

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Н.Л. Александров, Э.Е. Сон

**ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ
УСТОЙЧИВОСТИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
И ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ**

*Рекомендовано Учебно-методическим советом
Московского физико-технического института
(государственного университета)
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений
по направлению "Прикладные математика и физика"*

УДК 532.59
А46

Рецензенты:

Центр гидрофизических исследований
Физического факультета Московского государственного
университета им. М.В. Ломоносова

Доктор физико-математических наук, профессор *А.П. Напартович*

Александров Н.Л., Сон Э.Е.

А46 Лекции по теории устойчивости гидродинамических и тепловых процессов: Учебное пособие. — М.: МФТИ, 2000. — 98 с.
ISBN 5-7417-0112-4

Рассматриваются задачи устойчивости гидродинамических сред, начиная от изложения традиционных методов решения задач устойчивости в распределенных средах и заканчивая применением этих методов к конкретным задачам, включая плоскопараллельные течения, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца и Релея–Тейлора, конвективную неустойчивость и термоакустическую неустойчивость тепловыделяющего газа. Кроме того, обсуждаются нелинейные волны с учетом диссипации и дисперсии. Приводятся результаты точного решения нелинейной задачи для неустойчивости Рэлея–Тейлора в ряде конкретных случаев.

Предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области высокотемпературной гидродинамики и теплофизики.

УДК 532.59

ISBN 5-7417-0112-4

© Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2000
© Александров Н.Л., Сон Э.Е., 2000

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Теорема о модах возмущений в безграничной среде	8
Глава 2. Методы решения задач линейной устойчивости	16
2.1. Метод элементарных волновых решений.....	16
2.2. Метод Галеркина	18
2.3. Метод Лапласа	19
2.4. Энергетический метод	21
Глава 3. Устойчивость плоскопараллельных течений	24
3.1. Теорема Сквайра	28
3.2. Первая теорема Рэля	29
3.3. Вторая теорема Рэля	30
Глава 4. Волны завихренности и энтропии в неоднородных средах.....	32
Глава 5. Конвективная неустойчивость	40
5.1. Конвективная неустойчивость непроводящей вязкой жидкости	41
5.2. Конвективная неустойчивость проводящей вязкой жидкости в магнитном поле	47
5.3. Тококонвективная неустойчивость	50

Глава 6. Тепловые волны	53
Глава 7. Термоакустическая неустойчивость тепловыделяющего газа	57
Глава 8. Простые волны Римана	61
Глава 9. Влияние диссипации на нелинейные волны	67
Глава 10. Влияние дисперсии на нелинейные волны	77
Глава 11. Нелинейная теория релей-тейлоровской неустойчивости	83
Глава 12. Нелинейная теория неустойчивости «опрокинутой мелкой воды»	90
Список литературы	96

Введение

Настоящее учебное пособие написано на основе лекций по теории колебаний и волн в гидродинамике, читавшихся авторами студентам четвертого курса факультета аэрофизики и космических исследований Московского физико-технического института в течение ряда лет.

Содержание учебного пособия является естественным продолжением стандартного курса гидродинамики, изучаемого студентами ФАКИ в более ранних семестрах, а потому оно предполагает, что читатель знаком с основными гидродинамическими уравнениями.

Теория движения жидкости и газа разработана в настоящее время достаточно подробно. Однако часто оказывается, что решение гидродинамических уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями, полученное аналитически или численно, не соответствует действительности или соответствует реальным течениям только в ограниченной области параметров. И связано это не с несправедливостью основных уравнений, выражающих основные законы сохранения, а с тем, что рассматриваемые решения могут стать неустойчивыми. В результате в определенной области параметров на практике реализуются совсем другие, зачастую гораздо более сложные течения. Типичный пример — стационарное течение несжимаемой жидкости в плоском канале. Уравнения, описывающие такое течение, содержат единственный безразмерный параметр — число Рейнольдса Re . При малых Re в эксперименте наблюдается стационарное ламинарное течение в соответствии с решением гидродинамической системы уравнений. С ростом Re в эксперименте реализуются нестационарные течения с плоскими волнами, которые становятся все более сложными. Наконец, при величине Re , большей некоторого критического порога, на практике

движение становится турбулентным. Все это получается несмотря на то что в описанной области параметров гидродинамические уравнения имеют стационарные решения. Просто здесь эти решения становятся неустойчивыми.

В замкнутых системах при отсутствии обмена импульсом, энергией и частицами с окружающей средой такая смена структур не должна иметь место. Действительно, на достаточно больших временах система достигает термодинамического равновесия с однородным распределением параметров по всему объему. В этом случае возможно отклонение от однородного стационарного состояния только в виде небольших флуктуаций, которые быстро затухают. Такие явления, как неустойчивость, колебания и волны присущи именно открытым неравновесным системам, которые способны обмениваться с внешним окружением импульсом, энергией и/или массой. В этом случае случайные флуктуации могут не только нарастать, но и переводить систему в новое состояние, которое может быть и нестационарным. Тем не менее при описании таких систем в гидродинамике обычно локальное термодинамическое равновесие предполагается выполненным. Исключения из этого правила сравнительно немногочисленны (например, фронт ударной волны) и относительно редко встречаются на практике.

Среди задач, типичных для теории колебаний и волн в гидродинамике, можно упомянуть акустические задачи, переход из ламинарного течения в турбулентное, волны и их развитие при наличии тангенциального и контактного разрывов в газе, волны в струях и следах, ударные и детонационные волны, волны горения, волны в атмосфере и океане, волны в ракетных двигателях и внутри звезд и т.д. Этот достаточно разнородный список можно еще долго продолжать. Но и его достаточно, чтобы понять сложность и важность рассматриваемых явлений. Не претендуя на пол-

ный охват данной темы, авторы просто хотели дать общие представления и основные идеи этого интересного и быстро развивающегося в настоящее время раздела гидродинамики.

Указанные вопросы частично обсуждались в учебной литературе применительно как к нейтральному газу [1, 2], так и к проводящей газовой среде [3]. Для более глубокого изучения этих вопросов читателю следует обратиться к монографиям и обзорам [4-7].

Глава 1

Теорема о модах возмущений в безграничной среде

Рассмотрим эволюцию линейных (бесконечно малых) возмущений в гидродинамической среде относительно стационарного однородного течения в бесконечном пространстве. Полная система уравнений, описывающих гидродинамическую среду в неоднородном нестационарном случае, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \sigma + \mathbf{F}, \quad (1.2)$$

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) s \right] = Q - \nabla \mathbf{q} + \Phi, \quad (1.3)$$

$$\rho = \rho(p, s), \quad (1.4)$$

$$T = T(p, s), \quad (1.5)$$

где ρ , \mathbf{v} , p , T и s — плотность, скорость, давление, температура и удельная энтропия (на единицу массы) рассматриваемой среды, соответственно. Здесь \mathbf{F} и Q — объемные сила и тепловыделение, $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ — тепловой поток

(λ — теплопроводность), σ — тензор вязких напряжений, для которого имеем

$$\nabla\sigma = \mu \left(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \mathbf{v}) \right).$$

При этом μ — сдвиговая динамическая вязкость. Входящая в уравнение (1.3) диссипативная функция Φ равна

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2.$$

Уравнения (1.4) и (1.5) — термодинамические соотношения, которые зависят от свойств рассматриваемой среды и предполагают наличие локального термодинамического равновесия. Именно в этом случае температура и плотность среды могут быть выражены через независимые термодинамические параметры — давление и энтропию — алгебраическими соотношениями.

Рассмотрим стационарное однородное течение, то есть течение, в котором все характеристики не зависят от времени и при перемещении в пространстве. Исследуем вопрос о том, как ведут себя возмущения относительно данного состояния. Для этого на все параметры системы наложим возмущения $f_1(\mathbf{r}, t)$, зависящие явным образом от пространственных переменных и времени, и проследим за их эволюцией. При этом будем предполагать, что все возмущения малы по сравнению со стационарными значениями параметров. Это позволяет существенно упростить задачу, сделав ее линейной.

Невозмущенные характеристики системы описываются системой уравнений (1.1) — (1.5), из которой исключены все члены, содержащие временные и пространственные производные. Уравнения для возмущений получаются из системы (1.1) — (1.5) при ее линеаризации. В системе координат, движущейся вместе с невозмущенной средой, они

имеют вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho \nabla \mathbf{v}_1 = 0, \quad (1.6)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \nabla \sigma_1 + \mathbf{F}_1, \quad (1.7)$$

$$\rho T \frac{\partial s_1}{\partial t} = Q_1 - \nabla \mathbf{q}_1, \quad (1.8)$$

$$\rho_1 = \rho_1(p_1, s_1), \quad (1.9)$$

$$T_1 = T_1(p_1, s_1). \quad (1.10)$$

Здесь обозначения без индексов относятся к невозмущенным характеристикам, а с нижним индексом “1” — к возмущениям. Возмущением диссипативной функции и другими нелинейными членами в полученной системе (1.6) – (1.10) пренебрежено.

Найдем термодинамические соотношения (1.9) и (1.10) в явном виде. Пользуясь малостью возмущений, их можно переписать как

$$\rho_1 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s p_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p s_1,$$

$$T_1 = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s p_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p s_1.$$

Стандартные выражения для квадрата изозетропической скорости звука, изобарического коэффициента теплового расширения и удельной (на единицу массы) теплоемкости при постоянном давлении имеют вид

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p.$$

Из выражения для дифференциала внутренней энергии E (одна из форм записи закона сохранения энергии)

$$dE = Tds - pdV, \quad V = \frac{1}{\rho}$$

следует аналогичное выражение для энтальпии $w = E + pV$

$$dw = Tds + Vdp$$

и соотношение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial p} = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p.$$

При учете последнего соотношения и выражений для a^2 , β и c_p термодинамические соотношения сводятся к

$$\rho_1 = \frac{p_1}{a^2} - \rho\beta \frac{T}{c_p} s_1,$$

$$T_1 = \frac{\beta T}{c_p \rho} p_1 + \frac{T}{c_p} s_1.$$

Переписывая его в безразмерных величинах

$$\rho' = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad T' = \frac{T_1}{T}, \quad p' = \frac{p_1}{\rho a^2}, \quad s' = \frac{s_1}{c_p},$$

получаем

$$\rho' = p' - \beta T s', \quad T' = \frac{\beta a^2}{c_p} p' + s'.$$

Будем рассматривать идеальный газ, уравнение состояния которого можно записать в виде $p = \rho RT$, где R — газовая постоянная. Тогда $a^2 = \gamma RT$ и $\beta = T^{-1}$. Здесь $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты и c_v — теплоемкость при постоянном объеме. Учитывая эти соотношения и соотношение $c_p - c_v = R$, получаем для термодинамических соотношений

$$\rho' = p' - s', \quad T' = (\gamma - 1)p' + s'. \quad (1.11)$$

Полная система уравнений, описывающая эволюцию возмущений в рассматриваемой среде в безразмерном виде (за исключением возмущения скорости), записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_1 = 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -a^2 \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v}_1 + \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \mathbf{v}_1) + \frac{\mathbf{F}_1}{\rho}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = \frac{Q'}{\tau_{th}} + \chi \Delta T', \quad (1.14)$$

$$\rho' = p' - s', \quad (1.15)$$

$$T' = (\gamma - 1)p' + s'. \quad (1.16)$$

Здесь ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность и $Q' = Q_1/Q$, а характерное время нагрева среды определяется соотношением

$$\frac{1}{\tau_{th}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{Q}{p}.$$

В дальнейшем для простоты будем полагать число Прандтля $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ равным $3/4$. Как будет видно из дальнейшего, это не очень важно, но зато несколько упростит выкладки.

Введем завихренность $\Omega = \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ и применим операцию $\nabla \times$ (взятие ротора) к уравнению движения (уравнение (1.13)). В результате получим

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial t} = \nu \Delta \Omega_1 + \frac{\nabla \times \mathbf{F}_1}{\rho}. \quad (1.17)$$

Подставляя T' из соотношения (1.16) в (1.14), получим

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = \chi \Delta s' + (\gamma - 1) \chi \Delta p' + \frac{Q'}{\tau_{th}}. \quad (1.18)$$

Возьмем дивергенцию от уравнения (1.13) и, выражая $\nabla \mathbf{v}_1$ из (1.12), получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{4}{3}\nu\Delta\right)\left(-\frac{\partial\rho'}{\partial t}\right) + a^2\Delta p' = \frac{\nabla\mathbf{F}_1}{\rho}. \quad (1.19)$$

Заменяя в последнем уравнении $4/3\nu$ на χ и подставляя в него ρ' из (1.15) и $\frac{\partial s'}{\partial t}$ из (1.18), окончательно получаем

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a^2\Delta p' = \gamma\chi\Delta\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q'}{\tau_{th}}\right) - \frac{\nabla\mathbf{F}_1}{\rho}. \quad (1.20)$$

В общем случае уравнения (1.17), (1.18) и (1.20) описывают рождение, эволюцию и диссипацию возмущений в рассматриваемой среде. Если нет объемных источников возмущений ($\mathbf{F}_1 = 0, Q' = 0$), то это просто эволюция начальных возмущений.

Уравнение (1.17) описывает рождение, перенос и диссипацию слабых флуктуаций завихренности в вязком газе. Возмущения завихренности не влияют на давление и энтропию в однородной среде (в линейном приближении). Эти возмущения создаются только непотенциальными силами, для которых $\nabla \times \mathbf{F}_1 \neq 0$. Характерное время их затухания — l^2/ν , где l — характерный пространственный масштаб неоднородности.

Уравнение (1.20) описывает генерацию, распространение и затухание акустических волн (волн давления) в вязкой и теплопроводной среде. Скорость их распространения — a , а затухание мало. Это следует из отношения диссипативного члена в уравнении (1.20) (первый член в правой части уравнения) к первому члену в левой части, которое по порядку величины равно

$$\frac{\chi t}{l^2} \sim \frac{\lambda v_{th}}{la} \sim \frac{\lambda}{l} \ll 1,$$

здесь t – характерное время (период колебаний) возмущений, λ – длина пробега частиц и v_{th} – тепловая скорость частиц. Приведенное выше неравенство выполняется практически всегда. Исключение составляет только глубокий ультразвук (с частотой $\sim 10^9$ Гц для воздуха), для описания которого уже становится несправедливым сам гидродинамический подход. Поэтому диссипативным членом можно пренебречь при типичных пространственных масштабах неоднородности. Раскачка акустических возмущений возможна при переменном подводе тепла ($Q' \neq 0$) и при воздействии сил, для которых $\nabla F_1 \neq 0$.

В уравнение (1.18) входит перекрестный член, описывающий диссипацию акустических колебаний (второй член в правой части уравнения). Но при $\lambda \ll l$ им можно пренебречь, и тогда уравнения (1.17), (1.18) и (1.20) полностью расщепляются, то есть они описывают независимые моды колебаний. При этом уравнение (1.18) описывает энтропийные возмущения, возбуждаемые переменным теплоподводом ($Q' \neq 0$) и затухающие за счет теплопроводности с характерным временем l^2/χ .

В пренебрежении диссипативными процессами и при $F_1 = 0$ и $Q' = 0$ начальные возмущения завихренности и энтропии становятся “замороженными”, поскольку в этом случае $\frac{\partial \Omega_1}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial s'}{\partial t} = 0$. Для движущегося с постоянной скоростью газа снос этих возмущений создает неоднородность Ω_1 и s' , то есть “волны” завихренности и энтропии. В отличие от них акустические колебания распространяются относительно газа (это настоящие волны), а поток только увеличивает или уменьшает их скорость.

Итак, выше была доказана теорема о расщеплении полного возмущения на три независимые моды – завихренности (иногда ее называют гидродинамической), энтропийную (другое название – тепловая) и акустическую (звуковая). При доказательстве явно или неявно использовались

следующие предположения:

- а) стационарное состояние – однородное;
- б) невозмущенная среда покоится или движется с постоянной скоростью;
- в) уравнение состояния идеального газа;
- г) $Pr = \frac{3}{4}$;
- д) источники возмущений объемных сил и теплоподвода являются независимыми;
- е) пространство безгранично.

Условие г) не является принципиальным, поскольку, как это легко видеть из выкладок, при произвольном числе Прандтля в уравнениях появятся только дополнительные диссипативные члены порядка $\sim \lambda/l \ll 1$. Нарушение других условий, строго говоря, должно приводить к нарушению теоремы. Однако даже и в этом случае часто можно разделить задачи о колебаниях завихренности в несжимаемой среде (гидродинамическая мода), задачи, где существенны волны сжимаемости (задачи об акустических колебаниях) и задачи о тепловых структурах, в которых можно не учитывать движения среды. Физической причиной для расщепления на моды в рассматриваемом случае является существенное (на порядки величины) различие между характерными временами развития возмущений в различных модах. Обычно время развития акустических колебаний существенно меньше времени развития энтропийных возмущений, которые в свою очередь значительно меньше соответствующей величины для возмущений завихренности.

Глава 2

Методы решения задач линейной устойчивости

2.1. Метод элементарных волновых решений

Рассмотрим задачу линейной устойчивости гидродинамической системы, которая сводится к исследованию поведения во времени малых колебаний системы, описываемых линейными уравнениями и граничными условиями

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{L}\mathbf{f}, \quad \mathbf{L}_S \mathbf{f} = 0,$$

где \mathbf{f} — вектор, описывающий состояние системы. В задачах устойчивости стационарных состояний эти уравнения инвариантны относительно сдвига времени, так как здесь t — циклическая координата. Одним из главных методов решения задач линейной устойчивости является метод элементарных волновых решений. В рамках этого метода решение ищется в виде

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r})e^{\lambda t}.$$

При этом дифференцирование по времени заменяется умножением на величину λ , которая в общем случае может быть комплексной, а задача сводится к нахождению решений уравнений

$$\lambda \mathbf{f} = \mathbf{L} \mathbf{f}, \quad \mathbf{L}_S \mathbf{f} = 0.$$

Полученная система линейных уравнений имеет нетривиальные решения только при определенных значениях λ_k , образующих спектр собственных значений задачи. Каждому из этих значений соответствует своя собственная функция $\mathbf{f}_k(\mathbf{r})$, определяющая распределение амплитуды возмущений по координатам. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к краевой задаче на собственные значения.

Собственных значений и собственных функций бесконечно много. Если они образуют полную систему функций, и спектр собственных значений дискретный, то решение исходной нестационарной системы уравнений можно представить в виде

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbf{f}_k(\mathbf{r}) e^{\lambda_k t}.$$

Если все собственные значения задачи имеют отрицательную действительную часть, то есть $\text{Re} \lambda_k < 0$, то любые возмущения затухают со временем, и стационарное состояние системы устойчиво. Если же имеется хотя бы один номер k , для которого $\text{Re} \lambda_k > 0$, то состояние системы является неустойчивым, и возмущения могут экспоненциально нарастать во времени. Если при этом $\text{Im} \lambda_k = 0$, то мы имеем дело с апериодической (статической) неустойчивостью. Если же $\text{Im} \lambda_k \neq 0$, то неустойчивость является колебательной. Промежуточный случай $\text{Re} \lambda_k = 0$ соответствует границе устойчивости.

В большинстве задач все пространственные координаты, кроме одной, являются циклическими. Пусть для определенности этой выделенной координатой является y . Тогда решение можно представить в виде суммы функций

$$\mathbf{f}(y)\exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)].$$

Если $\omega \neq 0$, то это решение аналогично сумме распространяющихся волн. Именно с таким представлением и связано название рассматриваемого метода исследования устойчивости системы, который сводится к определению собственных значений λ .

2.2. Метод Галеркина

Существует ряд методов нахождения собственных значений краевых задач, которые основаны на разложении решения в ряд по полной системе функций. Одним из таких приближенных методов является метод Галеркина. Рассмотрим его применительно к решению системы однородных уравнений

$$\mathbf{L}\mathbf{f} = \lambda\mathbf{f} \tag{2.1}$$

с граничным условием

$$\mathbf{L}_S\mathbf{f} = 0.$$

Выберем полную ортонормированную систему функций φ_k , которые удовлетворяют граничным условиям

$$\mathbf{L}_S\varphi_k = 0$$

и будем искать решение задачи в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \sum_k \mathbf{a}_k \varphi_k(\mathbf{r}). \tag{2.2}$$

Подставляя разложения (2.2) в (2.1) и домножая обе части этого уравнения на $\langle \varphi_m |$, после интегрирования по \mathbf{r} получаем

$$\lambda \mathbf{a}_m = \sum_k \mathbf{a}_k \langle \varphi_m | \mathbf{L} | \varphi_k \rangle, \quad (2.3)$$

где

$$\langle \varphi_m | \mathbf{L} | \varphi_k \rangle = \int \varphi_m(\mathbf{r}) \mathbf{L} \varphi_k(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

и

$$\langle \varphi_m | \varphi_k \rangle = \delta_{mk}.$$

(Здесь δ_{mk} — символ Кронеккера.) Бесконечная система однородных (относительно \mathbf{a}_k) алгебраических уравнений (2.3) имеет нетривиальные решения если только детерминант системы равен нулю:

$$\det (\langle \varphi_m | \mathbf{L} | \varphi_k \rangle - \lambda \delta_{mk}) = 0. \quad (2.4)$$

Это уравнение и определяет спектр собственных значений λ . Но система уравнений (2.3) бесконечна. В реальности ее всегда обрывают и заменяют на конечную. Вопрос о том, сколько уравнений здесь надо учесть, зависит от конкретной задачи и от выбора системы функций φ_k . При удачном выборе может оказаться достаточно сохранить всего несколько уравнений.

2.3. Метод Лапласа

Вопрос об устойчивости системы в широком смысле — это вопрос о том, растет ли со временем начальное возмущение или нет. Поэтому более строгий подход при исследовании устойчивости системы — решение задачи с начальными условиями. Кроме того, рассмотренный выше метод элементарных волновых решений не подходит в случае сингулярных уравнений или если спектр собственных значений

λ является непрерывным. В таких случаях для решения задач устойчивости становятся эффективными интегральные преобразования, которые позволяют учесть и начальные условия. Одним из таких преобразований является преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа применимо для функций $f(t)$ таких, что $f(t < 0) = 0$ и удовлетворяющих условию ограниченности роста

$$\int_0^{\infty} |f(t)|e^{-ct} dt < \infty,$$

где c – некоторое положительное число.

Преобразование Лапласа определяется формулой

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Функция $F(p)$ от комплексной переменной p называется изображением по Лапласу функции-оригинала $f(t)$. При этом функция $F(p)$ отражает начальные данные для функции $f(t)$. Обратный переход от $F(p)$ к $f(t)$ осуществляется по следующей формуле:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt} dp.$$

Поясним метод Лапласа на примере исследования системы

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{L}\mathbf{f} \quad (2.5)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{f}(t = 0) = \mathbf{f}_0.$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим сторонам уравнения (2.5) и учитывая начальные условия, получаем

$$p\mathbf{F}(p) - \mathbf{L}\mathbf{F}(p) = \mathbf{f}_0.$$

Решение этого неоднородного векторного уравнения позволяет найти $\mathbf{F}(p)$. Используя обратное преобразование, получаем искомое решение. Однако рассматриваемый метод достаточно громоздок и позволяет просто найти функцию-оригинал по ее изображению только для определенного вида функции-изображения. Поэтому гораздо большее распространение получил метод волновых решений, позволяющий давать правильный ответ относительно линейной устойчивости для большинства гидродинамических задач.

2.4. Энергетический метод

Энергетический метод исследования любой динамической системы на устойчивость основан на рассмотрении эволюции во времени полной энергии для малых произвольных возмущений, в том числе и тех, что не удовлетворяют полной системе уравнений и граничным условиям. Поэтому энергетический метод может дать лишь достаточные условия устойчивости системы. Его достоинством является возможность выявить физический смысл источников усиления и затухания колебаний без решения исходной, обычно достаточно сложной, системы уравнений. (В задачах гидродинамики — это уравнения в частных производных.) “Пробные” возмущения здесь обычно выбираются из физических соображений.

Продемонстрируем энергетический метод на примере исследования устойчивости акустических колебаний сжимаемого газа в фиксированном объеме V . Полная энергия акустических колебаний состоит из кинетической энергии и потенциальной. Кинетическая энергия колебаний на единицу объема равна $E_k = \rho v_1^2/2$. Дифференциал потенциальной энергии на единицу массы равен

$$d\epsilon_p = -p_1 dV_1 = -p_1 d(1/\rho)_1 = \frac{p_1}{\rho^2} d\rho_1,$$

где p_1 и ρ_1 – избыточные давление и плотность газа, dV_1 – изменение удельного объема $V = 1/\rho$ в колебаниях. Аналогичная величина на единицу объема равна

$$dE_p = \rho d\epsilon \frac{p_1 dp_1}{\rho a^2},$$

а для потенциальной энергии колебаний получаем

$$E_p = \frac{p_1^2}{2\rho a^2} = \frac{\rho a^2}{2} (p')^2.$$

Здесь пренебрежено членами, пропорциональными первой степени возмущений, поскольку соответствующее изменение энергии связано с изменением количества вещества в единице объема. В выражении для полной энергии, получаемой при интегрировании по всему объему, эти члены выпадают из-за сохранения полного количества вещества в замкнутом объеме.

Полная энергия колебаний равна интегралу от суммы потенциальной и кинетической энергии по всему фиксированному объему

$$E = \int_V \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \frac{\rho a^2}{2} (p')^2 \right) dV.$$

Ее временная производная равна

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \left(\rho v_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho a^2 p' \frac{\partial p'}{\partial t} \right) dV. \quad (2.6)$$

Выражения для производных $\frac{\partial v_1}{\partial t}$ и $\frac{\partial p'}{\partial t}$ можно получить, пользуясь уравнениями (1.12) – (1.15).

Энергетический метод состоит в определении знака $\frac{dE}{dt}$ без вычисления пространственного распределения амплитуды колебаний. Если

$$\frac{dE}{dt} < 0,$$

то энергия, запасенная в колебаниях, уменьшается со временем, то есть колебания затухают. В противном случае система может быть неустойчивой. Анализ выражения (2.6) позволяет определить области устойчивости и неустойчивости для акустических колебаний в сжимаемой среде. Этот вопрос будет рассмотрен подробно в главе 7.

Глава 3

Устойчивость плоскопараллельных течений

Плоскопараллельным называется течение, в котором скорость в любой точке пространства имеет одно и то же направление. Рассмотрим устойчивость такого течения (моду завихренности), считая для простоты, что оно бесконечно в направлении движения, то есть все характеристики течения меняются только в поперечном направлении. Строго говоря, плоское стационарное течение может иметь только квадратичный (задача Пуазейля) или линейный (пограничный слой) профиль скорости. Однако многие течения с малым изменением скорости вдоль потока также приближенно можно отнести к этому классу течений. При этом стационарный профиль такого течения может быть любым, а градиент давления в поперечном направлении пренебрежимо мал. Течения такого типа можно встретить в плоских каналах и пограничном слое около пластины.

Будем считать среду несжимаемой. Это справедливо, если числа Маха и Струхала значительно меньше единицы:

$$M = \frac{v}{a} \ll 1, \quad Sh = \frac{\omega l}{a} \ll 1,$$

где v – характерная скорость течения, a – скорость звука,

ω и l – характерные частота и размер изменения параметров системы. Рассматривая устойчивость стационарного течения, будем исследовать эволюцию во времени возмущений скорости и давления

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{r}), \quad p_1(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}, t) - p_0.$$

Здесь \mathbf{U} и p_0 – невозмущенные значения скорости и давления в среде (характеристики стационарного течения). Пусть невозмущенное течение направлено вдоль оси “ x ”. Тогда вектора невозмущенной скорости и ее возмущения имеют компоненты $\mathbf{U}(U(z), 0, 0)$ и $\mathbf{v}_1(u_1, v_1, w_1)$. Линеаризованные уравнения непрерывности и движения имеют вид

$$\nabla \mathbf{v}_1 = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_1. \quad (3.2)$$

Итак, рассматривается течение, бесконечное по осям x и y и ограниченное по оси z . Граничные условия запишем следующим образом:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0$$

при

$$z = z_1, z = z_2.$$

Они соответствуют стандартному условию для вязкой жидкости на жесткой стенке для течения в канале (конечные z_1 и z_2). Если это течение в пограничном слое на пластине, то z_2 – бесконечное, и здесь возмущения также должны стремиться к нулю.

Для удобства в дальнейшем (до конца этого раздела) переобозначим $\mathbf{v}_1(u_1, v_1, w_1)$ через $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$. Тогда при

учете плоскопараллельности невозмущенного течения уравнения (3.1) и (3.2) переписываются в виде

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_z \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (3.4)$$

Применим к последнему уравнению операцию двойного ротора и возьмем z -компоненту от полученного векторного уравнения (операция $[\nabla \times (\nabla \times \dots)]_z$). Тогда при использовании стандартных формул векторной алгебры и уравнения (3.3) получим следующие преобразования для каждого из членов уравнения (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &\longrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z, \\ U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} &\longrightarrow -\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} - U \frac{\partial}{\partial x} \Delta v_z, \\ v_z \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} &\longrightarrow \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \\ \frac{\nabla p_1}{\rho} &\longrightarrow 0, \\ \nu \Delta \mathbf{v} &\longrightarrow -\nu \Delta \Delta v_z. \end{aligned}$$

В результате получается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta v - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nu \Delta \Delta v, \quad (3.5)$$

где для краткости нижний индекс у v опущен. В этом уравнении переменные t , x и y – циклические, то есть коэффициенты уравнения не зависят от них. Поэтому здесь можно использовать метод элементарных волновых решений и искать решение в виде

$$v = v(z) \exp(-i\omega t + ik_1 x + ik_2 y), \quad (3.6)$$

где $v(z)$, как и аналогичные величины для возмущений скорости по другим осям, строго говоря, — комплексные величины. При этом “комплексность” описывает тот факт, что различные компоненты возмущения скорости могут колебаться не в фазе друг с другом. Положим частоту колебаний равной $\omega = k_1 c$, где $c = c_r + i c_i$ — комплексная фазовая скорость распространения возмущений вдоль оси x . Если $c_i > 0$, то возмущения нарастают со временем, то есть должна иметь место неустойчивость. В противном случае, если $c_i < 0$, то система должна быть устойчивой.

При подстановке (3.6) в (3.5) производные заменяются умножением:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i k_1 c, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow i k_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow i k_2.$$

Для производной по z введем обозначение $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dz} \equiv D$. В таких обозначениях получим для лапласиана $\Delta = D^2 - k^2$, где $k^2 = k_1^2 + k_2^2$. В итоге уравнение (3.5) сводится к так называемому уравнению Орра-Зоммерфельда

$$(U - c)(D^2 - k^2)v - vU'' = \frac{\nu}{i k_1} (D^2 - k^2)^2 v, \quad (3.7)$$

где $U'' \equiv D^2 U$. Напомним, что это уравнение для поперечной составляющей возмущения скорости плоскопараллельного течения. В результате задача об устойчивости такого течения свелась к краевой задаче на собственные значения для обыкновенного однородного дифференциального уравнения четвертого порядка.

Используем это уравнение, чтобы доказать ряд важных теорем.

Опыт показывает, что при превышении числа Рейнольдса Re некоторой критической величины ламинарное течение становится турбулентным. Важно понять, как происходит этот переход. Частично прояснить этот вопрос может теорема Сквайра.

3.1. Теорема Сквайра

При увеличении числа Re в плоскопараллельном течении сначала неустойчивыми становятся двумерные плоские колебания, и лишь потом — трехмерные.

Докажем теорему Сквайра, исходя из уравнения Орра-Зоммерфельда. Члены этого уравнения имеют размерность квадрата скорости, деленного на квадрат времени. Приведем его к безразмерному виду, домножая обе части уравнения на квадрат отношения характерной длины рассматриваемой системы к характерной скорости задачи. Полученное уравнение для трехмерных возмущений запишется в виде

$$(U - c)(D^2 - k^2)v - vU'' = \frac{1}{ik_1 Re} (D^2 - k^2)^2 v. \quad (3.8)$$

Для двумерных колебаний уравнение сохранит тот же вид, но при этом будет справедливым равенство $k_2 = 0$, то есть $k_1 = k$. И в двумерном, и в трехмерном случае решение уравнения (3.8) будет определяться параметром $k_1 Re = \sqrt{k^2 - k_2^2} Re$. Вводя критические (соответствующие появлению неустойчивости ламинарного течения) числа Рейнольдса для двумерных (Re_2^*) и трехмерных (Re_3^*) возмущений, этот параметр можно переписать в виде

$$\sqrt{k^2 - k_2^2} Re_3^* = k Re_2^*,$$

то есть

$$\frac{Re_2^*}{Re_3^*} = \frac{\sqrt{k^2 - k_2^2}}{k} < 1.$$

Теорема доказана. Отсюда следует важное утверждение о том, что при определении границы устойчивости течения достаточно рассмотреть более простые двумерные колебания. Это существенно упрощает задачу исследования устойчивости плоскопараллельных течений.

Докажем еще две теоремы, которые относятся к случаю больших чисел Re , когда неустойчивость заведомо имеет место, а в уравнении Орра – Зоммерфельда можно пренебречь вязкостью. В результате оно существенно упрощается – становится уравнением второго порядка (вместо четвертого!). Это уравнение можно записать в виде

$$(D^2 - k^2)v - \frac{vU''}{U - c} = 0 \quad (3.9)$$

с граничными условиями

$$v(z_1) = v(z_2) = 0.$$

3.2. Первая теорема Рэлея

Если плоскопараллельное течение неустойчиво, то его профиль имеет точку перегиба ($U'' = 0$).

Обратное неверно, то есть это необходимое условие устойчивости. Для доказательства этой теоремы домножим уравнение (3.9) на v^* и проинтегрируем его по z от z_1 до z_2 . При этом учтем, что для рассматриваемых граничных условий

$$\int_{z_1}^{z_2} v^* D^2 v dz = \int_{z_1}^{z_2} v^* d(Dv) = - \int_{z_1}^{z_2} |Dv|^2 dz.$$

В результате получаем

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(|Dv|^2 + k^2 |v|^2 + \frac{|v|^2 U''}{U - c} \right) dz = 0.$$

Мнимая часть этого комплексного уравнения записывается в виде

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{c_i U''}{|U - c|^2} dz = 0,$$

где c_i — постоянная величина, которая при наличии неустойчивости больше нуля. Вынося ее из последнего интеграла, получаем, что из равенства этого интеграла нулю следует знакопеременность U'' в интервале (z_1, z_2) . Теорема доказана.

На первый взгляд кажется, что весь вывод справедлив и в случае $c_i < 0$, когда течение устойчиво, и любые возмущения затухают. На самом деле это не так, поскольку затухание обычно вызвано вязкостью, которой было пренебрежено при доказательстве теоремы. Поэтому корректное рассмотрение этого случая должно основываться на рассмотрении полного уравнения Орра–Зоммерфельда с учетом вязкости.

3.3. Вторая теорема Рэлея

При наличии возмущений фазовая скорость распространения волн превышает минимальную скорость течения, но меньше его максимальной скорости.

Для доказательства введем вспомогательную комплексную функцию

$$G = \frac{v}{U - c}.$$

Тогда ее производная (по z) равна

$$G' = \frac{v'(U - c) - vU'}{(U - c)^2}$$

и

$$\left[G'(U - c)^2 \right]' = v''(U - c) - vU''.$$

Выражая $v''(U - c)$ из уравнения (4.9) (напомним, что $v'' \equiv D^2 v$) и v — через функцию G , получаем

$$\left[G'(U - c)^2 \right]' = k^2 G(U - c)^2. \quad (3.10)$$

Граничные условия для G записываются в виде

$$G(z_1) = G(z_2) = 0.$$

Домножая обе части уравнения (3.10) на G^* и интегрируя по z от z_1 до z_2 , получаем (после взятия интеграла в левой части уравнения по частям)

$$\int_{z_1}^{z_2} (U - c)^2 \left(|G'|^2 + k^2 |G|^2 \right) dz = 0.$$

Мнимая часть этого комплексного уравнения записывается в виде

$$\int_{z_1}^{z_2} c_i (U - c_r) \left(|G'|^2 + k^2 |G|^2 \right) dz = 0.$$

Учитывая, что положительная величина c_i не зависит от Z , получаем, что $(U - c)$ – знакопеременная функция от z . Теорема доказана.

Из теоремы следует, что в рассматриваемом случае у течения всегда есть слой резонанса волны с течением, в котором $U \approx c_r$. В этом слое используемое укороченное уравнение Орра – Зоммерфельда не применимо, и здесь надо использовать полное уравнение, учитывающее вязкость среды. Естественно, это относится и к слоям около стенок, где скорость обращается в нуль.

Глава 4

Волны завихренности и энтропии в неоднородных средах

В главе 2 было показано, что в однородной среде возмущения завихренности могут сноситься потоком, а их движение относительно потока невозможно. Ситуация меняется для неоднородных потоков, в которых имеется градиент скорости. Рассмотрим это на примере простой модели, предполагая существование разрыва в распределении характеристик среды.

Исследуем на устойчивость плоскопараллельный поток несжимаемой среды с резким изменением скорости и плотности среды поперек движения потока. Если длины возбуждаемых волн значительно больше толщины переходного слоя, то можно ввести понятие скачка, как это изображено на рисунке 4.1. Будем считать, что у нас есть бесконечное течение в направлении оси x . Говорят, что в плоскости $y = 0$ имеется тангенциальный разрыв, если скорости в верхней и нижней полуплоскости однородны и не равны друг другу ($U_1 \neq U_2$). Если же имеется аналогичное скачкообразное распределение плотности среды ($\rho_1 \neq \rho_2$), то

говорят о контактном разрыве.

Рассмотрим устойчивость такой среды, если она находится в поле силы тяжести. При этом пренебрежем вязкостью и исследуем только двумерные возмущения, которые, согласно теореме Сквайра, развиваются раньше. Обозначая возмущения скорости в верхней и нижней полуплоскостях через $\mathbf{v}_1(u_1, v_1, 0)$ и $\mathbf{v}_2(u_2, v_2, 0)$, записываем уравнения непрерывности и движения (вдоль осей x и y) в следующем виде:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial x}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial y}, \quad (4.3)$$

где $j = 1, 2$. Здесь скорости U_1, U_2 и плотности ρ_1, ρ_2 относятся к невозмущенной среде, а p_1 и p_2 — возмущения давления в верхней и нижней полуплоскостях соответственно.

Для рассматриваемых возмущений на поверхности $y = 0$ можно записать следующие граничные условия: кинематическое условие — условие равенства смещений поверхности раздела обеих полуплоскостей (см. рис. 4.1)

$$\xi_1(x) = \xi_2(x)$$

и динамическое условие равенства сил на поверхности (с учетом силы тяжести)

$$p_1 - \rho_1 g \xi_1 = p_2 - \rho_2 g \xi_2.$$

Связь между возмущением скорости перпендикулярно поверхности при $y = 0$ и смещением поверхности раздела

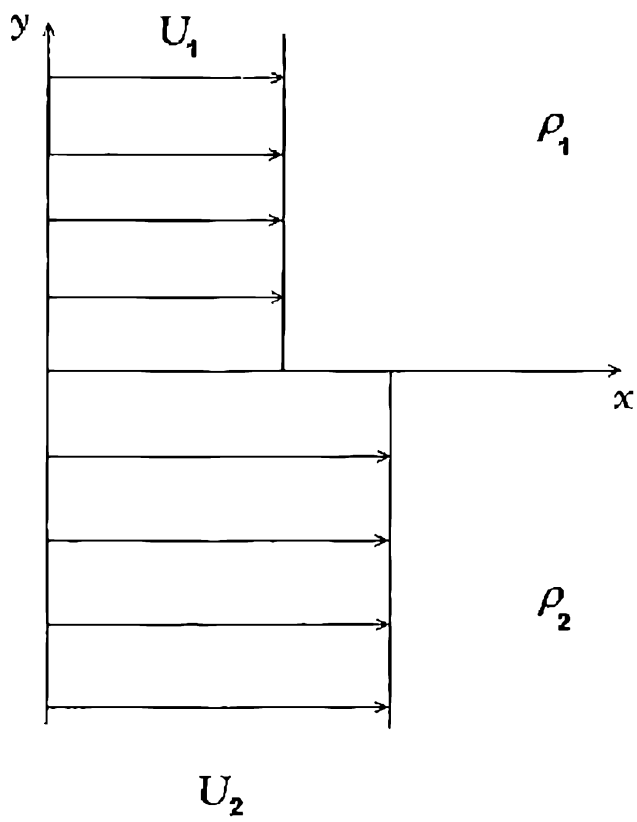


Рис. 4.1

дается уравнениями

$$v_1 = \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x}, \quad (4.4)$$

$$v_2 = \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x}. \quad (4.5)$$

При исследовании устойчивости воспользуемся методом элементарных волновых возмущений. Учитывая, что в уравнениях (4.1) – (4.3) переменные x и t – циклические, ищем решение этих уравнений в виде

$$f(x, y, t) = f(y)\exp(-ikct + ikx),$$

где $f = u, v, p$ и $c = c_r + ic_i$ – комплексная скорость распространения возмущений. При этом частные производные по t и x заменяются умножением соответственно на $(-ikc)$ и ikc , а уравнения (4.1) – (4.3) сводятся к системе уравнений

$$iku_j + \frac{\partial v_j}{\partial y} = 0, \quad (4.6)$$

$$(c - U_j)u_j = \frac{p_j}{\rho_j}, \quad (4.7)$$

$$ik(c - U_j)v_j = \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial y}. \quad (4.8)$$

Выражая с помощью этих уравнений p_j и u_j через v_j , после соответствующих подстановок получаем уравнение для этой величины

$$(c - U_j) \left(\frac{d^2 v_j}{dy^2} - k^2 v_j \right).$$

В этом уравнении значения c и k – одни и те же и для верхней, и для нижней полуплоскостей. Поэтому здесь $c \neq U_j$, и его решение имеет вид

$$v_j = A_j e^{ky} + B_j e^{-ky}.$$

Возмущения должны затухать при удалении от их источника – поверхности. Значит, при $y \rightarrow \infty$ имеем $v_1 \rightarrow 0$ и при $y \rightarrow -\infty - v_2 \rightarrow 0$. Учитывая последнее, получим

$$v_1 = Ae^{-ky}, \quad v_2 = Be^{ky}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим граничные условия в рамках используемого метода элементарных волновых решений. Связь между v_j и ξ_j (уравнения (4.4) и (4.5)) сводится к

$$v_1 = -ik(c - U_1)\xi_1, \quad v_2 = -ik(c - U_2)\xi_2.$$

При этом кинематическое и динамическое граничные условия (при $y = 0$) с учетом (4.9) записываются в виде

$$\frac{v_1}{c - U_1} = \frac{v_2}{c - U_2}, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} -\left[c - U_1 + \frac{g}{k(c - U_1)} \right] \rho_1 v_1 = \\ = \left[c - U_2 - \frac{g}{k(c - U_2)} \right] \rho_2 v_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Разделив левую и правую части уравнения (4.11) на соответствующие части уравнения (4.10), получаем квадратичное уравнение относительно c

$$(\rho_1 + \rho_2)c^2 - 2(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)c + \rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2 + \frac{g}{k}(\rho_1 - \rho_2) = 0,$$

решение которого записывается в виде

$$c = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{-\frac{\rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k(\rho_1 + \rho_2)}}. \quad (4.12)$$

Рассмотрим отдельно случаи тангенциального и контактного разрывов. В первом случае будем считать

$$\rho_1 = \rho_2 \quad U_1 \neq U_2.$$

Тогда выражение (4.12) сводится к

$$c = \frac{U_1 + U_2}{2} \pm i \frac{|U_1 - U_2|}{2}. \quad (4.13)$$

Ненулевая реальная часть c означает, что возмущения распространяются со скоростью, равной полусумме скоростей течения в верхней и нижней полуплоскостях. Важно, что все волны движутся с одной скоростью, то есть отсутствует дисперсия волн. Ненулевая мнимая часть c свидетельствует о том, что возмущения могут нарастать в процессе своего распространения. Эта неустойчивость называется неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца и встречается в струях, следах от летящего тела или на поверхности воды в виде ветровых волн.

Механизм ее развития можно объяснить следующим образом. Пусть в результате некоторого возмущения граница раздела выгнулась для определенности вверх. Тогда выше этой границы для жидкости уменьшается проходное сечение, ограниченное линиями тока. Для сохранения расхода скорость течения жидкости в этих местах должна увеличиться. Из-за сохранения интеграла Бернулли при этом должно уменьшаться давление в рассматриваемой области, что приводит к еще большему искривлению поверхности раздела.

Теперь рассмотрим контактный разрыв, полагая

$$\rho_1 \neq \rho_2, \quad U_1 = U_2.$$

Тогда имеем

$$c = \pm \sqrt{-\frac{g \rho_1 - \rho_2}{k \rho_1 + \rho_2}}. \quad (4.14)$$

Если $\rho_1 < \rho_2$, то в поле тяжести возмущения устойчивы (мнимая часть c равна нулю), и вдоль поверхности распространяются волны. Их скорость зависит от волнового числа, то есть у волн имеется дисперсия. При обратном неравенстве ($\rho_1 > \rho_2$), когда тяжелая среда находится над легкой, значение c становится чисто мнимым. То есть должна развиваться аperiodическая неустойчивость, называемая неустойчивостью Рэлея–Тейлора. Ее легко наблюдать, если в стакан с легкой жидкостью налить более тяжелую жидкость. Эта неустойчивость важна не только при изготовлении коктейлей, но и в ряде технических приложений. Например, это одно из препятствий, которые стоят на пути осуществления управляемого инерциального термоядерного синтеза, включая лазерный синтез. Здесь вместо силы тяжести выступают инерционные силы, что не влияет на механизм развития неустойчивости.

Механизм неустойчивости Рэлея–Тейлора на примере силы тяжести достаточно очевиден и может быть объяснен следующим образом. Из-за нарушения баланса между силой тяжести и архимедовой силой при возмущении поверхности более легкая жидкость всплывает, а более тяжелая – опускается на дно.

Подчеркнем, что описанные выше волны существенно анизотропны. В отличие от звуковых волн они могут двигаться только вдоль поверхности и пропадают в однородной среде.

Существуют и эффекты, затрудняющие развитие рассматриваемых неустойчивостей. Например, поверхностное натяжение препятствует увеличению площади поверхности, которое должно возникать при развитии неустойчивостей. Если жидкости электропроводящие, то магнитное поле вдоль поверхности раздела сред также оказывает стабилизирующее действие. Легко показать в рамках магнитной гидродинамики, что возмущения поверхности индуциру-

ют электрический ток вдоль поверхности, который приводит к появлению силы Ампера, препятствующей дальнейшему развитию возмущений. Это в одинаковой степени относится и к неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, и к неустойчивости Рэлея–Тейлора.

Глава 5

Конвективная неустойчивость

Логическим продолжением неустойчивости Рэлея–Тейлора, когда в поле тяжести плотность резко меняется на границе раздела, являются неустойчивости систем с плавным переходом от более плотной среды к менее плотной. Наиболее типичным примером таких задач служат конвективные неустойчивости неоднородно нагретых по вертикали слоев, вызванные взаимодействием вихревой и энтропийной мод [1,2]. Ниже рассматривается этот тип неустойчивости в электрически непроводящей жидкости, влияние внешнего магнитного поля на ее развитие в проводящей среде и близкая по своей природе тококонвективная неустойчивость.

Неустойчивость неравномерно нагретого слоя, или конвекция, возникает из-за зависимости плотности жидкости от температуры. Если более плотные слои жидкости оказываются выше, то возникает конвективная неустойчивость, механизм развития которой аналогичен механизму неустойчивости Рэлея–Тейлора.

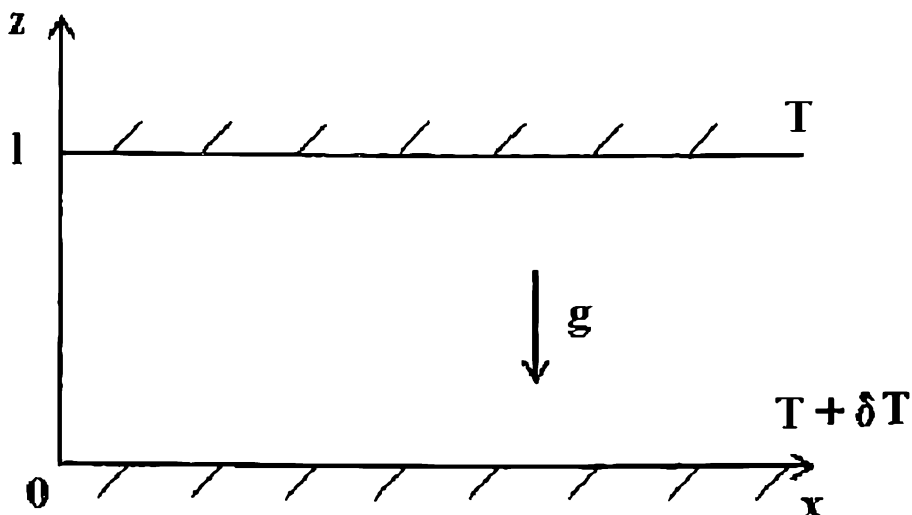


Рис. 5.1

5.1. Конвективная неустойчивость непроводящей вязкой жидкости

Пусть в поле силы тяжести находится слой газа или жидкости, подогреваемый снизу (см. рис. 5.1). Толщина слоя равна l . Направим ось z вверх против силы тяжести. Будем считать, что температура слоя на верхней поверхности ($z = l$) равна T , а на нижней ($z = 0$) — $(T + \delta T)$, то есть проекция градиента температуры на ось z равна

$$(\nabla T)_z = -\frac{\delta T}{l}.$$

С высотой меняется не только температура среды в слое, но и ее плотность ρ . Будем считать толщину слоя

достаточно малой, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\frac{\rho g l}{p} \ll \frac{\delta T}{T} \ll 1.$$

Тогда изменение плотности среды, связанное с изменением давления, мало по сравнению с изменением плотности вследствие изменения температуры. В дальнейшем будем считать $p = \text{const}$, то есть пренебрежем быстрыми акустическими колебаниями. В рамках указанных приближений возмущения плотности среды в слое однозначно связаны с возмущениями температуры:

$$\rho_1 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\beta \rho T_1,$$

где

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

– коэффициент объемного расширения. В идеальном газе $\beta = 1/T$.

Для описания устойчивости рассматриваемой гидродинамической системы воспользуемся уравнениями непрерывности, движения и энергии, записанными в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] &= -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \mathbf{v}), \\ \rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T \right] &= \lambda \Delta T + \Phi. \end{aligned}$$

Линеаризуя их относительно стационарного неподвижного состояния системы с градиентами T и ρ , получаем с использованием выражений для $(\nabla T)_z$ и ρ_1

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \nabla) \rho + \rho \nabla \mathbf{v}_1 = 0, \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 - \beta \rho g T_1 + \mu \Delta \mathbf{v}_1 + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \mathbf{v}_1), \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\delta T}{l} v_{1z} = \chi \Delta T_1, \quad (5.3)$$

где $\chi = \lambda / (\rho c_p)$ — коэффициент температуропроводности.

Оценка отношения первого и второго членов к третьему в уравнении непрерывности имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho_1}{\partial t}}{\nabla \mathbf{v}_1} &\sim \frac{\frac{1}{T} \frac{\partial T_1}{\partial t}}{\nabla \mathbf{v}_1} \sim \frac{\frac{1}{T} v_1 \frac{\delta T}{l}}{\frac{v_1}{l}} \sim \frac{\delta T}{T} \ll 1, \\ \frac{(\mathbf{v}_1 \nabla) \rho}{\rho \nabla \mathbf{v}_1} &\sim \frac{v_1 \frac{\nabla T}{T}}{\nabla \mathbf{v}_1} \sim \frac{\delta T}{T} \ll 1. \end{aligned}$$

То есть уравнение непрерывности сводится к виду

$$\nabla \mathbf{v}_1 = 0, \quad (5.4)$$

типичному для случая несжимаемой среды. Это приближение, в котором сжимаемость среды учитывается только во втором члене правой части уравнения движения (уравнение (5.2)), называется приближением Буссинеска.

Разделим уравнение (5.2) на ρ и применим к нему операцию $[\nabla \times (\nabla \dots)]_z$ с учетом уравнения (5.4). Тогда полагая $v = v_{1z}$ и вводя кинематическую вязкость $\nu = \mu / \rho$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta v = g \beta \Delta_{xy} T_1 + \nu \Delta \Delta v, \quad (5.5)$$

где

$$\Delta_{xy} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Введем безразмерные переменные

$$T' = \frac{T_1}{\delta T}, \quad v' = \frac{vl}{\chi}, \quad t' = \frac{\nu t}{l^2}, \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{l}.$$

Умножая уравнение (5.5) на $l^5/(\chi\nu)$, а уравнение (5.3) – на $l^2/(\delta T\chi)$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta v' &= \text{Ra} \Delta_{xy} T' + \Delta \Delta v', \\ \text{Pr} \frac{\partial T'}{\partial t} &= v' \Delta T'. \end{aligned}$$

Здесь введены безразмерные числа: число Рэлея

$$\text{Ra} = \frac{g\beta\delta T l^3}{\chi\nu}$$

и число Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}.$$

В полученной системе уравнений t , x и y — циклические координаты. Поэтому для решения рассматриваемой задачи устойчивости воспользуемся методом элементарных волновых решений. То есть будем искать решение в виде

$$f(\mathbf{r}, t) = f(z) \exp(-\gamma t + ik_1 x + ik_2 y).$$

Тогда взятие производных почти по всем переменным заменится соответствующим умножением

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow ik_2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \gamma,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{d}{dz} \equiv D, \quad \Delta \rightarrow D^2 - k^2,$$

а уравнения записываются в виде

$$\gamma(D^2 - k^2)v' = (D^2 - k^2)^2 v' - \text{Ra} k^2 T', \quad (5.6)$$

$$\gamma_{Pr}T' = v' + (D^2 - k^2)T'. \quad (5.7)$$

Рассмотрим условия на границах слоя для возмущений скорости и температуры, полагая эти границы свободными и идеально теплопроводными. Условия постоянства температуры и непротекания запишутся в виде

$$T'(0) = T'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0. \quad (5.8)$$

Кроме того, будем считать, что на границах выполняется условие Рэлея, согласно которому равны нулю касательные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0, \\ \sigma_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Используя условия (5.9) и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

после его дифференцирования по z , получим

$$\Delta v_z = 0.$$

В рамках метода элементарных волновых решений это уравнение сведется к

$$D^2 v = -k^2 v,$$

то есть дополнительное граничное условие можно записать в виде

$$D^2 v(0) = D^2 v(1) = 0. \quad (5.10)$$

В итоге получаем краевую задачу на собственные значения – уравнения (5.6), (5.7) с граничными условиями – (5.8), (5.10).

Для решения этой задачи воспользуемся методом Галеркина, выбрав в качестве полной ортонормированной системы функций, по которым будем производить разложение искомых функций, систему $\sin(n\pi z)$. Граничные условия будут выполняться в этом случае автоматически. Ищем решение в виде

$$v' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi z), \quad T' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi z).$$

При этом оператор D^2 сводится к умножению на $(-n^2\pi^2)$, а рассматриваемая система уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} -\gamma(n^2\pi^2 + k^2)a_n &= (n^2\pi^2 + k^2)^2 a_n - \text{Ra}k^2 b_n, \\ \gamma \text{Pr} b_n &= a_n - (n^2\pi^2 + k^2)b_n. \end{aligned}$$

Из условия того, что эта алгебраическая система имеет ненулевые решения, получаем квадратичное уравнение относительно γ , которое для $\alpha = n^2\pi^2 + k^2$ имеет вид

$$\gamma^2 \alpha \text{Pr} + \gamma(\alpha^2 \text{Pr} + \alpha^2) + \alpha^3 - k^2 \text{Ra} = 0.$$

Его решение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{\text{Pr} + 1}{2\text{Pr}}(n^2\pi^2 + k^2) \pm \\ &\sqrt{\left(\frac{\text{Pr} - 1}{2\text{Pr}}\right)^2 (n^2\pi^2 + k^2)^2 + \frac{k^2 \text{Ra}}{\text{Pr}(n^2\pi^2 + k^2)}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Если в среде более плотные слои не находятся сверху ($\delta T \leq 0$), то $\text{Ra} \leq 0$ и $\gamma \leq 0$, то есть система устойчива. Если же внизу газ подогрет и более плотные слои сверху, то $\text{Ra} > 0$ и $\gamma > 0$. В этом случае должна развиваться неустойчивость, которая имеет аperiодический характер,

так как $\text{Im } \gamma = 0$. По механизму она близка к неустойчивости Рэлея–Тейлора и связана с отсутствием баланса между силой тяжести и выталкивающей силой при возмущении среды.

Найдем границу неустойчивости, соответствующую условию $\gamma_n = 0$. Оно выполняется при

$$\text{Ra} = \frac{(n^2 \pi^2 + k^2)^3}{k^2}.$$

Минимальное число Ra , выше которого возможно развитие неустойчивости, и соответствующее волновое число для разных мод (разных значений n) имеют вид

$$\text{Ra}^* = \frac{27}{4} n^4 \pi^4, \quad k^* = \frac{\pi n}{\sqrt{2}}.$$

На рис. 5.2 изображены граничные кривые для разных мод неустойчивости в пространстве $\text{Ra}-k^2$. Видно, что при низких градиентах температуры может развиваться только первая мода. С ростом степени неоднородности появляется возможность развития и для более высоких мод.

5.2. Конвективная неустойчивость проводящей вязкой жидкости в магнитном поле

Перейдем к исследованию конвективной неустойчивости с учетом магнитного поля, которое препятствует движению жидкости. Поэтому следует ожидать стабилизации конвективной неустойчивости магнитным полем.

Рассмотрим, как и ранее, горизонтальный слой высотой l , в котором находится проводящая жидкость, внешнее магнитное поле H направлено перпендикулярно слою.

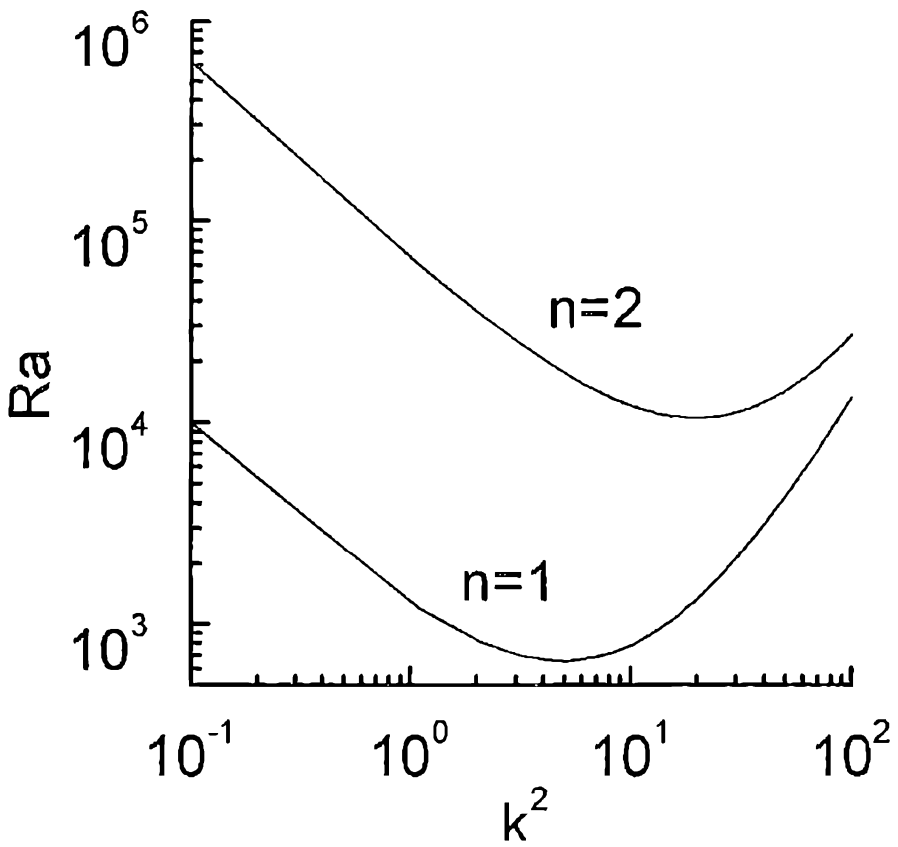


Рис. 5.2

Пусть \mathbf{v}_1 – возмущение скорости, \mathbf{h} – индуцированное магнитное поле. В стационарном состоянии жидкость покоится, а температура меняется по высоте линейно.

Система уравнений в приближении Буссинеска имеет вид [3]

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla \left(p_1 + \frac{\mathbf{H}\mathbf{h}}{4\pi} \right) + \mu \Delta \mathbf{v}_1 + \frac{H}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \mathbf{g} \rho \beta T_1, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \nu_m \Delta \mathbf{h} + (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v}_1, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla T = \chi \Delta T_1, \quad (5.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (5.15)$$

и включает уравнения движения, магнитной индукции, теплопроводности, несжимаемости и соленоидальности магнитного поля. Здесь $\nu_m = c^2/(4\pi\sigma)$ – так называемая магнитная вязкость и σ – электропроводность среды.

Применим операцию $(\nabla \times \nabla \times \dots)_z$ к уравнению движения и, повторяя выкладки по аналогии с предыдущим разделом, получаем критическое значение числа Рэлея, при котором возникает конвективная неустойчивость:

$$\text{Ra}_n(k) = \frac{n^2 \pi^2 + k^2 \ell^2}{k^2 \ell^2} \left[(n^2 \pi^2 + k^2 \ell^2)^2 + \text{Ha}^2 n^2 \pi^2 \right]. \quad (5.16)$$

Здесь

$$\text{Ha} = \sqrt{\frac{H^2 \ell^2}{4\pi \rho \nu_m \nu}}$$

— безразмерная величина, называемая числом Гартмана.

Из очевидного неравенства $\text{Ra}(n > 1) > \text{Ra}(n = 1)$ следует, что конвективная неустойчивость начинает развиваться с моды $n = 1$, для которой

$$\text{Ra}_1(k) = \frac{\pi^2 + k^2}{k^2} \left[(\pi^2 + k^2)^2 + \text{Ha}^2 \pi^2 \right].$$

Минимальное значение числа Рэлея достигается при значении волнового числа, определяемого из условия

$$\frac{d\text{Ra}_1}{dk^2} = 0. \quad (5.17)$$

При

$$\text{Ha} \gg \pi \quad k_{\min} = \frac{\text{Ha}^{1/3} \pi^{2/3}}{2^{1/6}}, \quad \text{Ra}_{\min} = \pi^2 \text{Ha}^2.$$

При $\text{Ha} \ll \pi$ получаем результат, приведенный в разделе 5.1.

Следовательно, магнитное поле стабилизирует конвективную неустойчивость горизонтального плоского слоя. Механизм стабилизации тот же, что и в случае неустойчивостей Рэлея–Тейлора и Кельвина–Гельмгольца: возмущения среды приводят к появлению электрического тока, который индуцирует магнитное поле. В результате появляется сила Ампера, препятствующая развитию возмущений.

5.3. Тококонвективная неустойчивость

В предыдущем разделе была рассмотрена конвективная неустойчивость, которая развивается вследствие неоднородности в распределении плотности вдоль силы тяжести. Инкремент неустойчивости определяется выражением (5.11). При протекании тока в магнитном поле на жидкость с током действует пондеромоторная сила $c^{-1} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$, которая может изменяться, например, из-за неоднородности проводимости. При наличии связи проводимости с флуктуациями

энтропии может возникнуть неустойчивость типа конвективной. Эта неустойчивость, которая называется токово-конвективной, развивается, если градиент проводимости направлен вдоль магнитной силы. Механизм неустойчивости, как и в случае конвекции, связан с тем, что при смещении элемента проводящей среды вдоль градиента проводимости проводимость элемента среды становится отличной от проводимости окружающей среды. Флуктуация проводимости приводит к флуктуации тока, а с ним — и к возникновению добавочной поперечной силы. Если направление этой силы совпадает с направлением смещения элемента, то возникает неустойчивость, а если противоположно смещению, то возникают колебания типа гравитационных волн. Система уравнений движения и адиабатичности в пренебрежении джоулевым тепловыделением в линейном приближении относительно возмущений сводится к

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma}, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla s_1 = 0. \quad (5.19)$$

Возмущение проводимости может определяться, например, возмущением температуры, которое в свою очередь связано с возмущением энтропии. При взаимно перпендикулярных токе и магнитном поле, когда вектор $\mathbf{j} \times \mathbf{H}$ направлен вдоль оси z , повторяя вывод из раздела 5.1, получаем инкремент по формуле (5.11), в которой надо заменить

$$g \frac{d \ln \rho}{dz} = -g\beta \frac{dT}{dz}$$

на

$$\frac{jH}{c\rho} \frac{d \ln \sigma}{dz} = \frac{jH}{\rho c} \frac{T}{c_p} \frac{d \ln \sigma}{dT} \frac{ds}{dz} \quad (5.20)$$

(рассматривается случай механического равновесия $p = \text{const}$). Очевидно, что в тококонвективной неустойчивости роль силы тяжести играет электромагнитная сила, а роль зависимости плотности от температуры — зависимость электропроводности газа от температуры. Отличие в знаках инкремента для конвективной и тококонвективной неустойчивостей связано с тем, что в конвективной неустойчивости плотность убывает с ростом температуры, а в тококонвективной электропроводность при этом возрастает.

Глава 6

Тепловые волны

Рассмотрим однородную неподвижную среду, занимающую полупространство $x > 0$. Будем на границе этой среды создавать возмущения температуры

$$T_1(t, x = 0) = A \cos \omega t$$

и проследим за их распространением вглубь среды. Для этого мы можем воспользоваться уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2},$$

где температуропроводность $\chi = \lambda/(\rho c_p)$ будем считать постоянной.

При решении таких задач удобно перейти к комплексным функциям, для которых следует выполнять только линейные операции. В этом случае для простоты не будем писать нижний индекс и будем искать решение в виде

$$T = \tilde{T} e^{-i\omega t},$$

где \tilde{T} подчиняется уже обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-i\omega \tilde{T} = \chi \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2}$$

с граничным условием

$$\tilde{T} = A.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$\tilde{T} = C_1 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}(1-i)x} + C_2 e^{\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}(1-i)x}.$$

$C_2 = 0$, так как нет физической причины для бесконечного нарастания возмущений при их распространении вдоль оси x . В итоге получаем

$$T = A e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x} e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x - \omega t\right)}.$$

Действительная часть этого выражения дает решение исходного уравнения с исходным граничным условием:

$$T_1 = A e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x - \omega t\right).$$

Экспоненциальный множитель показывает, что в рассматриваемом случае волновые возмущения должны затухать, причем длина, на которой происходит затухание, сравнима с длиной волны возмущений. Значит, тепловые возмущения в рассматриваемых условиях не могут распространяться в неподвижной однородной среде.

Теперь рассмотрим случай, когда теплопроводность среды непостоянна: $\lambda = \lambda(T)$. Обычно столкновительная теплопроводность слабо зависит от температуры. Но в ряде случаев (например, при наличии химических реакций) она может резко изменяться при нагреве. Особенно сильная температурная зависимость теплопроводности имеет место для высокотемпературного плотного газа, в котором перенос тепла связан с лучистым теплообменом.

Пусть энтропийные возмущения возникают в неоднородно нагретой среде с тепловым потоком

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T.$$

Будем рассматривать медленные колебания, когда давление среды постоянно, и колебания энтропии совпадают с колебаниями температуры. При этом в одномерном случае линеаризованное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\rho c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} = -\frac{\partial q_1}{\partial x}. \quad (6.1)$$

Возмущение теплового потока можно представить следующим образом:

$$q_1 = -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_1 = -\lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Для длинноволновых возмущений, которые из-за простоты и будем рассматривать в дальнейшем, первым членом в правой части этого уравнения можно пренебречь. Возмущения теплопроводности имеют вид

$$\lambda_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial T} T_1 = \lambda \hat{\lambda} \frac{T_1}{T},$$

где

$$\hat{\lambda} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial T} = \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \ln T}.$$

(Если $\lambda \sim T^m$, то $\hat{\lambda} = m$).

Записывая возмущения теплового потока в виде

$$q_1 = -\lambda \hat{\lambda} \frac{T_1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} = \hat{\lambda} q \frac{T_1}{T},$$

выражая с помощью этого соотношения T_1 через q_1 и подставляя его в уравнение (6.1), получим

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + u \frac{\partial q_1}{\partial x} = 0,$$

где

$$u = \frac{\hat{\lambda}q}{\rho c_p T}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q_1(x, t) = f(x - ut),$$

где f – произвольная функция. Это решение описывает возмущения, распространяющиеся вдоль (или против) теплового потока со скоростью u . Это возможно только при наличии температурной зависимости теплопроводности.

Заметим, что рассматриваемые тепловые (энтропийные) волны, как и разобранные выше волны завихренности, распространяются только в неоднородной среде, и по своему характеру они существенно анизотропны. То есть в отличие от обычных звуковых волн они могут двигаться только в определенных направлениях.

Глава 7

Термоакустическая неустойчивость тепловыделяющего газа

Рассмотрим устойчивость акустических колебаний в неподвижной неравновесной среде с внутренними источниками тепла. Это могут быть химические реакции, ядерные превращения или джоулево тепловыделение. Скорость тепловыделения Q и теплопроводность λ могут зависеть от плотности ρ и температуры T . Пусть выделяющееся в объеме тепло отводится к границе через теплопроводность, и в среде в стационарном состоянии имеются градиенты $\nabla\rho$ и ∇T , а давление во всех точках среды одно и то же. При рассмотрении акустических возмущений будем пренебрегать вязкостью, поскольку она может быть важна только для очень высоких частот.

Уравнения, описывающие малые возмущения среды в данном случае, и термодинамическое соотношение имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right) + \mathbf{v}_1 \frac{\nabla \rho}{\rho} + \nabla \mathbf{v}_1 = 0, \quad (7.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \nabla s = \frac{Q_1 - \nabla \mathbf{q}_1}{\rho T}, \quad (7.3)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{p_1}{\rho a^2} - \beta T \frac{s_1}{c_p}. \quad (7.4)$$

Из соотношения (7.4) и отсутствия градиента p в невозмущенной среде следует связь между градиентами ρ и s :

$$\frac{\nabla \rho}{\rho} = -\beta T \frac{\nabla s}{c_p}. \quad (7.5)$$

Подставляя в (7.1) ρ_1/ρ из (7.4) и $\frac{\partial s_1}{\partial t}$ из (7.3), а также учитывая соотношение (7.5), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_1}{\rho a^2} \right) + \nabla \mathbf{v}_1 = \frac{\beta}{\rho c_p} (Q_1 - \nabla \mathbf{q}_1). \quad (7.6)$$

Используем для анализа устойчивости системы энергетический метод. Домножая уравнение (7.2) скалярно на \mathbf{v}_1 , получаем временную производную от удельной (на единицу объема) кинетической энергии акустических колебаний. Аналогичным образом, домножая уравнение (7.6) на p_1 , получаем временную производную от удельной потенциальной энергии колебаний. Подставляя эти величины в выражение для временной производной от полной энергии колебаний во всем рассматриваемом ограниченном объеме (формула (2.6)), получим

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \int \nabla (p_1 \mathbf{v}_1) dV + \int \frac{\beta}{\rho c_p} (Q_1 - \nabla \mathbf{q}_1) dV. \quad (7.7)$$

Первый интеграл в правой части (8.7) сводится к интегралу по поверхности

$$\int p_1 \mathbf{v}_1 d\mathbf{S},$$

который обычно равен нулю. На открытой границе $p_1 = 0$, а для закрытой границы условие “непротекания” дает $v_1 dS = 0$. Учтем это и рассмотрим для простоты случай, когда возмущения теплового потока малы по сравнению с возмущениями объемного тепловыделения. В результате имеем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int \frac{\beta}{\rho c_p} p_1 Q_1 dV. \quad (7.8)$$

Критерий Рэлея. В тепловыделяющей среде может развиваться акустическая неустойчивость (так называемая термоакустическая неустойчивость), если рост тепловыделения сопровождается ростом давления (и наоборот). Наилучшие условия возбуждения акустических колебаний имеют место при совпадении по фазе колебаний тепловыделения и давления.

Пусть возмущения тепловыделения и давления в рассматриваемом объеме меняются со временем по гармоническому закону

$$p_1 = p_{10} \cos \omega t, \quad Q_1 = Q_{10} \cos(\omega t - \varphi),$$

и фазовый сдвиг φ не меняется по пространству. Тогда из уравнения (7.8) можно получить усредненное по периоду колебаний приращение энергии акустических колебаний за период T :

$$\delta E = \frac{T}{2} \cos \varphi \int \frac{\beta}{\rho c_p} Q_{10} p_{10} dV.$$

Отсюда следует критерий Рэлея, то есть неустойчивость развивается при $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

Физическая природа неустойчивости связана со следующей цепочкой:

$$T \uparrow \rightarrow p \uparrow \rightarrow Q \uparrow \rightarrow T \uparrow.$$

Здесь небольшое возмущение температуры при адиабатическом сжатии увеличивает давление газа, которое из-за условия Рэлея вызывает увеличение тепловыделения и, следовательно, дальнейший рост температуры. Увеличение тепловыделения с ростом давлений в химических или ядерных реакциях может быть связано, например, с ростом плотности реагирующих частиц. При этом флуктуации в среде могут привести к генерации акустических волн. Если в среду при рассматриваемых условиях звуковые волны вводятся извне, то они должны усиливаться, то есть среда может работать как усилитель.

Глава 8

Простые волны Римана

При рассмотрении акустических волн их амплитуда обычно полагается малой. В этом случае уравнения, описывающие волны, являются линейными. Их решения можно записать в виде плоской волны $f(x \pm at)$, которая перемещается со скоростью a без изменения своего профиля. В такой волне скорость v , плотность ρ и давление p являются функциями только от комбинации $x \pm at$, то есть они могут быть выражены друг через друга с помощью соотношений, не зависящих явно от x и t : $p = p(\rho)$, $v = v(\rho)$.

Если амплитуда волны не мала, то, строго говоря, эти соотношения уже не справедливы. Но оказывается, что можно найти общее решение точных уравнений движения, представляющих собой бегущую плоскую волну и являющихся обобщением решения $f(x \pm at)$. При построении такого обобщения будем исходить из требования, согласно которому для волны с произвольной амплитудой по-прежнему должно выполняться соотношение $v = v(\rho)$. Пока нет ударных волн, движение адиабатично. Полагая, что невозмущенная среда однородна, получаем постоянство энтропии по всему объему и при наличии волн, то есть должно также выполняться условие $p = p(\rho)$.

В плоской звуковой волне произвольной амплитуды, распространяющейся вдоль оси x , все характеристики среды зависят от x и t , а скорость имеет компоненту только вдоль этой оси: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(v, 0, 0)$. Для ее описания в пренебрежении процессами диссипации следует использовать одномерные уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Учитывая однозначную связь между v , ρ и p , переписываем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d(\rho v)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dv} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (8.2)$$

Пусть $\rho = \rho(x, t)$ — функция на плоскости (x, t) . Тогда полная временная производная от ρ вдоль кривой на этой плоскости, для которой $\rho = \text{const}$, имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho = 0.$$

Сравнивая это уравнение и уравнение (8.1), получим

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho = v + \rho \frac{dv}{d\rho}. \quad (8.3)$$

Аналогичным образом, производная от v вдоль кривой, для которой $v = \text{const}$, равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_v = 0.$$

Из сравнения этого уравнения и уравнения (8.2) получим

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v = v + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dv}. \quad (8.4)$$

Но v однозначно связано с ρ . Поэтому кривые $v = \text{const}$ и $p = \text{const}$ совпадают, то есть

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v.$$

В этом случае из (8.3) и (8.4) следует

$$\rho \frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dv} = \frac{a^2}{\rho} \frac{d\rho}{dv},$$

где $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$ - квадрат скорости звука. Значит,

$$\frac{dv}{d\rho} = \pm \frac{a}{\rho}$$

и

$$v = \pm \int \frac{a}{\rho} d\rho = \pm \int \frac{dp}{\rho a}. \quad (8.5)$$

Этим соотношением определяется общая связь между v , ρ и p в распространяющейся волне. (В линейном приближении данная связь выглядела бы следующим образом: $v = a_0 \rho_1 / \rho_0 = p_1 / (\rho_0 a_0)$, где $a_0 = a_0(\rho_0)$, $\rho_1 = \rho - \rho_0$ и $p_1 = p - p_0$).

Подставляя (8.5) в (8.4), получим

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v = v \pm a(v),$$

интегрирование которого дает

$$x = t[v \pm a(v)] + f(v),$$

где $f(v)$ – произвольная функция, а $a(v)$ определяется из (8.5).

Это решение для нелинейной волны было получено Риманом более ста лет назад. Здесь v (и остальные величины) неявным образом зависят от t и x , то есть задается профиль волны в каждый момент t . Для каждого конкретного значения v координата x линейно зависит от времени, то есть точка с определенным значением v движется в пространстве с некоторой постоянной скоростью. В этом смысле полученное решение представляет собой бегущую волну. Два знака соответствуют волнам, распространяющимся относительно газа в положительном и отрицательном направлениях по оси x .

Найдем $a(v)$. Для определенности будем считать, что в волне есть точка, для которой $v = 0$. Тогда (8.5) можно переписать в виде

$$dv = \frac{dp}{\rho a} = \frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{da} da. \quad (8.6)$$

В условиях адиабатичности $p \sim \rho^\gamma$ и

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}.$$

Логарифмируя обе части этого уравнения и дифференцируя его по a , получим

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\rho}{a}.$$

Подставляя это выражение в (8.6), получаем после интегрирования

$$a(v) = a_0 + \frac{\gamma-1}{2} v.$$

Таким образом, скорость движения $u = v \pm a(v)$ различна для разных точек профиля, то есть у плоской волны произвольной амплитуды нет определенной постоянной скорости волны. Здесь из-за различия в скоростях точек профиля волны этот профиль меняет со временем свою форму. На рис. 8.1 показана эволюция профиля волны, распространяющейся в положительном направлении. При этом происходит укрупнение волны, которое в конце концов должно закончиться неоднозначной зависимостью всех физических величин от x . Физически это невозможно, что указывает на возникновение разрыва (на каждой длине волны). Дальше картина усложняется. Например, возможно отражение волны от этого разрыва и так далее. В любом случае используемая в настоящем разделе модель перестает быть справедливой на ранних этапах развития разрыва, поскольку появление больших пространственных градиентов влечет за собой ускорение диссипативных процессов, которыми здесь пренебрегается. Поэтому описание дальнейшей эволюции нелинейных волн надо строить в рамках других моделей с учетом диссипации.

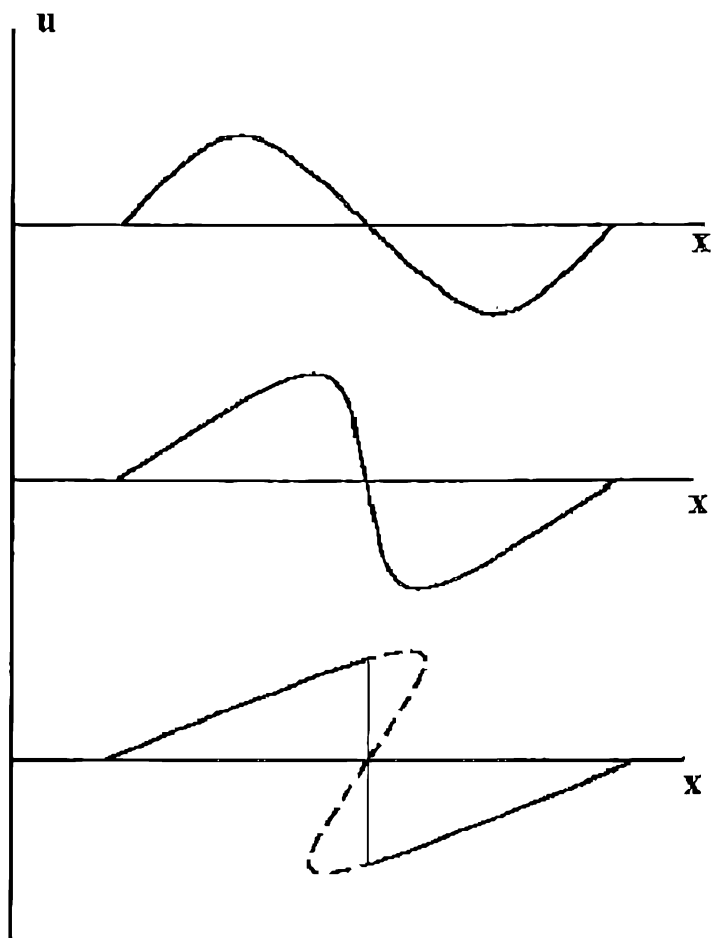


Рис. 8.1

Глава 9

Влияние диссипации на нелинейные волны

Рассмотрим задачу, изучавшуюся в предыдущей главе, но при этом учтем диссипативные процессы — вязкость и теплопроводность. Будем считать их малыми, что позволит использовать теорию возмущений.

Уравнение, описывающее одномерную волну Римана с учетом диссипативных процессов, имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right) \rho + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (9.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + V \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\lambda}{\rho T} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (9.3)$$

Как и в линейной теории устойчивости, считаем независимыми переменными давление p и энтропию s . Предполагая диссипацию малой, считаем коэффициенты переноса малыми величинами. Тогда из (9.3) следует, что изменение энтропии также является малой величиной, и уравнение (9.3) можно преобразовать, используя

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s dp + \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p ds \approx \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s dp. \quad (9.4)$$

Подставляя в уравнение непрерывности $\rho = \rho(p, s)$ с учетом (9.3), (9.4), получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\rho T} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (9.5)$$

Преобразуем термодинамические производные, используя связь между удельным объемом V и плотностью газа $\rho = V^{-1}$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s &= -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \\ &= -\frac{1}{T} \frac{\partial(p, s)}{\partial(V, s)} \frac{\partial(V, p)}{\partial(s, p)} \frac{\partial(T, s)}{\partial(p, s)} = -\frac{1}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{\partial(T, s)}{\partial(V, s)} \frac{\partial(T, V)}{\partial(T, V)} = \\ &= -\frac{T}{c_p c_v} \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \end{aligned}$$

Для идеального газа получим

$$T ds = c_v dT - p dV, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_T = -\frac{p}{T}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p},$$

и выражение в правой части (9.5) оказывается равным

$$-\frac{\lambda}{\rho T} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = (\kappa - 1)\chi, \quad (9.6)$$

где $\chi = \lambda/\rho c_p$ - коэффициент температуропроводности. Система нелинейных уравнений с учетом диссипации включает уравнения (9.2) и (9.7):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = (\kappa - 1) \chi \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (9.7)$$

При $\eta = 0$, $\chi = 0$ получаем уравнения, описывающие простую волну Римана. Поскольку диссипативные коэффициенты считаются малыми, естественно искать решение уравнений (9.2), (9.7) в виде

$$p(x, t) = p(v) + p_2(x, t), \quad (9.8)$$

$$\rho(x, t) = \rho(v) + \rho_2(x, t),$$

где $p(V)$ и $\rho(V)$ определяются теми же уравнениями, что и в простой волне Римана, а функции p_2, ρ_2 — малые второго порядка, как будет показано ниже. Будем рассматривать волны малой, но конечной амплитуды, т.е. v/a_0 является малым параметром. Таким образом,

$$v \sim \mathcal{E}; \quad \chi, \nu \sim \mathcal{E}; \quad p_2, \rho_2 \sim \mathcal{E}^2.$$

Возмущения волны, вызываемые диссипативными процессами, следует рассматривать в системе координат, движущейся со скоростью a_0 , поэтому p_2, ρ_2 удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + a_0 \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0, \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + a_0 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 0. \quad (9.10)$$

Подставим разложения (9.8), (9.7), (9.2):

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial p_2}{\partial t} + v \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) + \rho a \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_2 a \frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= (\kappa - 1)\chi\rho\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (9.11)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \rho_2\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{4}{3}\eta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (9.12)$$

Сохраним члены второго порядка малости и опустим третьего порядка, к которым относятся члены, пропорциональные ρ_2 , в этом же приближении с учетом (9.9):

$$\frac{1}{a}\left(\frac{\partial p_2}{\partial t} + v\frac{\partial p_2}{\partial x}\right) = -a_0\frac{\partial p_2}{\partial x} + a(\mathcal{E}^3).$$

Вычтем уравнения (9.11) и (9.12)

$$\begin{aligned} \rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v - a)\frac{\partial v}{\partial x}\right] - \frac{1}{a}\left[\frac{\partial p}{\partial t} + (v - a)\frac{\partial p}{\partial x}\right] + 2\frac{\partial p_2}{\partial x} = \\ = \left[\frac{4}{3}\eta - \rho\chi(\kappa - 1)\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

С учетом уравнения для простой волны Римана получим

$$p_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\eta - (\kappa - 1)\rho\chi\right]\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (9.13)$$

откуда следует, что $p_2 \sim \mathcal{E}^2$ в согласии со сделанным ранее предположением. Подставляя (9.13) в уравнение (9.12), получим

$$\frac{\partial v}{\partial x} + (v + a)\frac{\partial v}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (9.14)$$

диссипативный коэффициент μ равен

$$\mu = \frac{2}{3}\nu + \frac{\kappa - 1}{2}\chi.$$

В системе координат, движущейся со скоростью a_0 , т.е. вводя переменные

$$x' = x - a_0 t, \quad t' = t, \quad u = \frac{\kappa + 1}{2} v,$$

получаем уравнение Бюргера:

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x'} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}.$$

Для удобства записи опустим штрихи и перепишем уравнение Бюргера

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}. \quad (9.15)$$

Найдем общее решение этого уравнения. Положим

$$\varphi = \exp \left\{ -\frac{1}{2\mu} \int u dx \right\}. \quad (9.16)$$

Нетрудно проверить, что функция φ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\varphi_t = \mu \varphi_{xx}$$

с начальным условием, определяющимся профилем волны при $t = 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$. Функция Грина одномерного уравнения теплопроводности известна, поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x - x')^2}{4\mu t} - \frac{1}{2\mu} \int_0^{x'} u_0(x'') dx'' \right\} dx'. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Покажем, что уравнение Бюргера имеет интеграл движения

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx, \quad (9.18)$$

что означает сохранение площади, ограниченной функцией $u(x, t)$. Для доказательства запишем уравнение Бюргерса в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,$$

проинтегрировав которое по x , получаем (9.18).

Найдем асимптотическое решение уравнения Бюргерса при больших переменных. Определим параметр, аналогичный числу Рейнольдса:

$$R = \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \frac{I}{2\mu}. \quad (9.19)$$

Диссипативный параметр μ имеет размерность коэффициента кинематической вязкости. Введем автомодельную переменную $\xi = x/\sqrt{4\mu t}$, из (9.17) получим

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -(\xi - \xi')^2 - \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^{\xi} u_0(x') dx' \right\} d\xi'.$$

Разобьем интервал интегрирования на два $-\infty < \xi' < 0$ и $0 < \xi' < \infty$ и перейдем к пределу $t \rightarrow \infty$, в результате получим

$$\varphi(\xi) \rightarrow \varphi_{\infty}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-(\xi - \xi')^2} d\xi' + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-R} \int_0^{\infty} e^{-(\xi - \xi')^2} d\xi'.$$

Интегралы могут быть выражены через функцию ошибок

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta; \\ \Phi(\xi) &\rightarrow 1 - \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} \quad (\xi \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (9.20)$$

В результате получим асимптотику

$$\varphi_{\infty}(\xi) = 1 - \Phi(\xi)(1 - \ell^{-R}),$$

а для распределения скоростей в системе координат, связанной с движущейся волной

$$u(x, t) = -2\mu \frac{\varphi'_x}{\varphi} = \sqrt{\frac{\mu}{\pi t}} \frac{(1 - \ell^{-R}) \ell^{-\frac{x^2}{4\mu t}}}{1 - (1 - \ell^{-R}) \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}\right)},$$

Введем координату $Z = x/\sqrt{2It}$, $x^2/4\mu t = RZ^2$. Для приведенной скорости при $R \gg 1$ с учетом асимптотики (9.20) получим

$$\bar{u} = \frac{u(x, t)}{\sqrt{\mu/\pi t}} \rightarrow 2Z\sqrt{R}.$$

При этом

$$u(x, t) = \bar{u} \sqrt{\frac{\mu}{\pi t}} \rightarrow \frac{x}{t}. \quad (9.21)$$

Волна принимает треугольный профиль, показанный на рис. 9.1.

Нелинейность приводит к укрупнению фронта, а процессы диссипации, наиболее существенные в области сильных градиентов, приводят к сглаживанию резкого фронта, так что в результате получаем треугольный асимптотический профиль волны.

Рассмотрим случай, когда инвариант (9.18) является бесконечным, что возможно, например при

$$u(x \rightarrow -\infty) \rightarrow u_2, \quad u(x \rightarrow \infty) \rightarrow u_1.$$

Найдем стационарное решение уравнения Бюргерса (9.15), имеющее вид

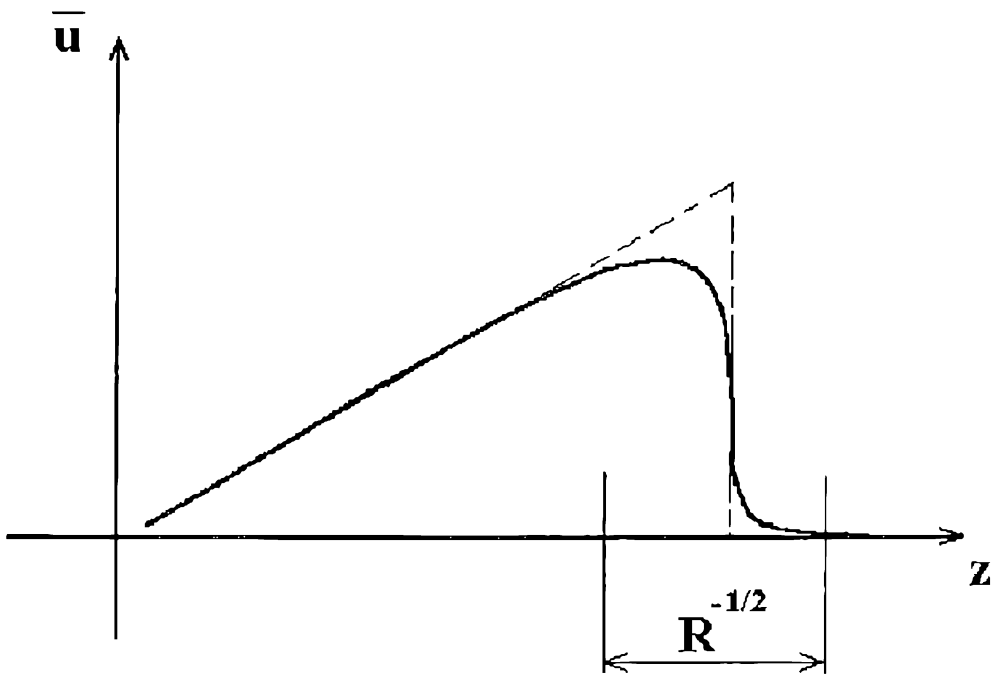


Рис. 9.1

$$u = f(x - Ut).$$

Положим $\xi = x - Ut$, т.е. рассматриваем профиль волны в системе координат, движущейся со скоростью U . Подставляя в (9.15), получаем уравнение

$$-Uu' + uu' = \mu u'',$$

которое с учетом условия $u'(\pm\infty) = 0$ имеет решение

$$C - Uu + \frac{u^2}{2} = \mu u'. \quad (9.22)$$

Используя условия $u \rightarrow u_1(x \rightarrow \infty); u \rightarrow u_2(x \rightarrow -\infty)$, находим постоянные интегрирования

$$U = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad C = \frac{u_1 u_2}{2}.$$

Тогда уравнение (9.22) имеет вид

$$(u - u_1)(u - u_2) = 2\mu u',$$

его решение

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left(\frac{(u_2 - u_1)\xi}{2\mu}\right)} \quad (9.23)$$

описывает ударную волну с шириной фронта

$$\delta = \frac{2\mu}{u_2 - u_1}.$$

Из общего решения (9.17) следует, что любой начальный профиль, для которого

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [u(-x) - u(x)] = \Delta u,$$

при больших временах переходит в ударную волну (9.23) которая схематически изображена на рис. 9.2.

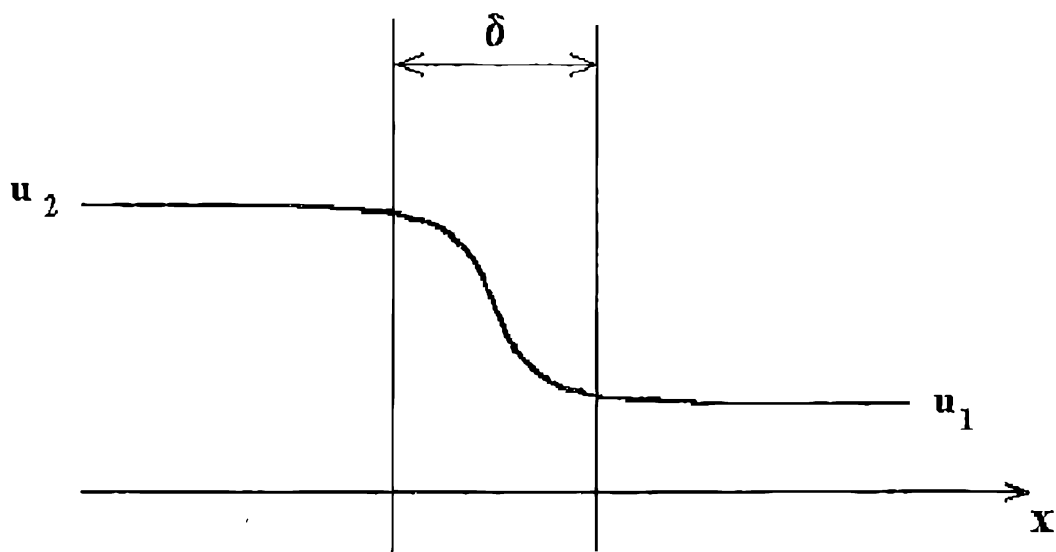


Рис. 9.2

Глава 10

Влияние дисперсии на нелинейные волны

Рассмотрим среды, где диссипация пренебрежимо мала, но имеется (хотя и слабая) вещественная дисперсия, так что дисперсионное соотношение в линейном приближении имеет вид

$$\omega = c_0 k - \beta k^3,$$

то есть фазовая скорость $\omega/k = c_0 - \beta k^2$ при $\beta > 0$ увеличивается с ростом длины волны (уменьшением волнового числа k). Такая дисперсия, когда высокочастотные гармоники отстают от низкочастотных, называется отрицательной дисперсией.

Этому дисперсионному соотношению отвечает линейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Если в нем учесть нелинейный член и перейти в систему координат, движущуюся со скоростью c_0 , то получим уравнение Кортвега-де-Вриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (10.1)$$

Оно впервые было выведено для волн на поверхности неглубокой волны (когда длина волны велика по сравнению с глубиной воды). Потом аналогичное уравнение было выведено для волн в плазме, для ангармонических колебаний в решетке твердого тела и в ряде других физических ситуаций. Таким образом, это уравнение является моделью для ряда различных по физическому содержанию задач.

Значение β может быть любого знака. Поскольку уравнение (10.1) инвариантно относительно замены

$$u \rightarrow -u, \quad x \rightarrow -x, \quad t \rightarrow t, \quad \beta \rightarrow -\beta,$$

то решение уравнения с $\beta < 0$ можно получить из решения уравнения при $\beta > 0$ при таком преобразовании. Поэтому без ограничения общности будем считать в дальнейшем $\beta > 0$ (отрицательная дисперсия).

Уравнение (10.1) может быть записано в дивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0.$$

После домножения исходного уравнения на u , можно получить также другой дивергентный вид уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u^3}{3} + \beta u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = 0.$$

Если выполняются граничные условия

$$u(x = \pm\infty) = 0, \quad \frac{\partial u(x = \pm\infty)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(x = \pm\infty)}{\partial x^2} = 0,$$

то при интегрировании уравнений в дивергентной форме получаем сохраняющиеся во времени интегралы движения

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2(x, t)}{2} dx.$$

Первый из них, имеющий место и для уравнения Бюргера, можно интерпретировать как следствие закона сохранения импульса. Второй интеграл, являясь следствием закона сохранения механической энергии, справедлив для уравнения Корвега-де-Вриза и несправедлив для уравнения Бюргера из-за наличия диссипации в последнем случае. Заметим, что уравнение Кортвега-де-Вриза имеет еще много других интегралов движения, которые не имеют простого физического смысла.

Рассмотрим частное решение уравнения (10.1) типа бегущих волн $u = u(x - ct)$. Тогда это уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(u - c) \frac{du}{dx} + \beta \frac{d^3u}{dx^3} = 0.$$

Интегрируя последнее, получаем

$$\beta \frac{d^2u}{dx^2} = a + cu - \frac{u^2}{2},$$

где a – постоянная интегрирования, которую без ограничения общности положим равной нулю. (Это можно сделать с помощью перехода в другую – движущуюся систему координат.)

Полученное уравнение может быть записано в следующем виде:

$$\beta \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\partial W}{\partial u}, \quad (10.2)$$

где

$$W = -\frac{cu^2}{2} + \frac{u^3}{6}.$$

У уравнения имеется простая физическая аналогия, которая позволяет понять поведение его качественно различных решений. Будем рассматривать координату x как время, а величину u как координату некоторой материальной

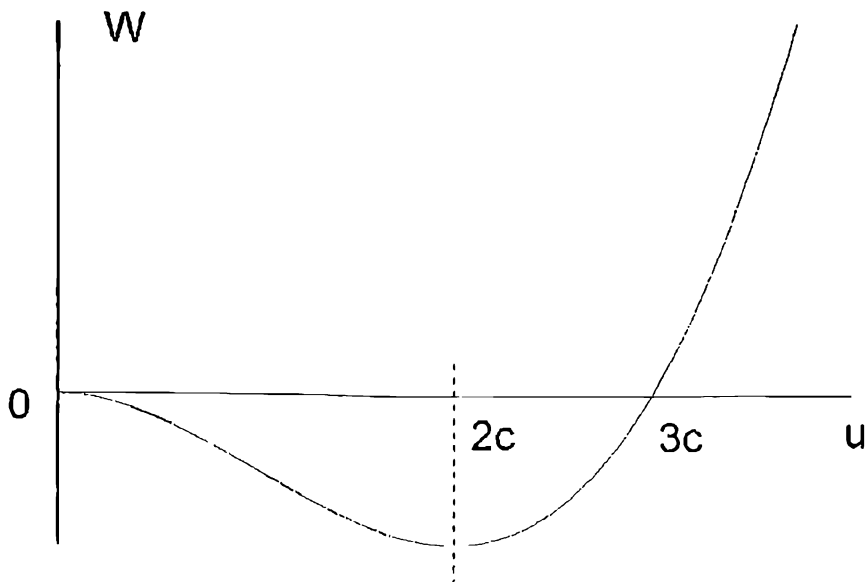


Рис. 10.1

точки. Тогда уравнение (10.2) описывает движение материальной точки с массой β в потенциальной яме глубиной W (см. рис. 10.1), то есть это уравнение движения нелинейного осциллятора. Функция $W(u)$ обращается в нуль при $u = 0$ и $u = 3c$ и достигает минимума при $u = 2c$. Колебания вблизи дна ямы являются практически гармоническими

$$u = 2c + u_0 \cos a(x - ct).$$

По мере увеличения амплитуды колебаний волна становится все более несимметричной: “частица” будет дольше иметь малую скорость u , где упругость меньше, и быстро проскакивать области с большими u . И, наконец, когда становятся возможными значения $u = 0$, появляются ка-

чественно новые решения типа уединенного импульса – солитоны. Они показаны на рис. 10.2 для положительных β . При этом “частица” бесконечно долго находится в положении $u = 0$, затем она “скатывается” в потенциальную яму W , достигает значения $u = 3c$, отражается и снова возвращается в точку $u = 0$.

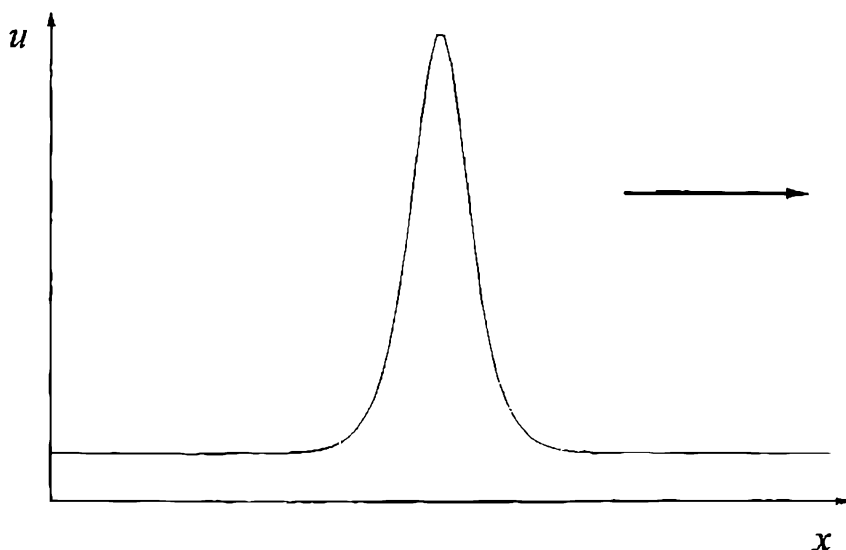


Рис. 10.2

Найдем “солитонное” решение уравнения (10.2), удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(x = \pm\infty) = 0, \quad \frac{du(x = \pm\infty)}{dx} = 0, \quad \frac{d^2u(x = \pm\infty)}{dx^2} = 0.$$

Легче всего это решение угадать и проверить его, подставив в исходное уравнение. Возьмем в качестве пробного решения функцию

$$u = \frac{u_0}{ch^2\left(\frac{(x - ct)}{\Delta}\right)}, \quad (10.3)$$

где Δ — характерная ширина солитона. Подстановка этого выражения в уравнение (10.2) показывает, что (10.3) является решением этого уравнения, если выполняется равенство

$$u_0 = \frac{12\beta}{\Delta^2} = 3c.$$

То есть произведение амплитуды солитона на квадрат его ширины — постоянная величина: $u_0\Delta^2 = 12\beta$, а сами солитоны являются однопараметрическим семейством. Чем больше амплитуда солитона, тем он уже.

В солитоне уравновешиваются нелинейность и дисперсия. Из-за нелинейности волна стремится опрокинуться. Однако дисперсия приводит к тому, что высшие гармоники отстают (при $\beta > 0$) от основной, в результате чего солитон сохраняет постоянный во времени профиль.

Вопрос о том, образуется в среде солитон при каком-нибудь внешнем воздействии или нет, зависит от параметра $\sigma = \Delta^2 u_0 / (12\beta)$, где u_0 и Δ — характеристики начального возмущения. При $\sigma \ll 1$ получатся линейные волны, в случае $\sigma = 1$ может образоваться солитон, а при $\sigma > 1$ возможно образование нескольких солитонов.

Необычно ведут себя солитоны при столкновении. Если сталкиваются солитоны с сильным различием по амплитуде, то они просто проходят друг сквозь друга. При слабом различии в амплитудах столкновение может привести к обмену энергией между солитонами. То есть здесь они ведут себя как частицы. Не случайно их называют иногда квазичастицами.

Хотя впервые солитонные решения были открыты в гидродинамике, впоследствии они оказались объектами, важными и для многих других “нелинейных” наук, включая физику плазмы и нелинейную оптику. Даже передачу электрического импульса по нервному волокну в живом организме можно рассматривать как движение солитона.

Глава 11

Нелинейная теория рэлей-тейлоровской неустойчивости

В общем случае решение нелинейной задачи рэлей-тейлоровской неустойчивости не найдено. Лишь в двух предельных случаях может быть получено аналитическое решение. Метод решения нелинейных задач устойчивости бесконечно тонких пленок был найден Оттом [8].

Рассмотрим бесконечно тонкую жидкую пленку единичной ширины с линейной плотностью ρ . В начальный момент времени пленка расположена горизонтально, и ее вес уравновешен избыточным давлением $\Delta p = \rho g$ снизу, так что пленка находится в равновесии. При изгибе пленки сила тяжести направлена вниз, а давление, действуя нормально к поверхности, создает силу, составляющую некоторый угол с силой тяжести. Равновесие нарушается и возникает рэлей-тейлоровская неустойчивость.

Пусть на пленке нанесена разметка и ξ — координата этой разметки. Со временем эта разметка меняется, оставаясь на пленке, т.е. ξ — лагранжева координата пленки. Рассмотрим элемент пленки площадью $d\xi$ (ширина плен-

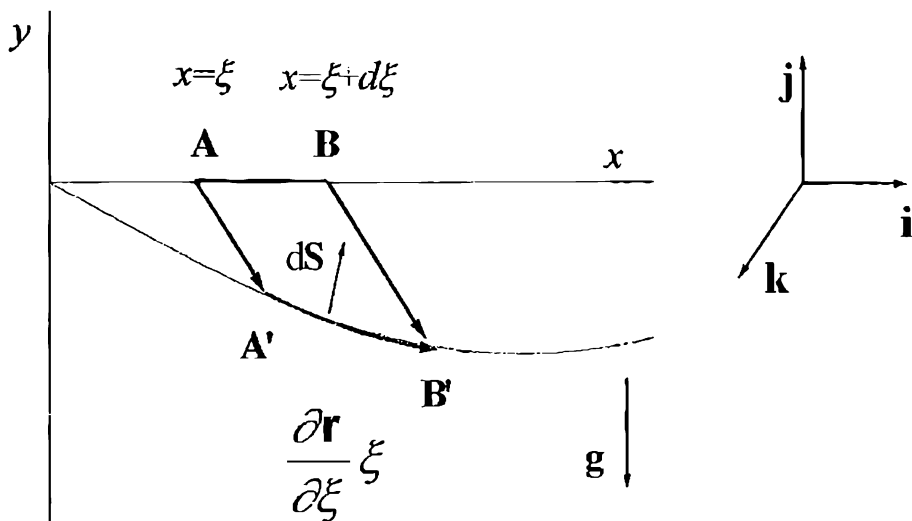


Рис. 11.1

ки равна 1). Пусть $\mathbf{r}(\xi, t)$ — эйлера координата пленки. В момент времени t элемент площади пленки равен ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты)

$$d\mathbf{S} = - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \mathbf{k} \right) d\xi. \quad (11.1)$$

Избыточная сила давления на пленку равна

$$d\mathbf{F} = \Delta p d\mathbf{S} = -\rho g \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \mathbf{k} \right) d\xi.$$

Уравнение движения элемента пленки имеет вид

$$dm \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{g} dm - \rho g d\xi \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \mathbf{k} \right)$$

или, с учетом $\rho = dm/d\xi$, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{g} + g \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}. \quad (11.2)$$

Если в данном уравнении перейти от лагранжевых координат к эйлеровым, то уравнение будет нелинейным. В этом и состоит основная идея Отта — нелинейное в эйлеровых координатах уравнение, описывающее рэлей-тейлоровскую неустойчивость, в лагранжевых координатах оказывается линейным. Решим уравнение (11.2), проецируя его на оси координат

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial y}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial \xi} - g. \quad (11.3)$$

В начальный момент заданы $x(0)$, $y(0)$, $\partial x(0)/\partial t$, $\partial y(0)/\partial t$. Система уравнений (11.3) имеет периодическое по ξ решение

$$\begin{aligned} x(\xi, t) &= \xi - \sum_k a_x(k, t) \cos(k\xi + \varphi_k), \\ x(\xi, t) &= \xi - \sum_k a_y(k, t) \sin(k\xi + \varphi_k). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Подставляя его в (11.3), получаем систему уравнений

$$\ddot{a}_x + kga_y = 0, \quad (11.5)$$

$$\ddot{a}_y + kga_x = 0$$

или

$$\ddot{\ddot{a}}_k - (kg)^2 a_k = 0.$$

Полагая $a \sim e^{-i\omega t}$, получим

$$\omega^4 = k^2 g^2, \quad \omega_{1,2} = \pm \sqrt{kg}, \quad \omega_{3,4} = \pm ikg. \quad (11.6)$$

Корни $\omega_{1,2}$ описывают осциллирующее решение, а $\omega_{3,4}$ — неустойчивое и затухающее решения. Для неустойчивого корня форма поверхности пленки определяется параметрическими уравнениями:

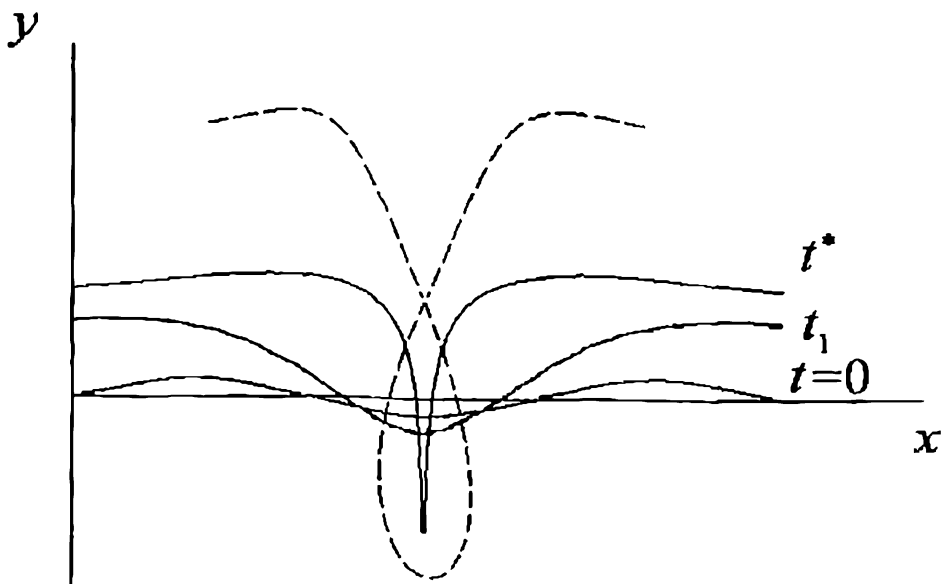


Рис. 11.2

$$x = \xi + a_0 \ell^{t\sqrt{kg}} \cos k\xi, \quad (11.7)$$

$$y = \xi + a_0 \ell^{t\sqrt{kg}} \sin k\xi. \quad (11.8)$$

Для малых времен (при $a_0 \ell^{t\sqrt{kg}} \ll 1$) получаем решение линейной задачи неустойчивости

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = a_0 \ell^{t\sqrt{kg}} \sin kx \end{cases}$$

Для произвольных моментов времени выражения (11.7) и (11.8) являются параметрическим заданием циклоиды. Форма поверхности в различные моменты времени приведена на рис. 11.2.

Решение имеет физический смысл лишь до $t < t^*$, т.к. при $t > t^*$ циклоида имеет пересечение, не реализующее-

ся физически. Критическое время t^* определяется уровнем начальных возмущений

$$t^{*-1} = \sqrt{kg} \ln ka_0. \quad (11.9)$$

Методом Отта были рассмотрены различные типы неустойчивостей цилиндрических оболочек при постоянном давлении и импульсном приложении давления, стабилизация вращением оболочки и влияние поверхностного натяжения [9].

Рассмотрим влияние поверхностного натяжения [9] и вертикального магнитного поля на устойчивость. Дополнительными силами являются сила поверхностного натяжения

$$d\mathbf{F}_T = T \frac{\partial \tau}{\partial \xi} d\xi, \quad (11.10)$$

где T – двухсторонний коэффициент поверхностного натяжения, $\tau = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$ – единичный вектор касательной

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} = \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'|^3},$$

штрих означает дифференцирование по ξ . Магнитная сила, действующая на жидкость с проводимостью σ , равна

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{H} d\xi = \frac{\sigma}{c^2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} d\xi = -\frac{-1}{4\pi\nu_m} \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}. \quad (11.11)$$

При учете поверхностного натяжения нелинейную задачу решить не удастся из-за $|\mathbf{r}'|^3$ в знаменателе, поэтому линеаризуем задачу, полагая вблизи равновесного решения $\mathbf{r} = i\xi + \mathbf{r}_1$, где \mathbf{r}_1 — малая величина. Из уравнения движения

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{T \mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}')}{\rho |\mathbf{r}'|^3} + \mathbf{g} + g\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'$$

получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{T}{\rho} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{i}) + g[\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}]$$

или в координатной записи

$$\ddot{x}_1 = gz', \quad \ddot{z}_1 = \frac{T}{\rho} z_1'' - dx_1'.$$

Откуда получаем спектр колебаний

$$\omega^2 = \frac{\sigma k^2}{2\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma k^2}{2\rho}\right)^2 + (gk)^2}. \quad (11.12)$$

Для любых волновых чисел существует неустойчивая мода в отличие от слоя жидкости с конечной глубиной, где поверхностное натяжение стабилизирует неустойчивость. Отсутствие стабилизации неустойчивости поверхности натяжением связано с тем, что в точках перегиба пленки $\bar{r}'' = 0$, кривизна равна нулю и поверхностное натяжение не действует, а различие в силах тяжести и давления остается, т.е. развивается неустойчивость.

Иследуем движение проводящей пленки в безындукционном приближении, когда токи, текущие по жидкой пленке, вызывают малые индуцированные поля. Магнитная сила (11.11) линейна по \mathbf{r} , поэтому можно решить нелинейную задачу. Подставляя (11.11) в уравнение движения и проецируя его на оси координат, получаем вместо (11.3)

$$\ddot{x} = -gy' - \psi_H x_t, \quad \ddot{y} = -gx' - g. \quad (11.13)$$

После подстановки разложения (11.4) получим систему уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x + k_g a_y + \psi_H a_x &= 0, \\ \ddot{a}_y + k_g a_x &= 0,\end{aligned}\tag{11.14}$$

описывающую двумерный маятник с силой трения, направленной по оси x . Полагая $a_x, a_y \sim \exp(-i\omega t)$, находим

$$\omega^4 + i\omega^3 \psi_H = k^2 g^2.\tag{11.15}$$

В слабых магнитных полях, когда $\psi_H \ll \sqrt{k_g}$, корни переходят в следующие значения:

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{k_g} - \frac{\psi_H}{4}; \quad \omega_{3,4} = \pm i\sqrt{k_g} - \frac{\psi_H}{4},\tag{11.16}$$

т.е. неустойчивый корень стабилизируется магнитным полем, движение осциллирующее, затухающее. В сильных магнитных полях, при $\psi_H \gg \sqrt{k_g}$, полагая $\omega/\psi_H = x$, получаем уравнение

$$x^4 + ix^3 = \frac{k^2 g^2}{\psi_H^4} \ll 1,\tag{11.17}$$

корнями которого являются

$$x_{1,2,3} = 0, \quad x_4 = -i,\tag{11.18}$$

что соответствует аperiodическому движению с декрементом

$$i\omega = \psi_H.$$

Глава 12

Нелинейная теория неустойчивости “опрокинутой мелкой воды”

Выше был приведен пример точного решения для бесконечно тонкой пленки с двумя свободными границами. Для других случаев аналитических решений получить не удастся. Исключение составляет слой жидкости, ограниченный сверху твердой границей, а снизу — свободной, когда толщина слоя δ меньше длины волны возмущений λ [10]. Такой слой будем называть “опрокинутой мелкой водой”. Если нижняя граница является твердой, а верхняя свободной, то движение жидкости описывается приближением “мелкой воды” [11]. Уравнения “мелкой воды” аналогичны уравнениям одномерной газовой динамики, поэтому можно воспользоваться известными нелинейными решениями для волн Римана и получить решение нелинейной задачи рэлей-тейлоровской неустойчивости “опрокинутой мелкой воды” [10].

Рассмотрим приближение мелкой воды [11]. Пусть давление на свободной поверхности жидкости равно P_0 , тогда в жидкости в точке с координатой Z давление равно

(см. рис. 12.1)

$$P = P_0 + \rho g(h - Z). \quad (12.1)$$

Подставим это выражение в проекцию уравнения движения на ось x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (12.2)$$

Получим уравнение непрерывности жидкости, выраженное через h, u . Разность потоков жидкости через сечения x и $x + dx$ равна

$$(\rho u s)_{x+dx} - (\rho u s)_x = \frac{\partial(\rho u s)}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial t}(\rho S dx).$$

Для слоя единичной ширины $S = h$ с учетом несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ получаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0. \quad (12.3)$$

Определим “плотность” и “давление” следующими выражениями:

$$\bar{\rho} = \rho h, \\ \bar{p} = \int_0^h p dz = \frac{\rho g h^2}{2} = \frac{g}{2\rho} \bar{\rho}^2.$$

Тогда уравнения “мелкой воды” (12.2) и (12.3) принимают вид

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} = 0, \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad (12.5)$$

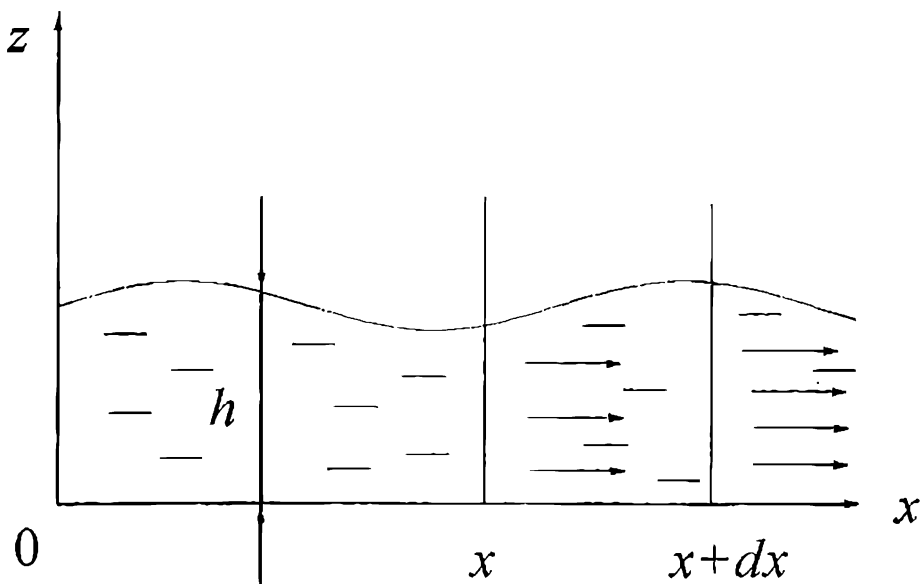


Рис. 12.1

аналогичный уравнениям одномерной газовой динамики, где “плотность” пропорциональна высоте слоя жидкости, а “давление” $\bar{p} \sim \bar{\rho}^2 \sim h^2$, т.е. уравнения (12.4), (12.5) совпадают с уравнениями одномерной газовой динамики для газа с показателем адиабаты $\kappa = 2$. Скорость “звука” равна

$$a = \sqrt{\frac{\kappa \bar{p}}{\bar{\rho}}} = \sqrt{gh}. \quad (12.6)$$

При $v \ll a_0$ течение является “дозвуковым”, при $v > a_0$ – “сверхзвуковым” [11]. В частности, при $v > a_0$ возможно распространение “ударной волны”, соответствующей движению фронта резкого перепада высот жидкости.

Для “опрокинутой мелкой воды” уравнения движения получаются из (12.2), (12.3) изменением знака глубины жидкости

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (12.7)$$

что соответствует отрицательному “давлению” $\bar{p} = -\rho g \delta^2 / 2$. Скорость звука при этом оказывается мнимой

$$a^2 = \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \rho} \right)_s = -gh; \quad a = ia_0 = i\sqrt{gh_0}. \quad (12.8)$$

Делая предположения, как и в теории волн Римана, что все величины, описывающие простую волну (глубина h , фазовая скорость a , скорость u), являются функциями одной из них

$$h = h(u), \quad a = a(u), \quad (12.9)$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [u + a(u)] \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (12.10)$$

с мнимой скоростью звука

$$a(u) = i \left(a_0 + \frac{u}{2} \right). \quad (12.11)$$

Общее решение нелинейной задачи неустойчивости

$$u = f[\xi(x, t)], \quad (12.12)$$

$$\xi = x - t \left[u + i \left(a_0 + \frac{u}{2} \right) \right]$$

определяется начальной формой волны $f(x)$.

Пусть в начальный момент волна является синусоидальной

$$u = u_0 \exp[ik\xi(x, 0)].$$

Тогда нелинейная стадия движения волны определяется уравнением

$$u(x, t) = u_0 \ell^{-ikut + ikx} \ell^{tk} \left(a_0 + \frac{u}{2} \right).$$

В системе координат, связанной с движущейся волной, получим

$$u(x, t) = u_0 \cos kx \exp \left[\psi t \left(a_0 + \frac{u}{2a_0} \right) \right]. \quad (12.13)$$

При малых значениях параметра $\mathcal{E} = u_0/a_0 \ll 1$ нарастание амплитуды соответствует линейной теории с инкрементом $\psi = ka_0$. По мере роста амплитуды происходит ускорение роста участков волны с $u > 0$ и замедление для $u < 0$. При дальнейшем нелинейном развитии возникает “взрыв”, т.е. за конечное время — бесконечно большой рост участков с $u > 0$ (см. рис. 12.2). Зная закон изменения скорости волны $u(x, t)$, из (12.8), (12.11) можно найти изменение глубины жидкости

$$h = -g^{-1} \left(a_0 + \frac{u}{2} \right)^2. \quad (12.14)$$

Форма поверхности $h(x, t)$ на ранних стадиях развития неустойчивости (пока $u \ll a_0$), аналогична функции $u(x, t)$, приведенной на рис. 12.2. Возникающие при этом “языки” и “впадины” имеют вид, близкий к полученным в численном решении этой задачи [12]. Характерное время развития “взрывной” неустойчивости t_c определяется из (12.13):

$$\psi t_c \exp \psi t_c > 2/\mathcal{E} \ell. \quad (12.15)$$

За время t_c происходит бесконечно большой рост амплитуды “языков”, хотя реально такое нарастание будет ограничено вязкостью.

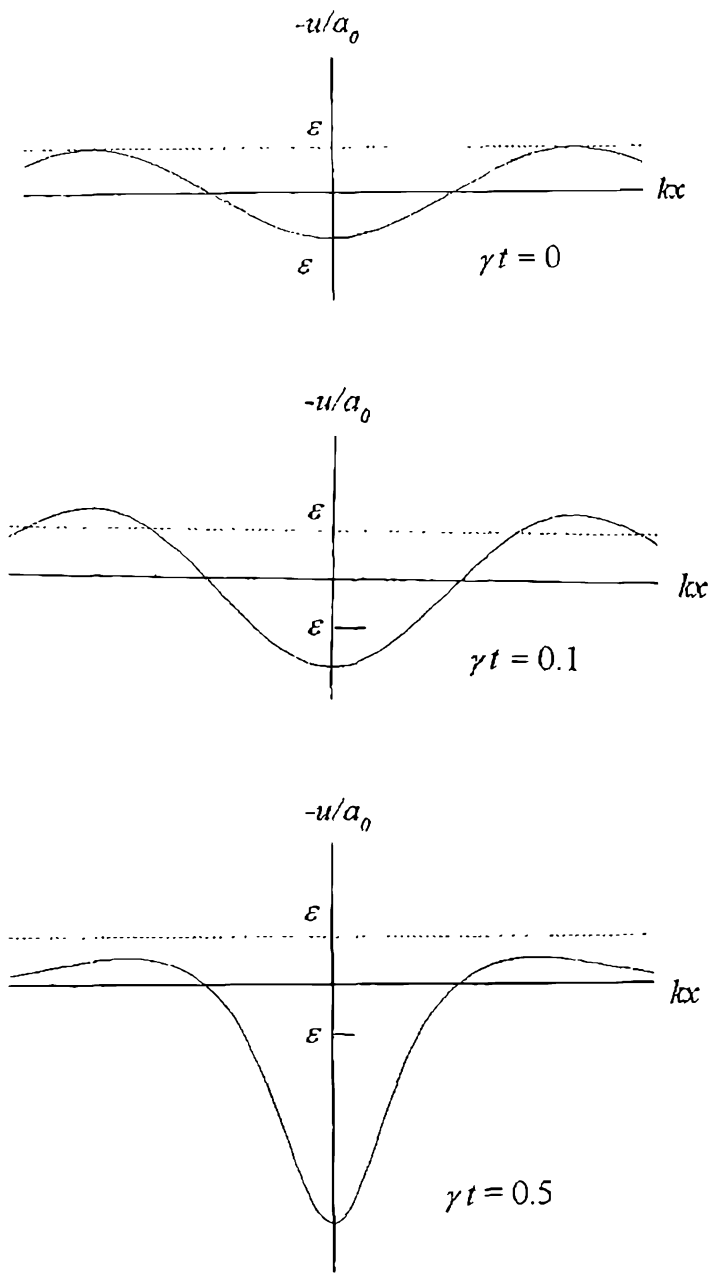


Рис. 12.2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артамонов К.И.* Проблема устойчивости в физической механике: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 1977.
2. *Артамонов К.И.* Термогидроакустическая неустойчивость. – М.: Машиностроение, 1982.
3. *Сон Э.Е.* Устойчивость низкотемпературной плазмы: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 1978.
4. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. – Oxford, 1961.
5. *Напартович А.П., Старостин А.Н.* Химия плазмы. – М.: Атомиздат, 1979. Вып.6.
6. *Недоспасов А.В., Хаит В.Д.* Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы. – М.: Наука, 1979.
7. *Велихов Е.П., Ковалев А.С., Рахимов А.Т.* Физические явления в газоразрядной плазме. – М.: Наука, 1987.
8. *Ott E.* Nonlinear evolution of the Rayleigh-Taylor Instability of thin layer //Phys.Rev.Lett. – 1972. – V.29. – P.1429-1432.
9. *Башилов Ю.А., Покровский С.В.* Нелинейное развитие тейлоровской неустойчивости тонкой цилиндрической оболочки //ЖТФ. – 1977. – Т.47. – С.2257-2263.

10. Сон Э.Е. Нелинейная теория рэлей-тейлоровской неустойчивости “опрокинутой мелкой воды” // Письма в ЖТФ. – 1978. – Т.4. – N17. – С.1023-1028.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гостехтеориздат, 1953.
12. Book D.L., Ott E., Sulton A.L. Rayleigh-Taylor instability in the “shallow-water” approximation // Phys.Fluids. – 1974. – V.17. – N4. – P.676-678.

Учебное издание

Александров Николай Леонидович
Сон Эдуард Евгеньевич

**ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ
УСТОЙЧИВОСТИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
И ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ**

Редактор *О.П. Котова*. Корректор *И.А. Волкова*

Изд. лиц. № 040060 от 21.08.96. Подписано в печать 15.05.2000.
Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,1.
Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 700 экз. Заказ № 237

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Отдел автоматизированных издательских систем
"ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ"
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9