев, был исследован нами в предыдущем пункте.

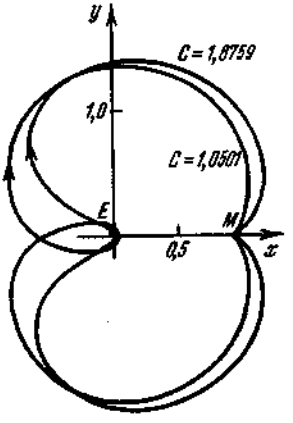


Рис. 9.23*а*. Периодические лунные орбиты, класс (c), $\mu = 1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

Орбиты, которые могут быть получены посредством продолжения бесконечно малых эллиптических орбит вокруг точки либрации, расположенной между основными телами, по причине симметрии масс можно относить как к классу (c), так и к классу (n). На рис. 9.23*а*, выполненном Брукке, показаны две орбиты этого класса, проходящие на рас-

стоянии от центра Земли соответственно 12 360 км и 8516 км, а от центра Луны — на 1698 км и 2258 км, для $C=1{,}876$ и $C=1{,}05006$. Обе орбиты можно рассматривать как достаточно точные исходные траектории для практических целей. Более сложные периодические орбиты с последовательными сближениями с Землей и с Луной, принадлежащие по существу к этому же семейству, были рассчитаны В. А. Егоровым. На рис. 9.23б одна из таких орбит показана во вращающейся и в неподвижной

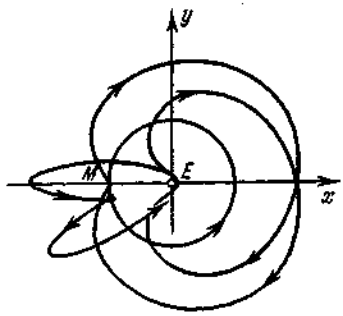


Рис. 9.23б. Периодическая орбита последовательных сближений с Землей и Луной в синодической и сидерической системах координат (Егоров, 1957 [3]).

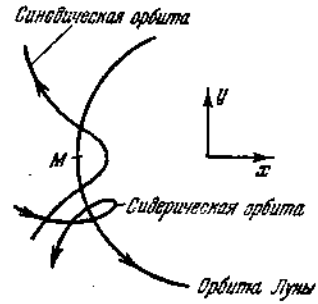


Рис. 9.23в. Периодическая орбита последовательных сближений в увеличенном масштабе (Егоров, 1957 [3]).

системах координат. В более крупном масштабе она показана вблизи Луны на рис. 9.23в.

9.5.4. Специальные периодические орбиты. Здесь мы рассмотрим такие периодические орбиты в поле идеализированной системы Земля — Луна, которые могут оказаться полезны нам при исследовании космического пространства. Как мы уже отмечали в связи с рис. 9.22а, орбиты, принадлежащие классу (m), не удовлетворяют практическим требованиям, предъявляемым к научно-исследовательским станциям Земля — Луна (перманентного действия). Орбиты, показанные на рис. 9.23а, б и в, в этом смысле являются более удовлетворительными, хотя практическое значение таких орбит всегда ограничивается ролью контрольных орбит. Имея в виду это ограничение, можно найти другие периодические орбиты, близко проходящие от Луны. Несколько таких семейств орбит мы рассмотрим ниже.

А. Если значение постоянной Якоби ограничено условием $C_1 \leqslant C < C_2$, то можно найти периодические орбиты, соединяющие окрестности m_1 и m_2. Здесь $C_1 = C(L_1)$ и $C_2 = C(L_2)$. Если

$C>C_2$ и третье тело вначале находится, скажем, вблизи Земли (т. е. внутри кривой нулевой скорости, соответствующей C), то оно не может выйти из этого замкнутого овала и становится спутником Земли. То же самое справедливо и для лунного спутника. Кривая нулевой скорости в форме восьмерки, принадлежащая C_2, раскрывается в L_2, если $C<C_2$, и таким образом устанавливается связь между m_1 и m_2. Если кривая нулевой скорости, соответствующая C_1, должна ограничивать движение, то $C_1<C$.

Положение коллинеарных точек либрации и основных тел, а также значения критической постоянной Якоби, как уже говорилось, зависят от μ. Чтобы лучше представить это, примем $\mu=0{,}012141$, тогда будем иметь $x_1=-1{,}155645$, $x_2=-0{,}836963$, $x_3=1{,}005059$, $C_1=3{,}1845078$, $C_2=3{,}200246$ и $C_3=3{,}024131$. Приблизительное положение основных тел и коллинеарных точек либрации показано на рис. 9.24*а*.

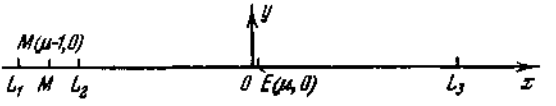


Рис. 9.24*а*. Расположение Земли, Луны и коллинеарных точек либрации, $\mu=0{,}01214$.

Изложим теперь идею Егорова и Аренсторфа, лежащую в основе метода получения периодических орбит Земля — Луна. Возьмем значение для постоянной Якоби, лежащее между C_1 и C_2. Кривая нулевой скорости охватывает точки M, L_2, 0 и E и пересекает ось x между L_1 и M, а также между E и L_3. Выбрав теперь начальные условия такими, чтобы $y\approx 0$, $x\approx x_2$, $\dot{y}\approx 0$, $\dot{x}\approx 0$, дадим возможность третьему телу «пройти» через «щель» у L_2. Орбита с выбранными нужным образом начальными условиями выходит из окрестности L_2 по направлению к E, и третье тело становится временным спутником Земли. Так как $C<C_2$, то тело может вернуться к «щели» у L_2 и «пройти» по направлению к M. Теперь оно может стать временным спутником Луны, может вернуться к точке L_2, затем к E; такая последовательность может продолжаться дальше. Таким способом можно получить периодические орбиты, регулируя при этом степень сближения.

Нахождение такой периодической орбиты имеет скорее теоретическое значение, чем практическое, так как под влиянием возмущения Солнца, сжатия у полюсов и эксцентриситета нарушается равновесие сил в ограниченной задаче. Несмотря на это, Аренсторф доказал существование таких периодических орбит аналитически, а также численным методом.

Одна из орбит семейства, найденного Дэвидсоном, показана на рис. 9.24*б*. Такие орбиты, можно сказать, неустойчивы

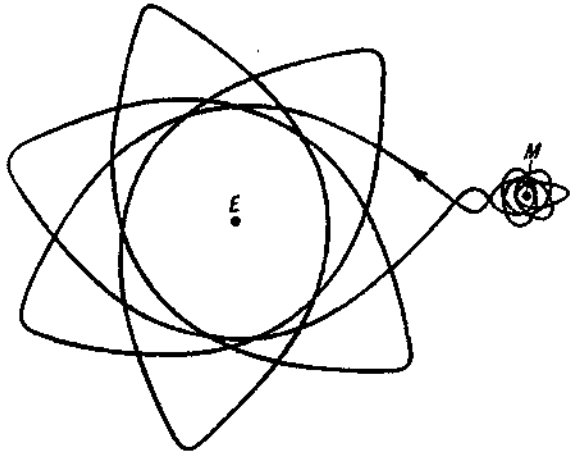


Рис. 9.24*б*. Периодическая орбита тела, попеременно являющегося спутником то Земли, то Луны, $\mu=1/81.45$ (Дэвидсон, 1964 [37]).

почти во всех смыслах; действительно, их чувствительность к изменениям значения массового параметра (μ) такова, что в некоторых случаях переход от спутника Земли к спутнику Луны, и наоборот, может не произойти, если значение μ изменится на доли процента. Указаниая выше орбита была рассчитана для $\mu=0{,}012277471$ и $C=3{,}185498720207$. Составляющие начальной скорости равнялись $\dot{x}_0=0$, $\dot{y}_0=0{,}0086882909$, и орбита начиналась с правой стороны Луны на расстоянии 0,162277471 по оси x.

Точки либрации располагаются справа и слева от Луны на расстоянии соответственно 0,168445637 и 0,151429938. Соответствующие значения постоянной Якоби равны

$$C_1=3{,}185285900531 \text{ и } C_2=3{,}201635152079.$$

Следовательно, $C_1<C<C_2$.

На рис. 9.24*в* показана периодическая орбита вокруг Луны, т. е. вокруг меньшего основного тела. Начальными условиями в системе координат с началом в Луне являются $x_0=$ $=-0{,}120722529000$, $y_0=0$, $\dot{x}_0=0$, $\dot{y}_0=-0{,}024511616261$. Существование периодических орбит «второго рода» вокруг меньшего основного тела не очевидно. Доказательство их существования принадлежит Аренсторфу; полученная им орбита показана на рис. 9.24*в*.

Б. Следующие группы семейств орбит, проходящих близко от основных тел, можно получить, если обратиться к периодическим орбитам Пуанкаре второго рода. Рассмотрим эллиптическую орбиту с Землей в ее фокусе в неподвижной системе

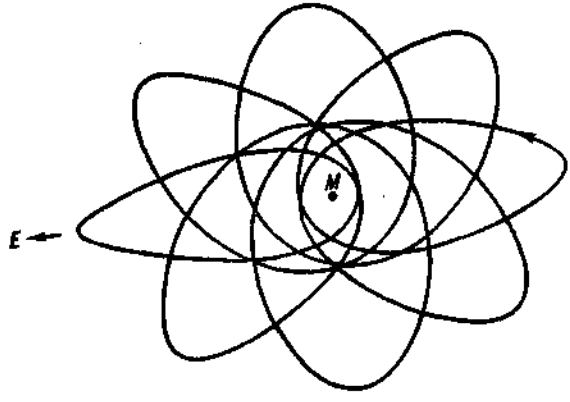


Рис. 9.24*в*. Периодическая орбита вокруг меньшего основного тела (орбита спутника Луны), $\mu = 1/81{,}45$ (Аренсторф, 1966 [36]).

координат. Так как масса Земли в нашей системе равна $1-\mu$, то среднее движение n по такой эллиптической орбите равно

$$n = \frac{(1-\mu)^{1/2}}{a^{3/2}},$$

а период равен

$$T = \frac{2\pi}{(1-\mu)^{1/2}} a^{3/2}.$$

Период Луны в неподвижной системе равен 2π. Так как среднее движение ее равно единице, то условие соизмеримости принимает вид

$$a = \left(\frac{l}{k}\right)^{2/3} (1-\mu)^{1/3},$$

где l и k — целые числа, имеющие тот же физический смысл, что и в гл. 8. За то время, что эллипс делает l оборотов относительно вращающейся системы координат, третье тело совершает k витков по эллипсу. Отношение l/k равно отношению периода частицы относительно неподвижной системы к периоду Луны.

Принимая теперь $(1+e)a \approx 1$, где e — эксцентриситет эллиптической орбиты, можно получить невозмущенную орбиту

(для задачи двух тел), проходящую близко от основных тел, в особенности если величина $a(1-e)$, представляющая расстояние в перигее, сохраняется достаточно малой. В табл. X указаны значения a для различных значений l и k. Теперь можно

Таблица X. Большие полуоси для соизмеримости

k	l		
	1	2	3
1	0,9959	1,5809	2,0716
2	0,6274	—	1,3050
3	0,4788	0,7690	—
4	0,3952	—	0,8221
5	0,3406	0,5401	0,7085

вычислить приближенные начальные условия (для ограниченной задачи) и построить периодические орбиты, последовательно сближающиеся с основными телами. На рис. 9.25, *а* изображена орбита во вращающейся системе координат для $l=1$ и $k=2$, а на рис. 9.25*б* — та же самая орбита в неподвижной системе координат; оба рисунка выполнены Аренсторфом. Орбита является попятной по отношению к Луне и прямой по отношению к Земле. Из рис. 9.25*б* видно, что частица почти

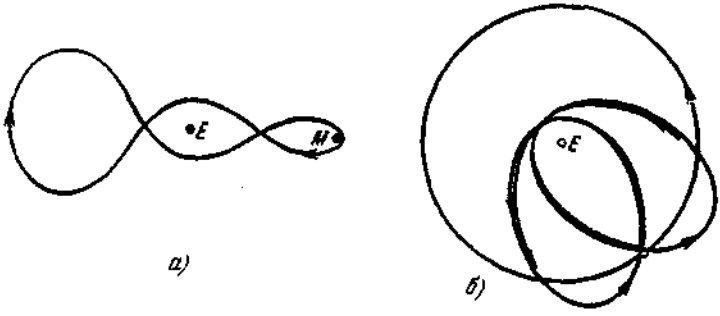


Рис. 9.25. *а*) Орбита последовательных сближений с соизмеримостью 1/2 в синодической системе Земля—Луна (Аренсторф, 1963), *б*) в сидерической системе Земля—Луна, $\mu=1/81{,}45$ (Аренсторф, 1963 [36]).

два раза ($k=2$) обходит свою эллиптическую орбиту за время между двумя встречами с Луной ($l=1$). Движение перигея (или линия апсид) орбиты в неподвижной системе координат есть результат того, что рассматривалась задача трех тел.

На рис. 9.26, заимствованном из работ Брукке и Хуанга, представлено семейство орбит в синодической системе для $l=2$ и $k=3$. Из четырех приведенных здесь орбит только орбита 3

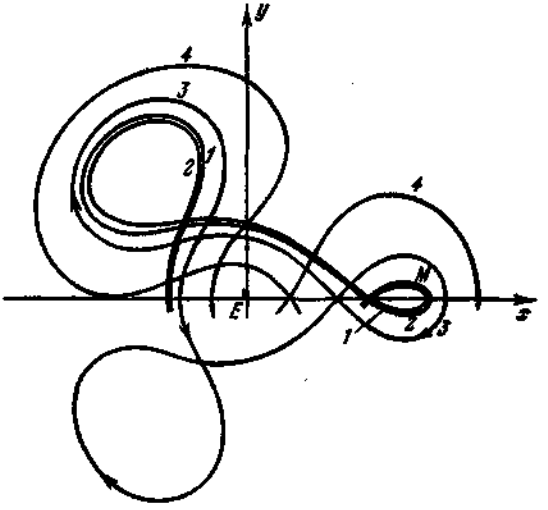


Рис. 9.26. Орбиты последовательных сближений в системе Земля—Луна с соизмеримостью 2/3 (Брукке, 1962 [4] и Хуанг, 1962 [39]).

изображена полностью, благодаря симметрии относительно оси x. Соответствующие численные значения указаны в табл. XI.

На рис. 9.27 показана орбита Аренсторфа во вращающейся системе координат для $l=2$ и $k=5$.

Таблица XI. Сближения при соизмеримости 2:3 (к рис. 9.26)

№ орбиты	Постоянная Якоби	Безразмерное расстояние от Земли	Безразмерное расстояние от Луны	Расстояние от Земли в км	Расстояние от Луны в км
1	2,8353	0,422555	0,012155	162 430,1	4672,4
2	2,8550	0,433869	0,022155	166 779,5	8516,4
3	2,7596	0,358754	0,112155	137 905,1	43 112,4
4	2,6374	0,191701	0,292156	73 689,8	112 304,6

На рис. 9.28 изображена орбита, полученная Брукке для $l=3$, $k=4$ при $C=2{,}7598$. Наименьшее расстояние орбиты от центра Луны равно здесь 1531 км, т. е. если не проводить орбитальной коррекции, то мы получим, что орбита третьего тела проходит внутри Луны.

Мы уже отмечали, что практическое значение найденных семейств периодических орбит, предназначенных для специальных целей, ограничивается их ролью контрольных орбит, так

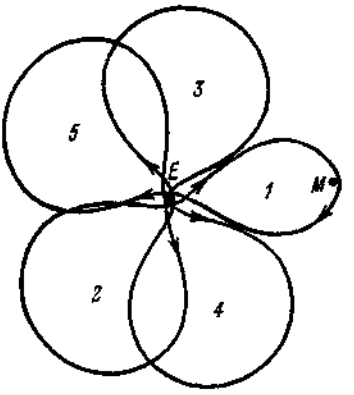


Рис. 9.27. Орбита последовательных сближений с соизмеримостью 2/5 в синодической системе Земля — Луна, $\mu = 1/81{,}45$ (Аренсторф, 1963 [36]).

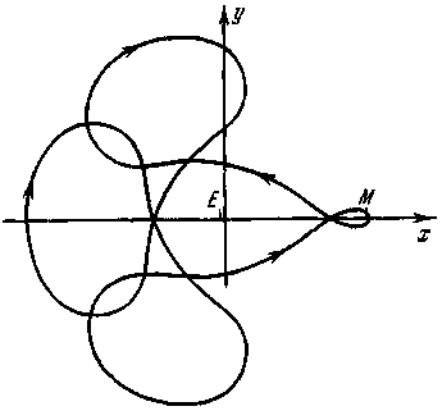


Рис. 9.28. Орбита последовательных сближений с соизмеримостью 3/4 в синодической системе Земля—Луна, $\mu = 1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

как нельзя ожидать, чтобы в действительном физическом случае эти орбиты были верны в течение любого промежутка времени, поскольку имеют место возмущения (отклонения от ограниченной задачи).

§ 9.6. Движение вокруг треугольных точек либрации

В этом параграфе приводятся два примера классов периодических орбит вокруг треугольных точек либрации. Теория этих орбит достаточно подробно была изложена в гл. 5. Здесь мы используем теорему Хорна, аналитическое продолжение и результаты Рабе для отношений масс, соответствующих системам Солнце — Юпитер и Земля—Луна.

Орбиты этого параграфа следует отличать от периодических орбит с большой амплитудой вокруг треугольных точек либрации, рассмотренных в пункте 9.4.12. Орбиты Мультона, которые мы рассматривали в том пункте, не были образованы посредством продолжения бесконечно малых периодических орбит вокруг L_4 и L_5, тогда как орбиты этого параграфа получаются именно таким способом. Известно, что для $\mu > \mu_0 = 0{,}0385\ldots$ бесконечно малых периодических орбит не существует, но периодические орбиты конечных размеров существуют.

В этой связи следует вспоминать не только орбиты Мультона для $\mu=1/2$, но и результаты Педерсена, приведенные в гл. 5.

Возвращаясь теперь к первому вопросу данного параграфа, рассмотрим некоторые периодические орбиты для $\mu=0{,}00095388$, полученные численным методом. Семейство, найденное Рабе, образовано из долгопериодической бесконечно малой периодической орбиты посредством определения векторов начальных скоростей в точках, расположенных на линии, соединяющей Солнце с точкой L_4.

Расстояние начальной точки на линии SL_4 равно λ, и следовательно, $\lambda=0$ соответствует точке L_4. Постоянная Якоби для этой орбиты равна $C=3$, период ее равен $147^d,40508$ и амплитуда (размер) ее равна нулю. С увеличением λ постоянная Якоби монотонно возрастает, и последовательно образуемые орбиты обнаруживают некоторое сходство с кривыми нулевой скорости. Это «сходство», как мы видели в гл. 4 и 5, не означает тождества.

На рис. 9.29*а* показаны параметры семейства периодических орбит Рабе. Вектор начальной скорости $\mathbf{v}_0$ приблизительно перпендикулярен к линии SL_4, так что для линеаризованной задачи $\operatorname{ctg}\alpha\approx 3^{1/2}$. Если начальная точка задана (расстоянием λ) и значение постоянной Якоби известно, то угол α полностью определяет орбиту. Несколько орбит, полученных Рабе, показано на рис. 9.29*б*, а численные данные приведены в табл. XII.

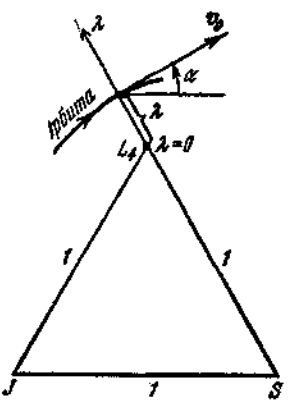


Рис. 9.29*а*. Параметры семейства периодических орбит Рабе

Монотонное возрастание значений периода и постоянной Якоби связано с возвращающими амплитудами до орбиты, для которой $\lambda=0{,}052$. Эта орбита пересекает ось x в третьей коллинеарной точке либрации, следовательно, ее постоянная Якоби равна $C=C_3=3{,}001906820$, а ее период бесконечен. Семейство орбит Рабе может закончиться (по терминологии Стрёмгрена) этой орбитой, однако параметр λ может увеличиваться дальше, что видно из последней строки таблицы (соответствующей последней орбите на рис. 9.29*б*). При дальнейшем увеличении λ до 0,07 обнаруживается тенденция к уменьшению периода, что находится в полном соответствии с тем фактом, что период монотонно возрастает, стремясь к бесконечности, когда $\lambda\to 0{,}052$ и $C\to C_3$. После этого начинается другая ветвь семейства, с $C=C_3$, $T=\infty$, и когда λ увеличивается,

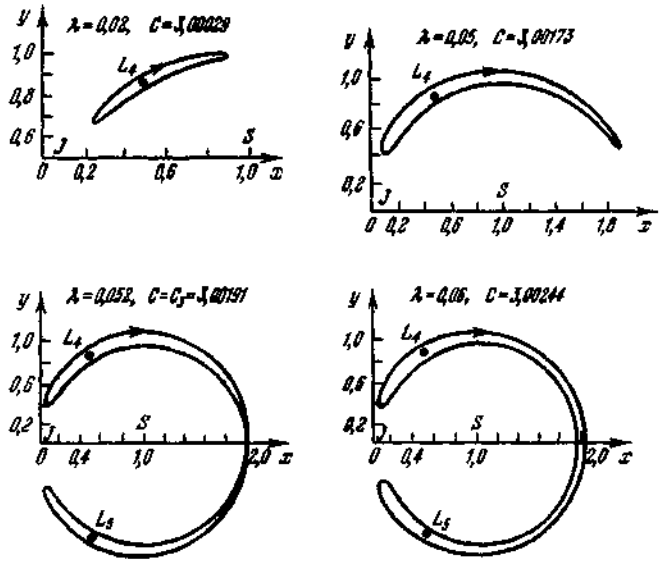


Рис. 9.29б. Периодические орбиты Троянцев, μ=0,00095388 (Рабе, 1961 [5]).

начиная с λ=0,052, период T убывает, а C возрастает. Окончание этой второй ветви Рабе не определил.

Таблица XII. Семейство периодических орбит Троянцев, рассчитанных Рабе; к рис. 9.29б (μ=0,000953875)

λ	C	ctg α	Период в годах
0	3,000 000 000	—	147,40508
0,0025	3,000 004 615	1,7338	147,46400
0,0050	3,000 018 422	1,7340	147,64176
0,0075	3,000 041 339	1,7341	147,94105
0,0100	3,000 073 266	1,7343	148,36797
0,0125	3,000 114 141	1,7345	148,93130
0,0150	3,000 163 893	1,7346	149,64355
0,0175	3,000 222 427	1,7348	150,52097
0,0200	3,000 289 680	1,7349	151,58503
0,0225	3,000 365 581	1,7350	152,86343
0,0250	3,000 450 230	1,7350	154,39554
0,0275	3,000 542 822	1,7352	156,21419
0,0300	3,000 644 316	1,7351	158,40247
0,0400	3,001 136 376	1,7386	173,33071
0,0500	3,001 724 588	1,7620	222,35627
0,0300	3,002 443 050	1,7429	346,42089

Периодические орбиты вокруг треугольной точки либрации для системы Земля — Луна показаны на рис. 9.29*в*, а соответствующие численные значения приведены в табл. XIII.

Развитие семейства в системе Земля — Луна происходит значительно медленней. Например, при $\lambda \approx 0{,}05$ орбита Троянца

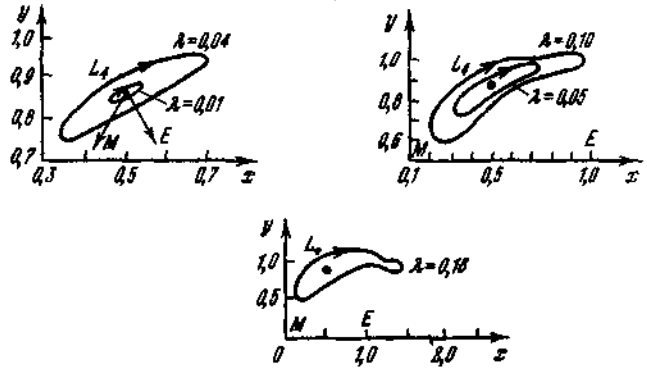


Рис. 9.29*в*. Периодические либрационные орбиты в системе Земля—Луна, $\mu = 0{,}0121396$ (Рабе и Шанцле, 1962 [6]).

почти что подходит к оси x, в то время как ее «двойник» в системе Земля — Луна имеет намного меньшую амплитуду по сравнению с соответствующими орбитами, показанными на рис. 9.29*б* и *в*. Заметим, однако, что соответствующие значения постоянной Якоби приблизительно равны.

Таблица XIII. Семейство периодических либрационных орбит Рабе для системы Земля — Луна; к рис. 9.29*в* ($\mu = 0{,}0121396054$)

λ	C	$\operatorname{ctg}\alpha$	Период в сутках
0	3,000 000 000	—	91,6563
0,01	3,000 062 316	1,7731	91,6858
0,02	3,000 248 460	1,8114	91,7438
0,03	3,000 553 364	1,8746	91,8215
0,04	3,000 952 074	1,9585	91,8945
0,05	3,001 396 914	2,0439	91,9423
0,06	3,001 841 721	2,1103	91,9605
0,07	3,002 260 499	2,1488	91,9568
0,08	3,002 644 726	2,1612	91,9437
0,09	3,002 995 923	2,1520	91,9357
0,10	3,003 322 446	2,1300	91,9506
0,12	3,003 979 371	2,0512	91,1627
0,14	3,004 936 230	1,9351	93,0180
0,16	3,006 787 044	1,7709	95,5634
0,18	3,009 785 995	1,4977	102,9439

Рассмотренные ранее периодические орбиты образованы из так называемых долгопериодических бесконечно малых орбит. Можно ожидать, что существуют аналогичные семейства, соответствующие более коротким периодом, встречающимся в решении характеристического уравнения (сравните с тем, что говорилось в гл. 5). Эти семейства (не соответствующие элементам группы Троянцев) описаны в последних работах, и потому мы их здесь не приводим.

Точность этих периодических орбит, полученных численным методом, можно оценить посредством вычетов. Они представляют собой разности между координатами (в фазовом пространстве) при $t=0$ и $t=T$. Для приведенных выше результатов, за исключением некоторых движений с очень большой амплитудой, вычеты обнаруживаются в восьмом десятичном знаке для всех координат фазового пространства. Это значительно лучше по сравнению с результатами Мультона — Дарвина — Стрёмгрена, где вычеты иногда обнаруживаются во втором десятичном знаке.

Следует заметить, что интеграл Якоби, используемый для контроля расчетов, не столь важен, как величина вычетов. Значение постоянной Якоби полезно регистрировать в процессе численного интегрирования, и если обнаружится, что изменения превышают, скажем, 10^{-5} (в наших безразмерных единицах), то в точности расчетов можно усомниться. Однако точность постоянной Якоби до восьмого десятичного знака не гарантирует малость вычетов, так как не так уже редки случаи, когда для некоторых орбит ошибка в величине постоянной Якоби порядка 10^{-9} бывает связана с ошибкой в положении и скорости порядка 10^{-3}.

Поскольку вычеты, как отмечалось выше, связаны с установлением периодических орбит, использование их для контроля расчетов, разумеется ограниченно. Другой способ контроля, который имеет важное значение для обратимых динамических систем и может быть применен к любой орбите, основан на принципе обратимости. Предположим, что численное интегрирование начинается с $t=t_0$ и заканчивается при $t=t_n$. В этой точке все векторы скоростей в системе изменяют направление на противоположное, т. е. $\mathbf{v}_i(t_n) \rightarrow -\mathbf{v}_i(t_n)$, а все радиусы-векторы сохраняются неизменными.

При этой системе *начальных условий* $[\mathbf{r}_i(t_n), -\mathbf{v}_i(t_n)]$ снова начинается интегрирование. При $t=2(t_n-t_0)$ интегрирование прекращается и вычисляются разности координат

$$|\mathbf{r}_i[2(t_n-t_0)]-\mathbf{r}_i(t_0)|$$

и соответствующие разности скоростей. Заметим, что ограничен-

ная задача представляет собой необратимую динамическую систему и, следовательно, такая проверка применима тогда, когда направление вращения синодической системы тоже меняется на обратное.

§ 9.7. Лунные траектории

В этом параграфе мы рассмотрим семейства траекторий бесконечно малой частицы, находящейся под действием Земли и Луны. Так как предположения, принимаемые в ограниченной задаче, выполняются неточно, то орбиты этих семейств следует рассматривать лишь как контрольные. При расчете орбит космических аппаратов, связывающих окрестности Земли и Луны, нужно учитывать как эксцентриситет лунной орбиты, так и возможно пространственную форму траектории. Несмотря на эти обстоятельства, которыми в ограниченной задаче пренебрегают, семейства лунных траекторий, полученных на основе такой модели, оказывают существенную помощь при общем изучении систем.

Один из наиболее совершенных способов упорядочения семейств лунных траекторий, предложенный Хоулкером и Херингом, основывается по существу на трехмерном исследовании ограниченной задачи. Мы познакомимся с этим способом в пункте 10.2.4 В. Довольно подробную классификацию лунных траекторий соударения и траекторий облета Луны дали В. А. Егоров и К. А. Эрике. Она вместе с орбитами с последовательными соударениями, о которых говорилось в § 3.11, составляет основу данного параграфа.

Многочисленные инженерные аспекты, естественно, не могут быть охвачены здесь, однако на одном важном следствии использования ограниченной пространственной модели мы здесь остановимся. То, что мы не будем учитывать влияний Солнца и эксцентриситета лунной орбиты, уменьшает роль времени запуска. Поэтому календарные даты мы в расчет не принимаем. Это обстоятельство безусловно является серьезным недостатком, однако на это приходится идти ради упрощения задачи.

Полеты к Луне различаются в зависимости от того, какие при этом ставятся цели. Например, может быть полет на Луну, при котором скорость аппарата при ударе о поверхность Луны произвольна, полет на Луну, при котором скорость при ударе мала или равна нулю («мягкое прилунение»), выведение аппарата на окололунную орбиту, когда он становится искусственным спутником Луны, облет вокруг Луны с возвращением аппарата в земную атмосферу с малым (или нулевым) углом входа, управляемый полет и, наконец, возвращение аппарата с Луны на Землю при различных ограничениях.

В некоторых из перечисленных случаев требуется изменять орбиты в полете, так как траектории свободного полета (точнее, полета в гравитационном поле) не всегда отвечают поставленным требованиям. Для ограниченной задачи важно установить, какие из этих лунных орбит могут обходиться без коррекции во время полета. Позже мы перейдем к систематическому изучению этих орбит и представим классы траекторий по возможности более полно. Модификации орбит этих классов в соответствии с действительной физической картиной дают возможность выбора траектории, которая удовлетворяет другим практическим требованиям.

До сих пор мы говорили о траекториях свободного полета, во время которого небольшие реактивные двигатели могли служить лишь целям коррекции орбиты или управления. Те полеты, которые не могут быть выполнены в рамках ограниченной задачи, требуют дополнительных двигателей, включаемых с самого начала.

В случаях, когда скорость при ударе о поверхность Луны не задается, дополнительных двигателей не требуется, поэтому такие траектории могут быть использованы в ограниченной задаче. Целесообразно (если не сказать необходимо) при вычислении таких семейств орбит применять регуляризацию. Мягкая посадка на Луну требует включения двигателя. Это следует из того, что частица с нулевой скоростью не может покинуть поверхности Луны, а стало быть, не может и прибыть на Луну с нулевой скоростью, согласно принципу отражения траекторий, см. гл. 8.

Создать «перманентный» спутник Луны без дополнительного импульса по ряду теоретических и практических причин, по-видимому, невозможно. При условиях ограниченной задачи тот факт, что скорость, с которой третье тело входит в окрестность Луны, равна около 3000 м/сек, препятствует «захвату». Скорость спутника Луны равна приблизительно 1200—1700 м/сек для высот от 150 до 1800 км над ее поверхностью, поэтому, если учесть также скорость самой Луны (~ 1000 м/сек), то скорость прибытия необходимо изменить. Советский ученый В. Г. Фесенков пытался обосновать теоретически невозможность такого захвата, и хотя в его работе некоторые вопросы остались открытыми, надо отметить, что до сих пор ни одной орбиты захвата найдено не было. Те траектории, которые состоят из нескольких орбит с большим эксцентриситетом вокруг Земли и эллиптических орбит вокруг Луны (см. работу В. А. Егорова, а также Б. Тюринга), не являются орбитами захвата, так как при этих исключительно неустойчивых орбитах можно ожидать либо соударений с одним из основных тел, либо периодических повторений (см. работы Аренсторфа) указанного выше процесса.

Облет вокруг Луны вообще возможен в рамках ограниченной задачи, но если требуется возвращение космического корабля с малым углом входа его в плотные слои атмосферы, то коридоры свободного полета становятся узкими, а начальные условия оказывают столь чувствительное действие, что предположения ограниченной задачи при отсутствии дополнительного импульса ставят под сомнение справедливость расчетов.

Для изучения могут быть применены облетные операции, имеющие важное значение, но если в межпланетных орбитах требуется учитывать так называемые разгонные или поворотные эффекты, то исследования снова показывают лимитированное значение ограниченной задачи. Причина этого заключается в требовании очень близкого подхода к Луне или планетам, для чего необходимо учитывать эксцентриситет их орбит.

Траектории, при которых космический корабль возвращается обратно, можно изучать, используя ограниченную задачу, в особенности принцип отражения (см. гл. 8), согласно которому каждая орбита, рассчитанная для полета от Земли к Луне, при замене (t) на $(-t)$ и (y) на $(-y)$ дает орбиту возвращения.

Из существующих семейств лунных траекторий мы рассмотрим шесть классов траекторий, при которых тело совершает облет вокруг Луны, четыре класса траекторий, когда тело попадает в Луну, и шесть классов траекторий с последовательными соударениями.

На рис. 9.30, взятом из работы В. А. Егорова, показаны три основные орбиты из класса траекторий облета вокруг Луны. Во всех трех случаях орбита возвращения является траекторией

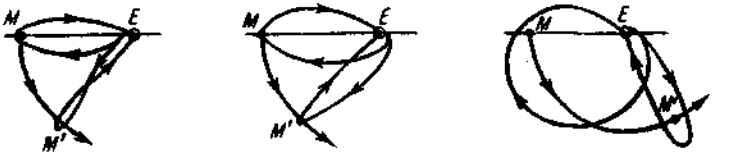


Рис. 9.30. Классы траекторий облета Луны (Егоров, 1957 [3]).

соударения. Три фигуры показывают синодические и сидерические орбиты, а также (круговое) движение Луны. Орбиты начинаются на фиксированной высоте над поверхностью Земли с касательным вектором скорости. На рис. 9.31 мы видим три орбиты трех классов траекторий облета с малыми углами входа в плотные слои атмосферы. Во всех трех случаях начальная скорость имеет радиальное направление, т. е. орбита с самого начала является траекторией соударения.

Четыре класса траекторий полета на Луну, полученных В. А. Егоровым, показаны на рис. 9.32. Здесь EM' изображают

сидерические орбиты, EM — синодические и MM' — лунные. На рис. 9.33, принадлежащем В. А. Егорову, изображен тот же класс, что и на рис. 9.32*а*. Три орбиты этого класса начинаются

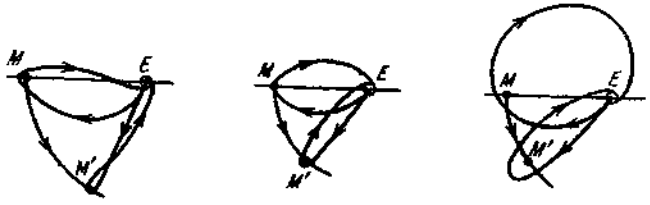


Рис. 9.31. Классы траекторий облета Луны с малым углом входа в плотные слои атмосферы Земли (Егоров, 1957 [3]).

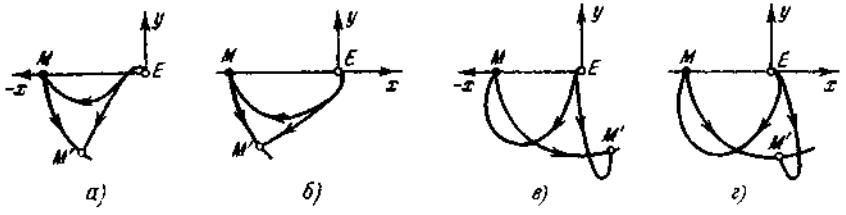


Рис. 9.32. Четыре класса траекторий попадания в Луну (Егоров, 1957 [3]).

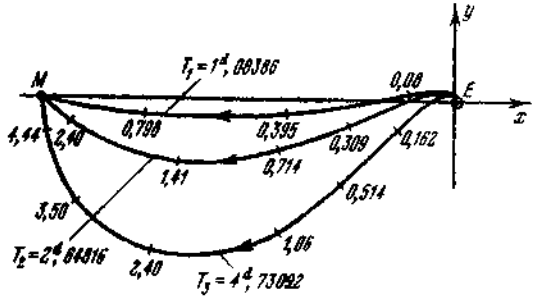


Рис. 9.33. Класс (а) траекторий попадания в Луну, $\mu = 1/82{,}47$ (Егоров, 1957 [3]).

на высоте 200 км с начальной скоростью $\dot{y}=0$, $\dot{x}<0$. Три начальные скорости выражены через их отклонения от местной параболической скорости: $\Delta V_1 = +0{,}48251$ км/сек, $\Delta V_2 = -0{,}057828$ км/сек и $\Delta V_3 = -0{,}092828$ км/сек.

Семейства орбит с последовательными соударениями обладают одним общим свойством: все орбиты проходят через обе особые точки. Такие орбиты были рассчитаны Пирсом и Стендишем с применением регуляризации Биркгофа; мы их рассматривали в § 3.5. Характеристики шести семейств представлены на рис. 9.34. На нем изображен график функции $C=C(\theta)$,

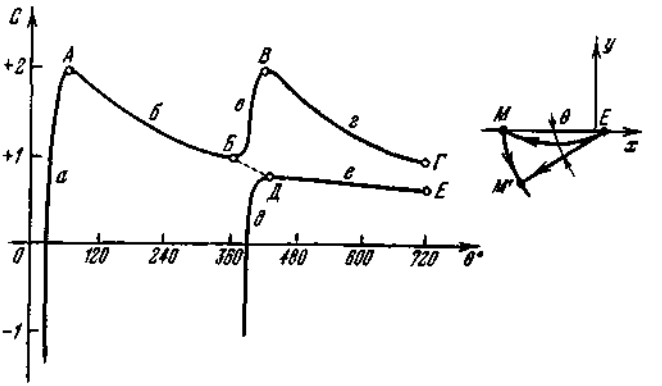


Рис. 9.34. Шесть классов орбит последовательных соударений для системы Земля—Луна (Пирс и Стендиш, 1965 [51]).

буквы $а$, $б$, ..., $е$ на кривой устанавливают соответствие с орбитами, показанными на рис. 9.35,$а$—$е$. Значение функции $C(\theta)$ полностью определяет орбиту этого класса, так как «угол запуска» θ, соответствующая постоянная Якоби и заданные положения E и M определяют орбиту. Заметим, что как начальная, так и конечная скорости бесконечны.

Эти орбиты с последовательными соударениями можно разбить на шесть классов, обозначим их (а), (б), (в), (г), (д) и (е). Можно также разбить их всего на два семейства: в первое включить классы (а), (б), (в) и (г), а во второе — (д) и (е).

Первый класс (а) начинается с прямолинейной орбиты между двумя основными телами при $\theta=0$ и $C=-\infty$. При увеличении θ от нуля приблизительно до 60° постоянная Якоби возрастает (а относительная энергия убывает) примерно до $C=2$. При этих значениях (точка A на рис. 9.34) тип орбит, показанных на рис. 9.35,$а$, заканчивается, и орбиты изменяют свой характер; теперь их можно определить как «забросные» траектории. Динамически это означает, что до встречи с Луной происходит прямолинейное отшествие (в неподвижной системе) от Земли на расстояние, превышающее расстояние до Луны. Затем космический аппарат снижается, Луна за это время «пододвигается» на нужное расстояние, и происходит соударение. На

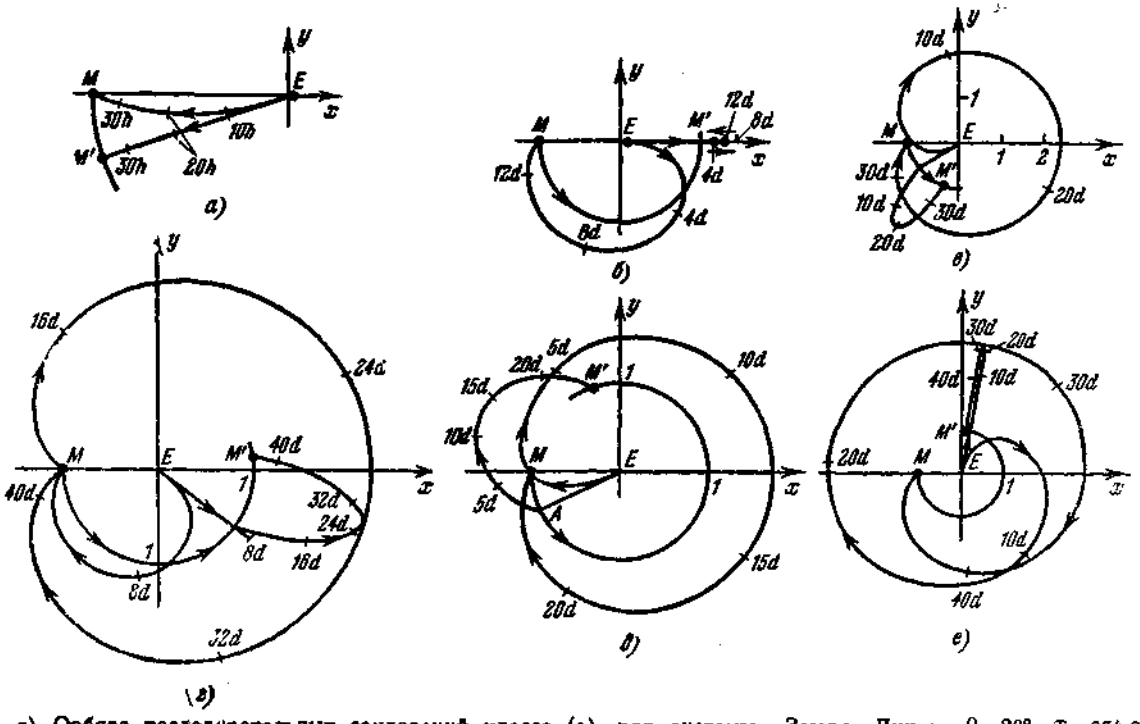


Рис. 9.35. *а*) Орбита последовательных соударений класса (a) для системы Земля—Луна: $\theta=20°$, $T=35^h,85$, $C=-2,98147580$. *б*) Орбита последовательных соударений класса (b) для системы Земля—Луна: $\theta=180°$, $T=13^d,67$, $C=1,43020205$. *в*) Орбита последовательных соударений класса (c) для системы Земля—Луна: $\theta=394°$, $T=32^d,9$, $C=1,5062879$. *г*) Орбита последовательных соударений класса (d) для системы Земля—Луна: $\theta=504°$, $T=41^d,5$, $C=1,5857461$. *д*) Орбита последовательных соударений класса (e) для системы Земля—Луна: $\theta=386°$, $T=23^d,53$, $C=-0,4834287$. *е*) Орбита последовательных соударений класса (f) для системы Земля—Луна: $\theta=620°$, $T=47^d,1$, $C=0,71521946$. Для всех орбит $\mu=1/82,45$ (Пирс и Стендиш, 1965 [51]).

рис. 9.35,*б* показана прямолинейная орбита (вдоль положительного направления оси x), которая поворачивается через 8 суток и встречается с Луной в момент $t=13^d,67$, что составляет приблизительно половину орбитального периода Луны, без существенных возмущений со стороны Луны. Эта орбита обнаруживает сходство с периодической орбитой, которая приближается к Луне, но не проходит через нее, а проходит через Землю, она находится между двумя орбитами, показанными на рис. 9.23,*а*. Постоянная Якоби этой периодической орбиты равна $C=1{,}4340590$, а полупериод ее в безразмерных единицах равен $T/2=3{,}138911$. Орбита с последовательными соударениями, показанная на рис. 9,35,*б*, *не является* периодической, постоянная Якоби для нее равна $C=1{,}43020205$.

Продолжение семейства после точки B на рис. 9.34 связано с сильными возмущениями, вызываемыми Луной. Класс (в) можно назвать классом прямых возмущенных забросных траекторий. Восходящая ветвь орбиты проходит близко перед Луной и позади нее и возмущается ею в прямом направлении (см. рис. 9.35,*в*), так что на обратном пути она встречается с Луной. Окончание этого класса происходит приблизительно при $C=2$, что опять соответствует точке B на рис. 9.34.

Следующий класс (г) содержит орбиты того же основного типа, которые сильно возмущены Луной в прямом направлении. Различие между классами (в) и (г) состоит в их первом столкновении с Луной. Орбиты класса (г) огибают Луну приблизительно на 180° при возвращении из конечной точки прямолинейной орбиты, лежащей за пределами орбиты Луны. После точки Г на рис. 9.34 этот класс прекращается, так как сложный характер траекторий, следующих за этой точкой, не позволяет практически использовать их.

Класс (д) получается из класса (е) посредством «обратного» продолжения. Поэтому класс (е) мы рассмотрим сначала. Заметим, что четыре предыдущих класса, (а) (б), (в) и (г), получаются один из другого при систематическом увеличении угла запуска θ и нахождении соответствующего значения для постоянной Якоби C. Класс (е) получается путем продолжения класса (б), так что летательный аппарат оставляет E по прямолинейной орбите, проходящей настолько далеко от передней стороны Луны, что почти не испытывает возмущений с ее стороны до того, как сталкивается с ней. На рис. 9.35,*е* показана такая орбита с углом запуска $\theta=360+260=620°$. Аппарат обладает достаточной «относительной энергией», или достаточно низким значением C, чтобы оставаться снаружи орбиты Луны в течение более месяца. Попадание в Луну происходит после того, как Луна сделает приблизительно $1\frac{3}{4}$ оборота.

Класс (д) теперь получается при уменьшении значений C, а не по пути ДБ на рис. 9.34. В результате имеем класс попятных возмущенных забросных траекторий; одна из них показана на рис. 9.35,*д*. Летательный аппарат пересекает лунную орбиту вблизи Луны (точка A на рис. 9.35,*д*). Затем движение его сильно возмущается в попятном направлении и он встречается с Луной приблизительно по геоцентрической эллиптической орбите (путь AM'). Во вращающейся системе аппарат проходит путь по дуге EM вблизи Луны и через один оборот встречается с M.

§ 9.8. Приложения к двойным системам

В этом параграфе мы рассмотрим непериодические орбиты при значениях массового параметра, которые применялись в связи с Копенгагенской категорией, а именно, когда $0{,}1<\mu\leqslant 0{,}5$. Непериодические орбиты, соответствующие $\mu\approx 1/82{,}27$, представляют собой лунные траектории, рассмотренные в предыдущем параграфе, а непериодические орбиты Копенгагенской категории находят приложение при изучении двойных звезд.

Проблема классификации расчетных орбит здесь сложней, чем в случае лунных траекторий вследствие иного характера физической задачи. Это объясняется главным образом большей продолжительностью промежутка времени, представляющего интерес для задачи о двойных системах по сравнению с задачей о лунных траекториях. Классов орбит, в том смысле, в каком мы их понимали выше, здесь не существует (даже в той простой форме, какую мы имели, когда рассматривали лунные траектории), однако некоторые существенные выводы относительно изменений условий и различных исключений оказалось возможно сделать в процессе интегрирования орбит в рамках ограниченной задачи.

Орбиты, рассчитанные Абъянкаром, начинались в окрестности наружных коллинеарных точек либрации с начальными скоростями, близкими к тем, которые следуют из линейной теории (см. гл. 5) для $\mu=0{,}1$. Форма орбит согласуется с неустойчивым характером коллинеарных точек либрации, что можно видеть из рис. 9.36. Все шесть траекторий здесь начинаются из точки P (0,01, 0,01) (координаты указаны относительно точки L_1 (1,2597, 0)). Заметим, что основное тело с большей массой (m_1) находится слева от начала координат и, следовательно, точка L_1 лежит снаружи отрезка m_1m_2 и имеет положительную абсциссу. Отклонения скорости от значений, получаемых на основе линеаризованной теории, равны $\mathbf{v}_a$ (0,01, 0,01), $\mathbf{v}_б$ (0,001, 0,001), $\mathbf{v}_в$ (0,0001, 0,0001) $\mathbf{v}_г=-\mathbf{v}_а$, $\mathbf{v}_д=-\mathbf{v}_б$ и $\mathbf{v}_е=-\mathbf{v}_в$.

Например, траектория на рис. 9.36,*б*, помеченная буквой (*д*), имеет следующие начальные условия: $x'(0)=0{,}01$, $y'(0)=0{,}01$, $\Delta\dot{x}(0)=-0{,}001$, $\Delta\dot{y}(0)=-0{,}001$, где x' и y' определяют отклонения от точки L_1, а $\Delta\dot{x}$ и $\Delta\dot{y}$ выражают приращения составляющих скорости по отношению к той, которая соответствует

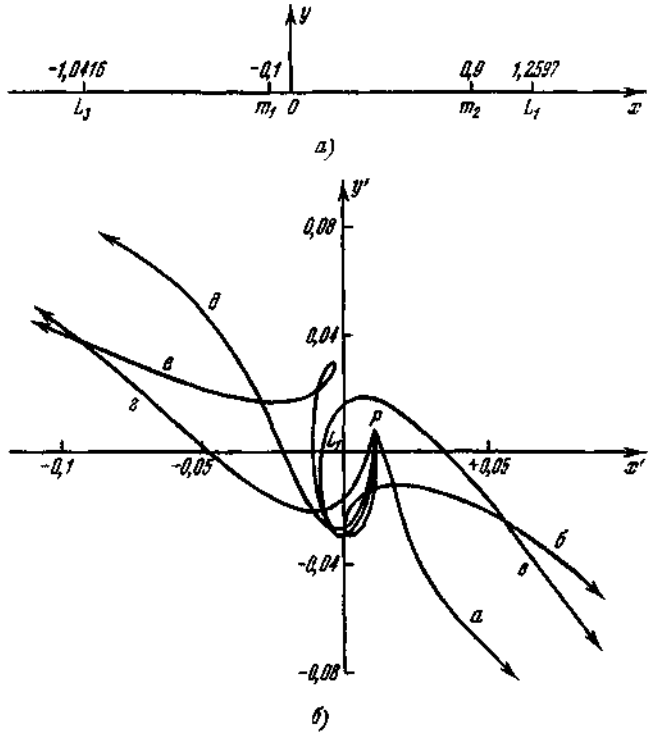


Рис. 9.36. Непериодическое движение в окрестности точки L_1 для $\mu=0{,}1$ (Абъянкар, 1959 [52]).

эллиптическому движению вокруг L_1 на основании линеаризованной теории. Численные результаты, имеющиеся в нашем распоряжении, показывают, что даже тогда, когда вектор начальной скорости выбран согласно линейной теории, третье тело *не остается* в окрестности точки L_1 и выходит из нее всего лишь после одного оборота.

Этот результат справедлив качественно также и для движения в окрестности другой наружной точки либрации (L_3), так что можно заключить, что динамические условия не благоприятствуют скоплению материи вблизи этих точек Лагранжа. По-видимому, сказывается также фокусирующий эффект, в резуль-

тате чего несколько вычисленных орбит образуют кольца вокруг основных тел. Численные результаты показывают, что эти выводы могут быть распространены до $\mu=0{,}5$.

Орбиты с малыми начальными скоростями вдоль положительного направления оси x, начинающиеся из точки L_1, были рассчитаны Койпером для $\mu=0{,}4$ (см. рис. 9.36,*а*). Копал утверждает, что эти орбиты могут образовывать спираль вокруг обоих основных тел, сначала раскручиваясь относительно них, затем закручиваясь.

Исследования Гулда ограничивались начальными скоростями радиального направления (по отношению к одному из основных тел); в качестве начальной точки использовалась точка L_2. Исследования показали, что получаемые орбиты часто образуют кольцо в форме раструба. Это кольцо либо охватывает одно из основных тел, причем движение в этом случае является прямым, либо охватывает оба основных тела, в последнем случае движение является попятным. Было рассчитано большое число орбит для значений массового параметра, лежащих в пределах $0{,}167<\mu<0{,}5$. Привести их здесь, естественно, не представляется возможным, читателям, интересующимся этим вопросом, рекомендуем обратиться к списку литературы к этой главе.

Копал рассчитал орбиты, начинающиеся из коллинеарной точки либрации L_2 со скоростями, отличными от нуля, причем векторы начальных скоростей *не были* направлены вдоль оси x; массовый параметр изменялся в пределах $0{,}17<\mu<0{,}5$. Бóльшая часть вычисленных траекторий проходила через одно из основных тел.

§ 9.9. Дополнительные периодические орбиты

В этом параграфе рассматриваются три основных вопроса. В пункте 9.9.1 приводится пример аналитического продолжения эллиптической орбиты от $\mu=0$ к $\mu\neq 0$. Второй вопрос (пункт 9.9.2) связан с асимптотически-периодическими орбитами вблизи коллинеарных точек либрации для определенных частных значений массового параметра. В пункте 9.9.3 изучаются семейства симметричных и асимметричных периодических орбит с отношением соизмеримости 2 : 1 в системе Солнце — Юпитер. Для сравнения приводятся аналогичные результаты, полученные для системы Земля — Луна.

9.9.1. Аналитические продолжения периодических орбит второго рода. Бóльшая часть орбит, рассмотренных в пункте 9.5.4, являются (по терминологии Пуанкаре) орбитами второго рода. Интересно установить предел аналитического продолжения для таких орбит, когда массовый параметр увеличивается, начиная с $\mu=0$. Обратимся к примеру, рассмотренному

нами в пункте 8.5.4 (см. рис. 8.10). При $\mu=0$ там использовались следующие численные значения: $k=3$, $l=1$, $a=0{,}480749844$, $e=0{,}3$, $C=3{,}4029327$, $x(0)=a(1+e)=0{,}624974851$. На рис. 9.37 снова приводится периодическая орбита, соответствующая этим данным. Этот рисунок идентичен с рис. 8.10 и повторяется здесь для того, чтобы облегчить задачу сравнения его с тремя следующими рисунками, полученными из орбиты Ноулса, приведенной на рис. 9.37.

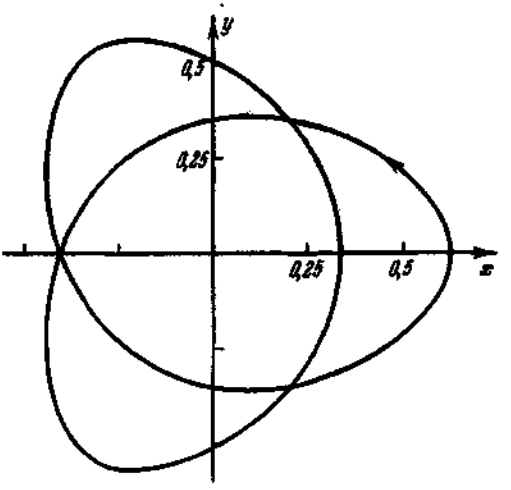


Рис. 9.37. Орбита из задачи двух тел с соизмеримостью 1/3.

Продолжение орбиты, показанной на рис. 9.37 для $\mu=0$, в пространстве параметров, определяющих орбиту, возможно несколькими различными способами. Рис. 9.39, 9.39, 9.40 и 9.41 показывают четыре возможных способа. Постоянство $\dot{y}(0)$ дает начало семейству, показанному на рис. 9.38. Орбиты пересекают ось x, и, как можно видеть, точка $x(0)$, а фактически вся орбита, с ростом μ перемещается вправо. Другой вид продолжения орбиты с $\mu=0$ изображен на рис. 9.39. Здесь $x(0)=\text{const}$, т. е. орбиты семейства начинаются из одной и той же точки на оси x, где начинается образующая орбита ($\mu=0$). Общая тенденция к сдвигу вправо здесь снова наблюдается, но кроме того, можно заметить уменьшение разделения петель. Когда $\mu=0$, имеем $x(0)=a(1+e)$, $x(T/2)=a(1-e)$, и следовательно, разделяющее расстояние равно $2ae=0{,}288449931$. Для $\mu=0{,}1$ это расстояние уменьшается приблизительно до 0,192, а для $\mu=0{,}2$ становится равным 0,036, так что орбита имеет тенденцию превратиться в простую периодическую орбиту.

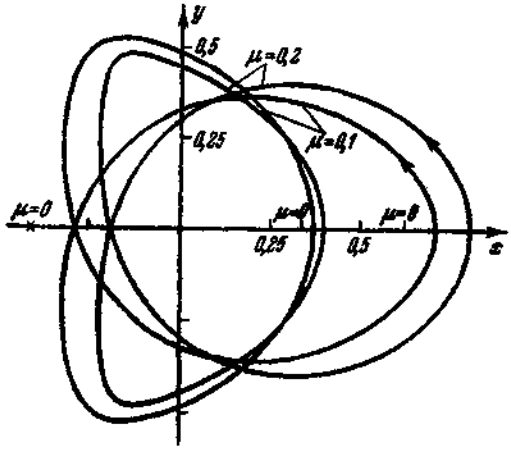


Рис. 9.38. Продолжение орбиты $\mu=0$, соизмеримость 1/3 с $\dot{y}(0)=\text{const}$.

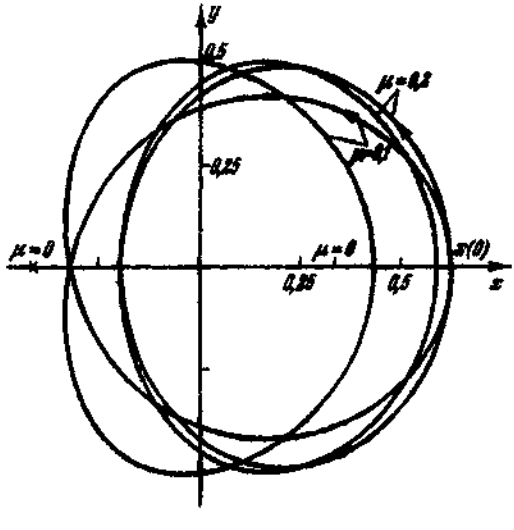


Рис. 9.39. Продолжение орбиты $\mu=0$, соизмеримость 1/3 с $x(0)=\text{const}$.

Третий способ продолжения представлен на рис. 9.40. Здесь $\tilde{C}=C-\mu(1-\mu)$ при развитии семейства сохраняется постоянным. Заметим, что $x(0)$ в этом случае не является монотонной функцией μ, в то время как $x(T/2)$ есть монотонная функция.

Другое возможное продолженне мы имеем при $C=\text{const}$ (см. рис. 9.41). На рнсунке показаны лишь орбиты для $\mu=0$ и $\mu=0{,}1$, так как вскоре после $\mu=0{,}1$ появляются дополнительные петли н характер орбит меняется существенным образом.

Перечисленные выше формы продолжеиий представляют несомненный интерес, в особенностн если иметь в виду то, что говорилось в пунктах 8.6.1 и 8.6.2. Предельные значения μ, при которых заданная орбита в задаче двух тел может быть продолжена (при сохранении различных параметров постояннымн), в общем случае неизвестны. Рассмотренный выше пример показывает, что если $\mu>\mu_к\approx 0{,}24$, то семейство, по-видимому, имеет точку окончання. Это означает, что одна точка поверхности $\mu=\mu(C, e)$ приближенно определяется следующими значениями: $\mu_к\approx 0{,}24$, $C\approx 3{,}4$, $e=0{,}3$.

9.9.2. Асимптотически-периодические орбиты вблизи коллинеарных точек. Вторая группа симметричных периодическнх орбит, рассматриваемых в этом параграфе, обладает тем свойством, что период орбнт равен бесконечности и все орбиты являются асимптотическими по отношению к одной нз коллинеарных точек либрации. Некоторые из этих орбит, вычисленные Депри и Анраром [$C_{De}=\bar{C}=C-\mu(1-\mu)$], показаны на рис. 9.42, *а*, *б* и *в*. Орбиты образованы с действительными показателями, полученными из характеристическнх уравиений в коллинеарных точках либрации (см. гл. 5). На рис. 9.42*а* показаны две орбиты, которые являются асимптотическими для точки L_2. Исключительная близость значения массового параметра ($\mu=0{,}012146$) второй орбиты к значению, соответствующему системе Земля — Луна, указывает на возможность расположеиия в точке L_2 межпланетной космической станции, откуда посредством управления на расстоянии тела смогут оставлять точку L_2 и возвращаться к ней. Эти же соображения можно высказать и в отношении второй орбиты на рис. 9.42*в*, так как $\mu=0{,}012145$.

Две орбиты на рис. 9.42*б* обнаруживают симметрию в определенном смысле. Можно обнаружить известное сходство этих орбит с орбитами Стрёмгрена класса (f) (рис. 9.5*в*) и заметить, что соударение с основным телом замеияется асимптотическим приближением к коллинеарной точке либрацни.

Первая орбита на рис. 9.42*в* представляет собой одну из небольшого числа известных орбит, имеющих форму восьмерки, которые существуют в ограниченной задаче.

9.9.3. Симметричные и асимметричные периодические орбиты с сонзмеримостью 2 : 1. Эти орбиты, попятные в синодической системе, являются синодически прямыми и охватывают оба осиовных тела, поэтому они относятся к орбитам класса (1) Копенгагенской категории. Месседж получил такие орбиты из

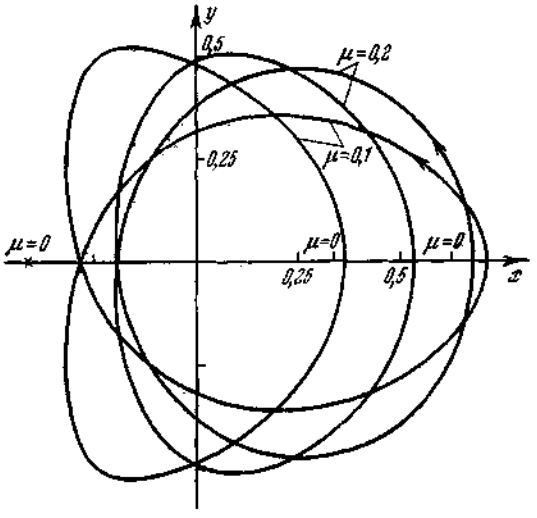


Рис. 9.40. Продолжение орбиты $\mu=0$, сонзмернмость 1/3 с $\overline{C}=\text{const}$.

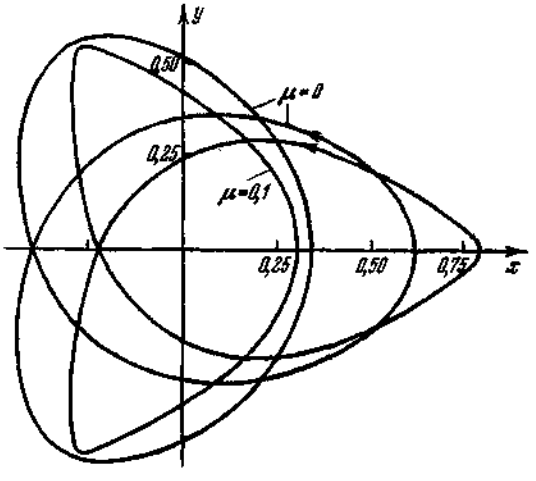


Рис. 9.41. Продолжение орбиты $\mu=0$, сонзмернмость 1/3 с $C=\text{const}$.

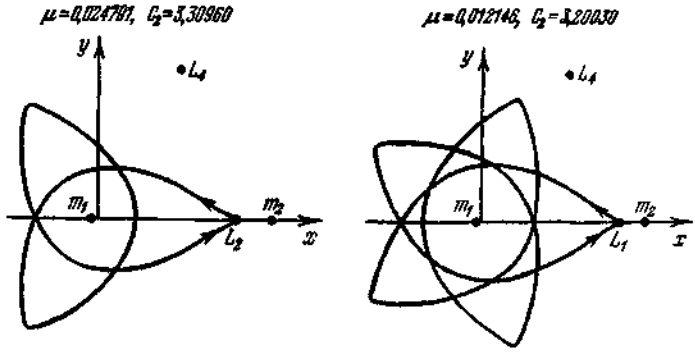


Рис. 9.42*а*. Асимптотически-периодические орбиты для точки L_2 (Депри и Хенрард, 1965 [54]).

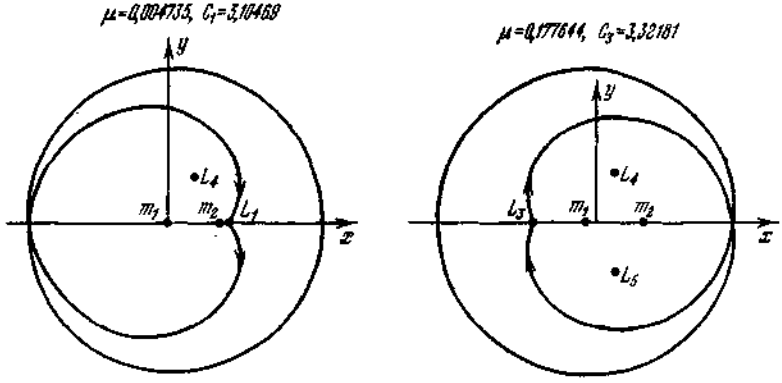


Рис. 9.42*б*. Асимптотически-периодические орбиты для точек L_1 и L_3 (Депри и Хенрард, 1965 [54]).

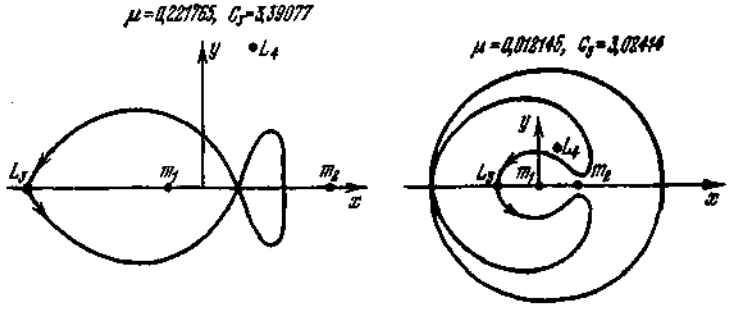


Рис. 9.42*в*. Асимптотически-периодические орбиты для точки L_3 (Депри и Хенрард, 1965 [54]).

эллиптических орбит с соизмеримостью, близкой к 2 : 1, изменяя эксцентриситет образующих эллипсов. Близкую соизмеримость можно измерять величиной δ, определяемой из соотношения

$$(k+1)/k = n'/n_0 + \delta/k,$$

где $k \neq 0$ есть положительное целое число, n' и n_0 — средние движения соответственно Юпитера (т. е. синодической системы) и третьего тела (при отсутствии возмущений) и δ есть мера соизмеримости. При $k=1$, $n'=1$ и для невозмущенной орбиты имеем

$$\delta = \frac{2(n_0 - 1/2)}{n_0}.$$

На рис. 9.43 показаны пять орбит из семейства асимметричных периодических орбит, численные данные к которым

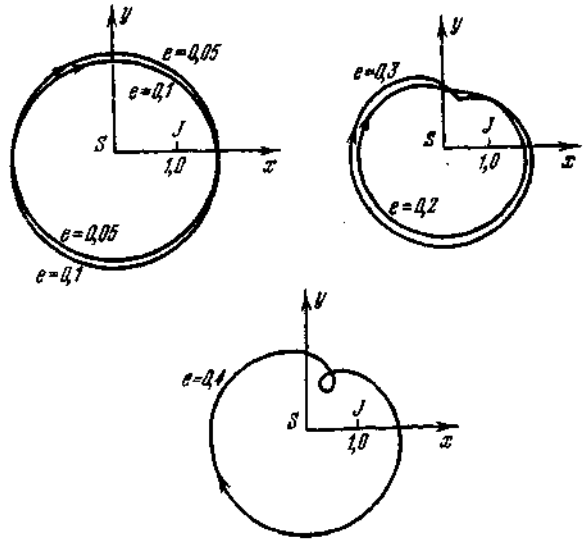


Рис. 9.43. Асимметричные периодические орбиты с соизмеримостью 2 : 1 для $\mu = 0{,}000954016$ (Месседж, 1959 [55]).

приведены в табл. XIV. В этой таблице e обозначает эксцентриситет образующего эллипса, n — среднее движение действительной (возмущенной) орбиты, δ — меру соизмеримости и C — постоянную Якоби. Заметим, что $C = -C_{Me} + \mu(1-\mu)$. Образование точки заострения при $e \approx 0{,}3$ означает, что в перицентре или вблизи этой точки прямая сидерическая скорость становится равной (прямой) скорости системы и, следовательно, относительная скорость обращается в нуль. Прямая ско-

рость тела меньше, чем локальная скорость системы на других участках орбиты, следовательно, относительная скорость отрицательна, и орбита во вращающейся системе является попятной (что уже отмечалось нами в пункте 8.5.1). Вычисления производились при $\mu=0{,}000954016$ и, стало быть, относились к системе Солнце — Юпитер. Семейство асимметричных периодических орбит, приведенных на рис. 9.43, относится к орбитам Стрёмгрена класса (I), но происхождение их иное: они образованы посредством возмущения класса орбит для задачи двух тел. Иными словами, каждая орбита этого семейства получается посредством аналитического продолжения из орбиты для

Таблица XIV. Асимметричные периодические орбиты Месседжа с соизмеримостью 2:1 для $\mu=0{,}000954016$

e	$n-1/2$	δ	C
0,05	0,001123	0,00450	3,14882
0,1	0,001077	0,00432	3,13938
0,2	0,000917	0,00368	3,10113
0,3	0,000671	0,00268	3,03574
0,4	0,000373	0,00149	2,94089

задачи двух тел с $e\neq 0$. Каждую орбиту можно считать генератором дальнейших классов орбит Пуанкаре второго рода, которые могут быть получены для более высоких значений μ. Ничего нет удивительного в том, что такие асимметричные се-

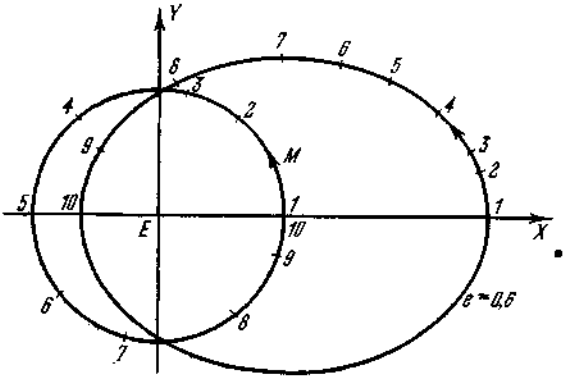


Рис. 9.44. Симметричная периодическая лунная орбита с соизмеримостью 2 : 1 в синодической системе координат для $\mu=1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

мейства можно встретить при других значениях μ, в особенности при образующих орбитах с малым эксцентриситетом.

Помимо этих орбит Месседж нашел еще два (симметричных) семейства для того же значения μ. Здесь рассматривается только одна орбита одного из этих двух классов, имеющая близкое отношение к периодическим лунным орбитам класса (1). На рис. 9.44 показаны (прямая круговая) орбита Луны, а также прямая эллиптическая орбита третьего тела в неподвижной системе координат. Эксцентриситет ее равен приблизительно 0,6, массовый параметр $\mu=0{,}0121551$, постоянная Якоби $C=2{,}59070$ и отношение соизмеримости 2 : 1, что можно видеть из отметок времени на обеих орбитах. На рис. 9.45 показана та же орбита в синодической системе координат. Ее мы

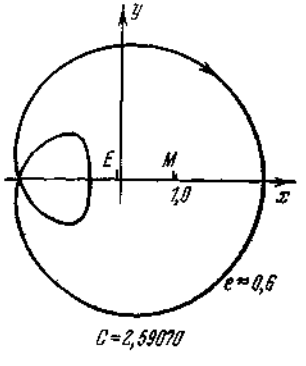


Рис. 9.45. Симметричная периодическая лунная орбита с соизмеримостью 2 : 1 в синодической системе координат для $\mu=1/82{,}27$ (Брукке, 1962 [4]).

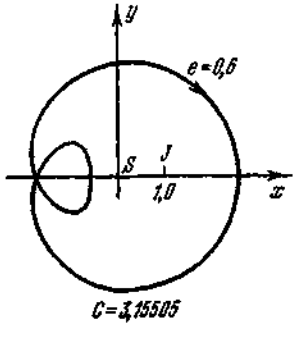


Рис. 9.46. Симметричная периодическая орбита с соизмеримостью 2 : 1 для $\mu=0{,}000954016$ (Месседж, 1959 [55]).

сравним с орбитой, изображенной на рис. 9.46, которая отличается только значением массового параметра ($\mu=0{,}000954016$) и постоянной Якоби ($C=3{,}15505$). Этот пример дает нам дополнительную информацию относительно поверхности $\mu(C, e)$, о которой говорилось в конце пункта 9.9.1.

§ 9.10. Устойчивость

Подробное изложение численных методов получения периодических орбит, а также исследования их устойчивости выходит за рамки данной книги. Мы остановимся здесь только на двух вопросах: численном интегрировании и дифференциальной коррекции. Некоторые работы по этим вопросам указаны в следующем параграфе. Ниже мы изложим два новых метода получения периодических орбит и параметров их устойчивости.

Обычные методы исследования устойчивости периодических орбит были рассмотрены нами в § 8.8. Излагаемые здесь методы позволяют сразу получить информацию относительно линейной устойчивости. Вычисление характеристических показателей посредством интегрирования уравнений в вариациях (первый метод) и применение уравнения нормального смещения, полученного Дарвином (второй метод), мы здесь подробно не рассматриваем. Напомним читателям, что общее исследование устойчивости мы провели в гл. 5. Ниже мы опишем метод Хуанга, предложенный им в 1963 г., и остановимся на работе Эно, вышедшей в 1965 г. Читатель легко установит сходство между этими методами.

А. Рассмотрим систему начальных условий

$$x(0)=x_0\neq 0, \quad y(0)=y_0=0,$$
$$\dot{x}(0)=\dot{x}_0=0, \quad \dot{y}(0)=\dot{y}_0\neq 0.$$

Простая периодическая орбита с периодом T обладает тем свойством, что при $t=T/2$ она снова пересекает ось x под прямым углом: $y(T/2)=0$, $\dot{x}(T/2)=0$. Хуанг предложил следующий способ нахождения периодических орбит. Пусть $\dot{y}_0$ будет значением $\dot{y}$, близким к тому, которое дает периодическую орбиту с заданным значением x_0. Рассмотрим теперь простую периодическую орбиту, которая по истечении периода T возвращается в точку $P_0(x_0, 0)$. Если $\dot{y}_0$ не является нужной величиной начальной скорости для того, чтобы по истечении приблизительно одного периода T получить периодическую орбиту, то частица не возвратится в точку P_0, а пересечет ось x в точке P_1 ($x_1\neq x_0$, 0). Промежуток времени T_1 между двумя последовательными пересечениями не является периодом: $T_1\neq T$. Рассмотрим теперь последовательные значения, соответствующие повторяющимся циклам:

$$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots.$$

В качестве меры отклонения орбиты от периодической предлагается следующая разность:

$$\Delta_{n+1,n}=T_{n+1}-T_n.$$

Предлагаемый метод получения периодической орбиты состоит в нахождении экспериментальным путем точек на кривой

$$T_2-T_1=\Delta_{2,1}=f(\dot{y}_0)$$

и нахождении затем корня уравнения

$$f(\dot{y}_0)=0.$$

Например, начальное условие $x_0 = -0{,}43215$ в сочетании с

$$\dot{y}_0 = \begin{cases} 2{,}2645059, \\ 2{,}2645060, \\ 2{,}2645061 \end{cases}$$

дают (попятные) орбиты со следующими интервалами времени:

$$\Delta_{2,1} = \begin{cases} 15 \cdot 10^{-6}, \\ < 0{,}5 \cdot 10^{-6}, \\ -17 \cdot 10^{-6}. \end{cases}$$

Соответствующие значения T_1 равны

$$T_1 = \begin{cases} 12{,}726637, \\ 12{,}726642, \\ 12{,}726648. \end{cases}$$

В этом примере (данном Хуангом) применяется система координат, аналогичная нашей стандартной системе, с той лишь разницей, что основные тела здесь поменялись местами. Массовый параметр равен $\mu = 0{,}01215$.

Хуанг считает, что изучение последовательности

$$\Delta_{2,1},\ \Delta_{3,2},\ \Delta_{4,3},\ \ldots,\ \Delta_{n+1,n},\ \ldots$$

может дать необходимую информацию относительно устойчивости периодической орбиты. Согласно его определению, периодическая орбита неустойчива тогда, когда $|\Delta_{n+1,n}|$ возрастает с увеличением n для орбит, близких к периодической, и устойчива тогда, когда элементы последовательности, вычисленной для соседних орбит, с увеличением n убывают или колеблются, не увеличивая своих амплитуд.

Например, в предыдущем примере последовательность, полученная для устойчивой периодической орбиты, сама ($\dot{y}_0 = 2{,}2645060$) содержит следующие значения $\Delta_{n+1,n}$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^6 \cdot \Delta_{n+1,n}$	$<0{,}5$	$+2$	-3	-1	$+4$	-3	$+2$	0	-3	-1

Вычисляя последовательность для непериодической орбиты с начальными условиями, близкими к периодической орбите, получаем следующие данные:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^6 \cdot \Delta_{n+1,n}$	-79	$+82$	-6	-77	$+87$	-13	-73	$+89$	-22	-66

Эта таблица может быть получена при начальных условиях $x_0 = -0{,}43215$, $\dot{y}_0 = 2{,}2645065$. Это значение $\dot{y}_0$ отличается от того значения, которое дает периодическую орбиту, на $\Delta\dot{y}_0 = 5 \cdot 10^{-7}$. При увеличении $\Delta\dot{y}_0$, скажем, до $15 \cdot 10^{-7}$, абсолютные значения элементов последовательности возрастают в среднем до $200 \cdot 10^{-6}$. Сама последовательность, принадлежащая устойчивой орбите, во всех случаях состоит из элементов с приблизительно постоянным абсолютным значением.

Определение устойчивости по Хуангу и его метод расчета периодических орбит были описаны в пункте 9.5.4 и проиллюстрированы на рис. 9.26; они подтвердили ожидания. Его прямые орбиты неустойчивы, а попятные орбиты устойчивы.

Б. Эно, вместо того чтобы рассматривать полную траекторию в фазовом пространстве, изучал пересечения орбит с поверхностью сечения Пуанкаре. Напомним, что интеграл Якоби при постоянном значении C дает значение $\dot{y}_0$, если x_0, y_0 и $\dot{x}_0$ заданы. Поэтому мы исследуем траекторию в трехмерном пространстве $xy\dot{x}$, точнее говоря, рассмотрим пересечения орбиты с плоскостью $x\dot{x}$ ($y=0$), когда $\dot{y}>0$, при постоянном значении C.

Начальными условиями будут: $x_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 \neq 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 > 0$. Заметим, что условие $\dot{x}_0 = 0$ не требуется. При заданном значении C первое пересечение орбиты с плоскостью $x\dot{x}$ при $\dot{y}>0$ происходит в начале движения. Следующее пересечение простой периодической орбиты с осью x происходит по истечении времени $T/2$. При $t=T$ снова происходит пересечение, при котором $x_1 = \dot{x}_1 = y_1 = 0$ и $\dot{y}_1 > 0$. Если $x_0 = x_1$ и $\dot{x}_0 = \dot{x}_1$, то мы имеем периодическую орбиту, так как $y_0 = y_1 = 0$ и $\dot{y}_0 = \dot{y}_1 > 0$, поскольку постоянная Якоби сохраняется фиксированной. В общем случае

$$x_1 = f(x_0, \dot{x}_0, C), \quad \dot{x}_1 = g(x_0, \dot{x}_0, C)$$

или, иными словами, происходит отображение плоскости $x\dot{x}$ на самое себя. Точка x_0, $\dot{x}_0$ переходит в точку x_1, $\dot{x}_1$. Неподвижные точки такого преобразования образуют периодические орбиты, для которых

$$x_0 = f(x_0, \dot{x}_0, C), \quad \dot{x}_0 = g(x_0, \dot{x}_0, C).$$

Таким образом, для того чтобы получить периодические орбиты, мы находим неподвижные точки указанного выше преобразования посредством численного интегрирования орбит и регистрируем только координаты x_1 и $\dot{x}_1$ точек пересечения орбиты с плоскостью $y=0$.

Орбиты, симметричные относительно оси x, имеют следующие начальные условия: $x_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 \neq 0$, и следовательно, поиск инвариантных точек представляет собой од-

номерный процесс вдоль оси x, опять-таки при фиксированном значении C. В этой главе результаты представлены в форме кривых $C=C(x_0)$. Эно нашел 22 семейства периодических орбит для Копенгагенской задачи, из которых 7 новых, и представил соответствующие характеристические кривые $C=C(x_0)$.

Переходя теперь к вопросу об устойчивости, ознакомимся сначала с фундаментальной идеей Дарвина, которая привела его к уравнению нормального смещения (см. § 8.8). Согласно этой идеи устойчивость периодических орбит можно исследовать, изучая орбиты, близкие к периодическим, с тем же значением постоянной Якоби. Совершенно аналогично теперь мы будем изучать поведение в окрестности инвариантной точки указанного выше преобразования. Иначе говоря, если преобразование, при котором сохраняется площадь, в неподвижной точке устойчиво, то устойчива и периодическая орбита, соответствующая этой неподвижной точке.

Так как рассматриваемое преобразование определяется функциями f и g, то для преобразования, при котором сохраняется площадь, мы имеем условие

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x_0, \dot{x}_0)}=1. \tag{28}$$

Кроме того, из свойства симметрии, рассмотренного подробно в гл. 8, можно получить две следующие системы уравнений, описывающие преобразование:

$$x_1=f(x_0, \dot{x}_0, C), \quad \dot{x}_1=g(x_0, \dot{x}_0, C) \tag{29}$$

$$x_0=f(x_1, -\dot{x}_1, C), \quad -\dot{x}_0=g(x_1, -\dot{x}_1, C). \tag{30}$$

Вторая система получается из первой при следующей замене переменных:

$$x_1 \to x_0, \quad \dot{x}_1 \to -\dot{x}_0, \quad x_0 \to x_1, \quad \dot{x}_0 \to -\dot{x}_1.$$

Рассматривая один только изоэнергетические изменения, получаем для первой системы

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= a\Delta x_0 + b\Delta \dot{x}_0, \\ \Delta \dot{x}_1 &= c\Delta x_0 + d\Delta \dot{x}_0, \end{aligned} \tag{31}$$

где a, b, c и d — соответствующие частные производные функций f и g, якобиан которых благодаря свойству преобразования сохранять площадь равен единице. Таким образом, согласно уравнению (28) имеем

$$ad-bc=1. \tag{32}$$

Собственные значения преобразования можно вычислить из определителя

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{33}$$

или из характеристического уравнения

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 = 0, \tag{34}$$

где λ связано с характеристическим показателем Пуанкаре α формулой

$$\lambda = e^{\alpha T}.$$

Инвариантная точка неустойчива тогда, когда

$$|a+d| > 2,$$

так как в этом случае два корня вещественны и

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Следовательно, один характеристический показатель всегда положителен.

Два корня являются комплексно сопряженными, если

$$|a+d| < 2.$$

В этом случае

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$$

и оба характеристических показателя являются чисто мнимыми. Этот случай соответствует устойчивости в линейном смысле.

Для симметричной простой периодической орбиты с помощью условия симметрии из уравнений (30) получаем

$$\Delta x_0 = a\,\Delta x_1 - b\,\Delta \dot{x}_1, \quad \Delta \dot{x}_0 = -c\,\Delta x_1 + d\,\Delta \dot{x}_1. \tag{35}$$

Сравнивая эту систему уравнений с инверсией уравнений (31),

$$\Delta x_0 = d\,\Delta x_1 - b\,\Delta \dot{x}_1, \quad \Delta \dot{x}_0 = -c\,\Delta x_1 + a\,\Delta \dot{x}_1, \tag{36}$$

находим, что $a = d$.

Условие устойчивости для симметричных простых периодических орбит поэтому принимает следующий вид: $|a| < 1$.

Величину a можно вычислить из уравнения (31). Изменив начальные условия периодической орбиты на $\Delta x_0 \neq 0$ и $\Delta \dot{x}_0 = 0$, будем иметь

$$a = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}.$$

Вычисление других коэффициентов, т. е. b, c и d, для симметричных простых периодических орбит служит только целям контроля.

Хенон вычислил характеристики линейной устойчивости семейств периодических орбит Копенгагенской категории. Некоторые из основных выводов его мы приводим ниже.

1) Классы Копенгагенской задачи можно разбить на две группы в зависимости от поведения линейной устойчивости. В первую группу мы включим классы (f), (g), (l) и (m), и следовательно, она будет состоять из прямых и попятных орбит спутников и орбит верхних планет. Ко второй группе мы отнесем все остальные классы. Устойчивые орбиты в заметном количестве содержатся только в первой группе, орбиты второй группы «почти все» неустойчивы.

2) Построив графики функции $a=a(C)$, можно установить, что только первая группа обнаруживает значения dC/da, существенно отличающиеся от нуля в области устойчивости $-1<a<1$.

3) Орбиты соударения не обнаруживают специального поведения, они найдены на неустойчивых участках кривых $a(C)$.

4) В качестве примера на рис. 9.47 представлен график функции $a(C)$, полученный Эно численным методом для класса (l) Копенгагенской категории. Эти синодически попятные орбиты являются прямыми в неподвижной системе (см. пункт 9.4.6). Значение постоянной Якоби, соответствующей

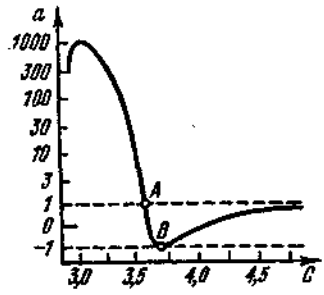


Рис. 9.47. Кривая устойчивости для класса (l) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Хенон, 1965 [21]).

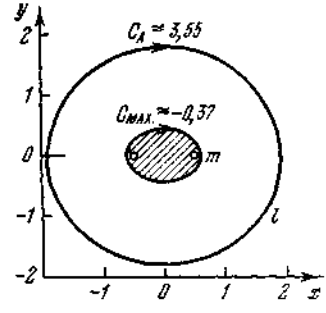


Рис. 9.48. Области устойчивости для орбит классов (l) и (m) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Хенон, 1965 [21]).

точке A, равно $C_A=3{,}5526$, а соответствующей точке B, равно $C_B=3{,}678$. Поэтому орбиты этого класса устойчивы тогда, когда $C>C_A$.

5) На рис. 9.48 изображены критические орбиты классов (l) и (m), указывающие соответствующие области устойчивости. Орбиты, принадлежащие классу (m) (см. пункт 9.4.7), для которых $C<C_{max}\approx-0{,}37$, все устойчивы, если они

расположены снаружи заштрихованной площади. Орбиты, принадлежащие классу (l) и находящиеся снаружи кривой, построенной для $C=C_A$, также все устойчивы.

6) На рис. 9.49 представлены соответствующие результаты для классов (f) и (g) Копенгагенской категории. Те орбиты класса (g), для которых $C>3{,}99$, все устойчивы, при условии, что они принадлежат фазе 1 (см. рис. 9.6а). Эти прямые орбиты вокруг m_1 рассматривались нами в пункте 9.4.4. Начальная орбита этой группы, для которой $C=3{,}99$, на рис. 9.49 помечена буквой g. На рис. 9.49 содержатся также данные об устойчивости класса (f), они выражены кривыми f_1, f_2, f_3. Орбиты в незаштрихованной площади являются устойчивыми. Критические значения постоянной Якоби равны $C_1=1{,}4675$, $C_2=1{,}3094$, $C_3=1{,}2056$. Следовательно, попятные орбиты, принадлежащие классу (f) в Копенгагенской категории, для которых $C>C_1=1{,}4675$, все устойчивы. При уменьшении C развивается кольцо неустойчивости между C_1 и C_2, за ним идет кольцо устойчивости между C_2 и C_3. Орбиты класса (f), следующие за орбитой с $C=C_3$, не обнаруживают монотонного убывания значений C, так как эффекты задачи двух тел более уже не доминируют. Остальные орбиты «почти все» неустойчивы.

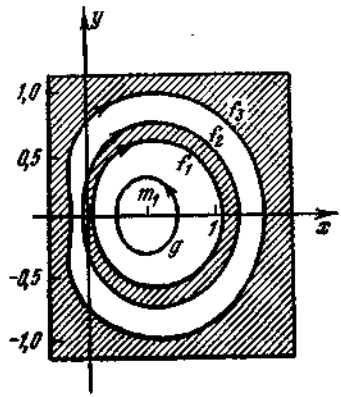


Рис. 9.49. Области устойчивости для орбит классов (f) и (g) Копенгагенской категории, $\mu=1/2$ (Хенон, 1965 [21]).

Заметим, что показатель устойчивости c, введенный Дарвином, связан с параметром a Эно соотношением $a=\cos \pi c$.

§ 9.11. Замечания

Литературу по численным методам исследования можно разбить на категории в соответствии с классификацией результатов. Основные результаты, относящиеся к Копенгагенской категории (§ 9.4), опубликованы в трудах Копенгагенской обсерватории (Мультон, «Периодические орбиты» [1]) и в статьях Дарвина о периодических орбитах [2]. Вторая категория о периодических лунных орбитах (§ 9.5) основывается на работах В. А. Егорова [3] и Брукке [4]. В разделе, посвященном орбитам вокруг треугольных точек равновесия (§ 9.6), в качестве основного источника использованы статьи Рабе [5, 5а, 6]. Основной литературой к § 9.7, посвященному лунным

траекториям, могут служить работы В. А. Егорова [3] и К. Эрике [7]. И наконец, § 9.8, в котором изложены приложения к двойным системам, основывается на результатах Койпера [8] и Копала [9].

Помимо указанных выше основных работ можно было бы назвать еще несколько сот различных статей и докладов; на некоторые из них мы здесь ссылаемся.

Материал, изложенный в § 9.1, основывается главным образом на результатах двух ученых, проводивших свои исследования численными методами. Автор счел нужным это специально подчеркнуть, так как, к сожалению, существуют противники численных методов в динамнке. Однако Карл Ф. Зундман, представивший свою лекцию Собранию Астрономического Общества, проходившему в 1930 г. в Будапеште, и Винтиер [10] — два видных спецналнста в области небесной механики — придавали большое значение применению численных методов. В этом параграфе читатель сможет познакомиться также с первоначальной идеей Биркгофа [11] и взглядами его на цели диамики.

Полезно познакомнться с работамн Внитнера [10, стр. 324], в которых он, в частностн, касается вопросов терминологин и обсуждает такие термины, как семейство, род орбит, группа и т. д.

В § 9.2 приводится значение массового параметра для системы Земля — Луна, которое, по-видимому, является наиболее точным (см. работу [11a]). К счастью, численное значение μ не является критическим, за исключением, быть может, весьма спецнальных и иеустойчивых орбит, на которых мы остановимся позже. Исследователи были, по-видимому, свободны в выборе своих значений μ, Тюринг [12], например, принимал $\mu = 0{,}0123456790$. Согласно Брауэру и Клеменсу [13] массовый параметр для системы Солнце — Юпитер равен

$$\mu = \frac{1}{1048{,}39 \pm 0{,}03},$$

т. е. лежит в пределах от 0,0009538 до 0,0009539.

В § 9.2 приводится табл. I, в которой собраны данные проведенных численных исследований. Первые данные Стрёмгрена взяты из его первой опубликованной статьи по этой теме (1913). Затем следуют данные из статьи последнего (1939) года этой серии. Последние данные относятся к 1964 г. — дате выхода в свет статьи Бартлетта [14] Копенгагенской серии. В период между 1939 и 1964 г. никаких работ по ограниченной задаче Копенгагеиская обсерватория не опубликовывала. Заметим, что во второй статье Бартлетта [15] Копенгагенской

серии ограниченная задача рассматривается при произвольном значении массового параметра.

В § 9.3 интеграл Якоби (уравнение (7)) приводится в первоначальной форме Дарвина [2]. (См. Scientific Papers, т. 4, стр. 4, уравнения (1) и (2); в действительности там имеются два уравнения за номером 1, и сноска относится к первому из них.) Уравнение (9) приводится в Выпуске № 100 Копенгагенской обсерватории [16] под номером (5), а уравнение (13) содержится в работе Брукке [4, стр. 23], где оно имеет номер (10). Определение Шарлье дается в его книге «Die Mechanik des Himmels» [17, т. 2, стр. 113].

Вследствие неправильных толкований, встречающихся иногда в литературе, в данном параграфе рассмотрен в общем довольно-таки тривиальный вопрос о значении постоянных Якоби при различных значениях μ. Винтнер [10, стр. 359] полагал $C_{1/2}=C_{10/11}$ и получил формулу

$$C_K=4C_D/11-40/121\approx 4C_D/11-1/3,$$

совпадающую с нашей формулой (23) § 9.3; у Винтнера она стоит под номером (26). Он критически относился к результату Фишера-Петерсена [18], который полагал $C_{1/2}=C_{10/11}$ и получил формулу

$$C_K=\frac{4}{11}C_D-1.$$

Ее можно вывести из уравнения (24) § 9.3. Эта формула соответствует формуле Винтнера (27), причем обе они в общем ошибочны, результат Фишера-Петерсена верен лишь для треугольных точек либрации.

Материал, изложенный в § 9.4, основывается на 39 докладах, подготовленных и опубликованных Копенгагенской обсерваторией. Имеется семь коротких статей, представляющих наибольший интерес: одна статья Фишера-Петерсена [18], три статьи Стрёмгрена [16, 19, 20], одна статья Бартлетта [14] и две статьи Эно [21].

Помимо этих коротких докладов, среди публикаций Копенгагенской обсерватории имеется целый ряд работ по ограниченной задаче [22]. Существуют еще три статьи по задаче Барро — Тиле (рассмотренной нами в гл. 3), которые не вошли в Труды Копенгагенской обсерватории. Они относятся к орбитам класса (а) Копенгагенской категории [23].

Основные работы, относящиеся к классам орбит, введенным в § 9.4, указаны в табл. XV. Доклады Копенгагенской обсерватории выходили под именами Стрёмгрена, Барро, Тиле, Мюл-

лера, Фишера-Петерсена, Лауса, Линдоу, Педерсена, Сэмтера, Винтнера, Розенталя, Кристианссона и Бартлетта.

В последнем кратком докладе Копенгагенской обсерватории — докладе Бартлетта [14] — приводятся начальные условия более чем для 800 периодических орбит почти всех классов, причем автор применяет регуляризованную систему Тиле—Барро. Кроме того, он открыл новые классы. В некоторых

Таблица XV. Публикации по Копенгагенской категории

№№ пунктов	Класс	№№ выпусков Копенгагенской обсерватории
9.4.1	(a)	14, 63
9.4.2	(c)	18, 60, 99
9.4.3	(f)	23, 99
9.4.4	(g)	21, 22, 27, 39
9.4.5	(k)	24, 26, 27, 32, 47, 80
9.4.6	(l)	30, 47, 69
9.4.7	(m)	44, 48
9.4.8	(n)	27, 39, 94
9.4.9	(o)	60, 97
9.4.9	(r)	60, 97
9.4.9	Орбиты, асимптотически стремящиеся к $L_{4,5}$	47, 61, 64, 67
9.4.9	Асимметричные орбиты (рис. 9.15)	47, 67, 89

из приведенных в этой главе рисунков, изображающих начальные и конечные условия, использованы результаты Бартлетта [14] (после преобразования). Ряд других рисунков основывается на оригинальных статьях Копенгагенской школы. Поскольку уравнения преобразования регуляризованных координат к физическим были даны нами в гл. 3, а также содержатся в статье Бартлетта, мы здесь их повторно не приводим. Важный вклад этой статьи состоит в расширении и продолжении орбит класса (g) Копенгагенской категории.

Рис. 9.6*е* и 9.6*ж* получены посредством интегрирования уравнений движения с использованием (преобразованных) начальных условий Бартлетта. Стрёмгрен и Бартлетт считают, что это семейство заканчивается в точках $L_{4,5}$. Это являлось частью предположения Стрёмгрена, и вторая орбита на рис. 9.6*ж* подтверждает эту идею. Орбиты, представленные как шестая и седьмая фазы класса (g), были рассчитаны Дж. Линске. Предположения Стрёмгрена и Бартлетта относительно окончания

класса (g) получили подтверждение в работе Себехея и Накозн [24].

Предварительные соображения, высказанные относительно несуществования асимметричных периодических орбит с последовательными соударениями (пункт 9.4.8), относились к орбитам класса (n) Копенгагенской категории. Те же соображения были высказаны в пункте 9.4.5 по отношению к классу (k) при несколько других условиях. Класс (n) не содержит орбит с последовательными соударениями, асимметричных относительно оси y. Это *может* указывать на то, что вообще не существует орбит с последовательными соударениями (по крайней мере типа класса (n)) для $\mu \neq 1/2$. Автору лично известны настойчивые, но безуспешные попытки найти такие орбиты для $\mu \neq 1/2$. Орбиты класса (k) не появляются как результат процесса аналитического продолжения. Поэтому существование таких орбит для $\mu \neq 1/2$ пока остается под вопросом. В статье Винтнера [25] рассматриваются более простые орбиты, а именно, орбиты с одним только соударением; там же содержатся уточнения некоторых формулировок Мультона [1]. Вопрос о периодических орбитах с последовательными соударениями для $\mu \neq 1/2$ остается пока открытым.

Орбита, изображенная на рис. 9.6*в*, известна как орбита Хардтля, она подробно описана в его работе [26]. Этой же теме посвящены статьи Винтнера [27] и Кокулеско [28].

В пункте 9.4.10 излагается принцип окончания, впервые сформулированный Стрёмгреном в 1924 г. на основании одних только численных результатов. Доказательство Винтнера [10, 29] слишком растянуто, но зато направлено прямо к цели, в то время как доказательство Биркгофа отличается краткостью (занимает менее одной страницы), но является более трудным [30, стр. 48].

Еще до того, как Стрёмгрен открыл принцип окончания, Барро [23] высказал несколько иное мнение. Он сказал: «A mon sens, voici la véritable règle: les diverses classes des solutions sont séparées les unes des autres par des trajectoires d'éjection *).

Периодические орбиты, рассмотренные в пункте 9.4.11, были рассчитаны Джорджем Дарвином (1845—1912), сыном Чарльза Дарвина. Основное внимание уделяется нами двум его статьям о периодических орбитах [2]. Изучающим ограниченную задачу обязательно следует познакомиться с этими статьями, у опытных специалистов они, возможно, вызовут

*) В переводе с французского это означает следующее: «Я считаю, что различные классы решений отличаются друг от друга траекториями выбрасывания». *(Прим. перев.)*

раздумья, а у начинающих — энтузиазм. Эти статьи включены также в сборник его работ под названием «Scientific Papers», т. 4, причем они там подверглись некоторым изменениям, наиболее важное из которых относилось к рис. 1 листа IV. Заметим, что когда в литературе ссылаются на эти статьи, обычно имеют в виду именно эти измененные статьи из сборника. Большое влияние на работу Дарвина оказали труды Хуга [31]. Читатели возможно найдут в работах Дарвина ряд сомнительных чертежей и малоубедительных выводов и интерпретаций, которые он приводит. Автор данной книги умышленно опустил эти вопросы из пункта 9.4.11, не желая смущать читателей, и ссылается на орбиты, взятые из его рис. 8, которые, по-видимому, составлены им из двух овальных орбит, одной — вокруг основного тела, другой — вокруг соседней точки либрации.

Работа Мультона, на которую мы ссылались в пункте 9.4.12, входит в его монументальную книгу «Periodic Orbits» [1], состоящую из статей, большей частью уже опубликованных в период между 1907 и 1912 г. и написанных как им самим, так и в соавторстве с другими. Последняя 16-я глава его книги является новой и оригинальной и представляет для нас наибольший интерес. Разногласие относительно открытия Мультоном попятных периодических орбит вокруг $L_{4,5}$ (показанных на рис. 9.18) между ним, с одной стороны, и Стрёмгреном и Винтнером, с другой стороны, можно разрешить, по крайней мере частично, путем задания правильных значений постоянных Якоби и соответствующей интерпретации результатов. Так как Мультон принял неправильное значение C и дал неверную интерпретацию полученным результатам, то его орбиты оказались неприемлемы. Стрёмгрен [19, стр. 14—15], рассматривая этот вопрос, отмечает, что бесконечно малых периодических орбит вокруг треугольных точек либрации при $\mu = 1/2$ не существует, но орбиты конечных размеров могут быть. Он считает, что орбиты Мультона «неубедительны», так как они не удовлетворяют интегралу Якоби. Тщательно проведенный расчет показывает, что результаты Мультона нуждаются в небольших исправлениях, но общая форма кривых, изображенных в последней главе его книги [1] и воспроизведенных нами на рис. 9.18 (пункт 9.4.12), является правильной.

Впрочем Стрёмгрен сам изменил свою точку зрения, которой придерживался в 1922 г. Об этом свидетельствует его статья [32], появившаяся в 1929 г. Действительно, уже в следующем 1930 г. он говорит [33] о возможности существования орбит, открытых Мультоном, причем его объяснения близки к нашим, которые содержатся в тексте пункта 9.4.12 А. Кроме

того, Кристианссон [34] нашел семейство орбит, для которых орбита на рис. 9.15*в* служит два раза в качестве предельной орбиты: один раз как показано в тексте, другой раз как ее зеркальное отображение от оси x. Что касается значений постоянной Якоби, принятых Мультоном, то следует заметить, что в большей части случаев применяется условие $C_M = \bar{C}$, но в некоторых случаях справедливо условие $C_M = C$. Это имеет место для некоторых рассматриваемых орбит. Критика Винтнера [10] нам не кажется убедительной, в особенности если учесть интерпретацию, данную нами в пункте 9.4.12 А. Эти разногласия разрешены в работе Себехея [35], и семейство орбит Мультона завершено Себехеем и Ван Фландерном [35а].

Интересно отметить, что Мультон нашел класс (k) Стрёмгрена и говорит о нем в последней главе своей книги, опубликованной в 1920 г. Датой выхода в свет Выпуска № 26 Трудов Копенгагенской обсерватории является 1917 г. Следовательно, приоритет в этом вопросе, казалось бы, принадлежит Копенгагенской обсерватории, однако Мультон утверждает, что исследования, о результатах которых он сообщает в последней главе книги, были закончены им тоже в 1917 г., так что вполне возможно, что Мультон открыл этот класс орбит независимо от Копенгагенской обсерватории.

В пунктах 9.5.1 и 9.5.2, как уже говорилось, использовано обширное исследование Брукке, результаты которого содержатся в его диссертации.

Автор данной книги при изложении материала несколько отклонился от интерпретации Брукке, в особенности в отношении класса (g), так как для сравнений располагал бо́льшим количеством орбит Стрёмгрена класса (g), чем Брукке. С замечаниями относительно периодических лунных орбит класса (m), сделанными с позиций космодинамики, можно познакомиться в работе В. А. Егорова [3].

Пункт 9.5.4, посвященный специальным периодическим орбитам, основывается главным образом на работах Аренсторфа [36]. Орбита, приведенная на рис. 9.24*б*, рассчитана Дэвидсоном [37]. Идея (не подтвержденная расчетами или анализом), лежащая в основе орбит, подобных той, что показана на рис. 9.24*б*, уже встречалась в первой статье Дарвина о периодических орбитах [2, стр. 55—56]. Позже В. А. Егоров [3] в 1958 г. и Тюринг [12] в 1959 г. вычислили непериодические орбиты, проходящие через узкую часть кривой нулевой скорости вблизи точки L_2 и обращающиеся вокруг E и M.

Хронология совершенно такая же, что указана в пункте 9.5.4 Б относительно периодических орбит второго рода, с орбитами, имеющими различные соизмеримости. Первое предложение использовать такие орбиты для последовательных

сближений появилось в статье Ньютона [38]. Затем Хуанг [39] выступил с той же идеей, подкрепив ее основательными численными расчетами (см., например, рис. 9.26). Наконец Ареистроф [36] в 1963 г. дал аналитическое доказательство и привел дополнительные численные примеры. Между тем, Брукке [4] в 1962 г. вычислил орбиты этого класса (см. рис. 9.26 и 9.28), не использовав преимуществ последовательных сближений.

В § 9.6 обсуждается работа Рабе. На его статьи [5, 5а, 6] мы ссылались в начале этого параграфа. Еще до появления работ Рабе Тюрнинг [40, 40а, 40б] проявлял интерес к вопросу о существовании таких орбит. Винтнер [41] доказал их существование (по крайней мере в непосредственной близости от точек $L_{4,5}$) посредством аналитического продолжения (см. также гл. 5). Причина расхождения между Рабе и Тюрингом становится ясной из работы Рабе [5а]. Так как доказательство Винтнера основывается на аналитическом продолжении, то гарантируется начало семейства Рабе, а доказательство существования периодических орбит с большой амплитудой остается численным (данным Рабе). В связи с этим встает вопрос о точности и предпринимаются попытки дать ответ на часто возникающий вопрос: какая требуется точность, чтобы получить численное доказательство существования периодических орбит?

Методы численного интегрирования, задача о накоплении ошибок и другие связанные с ними вопросы не могут быть охвачены здесь. Ранее мы ссылались на работу Брауэра [42], в которой он вычисляет накопление ошибок округления, поскольку это находит непосредственное приложение к вычислению орбит. Согласно Брауэру ошибка округления пропорциональна $n^{1/2}$ для любого элемента или в любом направлении, кроме направления вдоль орбиты, где ошибка в средней долготе пропорциональна $n^{3/2}$. Здесь n есть число шагов интегрирования. Среди других методов численного интегрирования следует отметить метод Стеффенсена [42а], он успешно применялся рядом авторов (в первую очередь Рабе [5]) при интегрировании дифференциальных уравнений ограниченной задачи.

В гл. 8 мы касались вопроса об обратимости. Здесь можно рекомендовать читателям познакомиться с высказываниями Бейкера в книге Бейкера и Мейкемсона [43, стр. 339].

Депри (см. работу Депри и Дели [44]) произвел перерасчет орбит Рабе. Он установил, что орбиты Рабе линейно устойчивы, за исключением орбиты подковообразного типа, изображенной на последнем рис. 9.29*б* для $\lambda=0{,}06$. Семейство короткопериодических орбит Троянцев рассчитал Гудрич [45].

К литературе, которую мы указали в начале § 9.7, посвященного лунным траекторням, следует добавить статью Бухгейма [46], однако нужно отметить некоторую вольность, проявленную им в топологическом отношении при построении кривых нулевой скорости.

Подробного списка литературы по захвату мы здесь не приводим. В тексте упоминалась статья В. Г. Фесенкова. Можно назвать еще отлично написанную книгу Лейманиса и Мниорского [48].

В американской литературе основное внимание уделяется отдельным расчетным трехмерным траекторням Земля — Луна, а не семействам орбит в идеализированной ограниченной задаче. Поэтому большее внимание мы уделили в этом параграфе работе В. А. Егорова [3].

Интересное исследование Гапчинского и Вулстона [49], связанное с расчетом траекторий космического корабля «Аполлон», осталось, по сути дела, не охваченным; на этой работе основываются лишь орбиты с последовательными соударениями, описанные в § 9.7.

Первая вычисленная орбита в классе (а) была получена (в первом приближении) посредством небольшого смещения одной из траекторий «Аполлона» и вычисления ее двумерного эквивалента.

По траекториям с последовательными соударениями можно указать две статьи: статью Себехея и др. [50] и статью Пирса и Стендиша [51].

По орбитам в двойных системах, помимо статей Копала и Койпера, можно назвать еще статьи Абъянкара [52] и Гулда [53]. Орбиты, полученные в связи с рассмотрением метода аналитического продолжения (пункт 9.9.1), проинтегрированы численным методом С. Ноулсом. Асимптотически-периодические орбиты, показанные в пункте 9.9.2, вычислены Депри и Ираром [54]. Последний пункт этого параграфа (пункт 9.9.3) посвящен работе Месседжа [55]. Асимметричные орбиты имеют практическое значение и отличаются новизной. Симметричные орбиты обнаруживают интересное сходство с орбитой, найденной Брукке [4] для $\mu = 1/82{,}27$, а также с орбитой (скорее предполагаемой, чем рассчитанной) Дж. Дарвина для $\mu = 1/11$. Асимптотические (непериодические) орбиты вблизи коллинеарных точек либрации подробно исследованы в статье Уоррена [56].

Периодические орбиты могут быть получены различными численными методами. В § 9.10 мы рассмотрели только два из них: метод Хуанга [39] и метод Эно [21]. Последний основывается на идеях Пуанкаре и Биркгофа о поверхностях сечения и на работе Зигеля. Библиография по этому вопросу приводится в списке литературы к гл. 8.

§ 9.12. Литература

1. Moulton F. R. Periodic Orbits. Washington: Carnegie Inst. of Washington, D. C., 1920.
2. Darwin G. H. Periodic orbits.— Acta Math., 1897, **21**, 99. On certain families of periodic orbits.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1909, **70**, 108; ibid. 604 (1910); also Scientific Papers. London, New York: Cambridge Univ. Press, 1911, v. 4, p. 140.
3. Егоров В. А. О некоторых задачах динамики полета к Луне.— Успехи физ. наук, 1957, **63**, вып. 1а, с. 73—117.
4. Broucke R. Recherches d'orbites périodiques dans le problème restreint plan (système Terre-Lune).— Lonvain, Belgium: Univ. of Louvain, 1962, dissertation, unpublished.
5. Rabe E. Determination and survey of periodic Trojan orbits in the restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1961, **66**, 500.

5a. Rabe E. Additional periodic Trojan orbits and further studies of their stability features.— Astron. J., 1962, **67**, 382.

6. Rabe E., Schanzle A. Periodic librations about the triangular solutions of the restricted earth-moon problem and their orbital stabilities.— Astron. J. ,1962, **67**, 732.
7. Ehricke K. Space Flight. Princeton, New Jersey: Van Nostrand, 1962, v. 2; Dynamics, especially pp. 486—961. [Русский перевод: Эрике К. Космический полет, т. 2. Динамика.— М.: Физматгиз, 1962.]
8. Kuiper G. P. On the interpretation of β lyrae and other close binaries.— Ap. J., 1941, **93**, 133.
9. Kopal Z. Evolutionary processes in close binary systems.— Ann. Astrophys., 1956, **19**, 298.
10. Wintner A. Grundlagen einer Geneologie der periodischen Bahnen im restringierten Dreikörperproblem, I. Beweis des E. Strömgrenschen dynamischen Abschlussprinzips der periodischen Bahngruppen.— Math. Z., 1931, **34**, 321; also Copenhagen Obs. Publ., 1931, No. 75. II. Sortengenealogie, Hekubakomplex und Gruppenfortsetzung.— Ibid., 1931, **34**, 350; also Copenhagen Obs. Publ., 1931, No. 79.
11. Birkhoff G. D. Recent advances in dynamics.— Science, 1920, **51**, 51. Also Collected Mathematical Papers. New York: Am. Math. Soc., 1950, v. 2, p. 106.

11a. Kovalevsky J. The system of astronomical constants.— Paris: Gauthier-Villars, 1965.

12. Thüring B. Zwei spezielle Mondeinfang-Bahnen in der Raumfahrt um Erde und Mond.— Astronaut. Acta, 1959, 5, 241.
13. Brouwer D., Clemence G. M. Orbits and masses of planets and satellites.— The Solar System (Kuiper G. P., ed.). Chicago, Illinois: Univ. of Chicago Press, 1961, v. 3, p. 31.
14. Bartlett J. H. The restricted problem of three bodies.— Copenhagen Obs. Publ., 1964, No. 179.
15. Bartlett J. H. The restricted problem of three bodies (II).— Copenhagen Obs. Publ., 1965, No. 183.
16. Strömgren E. Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps.— Bull. Astron., 1933, [2], **9**, 87; also Copenhagen Obs. Publ., 1935, No. 100.
17. Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels. 2 vols.— Leipzig: Von Veit, 1902—1907. [Русский перевод: Шарлье К. Небесная механика.— М.: Наука, 1966.]
18. Fischer-Petersen J. Die auf der Kopenhagener Sternwarte ausgeführten numerischen Untersuchungen über das Dreikörperproblem. I. Problème restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1917, No. 27, 2.

19. Strömgren E. Forms of periodic motion in the restricted problem and in the general problem of three bodies, according to researches executed at the Observatory of Copenhagen.— Copenhagen Obs. Publ., 1922, No. 39.
20. Strömgren E. Unsere Kenntnisse über die Bewegungsformen im Dreikörperproblem.— Ergeb. exakt. Naturw., 1928, **4**, 233.
21. Hénon M. Exploration numérique du problème restreint.— Ann. Astrophys., 1965, **28**, 499, 992.
22. Strömgren E. Über Librationen und Ejektionsbahnen.— Copenhagen Obs. Publ., 1913, No. 14. Burrau C., Strömgren E. Über Librationen und Ejektionsbahnen.— Copenhagen Obs. Publ. 1914, No. 18; also Astron. Nachr., 1914, **197**, 273. Burrau C., Strömgren E. Numerische Untersuchungen über eine Klasse periodischer Bahnen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1915, No. 21; also Astron. Nachr., 1915, **200**, 313. Fischer-Petersen J. Über unendlich kleine periodische Bahnen um die Massenpunkte im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ. 1915, No. 22; also Astron. Nachr., 1915, **200**, 385. Burrau C., Strömgren E. Numerische Untersuchungen über eine Klasse einfach periodischer, retrograder Bahnen im Problème Restreint, nebst der diese Klasse abschliessenden, periodischen Ejektionsbahn (Massenverhältnis $m_1=m_2$).— Copenhagen Obs. Publ., 1916, No. 23; also Astron. Nachr., 1916, **202**, 185. Fischer-Petersen J. Über unendlich kleine retrograde, periodische Bahnen um die Massenpunkte im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ. 1916, No. 23; also Astron. Nachr., 1916, **202**, 201. Burrau C., Strömgren E. Über ein System von Ejektionsbahnen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1916, No. 24; also Astron. Nachr., 1916, **202**, 305. Burrau C., Strömgren E. Über eine Klasse periodischer Bahnen um die beiden endlichen Massen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1917, No. 26; also Astron. Nachr., 1916, **203**, 277. Strömgren E., Fischer-Petersen J. Über eine neue Art Librationen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1917, No. 26; also Astron. Nachr., 1917, **203**, 411. Fischer-Petersen J. Die auf der Kopenhagener Sternwarte ausgeführten numerischen Untersuchungen über das Dreikörperproblem. I. Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1917, No. 27. Strömgren E., Fischer-Petersen J. Über eine Klasse einfach periodischer, retrograder Bahnen um die beiden endlichen Massen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ,. 1919, No. 30; also Astron. Nachr., 1919, **207**, 289. Pedersen P. Periodische Bahnen in grosser Entfernung von den beiden endlichen Massen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1919, No. 30; also Astron. Nachr., 1918, **217**, 297. Lous L. A certain class of periodic orbits around the two finite masses in the restricted problem of three bodies.— Copenhagen Obs. Publ., 1919, No. 32; also Astron. Nachr., 1919, **209**, 241. Samter H. Über eine Gruppe von Bahnen des Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1924, No. 44; also Astron. Nachr., 1924, **220**, 161. Samter H. Über eine Klasse von Bahnen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1924, No. 45; also Astron. Nachr., 1924, **220**, 329. Strömgren E. Zur Durchmusterung des Problème Restreint. Asymptotisch-periodische Lösungen.— Copenhagen Obs. Publ., 1924, No. 47. Möller J. P. Die einfach periodischen, retrograden Bahnen um die beiden endlichen Massen im Problème Restreint, mit retrograder absoluter Bewegung.— Copenhagen Obs. Publ., 1924, No. 48; also Astron. Nachr., 1924, **221**, 81. Möller J. P. Vier Bahnklassen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1928, No. 60, also Astron. Nachr., 1928, **233**, 81. Strömgren E. Fortsetzung und Abschluss der Librationen um L_2 and L_3 im Restringierten Dreikörperproblem (Problème Restreint).— Copenhagen Obs. Publ., 1929, No. 63. Strömgren E. Periodische Bahnen um L_4 (bezw. L_5) im Problème Restreint bei beliebigem Verhältnis der zwei endlichen Massen.— Copenhagen Obs. Publ., 1929,

No. 64. Strömgren E. Fortgesetzte Untersuchungen über asymptotische Bahnen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1930, No. 65. Strömgren E. Die retrograden periodischen Bahnen um die beiden endlichen Massen im Problème Restreint, mit direkter absoluter Bewegung (Klasse l).— Copenhagen Obs. Publ., 1930, No. 69. Strömgren E. Das Kritische Massenverhältnis bei der Bewegung um L_4 and L_5 im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1930, No. 70. Wintner A. Librationstheorie des restringierten Dreikörperproblems.— Copenhagen Obs. Publ., 1930, No. 71; also Math. Z., 1930, **32**, 641. Strömgren E. Über die Kritische Masse im Problème Restreint und über das Problème Restreint im allgemeinen.— Copenhagen Obs. Publ., 1930, No. 72; also Vierteljschr. Astr. Ges. 1930, **65**, 265. Wintner A. Beweis des E. Strömgrenschen dynamischen Abschlussprinzips der periodischen Bahngruppen im restringierten Dreikörperproblem.— Copenhagen Obs. Publ., 1931, No. 75; also Math. Z., 1931, **34**, 321 .Rosenthal J. The equation of stability of periodic orbits of the restricted problem of three bodies in Thiele's regularising coordinates.— Copenhagen Obs. Publ., 1931, No. 78; also Am. J. Math., 1931, **53**, 626. Wintner A. Sortengenealogie, Hekubakomplex und Gruppenforsetzung. — Copenhagen Obs. Publ., 1931, No. 79; also Math. Z., 1931, **34**, 350. Strömgren E. Die direkten periodischen Bahnen um beide Massen im Problème Restreint (Klasse k.).— Copenhagen Obs. Publ., 1931, No. 80. Martin M. Upon the solutions of the equations of variation belonging to the equilateral Lagrangian libration points in the restricted problem of three bodies.— Copenhagen Obs. Publ., 1931, No. 81; also Astron. Nachr., 1931, **244**, 161. Rosenthal J. E. Tables for the libration points of the restricted problem of three bodies.— Copenhagen Obs. Publ., 1931, No. 81; also Astron. Nachr., 1931, **244**, 169. Kristiansson K.— Untersuchung einer Klasse in bezug auf die ξ-Achse unsymmetrischer, periodischer Bahnen um beide Massen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1933, No. 89; also Astron. Nachr., 1933, **250**, 249. Pedersen P. On the periodic orbits in the neighborhood of the triangular equilibrium points in the restricted problem of three bodies.— Copenhagen Obs. Publ., 1933, No. 91; also Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1933, **94**, 167. Strömgren E. Eine Klasse unsymmetrischer librationsähnlicher periodischer Bahnen im Problème Restreint und ihre Entwicklungsgeschichte (Klasse n).— Copenhagen Obs. Publ., 1934, No. 94. Strömgren E. Symmetrische und unsymmetrische librationsähnliche Bahnen im Problème Restreint mit asymptotisch-periodischen Bahnen als Grenzbahnen.— Copenhagen Obs. Publ., 1934, No. 97. Möller J. P. Zwei Bahnklassen im Problème Restreint.— Copenhagen. Obs. Publ., 1935, No. 99. Pedersen P. Fourier series for the periodic orbits around the triangular libration points.— Copenhagen Obs. Publ., 1935, No. 101, also Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1935, **95**, 482. Pedersen P. Über eine Klasse infinitesimaler, periodischer Bahnen um die Dreieckslibrationspunkte im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1939, No. 119; also Astron. Nachr., 1939, **269**, 31. Pedersen P. Fourier expansions for periodic orbits around the triangular libration points.— Copenhagen Obs. Publ., 1939, No. 120.

23. Burrau C. Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois coprs.— Astron. Nachr., 1894, **135**, 233. Recherches ... (Deuxième mémoire).— Ibid., 1894, **136**, 161. Thiele T. N. Recherches ... (Troisième Mémoire).— Ibid., 1895, **138**, 1.
24. Szebehely V., Nacozy P. A class of E. Strömgren's direct orbits in the restricted problem.— Astron. J., March 1967, **72**.
25. Wintner A. Über eine Sorte von periodischen Stosslösungen in dem restringierten Dreikörperproblem.— Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, 1930, **82**, 105.

26. von Haerdtl E. F. Skizzen zu einem speciellen Fall des Problems der drei Körper.— Abhandl. Math.-Phys. Kl. Kön bayer. Akad. Wiss., 1891, **17**, 589.
27. Wintner A. Über die V. Haerdtlsche Bahn.— Math. Z., 1930, **32**, 668.
28. Coculesco P. Sur la stabilité du mouvement dans un cas particulier du problème des trois corps.— Compt. Rend., 1892, **114**, 1339.
29. Wintner A. Über eine Revision der Sortentheorie des restringierten Dreikörperproblems.— Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl., 1930, **82**, 3.
30. Birkhoff G. D. Sur le prôblème restreint des trois corps. II. memoire.— Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, 1936, [2], **5**, 1, also Collected Mathematical Papers.— New York: Amer. Math. Soc., 1950, v. 2, p. 668.
31. Hough S. S. On certain discontinuities connected with periodic orbits.— Acta Math., 1901, **24**, 257; also Darwin G. H. Scientific Papers.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1911, v. 4, p. 114.
32. Strömgren E. Periodische Bahnen um L_4 (bezw. L_5) im Problème Restreint bei beliebegem Vehältnis der zwei endlichen Massen.— Copenhagen Obs. Publ., 1929, No. 64.
33. Strömgren E. Fortgesetzte Untersuchungen über asymptotische Bahnen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1930, No. 67.
34. Kristiansson K. Untersuchung einer Klasse in besug auf die ξ — Achse unsymmetrischer, periodischer Bahnen um beide Massen im Problème Restreint.— Copenhagen Obs. Publ., 1933, No. 89; also Astron. Nachr., 1933, **250**, 249.
35. Szebehely V. On Moulton's orbits in the restricted problem of three bodies.— Proc. Natl. Acad. Sci. US., 1966, **55**, 1641.
35a. Szebehely V., Van Flandern T. A family of retrograde orbits around the triangular equilibrium points.— Astron. J., 1967, April, **72**.
36. Arenstorf R. F. Existence of periodic solutions passing near both masses of the restricted three-body problem.— *AIAA* J., 1963, **1**, 238. Periodic solutions of the restricted three-body problem representing analytic continuations of Keplerian elliptic motions.— Am. J. Math., 1963, **85**, 27. Periodic trajectories passing near both masses of the restricted problem of three bodies.— Proc. 14th Intern. Astronaut. Congr., 1963, **4**, p. 85, Paris: Gauthier-Villars; Paris and Polish Sci. Publ., Warsaw, 1965. A new method of perturbation theory and its application to periodic motions in the restricted problem of three bodies.— Proc. Symp. Celestial Mech., Oberwolfach 1964, p. 75. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1966. A new method of perturbation theory and its application to the satellite problem of celestial mechanics.— (Crelle's) J. Reine Angew. Math. 1966, **221**, 113.
37. Davidson M. C. Numerical examples of transition orbits in the restricted three body problem.— Astronaut. Acta, 1964, **10**, 308.
38. Newton R. R. Periodic orbits of a planetoid.— Smithsonian Contrib. Astrophys., 1959, **3**, No. 7.
39. Huang S. S. Preliminary study of orbits of interest for moon probes.— Astron. J., 1962, **67**, 304. Huang S. S., Wade C., Jr., Preliminary study of orbits of interest for Moon probes. II.— Astron. J., 1963, **68**, 388.
40. Thüring B. Über die Planeten vom Kommensurabilitätstypus *III*.— Astron. Nachr., 1930, **238**, 357. Numerische Untersuchungen zu den Bewegungstheorien der Planeten der Jupitergruppe.— Astron. Nachr., 1951, **279**, 217.
40a. Thüring B. Die Librationsbahnen der Trojaner als nicht-geschlossene Bahnkurven.— Astron. Nachr., 1952, **280**, 226.
40б. Thüring Programmgesteuerte Berechnung von Librationsbahnen.— Astron. Nachr., 1959, **285**, 71.
41. Wintner A. Librationstheorie des restringierten Dreikörperproblems.— Math. Z., 1930, **32**, 641; also Copenhagen Obs. Publ., 1930, No. 71.

42. Brouwer D. On the accumulation of errors in numerical integration.— Astron. J., 1937, **46**, 149.
42a. Steffensen J. F. On the restricted problem of three bodies.— Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-Fys. Medd., 1956, **30**, No. 18.
43. Baker R. M. L., Makemson M. W. An Introduction to Astrodynamics.— New York: Academic Press, 1960.
44. Deprit A., Delie A. Trojan orbits. I. d'Alambert series at L_4 — Icarus, 1965, **4**, 242.
45. Goodrich E. F. Numerical determination of short period Trojan orbits in the restricted three body problem — *NASA* x-643-65-420, 1965.
46. Buchheim R. W. Lunar flight trajectories.— Space Technology (Seifert H. S., ed.), Chapter 7.— New York: Wiley, 1959. [Русский перевод: Бухгейм Р. Траектории полетов к Луне. В кн.: Космическая техника. Под ред. Г. Сейферта.— М.: Наука, 1964.]
47. Фесенков В. Г. О возможности захвата при близком прохождении.— Астрономический журнал, 1946, **23**, вып. 1, с. 45—48.
48. Leimanis E., Minorsky N. Dynamics and Nonlinear Mechanics.— New York: Wiley, 1959, pp. 82—93.
49. Gapcynski J. P., Woolston D. W. Characteristics of three precision circumlunar trajectories for the year 1968.— *NASA* TN D-1028, 1962.
50. Szebehely V., Pierce D. A., Standisch E. M. A Group of Earth-to-Moon Trajectories with Consecutive Collisions.— Celestial Mechanics and Astrodynamics (Szebehely V., ed.). New York: Academic Press, 1964, p. 35.
51. Pierce D. A., Standisch E. M. Numerical aspects of the family of earth-to-moon trajectories with consecutive collisions.— *AIAA* Paper No. 65—86, 1965. Family of consecutive collision earth-to-moon trajectories.— *AIAA* J., 1966, **4**, 709.
52. Abhyankar K. D. Stability of straight-line solutions in the restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1959, **64**, 163.
53. Gould N. L. Particle trajectories around close binary systems— Astron. J., 1959, **64**, 136.
54. Deprit A., Henrard J. Symmetric double asymptotic orbits in the restricted three-body problem.— Astron. J., 1965, **70**, 271.
55. Message P. J. The search for asymmetric periodic orbits in the restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1958, **63**, 443. Some periodic orbits in the restricted problem of three bodies and their stabilities.— Astron. J., 1959, **64**, 226.
56. Warren L. A. H. A class of asymptotic orbits in the problem of three bodies.— Am. J. Math., 1916, **38**, 221.

Глава 10

МОДИФИКАЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ

§ 10.1. Введение

Ограниченную задачу, которой мы посвятили эту книгу, в § 1.2 мы сформулировали следующим образом. Две материальные точки с массами m_1 и m_2, которые мы назвали основными телами, вращаются вокруг их центра масс по круговым орбитам. В плоскости их движения перемещается третье тело бесконечно малой массы, которое не оказывает никакого влияния на движение основных тел. Требуется исследовать поведение третьего тела, считая, что на него действуют только ньютоновские гравитационные силы.

Любое отклонение от этих условий приводит к задачам, которые, за редким исключением, до сих пор нами не рассматривались. Возможны различные изменения предположений, принимаемых при формулировании задачи; на некоторые из них мы указывали в § 1.9. В этой главе подробно рассматриваются только три наиболее важные модификации. Две из них, а именно, «трехмерная» задача и «эллиптическая» задача являются особенно сложными, как в аналитическом отношении, так и в отношении численного решения. Третью модификацию составляет задача Хилла, она представляет собой упрощенную ограниченную задачу и находит приложение в лунных теориях.

Помимо этих трех основных модификаций мы коротко остановимся и на ряде других, таких, как задачи Эйлера и Лагранжа, задача, в которой действуют силы, отличные от ньютоновских, задача, в которой массы основных тел изменяются, и т. д.

Наиболее непосредственным обобщением ограниченной задачи трех тел является, конечно, общая задача трех тел. Она была описана нами в § 1.8, а общая задача n тел была рассмотрена в § 3.11, где были приведены регуляризованные уравнения задачи n тел. Поскольку данная книга посвящена *ограниченной задаче*, мы в отношении *общей задачи трех тел* ограничимся лишь небольшими замечаниями, хотя она является, как уже говорилось, наиболее непосредственным и очевидным обобщением.

В этой завершающей главе мы рассмотрим некоторые задачи, которые имеют близкое отношение к нашей основной задаче, и приведем соответствующую литературу.

Изложение в этой главе будет отличаться большей краткостью по сравнению с предыдущими главами, мы остановимся

здесь лишь на главных свойствах рассматриваемых задач. Три наиболее важные модификации ограниченной задачи излагаются в §§ 10.2, 10.3 и 10.4, они могут явиться основой для дальнейших исследований подобных задач.

§ 10.2. Трехмерная ограниченная задача

10.2.1. Постановка задачи и уравнения движения. А. Основные тела вращаются вместе с плоскостью xy по окружностям вокруг их центра масс. Они расположены на вращающейся оси x в точках $P_1(\mu, 0, 0)$ и $P_2(\mu-1, 0, 0)$. Ось y перпендикулярна к оси x и находится в плоскости вращения. Плоскость xy вращается с единичным средним движением, вектор угловой скорости перпендикулярен плоскости xy, т. е. направлен по оси z, которая вместе с осями x, y образует правую систему координат (см. рис. 10.1).

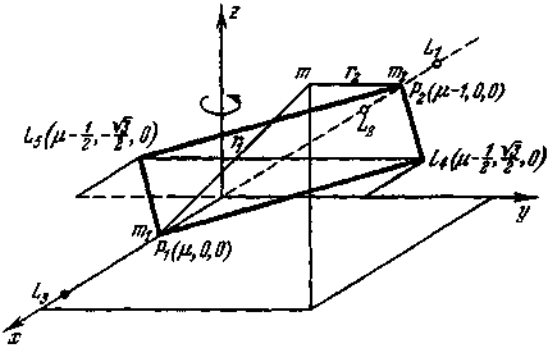


Рис. 10.1. Пространственная система координат и точки равновесия.

Уравнения движения третьей частицы имеют следующий вид:

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\Omega_x, \quad \ddot{y}+2\dot{x}=\Omega_y, \quad \ddot{z}=\Omega_z, \tag{1}$$

где

$$\Omega=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}+\frac{1}{2}\mu(1-\mu) \tag{2}$$

и

$$r_1^2=(x-\mu)^2+y^2+z^2, \quad r_2^2=(x-\mu+1)^2+y^2+z^2. \tag{3}$$

Мы видим, что выражения для r_1 и r_2 содержат координату z, так что теперь

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\mu(1-\mu)\neq\frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2].$$

Следовательно, изящная и симметричная форма функции Ω,

использовавшаяся нами в плоском случае, для уравнений (1) неприменима.

Другую форму этих уравнений можно получить, если сохранить определение, данное для функции Ω в § 1.5 (уравнение (54)). Обозначив функцию через Ω', будем иметь

$$\Omega' = \frac{1}{2}\left[(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2\right] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.$$

В трехмерном случае она принимает вид

$$\Omega' = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + \frac{1}{2}\mu(1-\mu) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

где r_1^2 и r_2^2 определяются уравнениями (3).

Так как в этом случае

$$\Omega_z' = z + \Omega_z,$$

а

$$\Omega_x = \Omega_x' \quad \text{и} \quad \Omega_y = \Omega_y',$$

то уравнения движения (1) принимают вид

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x', \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y', \quad \ddot{z} + z = \Omega_z'. \tag{3'}$$

Интеграл Якоби можно получить таким же способом, как в § 1.4, посредством умножения уравнений (1) на $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$, сложения и интегрирования по времени. Проделав это, будем иметь

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\Omega(x, y, z) - C. \tag{4}$$

Б. Рассмотрим теперь трехмерный случай с помощью функции Гамильтона. Уравнение, соответствующее уравнению (3) § 7.2, записывается в виде

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \Phi(q_1, q_2, q_3, t),$$

где

$$p_1 = \dot{q}_1 = \dot{\xi}, \quad p_2 = \dot{q}_2 = \dot{\eta}, \quad p_3 = \dot{q}_3 = \dot{\zeta}$$

и

$$\Phi = \frac{\mu_1}{\rho_1} + \frac{\mu_2}{\rho_2}.$$

Система координат ξ, η, ζ неподвижна и переменные имеют безразмерную форму. Заметим, что ρ_1 и ρ_2 отличаются от тех расстояний, которые мы имели для двумерного случая, теперь они равны

$$\rho_1^2 = (q_1 - \mu_2\cos t)^2 + (q_2 - \mu_2 \sin t)^2 + q_3^2,$$
$$\rho_2^2 = (q_1 + \mu_1\cos t)^2 + (q_2 + \mu_1 \sin t)^2 + q_3^2,$$

где $\mu_1 = 1-\mu$ и $\mu_2 = \mu$ (сравните с формулами (27) гл. 1).

В синодической системе функция Гамильтона равна

$$\bar{H}=\frac{1}{2}(P_1^2+P_2^2+P_3^2)+Q_2P_1-Q_1P_2-\tilde{F}(Q_1, Q_2, Q_3),$$

что находится в полном соответствии с уравнением (9) § 7.3.

Зависимость между новыми (синодическими) и предыдущими (сидерическими) координатами и импульсами выражается формулами

$$\mathbf{Q}=\mathbf{A}^*\mathbf{q} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}=\mathbf{A}^*\mathbf{p},$$

где $\mathbf{A}^*$ есть транспонированная матрица для $\mathbf{A}$ и

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Расстояния, входящие в силовую функцию

$$\tilde{F}=\mu_1/\rho_1+\mu_2/\rho_2,$$

равны

$$\rho_1^2=(Q_1-\mu_2)^2+Q_2^2+Q_3^2, \quad \rho_2^2=(Q_1+\mu_1)^2+Q_2^2+Q_3^2.$$

Уравнения движения здесь те же, что и в § 7.2 (уравнения (17) и (18)), с тем лишь дополнением, что

$$\dot{Q}_3=P_3 \quad \text{и} \quad \dot{P}_3=\frac{\partial\tilde{F}}{\partial Q_3}.$$

В. Трехмерными переменными Делоне являются $q_1=L=a^{1/2}$, $q_2=G=[a(1-e^2)]^{1/2}$ и $q_3=H=[a(1-e^2)]^{1/2}\cos I$. Две первые обобщенные координаты — те же, что были введены в пунктах 7.7.1, 7.7.2 и 7.7.3. Третья обобщенная координата, q_3, представляет собой проекцию вектора момента количества движения на ось z и потому равна значению интеграла площади в плоскости xy. Сопряженные импульсы равны средней аномалии l, аргументу перигелия g и долготе восходящего узла h. Заметим, что $g=\omega-\Omega$ есть угол от восходящего узла до перигелия, так как ω есть долгота перигелия, а $\Omega=h$. Двумерный случай представлен на рис. 7.5 § 7.7. Функция Гамильтона равна

$$F=\frac{1}{2L^2}+R(L, G, H, l, g, h),$$

а уравнения движения имеют тот же вид, что и уравнения (102) § 7.7; дополнительно имеем

$$\dot{h}=-\frac{\partial F}{\partial H} \quad \text{и} \quad \dot{H}=\frac{\partial F}{\partial h}.$$

Линейные комбинации переменных Делоне, рассмотренные нами в пункте 7.7.4, можно распространить на систему с тремя степенями свободы, соответствующую трехмерной задаче. Обобщая случай А пункта 7.7.4, получаем

$$Q_1=L, \quad Q_2=G-L, \quad Q_3=H-G$$

и

$$P_1=l+g+h, \quad P_2=g+h, \quad P_3=h.$$

Обобщение случая Б дает

$$Q_1=L, \quad Q=L-G, \quad Q_3=G-H$$

и

$$P_1=l+g+h, \quad P_2=-(g+h), \quad P_3=-h.$$

Наконец, для случая В имеем

$$Q_1=L-G, \quad Q_2=G-H, \quad Q_3=H$$

и

$$P_1=l, \quad P_2=l+g, \quad P_3=l+g+h.$$

Трехмерный вариант переменных Пуанкаре следует из пункта 7.7.5. В пункте 7.7.5 А преобразование $\tilde{W}_4$ применяется к результатам пункта 7.7.4 В. Распространяя это на трехмерный случай, находим

$$Q_1=[2(L-G)]^{1/2}\cos l, \quad Q_2=[2(G-H)]^{1/2}\cos(l+g), \quad Q_3=H$$

и

$$P_1=[2(L-G)]^{1/2}\sin l, \quad P_2=[2(G-H)]^{1/2}\sin(l+g),$$
$$P_3=l+g+h.$$

Результаты пункта 7.7.5 Б принимают вид

$$Q_1=L, \quad Q_2=[2(L-G)]^{1/2}\cos(g+h), \quad Q_3=[2(G-H)]^{1/2}\cos h$$

и

$$P_1=l+g+h, \quad P_2=-[2(L-G)]^{1/2}\sin(g+h),$$
$$P_3=-[2(G-H)]^{1/2}\sin h.$$

10.2.2. Поверхности нулевой скорости. 10.2.2.1. Особые точки совокупности. Особые точки совокупности состояний движения находятся из уравнений

$$\dot{x}=0, \quad \dot{y}=0, \quad \dot{z}=0,$$
$$\Omega_x=0, \quad \Omega_y=0, \quad \Omega_z=0.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\Omega_z=-z\left(\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right)=0.$$

Так как для конечных значений r_1 и r_2 второй сомножитель по-

ложителен, то $z=0$. Отсюда следует, что точки равновесия лежат в плоскости xy, и многие из предыдущих результатов, данных в гл. 4, остаются справедливы. То же следует и из геометрических соображений. Результирующая сила, действующая на частицу, находящуюся в одной из точек равновесия, должна равняться нулю. На частицу действуют силы гравитационного притяжения, направленные к основным телам, и центробежная сила, перпендикулярная оси вращения. При равновесии эти силы компланарны, и следовательно, точки равновесия должны лежать в плоскости xy.

Поверхности нулевой скорости описываются уравнением

$$2\Omega(x, y, z)=C, \tag{5}$$

и так как $\Omega(x, y, z)=\Omega(x, \pm y, \pm z)$, то поверхности симметричны относительно плоскостей xy и xz. Пересечения поверхностей (5) с плоскостью xy дает кривые нулевой скорости, которые мы рассматривали в гл. 4. Следовательно, для описания поверхностей (5) дополнительно требуются пересечения поверхностей нулевой скорости с плоскостями yz и zx. В действительности, в силу уже отмечавшихся условий симметрии, интерес представляет только половина плоскости zx, для которой $z\geqslant 0$, и четверть плоскости yz, для которой $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

10.2.2.2. Поверхности нулевой скорости для задачи двух тел. Прежде чем перейти к изучению поверхностей нулевой скорости ограниченной задачи, рассмотрим сначала эти поверхности для задачи двух тел в обычной вращающейся системе координат. Эту модель можно получить из уравнений (2) и (3), положив $\mu=0$. Уравнение для поверхностей нулевой скорости имеет вид

$$C=x^2+y^2+2/r_1, \tag{6}$$

где

$$r_1^2=x^2+y^2+z^2. \tag{7}$$

Его можно записать также в форме

$$C=r^2+\frac{2}{(z^2+r^2)^{1/2}}, \tag{8}$$

где $r^2=x^2+y^2$, а корень, стоящий в знаменателе, берется положительный.

Эти поверхности симметричны относительно плоскости xy, а также обладают осевой симметрией относительно оси z. Сферической симметрией они не обладают, так как ось z не является осью вращения. Пересечение поверхностей нулевой скорости с плоскостью xy дает кривые

$$C=r^2+2/r. \tag{9}$$

Когда $C>3$, мы имеем две окружности с радиусами r' и r'', удовлетворяющими условиям $0<r'<1<r''<C$. При $C=3$ эти окружности совпадают, и общий радиус становится равным $r'=r''=1$. Об этом подробно говорилось в пункте 8.5.1, где было также показано, что когда $C<3$, кривые нулевой скорости исчезают из плоскости xy. Напомним еще, что

$$r' \geqslant 2/C \text{ и } r'' \leqslant C^{1/2}. \tag{10}$$

Знак равенства соответствует случаю, когда $C \to \infty$.

Пересечение поверхностей нулевой скорости с плоскостью xz дает кривые

$$C = x^2 + \frac{2}{(x^2+z^2)^{1/2}}. \tag{11}$$

Для больших значений C мы имеем либо большие значения x, при которых $x \approx \pm C^{1/2}$ (первый случай), либо малые значения как x, так и z (второй случай). В первом случае

$$|x| \leqslant C^{1/2}.$$

Знак равенства соответствует случаю, когда $z \to \infty$. Это следует из уравнения (11). Заметим, что решая уравнение (11) относительно $|x|$ и обозначая решение, приближенно равное $C^{1/2}$, через $x'(C, z)$, будем иметь $x'(C, |z_1|) < x'(C, |z_2|)$, если $|z_2|>|z_1|$. Второй случай, который дает большие значения для постоянной Якоби, требует малых значений для x и z, и, следовательно,

$$(x^2+z^2)^{1/2} = \frac{2}{C-x^2} \to \frac{2}{C}.$$

Соответствующие кривые представляют собой в первом случае овалы вокруг начала координат, а во втором случае — кривые, асимптотически стремящиеся к прямым $x=\pm C^{1/2}$ и пересекающие ось x в точках $\pm x'(C, 0)$.

Пересечения оси x и оси y с поверхностями происходят при x и y, удовлетворяющих уравнениям

$$C = x^2 + 2/x, \tag{12}$$

$$C = y^2 + 2/y. \tag{13}$$

Пересечение поверхности с осью z имеет место, когда $z'=\pm 2/C$. Решения уравнений (12) и (13) соответствуют, конечно, решениям уравнения (9) и имеют вид

$$x'=y' \geqslant 2/C \text{ и } x''=y'' \leqslant C^{1/2}.$$

Таким образом, можно заключить, что поверхность, окружающая единичную массу в начале координат и имеющая форму яйца, может быть аппроксимирована сплющенным сфе-

роидом с малой осью, идущей вдоль координатной оси z. Длины трех осей удовлетворяют условиям $z'=2/C\leqslant x'=y'$.

Другой корень уравнения (12) соответствует $x''<C^{1/2}$. Наружный цилиндр пересекает плоскость xy по окружности радиуса

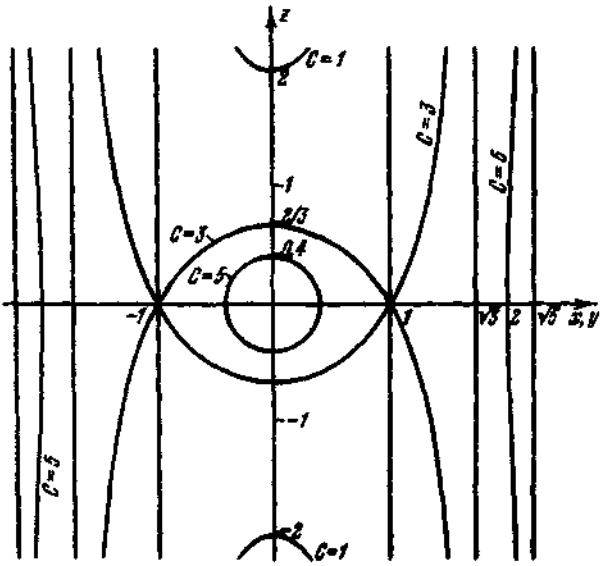


Рис. 10.2. Кривые нулевой скорости в плоскостях xz и yz для $\mu=0$, $C=5$, 3 и 1.

$r_0<C^{1/2}$. Радиус, к которому асимптотически стремится цилиндр при $z\to\infty$, равен $r_\infty=C^{1/2}$.

На рис. 10.2 показаны кривые нулевой скорости в плоскости xz для задачи двух тел. Вследствие симметрии этот рисунок можно отнести и к пересечению поверхностей нулевой скорости с плоскостью yz. На кривых указаны соответствующие значения постоянной Якоби. Кривые для $C=5$ пересекают оси x и y в точках $x'=y'=\pm0{,}414214$ и $x''=y''=\pm2$, а ось z — в точках $z=\pm2/C=\pm0{,}4$. Вертикальные асимптоты проходят через точки $x_\infty=y_\infty=r_\infty=\pm5^{1/2}=\pm2{,}236068$. На рис. 10.3 показаны окружности нулевой скорости в плоскости xy. Радиусы для $C=5$ равны $r'=0{,}414214$ и $r''=2$.

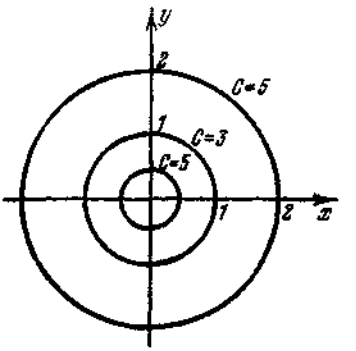


Рис. 10.3. Кривые нулевой скорости в плоскости xy для $\mu=0$, $C=5$ и 3.

Так как значение постоянной Якоби убывает, начиная с $C>3$, то внутренняя яйцевидная поверхность расширяется, а наружная цилиндрическая поверхность стягивается. При $C=3$ пересечения цилиндрической поверхности с плоскостью xy и яйцевидной поверхности с плоскостью xy представляют одну и ту же окружность единичного радиуса (см. рис. 10.3). Радиус цилиндра, для которого поверхность нулевой скорости является асимптотической, равен $\pm 3^{1/2}$. Пересечение оси z с яйцевидной поверхностью происходит в точках $z=\pm 2/3$ (см. рис. 10.2).

При $C<3$ уравнение

$$C=r^2+2/r$$

не имеет действительных положительных корней, и следовательно, плоскость xy не имеет общих точек с поверхностью нулевой скорости. Пересечения поверхности с осью z происходят в точках $z=\pm 2/C$, и уравнением кривой пересечения поверхности с плоскостью zx остается **уравнение (11).**

Решая уравнение (8) относительно z, получаем

$$z=\pm\left[\frac{4}{(C-r^2)^2}-r^2\right]^{1/2}. \tag{14}$$

Эта поверхность асимптотически стремится к цилиндру $r=C^{1/2}$. На рис. 10.2 можно видеть кривую пересечения поверхности нулевой скорости с плоскостью zx (или плоскостью zy) для $C=1$. Асимптотами являются прямые $x_\infty=\pm 1$.

Движение ограничено для больших значений постоянной Якоби внутренней яйцевидной поверхностью и наружной поверхностью цилиндра, так что область между яйцевидным телом и цилиндром исключается. При $C<3$ движение в плоскости xy не имеет границ, и частица может двигаться всюду в этой плоскости. Запрещенные области в плоскостях zx и yz показаны на рис. 10.2. Снаружи поверхности (для значений z, лежащих между двумя значениями, определяемыми правой частью уравнения (14)) движение возможно. Когда $C\to 0$, пересечение запрещенного объема с осью z перемещается к $z=\pm\infty$. На этом мы закончим рассмотрение случая $\mu=0$.

10.2.2.3. Поверхности нулевой скорости для ограниченной задачи. В этом пункте мы исследуем эквипотенциальные поверхности $2\Omega(x, y, z)=C$, где функция Ω определяется уравнениями (2) и (3).

Заметим сначала, что когда $z\to\pm\infty$, $\Omega\to\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\mu(1-\mu)$ и, следовательно, $x^2+y^2\to C-\mu(1-\mu)=\bar{C}$. Таким образом, мы видим, что поверхности нулевой скорости асимптотически приближаются к круглым цилиндрам с радиусами $\bar{C}$, когда поверхности $2\Omega=C$ все более и более удаляются от плоскости xy.

Линия, параллельная оси z, либо пересекает поверхность нулевой скорости в двух точках, либо вообще ее не пересекает. В этом случае $x=x_0$, $y=y_0$ фиксированы и уравнение для C имеет вид

$$C=\mu(1-\mu)+x_0^2+y_0^2+2(1-\mu)/r_{10}+2\mu/r_{20},$$

где

$$r_{10}=[(x_0-\mu)^2+y_0^2+z^2]^{1/2},$$
$$r_{20}=[(x_0-\mu+1)^2+y_0^2+z^2]^{1/2}.$$

Следовательно,

$$C=C^*+\frac{2(1-\mu)}{(\alpha^2+z^2)^{1/2}}+\frac{2\mu}{(\beta^2+z^2)^{1/2}}, \tag{15}$$

где

$$C^*=\mu(1-\mu)+x_0^2+y_0^2,$$
$$\alpha^2=(x_0-\mu)^2+y_0^2,$$
$$\beta^2=(x_0-\mu+1)^2+y_0^2.$$

Функция $C=C(z)$ обладает следующими свойствами:

а) $C(z)=C(-z)$,

б) $C(0)=C_{\max}=C^*+2(1-\mu)/|\alpha|+2\mu/|\beta|$,

в) $C\to C^*$, когда $z\to\pm\infty$,

г) $dC/dz\leqslant 0$; знак равенства относится к случаям, когда $z=0$ и $z\to\pm\infty$.

Следовательно, каждому значению C, удовлетворяющему неравенству $C^*<C<C_m$, соответствуют два значения z, равные по величине, но противоположного знака: $z_1=-z_2$. Если C меньше, чем C^* или больше, чем C_m, то линии, параллельные оси z, не пересекают поверхности нулевой скорости.

Пересечение оси z с поверхностью следует из предыдущего, если принять $x_0=y_0=0$. В этом случае

$$C^*=\mu(1-\mu),\quad \alpha=\mu,\quad \beta=1-\mu$$

и

$$C_m=C^*+\frac{2(2\mu^2-2\mu+1)}{\mu(1-\mu)}.$$

Следовательно, пересечения оси z с поверхностями нулевой скорости имеют место при условии, что

$$0<\bar{C}<\frac{2(2\mu^2-2\mu+1)}{\mu(1-\mu)},$$

где $\bar{C}=C-\mu(1-\mu)$.

Заметим, что в обычном диапазоне изменения μ

$$0\leqslant\mu\leqslant 1/2$$

мы имеем при $x_0=y_0=0$

$$0\leqslant C^*\leqslant 1/4,\quad \infty\geqslant C_m\geqslant 17/4,\quad 0\geqslant\frac{dC_m}{d\mu}\geqslant-\infty.$$

Выскажем в отношении трехмерной модификации некоторые дополнительные соображения. Из уравнений (2) и (3) следует, что если значения постоянной Якоби велики, то либо x^2+y^2 должно быть велико, либо r_1 должно быть мало, либо, наконец, r_2 должно быть мало. В первом случае, когда к тому же $z=0$, мы имеем наружные овалы в плоскости xy с радиусами, меньшими, чем $\bar{C}^{1/2}$, а когда $z\to\infty$, мы имеем асимптотические цилиндры с радиусами $\bar{C}^{1/2}$, о чем говорилось выше. Когда r_1 или r_2 малы, мы имеем приблизительно сферические поверхности нулевой скорости вокруг основных тел с радиусами

$$r_{10}\approx\frac{2(1-\mu)}{C}\text{ и }r_{20}\approx\frac{2\mu}{C},$$

как было найдено ранее для двумерного случая (уравнения (96) и (99) § 4.7). Таким образом, полная картина для большого значения C, т. е. для C, превышающего C_2, представляется из трех отдельных поверхностей: двух яйцевидных поверхностей, охватывающих два основных тела, и цилиндрической поверхности снаружи яйцевидных поверхностей. Эта последняя поверхность пересекает плоскость xy по овалу и асимптотически приближается по форме к круглому цилиндру радиуса $\bar{C}^{1/2}$, когда $|z|\to\infty$. Осью этого цилиндра служит координатная ось z, и цилиндр симметричен относительно плоскости xy.

Когда значение C убывает, внутренние овалы достигают сначала точки L_2. При этом образуется знакомая нам кривая в форме восьмерки в плоскостях xy и xz. Соответствующая этому трехмерная картина состоит из двух яйцевидных поверхностей, касающихся друг друга в точке L_2. Пересечение большей яйцевидной поверхности (расположенной вокруг большей массы, равной $1-\mu$) с плоскостью, проходящей через точку $P_1(\mu, 0, 0)$ и параллельной плоскости zy, представляет собой овал (при условии, что $C\geqslant C_2$), который описывается уравнением

$$C=\mu+y^2+\frac{2(1-\mu)}{(y^2+z^2)^{1/2}}+\frac{2\mu}{(1+y^2+z^2)^{1/2}}. \tag{16}$$

Этот овал вытянут в направлении оси y. Чтобы показать это, рассмотрим точки пересечения $(\mu, y_0, 0)$ и $(\mu, 0, z_0)$ этого овала с плоскостями xy и xz. Из предыдущего уравнения имеем

$$C=\mu+y_0^2+\frac{2(1-\mu)}{|y_0|}+\frac{2\mu}{(1+y_0^2)^{1/2}}$$

и

$$C=\mu+\frac{2(1-\mu)}{|z_0|}+\frac{2\mu}{(1+z_0^2)^{1/2}}.$$

Так как $dC/dz_0<0$, то $y_0>z_0$, что и требовалось доказать.

Овал, получаемый при пересечении поверхности нулевой скорости, соответствующей $C\geqslant C_2$, с плоскостью $x=\mu-1$, тоже вытянут в направлении оси y и имеет ту же общую форму, что и описанный выше овал, получаемый при пересечении с плоскостью $x=\mu$.

При дальнейшем уменьшении C наружная цилиндрическая поверхность приходит в соприкосновение с трехмерной асимметричной гантелеобразной поверхностью в точке L_1 плоскости xy. При $C=3$ поверхность касается плоскости xy в точках L_4 и L_5, но при $C<3$ пересечения могут иметь место только в плоскостях xz и yz.

Кривых нулевой скорости в плоскости xy при $C<3$ не существует. Минимальное значение C для двумерного случая, как мы видели в гл. 4, равно трем. В двумерном случае

$$C=(1-\mu)(r_1^2+2/r_1)+\mu(r_2^2+2/r_2),$$

где $r_1^2=(x-\mu^2)+y^2$ и $r_2^2=(x-\mu+1)^2+y^2$, так что первый и второй члены в этом уравнении имеют наименьшие значения при $r_1=r_2=1$, следовательно, $C_{\min}=3$.

Для трехмерного случая наименьшее значение C равно $C^*=\mu(1-\mu)$ и соответствует $x=y=0$ и $z\to\pm\infty$. Поэтому в качестве постоянной Якоби удобно использовать величину $\bar{C}=C-\mu(1-\mu)$, минимальное значение которой равно нулю, независимо от значения массового параметра.

Запрещенные и допустимые области движения можно получить следующим образом. Для больших значений C движение может иметь место либо внутри яйцевидных поверхностей, охватывающих основные тела, либо снаружи цилиндрической поверхности. Когда $C\to C_2$, обе яйцевидные поверхности сближаются и при $C=C_2$ допустимый объем включает в себя оба основных тела вместе с установленной между ними связью. Во время этого процесса наружная цилиндрическая поверхность стягивается, но сохраняет свое отдельное опознание. Когда $C=C_1$, трехмерная гантелеобразная поверхность касается цилиндра в точке L_1, и образуется новая коническая точка L_1. При $C<C_1$ мы больше уже не имеем замкнутых поверхностей, и трехмерная гантелеобразная поверхность раскрывается в точке L_1. Пересечения с плоскостью xy теперь представляют собой обычные подковообразные кривые, которые для поверхностей, симметричных относительно плоскости xy, имеют форму якоря. Движение возможно всюду снаружи подковообразных кривых

(в плоскости xy) и снаружи поверхностей. Когда $3<C<C_3$, мы имеем две отдельные поверхности, пересекающие плоскость xy по замкнутым кривым вокруг L_4 и L_5; при $C<3$ пересечения пропадают. Движение возможно всюду в плоскости xy, а также выше нее и ниже нее, до тех пор пока частица не достигнет запрещенных объемов, окружающих ось z. На рис. 10.4, 10.5 и 10.6 показаны пересечения поверхностей нулевой скорости с

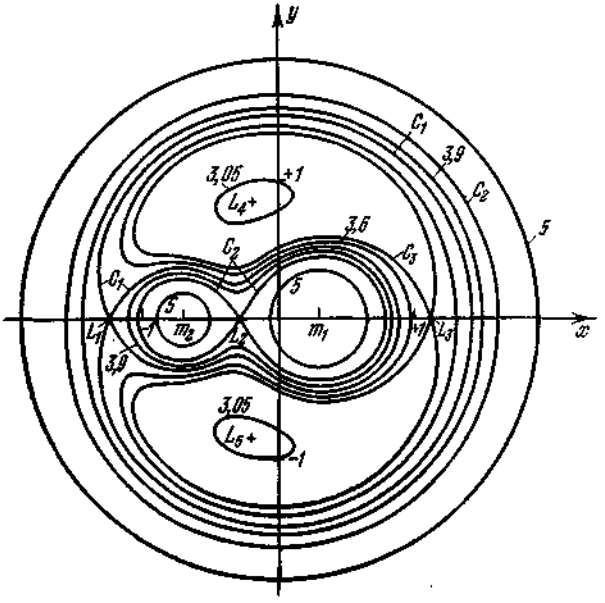


Рис. 10.4. Пересечения поверхностей нулевой скорости с плоскостью xy для $\mu=0{,}3$, $C=5$, C_2, 3,9, C_1, 3,6, C_3, 3,05 и 3.

плоскостями xy, xz и yz для $\mu=0{,}3$ и $C=5$, $C_2\approx4{,}13$, $C=3{,}9$, $C_1\approx3{,}77$, $C=3{,}6$, $C_3\approx3{,}50$, $C=3{,}05$, $C=3$ и $C=2$.

10.2.3. Трехмерное движение вокруг точек равновесия. Уравнения в вариациях в трехмерном случае принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}&=\Omega^0_{xx}\xi+\Omega^0_{xy}\eta+\Omega^0_{xz}\zeta,\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}&=\Omega^0_{yx}\xi+\Omega^0_{yy}\eta+\Omega^0_{yz}\zeta,\\ \ddot{\zeta}&=\Omega^0_{zx}\xi+\Omega^0_{zy}\eta+\Omega^0_{zz}\zeta,\end{aligned}\qquad(17)$$

где $x=a+\xi$, $y=b+\eta$, $z=c+\zeta$, а индекс 0 указывает на то, что вторые производные вычисляются в точке $(a,\ b,\ c)$. Вторые частные производные функции Ω, входящие в последнее

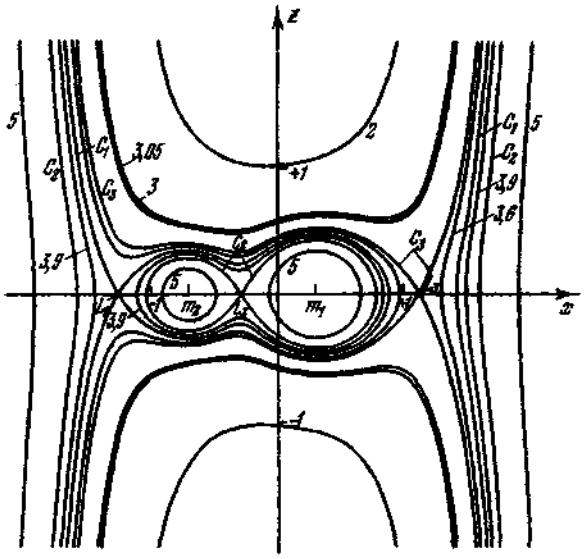


Рис. 10.5. Пересечения поверхностей нулевой скорости с плоскостью xz для $\mu=0{,}3$, $C=5$, C_2, 3,9, C_1, 3,6, C_3, 3,05, 3 и 2.

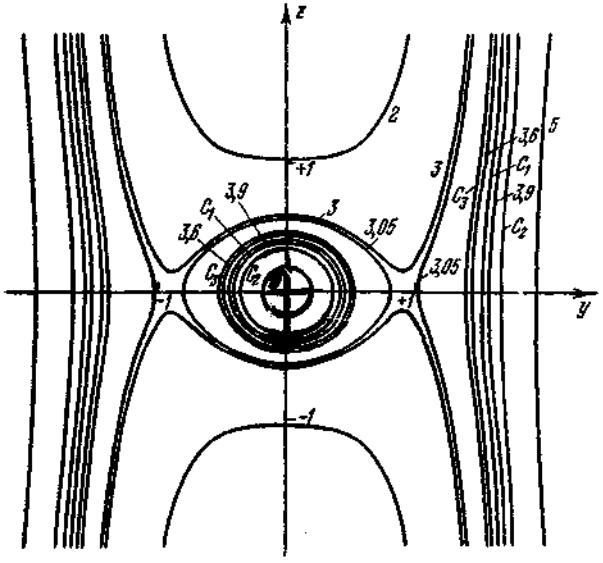


Рис. 10.6. Пересечения поверхностей нулевой скорости с плоскостью yz для $\mu=0{,}3$, $C=5$, C_2, 3,9, C_1, 3,6, C_3, 3,05, 3 и 2.

уравнение (17), равны

$$\Omega_{zx}=3z\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^5}+\frac{\mu(x-\mu+1)}{r_2^5},$$
$$\Omega_{zy}=3zy\left[\frac{1-\mu}{r_1^5}+\frac{\mu}{r_2^5}\right], \tag{18}$$
$$\Omega_{zz}=3z^2\left[\frac{1-\mu}{r_1^5}+\frac{\mu}{r_2^5}\right]-\left[\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right].$$

В плоскости xy имеем $\Omega_{zx}=\Omega_{zy}=0$, а

$$\Omega_{zz}(x, y, 0)=-\left[\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right]<0. \tag{19}$$

Как было показано в гл. 4, вторые производные функции Ω всюду на оси x, за исключением точек, где находятся основные тела, имеют следующий вид:

$$\Omega_{xx}(x, 0, 0)=1+2\left[\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right]=1-2\Omega_{zz}(x, 0, 0),$$
$$\Omega_{yy}(x, 0, 0)=1-\left[\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right]=1+\Omega_{zz}(x, 0, 0).$$

В треугольных точках либрации $\Omega_{zz}(L_{4,5})=-1$, а в коллинеарных точках равновесия

$$\Omega_{zz}(L_{1,2,3})=\Omega_{yy}(L_{1,2,3})-1<0. \tag{20}$$

Следовательно, согласно § 4.6 имеем

$$-8\leqslant\Omega_{zz}(L_{1,2,3})\leqslant-1.$$

Так как смешанные частные производные $\Omega_{xz}=\Omega_{yz}=0$, то третье уравнение (17) можно отделить от двух первых и рассматривать независимо от них во всех пяти точках либрации. Поэтому движение в плоскости xy согласно линеаризованным уравнениям (17) не оказывает влияния на движение в направлении оси z. Заметим, что смешанные производные функции Ω высшего порядка не равны нулю, и следовательно, между двумя первыми уравнениями (17) и третьим уравнением существует нелинейная взаимная связь.

В линейном случае движение вдоль оси z описывается уравнением

$$\ddot{\zeta}=\Omega_{zz}^0\zeta. \tag{21}$$

Так как в треугольных точках либрации $\Omega_{zz}^0=\Omega_{zz}(L_{4,5})=-1$, то угловая скорость колебания вдоль оси z такая же, как среднее движение основных тел. Если принять предположения ограниченной задачи, то период малых колебаний перпендикулярно плоскости эклиптики Троянцев будет таким же, как орбитальный период Юпитера.

Период движения, нормального к плоскости xy, в коллинеарных точках равен $2\pi/[-\Omega_{zz}(L_i)]^{1/2}$. Так как движения вдоль

оси z в линеаризованном случае всегда представляют собой чисто гармонические колебания, то они относятся к «критической» категории, и относительно нелинейной устойчивости в этом случае предсказать ничего нельзя.

На рис. 10.7, 10.8 и 10.9 показаны угловые скорости в плоскости xy (s_1, s_2, s_3) и в перпендикулярном к ней направлении (s_z) в трех коллинеарных точках либрации для линеаризованной системы. Значения s_i, взятые из Приложения I гл. 5, и значения s_z, вычисленные по формуле $s_z=(1-\Omega_{yy})^{1/2}$, всегда мало отлнчаются друг от друга. Имеет место соизмеримость почти что один к одному, что существенно, в особенности для малых и практически важных значений массового параметра.

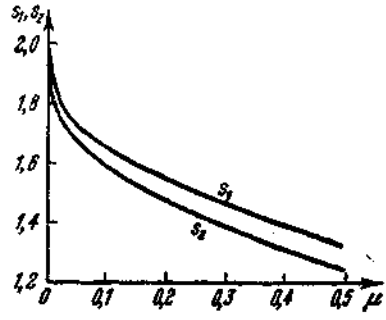


Рис. 10.7. Угловая скорость в в плоскости xy (s_1) и в направлении оси z (s_z) в точке L_1.

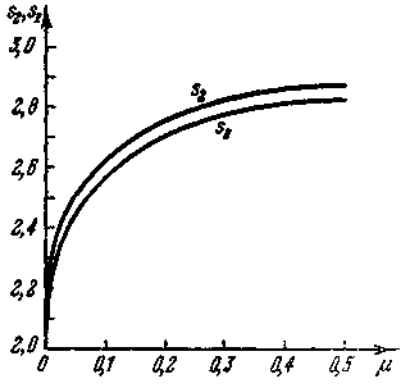


Рис. 10.8. Угловая скорость в плоскости xy (s_2) и в направлении оси $z(s_z)$ в точке L_2.

Эта почти-соизмеримость еще ясней выражена в треугольных точках либрации, где линеаризованная теория дает среднее движение вдоль направления оси z, равное единице, $s_z=1$, и угловая скорость короткопериодического движения для малых значений μ может быть аппроксимирована выражением $1-(27/8)\,\mu$. Безразмерный период результирующего долгопериодического возмущения имеет порядок μ^{-1}, что совершенно аналогично условию почти-резонанса между средним движением основных тел и короткопериодическим движением вокруг точек $L_{4,5}$ в плоскости xy.

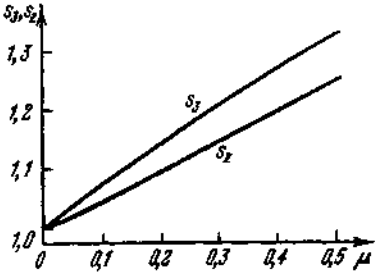


Рис. 10.9. Угловая скорость в плоскости $xy(s_3)$ и в направлении оси $z(s_z)$ в точке L_3.

Возвращаясь теперь к уравнению (17) или объединяя уравнение (21) с уравнением (19) § 5.3, можно получить решение трехмерных линеаризованных уравнений движения вокруг коллинеарных точек либрации

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \cos s_i t + \frac{\eta_0}{\beta_3} \sin s_i t, \\ \eta &= \eta_0 \cos s_i t - \beta_3 \xi_0 \sin s_i t, \\ \zeta &= C_1 \cos s_z t + C_2 \sin s_z t, \end{aligned} \tag{22}$$

где s_i $(i=1, 2, 3)$ есть угловая скорость вокруг одной из коллинеарных точек либрации, а s_z — угловая скорость по направлению оси z.

Периодические орбиты конечных размеров, которые могут быть образованы из этого решения, можно, как это предлагает Мультон, разбить на три семейства в соответствии с частным решением, полученным продолжением:

а)
$$\begin{aligned} \xi &= \eta = 0, \\ \zeta &= C_1 \cos s_z t + C_2 \sin s_z t; \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \cos s_i t + \frac{\eta_0}{\beta_3} \sin s_i t, \\ \eta &= \eta_0 \cos s_i t - \beta_3 \xi_0 \sin s_i t, \\ \zeta &= 0; \end{aligned}$$

в)
$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \cos s_i t + \frac{\eta_0}{\beta_3} \sin s_i t, \\ \eta &= \eta_0 \cos s_i t - \beta_3 \xi_0 \sin s_i t, \\ \zeta &= C_1 \cos \frac{q}{p} s_i t + C_2 \sin \frac{q}{p} s_i t, \end{aligned}$$

где через q/p обозначено рациональное число, так что

$$q/p = s_z/s_i < 1.$$

Иначе говоря, орбиты класса (в) являются периодическими в том случае, если два средних движения s_z и s_i соизмеримы.

Класс (а) представляет особый интерес, так как благодаря простоте его общая форма может быть установлена без особого труда. Заметим, что общее решение, данное для ζ, можно специализировать и представить в виде

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{s_z} \sin s_z t.$$

Таким образом, образующее решение линеаризованной системы в случае (а) будет иметь следующие начальные условия:

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0, \quad \dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0, \quad \dot{\zeta}_0 = \varepsilon.$$

Решение нелинейной системы принимает вид

$$\begin{aligned}\xi &= \varepsilon^2(A + B\cos 2s_z t) + O(\varepsilon^3),\\ \eta &= \varepsilon^2 D \sin 2s_z t + O(\varepsilon^3),\\ \zeta &= \frac{\varepsilon}{s_z}\sin s_z t + O(\varepsilon^3),\end{aligned} \tag{23}$$

где постоянные A, B и D зависят от характеристик рассматриваемой коллинеарной точки либрации, т. е. в конечном счете от значения μ.

На рис. 10.10 показаны трехмерные орбиты вблизи коллинеарных точек либрации. Проекции на плоскость $\xi\eta$ представляют собой кривые, близкие к эллипсам, проекции на плоскость $\xi\zeta$ — параболы и проекции на плоскость $\eta\zeta$ — кривые, имеющие форму восьмерки. Результаты численного интегрирования приводятся и анализируются в следующем пункте.

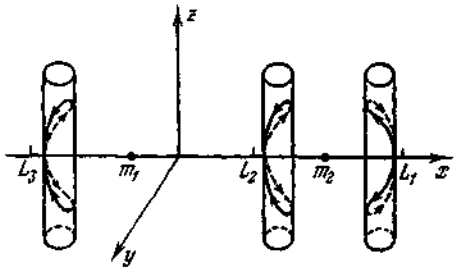


Рис. 10.10. Пространственные орбиты в окрестности коллинеарных точек либрации (Мультон, 1920 [14]).

10.2.4. Трехмерные орбиты. Здесь мы рассмотрим несколько специальных классов трехмерных периодических орбит и одну группу трехмерных непериодических орбит.

А. Согласно классификации Пуанкаре (см. гл. 8), периодические орбиты третьего рода определяются как орбиты, образованные из орбит для задачи двух тел с $e \neq 0$ и $i \neq 0$. Следовательно, образующая эллиптическая орбита лежит в плоскости, не совпадающей с плоскостью xy, в которой движутся основные тела. Подкласс таких орбит образуется из *круговых* орбит с $e = 0$, $i \neq 0$. Для того чтобы установить семейство периодических орбит, рассмотрим следующие начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad x \neq 0, \quad y = z = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} \neq 0, \quad \dot{z} \neq 0.$$

Потребуем еще, чтобы для образующей орбиты задачи двух тел при $t = T/4$ выполнялись условия

$$x \neq 0, \quad y = 0, \quad z \neq 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} \neq 0, \quad \dot{z} = 0.$$

Эта орбита имеет период, равный T, и обладает симметрией относительно плоскостей xy и xz. Мы видим, что если $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ есть решение уравнений движения, то $x(-t)$, $-y(-t)$, $\pm z(-t)$ тоже будет решением. Можно показать посредством аналитического продолжения, что двоякосимметрич-

ные круговые орбиты, определяемые указанными выше начальными условиями, могут быть использованы для образования класса периодических орбит при достаточно малых значениях массового параметра. Доказательство существования таких орбит можно провести в прямоугольных координатах (как это делал Гудас) или же в переменных Делоне в комбинации с переменными Пуанкаре (как это делал Джеффрн) (см. пункты 7.7.5 и 10.2.1).

Следуя последнему методу, будем иметь для гамильтониана следующее выражение:

$$F=\frac{1}{2}(q_1+q_3)^{-2}+q_1-\frac{1}{2}(q_2^2+p_2^2)+\mu F_1,$$

где переменные определяются равенствами

$$q_1=L-G+H, \qquad p_1=l-l',$$
$$q_2=[2(L-G)]^{1/2}\cos(l'-\bar{\omega}), \qquad p_2=[2(L-G)]^{1/2}\sin(l'-\bar{\omega}),$$
$$q_3=G-H, \qquad p_3=l-\Omega.$$

Здесь l' есть долгота Юпитера, другие символы объясняются в пункте 10.2.1 А.

Функциональный определитель, введенный в § 8.4, равен

$$D=\frac{\partial(P_1, P_2, P_3)}{\partial(t, Q_1, Q_2)},$$

где Q_1, Q_2 — начальные условия для q_1, q_2, а P_1, P_2, P_3 — решения задачи двух тел. Вычисляя D при $t=T/4$, получаем

$$D=\frac{-3\sin T/4}{(Q_1+Q_3)^4}\neq 0,$$

где Q_3 есть начальное значение q_3.

Имеется большое число периодических орбит таких семейств, вычисленных Гудасом. На рис. 10.11 показана одна такая орбита для $\mu=0{,}1$ со следующими начальными условиями:

$$x(0)=0{,}34508360, \quad y(0)=z(0)=\dot{x}(0)=0,$$
$$\dot{y}(0)=0{,}25664780, \quad \dot{z}(0)=1{,}2911014.$$

Цифры на кривых указывают протекшее безразмерное время.

Другое семейство периодических орбит, существование которого доказал Е. П. Аксенов, обладает тем свойством, что орбиты проходят снаружи обоих основных тел. Эти орбиты можно обнаружить при трехмерных обобщениях «наружных» орбит, рассмотренных в гл. 8 и 9. Вековое движение узла этих орбит является характерной чертой этих решений.

Б. Точным решением ограниченной задачи — единственным таким решением снаружи равновесных конфигураций — является одномерное движение вдоль оси z. Если движение тела бес-

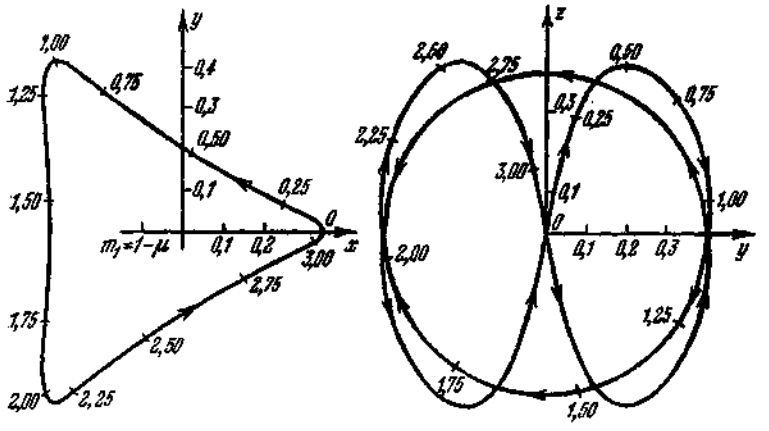


Рис. 10.11. Двоякосимметричная пространственная периодическая орбита вокруг m_1 для $\mu=0{,}1$ (Гудас, 1963 [19]).

конечно малой массы ограничнть осью z, то решение можно записать в виде

$$x(t)=0, \quad y(t)\equiv 0, \quad z=z(t). \tag{24}$$

Уравнения движения (1) в этом случае принимают вид

$$\Omega_x(0, 0, z)=0, \quad \Omega_y(0, 0, z)=0, \quad \Omega_z(0, 0, z)=\ddot{z}. \tag{25}$$

Из первого уравнения (25) находим

$$r_1(0, 0, z)=r_2(0, 0, z)$$

или

$$\mu=1/2.$$

Таким образом, мы имеем задачу двух тел равной массы (1/2), симметрично расположенных в точках $P_1(1/2, 0, 0)$ и $P_2(-1/2, 0, 0)$. Третье тело находится в точке $P(0, 0, z)$ и движется по оси z.

Из третьего уравнения (25) получаем

$$\ddot{z}=-\frac{z}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)^{3/2}}, \tag{26}$$

так как

$$\Omega_z=-\frac{z}{2}\left(\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}\right)$$

и

$$r_1^2 = r_2^2 = 1/4 + z^2.$$

Интеграл энергии этой динамической системы с одной степенью свободы равен

$$\dot{z}^2 = 2\Omega(0, 0, z) - C, \tag{27}$$

где

$$\Omega(0, 0, z) = \frac{1}{8} + \frac{1}{(z^2 + 1/4)^{1/2}}. \tag{28}$$

Дифференциальное уравнение первого порядка для задачи можно получить, если уравнение (28) подставить в уравнение (27). Проделав это, будем иметь

$$\dot{z}^2 = \frac{2}{(z^2 + 1/4)^{1/2}} - \bar{C}, \tag{29}$$

где $\bar{C}$, как и раньше, равно

$$\bar{C} = C - \mu(1 - \mu) = C - 1/4.$$

Расстояние между каждым из основных тел и третьим телом равно

$$r = \left(z^2 + \frac{1}{4}\right)^{1/2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (29), находим

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{2}{r} - \bar{C}\right)(1 - 1/4r^2). \tag{30}$$

Вводя вместо r новую зависимую переменную

$$\bar{u} = 1/r,$$

получаем уравнение в виде

$$(\dot{\bar{u}})^2 = \bar{u}^4 (2\bar{u} - \bar{C})\left(1 - \frac{\bar{u}^2}{4}\right). \tag{31}$$

Для упрощения изменим масштаб и введем $u = \bar{u}/2$ и $c = \bar{C}/4$. В этих обозначениях квадратура уравнения (31) принимает вид

$$\int_1^u \frac{du}{4u^2 [(u - c)(1 - u^2)]^{1/2}} = \int_0^t dt. \tag{32}$$

Нижние пределы интегралов соответствуют начальным условиям: при $t = 0$ $u = 1$ или $\bar{u} = 2$ или $r = 1/2$ и $\dot{z} = (4 - \bar{C})^{1/2}$. Третья частица начинает свое движение из начала координат.

Если $\bar{C}>4$, или $c>1$, то $C>4{,}25=C_2$ и движение в начале координат невозможно.

Квадратуре (32) можно придать форму Лежандра, если положить

$$v^2=(1-u)/(1-c) \text{ и } k^2=(1-c)/2.$$

Тогда будем иметь

$$\int_0^v \frac{dv}{(1-2k^2v^2)^2\,[(1-v^2)(1-k^2v^2)]^{1/2}}=2^{3/2}t. \tag{33}$$

Период будет равен

$$T=\frac{\pi}{2^{1/2}}\left(1+\frac{9}{4}k^2+\frac{345}{64}k^4+\ldots\right).$$

Посредством обращения квадратуры (33) получаем общее решение в виде эллиптического интеграла третьего рода. Эта задача изучена достаточно подробно и обобщена на случаи 1) когда основные тела движутся по эллиптическим орбитам и 2) когда масса третьего тела не является бесконечно малой.

Линеаризованную задачу можно получить из уравнения (33) или непосредственно из уравнения (26), когда изучается движение вдоль оси z вблизи начала координат. Пусть $z=\zeta$ будет вариацией, и следовательно, величиной ζ^2 можно будет пренебречь. Тогда из уравнения (26) будем иметь

$$\ddot{\zeta}+8\zeta=0, \tag{34}$$

т. е. уравнение гармонического осциллятора со средним движением, равным $2^{3/2}$, или с периодом, равным $T=\pi/2^{1/2}$.

В. Систематическое изучение трехмерных непериодических орбит, связывающих окрестности Земли и Луны, на основе модели ограниченной задачи, позволяет установить некоторые весьма интересные свойства. Ниже мы в общих чертах рассмотрим метод Хоулкера.

Рассмотрим траектории, удовлетворяющие следующим требованиям.

1) Начальными условиями являются: $r_1=R_e+h$ и $\dot{r}_1=0$, где r_1 есть радиальное расстояние между центром Земли и космическим кораблем, R_e — радиус Земли и $\dot{r}_1$ — радиальная составляющая скорости. Эти начальные условия означают, что траектория начинается в ее перигее на высоте h над Землей.

2) Конечными условиями являются $r_2=R_m+h$ и $\dot{r}_2=0$, где r_2 есть радиальное расстояние между центром Луны и космическим кораблем, а R_m — радиус Луны. Другими словами, ближайшая к Луне точка траектории находится на высоте h.

3) Время между двумя этими точками задано и зафиксировано значением ΔT.

Задача теперь состоит в том, чтобы найти семейство траекторий, для которых h и ΔT заданы. Существенная особенность решения этой задачи заключается в том, что такие начальные условия и требования позволяют получить семейства с важными топологически инвариантными свойствами.

Для того чтобы ясней представить это, рассмотрим следующий пример. Пусть $h=185$ км и $\Delta T=72$ час. Поиск таких траекторий начинается с выбора начальных условий, для которых в перигее $z=0$ и $\dot{z}=0$. Это — двумерные орбиты в плоскости xy, они полностью определяются заданием долготы точки запуска и величины начальной скорости, см. рис. 10.12. Существует четыре двумерные траектории, которые удовлетворяют указанным

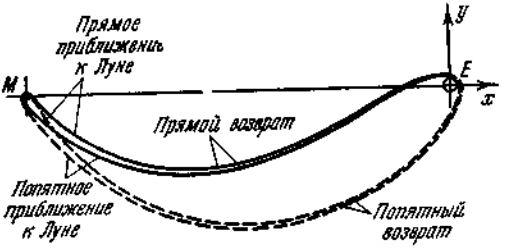


Рис. 10.12. Плоские изохронные траектории Земля—Луна (Хоулкер, 1963 [26]).

выше требованиям: две траектории, оставляющие Землю в прямом направлении, и две — в попятном направлении. Одна из каждых этих двух орбит приближается к Луне по прямому направлению, другая — по попятному. Эти четыре двумерные орбиты определяют две области на круге радиуса r_1 в плоскости xy. Долготы двух точек отлета, дающие орбиты с прямым отлетом, равны обе приблизительно 48°.

Следующий этап состоит в отыскании в окрестности этой области в плоскости xy ненулевых азимутов и соответствующих величин вектора скорости, таких, чтобы траектории удовлетворяли перечисленным выше требованиям. Теперь они представляют собой трехмерные орбиты, имеющие свои перигеи в плоскости xy и начальные скорости, не лежащие в этой плоскости. Нахождение такого семейства траекторий с прямым отлетом имеет целью исследовать Луну в трех измерениях. Аналогичное семейство можно получить, если начинать с области в плоскости xy на круге радиуса r_1 и с приближенной долготой двумерных траекторий с понятным отлетом. Следует подчеркнуть, что положение точки отлета до сих пор меняется одномерным обра-

зом. Все точки отлета расположены на окружности радиуса r_1 вокруг Земли в плоскости xy. Векторы начальной скорости изменяются по величине, но направление их совпадает с касательной к сфере радиуса r_1 вокруг Земли. Комбинируя соответствующим образом долготу точки отлета и величину и азимут начальной скорости, можно найти траектории, проходящие на расстоянии 185 км от поверхности Луны, при условии, что полное время полета равно $\Delta T = 72$ час. Траектории, рассматриваемые в этом параграфе, можно разбить на два семейства: одно вокруг точки отлета двумерной орбиты с прямым отлетом и другое вокруг точки отлета двумерной орбиты с попятным отлетом.

Эти два семейства обладают рядом характерных свойств (которые выше мы определили как топологически инвариантные), раскрытию которых мы обязаны в первую очередь Хоулкеру. Перечислим их:

1) Геометрические места точек лунных траекторий, ближе всего расположенных к Луне, представляют собой замкнутые кривые, близкие к окружностям.

2) Если траектории продолжить за их точки, ближе всего расположенные к Луне, то все они пересекут линию, соединяющую центр Луны с центром указанной в пункте (1) окружности, приблизительно в одной и той же точке.

3) Точки отлета орбит семейства образуют небольшую дугу окружности (в несколько градусов) радиуса r_1.

4) Векторы начальной скорости образуют с плоскостью xy углы не более $\pm 5°$.

5) Каждое семейство плотно охватывает Луну однопараметрическим образом.

Траектории, удовлетворяющие первоначальным требованиям, обладают этими свойствами, *независимо* от наклонения плоскости окружности, на которой они образованы. Другими словами, описанные выше два семейства имеют свои точки отлета в плоскости xy на окружности радиуса r_1. Совокупность точек отлета образует, разумеется, сферу радиуса r_1 вокруг Земли. Рассмотрим теперь точку в плоскости xy на окружности радиуса r_1, лежащую на полпути между областями, из которых начинаются описанные выше два семейства. Линия, соединяющая эту точку с центром Земли, может быть принята в качестве линии узлов, через которую проходят плоскости изменяющегося наклонения, пересекающие сферу радиуса r_1 по большим кругам. Наклонение первоначального большого круга, дающего два указанных выше семейства, равно нулю. Результатом фундаментальной важности является то обстоятельство, что рассмотренные выше пять свойств сохраняются также и для любого другого наклонения.

Все результаты, приведенные в пункте В, получены численными методами, аналитических доказательств до настоящего времени не получено. Хотя мы рассматривали только траектории от Земли к Луне, однако, используя свойства симметрии, изложенные в гл. 8, можно найти также и орбиты от Луны к Земле.

10.2.5. Регуляризация трехмерной ограниченной задачи. Ранее мы показали, что эксцентричная аномалия, применяемая вместо времени в качестве независимой переменной, регуляризует задачу двух тел. Следовательно, тогда, когда третье тело находится в окрестности одного из основных тел, такая локальная регуляризация всегда возможна, даже в том случае, когда движение третьего тела происходит не в плоскости движения основных тел. С другой стороны, известно, что преобразование независимой переменной, хотя и необходимо и достаточно для осуществления локальной регуляризации, с аналитической точки зрения, однако, должно сопровождаться преобразованием координат, для того чтобы достигнуть повышенной численной точности вблизи особой точки. Поэтому вопрос об обобщении двумерных локальных и глобальных регуляризаций на случай трехмерного движения является весьма важным, имеющим большое практическое значение.

Обобщение конформного отображения

$$z = w^2, \tag{35}$$

представляющего по существу преобразование Леви-Чивита (см. гл. 3) на случай трехмерных задач, было осуществлено (как экскурс в четырехмерное пространство) Штифелем и Кустаанхеймо. Основная идея состояла в следующем.

Представим в матричной форме преобразование (35)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{36}$$

а также соответствующее преобразование дифференциалов

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Для облегчения преобразования к многомерным пространствам положим

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad u = u_1, \quad v = u_2$$

и

$$A_2 = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Аналогичное преобразование в n-мерном пространстве можно получить, если найти матрицу A_n, удовлетворяющую следующим требованиям:

1) каждый элемент является однородной линейной функцией от u_i,

2) скалярное произведение двух любых строк равно нулю,

3) каждая строка имеет норму $u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2$.

Этим требованиям, разумеется, удовлетворяет матрица A_2, определяемая формулой (38). Согласно Гурвицу, им удовлетворяет также и матрица A_n, при условии, что $n=1$, 2, 4 или 8. Следовательно, обобщения преобразования Леви-Чивита в указанном здесь смысле и преобразования Кустаанхеймо для четырехмерного пространства возможны. В то же время обобщение на случай трехмерного пространства невозможно.

Четырехмерная форма матрицы преобразования выглядит следующим образом:

$$A_4=\begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}=A_4\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \tag{40}$$

и

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ 0 \end{pmatrix}=2A_4\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Заметим, что произведение последней строки матрицы A_4 и вектора-столбца u_i согласно уравнению (40) тождественно равно нулю, в то время как соответствующее произведение из равенства (41) равно

$$u_4du_1-u_3du_2+u_2du_3-u_1du_4=0. \tag{42}$$

Это уравнение устанавливает соотношение, которому должны удовлетворять четыре дифференциала du_i. Три первые уравнения (41) представляют собой полные дифференциалы, квадратуры которых дают три первых уравнения (40).

Формулами преобразования теперь являются (39) и (40), они отображают четырехмерное пространство u_1, u_2, u_3, u_4 в трехмерное пространство x_1, x_2, x_3. Инверсию этого преобразования можно получить, если учесть, что четыре дифференциала du_i должны удовлетворять уравнению (42).

Введем теперь новую независимую переменную

$$d\tau=dt/r,$$

где

$$r=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}.$$

Интегрирование уравнений движения производится в четырехмерном пространстве u_i. Эти уравнения, например, для возмущенной задачи двух тел в сидерической системе координат имеют вид

$$\frac{d^2u_i}{d\tau^2}+Bu_i=Q_i, \qquad i=1, 2, 3, 4, \tag{43}$$

где $B=\text{const}$, а Q_i обозначает i-ю составляющую функции распределения в системе u_i. Эти составляющие можно получить из равенства

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}=2\tilde{A}_4\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

где P_i обозначают составляющие функции распределения в системе x_i, а матрица $\tilde{A}_4$ связана с результатом транспозиции алгебраического дополнения матрицы A_4, соответствующего последнему элементу (расположенному в 4-й строке и 4-м столбце):

$$\tilde{A}_4=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_4 \\ -u_3 & -u_4 & u_1 \\ u_4 & -u_3 & u_2 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Соответствующая трехмерная глобальная регуляризация также пригодна в качестве обобщения преобразования Биркгофа. Можно показать, что соотношения между тремя переменными x_i и четырьмя переменными u_i имеют следующий вид:

$$x_i=a_i+\frac{c_i(u_j)}{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2}, \qquad \begin{matrix} i=1, 2, 3, \\ j=1, 2, 3, 4. \end{matrix}$$

Постоянные a_i и многочлены c_i третьей степени получены Штифелем и Вальдфогелем.

Трехмерную регуляризацию можно также осуществить посредством инверсии вектора скорости в сочетании с обычным преобразованием времени. Этот метод, хотя и регуляризует особенности, вызываемые столкновениями, однако имеет тот недостаток, что порождает новые особенности во всех тех точках орбиты, где скорость равна нулю.

10.2.6. Приложения. В качестве приложений мы рассмотрим два вопроса: близкие двойные системы (пункт А) и трехмерные непериодические лунные и межпланетные траектории (пункт Б).

А. Некоторые из поверхностей нулевой скорости при изучении двойных звезд называют эквипотенциальными поверхностями Роша. Поверхности гантелеобразной формы, соответствующие $C=C_2$, называют пределом Роша; они представляют собой наибольшие (но еще замкнутые) эквипотенциальные поверхности, содержащие массу соответствующих составляющих. Термин «контактная составляющая» применяется к звезде, которая «заполняет» часть гантелеобразной поверхности; когда обе звезды являются контактными составляющими, систему называют контактной. Случай, когда $C<C_2$, не представляет интереса для исследования двойных звезд, так как при этом не существует отдельных составляющих. С другой стороны, когда $C>C_2$, две яйцевидные поверхности нулевой скорости приближенно выражают формы центрально уплотненных двойных составляющих. Классификация двойных звезд, основанная на сравнении их формы с поверхностями нулевой скорости, весьма удобна и позволяет провести различие между несвязанными, полусвязанными и контактными системами.

Тождественность между некоторыми поверхностями нулевой скорости и эквипотенциальными поверхностями Роша основывается на том факте, что частицы на этих эквипотенциальных поверхностях должны иметь нулевые скорости и что эквипотенциальные поверхности Роша представляют собой поверхности равновесия, которые не расширяются и не сокращаются в размерах.

Б. При изучении трехмерных траекторий, соединяющих окрестность Земли с окрестностью Луны или планет, также можно использовать поверхности нулевой скорости. Эти траектории, называемые часто лунными или межпланетными орбитами, можно получить посредством численного интегрирования трехмерной ограниченной задачи. Однако влияние эксцентриситетов действительных орбит основных тел и возмущающее действие других планет (не учтенное при расчете) могут оказаться столь существенными, что предположениями ограниченной задачи пользоваться будет нельзя. Так называемые точные орбиты между планетами нельзя получить с помощью модели трехмерной ограниченной задачи. Приближенные инженерные оценки часто бывает возможно получить, притом достаточно быстро, на основе простой задачи двух тел. Единственное приложение ограниченной задачи к этой области связано, по-видимому, с получением семейств траекторий и изучением некоторых специальных характеристик таких орбит. Это уже отмечалось нами в пункте 10.2.4 Г, где мы рассмотрели траектории от Земли к Луне и показали, что учет третьего измерения для решения задачи облета Луны имеет существенное значение.

Межпланетные траектории в общем случае связывают окрестности двух планет. На орбиту между планетами оказывает влияние главным образом Солнце, а на последнем ее участке — планета-цель. На том участке орбиты, на котором влияние планеты-цели еще не сказывается, на орбиту могут оказывать возмущающее действие другие планеты, например Юпитер. Такое возмущение можно рассчитать на основе модели ограниченной задачи, в которую входят Солнце, Юпитер и космический корабль. Другую ограниченную задачу можно образовать, приняв в качестве основных тел Землю и Солнце, и рассчитать начальный участок траектории. Наконец, можно принять модель ограниченной задачи, основными телами в которой будут Солнце и планета-цель, и рассчитать последний участок траектории. Сопоставление решений этих ограниченных задач встречает серьезные трудности даже в том случае, когда решения этих трех задач можно представить в аналитическом виде. Как показали Лагерстрём и Геворкян, даже сопоставление орбит для задачи двух тел (в принципе значительно более простой) требует вдумчивого анализа. Кроме того, следует ожидать, что в случае сближения с планетой для достижения необходимой точности потребуется регуляризация (в начале и в конце каждой межпланетной орбиты, а возможно, и в других точках орбиты, как будет показано позже).

В некоторых случаях ограниченная задача не служит удовлетворительной моделью. Общая задача глобальной регуляризации пока не решена, но методы локальной регуляризации, конечно, всегда могут быть применены.

Расчет межпланетных орбит методом численного интегрирования уравнений n тел в общем является довольно грубым, содержит неизвестные неточности и не позволяет сделать достаточно полные выводы (если вообще позволяет сделать какие-либо выводы). Тем не менее для получения точных траекторий метод численного интегрирования уравнений n тел при тщательно подобранных эфемеридах для планет, с локальными регуляризациями, по-видимому, остается единственным методом, которым мы располагаем.

Весьма специальные орбиты, которые можно назвать «облетными» траекториями, приближаются к планетам на близкие расстояния, прежде чем достигают свои конечные точки. Такие траектории могут, например, начаться у Земли, обогнуть Венеру и подойти к Марсу. Регуляризация на трех участках этих орбит может оказаться существенной для эффективного и точного расчета этих траекторий. Предварительный приближенный расчет дуг траекторий можно, конечно, выполнить вполне удовлетворительно на основе динамики задачи двух тел, в особенности если для проверки влияния планет, являющихся

причиной «облета», воспользоваться критерием Тиссерана, изложенным в пункте 1.10 В. Заметим, что критерий Тиссерана не ограничивается двумя измерениями, и общая форма его, получаемая путем модификации уравнения (86) § 1.10, имеет вид

$$1/a+2[a(1-e^2)]^{1/2}\cos i=\text{const}. \tag{46}$$

Это уравнение позволяет рассчитать орбитальные параметры космического корабля: большую полуось a, эксцентриситет e и угол наклонения i после «облета». Угол наклонения — это угол между плоскостью орбиты космического корабля и плоскостью орбиты, которая «ответственна» за «облет». Так как орбитальные плоскости планет близки к плоскости эклиптики, то угол i в уравнении (46) приближенно равен наклонению плоскости орбиты космического корабля к плоскости эклиптики. Пусть, например, a_1 и e_1 будут орбитальными параметрами космического корабля в плоскости эклиптики. Тогда большая полуось после «облета», когда корабль переходит в плоскость, перпендикулярную к плоскости эклиптики, будет равна

$$a_2=\frac{a_1}{1+2[a_1^3(1-e_1^2)]^{1/2}}<a_1. \tag{47}$$

§ 10.3. Эллиптическая ограниченная задача

10.3.1. Введение. Движение основных тел должно удовлетворять дифференциальным уравнениям, составленным для двух гравитационных тел. Следовательно, основные тела могут описывать эллиптические, параболические или гиперболические орбиты. До сих пор в нашей книге мы рассматривали частный случай — круговое движение основных тел. В этом параграфе мы рассмотрим простейшее обобщение — эллиптическое движение основных тел.

Это обобщение, однако, не является тривиальным, и его следствия распространяются значительно дальше, чем при обобщении на случай трехмерного движения, рассмотренного в § 10.2. В то время как трехмерная ограниченная задача имеет интеграл Якоби, эллиптическая задача этого интеграла не имеет. Это свойство эллиптической задачи отличает ее от других обобщений и указывает на возникающие здесь трудности.

Терминология по ограниченной задаче еще не вполне установилась. Случай, когда основные тела движутся по окружностям, часто называют «круговой ограниченной задачей». Мы же называем ее просто «ограниченной задачей». Когда основные тела движутся по эллипсам, задачу называют эллиптической задачей, эллиптически ограниченной задачей, полуогра-

ниченной задачей, псевдоограниченной задачей, астрономической или астероидальной ограниченной задачей и т. д. Мы же будем пользоваться термином «эллиптическая ограниченная задача».

Различные обобщения могут быть объединены. В этом параграфе мы покажем, как сформулировать трехмерную эллиптическую ограниченную задачу и регуляризовать двумерную эллиптическую ограниченную задачу.

10.3.2. Уравнения движения. Дифференциальные уравнения движения ограниченной задачи удобней всего записывать в равномерно вращающейся прямоугольной декартовой системе координат. В этой системе основные тела неподвижны и гамильтониан не зависит явно от времени. Когда же основные тела движутся по эллиптическим орбитам, неподвижное положение основных тел можно обеспечить, выбрав неравномерно вращающуюся, или пульсирующую, систему координат. Однако гамильтониан в этом случае будет зависеть явным образом от независимой переменной. Такую пульсирующую, или колеблющуюся систему координат можно ввести, приняв переменное расстояние между основными телами в качестве базисной длины системы, на которую делятся расстояния. Эта идея позволяет сразу установить, что решение Лагранжа общей задачи трех тел включает случай, когда три тела движутся, скажем, по эллиптическим орбитам и отношения взаимных расстояний остаются постоянными.

В дальнейшем мы будем пользоваться безразмерными переменными и для этого в качестве величины, на которую мы будем делить расстояния и размерные координаты, примем следующее выражение для расстояния между основными телами:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}. \tag{48}$$

Здесь a и e — большая полуось и эксцентриситет эллиптической орбиты одного основного тела вокруг другого, а f — истинная аномалия массы m_1.

Введем также координатную систему, которая вращается с переменной угловой скоростью $\dot{f}$. Для угловой скорости примем следующее выражение:

$$\frac{df}{dt^*} = \frac{k(m_1+m_2)^{1/2}}{a^{3/2}(1-e^2)^{3/2}}(1+e\cos f)^2, \tag{49}$$

где t^* — размерное время. При такой угловой скорости момент количества движения сохраняется неизменным. В задаче двух тел с массами основных тел m_1 и m_2 закон сохранения момен-

та количества движения записывается следующим образом:

$$\dot{f} r^2 = [a(1-e^2) k^2 (m_1+m_2)]^{1/2}.$$

Ниже мы проведем преобразования зависимой и независимой переменных и покажем, что если за независимую переменную принять истинную аномалию, то уравнения движения эллиптической ограниченной задачи запишутся в виде

$$\frac{d^2\zeta}{df^2} + 2i\frac{d\zeta}{df} = \operatorname{grad}_\zeta \omega$$

или

$$\frac{d^2\tilde{\xi}}{df^2} - 2\frac{d\tilde{\eta}}{df} = \frac{\partial\omega}{\partial\tilde{\xi}}, \quad \frac{d^2\tilde{\eta}}{df^2} + 2\frac{d\tilde{\xi}}{df} = \frac{\partial\omega}{\partial\tilde{\eta}}, \tag{50}$$

где $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ — пульсирующие безразмерные координаты третьего тела в неравномерно вращающейся системе координат и

$$\omega = \frac{\Omega}{1+e\cos f}. \tag{51}$$

Уравнения движения (50) обнаруживают полную формальную тождественность с уравнениями, описывающими (круговую) ограниченную задачу. Однако выражение (51), определяющее функцию ω, показывает, что эта тождественность касается лишь формы, а не существа, так как функция ω зависит от координат, а также от независимой переменной f, тогда как функция Ω зависит только от координат.

10.3.2.1. Преобразование к неравномерно вращающейся системе координат. Рассмотрим сначала уравнения движения в неподвижной системе координат в размерных величинах и в переменных, какими мы пользовались в уравнениях (7) в § 1.2 или § 1.6:

$$\frac{d^2X}{dt^{*2}} = -m_1k^2\frac{X-X_1}{R_1^3} - m_2k^2\frac{X-X_2}{R_2^3} \tag{52}$$

и аналогично для Y. Здесь t^* — размерное время,

$$R_i^2 = (X-X_i)^2 + (Y-Y_i)^2, \qquad i=1,2 \tag{53}$$

и X, Y — размерные координаты третьего тела в неподвижной системе координат.

Вращающуюся систему координат $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ можно ввести с помощью формулы (26) § 1.4, положив

$$Z = ze^{if}, \tag{54}$$

где

$$Z = X + iY$$

и

$$z=\tilde{x}+i\tilde{y}.$$

Уравнения движения в комплексной форме в неподвижной системе координат имеют вид

$$\frac{d^2Z}{dt^{*2}}=-m_1k^2\frac{Z-Z_1}{R_1^3}-m_2k^2\frac{Z-Z_2}{R_2^3}. \tag{55}$$

Теперь их можно преобразовать с помощью формулы (54). Аналогично уравнению (30) § 1.4 (но не тождественно) находим формулу для второй производной:

$$\frac{d^2Z}{dt^{*2}}=\left[\frac{d^2z}{dt^{*2}}+2i\frac{df}{dt^*}\frac{dz}{dt^*}-z\left(\frac{df}{dt^*}\right)^2+iz\frac{d^2f}{dt^{*2}}\right]e^{if}. \tag{56}$$

В случае кругового движения основных тел имеем

$$f=nt^*,$$

и уравнение (56) переходит в уравнение (30) § 1.4.

Уравнения движения во вращающейся системе координат можно написать, применяя комплексный вектор z:

$$\frac{d^2z}{dt^{*2}}+2i\frac{df}{dt^*}\frac{dz}{dt^*}=-k^2m_1\frac{z-z_1}{R_1^3}-k^2m_2\frac{z-z_2}{R_2^3}+z\left(\frac{df}{dt^*}\right)^2-iz\frac{d^2f}{dt^{*2}}. \tag{57}$$

Второй член в левой части уравнения выражает ускорение Кориолиса, первый и второй члены в правой части — гравитационные эффекты, а третий и четвертый член — центробежный эффект и ускорение, нормальное к радиусу-вектору, вызываемое неравномерным вращением системы.

Комплексные радиусы-векторы z_1 и z_2 определяют положения основных тел. Так как они неизменно находятся на действительной оси системы $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, то имеем

$$z_1=\tilde{x}_1=\frac{p_1}{1+e\cos f},\quad z_2=\tilde{x}_2=\frac{-p_2}{1+e\cos f}, \tag{58}$$

где p_1 и p_2 положительны и

$$p_1/p_2=a_1/a_2=m_2/m_1. \tag{59}$$

Здесь a_1 и a_2 — большие полуоси эллиптических орбит масс m_1 и m_2, описываемых вокруг их центра масс.

Расстояния между третьим телом и основными телами равны

$$R_1=|Z-Z_1|=|z-\tilde{x}_1|=[(\tilde{x}-\tilde{x}_1)^2+\tilde{y}^2]^{1/2},$$
$$R_2=|Z-Z_2|=|z-\tilde{x}_2|=[(\tilde{x}-\tilde{x}_2)^2+\tilde{y}^2]^{1/2}.$$

Положив

$$f=nt^*, \quad e=0, \quad p_1=a_1=b, \quad p_2=a_2=a,$$

что соответствует круговому движению основных тел, мы уравнение (57) приведем к уравнению (31) § 1.4.

10.3.2.2. Преобразование к безразмерным пульсирующим координатам. Совершим еще одно преобразование и приведем уравнение (57) к безразмерным пульсирующим координатам. Пусть

$$\zeta=\frac{z}{r}=\tilde{\xi}+i\tilde{\eta}.$$

Тогда из уравнения (48) будем иметь

$$\tilde{\xi}=\frac{\tilde{x}(1+e\cos f)}{a(1-e^2)}, \quad \tilde{\eta}=\frac{\tilde{y}(1+e\cos f)}{a(1-e^2)}. \tag{60}$$

Прежде чем совершить преобразование, сделаем следующие замечания.

а) В системе координат $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ основные тела остаются неподвижными, так как из уравнений (58) и (60) имеем

$$\tilde{\xi}_i=\frac{\tilde{x}_i(1+e\cos f)}{a(1-e^2)}$$

или

$$\tilde{\xi}_i=(-1)^{i+1}\frac{p_i}{a(1-e^2)}=(-1)^{i+1}\frac{a_i}{a}$$

и

$$\tilde{\eta}_i=0, \quad i=1, 2.$$

Таким образом, фиксированные положения основных тел в системе координат $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ определяются точками $P_1(\mu, 0)$ и $P_2(\mu-1, 0)$.

б) Простые соображения, основывающиеся на задаче двух тел, приводят к выводу, что четыре перечисленные ниже эллиптические орбиты имеют один и тот же эксцентриситет. Это орбита массы m_1 относительно m_2 с большой полуосью a, орбита массы m_2 относительно m_1 тоже с большой полуосью a, орбита массы m_1 относительно центра масс с большой полуосью $a_1=a\mu$ и, наконец, орбита массы m_2 относительно центра масс с большой полуосью $a_2=a(1-\mu)$.

в) В качестве независимой переменной можно принять истинную аномалию, применив формулу

$$\frac{d}{dt^*}=\frac{df}{dt^*}\frac{d}{df}.$$

Совершим теперь преобразование уравнения (57) и перейдем от переменных z и t^* к переменным ζ и f. Первый член в левой

части уравнения (57) примет вид

$$\frac{d}{dt^*}\left(r\frac{d\zeta}{dt^*}+\frac{dr}{dt^*}\zeta\right)=r\frac{d^2\zeta}{dt^{*2}}+2\frac{dr}{dt^*}\frac{d\zeta}{dt^*}+\zeta\frac{d^2r}{dt^{*2}}$$

или

$$\frac{d^2z}{dt^{*2}}=r\left[\frac{d\zeta}{df}\frac{d^2f}{dt^{*2}}+\frac{d^2\zeta}{df^2}\left(\frac{df}{dt^*}\right)^2\right]+2\frac{dr}{dt^*}\frac{d\zeta}{df}\frac{df}{dt^*}+\frac{d^2r}{dt^{*2}}\zeta.$$

Второй член в левой части уравнения (57) будет иметь вид

$$2i\frac{df}{dt^*}\frac{dz}{dt^*}=2i\frac{df}{dt^*}\left(\zeta\frac{dr}{dt^*}+r\frac{d\zeta}{df}\frac{df}{dt^*}\right),$$

а первый член в правой части становится равным

$$k^2m_1\frac{z-z_1}{R_1^3}=k^2m_1\frac{\zeta-\zeta_1}{r^2\tilde{r}_1^3},$$

где

$$\tilde{r}_1^2=|\zeta-\zeta_1|^2=(\tilde{\xi}-\mu)^2+\tilde{\eta}^2,$$

так как

$$\zeta_1=\tilde{\xi}_1=\mu.$$

После подстановки всех членов в уравнение (57) будем иметь

$$r\left(\frac{df}{dt^*}\right)^2\left(\frac{d^2\zeta}{df^2}+2i\frac{d\zeta}{df}\right)+\zeta\left[\frac{d^2r}{dt^{*2}}-r\left(\frac{df}{dt^*}\right)^2\right]+$$
$$+\left(\frac{d\zeta}{df}+i\zeta\right)\left(r\frac{d^2f}{dt^{*2}}+2\frac{dr}{dt^*}\frac{df}{dt^*}\right)=-k^2m_1\frac{\zeta-\zeta_1}{r^2\tilde{r}_1^3}-k^2m_2\frac{\zeta-\zeta_2}{r^2\tilde{r}_2^3}. \quad (61)$$

Напомним, что уравнение (48) определяет функцию

$$r=r(f),$$

которая выражает решение задачи двух тел, содержащую два основных тела. Таким образом, мы получаем следующие соотношения, производные которых содержат r и f:

а) интеграл момента количества движения

$$\left(r^2\frac{df}{dt^*}\right)^2=a(1-e^2)k^2(m_1+m_2),$$

б) его производная

$$r\frac{d^2f}{dt^{*2}}+2\frac{dr}{dt^*}\frac{df}{dt^*}=0,$$

в) уравнение движения

$$\frac{d^2r}{dt^{*2}}-r\left(\frac{df}{dt^*}\right)^2=-\frac{k^2(m_1+m_2)}{r^2},$$

г) его модификация с помощью интеграла (а)

$$\frac{d^2r}{dt^{*2}} - r\left(\frac{df}{dt^*}\right)^2 = -\frac{r^2}{a(1-e^2)}\left(\frac{df}{dt^*}\right)^2.$$

Вернемся теперь к уравнению (61) и разделим его на $r^2(df/dt^*)^2$. Используя соотношения $(a)-(г)$, получаем

$$\frac{d^2\zeta}{df^2} + 2i\frac{d\zeta}{df} = \frac{r}{a(1-e^2)}\left[\zeta - \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\zeta-\zeta_1}{\tilde{r}_1^3} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\zeta-\zeta_2}{\tilde{r}_2^3}\right]$$

или

$$\frac{d^2\zeta}{df^2} + 2i\frac{d\zeta}{df} = \operatorname{grad}_\zeta \omega(\zeta), \tag{62}$$

где

$$\omega(\zeta) = (1+e\cos f)^{-1}\,\Omega(\zeta) \tag{63}$$

и

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{2}(\tilde{\xi}^2+\tilde{\eta}^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu).$$

Действительная и мнимая части уравнения (62) получаются в результате дифференцирования согласно формулам (50).

10.3.2.3. Движение в трехмерной эллиптической задаче. Уравнения движения трехмерной эллиптической задачи выглядят следующим образом:

$$\tilde{\xi}'' - 2\tilde{\eta}' = \omega_{\tilde{\xi}}', \quad \tilde{\eta}'' + 2\tilde{\xi}' = \omega_{\tilde{\eta}}', \quad \tilde{\zeta}'' + \tilde{\zeta} = \omega_{\tilde{\zeta}}', \tag{50'}$$

где

$$\omega' = (1+e\cos f)^{-1}\,\Omega'$$

и

$$\Omega' = \frac{1}{2}(\tilde{\xi}^2+\tilde{\eta}^2+\tilde{\zeta}^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu)$$

или

$$\Omega' = \frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

и

$$r_1^2 = (\tilde{\xi}-\mu)^2 + \tilde{\eta}^2 + \tilde{\zeta}^2,$$
$$r_2^2 = (\tilde{\xi}-\mu+1)^2 + \tilde{\eta}^2 + \tilde{\zeta}^2.$$

Переменные $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ определяются так же, как и раньше (см. уравнения (60)), а $\tilde{\zeta}$ равно

$$\tilde{\zeta} = \tilde{z}/r,$$

где $\tilde{z}$ — размерная координата вдоль оси, перпендикулярной плоскости xy. Эта координата одинакова в неподвижной системе и во вращающейся системе. Заметим, что символ ζ, который мы применяли в пунктах 10.3.2 и 10.3.2.2, обозначал комплексный радиус-вектор в плоскости $\tilde{\xi}\tilde{\eta}$, тогда как $\tilde{\zeta}$ обозначает безразмерную координату вдоль оси, нормальной к плоскости $\tilde{\xi}\tilde{\eta}$. Символ z в пунктах 10.3.2.1 и 10.3.2.2 обозначал комплексный радиус-вектор в плоскости $\tilde{x}\tilde{y}$, а $\tilde{z}$ обозначает размерную третью координату.

Хотя третья координата не участвует в преобразовании, включающем поворот вокруг оси $\tilde{z}$, однако при переменном расстоянии между основными телами она становится безразмерной. Другими словами, $\ddot{\tilde{z}}$ следует вычислять из уравнения $\tilde{z}=r(f)\tilde{\zeta}$, и, следовательно, $\tilde{\zeta}$ войдет в левую часть третьего уравнения движения.

Другой формой уравнений движения будет следующая:

$$\tilde{\xi}''-2\tilde{\eta}'=\omega_{\tilde{\xi}},\quad \tilde{\eta}''+2\tilde{\xi}'=\omega_{\tilde{\eta}},\quad \tilde{\zeta}''=\omega_{\tilde{\zeta}}, \tag{50''}$$

где

$$\omega=\omega'-\frac{1}{2}\tilde{\zeta}^2=(1+e\cos f)^{-1}\Omega \tag{51'}$$

и

$$\Omega=\Omega'-\frac{1}{2}(1+e\cos f)\tilde{\zeta}^2. \tag{51''}$$

Таким образом, мы видим, что установление формального тождества между уравнениями движения круговой задачи и уравнениями движения эллиптической задачи требует известной осторожности. Уравнения (50′) и уравнения (3′) пункта 10.2.1 обнаруживают формальное тождество, но обращаясь к уравнениям (50″), видим, что правые части уравнений (50″) и уравнений (1) не отличаются только периодическим коэффициентом.

10.3.3. Инвариантное соотношение. В § 1.4 мы видели, что уравнения движения (круговой) ограниченной задачи

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\Omega_x,\quad \ddot{y}+2\dot{x}=\Omega_y$$

имеют интеграл Якоби. Действительно, умножая первое из этих уравнений на $\dot{x}$, а второе на $\dot{y}$, затем складывая их и интегрируя, получаем

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega-C. \tag{64}$$

Выполняя те же операции над уравнениями (50), находим

$$\left(\frac{d\tilde{\xi}}{df}\right)^2+\left(\frac{d\tilde{\eta}}{df}\right)^2=2\int(\omega_{\tilde{\xi}}d\tilde{\xi}+\omega_{\tilde{\eta}}d\tilde{\eta}). \tag{65}$$

Задачи, связанные с квадратурой в правой части этого уравнения, мы подробно рассмотрели в § 1.3. Так как функция $\omega=\omega(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, f)$ помимо координат зависит еще от независимой переменной, то выражение, стоящее под знаком интеграла, не является полным дифференциалом. Действительно,

$$d\omega=\omega_{\tilde{\xi}}d\tilde{\xi}+\omega_{\tilde{\eta}}d\tilde{\eta}+\omega_f df,$$

где

$$\omega_f=-\frac{e\sin f}{(1+e\cos f)^2}\Omega.$$

Поэтому интеграл в уравнении (65) можно переписать в виде

$$2\int(d\omega-\omega_f df)=2\omega-2\int\omega_f df-C.$$

Уравнение (65) тогда принимает вид

$$\left(\frac{d\tilde{\xi}}{df}\right)^2+\left(\frac{d\tilde{\eta}}{df}\right)^2=2\omega-2e\int_0^f\frac{\Omega\sin f}{(1+e\cos f)^2}df-C. \qquad (66)$$

Мы видим, что когда $e=0$, член, содержащий интеграл, обращается в нуль, координаты $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ переходят в x и y, истинная аномалия f переходит в безразмерное время t и $\omega=\Omega$. Короче говоря, уравнение (66) становится интегралом Якоби, т. е. принимает вид равенства (64).

Считая теперь $e\neq 0$, рассмотрим орбиту в течение короткого промежутка времени, т. е. выберем время начала движения, например, при $f=0$ и будем интересоваться только тем участком траектории, который проходится за то время, пока f изменяется от $f=0$ до $f=+\varepsilon$, где ε— достаточно малая положительная величина. Так как f есть истинная аномалия, то это ограничение равносильно рассмотрению достаточно малого интервала времени, в течение которого основные тела описывают достаточно малые дуги. Второй член в правой части уравнения (66) в этом случае содержит произведение эксцентриситета и величины ε, следовательно, он меньше, чем 2ω. Поэтому кривые нулевой скорости приближенно можно получить из уравнения

$$2\Omega-C(1+e\cos f)=0$$

или

$$2\Omega-C^*=0.$$

Это соотношение выполняется, если в уравнении (66) опущен интеграл. Геометрически это означает, что в каждый момент времени (или при каждом значении истинной аномалии) нуж-

но строить свою систему кривых нулевой скорости. В каждый момент времени перестроенные (или, что то же, перенумерованные) кривые нулевой скорости будут управлять движением, устанавливая меняющиеся запрещенные области в связи с изменениями скорости и т. д. Изменение формы кривых нулевой скорости описывается уравнением

$$C^* = C(1 + e\cos f).$$

Поэтому можно говорить о пульсирующих кривых нулевой скорости.

Заметим, что для того чтобы получить пульсирующие кривые нулевой скорости, нужно пренебречь интегралом в уравнении (66). При таком квазиустановившемся методе мы в инвариантном соотношении (66) пренебрегаем членом первого порядка относительно эксцентриситета, получаем

$$\left(\frac{d\tilde{\xi}}{df}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\eta}}{df}\right)^2 = 2\Omega - C + eF_1 + e^2F_2 + \ldots,$$

где

$$F_1 = -2\left[\Omega\cos f + \int (\Omega\sin f)\,df\right],$$

$$F_2 = +2\left[\Omega\cos^2 f + 2\int (\Omega\sin 2f)\,df\right].$$

Инвариантное соотношение (66) допускает простую интерпретацию: любое решение дифференциальных уравнений движения (50), выраженное в форме

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(f), \quad \tilde{\eta} = \tilde{\eta}(f), \tag{67}$$

будучи подставлено в уравнение (66), удовлетворяет ему Интеграл, входящий в уравнение (66), можно вычислить вдоль орбиты, определяемой уравнениями (67), так как вдоль орбиты

$$\Omega(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \Omega[\tilde{\xi}(f), \tilde{\eta}(f)] = \Omega(f)$$

и интегрирование может быть выполнено. Не зная решения, вычислить инвариантное соотношение (66) нельзя, так как входящий в него интеграл содержит явно независимую переменную.

Другой способ выразить это состоит в следующем. Если в инвариантное соотношение входят только полные дифференциалы, то посредством интегрирования мы получаем интеграл движения, такой как в случае интеграла Якобн уравнения (64). С другой стороны, если инвариантное соотношение содержит члены, которые не являются полными дифференциалами, то при интегрировании мы получаем выражение, значение которого

зависит от пути интегрирования, а не только от начальной и конечной точек.

10.3.4. Движение вокруг точек равновесия. *Формальная* тождественность уравнений, применяемых к эллиптической и круговой ограниченным задачам, позволяет сразу установить стационарные решения. Из уравнений (50) имеем

$$\frac{d\tilde{\xi}}{df}=\frac{d\tilde{\eta}}{df}=\frac{d^2\tilde{\xi}}{df^2}=\frac{d^2\tilde{\eta}}{df^2}=0,$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial\tilde{\xi}}=\frac{\partial\omega}{\partial\tilde{\eta}}=0$$

или

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{\xi}}=\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{\eta}}=0.$$

Следовательно, координаты $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ пяти точек либрации в эллиптической задаче такие же, как координаты x, y в круговой задаче. Положения треугольных точек в круговой задаче определяются следующим образом:

$$z_{4,5}=\mu-\frac{1}{2}\pm\frac{i3^{1/2}}{2}.$$

Треугольные точки в эллиптической задаче пульсируют вместе с их системой координат. Эта пульсация, конечно, имеет место только тогда, когда система ζ связана с системой z соотношением

$$z=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}\zeta.$$

Координаты треугольных точек либрации в эллиптической задаче в системе координат $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ равны

$$\tilde{\xi}_{4,5}=\mu-1/2,\quad \tilde{\eta}_{4,5}=\pm\frac{3^{1/2}}{2}.$$

Причина инвариантности положений точек либрации в эллиптической задаче в системе ζ состоит в том, что правые части уравнений движения (50) разделяются и могут быть представлены в виде произведений двух функций, из которых одна зависит только от истинной аномалии, а другая — только от координат.

Линеаризованные уравнения движения вокруг точек либрации в эллиптической задаче в системе координат $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ принимают вид

$$\begin{aligned} u''-2v'&=g(e,f)(\Omega^0_{xx}u+\Omega^0_{xy}v),\\ v''+2u'&=g(e,f)(\Omega^0_{xy}u+\Omega^0_{yy}v), \end{aligned}\tag{68}$$

где вариации u, v определяются формулами

$$\tilde{\xi}=\tilde{\xi}_i+u, \quad \tilde{\eta}=\tilde{\eta}_i+v.$$

Здесь индекс i указывает номер точки либрации и, стало быть, принимает значения $i=1, 2, \ldots, 5$. Функция g определяется следующим образом:

$$g(e, f)=\frac{1}{1+e\cos f},$$

так что

$$g(0, f)=1.$$

Вторые частные производные, входящие в уравнения (68), следует вычислять в точках либрации. Заметим, что при $e=0$, $u=\xi$, $v=\eta$ и $f=t$ уравнения (68) переходят в соответствующие уравнения (4) § 5.2 для круговой задачи. Штрихи в уравнениях (68), обозначающие производные по истинной аномалии, переходят в уравнениях (4) в точки, обозначающие производные по времени.

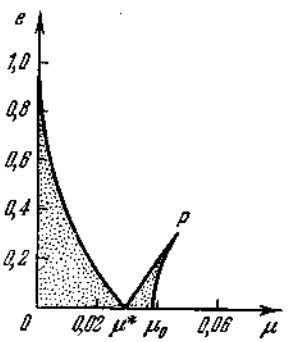


Рис. 10.13. Линейная устойчивость треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче (Дэнби, 1964 [51]).

Система линейных дифференциальных уравнений (68), описывающая задачу, имеет переменные коэффициенты, и решение ее в конечном виде неизвестно.

Результаты линеаризованного исследования устойчивости в отношении влияния эксцентриситета на линейную устойчивость треугольных точек, полученные Дэнби и позже Беннеттом, показаны на рис. 10.13. Затушеванные области определяют линейную устойчивость. Точка μ^* на оси μ соответствует значению массового параметра, при котором любой отличный от нуля эксцентриситет вызывает линейную неустойчивость. Значение μ^* получается тогда, когда для одного из корней уравнения (25) § 5.4 $\lambda=\pm i/2$. В конце пункта 5.6.2.2 была приведена экспериментальная формула

$$\mu^*=\frac{1-\left[1-\frac{16s^2(1-s^2)}{27}\right]^{1/2}}{2}.$$

Подставляя в нее $s=\pm 1/2$, получаем

$$\mu^*=1/2-\sqrt{2}/3=0{,}02859548.$$

Координаты точки P, $\mu=0{,}04698$ и $e=0{,}3143$, могут быть получены численным методом.

Наконец, точка μ_0 на оси μ представляет то значение μ, при котором возникает неустойчивость, когда $e=0$. В § 5.4 мы это значение приводили, оно равняется

$$\mu_0=\frac{9-(69)^{1/2}}{18}=0{,}0385209.$$

При численном анализе, рассматривавшемся в предыдущем параграфе, применялась теория Флокэ и исследовалось расположение характеристических показателей линейной системы. Как видно из рис. 10.13, эксцентриситет движения основных тел согласно линейной теории может оказывать стабилизирующее действие, так как если $\mu>\mu_0$, то эллиптический случай устойчив до $\mu=0{,}04698$ при соответствующем значении e.

Неустойчивость коллинеарных точек в круговой задаче для всех значений массового параметра сохраняется и в эллиптической задаче при любой комбинации значений μ и e.

10.3.5. Регуляризация эллиптической задачи. В этом пункте мы рассмотрим двумерную эллиптическую ограниченную задачу с позиций регуляризации. Так как преобразования, которые мы применяли в предыдущих разделах, не вносят новых особенностей и приводят, по крайней мере формально, к тем же уравнениям движения, которые описывают круговую задачу, то следует ожидать, что соображения, высказанные в гл. 3, можно распространить и на эллиптическую задачу. В самом деле, это есть тот случай, за одним заслуживающим внимания исключением, который следует из того факта, что мы не располагаем интегралом Якоби, используемым при выводе регуляризованных уравнений движения круговой задачи. Вместо интеграла Якоби мы применяем здесь инвариантное соотношение, выведенное в пункте 10.3.3. Следствием этого является то, что регуляризованные уравнения движения в эллиптическом случае становятся интегро-дифференциальными уравнениями.

Вывод начнем с уравнений (50) пункта 10.3.2, которые запишем в комплексной форме

$$\zeta''+2\,i\zeta'=\operatorname{grad}_\zeta\omega, \tag{69}$$

где штрихами обозначены производные по истинной аномалии, а переменная ζ и функция ω определяются таким же путем, как в пункте 10.3.2.

Преобразования зависимой и независимой переменных осуществим аналогично тому, как это мы делали в круговом случае, с помощью формул

$$\zeta=F(w),\quad d\tau=\left|\frac{dF}{dw}\right|^{-2}df, \tag{70}$$

где τ есть новая независимая переменная. Она связана с истинной аномалией f таким же образом, как псевдовремя связано с безразмерным временем в круговой задаче. Функция преобразования $F(w)$ соответствует функции $f(w)$, введенной в § 3.3.

Скорость преобразуется с помощью формулы

$$\frac{d\zeta}{df}=\frac{dF}{dw}\frac{dw}{d\tau}\frac{d\tau}{df}. \tag{71}$$

Вычисляя вторую производную от ζ и подставляя ее в уравнение (69), получаем

$$\frac{d^2w}{d\tau^2}+2i\frac{dw}{d\tau}\left|\frac{dF}{dw}\right|^2=\left|\frac{dF}{dw}\right|^2\operatorname{grad}_w V+\left|\frac{dw}{d\tau}\right|^2\frac{\overline{d^2F}}{dw^2}\left(\frac{\overline{dF}}{dw}\right)^{-1}, \tag{72}$$

где

$$V=\omega-\frac{1}{2}C. \tag{73}$$

Используем теперь инвариантное соотношение эллиптической задачи, соответствующее интегралу Якоби ограниченной задачи. Из уравнения (66) имеем

$$\left(\frac{d\zeta}{df}\right)^2=2(V-I), \tag{74}$$

где

$$I=e\int_0^f\frac{\Omega\sin f}{(1+e\cos f)^2}\,df. \tag{75}$$

С помощью уравнений (74) и (70) формулу (71) можно переписать в виде, удобном для вычисления скорости в регуляризованной системе, и получить регуляризованную формулу инвариантного соотношения (74):

$$\left|\frac{dw}{d\tau}\right|^2=2\left|\frac{dF}{dw}\right|^2(V-I). \tag{76}$$

Правая часть уравнения (72) теперь принимает вид

$$\left|\frac{dF}{dw}\right|^2\operatorname{grad}_w V+2(V-I)\frac{\overline{d^2F}}{dw^2}\frac{dF}{dw}=\operatorname{grad}_w\left(V\left|\frac{dF}{dw}\right|^2\right)-2I\frac{\overline{d^2F}}{dw^2}\frac{dF}{dw}.$$

Следовательно, уравнение движения (72) можно представить в виде

$$\frac{d^2w}{d\tau^2}+2i\frac{dw}{d\tau}|F'|^2=\operatorname{grad}_w(V|F'|^2)-2IF'\overline{F}'', \tag{77}$$

где

$$F'=\frac{dF}{dw}.$$

Соответствующее уравнение для круговой задачи (§ 3.4) имело вид

$$\frac{d^2w}{d\tau^2}+2i\frac{dw}{d\tau}|f'|^2=\operatorname{grad}_w(U|f'|^2). \tag{78}$$

Функция $f(w)$ здесь соответствует $F(w)$, а $U=\Omega-C/2$ соответствует $V=\omega-C/2$ или

$$V=(1+e\cos f)^{-1}\Omega-\frac{C}{2}. \tag{79}$$

Так как $e<1$, то особыми точками функции V являются те же точки, что и функции Ω, и регуляризующая функция $F(w)$, исключающая особенности функции U, исключает их и у функции V.

Уравнение (77) отличается от уравнения (78) наличием члена в правой части

$$T=2IF'\bar{F}''=2eF'\bar{F}''\int_0^f\frac{\Omega\sin f}{(1+e\cos f)^2}\,df,$$

который после перехода к новой независимой переменной τ можно записать в виде

$$T=2eF'\bar{F}''\int_{\tau(0)}^{\tau}\frac{\sin f(\tau)}{[1+e\cos f(\tau)]^2}\Omega|\bar{F}'|^2d\tau. \tag{80}$$

Заметим, что истинная аномалия входит сюда как функция новой независимой переменной, и согласно уравнению (70) это соотношение равно

$$f(\tau)=\int_{\tau(0)}^{\tau}|F'|^2d\tau.$$

Отсюда следует, что $f(\tau)$ есть конечная функция, определенная всюду на конечной плоскости w. То же верно и для интеграла, входящего в уравнение (80), так как если $F(w)$ регуляризует функцию Ω, то $\Omega|F'|$ будет регулярной функцией. В особых точках $F'=0$, следовательно, выражение, стоящее в правой части уравнения (80), при соударениях обращается в нуль. Этого можно было ожидать, так как при соударении эллиптическая задача должна приводиться к круговой задаче.

§ 10.4. Задача Хилла

10.4.1. Введение. Предельный случай Хилла получается из модели ограниченной задачи, в которой роль основных тел играют Земля и Солнце, при следующих упрощающих предположениях:

1) солнечный параллакс равен нулю,
2) эксцентриситет солнечной орбиты равен нулю,
3) наклонение плоскости орбиты Луны равно нулю.

Мы будем искать частные решения дифференциальных уравнений движения, описывающих эту упрощенную задачу. В системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью, равной среднему движению Солнца, эти решения являются периодическими. Требуемые решения симметричны относительно осей координатной системы. Решение, соответствующее периоду Луны, называют вариационной орбитой Хилла, она представляет собой промежуточную орбиту в лунной теории Хилла. Отличительной чертой теории Хилла является то, что промежуточной орбитой служит не коническое сечение, а решение описанной выше упрощенной ограниченной задачи. Значение идеи Хилла подчеркивается также тем, что еще до него, для того чтобы получить решение задачи трех тел, решали задачу двух тел и полученное решение видоизменяли соответствующим образом. С другой стороны, Хилл первый решил модифицированную ограниченную задачу трех тел и рассмотрел ее видоизменение.

Вариационная орбита является, конечно, всего лишь частным периодическим решением упрощенных уравнений, и для того чтобы найти их общее решение, нужно применить метод Лагранжа. Эта задача приводит к уравнению Хилла, имеющему вид

$$\ddot{x} + \theta(t)\, x = 0, \tag{81}$$

где x есть нормальное отклонение точки (Луны) от вариационной орбиты, а θ есть периодическая функция периода, который равен

$$T = \frac{2\pi}{n - n'}.$$

Здесь n' и n — средние движения Солнца вокруг системы Земля — Солнце и Луны вокруг Земли. Численные значения соответствующих периодов равны

$$T = 2\pi/n = 27^d{,}321661, \quad T' = 2\pi/n' = 365^d{,}256371,$$

откуда

$$\frac{n'}{n} = 0{,}0748013263.$$

При решении уравнения (81) вводится знаменитый бесконечный определитель Хилла.

В следующем пункте мы выведем уравнения движения. Затем будут рассмотрены интеграл Якоби, особенности совокупности состояний движения, кривые нулевой скорости и регу-

ляризованные уравнения. После этого будет исследовано семейство периодических орбит Хилла, одна из которых имеет период Луны.

10.4.2. Постановка задачи и уравнения движения. В этом пункте мы приведем два вывода уравнений движения, основывающихся на различных исходных уравнениях. В каждом выводе используются свои соображения, однако результаты получаются по существу одни и те же. Сначала мы покажем, как в задаче Хилла уравнения движения выводятся из уравнений движения общей задачи трех тел (пункт А), а затем продемонстрируем, как те же самые уравнения могут быть получены посредством оценки порядка величины различных членов, входящих в ограниченную задачу трех тел (пункт Б). В пункте Б мы сделаем несколько дополнительных замечаний по поводу полученных уравнений движения.

А. Уравнения движения задачи трех тел были приведены нами в § 1.8. Здесь мы в качестве трех тел рассмотрим Землю, Луну и Солнце и обозначим их соответственно через E, M и S. Дифференциальные уравнения движения Луны и Земли в инерциальной системе координат имеют следующий вид:

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = -\frac{k^2 m_E}{|\mathbf{r}_{EM}|^3}(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_E) - \frac{k^2 m_S}{|\mathbf{r}_{MS}|^3}(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_S) \tag{82}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_E = -\frac{k^2 m_S}{|\mathbf{r}_{ES}|^3}(\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_S) - \frac{k^2 m_M}{|\mathbf{r}_{EM}|^3}(\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_M). \tag{83}$$

Здесь $\mathbf{r}_E$, $\mathbf{r}_M$ и $\mathbf{r}_S$ — раднусы-векторы Земли, Луны и Солнца в инерциальной системе. Точками обозначено дифференцирование по времени t^*. Пусть начало системы координат совпадает с Землей, тогда будем иметь

$$\boldsymbol{\rho}_M = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_E \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\rho}_S = \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_E.$$

Уравнения движения Луны в этой системе (т. е. отиосительно Земли) получается путем вычитания уравнения (83) из уравнения (82):

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_M + \frac{k^2(m_E + m_M)}{|\boldsymbol{\rho}_M|^3}\boldsymbol{\rho}_M = -k^2 m_S\left[\frac{\boldsymbol{\rho}_M - \boldsymbol{\rho}_S}{|\boldsymbol{\rho}_{MS}|^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}_S}{|\boldsymbol{\rho}_S|^3}\right]. \tag{84}$$

Обозначая координаты Луны в этой системе через X, Y, Z, а координаты Солнца — через X', Y', Z', получаем первую составляющую уравнения (84) в виде

$$\ddot{X} + \frac{\varkappa}{r^3}X = -k^2 m_S\left(\frac{X - X'}{\Delta^3} + \frac{X'}{r'^3}\right), \tag{85}$$

где

$$\varkappa = k^2(m_E + m_M),$$

а расстояния между Луной и Солнцем, Луной и Землей и Солнцем и Землей равны

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= |\rho_{MS}|^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2, \\ r^2 &= |\rho_M|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \\ r'^2 &= |\rho_S|^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2. \end{aligned} \tag{86}$$

Правую часть уравнения (85) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial X} R = \frac{\partial}{\partial X} k^2 m_S \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3} \right). \tag{87}$$

Таким образом, уравнения движения Луны относительно Земли можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \frac{\varkappa}{r^3} X &= \frac{\partial R}{\partial X}, \\ \ddot{Y} + \frac{\varkappa}{r^3} Y &= \frac{\partial R}{\partial Y}, \\ \ddot{Z} + \frac{\varkappa}{r^3} Z &= \frac{\partial R}{\partial Z}. \end{aligned} \tag{88}$$

Найдем теперь иную форму для возмущающей функции R и применим затем упрощения Хилла.

Из уравнений (86) имеем

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos S$$

и

$$\frac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3} = \frac{r \cos S}{r'^2},$$

где через S обозначен угол MES.

Возмущающая функция теперь принимает вид

$$R = \frac{k^2 m_S}{r'} \left[\frac{r'}{\Delta} - \frac{r}{r'} \cos S \right]. \tag{89}$$

Первый член в квадратных скобках разлагается в полином Лежандра:

$$\frac{r'}{\Delta} = \left[1 - 2\frac{r}{r'} \cos S + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \right]^{-1/2} = P_0 + \frac{r}{r'} P_1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 P_2 + \ldots, \tag{90}$$

где

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \cos S, \quad P_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \quad \text{и т. д.}$$

Так как $r/r' \approx 3 \cdot 10^{-3} \ll 1$, то сходимость ряда гарантируется.

Прежде чем подставлять ряд (90) в уравнение (89), заметим, что

$$k^2 m_S \left(1+\frac{m_E+m_M}{m_S}\right)=n'^2 a'^3$$

или

$$k^2 m_S \approx n'^2 a'^3,$$

так как

$$\frac{m_E+m_M}{m_S}\approx 3\cdot 10^{-6}.$$

Здесь n' есть среднее движенне Солнца, а a' — среднее расстоянне Солнца. Возмущающая функция R теперь принимает новую форму:

$$R=\frac{a'^3 n'^2}{r'}\left[1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2+\left(\frac{r}{r'}\right)^3 P_3+\left(\frac{r}{r'}\right)^4 P_4+\ldots\right], \qquad (91)$$

где первый член можно опустить, поскольку он не влияет на производные функцни R. Производя умножение, а затем деление членов уравнения (91) на соответствующие степени среднего лунного расстояния a, получаем

$$R=n'^2 a^2\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 P_2+\left(\frac{a}{a'}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 P_3+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a}{a'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^4\left(\frac{a'}{r'}\right)^5 P_4+\ldots\right]. \qquad (92)$$

Если пренебречь эксцентрнситетом орбиты Солнца ($e'=0{,}0168$), то всюду в разложенни (92) будем нметь $a'/r'=1$. Если, кроме того, пренебречь величиной $a/a'=0{,}0025$, то возмущающая функция примет внд

$$R=n'^2 r^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 S\right). \qquad (93)$$

Величина a/a' представляет собой отношение между синусами солнечного и лунного параллаксов, поэтому, пренебрегая этой величиной в разложенни возмущающей функцни, мы приходим к одному из упрощающих предположений Хилла.

Если теперь пренебречь еще наклоненнем плоскости лунной орбиты, то мы получим уравнения движенння Луны в системе координат с началом, совпадающим с Землей, в следующем виде:

$$\ddot{X}+\frac{\varkappa}{r^3}X=\frac{\partial R}{\partial X},\quad \ddot{Y}+\frac{\varkappa}{r^3}Y=\frac{\partial R}{\partial Y}, \qquad (94)$$

где возмущающая функция R определяется уравнением (93).

Выберем теперь систему координат с началом в Земле, вращающуюся в (неподвижной) плоскости эклиптики с угловой

скоростью n'. Ось $\tilde{x}$ пусть будет постоянно направлена к Солнцу. Преобразование предыдущей системы координат x, y в новую систему $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ осуществим с помощью формулы (26) § 1.4:

$$Z = ze^{in't^*}, \tag{95}$$

где $Z = X + iY$, $z = \tilde{x} + i\tilde{y}$, а t^* есть безразмерное время.

Уравнения (94) в комплексной форме имеют следующий вид:

$$\ddot{Z} + \frac{\varkappa}{|Z|^3} Z = \operatorname{grad}_Z R(Z), \tag{96}$$

где

$$\operatorname{grad}_Z R = \frac{\partial R}{\partial X} + i\frac{\partial R}{\partial Y}.$$

Применяя формулу преобразования (95) к уравнению (96), находим

$$\ddot{z} + 2in'\dot{z} = n'^2 z - \varkappa z/|z|^3 + \operatorname{grad}_z R(z). \tag{97}$$

Заметим, что последний член следует из уравнения

$$\operatorname{grad}_Z R = e^{in't^*} \operatorname{grad}_z R, \tag{98}$$

с которым мы уже встречались в § 3.3, где оно было под номером (76) и имело вид

$$\operatorname{grad}_w U = \overline{f'} \operatorname{grad}_\zeta U.$$

Заменяя w на Z, U — на R, ζ на z и полагая

$$z = e^{-in't^*} Z$$

и

$$\zeta = f(w),$$

получаем

$$\overline{f'} = e^{in't^*}.$$

Таким образом, уравнение (98) приводится к уравнению (76) § 3.3, где был дан его вывод.

Уравнение (97) можно переписать в виде

$$\ddot{z} + 2in'\dot{z} = \operatorname{grad}_z R^*, \tag{99}$$

где

$$R^* = \frac{n'^2}{2}|z|^2 + \frac{\varkappa}{|z|} + R.$$

Уравнения движения во вращающейся системе координат с началом, выбранным в Земле, принимают следующий вид:

$$\ddot{\tilde{x}} - 2n'\dot{\tilde{y}} = \frac{\partial R^*}{\partial \tilde{x}}, \quad \ddot{\tilde{y}} + 2n'\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial R^*}{\partial \tilde{y}}. \tag{100}$$

Здесь

$$R^* = \frac{n'^2}{2}(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)+\frac{\varkappa}{r}+n'^2r^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 S\right)$$

или

$$R^* = \frac{\varkappa}{r}+\frac{3}{2}n'^2\tilde{x}^2, \tag{101}$$

так как

$$n'^2r^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 S\right)=n'^2\left[-\frac{1}{2}(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)+\frac{3}{2}\tilde{x}^2\right].$$

Уравнения (100), в которых R^* определяется формулой (101) описывают задачу Хилла. В этих уравнениях переменные являются размерными, а точки представляют собой операторы дифференцирования по (действительному) времени t^*.

Подставляя в уравнения (100) функцию R^*, получаем их в форме

$$\begin{aligned}\frac{d^2\tilde{x}}{dt^{*2}}-2n'\frac{d\tilde{y}}{dt^*}&=3n'^2\tilde{x}-\frac{\varkappa\tilde{x}}{r^3},\\ \frac{d^2\tilde{y}}{dt^{*2}}+2n'\frac{d\tilde{x}}{dt^*}&=-\frac{\varkappa\tilde{y}}{r^3}.\end{aligned} \tag{102}$$

Переходя к безразмерным переменным

$$t=t^*n' \quad \text{и} \quad (\bar{\xi},\bar{\eta})=(\tilde{x},\tilde{y})/l,$$

получаем уравнения движения в виде

$$\ddot{\bar{\xi}}-2\dot{\bar{\eta}}=-\frac{\bar{\xi}}{(\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2)^{3/2}}+3\bar{\xi}, \quad \ddot{\bar{\eta}}+2\dot{\bar{\xi}}=-\frac{\bar{\eta}}{(\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2)^{3/2}}.$$

Масштабный коэффициент l равен

$$l=\left(\frac{\varkappa}{n'^2}\right)^{1/3}=\left(\frac{k^2(m_E+m_M)}{n'^2}\right)^{1/3}.$$

Уравнения движения можно записать также с помощью силовой функции Ω^*:

$$\ddot{\bar{\xi}}-2\dot{\bar{\eta}}=\frac{\partial\Omega^*}{\partial\bar{\xi}}, \quad \ddot{\bar{\eta}}+2\dot{\bar{\xi}}=\frac{\partial\Omega^*}{\partial\bar{\eta}}, \tag{103}$$

где

$$\Omega^*=\frac{1}{2}\left(3\bar{\xi}^2+\frac{2}{\bar{r}}\right), \tag{104}$$

и

$$\bar{r}=(\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2)^{1/2}.$$

Б. Перейдем теперь ко второму выводу уравнений движения Хилла для упрощенной модели ограниченной задачи. Его простота и непосредственность способны вызвать истинное восхищение. Начнем с уравнений ограниченной задачи в форме (59) § 1.6 и осуществим перенос координатной системы вдоль оси x. Получив таким путем систему координат с началом, совпадающим с основным телом меньшей массы, составим в этой (вращающейся) системе уравнения движения. Затем изменим единицу расстояния, введя масштабный множитель μ^{α}. Полученные таким способом уравнения движения показывают, что при $\alpha=\frac{1}{3}$ гравитационная сила Земли имеет тот же порядок величины, что и сила Кориолиса и центробежная сила. Приняв это значение α, будем стремить μ к нулю. При этом мы сразу получаем уравнения движения для задачи Хилла.

В безразмерных переменных в обычной синодической системе координат уравнения движения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{y}&=x-(1-\mu)(x-\mu)/r_1^3-\mu(x+1-\mu)/r_2^3,\\ \ddot{y}+2\dot{x}&=y[1-(1-\mu)/r_1^3-\mu/r_2^3].\end{aligned}\tag{105}$$

Формулы преобразования, осуществляющие параллельный перенос системы координат вдоль оси x, имеют вид

$$\xi=x+1-\mu,\quad \eta=y.\tag{106}$$

При этом преобразовании начало новой системы координат совмещается с меньшим основным телом массы μ и, следовательно, точка P_2 имеет координаты $\xi=0$, $\eta=0$. Другое основное тело располагается в точке P_1 ($\xi=1$, $\eta=0$). Начало новой системы координат ξ, η теперь совпадает с Землей, а новая (положительная) ось ξ направлена к Солнцу, находящемуся от Земли на единичном расстоянии.

Уравнения движения в этой системе принимают вид

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}-2\dot{\eta}&=\xi+\mu-1-\frac{(1-\mu)(\xi-1)}{r_1^3}-\mu\xi/r_2^3,\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}&=\eta[1-(1-\mu)/r_1^3-\mu/r_2^3].\end{aligned}\tag{107}$$

Расстояния r_1 и r_2 сами не меняются при этом преобразовании, но выражения их становятся иными:

$$\begin{aligned}r_1&=[(x-\mu)^2+y^2]^{1/2}=[(\xi-1)^2+\eta^2]^{1/2},\\ r_2&=[(x-\mu+1)^2+y^2]^{1/2}=(\xi^2+\eta^2)^{1/2}.\end{aligned}\tag{108}$$

Масштаб теперь изменяется согласно формулам преобразования

$$\bar{\xi}=\xi/\mu^{\alpha}\quad\text{и}\quad\bar{\eta}=\eta/\mu^{\alpha}.\tag{109}$$

Подставляя эти формулы в уравнения движения (107) и производя деление на μ^α, получаем

$$\begin{aligned}\ddot{\bar\xi}-2\dot{\bar\eta}&=\bar\xi+(\mu-1)\mu^{-\alpha}+\frac{(\mu-1)\mu^{-\alpha}(\mu^\alpha\bar\xi-1)}{\bar r_1^3}-\frac{\mu\bar\xi}{\bar r_2^3},\\ \ddot{\bar\eta}+2\dot{\bar\xi}&=\bar\eta\left[1-\frac{1-\mu}{\bar r_1^3}-\frac{\mu}{\bar r_2^3}\right],\end{aligned}\tag{110}$$

где

$$\begin{aligned}\bar r_1&=[(\bar\xi\mu^\alpha-1)^2+\bar\eta^2\mu^{2\alpha}]^{1/2}=[(\bar\xi^2+\bar\eta^2)\mu^{2\alpha}-2\mu^\alpha\bar\xi+1]^{1/2},\\ \bar r_2&=\mu^\alpha(\bar\xi^2+\bar\eta^2)^{1/2}.\end{aligned}\tag{111}$$

Заметим, что для $\alpha>0$ $\bar r_1\to 1+\frac{1}{2}\mu^{2\alpha}(\bar\xi^2+\bar\eta^2)-\mu^\alpha\bar\xi\to 1$ и $\bar r_2\to 0$, когда $\mu\to 0$. Подставив теперь значения $\bar r_1$ и $\bar r_2$ в форме (111) в уравнения (110), будем иметь

$$\begin{aligned}\ddot{\bar\xi}-2\dot{\bar\eta}&=\bar\xi+(\mu-1)\mu^{-\alpha}+\frac{(\mu-1)\mu^{-\alpha}(\mu^\alpha\bar\xi-1)}{[(\bar\xi^2+\bar\eta^2)\mu^{2\alpha}-2\mu^\alpha\bar\xi+1]^{3/2}}-\frac{\bar\xi\mu^{1-3\alpha}}{(\bar\xi^2+\bar\eta^2)^{3/2}},\\ \ddot{\bar\eta}+2\dot{\bar\xi}&=\bar\eta\left[1-\frac{1-\mu}{[(\bar\xi^2+\bar\eta^2)\mu^{2\alpha}-2\mu^\alpha\bar\xi+1]^{3/2}}-\frac{\mu^{1-3\alpha}}{(\bar\xi^2+\bar\eta^2)^{3/2}}\right].\end{aligned}\tag{112}$$

Как мы уже отмечали, при значении α, равном $1/3$, порядок величины членов, обусловленных силой Кориолиса ($-2\dot{\bar\eta}$ и $2\dot{\bar\xi}$) и центробежной силой ($\bar\xi$ и $\bar\eta$), и гравитационных членов, обусловленных влиянием Земли ($\bar\xi/(\bar\xi^2+\bar\eta^2)^{3/2}$ и $\bar\eta/(\bar\xi^2+\bar\eta^2)^{3/2}$), становится одним и тем же.

Предельный процесс при $\mu\to 0$ теперь оказывает влияние только на второй и третий члены в правой части первого уравнения (112) и на второй член в правой части второго уравнения (112). Вычислим предел, к которому стремятся эти три члена. Рассмотрим сначала два критических члена первых уравнений, которые можно записать в виде

$$\frac{\mu-1}{\mu^\alpha}\,\frac{\bar r_1^3-1+\mu^\alpha\bar\xi}{\bar r_1^3}=(\mu-1)\frac{\bar\xi}{\bar r_1^3}+\frac{\mu-1}{\bar r_1^3}\,\frac{\bar r_1^3-1}{\mu^\alpha}.$$

При $\mu\to 0$ предел первого члена в правой части равен $-\bar\xi$. Второй член в пределе равен

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\mu-1}{\bar r_1^3}\,\frac{1+\frac{3}{2}(\bar\xi^2+\bar\eta^2)\mu^{2\alpha}-3\mu^\alpha\bar\xi-1}{\mu^\alpha}=3\bar\xi.$$

Здесь мы использовали полученное ранее разложение $\bar r_1$ в ряд. Таким образом, предел двух членов первого уравнения равен $2\bar\xi$.

Предел второго члена второго уравнения (112) равен единице, так как $\bar{r}_3 \to 1$, когда $\mu \to 0$.

Подставляя эти результаты в уравнения (112) и полагая $\alpha = 1/3$, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\xi}} - 2\dot{\bar{\eta}} &= 3\bar{\xi} - \frac{\bar{\xi}}{(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)^{3/2}}, \\ \ddot{\bar{\eta}} + 2\dot{\bar{\xi}} &= -\frac{\bar{\eta}}{(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{113}$$

Введем теперь снова потенциальную функцию

$$\Omega^* = \frac{1}{2}\left(3\bar{\xi}^2 + \frac{2}{\bar{r}}\right), \tag{114}$$

где

$$\bar{r} = (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)^{1/2}.$$

Тогда уравнения движения (113) примут вид

$$\ddot{\bar{\xi}} - 2\dot{\bar{\eta}} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \bar{\xi}}, \quad \ddot{\bar{\eta}} + 2\dot{\bar{\xi}} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \bar{\eta}}. \tag{115}$$

Уравнения (114) и (115) тождественны с полученными ранее уравнениями (103) и (104).

В. Интересно отметить, что три упрощения, о которых говорилось в пункте 10.4.1, в двух приведенных выводах применяются в разных местах и в разных формах. Предположение, что солнечный параллакс равен нулю, позволяет в первом выводе представить выражение (92) в виде

$$R = n'^2 a^2 (r/a)^2 (a'/r')^3 P_2,$$

а упрощение, при котором мы пренебрегаем эксцентриситетом солнечной орбиты, приводит к выражению

$$R = n'a^2 (r/a)^2 P_2.$$

Солнечным параллаксом мы пренебрегаем во втором выводе, когда осуществляем предельный процесс над уравнениями (112), а эксцентриситет солнечной орбиты мы полагаем равным нулю, когда применяем модель (круговой) ограниченной задачи и используем уравнения (105).

Наклонение Луны совсем не входит во второй вывод, так как используются уравнения (двумерной) ограниченной задачи, а в первом выводе плоскость эклиптики фактически принимается за плоскость XY и считается неподвижной.

Интересно провести сравнение уравнений (114) и (115) с уравнениями задачи двух тел посредством сравнения соответствующих потенциальных функций. Для задачи Хилла имеем

$$\Omega^* = \frac{3}{2}\bar{\xi}^2 + \frac{1}{\bar{r}},$$

а для задачи двух тел в синодической системе координат

$$\Omega^* = \frac{1}{2}(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2) + \frac{1}{\bar{r}}$$

(см. уравнение (8) § 8.5). Следовательно, левые части уравнений в двух задачах тождественны, а правые части в задаче Хилла равны

$$3\bar{\xi} - \bar{\xi}/\bar{r}^3 \quad \text{и} \quad -\bar{\eta}/\bar{r}^3,$$

а в задаче двух тел

$$\ddot{\bar{\xi}} - \bar{\xi}/\bar{r}^3 \quad \text{и} \quad \ddot{\bar{\eta}} - \bar{\eta}/\bar{r}^3.$$

Интеграл Якоби следует непосредственно из уравнений (115):

$$\dot{\bar{\xi}}^2 + \dot{\bar{\eta}}^2 = 2\Omega^* - C. \tag{116}$$

Теорема о том, что это есть единственный алгебраический интеграл задачи Хилла, следует из подобного, но не тождественного вывода, который дал Зигель для ограниченной задачи.

С помощью уравнения (116) Хилл предлагает осуществить преобразование уравнений движения. Существенной особенностью такого преобразования является то, что при нем можно исключить члены, содержащие единственную особенность, $(\bar{r})^{-3}$. С этой целью умножим сначала первое уравнение (115) на $\bar{\xi}$, второе — на $\bar{\eta}$ и сложим результаты. Проделав это, получим

$$\bar{\xi}\ddot{\bar{\xi}} + \bar{\eta}\ddot{\bar{\eta}} + 2(\dot{\bar{\xi}}\bar{\eta} - \bar{\xi}\dot{\bar{\eta}}) = \bar{\xi}\Omega^*_{\bar{\xi}} + \bar{\eta}\Omega^*_{\bar{\eta}}. \tag{117}$$

Затем умножим первое уравнение (115) на $\bar{\eta}$, второе — на $\bar{\xi}$ и вычтем из первого результата второй. Тогда будем иметь

$$\bar{\eta}\ddot{\bar{\xi}} - \bar{\xi}\ddot{\bar{\eta}} - 2(\dot{\bar{\xi}}\bar{\xi} + \dot{\bar{\eta}}\bar{\eta}) = \bar{\eta}\Omega^*_{\bar{\xi}} - \bar{\xi}\Omega^*_{\bar{\eta}}. \tag{118}$$

Для задачи Хилла правая часть уравнения (117) имеет вид $3\bar{\xi}^2 - 1/\bar{r}$, а правая часть уравнения (118) равна $3\bar{\xi}\bar{\eta}$.

Для задачи двух тел соответствующие результаты равны $\bar{r}^2 - 1/\bar{r}$ и нулю.

Интеграл Якоби (116) содержит член $(\bar{r})^{-1}$, поэтому правую часть уравнения (117) можно записать в виде

$$3\bar{\xi}^2 - \frac{1}{\bar{r}} = \frac{9}{2}\bar{\xi}^2 - \frac{1}{2}(\dot{\bar{\xi}}^2 + \dot{\bar{\eta}}^2) - \frac{C}{2},$$

поскольку из уравнений (114) и (116) следует, что

$$\frac{1}{\bar{r}} = \Omega^* - \frac{3}{2}\bar{\xi}^2 = \frac{1}{2}(\dot{\bar{\xi}}^2 + \dot{\bar{\eta}}^2) + \frac{C}{2} - \frac{3}{2}\bar{\xi}^2.$$

Для задачи двух тел соответственно имеем

$$\bar{r}^2 - \frac{1}{\bar{r}} = \frac{3}{2}\bar{r}^2 - \frac{1}{2}(\dot{\bar{\xi}}^2 + \dot{\bar{\eta}}^2) - \frac{C}{2}.$$

Новые уравнения движения для задачи Хилла теперь можно получить, сохранив левые части уравнений (117) и (118) и применив новые формы правых частей:

$$\begin{aligned} &\bar{\xi}\ddot{\bar{\xi}} + \bar{\eta}\ddot{\bar{\eta}} + 2(\dot{\bar{\xi}}\bar{\eta} - \bar{\xi}\dot{\bar{\eta}}) + \frac{1}{2}(\dot{\bar{\xi}}^2 + \dot{\bar{\eta}}^2) - \frac{9}{2}\bar{\xi}^2 + \frac{C}{2} = 0, \\ &\bar{\xi}\ddot{\bar{\eta}} - \bar{\eta}\ddot{\bar{\xi}} + 2(\dot{\bar{\xi}}\bar{\xi} + \dot{\bar{\eta}}\bar{\eta}) + 3\bar{\xi}\bar{\eta} = 0. \end{aligned} \tag{119}$$

Соответствующие уравнения для задачи двух тел будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\bar{\xi}\ddot{\bar{\xi}} + \bar{\eta}\ddot{\bar{\eta}} + 2(\dot{\bar{\xi}}\bar{\eta} - \bar{\xi}\dot{\bar{\eta}}) + \frac{1}{2}(\dot{\bar{\xi}}^2 + \dot{\bar{\eta}}^2) - \frac{3}{2}(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2) + \frac{C}{2} = 0, \\ &\bar{\xi}\ddot{\bar{\eta}} - \bar{\eta}\ddot{\bar{\xi}} + 2(\dot{\bar{\xi}}\bar{\xi} + \dot{\bar{\eta}}\bar{\eta}) = 0. \end{aligned}$$

10.4.3. Точки либрации и кривые нулевой скорости. Здесь мы ради простоты вместо переменных $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, Ω^* будем пользоваться переменными x, y, Ω. Тогда интеграл Якоби задачи Хилла примет вид

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C, \tag{120}$$

где

$$\Omega = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{r}. \tag{121}$$

Особые точки совокупности состояний движения определяются уравнениями

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \Omega_x = x(3 - 1/r^3) = 0, \quad \Omega_y = -\frac{y}{r^3} = 0.$$

Из двух последних уравнений находим две коллинеарные точки либрации:

$$L_1(-3^{-1/3}, 0) \quad \text{и} \quad L_2(3^{-1/3}, 0).$$

Третья коллинеарная точка в ограниченной задаче располагалась справа от основного тела большей массы. В задаче Хилла эта точка не появляется, так как m_1 перемещается к $x = +\infty$.

Обе точки являются седловыми. Для того чтобы показать это, вычислим вторые частные производные функции Ω и, определив гессиан, найдем соответствующую квадратичную форму, которая становится неопределенной в точках $x = \pm 3^{-1/3}$, $y = 0$. В самом деле,

$$\Omega_{xx} = 3 + \frac{2x^2 - y^2}{r^5}, \quad \Omega_{yy} = \frac{2y^2 - x^2}{r^5}, \quad \Omega_{xy} = \frac{3xy}{r^5},$$

и гессиан принимает вид

$$H=\frac{1}{r^{10}}[3r^6(2y^2-x^2)-2(x^2+y^2)^2].$$

В обеих коллинеариых точках

$$\Omega_{xx}=9,\quad \Omega_{yy}=-3,\quad \Omega_{xy}=0$$

и

$$H=-27.$$

Уравнения в вариациях относительно точек либрацин имеют вид

$$\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=9\xi,\quad \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=-3\eta,$$

а характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^4-2\lambda^2-27=0.$$

Корни уравнения равны

$$\lambda_1=(1+2\cdot 7^{1/2})^{1/2}=\lambda,\qquad \lambda_2=-(1+2\cdot 7^{1/2})^{1/2}=-\lambda,$$
$$\lambda_3=i(2\cdot 7^{1/2}-1)^{1/2}=is,\quad \lambda_4=-i(2\cdot 7^{1/2}-1)^{1/2}=-is,$$

где

$$\lambda=2{,}50828679$$

и

$$s=2{,}07159422,$$

что указывает на общую неустойчивость и условную устойчивость в линейном смысле. Читатель легко установит сходство между точками либрацин в задаче Хилла и коллинеарными точками в ограниченной задаче.

Сделаем теперь ряд замечаний относительно кривых нулевой скорости для задачи Хилла

1) Кривые нулевой скорости определяются уравнением

$$3x^2+2/r-C=0, \tag{122}$$

которое, как можно видеть, симметрично относительно осей x и y. Поэтому исследование можно ограничить первым квадрантом плоскости xy.

2) Координатные оси играют разные роли. Для того чтобы показать это, исследуем фуикцню $\Omega(x, y)$, определяемую уравнением (121), когда $r\to\infty$. Если $x\neq 0$, то $\Omega\to 0$, когда $r\to\infty$, а если $x=0$, то $\Omega\to 0$, когда $r\to\infty$. Другими словамн, вдоль любого направлення, кроме оси y, $\Omega\to\infty$, а вдоль оси y $\Omega\to 0$, когда $r\to\infty$.

3) Кривые Хилла пересекают ось x, когда $C\geqslant 3^{4/3}$. Для того чтобы показать это, рассмотрим функцию

$$Y(x)=3x^2-Cx+2.$$

Следовательно, при

$$x_m = C^{1/2}/3$$

производная Y по x обращается в нуль:

$$\frac{dY}{dx} = 0.$$

При $x = x_m$ функция $Y(x)$ принимает значение

$$Y(x_m) = 2\left[1 - (C/3^{4/3})^{3/2}\right],$$

которое определяет единственный минимум функции $Y(x)$ для $x > 0$.

В зависимости от значения C имеем

$$Y_{\min} \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} 0, \quad \text{когда} \quad C \left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\} 3^{4/3}.$$

Значение x_m, доставляющее минимум функции $Y(x)$, удовлетворяет условиям

$$x_m \left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\} 3^{-1/3}.$$

При $Y_{\min} \leqslant 0$ кривая нулевой скорости пересекает положительное направление оси x. При $Y_{\min} < 0$ имеют место два пересечения, а при $Y_{\min} = 0$ — одно. Соответствующее значение постоянной Якоби для двух пересечений удовлетворяет неравенству $C > 3^{4/3}$, а для одного равно $C = 3^{4/3}$. В этом последнем случае положение точки пересечения определяется координатой

$$x_0 = x_m = 3^{-1/3}.$$

В первом случае, т. е. когда $C > 3^{4/3}$, координаты точек пересечения удовлетворяют условиям

$$0 < x_{01} < 3^{-1/3}$$

и

$$3^{-1/3} < x_{02} < \left(\frac{C}{3}\right)^{1/2}.$$

Верхний предел величины x_{02} мы имеем при пересечении вертикальной асимптоты с осью x. Из уравнения (122) следует, что положение этой асимптоты определяется уравнением

$$x_a = \left(\frac{C}{3}\right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$x_a \left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\} 3^{1/6}, \quad \text{когда} \quad C \left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\} 3^{4/3}.$$

4) Когда $C \geqslant 3^{4/3}$, вокруг начала координат существуют замкнутые кривые нулевой скорости. Для того чтобы показать это,

исследуем пересечения кривых нулевой скорости с системой лучей

$$x=\alpha r,\ y=\beta r,\ 1\geqslant\alpha\geqslant 0,\ 1\geqslant\beta\geqslant 0,\ \alpha^2+\beta^2=1,$$

где параметр $r\geqslant 0$ выражает радиальное расстояние вдоль луча, отмеряемое от начала координат. Значения $\alpha=0$, $\beta=1$ соответствуют оси y, а значения $\alpha=1$, $\beta=0$ — оси x. Подставляя уравнения системы лучей в уравнение (122), получаем

$$\bar{Y}(r)=3\alpha^2r^3-Cr+2=0. \tag{123}$$

Если $\alpha=0$, то пересечение оси y с кривыми нулевой скорости происходит при $r=2/C=y$, и мы можем заключить, что при любом значении C положительное направление оси y всегда пересекает кривую нулевой скорости один и только один раз.

При $\alpha=1$ мы получаем исследованный выше случай пересечения оси x с кривыми нулевой скорости.

При $0<\alpha<1$ мы имеем лучи первого квадранта, и если уравнение $\bar{Y}(r)=0$ имеет положительные корни, то лучи пересекают кривую нулевой скорости. В зависимости от значения C имеем

$$\bar{Y}_{\min}\gtrless 0,\quad \text{когда}\quad C\lessgtr 3^{4/3}\alpha^{2/3},$$

и положение минимума определяется условием

$$r_m\lessgtr(3\alpha^2)^{-1/3}.$$

Когда $\bar{Y}_{\min}<0$, имеются два пересечения, связанные с $C>3^{4/3}\,\alpha^{2/3}$. Если условие для двух пересечений с осью x, $C>3^{4/3}$, выполняется, то, конечно, выполняется и условие $C>3^{4/3}\,\alpha^{2/3}$, так как $0<\alpha<1$.

Рассмотрим случай, когда $C>3^{4/3}$. Одно пересечение положительного направления оси x с кривой нулевой скорости происходит, как было показано выше, между $x=0$ и $x=3^{-1/3}$. Таким образом, когда $\alpha=1$, имеем $0<x_0<3^{-1/3}$, а когда $\alpha=0$, имеем $y_0=2/C<2/3^{4/3}$.

Пересечение с осью x получается при меньшем корне уравнения

$$3x_0^3-Cx_0+2=0,$$

а пересечение с осью y определяется из уравнения

$$-Cy_0+2=0.$$

Следовательно, $x_0>y_0$.

Меньший положительный корень уравнения (123) для $C>3^{1/3}$ является монотонной функцией α, следовательно, кривая нулевой скорости вокруг начала координат замкнута.

Заметим, что

$$(y_0)_{\max}=\frac{2}{C_{\min}}=\frac{2}{3^{4/3}},\quad (x_0)_{\max}=3^{-1/3},$$

и так как $(x_0)_{\max}>(y_0)_{\max}$, то все замкнутые кривые нулевой скорости находятся внутри окружности радиуса $3^{-1/3}$.

5) Движение происходит внутри этого овала. Это есть тот случай, когда овал стягивается при увеличении значения постоянной Якоби или, другими словами, C есть монотонно убывающая функция r. Из уравнения (123) следует, что

$$C=3\alpha^2r^2+2/r,$$

и для фиксированного $\alpha\neq 0$ имеем

$$\frac{dC}{dr}=6\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2\left(r^3-\frac{1}{3\alpha^2}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{dC}{dr}\gtrless 0,\quad \text{когда } r\gtrless(3\alpha^2)^{-1/3},$$

и следовательно, $C(r)$ есть монотонно убывающая фуикция, так как пересечение луча с кривой нулевой скорости происходит при значении r, меньшем, чем r, соответствующее минимуму C. Случай $\alpha=0$ является простым, так как при этом $C=2/r$ и $dC/dr<0$.

6) На рис. 10.14 показаны кривые нулевой скорости трех различных типов, соответствующие $C>3^{4/3}$, $C=3^{4/3}$ и $C<3^{4/3}$. Когда $C>3^{4/3}$, движение может иметь место либо внутри овала вокруг начала координат, либо с вогнутых сторон бесконечных ветвей. Когда $C=3^{4/3}$, две ветви кривых нулевой скорости соединяются в точках либрации. Когда $C<3^{4/3}$, обмен частиц между внутренней частью овала вокруг начала координат и наружной областью бесконечных ветвей становится свободным, но еще имеются запрещенные области, определяемые неравенствами

$$|y|>\left[\left(\frac{2}{C-3x^2}\right)^2-x^2\right]^{1/2}$$

и

$$|x|<\left(\frac{C}{3}\right)^{1/2}.$$

Характеристики кривых, изображенных на рис. 10.14,*а—ж*, приводятся в табл. 1.

7) Для исследования движения Луны наибольший интерес представляет случай $C>3^{4/3}$, когда движение происходит внутри замкнутого овала вокруг начала координат. Некоторые подробности, относящиеся к таким замкнутым овалам нулевой скорости, а также предельный овал, соответствующий $C=3^{4/3}$, и

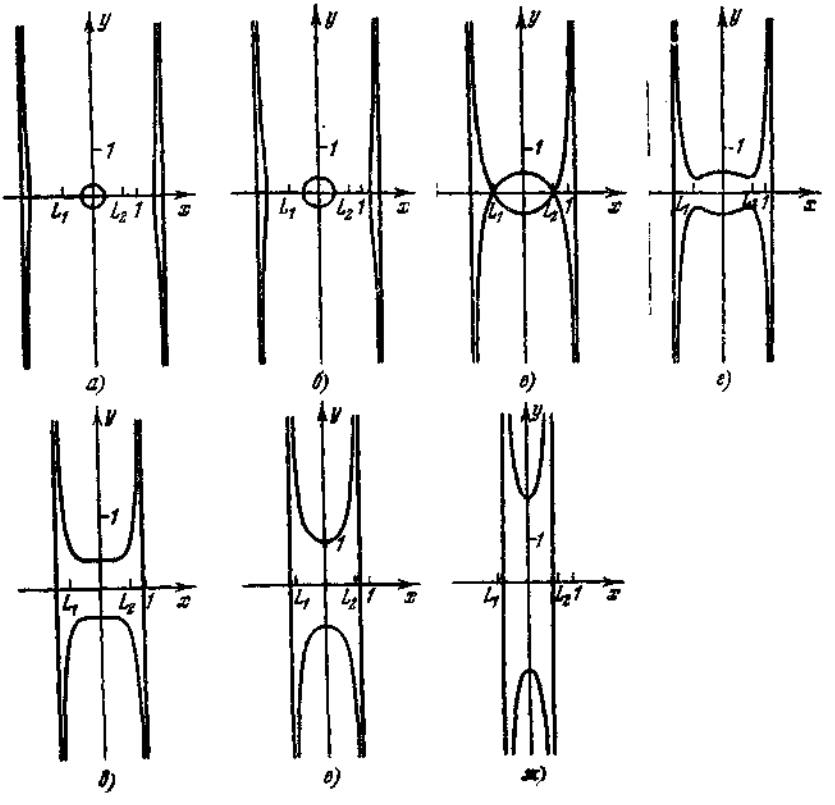


Рис. 10.14. Кривые нулевой скорости для задачи Хилла.

Таблица I. Характеристики кривых, показанных на рис. 10.14

№ рисунка	C	$y_0=2/C$	$x_a=(C/3)^{1/2}$
10.14 *а*	8	1/4	1,633
10.14 *б*	6	1/3	1,414
10.14 *в*	$3^{4/3}=4{,}327$	$2\cdot 3^{-4/3}=0{,}462$	1,201
10.14 *г*	4	1/2	1,155
10.14 *д*	3	2/3	1,000
10.14 *е*	2	1	0,816
10.14 *ж*	1	2	0,577

окружность радиуса $3^{-1/3}$, ограничивающая овалы, показаны на рис. 10.15.

10.4.4. Регуляризация. В этом пункте мы покажем, что преобразование (64) § 3.3 — преобразование Леви-Чивита — регуляризует задачу Хилла.

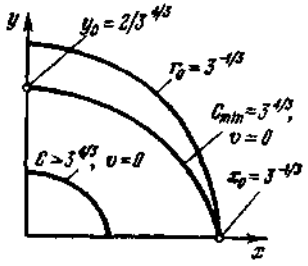


Рис. 10.15. Овалы нулевой скорости в задаче Хилла.

Обозначив

$$z=x+iy \text{ и } w=u+iv,$$

будем иметь

$$z=f(w)=w^2, \quad x=u^2-v^2, \quad y=2uv.$$

Формула преобразования времени принимает вид

$$d\tau=\frac{dt}{4(u^2+v^2)},$$

так как

$$\frac{dt}{d\tau}=|f'(w)|^2.$$

Уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} u''-8(u^2+v^2)v'&=\Omega_u^*(u, v),\\ v''+8(u^2+v^2)u'&=\Omega_v^*(u, v),\end{aligned} \tag{124}$$

где штрихи означают дифференцирование по новой независимой переменной τ, а функция $\Omega^*(u, v)$ равна

$$\Omega^*(u, v)=\left(\Omega-\frac{C}{2}\right)|f'|^2. \tag{125}$$

Функция Ω определяется уравнением (121), и будучи выражена в новых зависимых переменных, дает после подстановки в уравнение (125) следующее соотношение:

$$\Omega^*(u, v)=6(u^2+v^2)(u^2-v^2)^2+4-2C(u^2+v^2). \tag{126}$$

Правые части уравнений (124) равны

$$\begin{aligned} \Omega_u^*&=4u[3(u^2-v^2)(3u^2+v^2)-C],\\ \Omega_v^*&=-4v[3(u^2-v^2)(3v^2+u^2)+C].\end{aligned} \tag{127}$$

Мы видим, что особенность в начале координат исключена; в самом деле, $\Omega^*(0, 0)=4$, $\Omega_u^*(0, 0)=\Omega_v^*(0, 0)=0$, а скорость в начале координат равна $2\cdot 2^{1/2}$, что следует из преобразованного интеграла Якоби:

$$(u')^2+(v')^2=2\Omega^*(u, v). \tag{128}$$

Движение частицы при начальных условиях $u(0)=0$, $v(0)=0$ и $t=\tau=0$ соответствует соударению Луны с Землей. Из ни-

теграла Якоби имеем

$$[u'(0)]^2+[v'(0)]^2=8,$$

и следовательно, начальными условиями для составляющих скорости будут

$$u'(0)=2\cdot 2^{1/2}\cos\alpha \quad \text{и} \quad v'(0)=2\cdot 2^{1/2}\sin\alpha,$$

где α есть угол между вектором начальной скорости и осью u.

Движение можно представить в виде

$$u=u(0)+u'(0)\tau+u''(0)\tau^2/2+\ldots,$$
$$v=v(0)+v'(0)\tau+v''(0)\tau^2/2+\ldots$$

Для того чтобы найти входящие сюда высшие производные обратимся к уравнениям (124). Из них получаем

$$u''(0)=8v'(0)[u^2(0)+v^2(0)]+\Omega_u^*(0,0),$$
$$v''(0)=-8u'(0)[u^2(0)+v^2(0)]+\Omega_v^*(0,0)$$

или

$$u''(0)=0 \quad \text{и} \quad v''(0)=0.$$

Третьи производные получаются путем дифференцирования уравнений движения (124):

$$u'''=8[2v'(uu'+vv')+v''(u^2+v^2)]+\Omega_{uu}^*u'+\Omega_{uv}^*v',$$
$$v'''=-8[2u'(uu'+vv')+u''(u^2+v^2)]+\Omega_{vu}^*u'+\Omega_{vv}^*v'$$

или

$$u'''(0)=-4Cu'(0), \quad v'''(0)=-4Cv'(0),$$

так как

$$\Omega_{uu}^*(0,0)=\Omega_{vv}^*(0,0)=-4C \quad \text{и} \quad \Omega_{uv}^*(0,0)=0.$$

Таким образом, степенные ряды принимают вид

$$u=u_0'\tau-4Cu_0'\frac{\tau^3}{3!}+\ldots,$$
$$v=v_0'\tau-4Cv_0'\frac{\tau^3}{3!}+\ldots,$$

где ради простоты $u(0)$ обозначено через u_0, а $v(0)$ — через v_0.

Соотношение между новой и первоначальной временными переменными (τ и t) равно

$$\int_0^t dt=4\int_0^\tau (u_0'^2+v_0'^2)\left(\tau^2-\frac{8C}{3!}\tau^4+\ldots\right)d\tau.$$

Отсюда

$$t=\frac{4}{3}(u_0'^2+v_0'^2)\tau^3\left(1-\frac{4}{5}C\tau^2+\ldots\right)$$

или

$$t=\frac{32}{3}\tau^3\left(1-\frac{4}{5}C\tau^2+\ldots\right).$$

Возвращаясь снова к первоначальным переменным x и y, будем иметь

$$x=(u_0''+v_0'')\tau^2+\ldots \quad \text{и} \quad y=2u_0'v_0'\tau^2+\ldots$$

или

$$x=(8\cos 2\alpha)\tau^2+\ldots \quad \text{и} \quad y=(8\sin 2\alpha)\tau^2+\ldots$$

Инвертируя, получаем для малых t

$$\tau=\left(\frac{3t}{32}\right)^{1/3}+\ldots$$

Таким образом,

$$x=[(9/2)^{1/3}\cos 2\alpha]\,t^{2/3}+\ldots \quad \text{и} \quad y=[(9/2)^{1/3}\sin 2\alpha]\,t^{2/3}+\ldots$$

Заметим, что аналогичное разложение можно выполнить и для регуляризованной ограниченной задачи. Причина того, что этот вывод можно из гл. 3 перенести в гл. 10, заключается в том, что правые части уравнений движения для задачи Хилла значительно проще, чем для ограниченной задачи.

10.4.5. Вариационная орбита. Вернемся теперь к уравнениям движения, выведенным в пункте 10.4.2. Сначала рассмотрим уравнения (115) в виде

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\Omega_x, \quad \ddot{y}+2\dot{x}=\Omega_y, \tag{129}$$

где

$$\Omega=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{r}.$$

Для удобства здесь $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ и Ω^* заменены на x, y и Ω.

Нас будет интересовать периодическое решение, симметричное относительно обеих координатных осей. Примем следующие начальные условия:

$$x(0)>0, \quad y(0)=0, \quad \dot{x}(0)=0,$$

и запишем условия симметрии:

$$x(t)=x(-t)=-x(t+T/2),$$
$$y(t)=-y(-t)=-y(t+T/2).$$

Решение в форме ряда Фурье выглядит следующим образом:

$$x=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t,$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \omega n t + D_n \sin \omega n t,$$

где

$$\omega = 2\pi/T.$$

Оно значительно упрощается, если выполняются условия симметрии; в самом деле,

при $x(t)=x(-t)$ имеем $B_n=0$,
при $y(t)=-y(-t)$ имеем $C_n=0$.

Условия $x(t)=-x(t+T/2)$ и $y(t)=-y(t+T/2)$ удовлетворяются в том случае, когда исключены все четные члены. Тогда будем иметь

$$x=A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t + \ldots,$$
$$y=D_1 \sin \omega t + D_3 \sin 3\omega t + \ldots,$$

т. е.

$$x=\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos (2n+1)\,\omega t,$$
$$y=\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sin (2n+1)\,\omega t, \tag{130}$$

где

$$\alpha_n = A_{2n+1} \quad \text{и} \quad \beta_n = D_{2n+1}.$$

Задача, таким образом, сводится к нахождению коэффициентов α_n, β_n для заданного значения ω. Заметим, что ω есть постоянная интегрирования и является единственным параметром решения. Для заданного значения $x(0)>0$ можно найти соответствующее значение $\dot{y}(0)>0$ при $y(0)=\dot{x}(0)=0$ и получить в результате прямую периодическую орбиту во вращающейся системе.

Для Луны значение ω известно с высокой степенью точности из наблюдений. Уравнения движения в форме (129) составлены для $n'=1$, в общем случае во вращающейся системе координат имеем

$$\omega = \frac{n-n'}{n'}.$$

Параметр Хилла, равный по определению $m=1/\omega$, принимает вид

$$m=\frac{n'/n}{1-n'/n}.$$

Принимая значение n'/n, указанное в пункте 10.4.1, находим

$$m=0{,}080848933808312.$$

В табл. II приводятся характеристики для четырех орбит Хилла, начиная с орбиты Луны.

Таблица II. Характеристики орбит Хилла, изображенных на рис. 10.16

№ орбиты	x (0)	y (T/4)	m	C
1	0,17610	0,17864	0,0808489	6,50888
2	0,31232	0,36897	0,25	4,13277
3	0,33235	0,45973	0,3333333	3,72018
4	0,27180	0,78190	0,5609626	2,55787

В первом столбце указаны номера орбит в соответствии с рис. 10.16. Первая орбита принадлежит спутнику Земли, а последняя представляет собой орбиту максимального приближения к Луне. Точки заострения кривой нулевой скорости расположены на оси y. Заметим, что критическое значение постоянной Якоби, которое отделяет замкнутые овалы нулевой скорости от незамкнутых кривых, равно

$$C=3^{4/3}=4{,}3267488.$$

Следовательно, только первая орбита находится внутри замкнутого овала нулевой скорости. Семейство может быть продолжено дальше, до еще больших значений m, за орбиту, имеющую точки заострения. Эти орбиты, делающие петли у обоих концов, у Хилла отсутствуют, они были найдены лордом Кельвином, а также Пуанкаре. Ниже мы рассмотрим вопрос об их существовании.

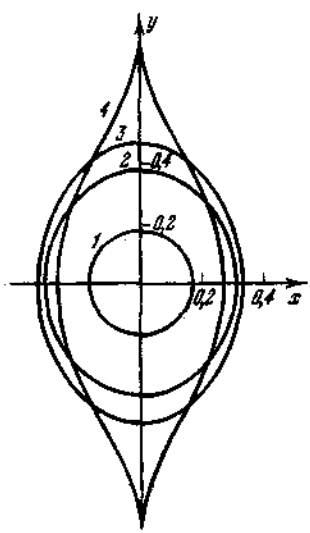


Рис. 10.16. Семейство орбит Хилла (Хилл, 1878 [56]).

Точка заострения находится на оси y при $y=y_0$, где орбита имеет общую точку с кривой нулевой скорости. Для

кривой № 4 табл. II дает

$$C=\frac{2}{y(T/4)}.$$

Раскладывая координаты в этой точке в ряд по степеням времени, получаем

$$x=x_0+\dot{x}_0t+\ddot{x}_0\frac{t^2}{2!}+\dddot{x}_0\frac{t^3}{3!}+\ldots,$$

и аналогично для $y(t)$ (см. ряд (116) в пункте 4.7.5). Начальными условиями теперь будут

$$t=0,\quad x=x_0=0,\quad y=y_0=2/C,\quad \dot{x}=\dot{y}=0.$$

Производные высшего порядка находятся из уравнений движения:

$$\ddot{x}_0=2\dot{y}_0+\Omega_x{}^0 \quad \text{и, следовательно,} \quad \ddot{x}_0=\Omega_x{}^0,$$
$$\ddot{y}_0=-2\dot{x}_0+\Omega_y{}^0 \quad \text{и, следовательно,} \quad \ddot{y}_0=\Omega_y{}^0.$$

На оси y $\Omega_x{}^0=0$ и $\Omega_y{}^0=-y_0^{-2}$, так что

$$\ddot{x}_0=0 \quad \text{и} \quad \ddot{y}_0=-y_0^{-2}.$$

Вычисляя высшие производные уравнений движения, находим

$$\dddot{x}_0=-2y_0^{-2} \quad \text{и} \quad \dddot{y}_0=0.$$

Таким образом, ряды принимают следующий вид (см. ряд (125) в пункте 4.7.5):

$$x=-\frac{t^3}{3y_0{}^2}+\ldots,\quad y=y_0-\frac{t^2}{2y_0{}^2}+\ldots$$

Если на оси y точек заострения нет, то разложения в степенные ряды начинаются при следующих начальных условиях: когда $t=0$, $x=x_0=0$, $y=y_0\neq 2/C$, $\dot{x}=\dot{x}_0\neq 0$, $\dot{y}_0=0$.

Так как орбита обладает свойствами симметрии, о которых говорилось раньше, то ряды для x будут содержать только нечетные степени времени, а для y — только четные степени t. Это следует также из уравнений движения:

$$\ddot{x}_0=0,\quad \dddot{x}_0=-\dot{x}_0(1+1/y_0{}^3)-2/y_0{}^2,$$
$$\ddot{y}_0=-2\dot{x}_0-1/y_0{}^2,\quad \dddot{y}_0=0.$$

Если значение y_0 берется вблизи точки заострения, то разложение x в степенной ряд упрощается. В этом случае $\dot{x}_0$

мало и

$$\dddot{x}_0 \approx -2/y_0^2.$$

Таким образом, мы получаем

$$x \approx x_0 t - t^3/3y_0^2.$$

Отсюда видно, что если $\dot{x}_0 < 0$, то уравнение $x(t)=0$ при малых значениях t имеет только один действительный корень, а именно, $t=0$. С другой стороны, если $\dot{x}_0 > 0$, то мы имеем три действительных корня:

$$t_1 = 0 \quad \text{и} \quad t_{2,3} = \pm y_0 (3\dot{x}_0)^{1/2}$$

и соответствующие значения $y=y_0$ и $y=y_0-(3/2)\dot{x}_0$. Эти орбиты пересекаются с осью y шесть раз: три раза с положительным направлением оси y и три раза с отрицательным. Таким образом, между двумя последовательными снзигиями имеются три квадратуры (см. рис. 10.17).

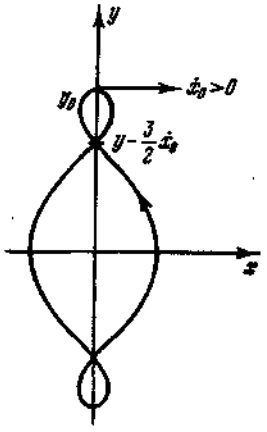


Рис. 10.17. Орбита, образующая петли, для задачи Хилла.

Как уже отмечалось, решение задачи Хилла сводится к нахождению коэффициентов ряда Фурье. Это, в свою очередь, требует решения бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений, получаемых путем сравнения коэффициентов при членах с одинаковой частотой. То обстоятельство, что уравнения движения и переменные подвергаются преобразованиям, не влияет на существование решения, а лишь изменяет пути его нахождения. Хилл сначала преобразовывал уравнения движения и от нашей обычной формы, определяемой уравнениями (129), переходил к форме (119), пункт 10.4.2 В. Затем он вместо x, y, t вводил новые переменные u, s, ζ, совершая преобразования посредством формул

$$u = x + iy, \quad s = x - iy, \quad \zeta = e^{it/m}.$$

Решение уравнений движения приводило, как только что говорилось, к бесконечной нелинейной системе, которую Хилл решал, аппроксимируя решение посредством ряда, но не проводил исследования сходимости. Это было сделано Ляпуновым, а позже Хаппелем и Зигелем, который доказал другим способом существование вариационных орбит Хилла. Винтнер доказал сходимость ряда спустя 48 лет после опубликования работы Хилла.

Как отмечалось в введении к § 10.4, посвященном задаче Хилла, наиболее интересные и лучше всего известные аспекты его работы связаны с рассматриваемой им бесконечной системой линейных уравнений как следствием уравнения (81), которое часто называют уравнением Хилла или обобщенным уравнением Гильдена — Линдштедта. Это уравнение можно записать в виде

$$\ddot{x}+(\theta_0+\theta_2\cos 2t+\theta_4\cos 4t+\ldots)\,x=0,$$

а решение его можно представить в форме

$$x=\sum_{-\infty}^{\infty}a_k\cos[(c+2k)\,t+\alpha].$$

Сходимость бесконечного определителя была доказана Пуанкаре в нескольких его статьях, на которые мы ссылаемся в § 10.6 и которые приводим в списке литературы к гл. 10.

Две задачи о бесконечных системах нелинейных и линейных уравнений описаны в литературе по математике и небесной механике, и поскольку подробное изложение задачи Хилла выходит за пределы нашей книги, мы ограничимся некоторыми дополнительными замечаниями библиографического характера.

§ 10.5. Другие модификации

В этом параграфе мы рассмотрим несколько дополнительных модификаций ограниченной задачи. В пункте 10.5.1 приводятся два примера упрощений нашей динамической системы. Они известны как задача Эйлера и задача Лагранжа. Когда основные тела находятся в покое в инерциальной системе координат, центробежные и кориолисовы члены в уравнениях движения отсутствуют. Эту динамическую систему называют задачей двух притягивающих неподвижных центров или задачей Эйлера. Если в ограниченной задаче пренебречь кориолисовыми членами, но сохранить центробежные и, кроме того, массовый параметр принять равным $^1/_2$, то мы придем к так называемой задаче Лагранжа.

Не упрощая принимаемые предположения, мы включим в рассмотрение некоторые эффекты, которые усложнят первоначальную задачу, сформулированную в пункте 10.5.2. Сложность задачи возрастает, если массу основных тел принять переменной, если помимо гравитационных сил учитывать еще малую тягу, приложенную к третьему телу, если рассматривать гиперболические и параболические орбиты основных тел, если учитывать гармоники высшего порядка в гравитационных

снлах, действующих между основными телами и третьим телом, и т. д.

В заключение мы рассмотрим два важных и мощных обобщения ограниченной задачи: естественную модификацию функции Лагранжа (пункт 10.5.2 Г) и идею обратных задач (пункт 10.5.2 Д).

10.5.1. Задача Эйлера и задача Лагранжа. Рассмотрим ограниченную задачу в постановке Лагранжа. Функцию Лагранжа примем в виде

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}-ny)^2+\frac{1}{2}(\dot{y}+nx)^2+\Omega^*$$

или

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+n(x\dot{y}-y\dot{x})+\Omega, \tag{131}$$

где n есть среднее движение синодической системы координат (см. § 1.4),

$$\Omega=\frac{n^2}{2}(x^2+y^2)+\Omega^*$$

и

$$\Omega^*=\frac{1}{2}\mu(1-\mu)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}.$$

Если пренебречь центробежными и кориолисовыми силами, то мы придем к задаче Эйлера с $n=0$ и

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\Omega^*.$$

Уравнения движения в этом случае принимают вид

$$\ddot{x}=\Omega_x^*, \quad \ddot{y}=\Omega_y^*.$$

Если пренебречь одними только силами Кориолиса, то функция Лагранжа будет иметь вид

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\Omega.$$

Положив теперь $\mu=1/2$, мы придем к задаче Лагранжа с

$$\Omega=\overline{\Omega}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+\frac{n^2}{2}(x^2+y^2).$$

Рассмотрим преобразование Тиле—Барро в комплексной форме (см. § 3.6):

$$q=\frac{1}{2}\cos w, \tag{132}$$

где начало синодической системы координат q_1, q_2 располагается посередине между основными телами, а сами основные

тела находятся на оси q_1 на единичном расстоянии друг от друга. Уравнение движения в комплексной форме записывается следующим образом (см. уравнение (102) § 3.5):

$$\ddot{q}+2i\dot{q}=\operatorname{grad}_q U(q),$$

где

$$U(q)=\Omega(q)-C/2.$$

Уравнение движения, выраженное в переменной w, имеет вид

$$w''+2inw'|f'(w)|^2=\operatorname{grad}_w|f'|^2U.$$

При

$$|f'(w)|^2=\frac{1}{8}(\operatorname{ch}2v-\cos 2u)$$

оно принимает вид

$$u''-\frac{nv'}{4}(\operatorname{ch}2v-\cos 2u)=(|f'|^2U)_u, \tag{132a'}$$

$$v''+\frac{nu'}{4}(\operatorname{ch}2v-\cos 2u)=(|f'|^2U)_v. \tag{132б'}$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по преобразованному времени τ, которое связано с первоначальным временем t соотношением

$$t=\frac{1}{8}\int_0^\tau(\operatorname{ch}2v-\cos 2u)\,d\tau. \tag{133}$$

Функцию, состоящую в правой части уравнений (132)′, можно вычислить по формуле (126) § 3.6. Если n^2 ввести посредством выражения

$$\frac{n^2}{2}(x^2+y^2)+\frac{\mu}{2}(1-\mu)$$

вместо

$$\frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2],$$

то при $x=q_1-1/2+\mu$ и $y=q_2$ будем иметь

$$\Omega=\frac{n^2}{2}\left[q_1^2+q_2^2+2q_1\left(\mu-\frac{1}{2}\right)+\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{\mu}{2}(1-\mu)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}. \tag{134}$$

Подставляя сюда выражения для q_1, q_2, r_1 и r_2, которые можно получить из уравнений (125) § 3.6, находим

$$U|f'|^2=\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\cos u+\frac{1}{2}\operatorname{ch} v+\frac{C'}{2}(\operatorname{ch}2v-\cos 2u)+$$
$$+\frac{n^2}{32}\left(\mu-\frac{1}{2}\right)(\operatorname{ch}3v\cos u-\operatorname{ch}v\cos 3u)+\frac{n^2}{256}(\operatorname{ch}4v-\cos 4u),$$

где

$$C'=\frac{1}{8}\left[n^2\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2+\mu(1-\mu)-C\right]$$

есть модифицированная постоянная Якоби.

Прежде чем переходить к рассмотрению задачи Эйлера или задачи Лагранжа, полагая $n=0$ или $\mu=1/2$, заметим, что, когда $n=0$ или $\mu=1/2$, $U|f'|^2$ является функцией с разделяющимися переменными, так как единственный член, в который входят обе переменные, u и v, умножается на $n(\mu-1/2)$. С другой стороны, из уравнений движения видно, что если пренебречь кориолисовыми членами, то они принимают вид

$$u''=(U|f'|^2)_u,\quad v''=(V|f'|^2)_v.$$

Следовательно, когда $n=0$, переменные разделяются и задача Эйлера описывается уравнениями

$$u''=(1/2-\mu)\sin u+C'\sin 2u,\qquad v''=\frac{1}{2}\operatorname{sh}v+C'\operatorname{sh}2v. \quad (135)$$

Когда $\mu=1/2$, а $n\neq 0$, мы имеем Копенгагенскую задачу, и обе переменные входят в каждое из уравнений:

$$\begin{aligned} u''-\frac{nv'}{4}(\operatorname{ch}2v-\cos 2u)&=C'\sin 2u+\frac{n^2}{64}\sin 4u,\\ v''+\frac{nu'}{4}(\operatorname{ch}2v-\cos 2u)&=\frac{1}{2}\operatorname{sh}v+C'\operatorname{sh}2v+\frac{n^2}{64}\operatorname{ch}4v.\end{aligned} \quad (136)$$

Если пренебречь кориолисовыми членами и принять $n\neq 0$, а $\mu=1/2$, мы придем к задаче Лагранжа:

$$\begin{aligned} u''&=C'\sin 2u+\frac{n^2}{64}\sin 4u,\\ v''&=\frac{1}{2}\operatorname{sh}v+C'\operatorname{sh}2v+\frac{n^2}{64}\operatorname{ch}4v.\end{aligned} \quad (137)$$

Таким образом, ограниченная задача может быть решена в квадратурах, если массы двух основных тел равны друг другу и если пренебречь силами Кориолиса; в этом случае уравнения (137) интегрируются в эллиптических функциях.

Сделаем несколько дополнительных замечаний.

1) В методе Эйлера решения задачи двух притягивающих центров производится преобразование уравнений движения с

помощью формулы преобразования (132). При этом лагранжиан системы принимает форму Лиувилля:

$$L=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}F_i(x_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}G_i(x_i)\,\dot{x}_i^2\right]-\sum_{i=1}^{n}H_i(x_i)\Big/\sum_{i=1}^{n}F_i(x_i), \quad (138)$$

где x_i есть обобщенная координата. Эта динамическая система может быть решена в квадратурах.

То же самое имеет место, когда кориолисовыми членами пренебрегают, а центробежные силы учитывают. В этом случае лагранжиан принимает форму Лиувилля, если опустить линейный член в выражении (134), так как этот член представляет собой неразделимую комбинацию $\cos u\,\mathrm{ch}\,v$. Это требование удовлетворяется, если $\mu=1/2$.

2) Случай, когда пренебрегают силами Кориолиса, представляет интерес, несмотря на его искусственность, так как при этом, как отмечал Винтиер, свойство линейной устойчивости треугольных точек либрации изменяется с устойчивости на неустойчивость. Для того чтобы показать это, запишем уравнения в вариациях в форме уравнений (4) пункта 5.2.3:

$$\ddot{\xi}-2\alpha\dot{\eta}=\Omega^0_{xx}\xi+\Omega^0_{xy}\eta, \quad \ddot{\eta}+2\alpha\dot{\xi}=\Omega^0_{xy}\xi+\Omega^0_{yy}\eta.$$

Условие $\alpha=0$ соответствует случаю, когда силами Кориолиса пренебрегают, а условие $\alpha=1$ — случаю, когда они полностью учитываются. Будем считать α пока неопределенным. Характеристическое уравнение имеет вид (см. уравнение (6) в пункте 5.2.3)

$$\lambda^4-\lambda^2(\Omega^0_{xx}+\Omega^0_{yy}-4\alpha^2)+\Omega^0_{xx}\Omega^0_{yy}-(\Omega^0_{xy})^2=0, \quad (139)$$

где согласно § 5.4

$$\Omega^0_{xx}+\Omega^0_{yy}=3 \quad \text{и} \quad \Omega^0_{xx}\Omega^0_{yy}-(\Omega^0_{xy})^2=\frac{27}{4}\mu(1-\mu).$$

Подставляя эти значения и полагая $\Lambda=\lambda^2$, получаем уравнение

$$\Lambda^2-\Lambda(3-4\alpha^2)+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0,$$

соответствующее уравнению (26) в § 5.4.

При $\alpha=0$ корни этого уравнения равны

$$\Lambda_{12}=\frac{3}{2}\{1\pm[1-3\mu(1-\mu)]^{1/2}\}\geqslant 0.$$

Следовательно, все четыре корня характеристического уравнения (139) являются действительными для всех значений массового параметра, лежащих в пределах от нуля до $1/2$. Таким образом, треугольные точки либрации в общем случае являют-

ся неустойчивыми как в линейном, так и в нелинейном смысле. Выражаясь более точно, линейный анализ дает условную асимптотическую устойчивость, но в нелинейном смысле движение неустойчиво.

Для того чтобы глубже проникнуть в сущность действия кориолисовых сил, рассмотрим другие значения α, помимо нуля и единицы. Так как физический интерес могут представлять лишь малые отклонения от значения $\alpha=1$, то положим

$$\alpha=1+\varepsilon.$$

Пренебрегая второй и более высокими степенями ε, решим характеристическое уравнение. Имеем

$$\Lambda^2-\Lambda\left[3-4(1+\varepsilon)^2\right]+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0.$$

Дискриминант этой квадратичной формы равен нулю, когда

$$\mu^2-\mu+\frac{1}{27}\left[4(1+\varepsilon)^2-3\right]^2=0.$$

Решая это уравнение относительно μ, лежащего в пределах $0\leqslant\mu\leqslant 1/2$, находим при $\varepsilon=0$ критическое значение

$$\mu_c=\mu_0=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{23}{27}\right)^{1/2}\right]$$

для случая, когда нет отклонений от действительных сил Кориолиса. При $\varepsilon\neq 0$ критическое значение массового параметра μ_c становится равным

$$\mu_c=\mu_0+\frac{16}{3(69)^{1/2}}\varepsilon.$$

Таким образом, можно заключить, что если кориолисовы члены лишь слегка превышают то значение, которое дает классическая механика ($\varepsilon>0$), то область значений массового параметра, доставляющих линейно устойчивые решения, увеличивается, так как при устойчивости должны выполняться неравенства

$$0<\mu<\mu_c.$$

Непосредственным следствием этого результата является то, что область, для которой существуют периодические решения линеаризованных уравнений, увеличивается и выходит за значение $\mu_0=0{,}0385$.

Заметим, что при изменении сил Кориолиса характеристики устойчивости коллинеарных точек не меняются.

3) Идея Шарлье относительно использования решения Эйлера в качестве исходной орбиты в методах возмущений в ограниченной задаче возникает совершенно естественно. Небольшой обзор работ в этой области дается в § 10.6, здесь же

мы сошлемся лишь на работу Пейна, который довольно подробно исследовал шесть различных схем возмущений. Существенно новым в этом методе является поиск систем, в которых возмущения, вызываемые пренебрежением центробежными и кориолисовыми членами, являются минимальными. Вследствие того, что в выражение исходной орбиты входят эллиптические функции, а также вследствие того, что в приближениях более высокого порядка появляются вековые члены, существует лишь теория первого порядка.

Заметим, что исходная орбита, наиболее близкая к решению, может быть получена тогда, когда учитываются только центробежные силы, а кориолисовы члены в расчет не принимаются, однако аналитические выражения для такой исходной орбиты не известны, кроме как для $\mu = 1/2$. До настоящего времени решение этой задачи Лагранжа в открытой литературе не рассматривалось в качестве исходной орбиты, так как основное внимание сосредотачивалось на ограниченной задаче, где основными телами являлись Земля и Луна, для которых $\mu \approx 1/82$. Вопрос о том, что важнее, возмущающее действие центробежных и кориолисовых сил в задаче Эйлера или возмущающее действие сил Кориолиса, а также большого расхождения между предполагаемым и фактическим значениями массового параметра в задаче Лагранжа — пока остается открытым. Можно однако считать, что в качестве исходных орбит для решения задачи Эйлера в окрестности Земли и Луны лучше всего подходят конические сечения Энке.

10.5.2. Задачи повышенной сложности. Эту главу мы закончим замечаниями по поводу модификаций ограниченной задачи повышенной сложности. При этом мы ограничимся лишь несколькими примерами.

А. Важным шагом может явиться обобщение орбит основных тел и переход от круговых орбит к орбитам произвольной формы при некоторых ограничениях. Если основные тела считать материальными точками и учитывать одни только ньютоновы гравитационные силы, то орбитами будут кривые второго порядка. Случай круговых орбит мы условились называть просто ограниченной задачей. Эллиптические орбиты мы рассмотрели в § 10.3, а параболические и гиперболические орбиты, имеющие меньшее значение для Солнечной системы, чем эллиптические орбиты, затрагивались нами лишь с целью более полного изложения.

Б. Важные обобщения физической природы основных тел приводят к модифицированным вариантам ограниченной задачи, в которой основные тела либо считаются телами переменной массы, но сохраняют при этом свои гравитационные свойства материальных точек, либо рассматриваются как тела

конечных размеров с распределением плотности, отличающимся от сферического. Первый случай представляет интерес для космологических исследований, а также для исследования двойных звезд. Вопрос о существовании интеграла Якоби зависит от принимаемых предположений относительно формы зависимости масс основных тел от времени. Например, в случае обратной линейной зависимости массы от времени вида

$$m=\frac{m_0}{\alpha+\beta t}$$

соответствующие (зависящие от времени) новые переменные, как показала Разбитная, удовлетворяют уравнению, которое соответствует интегралу Якоби.

В примере, приведенном Рейн, рассматривается зависимость массы большего основного тела от расстояния его до третьего тела, т. е. $m_1=m_1(r_1)$. В этом случае тоже существует инвариантное соотношение, соответствующее интегралу Якоби.

Если в силовом поле одного или обоих основных тел учитываются гравитационные гармоники высшего порядка, то модель ограниченной задачи еще можно применять, но при анализе орбит в окрестности основных тел нужно учитывать отклонение от закона r^{-2}. Численным способом установлено, что при вычислении траекторий от Земли к Луне в случае пренебрежения высшими гравитационными гармониками нужно изменить начальные условия. Возникает снова важный вопрос, касающийся движения основных тел. Можно показать, что если основные тела представляют собой гравитирующие трехосные эллипсоиды с эллипсоидальным распределением плотности, то система может вращаться как твердое тело с постоянной угловой скоростью, и следовательно, некоторые из основных предположений основной задачи можно использовать. Например, если основные тела представляют собой эллипсоиды, вращающиеся по круговым орбитам, то коллинеарные точки либрации остаются неустойчивыми, а треугольные точки изменяют свою линейную устойчивость в соответствии с ориентацией эллипсоидов.

В. Когда третье тело бесконечно малой массы испытывает ускорение, создаваемое тягой или торможением, в дополнение к тому, которое вызывается гравитационными силами, мы можем исследовать законы управления, включив их в ограниченную задачу, получить новые точки либрации с подходящими характеристиками устойчивости или изучать движение астероидов с запаздыванием.

По-видимому, трудно до конца исчерпать список сложных проблем, связанных с ограниченной задачей. Можно было бы привести разнообразные комбинации случаев, рассмотренных в гл. 10, но это вывело бы нас за рамки нашей книги.

Г. Здесь мы рассмотрим обобщение ограниченной задачи, основанное на модификациях Биркгофа функции Лагранжа. Из уравнения (131) имеем

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+x\dot{y}-y\dot{x}+\Omega(x,\ y), \tag{140}$$

где

$$\Omega(x,\ y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\Omega^*(x,\ y).$$

Эти уравнения представляют задачу в прямоугольной декартовой синодической системе координат, среднее движение которой равно единице.

Рассмотрим следующее обобщение:

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\alpha(x,\ y)\dot{x}+\beta(x,\ y)\dot{y}+\gamma(x,\ y), \tag{141}$$

где α, β, γ — действительные аналитические функции x и y.

Прежде чем идти дальше, заметим, что более общей формой первого члена лагранжиана является

$$\frac{1}{2}(a\dot{x}^2+2b\dot{x}\dot{y}+c\dot{y}^2),$$

где

$$a=a(x,\ y)>0,\quad b=b(x,\ y),\quad c=c(x,\ y),\quad ac-b^2>0.$$

Эту форму без особого труда можно привести к виду (141).

Уравнения движения динамической системы, определяемой лагранжианом (141), имеют вид

$$\ddot{x}+\lambda(x,\ y)\dot{y}=\gamma_x,\quad \ddot{y}-\lambda(x,\ y)\dot{x}=\gamma_y, \tag{142}$$

где

$$\lambda(x,\ y)=\alpha_y-\beta_x.$$

Интеграл Якоби задачи Лагранжа в его общей форме выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=L+k, \tag{143}$$

где k — постоянная.

Для того чтобы показать это, вычислим производную от функции Лагранжа $L=L(q,\ \dot{q})$:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i=\dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}+\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$$

или

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right).$$

Отсюда уравнение (143) получается интегрированием. Повторяющиеся индексы, как и ранее, указывают на суммирование.

Возвращаясь теперь к лагранжиану в форме (141) и применяя уравнение (143), находим

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\gamma(x,\ y)+k. \tag{144}$$

Тот факт, что интеграл Якоби существует в своей первоначальной форме, непосредственно следует также из уравнений (142), что можно показать обычным способом: посредством умножения, сложения и интегрирования.

Три функции $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ могут быть сведены к двум функциям $\lambda(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ в уравнениях движения и к одной функции $\gamma(x, y)$ в интеграле. Следовательно, кривые нулевой скорости определяются одной только функцией $\gamma(x, y)$. Этот факт представляет значительный интерес по следующим причинам. Уравнения

$$\ddot{x}=\gamma_x, \quad \ddot{y}=\gamma_y,$$

получаемые из уравнений (142) при $\lambda\equiv 0$, представляют консервативную систему с потенциалом $-\gamma(x, y)$. Они выражают обратимую задачу, так как при замене t на $-t$ уравнения не изменяются. Всякий раз, когда $\lambda(x, y)\neq 0$, мы говорим о необратимой динамической системе, так как члены, линейные относительно составляющих скорости, входят в уравнения движения (142) и при замене t на $-t$ меняют знак.

Как мы видели, обратимые и необратимые задачи имеют одни и те же кривые нулевой скорости. Обратимая задача является интегрируемой всякий раз, когда имеется потенциал с разделяющимися переменными, т. е. когда функция $\gamma(x, y)$ может быть представлена в виде суммы функции одного только x и функции одного только y. В необратимой задаче это, конечно, не имеет места, и это есть одна из причин, объясняющих, почему преобразование Эйлера решает задачу двух неподвижных центров, но не решает ограниченной задачи. Специальным случаем необратимой системы является тот случай, когда функции λ и γ зависят только от одной из переменных. Такая система помимо интеграла Якоби имеет линейный интеграл, что показал еще Биркгоф, и задача может быть проинтегрирована явным образом.

Ограниченная задача представляет собой пример необратимой задачи. Простое сравнение уравнений (140) и (141) показывает, что

$$\alpha=-y \quad \text{и} \quad \beta=x.$$

Следовательно, $\lambda=-2$ и $\gamma=\Omega(x, y)$.

Как отмечалось в гл. 3, конформное преобразование

$$z=f(w)$$

оставляет форму уравнений (142) неизменной; она получается путем замены λ на $\lambda|f'|^2$ и γ на $\gamma|f'|^2$.

Таким образом, заключаем, что лагранжиан ограниченной задачи в форме (140) можно обобщить и привести к виду (141), оставаясь в рамках той же задачи. Другими словами, динамические системы, описываемые лагранжианом (141), могут быть преобразованы в ограниченную задачу.

Это заключение в известной мере объясняет, почему Пуанкаре и Биркгоф считали ограниченную задачу основной не только в небесной механике, но и в общей динамике. Необратимость и неинтегрируемость ограниченной задачи в сочетании с ее простотой делают ее фундаментальной моделью для динамики.

Д. Нашу книгу мы завершим изложением идеи обратной задачи в теории орбит. Одна из целей динамики состоит в том, чтобы дать нам возможность получить орбиту в заданном силовом поле при заданных начальных условиях. Обращение этой задачи мы получаем тогда, когда заданы либо орбита и ее начальные условия, либо некоторые свойства орбиты, и требуется определить силовое поле, создающее эту орбиту. При наиболее общих условиях эта задача не имеет единственного решения, и можно показать, что если ввести некоторые реалистические упрощения, то она сведется к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных относительно составляющих сил.

После того как силовое поле определено, его можно рассматривать как фактическое силовое поле, скажем, ограниченной задачи плюс искусственное поле. Если последнее является достаточно «слабым», то его можно рассматривать как тягу. Таким образом, мы получили решение модификации ограниченной задачи, так как упомянувшаяся в начале заданная орбита *является решением.*

Можно сделать еще один шаг. Если модификация силового поля, которая требуется для того чтобы получить некоторую наперед заданную орбиту, намного слабее, чем влияние других членов в ограниченной задаче, то ею можно совсем пренебречь и рассматривать заданную орбиту или как приближенное решение точных уравнений движения, или как точное решение приближенных уравнений. Поскольку ограниченная задача является всего лишь моделью действительной физической ситуации, в принципе может случиться, что приближенные уравнения будут представлять реальный мир лучше, чем точные уравнения ограниченной задачи, если, конечно, мы получим точное решение

действительной задачи (решение которой, между прочим, является лишь приближенным решением точной, но не действительной задачи).

Наше незнание точного строения Вселенной, наши часто грубо приближенные представления о ее законах и наше постоянно меняющееся мнение относительно действительных значений представляющих ее постоянных — все это указывает на важность рассмотрения моделей ограниченной задачи и ее модификаций. В условиях быстро меняющихся математических формулировок Вселенной, модели сегодняшнего дня могут стать всего лишь возмущениями моделей завтрашнего дня, и наоборот.

§ 10.6. Замечания

Лучше всего известные и наиболее непосредственные обобщения — задача трех тел и задача n тел — в этой главе почти не исследовались, так как эти вопросы, вообще говоря, выходят за рамки нашей книги. Вместо этого мы ограничимся тем, что укажем основные работы по общей задаче трех тел — это работы Готье [1], Хилла [2], Уиттекера [3], Ловетта [4] и Маркполонго [5]. Статья Уиттекера [6] в энциклопедии носит несколько более общий характер, в ней показывается роль, какую играют ограниченная и общая задачи трех тел в общей теории возмущений. Изящное введение в задачу n тел содержится в книге Полларда [7, стр. 38].

Описание трехмерной задачи в синодической системе координат, данное в пункте 10.2.1, можно найти в стандартных учебниках, например, Мультона [8, стр. 279], Брауэра и Клеменса [9, стр. 254], Винтнера [10, стр. 374] и др. Формулировку Гамильтона можно считать обычной. Вывод трехмерных элементов Делоне можно встретить, например, у Брауэра и Клеменса [9, стр. 283, 539].

Вопрос о поверхностях нулевой скорости, рассмотренный нами в пункте 10.2.2, недостаточно полно освещен в литературе. Геометрические соображения, которые легли в основу наших рассуждений в пункте 10.2.2.1 и касающиеся положения точек равновесия в трехмерном случае, принадлежат Пикару [11]. Он показал, что положения равновесия должны находиться либо в треугольных точках, либо на оси, на которой расположены основные тела.

Три основные работы по поверхностям нулевой скорости трехмерной ограниченной задачи, на которые мы ссылались в пункте 10.2.2.3, являются недостаточно подробными. Копал [12, стр. 135] сосредоточил свое внимание на специальном случае $C=C_2$, дающем действительные координаты для критических точек (максимума и минимума) поверхности, и произвел ряд

вычислений. Пикар [11] показал развитие поверхностей при изменяющихся значениях постоянной Якоби; изложение его носит качественный характер и весьма схематично.

Трактовка Мультона [8, стр. 283] тоже имеет качественный характер. Некоторые из кривых, представляющих пересечения поверхностей нулевой скорости с координатными плоскостями, позволяют установить важные аналитические свойства и оказываются иногда важней положений, установленных Мультоном. Его терминология, применяемая в отношении цилиндров вокруг оси z — он называет их «занавесами» — выразительна и характеризует стиль его изложения. Следует отметить также чисто аналитическое, лишенное наглядности описание поверхностей, которое дал Хилл [13, стр. 18]. Приведенные в нашей книге кривые нулевой скорости построены М. Стендишем.

Работа Мультона по трехмерным орбитам вокруг точек либрации, о которой говорилось в пункте 10.2.3, содержится в его книге по периодическим орбитам [14, стр. 151].

Пункт 10.2.4 посвящен трехмерным орбитам. В части А рассматриваются периодические орбиты Пуанкаре третьего рода [15, т. 2, стр. 144]. Особый интерес представляет приведенный в тексте подкласс орбит, образованных из орбит для задачи двух тел. Шарлье [16, т. 2, стр. 231] указывал на то, что Пуанкаре якобы ошибочно предполагал существование таких орбит. Доказательства существования, приведенные Джеффрис [17] и Гудасом [18], вносят ясность в этот вопрос и показывают, что Пуанкаре был прав. Гудас [19] привел численное доказательство, его орбиты показаны на рис. 10.11. Орбиты Аксенова [20], о которых также говорилось в этой части, соответствуют «наружным» орбитам, рассмотренным нами в нескольких предыдущих главах. Представляют интерес также работа Цайпеля [21] по периодическим орбитам третьего рода, в которой он обобщил результаты Пуанкаре, и работа Хуанга (Хуанг и Уэйд [22]), в которой рассматриваются орбиты, нормальные к плоскости орбит основных тел. Кобб [22а] в двух своих статьях использует поверхность нулевой скорости как границу движения.

В пункте 10.2.4 Б исследуется движение вдоль оси z. Эту задачу рассматривали Паванини [23], Макмиллан [24] и К. Ситников [25].

Основными работами по классификации траекторий от Земли к Луне (пункт 10.2.4 В) являются работы Хоулкера и Брауда [26] и Херринга [37]. Одна из ранних работ В. А. Егорова [28] была рассмотрена нами достаточно подробно в гл. 9.

В пункте 10.2.5 дается общий метод для модификации регуляризаций, описанных в гл. 3, когда движение является трехмерным. Использование спиноров для регуляризации уравнений

движения в трехмерном случае задачи двух тел описано в работе Кустаанхеймо [29], опубликованной в 1964 г. Более подробное рассмотрение этого метода, включающее теорию возмущений, содержится в статье Кустаанхеймо и Штифеля [30]; в ней показывается, что необходимость перехода к четырехмерному пространству связана с теорией Гурвица [31], что отмечалось, когда рассматривалось уравнение (39) пункта 10.2.5. Другие приложения, демонстрирующие мощность метода, приведены у Штифеля и Вальдфогеля [32], которые обобщили преобразование Биркгофа на трехмерный случай. Результаты численного интегрирования четырехмерных регуляризованных уравнений были доложены Рёсслером [33]. Трехмерная регуляризация, о которой говорилось в конце пункта 10.2.5, не требующая введения четырехмерного вектора, описана у Виитнера [10, стр. 330].

В пункте 10.2.6 А коротко рассмотрено приложение поверхностей нулевой скорости к исследованию близких двойных систем. По этому вопросу имеется отличная книга Копала [12]; особенно интересны для нас стр. 125—139 и 476—529, где поверхности нулевой скорости интерпретируются как эквипотенциальные поверхности Роша [34].

В пункте 10.2.6 Б конические сечения рассматриваются как приближения к решению межпланетной задачи n тел. В ряде статей Лагерстрёма и Геворкяна [35], а также в отдельной статье Геворкяна [35а] предполагаются применимыми асимптотические приближения, и таким образом, узаконивается методика сопоставлений. Приложение метода межпланетных траекторий можно найти в статье Перко [36].

Критерий Тиссерана для идентификации комет дается в его «Mécanique Céleste» [37, т. 4, стр. 241, 289]. Приложения метода к кометам опубликованы Шульхофом [38].

Интересна статья Джиллеспи и Росса [39] по облетным траекториям; приложение критерия Тиссерана к таким орбитам приводится у Себехея [40]. В этой же статье рассматриваются приложения задачи захвата к космодинамике (см. также статьи Егорова [28]). Личные беседы с Хорибн [40а], Россом [40] и Ланге [40] помогли автору ясней изложить часть Б этого пункта. Вопрос о приоритете в открытии облетных траекторий между К. Эрике, В. Холлистером, Г. Хорнби, М. Хантером, С. Россом, Р. Соном и другими решить нелегко. Несомненная заслуга принадлежит здесь Тиссерану [37, стр. 203].

В пункте 10.3.2 рассмотрена эллиптическая задача. Этой задаче посвящены также статьи Нешвила, появившиеся в 1917 и 1926 г. По этой причине ему часто ошибочно приписывают заслугу введения преобразований, указанных в тексте. Автор данной книги считает, что первым, кто предложил такие пре-

образования, был Шайбнер [41], который в мало известной статье, содержащей, правда, некоторые неточности, в 1866 г. в сущности вывел уравнения движения (50′) и, стало быть, рассмотрел трехмерный случай. Следующим, кто внес вклад в решение этой задачи, был Хилл [42], который в качестве независимой переменной принимал эксцентричную аномалию и пользовался эллиптическими координатами. Только спустя 51 год после Шайбнера, в 1917 г., появилась совместная работа Петра и Нешвила [43] под английским названием «Two remarks on the special problem of three bodies» («Два замечания по специальной задаче трех тел»). Первое замечание принадлежит Петру, который предложил ввести пульсирующую систему координат, а в качестве переменной применять переменное расстояние между осиовными телами. Во втором замечании, принадлежащим Нешвилу, развиваются замечания Петра и в качестве независимой переменной вводится истинная аномалия. Оба замечания относятся к двумерному случаю. Спустя девять лет Нешвил [44] предпринял попытку обобщить результат, полученный им в 1917 г., на трехмерный случай, однако его уравнения и выводы оказались ошибочными. Нешвил привел уравнения, соответствующие нашим уравнениям (50″). В правой части у него вместо ω, как в уравнениях (50′), стояли частные производные от ω'. Следовательно, его вывод относительно формальной эквивалентности кругового и эллиптического случаев в трехмерной задаче, когда он делает заключение, что два случая различаются только на периодический коэффициент в правых частях уравнений, неверен.

Ошибка Нешвила была исправлена Рейн [45], рассматривавшей трехмерную эллиптическую задачу в своей статье, датированной 1937 г., но опубликованной только в 1940 г. Заметим, к слову, что у Рейн в уравнении (2) имеется типографская ошибка. Приведенный в нашем тексте (пункты 10.3.2.1 и 10.3.2.2) вывод соответствующих уравнений взят из статьи Себехея и Джакалья [46].

Вопрос об инвариантном соотношении (пункт 10.3.3), заменяющим интеграл Якоби, и приложение его к долгосрочным прогнозам рассматривали Овенден и Рой [47], Копал и Литтлтон [48] и Себехей и Джакалья [46]. Метод Тиссерана идентификации комет был модифицирован Калландро [49] таким образом, чтобы его можно было приложить к эллиптическому случаю.

Движение вокруг точек либрации в эллиптической задаче (пункт 10.3.4) рассматривал Мультон [14, стр. 217], не пользуясь при этом преимуществами специальной пульсирующей системы координат и соответствующими переменными, введенными нами в тексте. Коломбо и др. [50] привели численные

результаты, Дэнби [51] вычислил характеристики линейной устойчивости орбит вокруг точки L_4 в неподвижной системе координат, они воспроизведены нами на рис. 10.13. Беннетт [52] эти же результаты получил во вращающейся системе координат, сначала численным методом, затем аналитически. Полное исследование устойчивости в смысле Ляпунова провел Е. А. Гребеников. Вопрос о существовании периодических орбит вокруг точек либрации в линеаризованном эллиптическом случае рассматривался Себехеем [53], применявшим ту же систему координат, что и здесь в тексте.

Приложение эллиптической задачи к периодическим орбитам второго рода можно найти в книге Шарлье [16, т. 2, стр. 226]. Задача Кирквуда о пропусках в поясе астероидов рассматривалась Брауэром [54] для эллиптического случая.

Как показано в тексте, а также в статье Себехея и Джакалья [46], уравнения движения эллиптической задачи в регуляризованной форме приобретают вид интегро-дифференциальных уравнений. Для этих уравнений была составлена программа, и они были проинтегрированы Бози [55] численным методом, в связи с установлением «третьего интеграла» эллиптической ограниченной задачи. Контопулос [55а] применил эти уравнения для тех же целей в своем аналитическом методе.

В § 10.4 дается краткое описание задачи Хилла. Отлично написанная основная статья Хилла [56] является ценным вкладом в литературу по небесной механике. (Первоначальный вариант статьи, опубликованный в журнале American Journal of Mathematics в 1887 г., имеет то преимущество перед вариантом, опубликованным в сборнике «Collected Works» в 1905 г., что не содержит опечаток. В последнем же встречаются типографские опечатки, например, на стр. 293 отсутствуют два знака квадратного корня, кроме того, легко можно обнаружить еще одну ошибку в знаке.) Эта, а также другая известная статья Хилла [2], оказали большое влияние на работы Е. В. Брауна, и в результате появилась лунная теория Хилла — Брауна. Работы Хилла нашли отражение в книгах Шарлье [16, стр. 141], Пламмера [57, стр. 254], Смарта [58, стр. 291], Брауэра и Клеменса [9, стр. 335] и Чеботарева [59]. Одной из основных книг по лунной теории является книга Брауна [60], в ней подробно рассматривается теория Хилла [60, стр. 195]. Важное значение имеет книга Эккерта и др. [60а], кроме того, в ней приводится обширная библиография. Среди работ аналитического характера в первую очередь следует назвать работы Пуанкаре [15, стр. 104], Винтнера [10, стр. 379] и Зигеля [61, стр. 104]. Первый вывод уравнений движения Хилла, данный в пункте 10.4.2 А, заимствован у Хилла, второй же, приведенный в пункте Б, основывается на

идеях Лагерстрёма и Геворкяна [35, 35а]. Вывод Винтнера [10, стр. 381] соответствует тому, что дан нами в пункте 10.4.2 Б, но не тождествен с ним.

Из выводов следует, что система координат, которой пользовался Хилл, вращается с постоянной угловой скоростью, равной среднему движению Солнца. Это позволяет сохранить интеграл Якоби (пункт 10.4.2 В). Во второй лунной теории Эйлера [62] вводится система координат, вращающаяся со средней угловой скоростью Луны, поэтому Эйлер не указывает на существование интеграла, который соответствовал бы интегралу Якоби.

Доказательство того, что интеграл Якоби является единственным алгебраическим интегралом для задачи Хилла, было дано Гравалосом [63]. Насколько известно автору данной книги, теоремы о несуществовании изолированных однозначных интегралов, отличных от интеграла Якоби, для задачи Хилла не существует. Читатель может сравнить эти теоремы с теоремами Зигеля и Пуанкаре для ограниченной задачи (см. § 2.1), а также с теоремами Брунса и Пуанкаре для общей задачи трех тел.

В большей части литературных источников кривые нулевой скорости излагаются менее подробно, чем у нас (см. пункт 10.4.3). Приведенные нами кривые построены М. Стендишем. Задача регуляризации, рассмотренная в пункте 10.4.4, изложена так же, как у Винтнера [10, стр. 384], но она не отличается от регуляризации, применяемой для задачи двух тел в гл. 3.

Простота регуляризованных уравнений (124) и (127), пункт 10.4.4, выгодно отличает их от уравнений Хилла (115) (содержащих особенность в начале координат), а также от его модифицированных уравнений (119). Исследование задачи Хилла посредством преобразования, приводящего к другой методике регуляризации, провел Штумпф [64].

Доказательства существования вариационной орбиты (пункт 10.4.5) дали Ляпунов [65], Хаппель [66; 67, стр. 332], Биркгоф [68] (для попятных орбит), Винтнер [69; 10, стр. 392], Хёльдер [70] и Зигель [61, стр. 108].

Сам Хилл позже выразил сожаление о том, что вынужден был опустить задачи сходимости [56, стр. 8]. Существование орбиты Хилла максимального приближения к Луне и орбит с петлями (пункт 10.4.5) было доказано Пуанкаре и Винтнером [71]. При изложении этого вопроса мы следовали Пуанкаре [15, т. 1, стр. 109], в той части, которая касается орбит, делающих петли, несмотря на то, что Винтнер считал работу Пуанкаре «эвристической» и отдавал предпочтение своей собственной работе «Präzisionmathematik» [71].

Пуанкаре отмечал, что такие орбиты с петлями должны появляться, когда не пренебрегают солнечным параллаксом. Несколько рисунков, приведенных в гл. 9, это подтверждают. В пункте 9.4.4 рассматриваются орбиты класса (g) Копенгагенской категории ($\mu=1/2$). Эти прямые орбиты вокруг каждого основного тела образованы из круговых орбит бесконечно малых радиусов. На рис. 9.6*в* § 9.4 показана фаза 3 семейства этого класса. Первая и вторая орбиты, соответствующие $C=2{,}809$ и $C=3{,}237$, образуют петли, но вследствие наличия другого основного тела не обладают симметрией относительно оси y, как орбиты Хилла. Аналогичная орбита показана на рис. 9.21*е* § 9.5 с $C=2{,}9932$ и $\mu=1/82{,}27$. Периодическая орбита симметрична относительно оси x, но несимметрична относительно оси y, так как «солнечный параллакс» не равен нулю.

Орбиту, изображенную на рис. 10.17, Пуанкаре считал столь важной, что поместил ее на первом рисунке (стр. 109) в своих «Méthodes Nouvelles» [15]. Шарлье [16, стр. 166] рассматривал эту же задачу и некоторые ее обобщения. Томсон [72] привел такую орбиту с петлями, чтобы продемонстрировать свой графический метод интегрирования дифференциальных уравнений. Семейство орбит с петлями рассчитал Мацукума [72a].

Пуанкаре дал математическое обоснование бесконечным определителям [15, т. 2, стр. 260; 73; 74; 75, т. 2, стр. 2, 44].

Шубарт [76] доказал существование не только орбит Хилла, но и периодических орбит. Он исследовал двумерные и трехмерные варианты задачи Хилла, применяя в качестве переменных орбитальные элементы.

Важное значение для § 10.4 имеет доклад Уиттекера [3, стр. 130].

В пункте 10.5.1 рассматриваются задача Эйлера и задача Лагранжа. Оригинальной работой, содержащей решение задачи двух притягивающих неподвижных центров, является работа самого Эйлера [77], относящаяся к 1760 г. Здесь нашел применение также метод регуляризации Тиле — Барро, описанный нами в пункте 3.1.1. В пункте 10.5.1 рассматривается работа Пламмера [57, стр. 252]. С классификацией орбит в задаче Эйлера можно познакомиться в книге Шарлье [16, т. 1, стр. 177], а с классификацией орбит в задаче Лагранжа — в статье Депри [78]. Первоисточником для задачи Лагранжа является его «Mécanique Analytique» [79, т. 2, стр. 98]. Обобщения задачи Эйлера рассматриваются у Якоби [80, стр. 221] и у Хильтебайтеля [81], у последнего приводятся модификации Дарбу [82] и Лиувилля [83]. Дарбу исследовал два возможных приложения задачи двух неподвижных центров: первое относится к случаю, когда

тело имеет большую скорость при прохождении через систему двойных звезд, а второе относится к обобщению задачи движения Луны. Рассмотренная в тексте динамическая система типа Лиувилля (уравнение (138)) описана Лнувиллем [84]. Задача Эйлера рассматривалась также Уиттекером [85] и Винтнером [10, стр. 145], последний занимался также задачей Лагранжа [10, стр. 351].

Идея Шарлье [16, т. 2, стр. 352] относительно решений задачи Эйлера как промежуточных орбит для ограниченной задачи нашла многих последователей. Семтер [86], Демин [87], Аренсторф и Дэвидсон [88], Пейн [89] и Лангебаритель [90] использовали решения задачи Эйлера в качестве исходных орбит.

Второе замечание в пункте 10.5.1, касающееся влияния кориолисовых членов, обобщил Винтиер [10, стр. 372]. О частичной применимости этого обобщенного исследования влияния сил Кориолиса к теории относительности можно прочесть в книге Паули [91, стр. 175]. С дополнительными результатами можно познакомиться в статье Себехея [91а].

Пункт 10.5.2 А посвящен гиперболическим и параболическим ограниченным задачам. Эти случаи подробно исследованы Мартином [92], общее исследование провел Алексеев [93]. Задачу, в которой основные тела имеют переменную массу (пункт 10.5.2 Б), изучала Разбитная [94], ее исследования основывались на работах Мещерского [95] и Ловетта [96]. До них задачу двух тел переменной массы рассматривал Гильден [97]. Из работ Рейн укажем статью [98]. Влияние эллипсоидальных основных тел рассматривается в статье Лебрена и Робе [99], а общее введение в задачу о движении деформируемых тел дано Финлей-Фройндлихом [100, стр. 105].

Примеры, в которых учитываются дополнительные силы (пункт 10.5.2 В) можно найти у Дэнби [101] и Дьюсека [102]. Дэнби вводит в рассмотрение силы, изменяющиеся по закону $a^2r^{-2}+br^{-3}$, и излагает идею решения задачи четырех тел путем замены одного из тел материальным кольцом (пункт 5.6.2.2). Дьюсек обобщает понятие точек либрации на случай, когда на третье тело действует малая тяга.

В последнем пункте 10.5.2 Г рассматривается группа задач, которая, как показали Биркгоф [103] и Винтнер [104], может быть сведена к ограниченной задаче. В этом пункте излагается идея обратных задач в динамике. Различные аспекты этих задач при общих условиях изучались также Дайнелли [105] и Уиттекером [85]. Существенный вклад в решение этих задач внес Ловетт [96, стр. 274], им же сделан обширный обзор. Особые приложения к ограниченной задаче приводятся у Себехея [106].

§ 10.7. Литература

1. Gautier A. Essai historique sur le problème des trois corps. Paris: Courcier, 1817.
2. Hill G. W. Remarks on the progress of celestial mechanics since the middle of the century.— Bull. Am. Math. Soc., 1896, [2], 2, 125; also Collected Mathematical Works of Hill G. W., Carnegie Inst. of Washington, D. C., 1907, v. 4, p. 99.
3. Whittaker E. T. Report on the progress of the solution of the problem of three bodies.— Rept. 69th Meeting Brit. Assoc. Advan. Sci, 1899. London: Murray, 1900.
4. Lovett E. O. Generalizations of the problem of several bodies, its inversion, and an introductory account of recent progress in its solution.— Quart. J. Math., 1911, 42, 252.
5. Marcolongo R. Il Problema dei Tre Corpi.— Milan: Hoepli, 1919.
6. Whittaker E. T. Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (Schwarzschild K., Oppenhien S., eds.). — Leipzig: Teubner, 1905—1923, v. 6, Pt. 2, 1st half, Chapt. 12.
7. Pollard H. Mathematical Introduction to Celestial Mechanics.— Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1966.
8. Moulton F. R. An Introduction to Celestial Mechanics.— 2nd rev., New York: Macmillan, 1914.
9. Brouwer D., Clemence G. M. Methods of Celestial Mechanics.— New York: Academic Press, 1961. [Русский перевод: Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики.— М.: Наука, 1964.]
10. Wintner A. Analytical Foundations of Celestial Mechanics. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1941. [Русский перевод: Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.]
11. Picart L. Discussion des surfaces de niveau dans le problème restrient.— Bull. Astron., 1903, 20, 401.
12. Kopal Z. Close Binary Systems.— London; Chapman and Hall, 1959.
13. Hill G. W. Researches in the lunar theory.— Am. J. Math., 1878, 1, 5, 129, 245; also Collected Mathematical Works of Hill G. W. Carnegie Inst. of Washington, D. C., 1905, v. 1, p. 284.
14. Moulton F. R. Periodic Orbits. Carnegie Inst. of Washington, D. C., 1920.
15. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Paris: Gauthier-Villars, 1892—1899, 3 vols. Reprinted by Dover, New York, 1957. [Русский перевод. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр., т. 1, 2 — М.: Наука, 1971, 1972.]
16. Charlier C. V. L. Die Mechanik des Himmels. Leipzig: Von Veit, 1902—1907, 2 vols. [Русский перевод: Шарлье К. Небесная механика.— М.: Наука, 1966.]
17. Jefferys W. H. Doubly symmetric periodic orbits in the three-dimensional restricted problem.— Astron. J., 1965, 70, 393.
18. Goudas C. L. Three-dimensional periodic orbits and their stability.— Bull. Soc. Math. de Grèce (New ser.) 2 (Fasc. 1), 1, 1961.
19. Goudas C. L. Three-dimensional periodic orbits and their stability.— Icarus, 1963, 2, 1.
20. Аксенов Е. П. Один класс периодических решений в ограниченной задаче трех тел.— Астрономический журнал, 38, вып. 2, с. 336—344.
21. von Zeipel H. Remarque sur les solutions periodiques de la troisième sorte.— Bull. Astron., 1902, 19, 71.
22. Huang S. S., Wade C., Jr. Preliminary study of periodic orbits of interest for moon probes. II.— Astron. J., 1963, 68, 388.

22a. Kobb G. Sur un cas d'instabilité possible.— Bull. Astron. 1901, 18, 219. Sur la stabilité des orbites des nouveaux satellites de Jupiter.— Ibid., 1908, 25, 411.
23. Pavanini G. Sopra una nuova categoria di soluzioni periodichel problema dei tre corpi.— Ann. Mat., 1907, [3] 13, 184.
24. MacMillan W. D. An integrable case in the restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1911, 27, 11.
25. Ситников К. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел.— ДАН СССР, 1960, 133, № 2, с. 303—306.
26. Hoelker R. F., Braud N. J. Survey and classifiication of earth-moon trajectories based on newly discovered properties.— AIAA Paper 63—150, 1963; also Hoelker R. F. Eine Übersicht über Freiflugbahnen zwischen Erde und Mond mit Herausstellung charakteristischer Feldeigenschaften. Presented at and published by the Hermann Oberth Soc., Hamburg, 1963.
27. Herring G. P. A comprehensive astrodynamic exposition and classification of earth moon transits.— *NASA* Tech. Mem. X-53151, Oct. 1964.
28. Егоров В. А. О некоторых аадачах динамики полета к Луне.— Успехи физ. наук, 1957, 63, вып. 1а, с. 73—117. К вопросу о захвате в ограниченной круговой проблеме трех точек.— Искусственные спутники Земли. М.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 3—12.
29. Kustaanheimo P. Spinor regularization of the Kepler motion.— Ann. Univ. Turku, Ser. *A* 1, 73, 1964; also Helsinki Obs. Publ., 1964, No. 102.
30. Kustaanheimo P., Stiefel E. Perturbation theory of Keplerian motion based on spinor regularization.— J. Reine Angew. Math., 1965, 218, 204.
31. Hurwitz A. Über die Komposition quadratischer Formen von beliebig vielen Variablen.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Physik. Klasse, 309, 1898. Also Math. Werke. Basel: Birkhäuser, 1933, v. 2, p. 565.
32. Stiefel E., Waldvogel J. Problème restreint des trois corps. Généralisation de la régularisation de Birkhoff pour le mouvement du mobile dans l'espace à trois dimensions.— Compt. Rend., 1965, 260, 805.
33. Rössler M. Numerische Erfahrungen bei der Störungsrechnung in der Himmelsmechanik mit der Methode der Spinor-Regularisierung.— Z. Angew. Math. Phys., 1965, 16, 395.
34. Roche E. La Figure d'une Masse Fluide, soumise à l'attraction d'un point éloigné.— Mem. Acad. Sci. Montpellier, 1849, 1, 243, 333; Ibid., 1851, 2, 21.
35. Lagerström P. A., Kevorkian J. Matched-conic approximation to the two fixed force-center problem.— Astron. J., 1963, 68, 84; Numerical aspects of uniformly valid asymptotic approximations for a class of trajectories in the restricted three-body problem.— Celestial Mechanics and Astrondynamics (Szebehely V., ed.), New York: Academic Press, 1964. Earth-to-moon trajectories in the restricted three-body problem.— J. Mécan., 1963, 2, 189. Earth-to-moon trajectories with minimal energy.— J. Mécan., 1963, 2, 493.
35a. Kevorkian J. Uniformly valid asymptotic representation for all times of motion of a satellite in the vicinity of the smaller body in the restricted three-body problem.— Astron. J., 1962, 67, 204.
36. Perko L. M. Interplanetary trajectories in the restricted three-body problem.— *AIAA* J., 1964, 2, 2187.
37. Tisserand F. Traité de Mécanique Céleste. Paris: Gauthier-Villars, 1896, v. 4.
38. Schulhof L. Notes sur quelques comètes à courte période.— Bull. Astron., 1889, 6, 465.
39. Gillespie R. W., Ross S. Venus swingby mission mode and its role in manned exploration of Mars.— *AIAA* Paper 66—37, 1966.

40. Szebehely V. Special orbits for the exploration of Mars and Venus.— — Proc. Conf. Exploration of Mars and Venus 8, 1, 1966. Blacksburg, Virginia: Virginia Polytechnic Inst.
40а. Hornby H. Private communication, 1965.
40б. Ross S. Private communication, 1965.
40в. Lange B. Private communication, 1965.
41. Scheibner W. Satz aus der Störungstheorie.— Crelle J. Reine Angew. Math., 1866, 65, 291.
42. Hill G. W. Coplanar motion of two planets, one having a zero mass.— Ann. Math., 1887, 3, 65; also Collected Mathematical Works of Hill G. W. Carnegie Inst. of Wash. Washington, D. C., 1906, v. 2, p. 106.
43. Petr K. and Nechvile V. Dvé poznamky Ru specielnimu pripadu problému tří těles.— Časopis Pěstování Mat. Fys. (Praha), 1918, 47, 268, 271.
44. Nechvíle V. Sur une nouvelle forme des équations différentielles du problème restreint elliptique.— Compt. Rend., 1926, 182, 310.
45. Rein N. Note sur l'article de M. V. Nechvil sur une nouvelle forme des équations différentielles du problème restreint elliptique'.— Труды Государственного астрономического института им. П. К. Штернберга, 1940, 14, вып. 1, с. 85—87.
46. Szebehely V., Giacaglia G. O. On the elliptic restricted problem.— Astron. J., 1964, 69, 230.
47. Ovenden M. W., Roy A. E. On the use of the Jacobi integral of the restricted three-body problem.— Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1961, 123, 1.
48. Kopal Z., Lyttleton R. A. On the elliptic case of the restricted problem of three bodies and the remote history of the earth-moon system.— Icarus, 1963, 1, 455.
49. Callandreau O. Sur la théorie des comètes périodiques.— Ann. Obs. Paris, Mem. 20, pp. B. 1—B. 64 espec. B. 29, 1892.
50. Colombo G., Lautman D., Munford C. On the libration orbits of a particle near the triangular point in the semi-restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1963, 68, 159.
51. Danby J. M. A. Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies.— Astron. J., 1964, 69, 165.
52. Bennett A. Characteristic exponents of the five equilibrium solutions in the elliptically restricted problem.— Icarus, 1965, 4, 177.
52а. Гребеников Е. А. Об устойчивости лагранжевых треугольных решений ограниченной эллиптической задачи трех тел.— Астрон. ж., 1964, 41, вып. 3, с. 567.
53. Szebehely V. Libration in the elliptic restricted problem of three bodies.— Proc. Symp. Celestial Mech. Oberwolfach., 1964, p. 21 (Hochschultaschenbücher). Mannheim: Bibliographisches Institut, 1966.
54. Brouwer D. The problem of the Kirkwood gaps in the asteroid belt.— Astron. J., 1963, 68, 152.
55. Bozis G. On the existence of a new integral in the restricted three-body problem.— Astron. J., 1966, 71, 404.
55а. Contropoulos G. Private communication, 1965.
56. Hill G. W. On the part of the motion of the lunar perigee wich is a fraction of the mean motions of the sun and moon.— Acta Math, 1886, 8, 1: also Collected Mathematical Works of G. W. Hill. Carnegie Inst. of Wash. Washington, D. C., 1905. This paper was originally published separately by John Wilson and Son, Cambridge, Massachusetts in 1877.
57. Plummer H. C. Dynamical Astronomy. London, New York: Cambridge Univ. Press, 1918. Reprinted by Dover, New York, 1960.
58. Smart W. M. Celestial Mechanics. London; Longmans, 1953.
59. Чеботарев Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики.— М.; Л.: Наука, 1965.

60. Brown E. W. An Introductory Treatise on the Lunar Theory. London, New York: Cambridge Univ. Press, 1896. Reprinted by Dover, New York, 1960.
60a. Eckert W. J., Walker M. J., Eckert D. Transformations of the lunar coordinates and orbital parameters.— Astron. J. 1966, 71, 314.
61. Siegel C. L. Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin: Springer, 1956. [Русский перевод: Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.— М.: Изд-во иностр. лит., 1959.]
62. Euler L. Theoria motuum lunae.— Types Academiae Imperialis Scientiarum, Petropoli, 1772. Reprinted in Opera Omnia, Series 2 (Courvoisier L., ed.), Lausannee: Orell Füssli Turici, 1958, v. 22.
63. Gravalos F. G. The Algebraic Integrals of Hill's Equations.— Ph. D. Thesis, Dept. of Math., Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts, 1941.
64. Stumpff K. New research on Hill's lunar theory.— Proc. Intern. Astron. Union. Symp. 25, Thessaloniki, 1964. New York: Academic Press, 1966.
65. Ляпунов А. М. О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны.— Труды Отделения физических наук общества любителей естествознания, 1896, 8, вып. 1. См. также: Ляпунов А. М. Собрание сочинений, т. I. М.: Изд-во Академии наук, 1954.
66. Happel H. Untersuchungen über die Convergenz der beim Problem der drei Körper auftretenden Reihenentwickelungen.— Göttingen: Inaug. Diss., 1900.
67. Happel H. Das Dreikörperproblem. Vorlesungen über Himmelsmechanik.— Leipzig: Koehler, 1941.
68. Birkhoff G. D. The restricted problem of three bodies.— Rend. Circ. Mat. Palermo, 1915, 39, 1; also Collected Mathematical Papers. New York Am. Math. Soc., 1950, v. 1, p. 628.
69. Wintner A. Zur Hillschen Theorie der Variation des Mondes.— Math. Z., 1925, 24, 259.
70. Hölder E. Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik.— Math. Z., 1930, 31, 197.
71. Wintner A. Über die Existence der Hillschen Mondbahn of maximum lunation und der Poincaréschen Schlingbahnen.— Math. Z., 1928, 28, 430.
72. Thomson W. (Lord Kelvin). On Graphic Solution of Dynamical Problems.— Mathematical and Physical Papers, v. 4, 1910, p. 516. Originally published in Nature, 1892, 46, 385 and in Phil. Mag., 1892, 34, 443.
72a. Matukuma T. On the periodic orbits in Hill's case.— Proc. Imp. Acad. Japan, 1930, 6, 6; 1932, 8, 147; 1933, 9, 364.
73. Poincaré H. Sur les déterminants d'ordre infini.— Bull. Soc. Math. France, 1886, 14, 77.
74. Poincaré H. Sur le determinant de Hill.— Bull. Astron., 1900, 17, 134.
75. Poincaré H. Leçons de Mécanique Céleste. Paris: Gauthier-Villars, v. 1, 1905; v. 2, Part 1, 1907; v. 2, Part 2, 1909; v. 3, 1910.
76. Schubart J. Ebene und räumliche periodische Lösungen des Hillschen Problems.— Math. Ann., 1963, 149, 131.
77. Euler L. Un corps étant attiré an raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés.— Mem. Berlin, p. 228, 1760, or De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti.— Nov. Comm. Petrop., 1764, 10, 207. De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti.— Nov. Comm. Petrop., 1765, 11, 152.
78. Deprit A. Le problème de Lagrange à masses égales.— Bull. Soc. Math. Belg., 1962, 14, 46.
79. Lagrange J. Mécanique Analytique. Originally published by Veuve Desaint, Paris, 1788. Third edition in two volums: v. 1, 1852; v. 2, 1855; published by Mallet-Bachelier, Paris. [Русский перевод; Лагранж Ж. Аналитическая механика, т. 1, 2.— М.: Гостехиздат, 1950.

80. Jacobi G. J. Vorlesungen über Dynamik. Berlin: Reinier, 1866. [Русский перевод: Якоби К. Лекции по динамике.— Л: ОНТИ, 1936.]
81. Hiltebeitel A. M. On the problem of two fixed centers and certain of its generalizations.— Am. J. Math., 1911, **33**, 337.
82. Darboux G. Sur un problème de mécanique.— Arch. Neerl. Sci., 1901, [2], **6**, 371.
83. Liouville J. Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer.— J. Math., 1846, **11**, 345. Second mémoire. Ibid., 1847, **12**, 410. Note de Liouville M. Ibid, 1848, **13**, 34.
84. Liouville J. L'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels.— J. Math., 1849, **14**, 257.
85. Whittaker E. T. Analytical Dynamics. London, New York: Cambridge Univ. Press, 1904. Reprinted by Dover, New York, 1944. [Русский перевод: Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1937.]
86. Samter H. Das Zweizentren-Problem in der Störungstheorie.— Astron. Nachr., 1923, **217**, 129.
87. Демин В. Г. Об одном классе периодических орбит в ограниченной круговой задаче трех тел.— Бюллетень института теоретической астрономии, 1960, **7**, № 10, с. 844—849. Новый класс периодических решений в ограниченной задаче трех тел.— Астрономический журнал, 1961, **38**, вып. 1, с. 157—163.
88. Arenstorf R. F., Davidson M. C. Solutions of the restricted three-body problem represented by means of the two-fixed-center problem.— *AIAA* J., 1963, **1**, 228.
89. Payne M. Two fixed center approximations to the restricted problem.— Celestial Mechanics and Astrodynamics (Szebehely V., ed.), p. 53 (Progr. Astronaut. and Aeronaut., 14). New York: Academic Press, 1964.
90. Langebartel R. G. Two-center problem orbits as intermediate orbits for the restricted three-body problem.— NASA, TN D-2939, 1965.
91. Pauli W. Theory of Relativity. New York: Macmillan, 1958.
91a. Szebehely V. Stability of the points of equilibrium in the restricted problem.— Astron. J., 1967, **72**, 7.
92. Martin M. H. The restricted problem of three bodies.— Trans. Am. Math. Soc., 1942, **52**, 523.
93. Алексеев В. М. Оценка возмущения гиперболического движения в задачах трех тел.— Астрономический журнал, 1961, **38**, вып. 6, с. 1099—1113.
94. Разбитная Е. П. Частный случай ограниченной задачи трех тел с переменными массами.— Астрономический журнал, 1961, **38**, вып. 3, с. 528—531.
95. Mestschersky I. Ein Speciallfall des Gyldén'schen Problems.— Astron. Nachr., 1893, **132**, 129. Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse.— Astron. Nachr., 1902, **159**, 229.
96. Lovett E. Note on Gyldén's equations of the problem of two bodies with masses varying with the time.— Astron. Nachr., 1902, **158**, 337.
97. Gyldén H. Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind.— Astron. Nachr., 1884, **109**, 1.
98. Rein N. Caratteristiche qualitative nel problema ristretto dei tre corpi in un mezzo gravitante.— Rendi. Lincei, 1933, **8**, 451.
99. Lebrun C., Robe H. Note sur une extension du probleme restreint des 3 corps.— Bull. Classe Sci. Acad. Roy. Belg., 1964, [5] **50**, 315.
100. Findlay-Freundlich E. Celestial Mechanics.— New York: Pergamon Press, 1958.

101. Danby J. M. A. Inclusion of extra forces in the problem of three bodies.— Astron J., 1965, 70, 181.
102. Dusek H. M. Motion in the vicinity of libration points of a generalized restricted three body model. — *AIAA* Paper 65—682, 1965.
103. Birkhoff G. D. Dynamical systems with two degrees of freedom.— Trans. Am. Math. Soc., 1917, 18, 199; also: Collected Mathematical Papers.— New York: Am. Math. Soc., 1950. v. 2, p. 1.
104. Wintner A. Über die Jacobische Differentialgleichung des restringierten Dreikörperproblems.— Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl., 1930, 82, 345.
105. Dainelli U. Sul movimento per una linea qualunque.— Giorn. Mat., 1880, 18, 271.
106. Szebehely V. The generalized inverse problem of orbit computation.— Space Research, 2. Proc. 2nd Intern. Space Sci. Symp., Florence, 1961. Amsterdam: North-Holland Publ., v. III, p. 318.

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВОПОЛАГАЮЩИХ КНИГ

1. Birkhoff G. D. Collected Mathematical Papers, vols. 1, 2, 3.— New York: Am. Math. Soc., 1950.
2. Birkhoff G. D. Dynamical Systems—Am. Math. Soc., v. IX, Colloquium Publ. Providence, Rode Island, 1927. [Русский перевод: Биркгоф Дж. Д. Динамические системы.— М.; Л.: Гостехиздат, 1941.]
3. Brouwer D., Clemence G. M. Methods of Celestial Mechanics.— New York: Acad. Press, 1961. [Русский перевод: Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики.— М.: Мир, 1964.]
4. Brown E. W., Shook C. A. Planetary Theory.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1933. Reprinted by Dover: New York, 1964.
5. Charlier C. V. L. Die Mechanik des Himmels. V. 1, 2.— 2nd ed.— Berlin; Leipzig: W. de Gruyter and Co., 1927. [Русский перевод: Шарлье К. Небесная механика.— М.; Наука, 1966.]
6. Чеботарев Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики.— М.; Л.: Наука, 1965.
7. Danby J. M. A. Fundamentals of Celestial Mechanics.— New York: Macmillan, 1962.
8. Darwin G. H. Scientific Papers. V. IV. Periodic Orbits and Miscellaneous Papers.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1911.
9. Дубошин Г. Н. Небесная механика.— М.; Наука, 1968.
10. Hagihara Y. Stability in Celestial Mechanics.— Tokyo: Kasai Publ., 1957.
11. Happel H. Das Dreikörperproblem. Vorlesungen über Himmelsmechanik.— Leipzig: Kiehler Verlag, 1941.
12. Hill G. W. Collected Mathematical Works.— V. 4, 1907. Washington, D. C.: Carnegie Inst. of Washington, v. 1, 1905; v. 2, 1906; v. 3, 1906.
13. Jacobi C. G. J. Vorlesungen über Dynamik.— Berlin: Reimer Publisher, 1866. [Русский перевод: Якоби К. Лекции по динамике.— Л.; ОНТИ, 1936.]
14. Lagrange J. Œuvres. M. J.-A. Serret, ed. — Paris: Gauthier-Villars, 1867—1892. 14 vols. See especially v. 6, 1873.
15. Lagrange J. Mécanique Analytique.— Paris: 1788. [Русский перевод: Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. I, 2.— М.: Гостехиздат, 1950.]
16. Lanczos C. The Variational Principles of Mechanics.— Toronto: Univ. of Toronto Press, 1949. [Русский перевод: Ланцош К. Вариационные принципы механики.— М.: Мир, 1965.]
17. Leimanis E., Minorsky N. Dynamics and Nonlinear Mechanics. Surveys in Applied Mathematics. V. II.— New York: Wiley, 1958.
18. Levi-Civita T. Opere Matematiche (Zanichelli N., ed.). V. 1, 1954; v. 2, 1956; v. 3, 1957; v. 4, 1960. Bologna: Accademia Nazionale dei Lincei.
19. McCuskey S. W. Introduction to Celestial Mechanics.— Massachusetts: Addison—Wesley, Reading, 1963.

20. Marcolongo R. Il Problema dei Tre Corpi.— Milano: Hoepli, 1919.
21. Moulton F. R. An Introduction to Celestial Mechanics. 2nd revised ed. New York: Macmillan, 1914. [Русский перевод: Мультон Ф. Введение в небесную механику.— М.: ОНТИ, 1935.]
22. Moulton F. R. Periodic Orbits.— Washington, D. C.: Carnegie Inst. of Washington, 1920.
23. Pars L. A. A Treatise on Analytical Dynamics.— New York: Wiley, 1965. [Русский перевод: Парс Л. Аналитическая динамика.— М.: Наука, 1971.]
24. Plummer H. C. An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy.— London: New York: Cambridge Univ. Press, 1918.
25. Poincaré H. Leçons de Mécanique Céleste.— Paris: Gauthier-Villars. V. I, 1905; v. 2, Pt. 1, 1907; Pt. 2, 1909; v. 3, 1910.
26. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. V. I, 1892; v. 2, 1893; v. 3, 1899. Paris: Gauthier-Villars. Reprinted by Dover, New York, 1957. [Русский перевод: Пуанкаре А. Новые методы небесной механики.— Избр. тр. Т. I, 2. М.: Наука, 1971, 1972.]
27. Pollard H. Mathematical Introduction to Celestial Mechanics.— New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
28. Siegel C. L. Vorlesungen über Himmelsmechanik.— Berlin: Springer, 1956. [Русский перевод: Зигель К. Л. Лекции по небесной механике.— М.: ИЛ, 1959.]
29. Smart W. M. Celestial Mechanics.— London: Longmans, Green, 1953. [Русский перевод: Смарт У. Небесная механика.— М.: Мир, 1965.]
30. Stumpff K. Himmelsmechanik.— Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. V. I, 1956; v. 2, 1965.
31. Synge J. L. Classical Dynamics.— Encyclopedia of Physics. V.III/1, p. 1. Berlin: Springer, 1960. [Русский перевод: Синг Дж. Л. Классическая динамика.— М.: Физматгиз, 1963.]
32. Tisserand F. Traité de Mécanique Céleste.— Paris: Gauthier-Villars. V. 1, 1889; v. 2, 1891; v. 3, 1894; v. 4, 1896.
33. Whittaker E. T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies.— London; New York: Cambridge Univ. Press, 1904. [Русский перевод: Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1937.]
34. Wintner A. The Analytical Foundations of Celestial Mechanics.— Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1941[. [Русский перевод: Винтнер А. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.]

Литература, добавленная редактором перевода

1. Гребеников Е. А. Об устойчивости лагранжевых треугольных решений ограниченной эллиптической задачи трех тел.— Астрон. жур., 1964, 41, вып. 3.
2. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.— 3-е изд. (гл. XVI).— М.: Наука, 1975.
3. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы.— 2-е изд. (гл. V).— М.: Наука, 1978.
4. Лукьянов Л. Г. Об устойчивости в первом приближении треугольных лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел.— Бюлл. ИТА, 1969, 11, № 10.
5. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике.— М.: Наука, 1978.
6. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию (гл. XV).— М.: Наука, 1968.
7. Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел.— М.: Наука, 1980.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абъянкар (Abhyankar K. D.) 211, 215, 304, 310, 451, 452, 523, 524, 548, 553
Аксенов Е. П. 572, 633, 640
Алексеев В. М. 639, 644
Альтман (Altman S. P.) 441, 444, 445
Энрар (Henrard J.) 300, 307, 451, 527, 530, 548, 553
Аренсторф (Arenstorf R. F.) 105, 117, 124, 128, 130—132, 134, 135, 439, 443, 450, 452, 506—511, 518, 546, 547, 552, 639, 644
Армелини (Armellini G.) 130, 134
Арнольд В. И. 79, 81, 303, 309, 437, 441, 442

Бакк (Buck T.) 301, 308
Барар (Barrar R. B.) 439, 443
Барбани (Barbanis B. S.) 80, 82
Барро (Burrau C.) 18, 19, 113, 115, 118, 129, 132, 134, 213, 216, 299, 300, 307, 308, 436, 440, 463, 467, 469, 473, 474, 542—544, 550, 551, 553, 622, 638
Бартлетт (Bartlett J. H.) 541—543, 549
Бейкер (Baker R. M. L.) 547, 553
Бенедикт (Benedikt E. T.) 132, 135, 304, 310
Беннетт (Bennett A.) 594, 636, 642
Биркгоф (Birkhoff G. D.) 9, 11—13, 16, 18, 19, 50, 51, 53, 59, 67, 78—80, 82, 84, 105, 108, 109, 111, 113, 115, 118, 134, 191, 210, 215, 303, 304, 343, 344, 346, 381, 383—385, 409, 424, 425, 435—437, 441—443, 520, 541, 544, 548, 549, 552, 629, 631, 643, 645, 646
Бискончини (Bisconcini G.) 132, 135
Блитцер (Blitzer L.) 305, 310
Блокк (Block N.) 216
Бозн (Bozis G.) 80, 82, 210, 636, 642
Болин (Bohlin K.) 128, 134, 210, 215
Боль (Bohl P.) 386, 436, 441
Бонне (Bonnet O.) 17, 128, 134
Бор (Bohr H.) 386, 436, 441
Брауд (Braud N. J.) 633, 641
Браун (Brown E. W.) 18, 274—276, 279, 302, 303, 307—309, 380, 381, 436, 439, 443, 636, 642, 646
Брауэр (Brouwer D.) 19, 51, 53, 80, 82, 211, 214, 215, 298, 306, 307, 342, 343, 380, 381, 390, 426, 436, 442, 541, 547, 549, 632, 636, 640, 642, 646
Брауэр (Brouwer L. E. J.) 437, 443
Брекуэлл (Breakwell J. V.) 304, 310
Брукке (Broucke R.) 130—132, 134, 135, 450, 452, 455, 457, 497—504, 510, 533, 540, 542, 546—549
Брунс (Bruns H.) 56—58, 79, 81, 637
Брэм (Bram J.) 298, 306
Брюно А. Д. 647
Бухгейм (Buchheim R. W.) 451, 452, 548, 553
Бэттин (Battin R. H.) 305, 310

Вальдфогель (Waldvogel J.) 580, 634, 641
Винти (Vinti) 17
Винтнер (Wintner A.) 9, 12, 17, 19, 50, 51, 53, 80, 82, 123, 124, 128, 129, 131—133, 135, 211, 212, 215, 269, 297—300, 302, 306, 308, 342, 344, 423, 438, 439, 447, 541—545, 547, 549, 551, 552, 620, 625, 632, 634, 636, 637, 640, 643, 645, 647
Волавер (Wolaver L. E.) 293, 304, 309
Вулстон (Woolston D. W.) 548, 553

Гамильтон (Hamilton W. R.) 11, 20, 52, 76, 80, 321—344 и д.
Гапчинский (Gapcynski J. P.) 548, 553
Гарретт (Garrett R.) 216
Гарфинкель (Garfinkel B.) 436, 442
Гаусс (Gauss K. F.) 127
Гашо (Gascheau G.) 298, 306
Геворкян (Kevorkian J.) 582, 634, 637, 641
Герц (Hertz H. G.) 299, 307
Гиббс (Gibbs J. W.) 210, 215
Гильден (Gylden H.) 298, 304, 306, 621, 639, 644
Голдстейн (Goldstein H.) 80, 82, 342, 343, 380, 381
Горн (Hori G.) 381

Готье (Gautier A.) 632, 640
Гравалос (Gravalos F. G.) 637, 643
Гребенников Е. А. 636, 642, 647
Гривс (Greaves W. M. H.) 301, 308
Гудас (Goudas C. L.) 80, 82, 211, 212, 215, 572, 573, 633, 640
Гудрич (Goodrich E. F.) 302, 309, 547, 553
Гулд (Gould N.) 451, 452, 525, 548, 553
Гурвиц (Hurwitz A.) 579, 634, 641

Дайнелли (Dainelli U.) 639, 645
Даламбер (D'Alembert J. le R.) 302
Дарбу (Darboux G.) 638, 644
Дарвин (Darwin G. H.) 11, 12, 16, 51, 53, 149, 188, 213, 216, 220, 224, 228, 301, 308, 317, 319, 383, 435, 441, 449, 450, 452, 457, 459, 488—493, 515, 534, 537, 540, 542, 544—546, 548, 549, 646
Деврие (De Vries J. P.) 291, 292, 294, 304, 309, 310
Декарт (Descartes) 117, 145, 146
Делоне (Delaunay Ch.) 345, 359—372, 380, 381, 384, 394, 406, 439, 557, 572, 632
Данжуа (Denjoy A.) 437, 443
Дели (Delie A.) 130, 134, 135, 300—303, 307, 547, 553
Демин В. Г. 639, 644
Депри (Deprit A.) 130, 131, 134, 135, 202, 203, 211, 212, 214—216, 257, 269, 274, 278, 279, 299—303, 307, 309, 451, 452, 527, 530, 547, 548, 553, 638, 643
Джакалья (Giacaglia G. O.) 52, 54, 131, 135, 635, 642
Джессен (Jessen B.) 436, 442
Джеффри (Jefferys W.) 437, 572, 633, 640
Джиллеспи (Gillespie R. W.) 634, 641
Джинс (Jeans J. H.) 214, 216
Джонсон (Johnson J. R.) 211, 215
Дилиберто (Diliberto S. P.) 441, 445
Дубошин Г. Н. 143, 278, 303, 309, 646, 647
Дэвидсон (Davidson M. C.) 507, 546, 552, 639, 644
Дэнби (Danby J. M. A.) 19, 51, 53, 213, 216, 304, 306, 309, 440, 444, 594, 636, 639, 642, 645, 646
Дюпен (Dupin F. P. C.) 154, 155, 212
Дьюсек (Dusek H. M.) 639, 645

Егоров В. А. 51, 53, 129, 134, 212, 214, 216, 450—452, 497, 504—506, 516—519, 540, 541, 546, 548, 549, 633, 641

Зигель (Siegel C. L.) 12, 19, 57, 58, 79, 81, 299, 301, 307, 308, 342, 344, 437, 439, 443, 548, 607, 620, 636, 637, 643, 647
Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 243
Зундман (Sundman K. F.) 19, 90, 127, 130, 132, 133, 447, 541

Идес (Eades J. B.) 441, 445
Инс (Ince E. L.) 440, 444

Калландро (Callandreau O.) 635, 642
Кеплер (Kepler J.) 6, 22, 94, 364, 369, 421, 455
Кимболл (Kimball D.) 437
Кинер (Kyner W. T.) 441, 445
Кирквуд (Kerkwood) 636
Клейн (Klein F.) 242
Клеменс (Clemence G. M.) 19, 51, 53, 80, 82, 211, 214, 215, 298, 306, 342, 343, 380, 381, 541, 549, 632, 636, 640, 646
Клемперер (Klemperer W. B.) 304, 310
Клозе (Klose A.) 52, 54, 435, 441
Кобб (Kobb G.) 633, 640
Ковалевский (Kovalevsky J.) 54, 549
Коддингтон (Coddington E. A.) 236, 298, 306
Койпер (Kuiper G. P.) 211, 215, 451, 452, 525, 541, 548, 549
Кокулеско (Coculesco P.) 544, 552
Колмогоров А. Н. 19, 383, 390—395, 399, 437, 442
Коломбо (Colombo G.) 52, 54, 635, 642
Конвей (Conway A. W.) 344, 444
Контопулос (Contopoulos G.) 79, 81, 299, 636, 642
Копал (Kopal Z.) 211, 214—216, 451, 452, 525, 541, 548, 549, 632, 634, 635, 640, 642
Кордылевский (Kordyłewski K.) 294, 304, 310
Кориолис (Coriolis G.) 17, 586, 605, 622, 624—627, 639
Котсакис (Kotsakis D.) 80, 82
Коши (Cauchy A. L.) 55, 102, 239, 373
Коу (Coe J.) 437, 443

Кристианссон (Kristiansson K.) 543, 546, 551, 552, 641
Кристоффель (Christoffel E. B.) 237
Купмен (Koopman K. V.) 437, 443
Кустаанхеймо (Kustaanheimo P.) 578, 579, 634

Лагерстрём (Lagerstrom P. A.) 582, 634, 637, 641
Лагранж (Lagrange J. L.) 16, 20, 40, 52, 64, 207, 211, 214, 215, 234, 235, 242, 299, 322, 389, 431, 524, 584, 621, 622, 627, 643, 646
Ланге (Lange B.) 634, 642
Лангебартель (Langebartel R. G.) 639, 644
Ланцано (Lanzano P.) 300, 301, 303, 307
Ланцош (Lanczos C.) 80, 82, 342, 344, 646
Лаплас (Laplace P. S.) 6, 211, 215, 242, 441, 444
Ла Салль (La Salle J.) 236, 298, 306
Лаус (Lous L.) 543
Лаусон (Lawson C.) 214, 216
Лаутман (Lautman D.) 639, 644
Лебрен (Lebrun C.) 639, 644
Леваллен (Lewallen J. M.) 309
Левинсон (Levinson N.) 236, 298, 306
Левн-Чивита (Levi-Civita T.) 16, 19, 79, 81, 90, 107, 115, 128, 132, 133, 135, 140, 190, 192, 343—345, 355, 376, 381, 578, 579, 614, 646
Лежандр (Legendre A. M.) 129, 134, 176, 199, 202, 203, 279, 575, 600
Лейманис (Leimanis E.) 128, 131, 133, 548, 553, 646
Лекар (Lecar M.) 133
Леметр (Lemaitre G.) 115, 117—121, 130, 134, 191, 192
Леонтович А. М. 278, 309
Лефшец (Lefschetz S.) 236, 243, 298, 306
Линдоу (Lindow M.) 129, 543
Линдштедт (Lindstedt) 621
Липшиц (Lipschitz R.) 239
Лиске (Lieske J.) 473, 543
Литлтон (Lyttleton R. A.) 635, 642
Лиувилль (Liouville J.) 76, 78, 80, 82, 128, 625, 638
Ловетт (Lovett E.) 299, 307, 632, 639, 640, 644
Лопиталь (L'Hospital G. F.) 160
Лукьянов Л. Г. 647
Ляпунов А. М. 236, 241, 243, 298, 301, 303, 305, 309, 384, 620, 636, 637, 643

Маккаски (McCuskey S. W.) 19, 298, 307
Макконэлл (McConnell A. J.) 444
Макмиллан (MacMillan W. D.) 79, 81, 633, 641
Малхолленд (Mulholland J. D.) 81
Манфорд (Munford C.) 54, 642
Маркеев А. П. 647
Марков (Markov A. A.) 212, 216
Марколонго (Marcolongo R.) 50, 53, 632, 640, 647
Мартин (Martin M. H.) 211, 212, 215, 298, 300, 306, 639, 644
Маскар (Mascart J.) 301, 308
Мацукума (Matukuma T.) 638, 643
Мейкемсон (Makemson M. W.) 547, 553
Мерман Г. А. 435, 441
Мернаган (Murnaghan F. D.) 130, 134, 135
Месседж (Message J.) 440, 444, 451, 452, 528, 531—533, 548, 553
Меффруа (Meffroy J.) 81, 82
Мещерский И. В. 639, 644
Мёбиус (Möbius A. F.) 441, 444
Миеле (Miele A.) 428, 439, 443
Микаэль (Michael W. H., Jr.) 288, 304, 309
Минёр (Mineur H.) 214, 216
Минорский (Minorsky N.) 128, 131, 133, 548, 553, 646
Мозер (Moser J. P.) 390, 394, 399, 437, 439, 441—443
Моисеев Н. Д. 19, 214, 216, 305, 310
Мультон (Moulton F. R.) 11, 12, 19, 51, 53, 211, 214, 215, 270, 298, 300, 301, 304, 306, 307, 310, 436, 450, 453, 455—457, 459, 494, 511, 512, 515, 540, 544—546, 549, 570, 571, 632, 633, 635, 640, 646, 647
Мюллер (Moller J. P.) 301, 308, 465, 467, 542, 550, 551

Навье (Navier L.) 78
Накозн (Nacozy P.) 544, 551
Наон (Nahon F.) 214, 216
Нехвилл (Nechwile V.) 634, 635, 642
Ноулс (Knowles S.) 414, 438, 452, 526, 548
Ньюком (Newcomb S.) 17, 52, 54

Ньютон (Newton I.) 6, 15
Ньютон (Newton R. R.) 450, 452, 547, 552

Овенден (Ovenden M. W.) 635, 642
О'Кифи (O'Keefe J. A.) 305, 310
Оллонгрен (Ollongren) 343, 344

Паванини (Pavanini G.) 633, 641
Парс (Pars L. A.) 19, 342, 343, 441, 444, 647
Паули (Pauli W.) 639, 644
Педерсен (Pedersen P.) 270, 271, 275, 278, 287, 301—304, 308, 309, 512, 543, 550, 551
Пейн (Payne M.) 627, 639, 644
Пенлеве (Painlevé P.) 19, 56, 57, 79, 81, 131
Перко (Perko L. M.) 634, 641
Перрон (Perron O.) 241, 302, 308
Першо (Perchot J.) 300, 301, 308
Петр (Petr K.) 635, 642
Пикар (Picart L.) 632, 633
Пирс (Pierce D. A.) 131, 132, 135, 213, 214, 216, 304, 452, 520, 521, 548, 553
Пистинер (Pistiner J. S.) 441, 445
Пламмер (Plummer H. C.) 212, 215, 269, 298—301, 306—308, 440, 444, 636, 638, 642, 647
Поллард (Pollard H.) 19, 213, 298, 299, 307, 632, 640, 647
Порицкий (Poritsky H.) 305, 310
Прингл (Pringle R.) 304, 310
Пуанкаре (Poincare H.) 9, 11—13, 15, 16, 18, 43, 50, 52, 53, 56, 57, 78—81, 127, 133, 206, 300, 301, 303, 308, 345, 359, 371, 372, 380—386, 388—390, 394—396, 400, 414, 418, 424, 426, 432, 433, 435—437, 441—443, 466, 508, 536, 548, 558, 572, 618, 621, 631, 633, 636—638, 640, 643, 647
Пуассон (Poisson S. D.) 242

Рабе (Rabe E.) 272, 278, 302, 309, 452, 453, 456, 457, 511—514, 540, 547, 549
Радо (Radau R.) 52, 53
Разбитная Е. П. 628, 639, 644
Раус (Routh E. J.) 211, 215, 298, 306
Рейн (Rein N.) 212, 216, 628, 635, 639, 642, 644
Рёсслер (Rössler M.) 634, 641
Риман (Riemann B.) 102, 373
Ричардс (Richards P. B.) 303, 305, 309, 310
Роелс (Roels J.) 130, 134, 135
Розенталь (Rosenthal J. E.) 211, 212, 215, 216, 299, 307, 440, 444, 543, 551
Рой (Roy A. E.) 635, 642
Росс (Ross S.) 634, 641, 642
Рош (Roche E.) 581, 634, 641

Саати (Saaty T. L.) 298, 306
Себехей (Szebehely V.) 7, 52, 54, 80, 82, 129—132, 134, 135, 211, 213—216, 304, 305, 309, 310, 437, 443, 451, 452, 544, 546, 548, 551—553, 634—636, 639, 641, 642, 644, 645
Сейферт (Seifert H. S.) 553
Сеско (Cesco R. O.) 133, 135
Сехнал (Sehnal L.) 304, 310
Си (See T. J. J.) 214, 216
Сильвестр (Sylvester J. J.) 52, 53
Синг (Synge J. L.) 80, 82, 236, 298, 306, 342, 343, 444, 647
Синьорини (Signorini A.) 440, 444
Ситников К. 633, 641
Смарт (Smart W. M.) 380, 381, 636, 642, 647
Сон (Sohn R.) 634
Стег (Steg L.) 310
Стендиш (Standish E. M.) 132, 135, 214, 452, 520, 521, 548, 553, 633, 637
Стеффенсен (Steffensen J. F.) 547, 553
Стокс (Stokes G. G.) 78
Стрёмгрен (Strömgren E. t) 11, 12, 16, 18, 19, 129, 132, 135, 213, 216, 273, 299, 300, 307, 308, 418, 436, 447, 449, 450, 452, 453, 457, 494, 498, 499, 501, 504, 515, 527, 541—545, 549—552
Субботин М. Ф. 647
Сэмтер (Samter H.) 543, 550, 639, 644

Тейлор (Taylor G. L.) 94, 155, 267, 398, 401
Тиле (Thiele T. N.) 18, 113, 115, 118, 119, 129, 132, 134, 190, 192, 213, 440, 542, 543, 551, 622, 638
Тиссеран (Tisserand F.) 49, 51, 53, 81, 82, 301, 308, 440, 444, 583, 634, 635, 641, 647
Томсон (Tohmson W., Lord Kelvin) 437, 442, 618, 638, 643
Тонелли (Tonelli L.) 440, 444
Трусделл (Truesdell C.) 80, 82
Тэпли (Tapley B. D.) 290, 291, 309
Тюринг (Thuring B.) 302, 309, 451, 452, 517, 541, 546, 547, 549, 552

Уиллард (Willard H. R.) 302, 309
Уильямс (Williams C.) 128, 211, 215, 305, 310
Уиттекер (Whittaker E. T.) 19, 50—53, 79—81, 128, 132, 133, 211, 298, 306, 342, 343, 380, 381, 384, 430, 436, 440, 442, 632, 638—640, 644, 647
Уолкер (Walker M. J.) 643
Уоррен (Warren L. A. H.) 548, 553
Уэйд (Wade C.) 552, 633, 640

Ферми (Fermi E.) 436, 442
Фесенков В. Г. 517, 542, 548, 553
Финлей-Фройндлих (Finlay-Freundlich E.) 639, 644
Фишер-Петерсен (Fischer-Petersen J.) 479, 542, 543, 549, 550
Флаидери (Van Flandern T.) 546, 552
Флокс (Floquet) 440
Фриш (Frisch H. L.) 304, 436, 442
Фройид (Freund R. B.) 441, 445
Фукс (Fuchs) 432
Фурье (Fourier T.) 272, 399, 617, 620

Хагихара (Hagihara V.) 242, 298, 306, 440, 444, 646
Хайлс (Heiles C.) 80, 82
Хантер (Hunter M.) 634
Хаппель (Happel H.) 9, 128, 133, 620, 637, 643
Хардтль (von Haerdtl E. F.) 470, 544, 552
Хевисон (Hewison V.) 214, 216
Хёльдер (Holder E.) 637, 643
Херрик (Herrick S.) 131, 135
Херринг (Herring G. P.) 516, 633, 641
Хилл (Hill G. W.) 11, 13, 16, 18, 51, 53, 79, 138, 198, 200, 202, 203, 206, 210, 214, 215, 242, 300, 382, 400, 405, 439, 440, 597—621, 632, 633, 635—637, 640, 642, 646
Хильми Г. Ф. 133, 135
Хильтебайтель (Hiltebeiltel A. M.) 638, 644
Хинчин А. Я. 80, 82
Холлистер (Hollister W.) 634
Хопф (Hopf E.) 389, 436, 442
Хорн (Horn J.) 268, 270, 271, 300—302, 308, 400, 511
Хорнби (Hornby H.) 634, 642
Хоулкер (Hoelker R. F.) 451, 516, 575—577, 633, 641
Хуанг (Huang S.) 214, 216, 304, 309, 450, 452, 510, 534—536, 547, 548, 552, 633, 640

Хуболт (Houbolt J. C.) 305, 310
Хуг (Hough S. S.) 545, 552
Хэлкин (Halkin H.) 305, 310

Цайпель (von Zeipel H.) 633

Чандрасекар (Chandrasekhar S.) 304, 305, 310, 436, 442
Чеботарев Г. А. 636, 642, 646
Чезари (Cesari L.) 236, 298, 306, 440, 444
Черри (Cherry T. M.) 57, 79, 81
Четаев Н. Г. 298, 306

Шайбнер (Scheibner W.) 635, 642
Шанцле (Schanzle A.) 302, 309, 514, 549
Шарлье (Charlier C. L.) 12, 19, 51—53, 128, 134, 211, 214, 215, 298, 299, 306, 307, 437, 439, 443, 452, 453, 456, 457, 542, 549, 626, 633, 636—640, 646
Шварцшильд (Schwarzschield K.) 382, 435, 439, 441
Штеккель (Stackel P.) 439, 443
Штифель (Stiefel E.) 578, 580, 634, 641
Штумпф (Stumpff K.) 637, 643, 647
Шубарт (Schubart J.) 439, 443, 638, 643
Шук (Shook C. A.) 299, 307, 380, 381, 646
Шульхоф (Schulhof L.) 634, 641
Шутц (Schutz B. E.) 304, 309

Эберт (Ebert W.) 133, 135, 299, 307
Эжервей (Egervary E.) 52, 54
Эйлер (Euler L.) 6, 8, 9, 16—20, 38, 50, 53, 65, 113, 128, 133, 134, 211, 299, 307, 322, 621, 622, 626, 627, 630, 643
Эккерт (Eckert D.) 643
Эккерт (Eckert W. J.) 298, 307, 636, 643
Энке (Encke) 17, 382, 627
Эно (Hénon M.) 80, 82, 210, 441, 444, 534, 536, 537, 539, 540, 542, 548, 550
Эрже (Herget P.) 305, 310
Эрике (Ericke K.) 451, 452, 516, 541, 549, 634

Якоби (Jacobi C. G. I.) 16—18, 20, 26, 29, 31, 32, 34, 35, 44, 49—53, 56—63, 65—67, 73, 86, 104, 108, 113, 117, 644, 646

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аблиминация 52
Адельфический интеграл 79, 436
Аксенова орбита 572, 633
Аналитическое продолжение 399 и д.
Аналогия гидродинамическая 70, 77
— с линиями тока 63, 66, 70
Аномалия истинная 364, 365
— средняя 364, 365, 388
— эксцентрическая 94, 364
Антикластическая поверхность 212
Апсид линия 364, 366, 369, 411—417, 509
Аренсторфа преобразование 105, 117
Асимптотическая орбита 198, 382
— устойчивость 238
Асимптотически-периодическая орбита 389, 452, 461, 479, 485

Биркгофа преобразование 113, 115, 120, 121, 130, 191, 192, 580
— теорема 424
Боинэ теорема 128
Брауэра теорема 426
Брукке орбиты 497—503
Бруиса теорема 56, 79, 637

Вариационная орбита 598
Винтнера теорема 123, 131
Возвращения орбита 65
— теорема 242, 388
Возмущающая функция 387
Вращения число 391

Гамильтона динамика 321 и д.
— принцип 321, 326, 332 и д.
Гектора орбита 299
Геометрическая эквивалентность 105
Гидродинамическая аналогия 70, 77
Гильдена — Линдштедта уравнение 621
Гиперповерхность 137, 240
Глобальная регуляризация 55, 108—112
Гравитационная задача 126, 129, 133
— — n тел 126, 133
Гудаса орбита 573
— теорема 572

Дарвина задача 188
— орбиты 488 и д.
Движение долгопериодическое 254 и д.
— квазипериодическое 386, 388, 393, 397
— квазиэргодическое 389
— короткопериодическое 254 и д.
— периодическое 382 и д.
— попятное 407, 422 и д.
— почти периодическое 386
— прямое 421, 468 и д.
— эллиптическое 390, 583 и д.
Двойные преобразования 97
— системы 523
— соударения 473
Двух тел задача 167
Делители малые 387
Делимые переменные 359—367, 557, 572
Динамика Гамильтона 321 и д.
Долгота массы 21, 32

Егорова лунные траектории 518, 519, 541, 549
— орбиты 497, 504, 505, 518, 519

Задача Гильдена—Линдштедта 621
— Дарвина 188
— двух тел 167
— Кирквуда 636
— Копенгагенская 188, 458, 473, 537
— Лагранжа 621, 622, 627, 638
— n тел 126, 133
— псевдоограниченная 43
— Хилла 400, 597—621
— четырех тел 288
— Эйлера 621, 622, 627, 638
— эллиптическая ограниченная 583 и д.
Зигеля теорема 57, 58

Изотаха 193
Изохромное соответствие 236
Интеграл адельфический 79, 436
— момента количества движения 40
— системы 25
— энергии 40, 86, 89, 98—101

Интеграл Якоби 20, 26, 29, 31, 32, 34, 35, 44, 49, 51, 56—67 и д.
Истинная аномалия 364, 365

Канонические уравнения Гамильтона 324
Категория Копенгагенская 458—496
Квазипериодическое движение 386, 388, 393, 397
Кеплера уравнение 94, 364, 369, 421
Кирквуда задача 636
Классификация по Стрёмгрену 449—462
Коллинеарные точки 143, 149, 152, 153, 156, 159, 160, 162 и д.
Колмогорова теорема 390—395
Кольцевое преобразование 412
Контактная система 581
Координаты пульсирующие 585—587
Короткопериодические члены 254, 260—262
Кривые нулевой скорости 138, 142, 155, 169, 191, 194, 198, 200, 206, 212, 404, 405
— — — пульсирующие 592
— постоянной скорости 193
— эквипотенциальные 173, 197
Критерий Тиссерана 49, 583, 648
— Уиттекера 429

Лагранжа задача 621, 622, 627, 638
— точки 143, 207 и д.
Леви-Чивита функция 376
Либрации точки 143, 154 и д.
Линии апсид 364, 366, 369, 411—417, 509
— эквивалентные 142
Лунные орбиты 497—510

Малые делители 387
Мера нестационарности 69, 70, 80
Метод Тиле — Барро 638
Многопериодические орбиты 417, 418
Мозера отображения 390, 391, 394
— теорема 391
Мультона орбиты 494—496

Навье — Стокса уравнение 78
Неразрывности уравнение 75
Несвязанная система 581
Нестационарности мера 59, 70, 80
Неустойчивые орбиты 389 и д.
— решения 239, 241, 242
Нормального смещения уравнение 537
Нормальное соответствие 236

Облетные траектории 582
Ограниченная эллиптическая задача 583 и д.
Определитель Хилла 598
Орбиты Брукке 497—502
— возвращения 65
— Гектора 299
— Гудаса 573
— двойного соударения 473
— Егорова 497, 504, 505, 518, 519
— многопериодические 417, 418
— Наулиса 414
— периодические 382 и д.
— — Дарвина 488 и д.
— — лунные 497
— — Мультона 494
— предельные 274, 275
— Пуанкаре 383—386
— соударения 462, 463
— с попятным движением 198, 407—410, 416—418, 421, 422, 460, 461, 464
— с прямым движением 198, 407—410, 416—418, 421, 422, 460, 461
— Хардтля 470
— Хилла 598
Основные тела 21 и д.
Особенность множества 141, 143

Параллакс солнечный 52
Параметр Хилла 618
Переменные Делоне 359—372, 380, 381, 384, 394, 406
— Пуанкаре 371
Периодические орбиты 382 и д.
— решения 386, 399
Перона теорема 241
Поверхность антикластическая 212
— нулевой скорости 558, 559
— Роша 581
— синкластическая 212
Полусвязанная система 581
Постоянная Якоби 29, 61, 62, 67, 73 и д.
Почти-соизмеримость 399, 569
Предел Роша 581
Преобразование Аренсторфа 105, 117
— Биркгофа 113, 115, 120, 121, 130, 191, 192, 580
— глобальное 108
— двойное 97
— каноническое 325

Преобразование кольцевое 412
— Леви-Чивита 106, 107, 115, 128, 131, 132, 140, 190, 573
— Леметра 115, 117—121, 130, 191, 192
— локальное 108
— независимой переменной 95, 97
— поверхностное 390 и д.
— сидерической системы 346 и д.
— скручивающее 390, 391
— Стрёмгрена 129
— Тиле — Барро 113, 115, 119—121, 128, 132, 190, 192
— Эйлера 630
Приведение 55 и д.
Принцип Гамильтона 321, 326, 332 и д.
— окончания 486
— отражения 427—429, 517, 518
Производящая функция 69, 326—329, 331
Пространство конфигураций 321
— фазовое 136, 137, 321, 377 и д.
— — расширенное 321, 377
— — трехмерное 138
— — четырехмерное 137—139
— — шестимерное 139
Псевдоограниченная задача 43
Пуанкаре показатель 539
— теоремы 56, 390, 392
Пульсирующие координаты 585—587

Расширенное фазовое пространство 329
Регуляризация 83 и д.
— Биркгофа, глобальная 108, 118, 120, 133
— гравитационной задачи 126, 133
— Леметра 115
— локальная 104, 105, 133
— общей задачи двух тел 97
— одновременная 108
— орбиты соударения 85
— решения 84
— Тиле — Барро 638
— эллиптической ограниченной задачи 131
Рекуррентность 388
Решение асимптотически устойчивое 239
— — — условно 241
— вековое 265, 274
— неустойчивое 239, 241, 242
— периодическое 399 и д.
— полновесное 238, 239
— полностью устойчивое 239, 241

Сближения орбита 97
Система квазиэргодическая 389
— контактная 581
— несвязанная 581
— рекуррентная 388
— связанная 581
— сидерическая 17, 20—22, 31, 32, 34, 49, 51, 346, 360 и д.
— синодическая 17, 20, 21, 26, 32—34, 51, 113, 125, 200, 346, 355 и д.
Соударения орбита 462, 463
Средняя аномалия 388
Стационарная точка 143
Стрёмгрена классификация 449—462
— преобразование 129
— принцип окончания 486

Тела основные 21 и д.
Теорема Биркгофа 424
— Боннэ 128
— Брауэра 426
— Брунса 56, 79, 637
— Винтнера 123, 131
— возвращения 242, 388
— Гудаса 572
— Зигеля 57, 58
— Колмогорова 390—395
— Мозера 391
— Перона 241
— Пуанкаре 56, 390, 392
Тиле — Барро преобразование 113, 115, 119—121, 128, 132, 190, 192
— — регуляризация 638
Точка либрации 143 и д.
— — коллинеарная 143, 149, 152, 153, 155, 156, 159, 160, 162, 217—228, 245, 268, 293, 311—317
— — треугольная 143, 149, 154, 155, 184, 203, 252, 269, 281, 318—320
— остановки 65
— поверхности гиперболическая 154
— — параболическая 154
— — седловая 240
—, —, — фокус 241
— —, — центр 241
— — эллиптическая 154
Траектории лунные 518, 519, 541, 549
— облетные 582

Уиттекера критерий 429
— условие 384
Уравнение Гамильтона каноническое 324
— Гильдена — Линдштедта 621
— Кеплера 94, 364, 369, 421

Уравнение Навье — Стокса 78
— неразрывности 75
— нормального смещения 537
— Хилла 598, 621
— Эйлера 65, 78
Устойчивость асимптотическая 238
— в бесконечно малом 241
— линейная 253
— нелинейная 243
— орбитальная 236—238
— по Биркгофу 243
— по Клейну и Зоммерфельду 242, 243
— по Лапласу 242
— по Ляпунову 236, 237 и д.
— по Пуассону 242
— практическая 243
— структурная 243
— условная 238

Фазовое пространство 136, 137, 210, 321, 377
— — расширенное 321, 329, 377
— — трехмерное 138
— — четырехмерное 137—139
— — шестимерное 138
Функция возмущающая 387
Функция квазипериодическая 386
— Леви-Чивита 376
— обобщенная 194
— периодическая 385, 386
— почти периодическая 386, 388, 399
— производящая 326—329, 331

Хилла задача 400, 597—621
— определитель 598
— орбиты 598
— параметр 618

Число вращения 391
— Пуанкаре 424

Эйлера задача 621, 622, 627, 638
— преобразование 630
Эквивалентные линии 142
Эквипотенциальные линии 194
Эллиптическая ограниченная задача 131, 583—597
Эргодическая система 389

Якоби постоянная 29, 61, 62, 67, 73 и д.

Виктор Себехей

ТЕОРИЯ ОРБИТ

Ограниченная задача трех тел

Редактор *Э. П. Иванов*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *С. Н. Макарова, Н. Д. Дорохова*

ИБ № 11435

Сдано в набор 22.05.81. Подписано к печати 17.12.81. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 41. Уч.-изд. л. 41,46. Тираж 1800 экз. Заказ № 3350. Цена 6 р. 50 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
г. Люберцы, Октябрьский пр., 403