Б.В. Бондарев
Н.П. Калашников
Г.Г. Спирин

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Книга 1

МЕХАНИКА

Б.В. Бондарев
Н.П. Калашников
Г.Г. Спирин

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Книга 1

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений

Москва
"Высшая школа"
2003

УДК 53
ББК 22.3
Б81

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *А.Д. Гладун* (зав. кафедрой общей физики МФТИ); д-р физ.-мат. наук, проф. *А.Н. Морозов* (зав. кафедрой физики МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Бондарев, Б.В.

Б81 Курс общей физики. В 3 кн. Кн. 1. Механика: Учеб. пособие/ Б.В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г.Г. Спирин. — М.: Высш. шк., 2003. — 352 с.: ил.

ISBN 5-06-004603-6

Книга представляет собой конспект лекций по механике в рамках курса общей физики для студентов технических вузов. В первой главе приведены сведения из математического анализа и векторной алгебры, знание которых необходимо при изучении курса общей физики.

При помощи математического аппарата, доступного пониманию студентов первого курса технического вуза, дано изложение основных понятий и законов механики. Приведено достаточное количество примеров и задач, разбор которых помогает усвоению теоретического материала и прививает навыки самостоятельного решения задач по общей физике.

По способу представления изучаемого материала предлагаемый курс физики можно назвать двухуровневым. Каждая достаточно сложная тема изложена здесь дважды: сначала самым простым образом, а затем более строго и широко. Студент, имеющий желание получить хорошую оценку на экзамене, должен освоить материал как первого, так и второго уровня изложения. Студент, которого устраивает оценка «удовлетворительно», может не обращать внимание на отмеченные символом «звездочка» главы, содержащие материал второго уровня.

Для студентов технических вузов.

УДК 53
ББК 22.3

Учебное издание

Бондарев Борис Владимирович, **Калашников** Николай Павлович, **Спирин** Геннадий Георгиевич

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Книга 1

Механика

Редактор *Л.А. Савина*. Художник *А.С. Сидоров*.
Художественный редактор *Е.А. Вишнякова*. Технический редактор *Н.В. Быкова*

Лицензия ИД № 06236 от 09.11.01.
Изд. № РЕНТ-104. Подп. в печать 14.04.03. Формат $60 \times 88^1/_{16}$. Бум. офсетная.
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Объем 21,56 усл. печ. л. 21,56 усл. кр.-отт. 16,61 уч.-изд. л.
Тираж 5000 экз. Заказ № Я 249

ФГУП «Издательство «Высшая школа», 127994, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.
Тел.: (095) 200-04-56. E-mail: info@v-shkola.ru http://www.v-shkola.ru
Отдел реализации: (095) 200-07-69, 200-59-39; факс: (095) 200-03-01. E-mail: sales@v-shkola.ru
Отдел «Книга-почтой»: (095) 200-33-36. E-mail: bookpost@v-shkola.ru
Отпечатано в ГУП ПИК «Идел-Пресс». 420066. г. Казань, ул. Декабристов, 2.

ISBN 5-06-004603-6 (кн. 1)
ISBN 5-06-004606-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика – самая фундаментальная из всех естественных наук. Она изучает самые простые и общие свойства материи и сравнительно простые явления природы. Поэтому физика составляет универсальную основу всей науки и техники.

Схематично научное исследование какого-либо физического явления можно разделить на три этапа: эксперимент (или наблюдения), построение модели и математический формализм. Два последних этапа являются составными частями физической теории, назначение которой – составить представление о механизме исследуемого явления и дать его количественное описание. Для построения теории сначала на основании наблюдательных или экспериментальных данных конструируется образная модель изучаемого явления. Модель есть научная абстракция, т.е. понятие, отражающее наиболее существенные свойства данного явления. Модель должна быть достаточно простой для того, чтобы она была пригодна для математического описания. Применение математики позволяет получить количественные соотношения между физическими величинами, которые могут быть проверены на опыте. Если теория верна, то ее предсказания должны подтверждаться результатами экспериментов и наблюдений.

Для установления эмпирических соотношений и законов необходимо определить способы и методы измерения различных физических величин. Измерить какую-либо физическую величину это значит сравнить ее с одноименной величиной, принятой за единицу. Единицы измерения физических величин разделяют на основные и производные от основных. Основные единицы определяют посредством эталонов, выбранных по международному соглашению. Эталон представляет собой меру или прибор, служащие для хранения, воспроизведения и передачи единицы измерения физической величины, принятой за одну из основных. Единицы всех прочих величин устанавливают при помощи физических законов, связывающих эти величины с основными.

В международной системе единиц, обозначаемой сокращенно СИ, основными единицами являются: единица длины – метр (*м*), единица времени – секунда (*с*), единица массы – килограмм (*кг*), единица силы тока – ампер (*А*), единица термодинамической температуры – кельвин (К), единица силы света – кандела (*кд*) и единица количества вещества – моль (*моль*). Система единиц СИ, как установлено государственным стандартом, должна применяться как предпочтительная в науке, технике и при преподавании.

Размерностью какой-либо физической величины f называется формула, определяющая связь между единицей измерения этой величины и основными единицами. Для обозначения размерности величины f используют символ $[f]$. Безразмерными называются величины, численные значения которых не зависят от выбора системы единиц измерения. Например, отношение двух величин одинаковой размерности является безразмерной величиной.

Название "общая физика" предполагает существование нескольких специальных разделов физики, в которых изучаются различные частные явления – фрагменты единой картины окружающего нас материального мира. Изучая в рамках общей физики различные явления физического мира, очень важно не заблудиться в трех соснах и увидеть за деревьями лес. Иначе говоря, важно воспринимать различные физические явления как части цельной картины.

В общей физике не решают трудных задач, требующих для своего решения применения изощренных математических методов и сложных расчетов. Цели, преследуемые в общей физике, заключаются в формировании понятий и представлений, которые позволяют создать широкую картину мира, по возможности охватывающую все многообразие физических явлений. Для достижения этих целей в общей физике рассматривают только самые простые модели исследуемых явлений, которые дают возможность установить управляющие явлениями законы и написать выражающие эти законы математические соотношения. Применение установленных законов при решении достаточно простых физических задач и примеров помогает лучше понять содержание законов и более прочно усвоить изучаемый материал.

Итак, задачей общей физики является, не вдаваясь глубоко в подробности рассматриваемых моделей и теорий и не увлекаясь математическими расчетами, дать общее представление о физической картине мира, установить действующие в нем законы, изучить основные методы физических исследований и обозначить области применения этих законов и методов. Эти задачи общей физики не могут быть решены без использования достаточно мощного математического аппарата, который необходим для написания любого физического закона. Математический аппарат, применяемый в общей физике, состоит всего лишь из нескольких основных определений и теорем теорий дифференциального и интегрального исчислений, векторной алгебры, математической теории скалярных и векторных полей, теорий обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Книга предназначена, главным образом, студентам высших технических учебных заведений. По способу представления изучаемого материала предлагаемый курс физики можно назвать *двухуровневым.* Каждая достаточно сложная тема излагается здесь дважды: сначала самым простым образом, а затем более строго и широко. Главы и разделы, содержащие материал повышенной сложности, отмечены символом "звездочка". Студент, имеющий желание получить хорошую оценку на экзамене, должен освоить материал как первого, так и второго уровня изложения. Студент, которого устраивает оценка "удовлетворительно", может не обращать внимание на отмеченные "звездочкой" главы и разделы, содержащие материал второго уровня.

ВВЕДЕНИЕ

Вещество

Установлено, что физические тела состоят из микроскопических частиц – атомов и молекул. Молекулы состоят из атомов. Каждый атом состоит из одного ядра и нескольких движущихся вокруг него электронов. Атомное ядро состоит из протонов и нейтронов. Эти частицы называются нуклонами. Электроны, протоны и нейтроны называют элементарными частицами. Существует много других материальных частиц, которые считаются элементарными. В точном значении термин "элементарные частицы" следует понимать как первичные, далее неразложимые частицы, из которых, по предположению, состоит вся материя. Однако в современной физике этот термин употребляют не в его точном значении, а менее строго. Так называют мельчайшие частицы материи, которые не являются атомами или атомными ядрами (исключение составляет протон). Итак, вещество можно рассматривать как совокупность очень большого числа различных элементарных частиц.

Взаимодействия

Физические тела и частицы вещества могут взаимодействовать друг с другом. Наблюдаются самые различные взаимодействия тел. Следствием взаимодействия тел и частиц являются изменения их состояния (деформация тел, нагревание и пр.) и их ускоренное движение.

Одни тела взаимодействуют при соприкосновении, другие могут взаимодействовать на расстоянии. При ударе молотком по шляпке гвоздя последний приходит в движение и проникает в доску.

Все тела на Земле испытывают на себе ее притяжение, где бы они не находились. Если камень бросить вверх, то под действием силы тяжести он будет двигаться с ускорением и, описав некоторую траекторию, упадет на землю. Притяжение тел к Земле служит примером взаимодействия на расстоянии.

Количественной характеристикой взаимодействия может служить величина, называемая *силой*. Эту величину обычно обозначают символом $\vec{F}$. Это – вектор, который имеет определенное направление в пространстве, а его модуль принимает некоторое числовое значение. Известны различные силы. Есть силы упругости, которые возникают при сжатии или растяжении твердых тел. Есть силы трения. Есть силы давления, с которыми газы и жидкости действуют на поверхности твердых тел.

Другой количественной характеристикой взаимодействия тел или частиц является их потенциальная энергия. Эта характеристика взаимодействия является более универсальной. Существуют взаимодействия, которые нельзя охарактеризовать при помощи силы, но взаимодействующие частицы всегда имеют потенциальную энергию.

Дальнодействие и близкодействие

Когда тела взаимодействуют при соприкосновении друг с другом, это не кажется удивительным. Но как они могут взаимодействовать, не соприкасаясь? Ученые давно искали ответ на этот вопрос. В поисках ответа возникли две теории – теория дальнодействия и теория близкодействия. Дальнодействие – это взаимодействие на расстоянии без посредников. Согласно теории близкодействия тела и частицы не могут взаимодействовать на расстоянии без посредников.

Механика Ньютона и открытый им закон всемирного тяготения дали возможность количественно с высокой точностью описывать движения планет вокруг Солнца и других небесных тел. При помощи математических уравнений даже была открыта ранее неизвестная планета. Однако сам Ньютон не мог объяснить, каким образом "действуют силы тяготения". Несмотря на это законы Ньютона оказали такое влияние на умы ученых, что в естествознании тихо произошел великий переворот. Вместо бесплодных попыток понять, как могут тела взаимодействовать на расстоянии, решено было считать, что взаимодействие между телами осуществляется непосредственно через пустое пространство, которое само никакого участия в передаче взаимодействия не принимает. Причем взаимодействие передается от одного тела к другому через пространство мгновенно, т.е. с бесконечно большой скоростью. Такое казалось возможным. Однако существовала какая-то неудовлетворенность. Не понятно было, как это все-таки тела могут взаимодействовать, когда между ними ничего нет, кроме пустого пространства. Многие ученые и сам Ньютон считали нелепостью предположение, что тела могут взаимодействовать на расстоянии без какого-либо посредника.

Поля

Согласно современным представлениям взаимодействие тел и частиц на расстоянии осуществляется посредством *поля*. Поле – это особый вид материи. Поля могут иметь различную физическую природу, но каждое поле может быть охарактеризовано физическими величинами, которые могут быть непосредственно или косвенным образом измерены экспериментально. Другими словами, в реальности существования физических полей можно убедиться на опыте.

Концепция поля основана на предположении, что каждая частица вещества создает в окружающем ее пространстве одно или несколько полей. Можно сказать, что физические поля окружают каждую частицу вещества как некий ореол. Эти поля неразрывно связаны с частицей и называются ее собственными полями. Если в какой-то области пространства имеются поля от различных частиц, то эти поля "складываются" друг с другом. Таким образом создается более сильное поле. Поле, создаваемое одними частицами, можно обнаружить по его действию на другие частицы. Когда какая-либо частица попадает в поле, она испытывает на себе силовое воздействие со стороны этого поля, т.е. на частицу действует некоторая сила $\overrightarrow{F}$. Так осуществляется взаимодействие частиц на расстоянии. Поля служат посредниками, которые передают через пространство силовое воздействие одной частицы вещества на другую.

Взаимное тяготение тел объясняют существованием поля тяготения, которое называют также гравитационным полем. Принято считать, что каждая частица вещества окружена собственным полем тяготения. Попадающая в это поле другая частица вещества испытывает на себе действие силы притяжения к первой частице. Гравитационное поле массивного тела есть сумма полей, создаваемых каждой из частиц этого тела.

Введение понятия электрического поля было вызвано необходимостью объяснения взаимодействия электрически заряженных тел.

Английский ученый Майкл Фарадей всю свою жизнь посвятил изучению электромагнитных явлений. Он первый предложил использовать понятие поля для описания взаимодействия электрических зарядов и токов. Другой английский ученый Джеймс Максвелл дал математическое описание электромагнитного поля и записал уравнения, выражающие его законы.

Фундаментальные взаимодействия

Каждое тело состоит из элементарных частиц. Поэтому любое взаимодействие тел и частиц вещества можно рассматривать как совокупность взаимодействий входящих в их состав элементарных частиц.

Согласно современным научным данным существуют всего четыре типа взаимодействий элементарных частиц. Эти типы взаимодействия называются *фундаментальными*. К ним относятся: 1) гравитационное взаимодействие, т.е. взаимодействие тел посредством сил тяготения; 2) электромагнитное взаимодействие, т.е. взаимодействие тел, имеющих электрические заряды; 3) слабое и 4) сильное взаимодействия, которые осуществляют связь между различными элементарными частицами.

Каждое взаимодействие частиц осуществляется посредством какого-либо поля, т.е. каждому типу взаимодействия соответствует физическое поле, обладающее определенными свойствами. Каждое фундаментальное взаимодействие имеет свой "радиус действия" и пространственный масштаб, в котором оно проявляет себя. Гравитационные силы – это слабые и дальнодействующие силы. Силы тяготения так слабы, что их действие заметно только тогда, когда хотя бы одно из тяготеющих друг к другу тел обладает достаточно большой массой. Благодаря силам тяготения космические тела не рассыпаются даже в том случае, когда вещество, из которого они состоят, находится в газообразном состоянии. Под действием сил тяготения массивные космические тела приобрели форму шара, если только они не вращались с большой скоростью. Движение космических тел, например движение планет вокруг Солнца, обусловлено силами тяготения.

Ядерные силы, осуществляющие сильное взаимодействие, "заметны" только в микроскопических масштабах. Их "основная задача" – удерживать нуклоны в ядрах атомов.

Электромагнитные взаимодействия имеют очень широкий диапазон действия. Электрическое притяжение электронов к атомному ядру удерживает их в атоме. Взаимодействия тел, встречающиеся в повседневной жизни, обусловлены только первыми двумя фундаментальными взаимодействиями. За исключением притяжения тел к Земле и морских приливом, которые вызваны притяжением к Луне и Солнцу воды в морях и океанах, все другие взаимодействия тел можно объяснить электромагнитными взаимодействиями заряженных элементарных частиц.

Теория поля

Существуют различные способы математического описания физических полей. В классической (неквантовой) теории поля его описание осуществляется при помощи одной или нескольких функций, которые зависят от координат x, y, z точки пространства и от времени t. Одну из таких функций можно записать следующим образом: $\xi = \xi(x, y, z, t)$. Эта зависимость означает, что в любой точке пространства с координатами x, y, z в произвольный момент времени t определено значение величины ξ, которая характеризует рассматриваемое физическое поле. Такое описание отражает представление о том, что поля существуют в пространстве и могут изменяться с течением времени.

Функции, описывающие поле, имеют определенный физический смысл. Например, с их помощью определяется сила, которая действует на частицу в этом поле, или потенциальная энергия частицы. Существуют и другие определения полевых величин.

Электрическое поле создается заряженными частицами. Если в пространстве имеется электрическое поле, то в любой точке пространства может быть определен вектор $\vec{E}$, называемый напряженностью электрического поля: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$. Физический смысл этого вектора заключается в том, что на помещенную в точку $P(\vec{r})$ частицу с зарядом q действует сила $\vec{F} = q\,\vec{E}(\vec{r}, t)$.

Таким образом, поля бывают физические и математические. Термин "физическое поле" используют, когда хотят подчеркнуть, что рассматриваемое поле существует в действительности независимо от того, исследует ли кто-либо это поле или нет. Математическое поле – это абстрактное понятие, которое используют для количественного описания какого-либо физического поля.

Свободные поля

Поля окружают любую частицу вещества или какую-либо систему частиц. При определенных условиях от этих полей могут отделяться "кусочки". Эти "кусочки" поля после их рождения начинают самостоятельное существование, независимое от системы частиц, из которой они выделились. Такие "кусочки" полей называются свободными полями, или волнами.

Свободные электромагнитные поля, т.е. электромагнитные волны, или электромагнитное излучение, испускаются ускоренно движущимися заряженными частицами. Электромагнитные волны распространяются в пространстве со скоростью света. Так же как движущиеся частицы, электромагнитные волны переносят с собой импульс и энергию. При взаимодействии с веществом волны отдают ему часть своего импульса и энергии.

Скорость распространения взаимодействия

Существуют различные способы убедиться в реальности существования физических полей. Например, рассмотрим взаимодействие двух заряженных частиц Q и q, находящихся на расстоянии R одна от другой. Каждая из этих частиц испытывает на себе действие силы со стороны другой частицы. Причем эти силы не изменяются с течением времени, если частицы неподвижны. Если одна из частиц Q придет в движение, то сила, с которой она действует на частицу q, изменится. Однако это изменение произойдет не мгновенно, а только спустя некоторое время τ. Оказывается, что отношение расстояния R между частицами ко времени τ равно скорости света. Таким образом, существует нечто такое, что распространяется от одной частицы к другой через пространство с определенной скоростью. Это нечто и есть электромагнитное поле.

Квант поля – это частица

При исследовании взаимодействия полей с веществом было обнаружено, что импульс свободного поля и его энергия изменяются не непрерывно, а дискретным образом, т.е. поля и вещество могут передавать друг другу импульс и энергию не в любом количестве, а только определенными порциями (квантами).

Были обнаружены явления, для объяснения которых необходимо рассматривать физические поля как совокупность особых частиц, названных квантами поля. Оказалось, что каждому физическому полю соответствуют определенные частицы. Так, например, электромагнитное излучение есть совокупность частиц, которые называют квантами света, или фотонами.

Частица и волна

Существуют явления, количественное описание которых возможно только на основе предположения, что микроскопические частицы вещества обладают волновыми свойствами. При этом движение частицы следует описывать посредством одной или нескольких функций, зависящих от координат x, y, z точки пространства и от времени t. Такие функции называют волновыми: $\psi = \psi(x, y, z, t)$. Эта зависимость означает, что в любой точке пространства определена величина ψ. Другими словами, теперь частица представлена некоторым физическим полем, которое назвали *квантовым*. Каждой из известных элементарных частиц соответствует определенное квантовое поле.

Таким образом, физическое поле иногда необходимо рассматривать как совокупность частиц, а частицу – как некое поле. Это свойство полей и частиц имеет название *корпускулярно-волновой дуализм*.

Физические модели

Понимание сути изучаемого физического явления невозможно без теории. Физическая теория начинается с построения модели. Модель – это представления, которые складываются в сознании исследователя об изучаемом явлении. Самые простые механические модели – материальная точка (частица, или корпускула), система частиц, абсолютно твердое тело, сплошная среда. Механические модели дополняются представлениями о физических полях. Из простых физических моделей можно построить более сложные. Чем проще модель, тем меньше математики требуется для ее количественного описания. Очень многие задачи современной теоретической физики так сложны, что могут быть решены только при помощи достаточно мощных компьютеров. С созданием компьютеров возник новый раздел физики – компьютерное моделирование.

Компьютерное моделирование предоставляет широкие возможности для изучения различных физических явлений. При помощи компьютерных программ можно создавать вполне реалистические физические модели. Например, в памяти компьютера можно разместить и обрабатывать информацию о движении и взаимодействии достаточно большого числа частиц. На экране компьютера можно показать движение этих частиц. Эта картина создает очень яркое представление о поведении частиц вещества. Компьютерная модель позволяет установить или проверить количественные соотношения физической теории. При помощи компьютера можно поставить очень правдоподобный численный эксперимент, который не всегда можно осуществить в действительности.

Физика и техника

Любое даже самое простое техническое устройство действует на основе сразу нескольких физических принципов или законов. Например, такое чудо техники как музыкальный центр в своем действии сочетает множество физических явлений почти из всех разделов физики. Вращается лазерный диск – механика, работает электродвигатель – электромагнетизм, функционируют различные электрические и радиотехнические схемы – электротехника и радиоэлектроника, записанная на диске цифровая информация считывается посредством полупроводникового лазера – квантовая электроника и оптика, приятная музыка звучит из динамиков – акустика и пр.

Смело можно утверждать, что технический прогресс следует за развитием физики и без открытий различных физических явлений и эффектов он был бы не возможен. С другой стороны для проведения современных физических исследований часто бывает необходимо очень сложное и дорогостоящее техническое оборудование. Так физика и техника дополняют и поддерживают развитие друг друга. Но все-таки физика идет впереди техники. Сначала физическая идея – затем ее техническое воплощение.

Студентам, приступающим к изучению физики, следует помнить о той роли, которую эта наука играет в развитии техники и человеческой цивилизации вообще, и ни в коем случае нельзя уподобляться персонажу известной басни Ивана Андреевича Крылова, мораль которой такова:

"Невежда так же в ослепленье
Бранит науки и ученье,
И все ученые труды,
Не чувствуя, что он вкушает их плоды."

ГЛАВА 1
КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Функция и ее производная

Существуют физические величины, принимающие одни и те же постоянные значения независимо от условий решаемой задачи. Такие величины называют *абсолютными постоянными*. Существуют также другие величины, которые могут принимать различные численные значения. Такие величины называют *переменными*. Опыт показывает, что переменные физические величины изменяются не независимо друг от друга. При определенных условиях изменение численных значений одних величин влечет за собой изменение значений других.

Переменная y называется *функцией* от другой переменной x, если каждому значению x из некоторого множества по определенному закону ставится в соответствие одно (*однозначная функция*) или несколько значений (*многозначная функция*) переменной y. При этом переменная x называется *независимой переменной*, или *аргументом*. В этой главе будем рассматривать только однозначные функции. Функция может быть задана аналитически явным или неявным образом. Явное аналитическое задание функции осуществляется при помощи формулы

$$y = y(x)\,,$$

где правая часть есть известное математическое выражение $y(x)$, содержащее переменную величину x.

Уравнение

$$f(x, y) = 0\,,$$

левая часть которого представляет собой некоторое математическое выражение, содержащее величины x и y, задает зависимость y от x неявно.

Если некоторая переменная α принимает последовательно значения, все более и более близкие к числу a, то говорят, что α стремится к a. Символически это обозначают так:

$$\alpha \to a\,, \quad \text{или} \quad \lim \alpha = a\,.$$

Переменная α называется *бесконечно малой*, если она стремится к нулю.

Пусть x_1 и x_2 есть некоторые значения аргумента x. Соответствующие значения функции $y = y(x)$ обозначают как

$$y_1 = y(x_1) \quad \text{и} \quad y_2 = y(x_2)\,.$$

Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называется *приращением аргумента*, а разность $\Delta y = y_2 - y_1$ – *приращением функции.*

Зафиксируем одно какое-нибудь значение аргумента и обозначим его x. Другое значение аргумента положим равным $x + \Delta x$. Иначе говоря, дадим аргументу приращение Δx. В этом случае приращение функции $y = y(x)$ будет

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)\,. \tag{1.1}$$

Производной функции $y = y(x)$ в точке x называется предел отношения приращения Δy функции к приращению Δx аргумента при стремлении Δx к нулю. Производную функции $y = y(x)$ обозначают символами

$$y' = y'(x) \equiv \frac{dy}{dx}\,. \tag{1.2}$$

По определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}\,. \tag{1.3}$$

После вычисления предела получим некоторое математическое выражение, зависящее от x, но не зависящее от Δx. Таким образом, производная от функции $y(x)$ по x в свою очередь будет функцией аргумента x.

Бесконечно малое приращение аргумента ($\Delta x \to 0$) обозначают символом dx и называют *дифференциалом аргумента* x. *Дифференциалом функции* $y(x)$ называется главная (т.е. самая большая) линейная относительно Δx часть приращения функции, которую обозначают символом dy. На основании этого определения можно утверждать, что производную y' можно рассматривать как отношение (1.2) дифференциала dy функции к дифференциалу dx аргумента. При этом можно записать равенство

$$dy = y'dx\,, \tag{1.4}$$

т.е. дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Приращение (1.1) этой функции будет

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2\,x\,\Delta x + (\Delta x)^2\,. \tag{1.5}$$

По определению часть этого выражения, содержащая приращение Δx в первой степени, есть дифференциал функции, т.е.

$$dy = 2\,x\,dx\,. \tag{1.6}$$

Подставив (1.5) в формулу (1.3), найдем производную:

$$y' = (x^2)' = 2\,x\,.$$

Такой же результат получим, разделив дифференциал (1.6) на dx.

Пример 2. Пусть $y(x) = c$, где $c = \text{const}$. В этом случае $\Delta y \equiv 0$ и $y' \equiv 0$. Таким образом, доказано, что производная постоянной величины равна нулю.

Аналогично можно найти производные других элементарных функций. Приведем без вывода формулы для производных наиболее часто используемых функций:

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}\,, \tag{1.7}$$

где n – любое число;

$$(\cos x)' = -\sin x\,, \tag{1.8}$$

$$(\sin x)' = \cos x\,, \tag{1.9}$$

$$(e^x)' = e^x\,, \tag{1.10}$$

где $e = 2,718...$ – основание натурального логарифма;

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\,. \tag{1.11}$$

Применяя определение производной, нетрудно доказать следующие правила вычисления производной.

Правило 1. Производная суммы функций $u(x)$ и $v(x)$ равна сумме производных этих функций:

$$(u+v)' = u' + v'\,. \tag{1.12}$$

Правило 2. Производная произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$ вычисляется по формуле

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'\,. \tag{1.13}$$

Правило 2 имеет следующее следствие. Если одна из функций в этой формуле есть постоянная (например, $u = c$), то будем иметь

$$(c\,v)' = c\,v'\,,$$

т.е. постоянную можно выносить за знак производной.

Пусть $z = z(y)$ и $y = y(x)$. В этом случае зависимость $z = z(x)$ называется *сложной функцией* переменной x, а величина y – промежуточной переменной. Сложную функцию можно записать в виде

$$z = z\big(\, y(x)\,\big)\,.$$

Правило 3. Производная сложной функции по независимой переменной равна произведению производной этой функции по промежуточной переменной на производную промежуточной переменной по независимой переменной:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\,. \tag{1.14}$$

Совокупность операций, которые необходимо совершить, чтобы найти производную некоторой функции, называется *дифференцированием* этой функции.

Производная функции имеет геометрический смысл. Для того чтобы понять, в чем он заключается, рассмотрим кривую C на рис. 1.1, которая представляет собой график некоторой функции $y = y(x)$. Точки M и N на графике соответствуют значениям аргумента x и $x + \Delta x$. Прямая, проходящая через две точки на кривой, называется ее *секущей*. Секущая MN наклонена к оси x под углом β, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg}\,\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,. \tag{1.15}$$

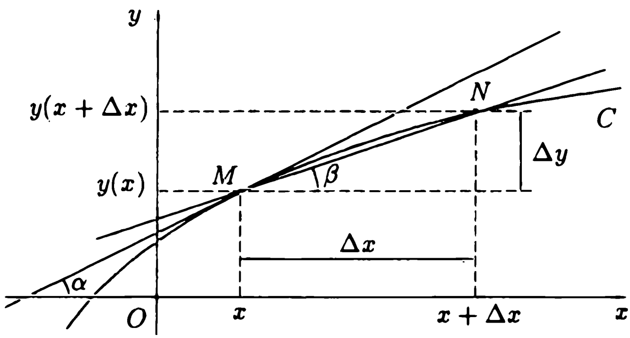

Рис. 1.1. К определению геометрического смысла производной

Пусть приращение аргумента Δx стремится к нулю, тогда точка N по кривой C стремится к точке M. Прямая, соответствующая предельному положению секущей при $N \to M$, называется *касательной* к кривой C в точке M. Обозначим через α угол между касательной и осью x. Если

$\Delta x \to 0$, то $\beta \to \alpha$ и в силу определения производной (1.3) равенство (1.15) принимает вид

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x). \tag{1.16}$$

Это равенство определяет геометрический смысл производной. Производная функции $y(x)$ равна тангенсу угла α наклона касательной к оси x.

Функция $y(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке оси x, если для любых двух значений x_1 и x_2 аргумента, принадлежащих этому промежутку, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $y(x_1) < y(x_2)$. Для возрастающей функции отношение $\Delta y / \Delta x$ есть положительная величина. Предельный переход $\Delta x \to 0$ приводит к условию $y' > 0$. Таким образом доказано, что производная возрастающей функции положительна. Функция $y(x)$ называется *убывающей*, если из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $y(x_1) > y(x_2)$. Нетрудно доказать, что производная убывающей функции отрицательна.

На рис. 1.2 изображен график некоторой функции $y = y(x)$, точки M_1 и M_2 на котором называются *точками максимума*, а точка M_3 – *точкой минимума*. Эти точки иначе называются *точками экстремума функции*. Можно принять следующее определение *экстремума функции*. Функция $y = y(x)$ достигает *экстремума* при $x = x_0$, если существует окрестность этой точки ($x_0 - \Delta \le x \le x_0 + \Delta$) такая, что для всех значений x из этой окрестности приращение $\Delta y = y(x) - y(x_0)$ функции имеет один и тот же знак. А именно, функция $y(x)$ имеет в точке x_0 максимум, если $\Delta y \le 0$ в окрестности этой точки, и минимум, если $\Delta y \ge 0$.

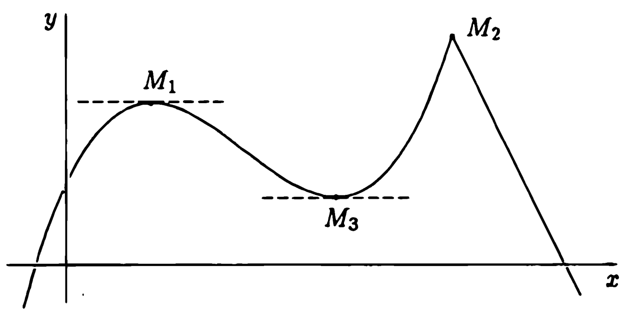

Рис. 1.2. Экстремумы функции

Если через точки M_1 и M_2 провести касательные к кривой, то они будут горизонтальны, т.е. угол между каждой из них и осью x будет равен нулю. При этом в силу соотношения (1.16) производные функции в этих точках также будут равны нулю. Через точку M_2 касательную провести невозможно, и производная в этой точке не существует. Таким образом, можно утверждать, что *в точках экстремума производная функции или равна нулю, или не существует.* Это утверждение есть необходимое условие экстремума функции.

В результате дифференцирования функции $y(x)$ получим другую функцию $y'(x)$, т.е. производную от y по x, которую иначе называют *первой производной.* Эту функцию также можно продифференцировать по x. Производная функции $y'(x)$ называется *второй производной* функции $y(x)$, или *производной второго порядка.* Она обозначается так:

$$y'' = y''(x) \equiv \frac{d^2y}{dx^2}\,.$$

Последовательное n-кратное дифференцирование функции $y(x)$ дает n-ю производную, или производную n-го порядка

$$y^{(n)} = y^{(n)}(x) \equiv \frac{d^ny}{dx^n}\,.$$

1.2. Первообразная

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на данном промежутке, если в каждой точке этого промежутка

$$F'(x) \equiv \frac{dF}{dx} = f(x) \tag{1.17}$$

или, что эквивалентно,

$$dF = f(x)\,dx\,. \tag{1.18}$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $F(x) + C$, где C – некоторая постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$. Это выражение называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx \equiv F(x) + C\,, \tag{1.19}$$

здесь $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а x – *переменной интегрирования.* Отыскание первообразной, или неопределенного интеграла от заданной функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции. Для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, необходимо, как это следует из определения (1.17), продифференцировать найденную первообразную $F(x)$ и получить подынтегральную функцию $f(x)$.

Преобразуем формулу (1.7) при помощи подстановки $n = \alpha + 1$. Если $\alpha \neq -1$, получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = x^{\alpha}.$$

Сравнив это равенство с определением (1.17), приходим к заключению, что выражение под знаком производной есть первообразная функция x^{α}, т.е.

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \tag{1.20}$$

при $\alpha \neq -1$. Аналогично, используя равенства (1.8) – (1.11), можно доказать следующие формулы:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \tag{1.21}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \tag{1.22}$$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C, \tag{1.23}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \tag{1.24}$$

Рассмотрим два метода интегрирования, первый из которых называется *методом подстановки*, или *методом замены переменной*. В этом методе для отыскания интеграла от функции $f(x)$ вводят функцию $x = x(t)$. Дифференциал этой функции равен

$$dx = \dot{x}(t)\,dt,$$

где

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}$$

– производная от функции x по переменной t. Используя функцию $x(t)$ и ее дифференциал, придем к формуле

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\cdot\dot{x}(t)\,dt, \tag{1.25}$$

которая называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле. Применение этой формулы имеет смысл в том случае, когда подынтегральная функция во втором интеграле проще, чем в исходном.

Другой метод называется *интегрированием по частям.* Проинтегрируем обе части равенства (1.13) по x. Получим

$$\int (u\,v)'\,dx = \int u'\,v\,dx + \int u\,v'\,dx\,.$$

Так как

$$\int (u\,v)'\,dx \equiv u\,v\,,$$

придем к формуле

$$\int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx\,,$$

которую обычно записывают в виде

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \tag{1.26}$$

и называют *формулой интегрирования по частям.*

1.3. Определенный интеграл

Пусть на отрезке $[a,\,b]$ оси x задана функция $f(x)$. Разделим отрезок $[a,\,b]$ на n частей точками $x_0 = a,\, x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n)$. На каждом из полученных таким образом n отрезков $[x_{i-1},\, x_i]$, где $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, выберем по точке ξ_i: $\xi_i \in [x_{i-1},\, x_i]$. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,b]$. Шагом h разбиения отрезка $[a,\,b]$ на части называют наибольшую из длин отрезков $[x_{i-1},\, x_i]$:

$$h = \max\,|\,x_i - x_{i-1}|\,.$$

Если $h \to 0$, то число отрезков $n \to \infty$.

Предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении шага разбиения к нулю, называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,b]$ и обозначается символом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,. \tag{1.27}$$

При этом числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования.*

Используя определение $f = F'$ первообразной F, определенный интеграл можно представить в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \frac{dF}{dx}\,dx = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} dF\,;$$

т.е. можно рассматривать его как предел суммы приращений ΔF_i величины F:

$$\int\limits_{F(a)}^{F(b)} dF = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}(F_i - F_{i-1})\,,$$

где $F_i = F(x_i)$. Очевидно, что эта сумма равна полному приращению первообразной на отрезке $[a,\,b]$:

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i - F_{i-1}) = (F_1 - F(a)) + (F_2 - F_1) + (F_3 - F_2) + \ldots +$$
$$+ (F_{n-1} - F_{n-2}) + (F(b) - F_{n-1}) = F(b) - F(a)\,.$$

Таким образом, приходим к *формуле Ньютона - Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \equiv F(b) - F(a)\,, \tag{1.28}$$

которую применяют для вычисления определенного интеграла.

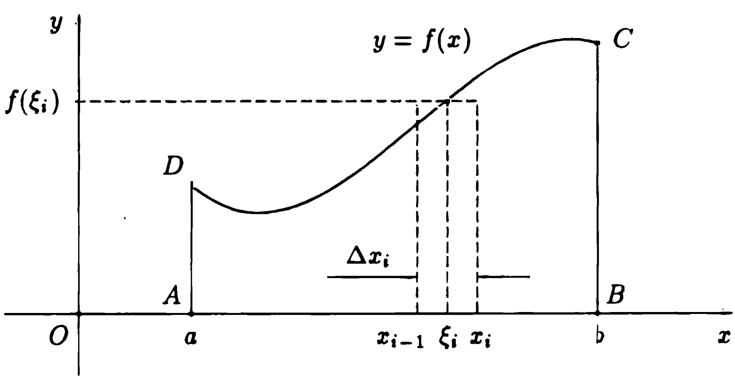

Рис. 1.3. Определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции ABCD

Определенный интеграл широко используется в различных задачах, одной из которых является задача о площади плоской фигуры. Рассмотрим на плоскости xy фигуру $ABCD$ (рис. 1.3), ограниченную отрезком $[a,\ b]$ оси x, прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ – функция неотрицательная при $x \in [a,\ b]$. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*.

Как видно из рис. 1.3, общий член $f(\xi_i)\,\Delta x_i$ интегральной суммы равен площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Поэтому в пределе при $h \to 0$ интегральная сумма для неотрицательной функции $f(x)$ будет равна площади S криволинейной трапеции $ABCD$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

При вычислении определенного интеграла можно использовать с небольшими изменениями описанные выше методы подстановки и интегрирования по частям.

1.4. Функции нескольких переменных

Переменная u называется функцией n переменных $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, если каждой совокупности чисел $\{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n\}$ из некоторого множества по определенному закону ставится в соответствие одно или несколько значений переменной u:

$$u = u(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)\,. \tag{1.29}$$

При этом величины $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ называются независимыми переменными, или аргументами функции u.

Дадим аргументу x_1 приращение Δx_1, оставляя значения других аргументов неизменными. При этом функция (1.29) получит приращение

$$\Delta_1 u = u(x_1 + \Delta x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) - u(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)\,,$$

которое называется *частным приращением* функции u по x_1. *Частной производной* функции (1.29) по переменной x_1 называется предел отношения частного приращения $\Delta_1 u$ функции u к приращению Δx_1 аргумента x_1 при стремлении этого приращения к нулю. Частную производную функции u по x_1 обозначают так:

$$u'_{x_1} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_1 u}{\Delta x_1}\,.$$

Аналогично определяются частные производные по другим независимым переменным. Так, частная производная функции u по x_i будет

$$u'_{x_i} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i u}{\Delta x_i}, \tag{1.30}$$

где $i = 1, 2, ..., n$;

$$\Delta_i u = u(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - u(x_1, ..., x_i, ..., x_n) \tag{1.31}$$

– частное приращение функции u по x_i.

Вычисление частных производных от функции нескольких переменных производится по тем же правилам, что и вычисление производной функции одного переменного, так как частная производная функции u по x_i есть по определению обыкновенная производная от u по x_i при постоянных значениях всех других независимых переменных.

Частным дифференциалом du_i функции (1.29) называется главная линейная относительно Δx_i часть приращения (1.31) функции u, которая в соответствии с формулой (1.4) равна

$$du_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_i,$$

где dx_i – дифференциал аргумента x_i. Если бесконечно малые приращения $dx_1, ..., dx_n$ получают все аргументы $x_1, ..., x_n$, то функция u получит приращение, равное сумме частных приращений. При этом главная линейная относительно $dx_1, ..., dx_n$ часть этого приращения, равная

$$du = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_i, \tag{1.32}$$

называется *полным дифференциалом функции нескольких переменных.*

Частные производные u'_{x_i} в свою очередь являются функциями аргументов $x_1, ..., x_n$ и иначе называются *частными производными первого порядка*. Производные от функций u'_{x_i} называются *частными производными второго порядка* и обозначаются следующим образом:

$$u''_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{1.33}$$

При $i \neq j$ производная (1.33) называется смешанной.

Т е о р е м а . Смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{1.34}$$

1.5. Дифференциальные уравнения

Равенство

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x), \ldots,\, y^{(n)}(x)\right) = 0\,, \tag{1.35}$$

которое связывает независимую переменную x, функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением* n-го порядка. *Решением дифференциального уравнения* называется функция $y = y(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т.е. функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество. Отыскание решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* данного уравнения.

Общее решение обыкновенннного дифференциального уравнения порядка n имеет вид

$$y = y(x;\, C_1,\, C_2, \ldots,\, C_n)\,, \tag{1.36}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные (так называемые постоянные интегрирования). Придавая этим постоянным определенные числовые значения, будем получать различные частные решения дифференциального уравнения.

Разрешив дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x,\, y,\, y') = 0$$

относительно производной y', придем к уравнению вида

$$y' = f(x,\, y)\,.$$

Если правая часть этого уравнения есть произведение двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая – только от y, т.е.

$$y' = \varphi(x) \cdot \psi(y)\,, \tag{1.37}$$

то такое дифференциальное уравнение называется *уравнением с разделяющимися переменными.* Используя формулу (1.2), уравнение (1.37) можно преобразовать к виду

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\, dx\,. \tag{1.38}$$

Это и называется разделить переменные. Из последнего уравнения следует, что общее решение уравнения (1.37) неявным образом дается соотношением

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)\, dx + C\,. \tag{1.39}$$

В справедливости этого соотношения можно убедиться, продифференцировав обе его части по x с учетом определения первообразной и правила дифференцирования сложной функции. Для нахождения постоянных интегрирования необходимо использовать некоторые дополнительные условия, которые соответствуют физическим условиям поставленной задачи.

1.6. Системы координат

Значения физической величины удобно изображать точками на числовой оси, для построения которой необходимо на прямой выбрать положительное направление, начало отсчета и масштаб. Если в каких-либо задачах приходится иметь дело с двумя и более величинами, то совокупность значений этих величин изображают точкой на плоскости или в пространстве.

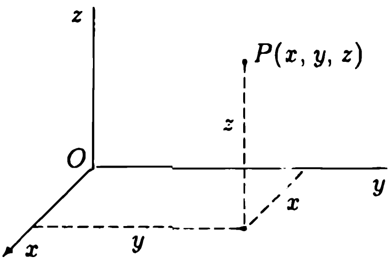

Рис. 1.4. Координаты точки в пространстве

Пусть в некоторой задаче независимыми являются три величины, которые обозначим x, y, z. Для того чтобы придать этим величинам геометрический смысл, построим три числовые оси, на которых будем откладывать значения x, y, z соответственно. Если эти оси взаимно перпендикулярны и проходят через одну точку, то говорят, что в пространстве задана декартова прямоугольная система координат, которая называется так в честь французского ученого Рене Декарта (1596 – 1650). Точку пересечения осей называют началом координат, а сами оси – координатными осями, каждой из которых приписывают порядковый номер. Первая ось называется осью абсцисс, или осью x, вторая – осью ординат, или осью y, а третья – осью аппликат, или осью z. Геометрический смысл, который можно придать совокупности $\{x,\ y,\ z\}$ трех величин, заключается в том, что с их помощью можно отметить точку в пространстве.

Используя систему координат, произвольной точке P пространства можно поставить в соответствие три числа x, y, z (рис. 1.4), которые называются ее координатами. Такое соответствие символически записывают как $P(x,\ y,\ z)$. Координата x точки P (абсцисса) есть расстояние от этой точки до координатной плоскости yz (где $x = 0$), взятое с учетом знака. Аналогично определяются координаты y и z (ордината и аппликата).

Указанным способом в пространстве можно построить несколько декартовых прямоугольных систем координат, которые отличаются одна от другой положением начала координат и направлением координатных осей. Разумеется, координаты одной и той же точки пространства в различных системах координат отличаются друг от друга. Пусть x, y, z есть координаты точки P относительно одной системы координат, а x_1, y_1, z_1 – координаты этой же точки относительно другой системы. Координаты x_1, y_1, z_1 связаны с координатами x, y, z соотношениями

$$x_1 = x_1(x,\, y,\, z), \quad y_1 = y_1(x,\, y,\, z), \quad z_1 = z_1(x,\, y,\, z),$$

которые называются *формулами преобразования координат.*

Пусть в каждой точке P пространства задано значение некоторой физической величины φ:

$$\varphi = \varphi(P)\,.$$

В таком случае говорят, что величина φ есть *функция точки* в пространстве. Если выбрана прямоугольная декартова система координат, то можно записать равенство

$$\varphi = \varphi(x,\, y,\, z)\,,$$

которое выражает зависимость величины φ от координат точки пространства.

Величина φ называется *скалярной величиной*, или *скаляром*, если ее значение в произвольной точке пространства не зависит от выбора системы координат. Примерами скалярных величин могут служить плотность, давление и температура вещества. Если каждой точке пространства поставлено в соответствие значение скалярной величины, то такое соответствие называется *скалярным полем.* Иначе говоря, скалярное поле есть скалярная функция точки пространства.

1.7. Векторы

Для описания некоторых физических объектов и явлений необходимо использовать не одну, а сразу несколько величин, значения которых зависят от выбора системы координат. Совокупность таких величин называется тензором. Частным примером тензора является вектор. Самое простое определение вектора звучит так: *вектор* есть направленный отрезок, т.е. часть прямой линии, которая соединяет две точки в пространстве. Одну из этих точек называют началом вектора, а другую – его концом.

На рис. 1.5 изображен вектор, началом которого является точка A, а концом – точка B. Такой вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Часто вектор обозначают одной буквой со стрелкой наверху (например, вектор – $\vec{a}$) или той же буквой, напечатанной жирным шрифтом (**a**). Длина AB вектора $\overrightarrow{AB}$ называется его *модулем* и обозначается так:

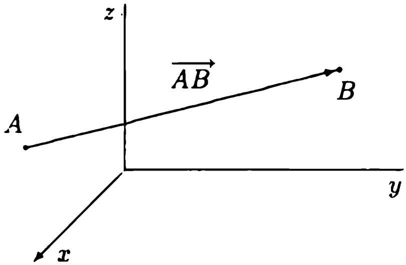

Рис. 1.5. Вектор $\overrightarrow{AB}$

$$AB = |\overrightarrow{AB}|.$$

Модуль вектора $\vec{a}$ обозначают так:

$$a = |\vec{a}|.$$

Вектор, начало и конец которого совпадают, по определению равен нулю. Его модуль также равен нулю. Два вектора считаются равными друг другу, если они параллельны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину. На этом определении основана операция параллельного переноса вектора. При параллельном переносе вектор не изменяется, так как при этом не изменяются его длина и направление.

Два или несколько векторов называются коллинеарными, если при помощи параллельного переноса эти векторы можно расположить на одной прямой. Параллельным переносом два вектора всегда можно поместить на одной плоскости. Три вектора называются компланарными, если их параллельный перенос позволяет расположить эти векторы в одной плоскости.

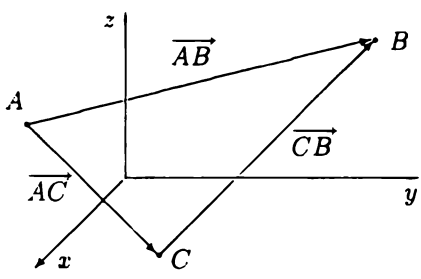

Рис. 1.6. Сложение векторов по правилу треугольника

Рассмотрим три точки A, B, C в пространстве (рис. 1.6) и построим с их помощью три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$. По определению первый из этих векторов равен сумме двух других:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}. \qquad (1.40)$$

Это определение суммы двух векторов называют *правилом треугольника*. Иначе это правило можно сформулировать так: суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что конец вектора $\vec{a}$ совмещен с началом вектора $\vec{b}$.

Сложение векторов подчиняется переместительному закону:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \,,$$

в справедливости которого нетрудно убедиться при помощи параллелограмма, изображенного на рис. 1.7.

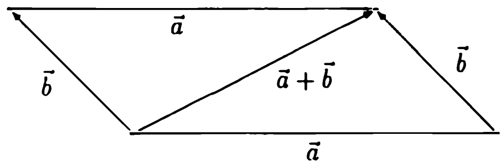

Рис. 1.7. Правило параллелограмма

Сумму более двух векторов можно найти, применяя последовательно несколько раз правило треугольника. Например, результатом сложения векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,..., $\vec{a}_n$ будет вектор $\vec{b}$, который начинается в начале первого вектора и заканчивается в конце последнего, при условии, что начало каждого из слагаемых векторов совмещено с концом предшествующего вектора (рис. 1.8):

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \,.$$

Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр λ называется вектор, параллельный вектору $\vec{a}$, направленный как $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, или направленный противоположно, если $\lambda < 0$; и имеющий модуль $|\,\lambda\,|\,a$. Результат умножения вектора $\vec{a}$ на число λ обозначается так: $\lambda\,\vec{a}$. Если $\lambda = 0$, то по определению $\lambda\vec{a} = 0$.

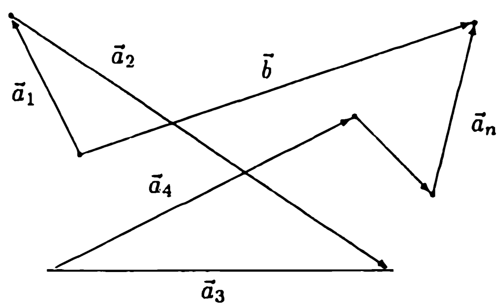

Рис. 1.8. Сумма векторов

Построим некоторую декартову прямоугольную систему координат и введем три вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) начало каждого из них совпадает с началом координат, 2) их модули равны единице: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, 3) вектор $\vec{i}$ направлен вдоль оси x, вектор $\vec{j}$ – вдоль оси y, а вектор $\vec{k}$ – вдоль оси z (рис. 1.9). Эти векторы называют *единичными ортами.*

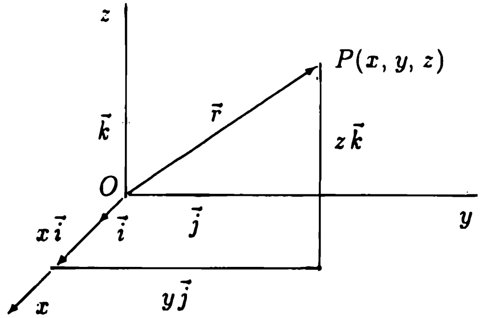

Рис. 1.9. Разложение радиус-вектора по единичным ортам

Вектор $\overrightarrow{OP}$, начало которого находится в начале координат, а конец – в произвольной точке P, называется *радиус-вектором* этой точки и обозначается так:

$$\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP} .$$

Используя определения операций сложения векторов и умножения вектора на число, радиус-вектор можно представить в виде суммы (рис. 1.9):

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} , \tag{1.41}$$

где слагаемые $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ называются *компонентами*, или *составляющими* вектора $\vec{r}$, числа x, y, z – его *координатами*, а само соотношение (1.41) – формулой разложения вектора $\vec{r}$ по единичными ортам.

Расстояние от точки P до начала координат, т.е. модуль радиус-вектора, используя теорему Пифагора (Пифагор Самосский (VI в. до рожд. Хр.) – древнегреческий математик), можно выразить через координаты вектора $\vec{r}$:

$$|\overrightarrow{OP}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \tag{1.42}$$

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скаляр, который обозначается $(\vec{a}, \vec{b})$, или $\vec{a}\,\vec{b}$ и который равен произведению модулей этих векторов, умноженному на косинус угла φ между ними:

$$(\vec{a},\,\vec{b}) \equiv \vec{a}\cdot\vec{b} \equiv \vec{a}\,\vec{b} = a\,b\,\cos\varphi\,. \tag{1.43}$$

При этом произведение $a\,\cos\varphi$ называют *проекцией вектора* $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Очевидно, что скалярное произведение векторов не зависит от того, в каком порядке они расположены:

$$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}\,.$$

В частном случае, когда $\vec{b} = \vec{a}$, формула (1.43) дает

$$(\vec{a},\,\vec{a}) \equiv \vec{a}^{\,2} = a^2\,. \tag{1.44}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны друг другу, то их скалярное произведение согласно формуле (1.43) равно нулю, т.к. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$:

$$\vec{a}\,\vec{b} = 0 \quad \text{при} \quad \vec{a}\perp\vec{b}\,. \tag{1.45}$$

Применяя формулы (1.44) и (1.45) к векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, найдем, что

$$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1\,, \qquad \vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{k} = 0\,. \tag{1.46}$$

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{i}$

$$(\vec{a},\,\vec{i}) = a_x\,.$$

Поэтому величину a_x называют проекцией вектора $\vec{a}$ на ось x. Аналогично скалярные произведения

$$(\vec{a},\,\vec{j}) = a_y \quad \text{и} \quad (\vec{a},\,\vec{k}) = a_z$$

называют проекциями вектора $\vec{a}$ на оси y и z соответственно.

Произвольный вектор $\vec{a}$ можно разложить по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; т.е. представить его в виде

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,. \tag{1.47}$$

В этой сумме коэффициенты a_x, a_y и a_z, т.е. проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат, называют также его *координатами*, а векторы $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$ и $a_z\vec{k}$ – его компонентами, или составляющими. При этом модуль вектора $\vec{a}$ будет

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{1.48}$$

Т е о р е м а. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны друг другу тогда и только тогда, когда равны их одноименные координаты:

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$

Запишем разложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по единичным ортам:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \tag{1.49}$$

и перемножим их скалярно. С учетом равенств (1.46) придем к формуле

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,, \tag{1.50}$$

согласно которой скалярное произведение двух векторов, заданных в координатной форме (1.49), равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, который обозначается $[\vec{a}\,\vec{b}]$, или $\vec{a} \times \vec{b}$ и удовлетворяет следующим условиям: 1) его модуль равен произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, умноженному на синус угла φ между ними:

$$\left|[\vec{a}\,\vec{b}]\right| = a\,b\,\sin\varphi\,, \tag{1.51}$$

2) этот вектор перпендикулярен плоскости, в которой можно расположить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.10):

$$[\vec{a}\,\vec{b}] \perp \vec{a}, \qquad [\vec{a}\,\vec{b}] \perp \vec{b}\,; \tag{1.52}$$

3) его направление определяется правилом правого винта. Согласно этому правилу направление вектора $[\vec{a}\,\vec{b}]$ совпадает с направлением движения правого винта, который располагают перпендикулярно плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и вращают в направлении кратчайшего поворота от первого вектора ко второму, т.е. от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ (рис. 1.10).

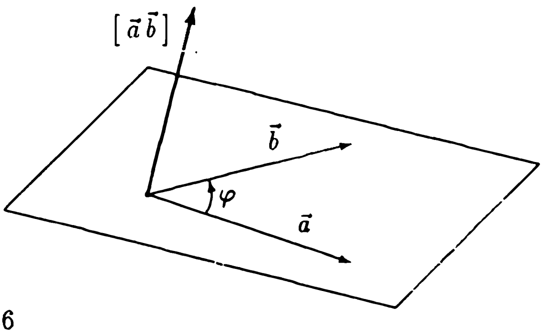

Рис. 1.10. К определению векторного произведения. Правило правого винта

Согласно этому определению вектор $[\vec{b}\,\vec{a}]$ равен по модулю вектору $[\vec{a}\,\vec{b}]$, но направлен в противоположную сторону:

$$[\vec{b}\,\vec{a}] = -[\vec{a}\,\vec{b}]\,. \tag{1.53}$$

Кроме этого, векторное произведение обладает свойствами:

$$[\lambda\vec{a}\,\vec{b}] = \lambda\,[\vec{a}\,\vec{b}]\,, \tag{1.54}$$

$$[\vec{a}\,(\vec{b}+\vec{c})\,] = [\vec{a}\,\vec{b}] + [\vec{a}\,\vec{c}]\,. \tag{1.55}$$

Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю, т.к. $\sin 0 = \sin\pi = 0$:

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = 0\,, \qquad \text{если} \qquad \vec{a}\,||\,\vec{b}\,. \tag{1.56}$$

Используя определение и свойства векторного произведения, нетрудно доказать, что

$$\begin{gathered}
[\vec{i}\,\vec{i}\,] = [\vec{j}\,\vec{j}\,] = [\vec{k}\,\vec{k}\,] = 0\,, \\
[\vec{i}\,\vec{j}\,] = \vec{k}, \qquad [\vec{j}\,\vec{k}\,] = \vec{i}\,, \qquad [\vec{k}\,\vec{i}\,] = \vec{j}\,, \\
[\vec{j}\,\vec{i}\,] = -\vec{k}, \qquad [\vec{k}\,\vec{j}\,] = -\vec{i}\,, \qquad [\vec{i}\,\vec{k}\,] = -\vec{j}\,.
\end{gathered} \tag{1.57}$$

Свойства (1.54) и (1.55) и формулы (1.57) дают возможность преобразовать векторное произведение векторов (1.49) к виду

$$\begin{gathered}
[\vec{a}\,\vec{b}] = [\,(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})\,] = \\
= (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}\,.
\end{gathered} \tag{1.58}$$

Эту формулу можно записать в более удобной для запоминания форме с помощью определителя:

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\,. \tag{1.59}$$

Если разложить этот определитель по элементам первой строки, то получим формулу (1.58).

Пусть в каждой точке P пространства определен вектор $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \vec{a}(P)\,.$$

В таком случае говорят, что задано *векторное поле* $\vec{a}$. Другими словами, векторное поле есть векторная функция точки в пространстве или радиус-вектора $\vec{r}$:

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}\,)\,.$$

Скалярное поле есть скалярная функция точки в пространстве или радиус-вектора $\vec{r}$:

$$\varphi = \varphi(\vec{r})\,.$$

Построим две системы координат K и K_1, направления осей которых задаются системами единичных ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$. Некоторый вектор $\vec{a}$ можно разложить как по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, так и по векторам $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = a_x^{(1)}\vec{i}_1 + a_y^{(1)}\vec{j}_1 + a_z^{(1)}\vec{k}_1\,,$$

где $a_x^{(1)}$, $a_y^{(1)}$, $a_z^{(1)}$ – координаты вектора $\vec{a}$ в системе координат K_1. В общем случае координаты одного и того же вектора в разных системах координат будут различны.

Преимущества, которые дает векторная форма записи физических законов и соотношений между физическими величинами, по сравнению с координатной формой заключаются не только в том, что векторные равенства, как правило, более просты и лаконичны, но также в том, что их вид не зависит от выбора системы координат.

ГЛАВА 2
КИНЕМАТИКА

2.1. Пространство. Время. Движение

Согласно основным положениям материалистического учения окружающий нас мир состоит из различных видов материи, которая движется в пространстве и изменяется с течением времени. Другими словами, пространство и время есть формы существования материи, неотделимые от самой материи. Можно представить себе пустое пространство и время без материи, но следует помнить, что такие представления есть всего лишь абстракции, существующие в нашем воображении.

Трудно дать короткое, общее и строгое определение понятиям пространства и времени. Можно сказать, что пространство есть совокупность протяженных тел, а время – совокупность часов, расположенных в различных местах пространства и отсчитывающих длительности временных интервалов. Протяженность тел характеризуется длиной l, а длительность протекающих процессов – временем t. Определить смысл физической величины означает указать способ ее измерения. Так, например, длину можно измерить линейкой, а время – при помощи хронометра.

Движение, понимаемое в широком смысле как всякое изменение, является неотъемлемым всеобщим свойством материи. Простейшей формой движения является механическое движение, или перемещение, т.е. изменение положения одного тела относительно другого. Механика есть наука о механическом движении тел. Ее основы были заложены английским ученым Исааком Ньютоном (1643 – 1727).

Основными понятиями ньютоновской (классической) механики, составляющими механистическую модель мира, являются *абсолютное пространство, абсолютное время и материальная точка.* Абсолютное пространство можно представить себе как неосязаемую бесконечную кристаллическую решетку, сквозь которую беспрепятственно могут перемещаться различные тела. Оно подобно пространству внутри ящика, стенки которого раздвинули до бесконечности. Абсолютное пространство вмещает в себя всю материю, но от нее не зависит. Если из какой-либо части пространства удалить материю, то останется само пространство. Предполагается, что такое пустое пространство существует в действительности. Абсолютное пространство одновременно неосязаемо и незыблемо. Основными его свойствами являются однородность и изотропность, т.е. все точки абсолютного пространства и все направления в нем равноценны.

Абсолютное время t по определению протекает равномерно, не зависит от свойств материи и от места в пространстве, т.е. предполагается, что существует принципиальная возможность измерить величину t посредством синхронизированных часов сразу во всех точках пространства, и в результате этих измерений получить всюду одно и то же значение t. Другими словами, это предположение означает, что понятие одновременности событий рассматривается как очевидное и не поддающееся определению. Абсолютное время однородно, но не изотропно, т.е. все его мгновения равноценны, но из двух мгновений одно было раньше другого.

Говорят, что тело рассматривается как *материальная точка*, когда условия задачи позволяют пренебречь его размерами. Материальная точка есть абстрактное понятие, так как все реальные тела, даже элементарные частицы, имеют некоторые размеры. Протяженные тела в механике рассматриваются как системы, в состав которых входит несколько (иногда очень много) материальных точек. *Абсолютно твердым телом* называется система материальных точек, расстояния между которыми со временем не изменяются. Следовательно, размеры и форма абсолютно твердого тела сохраняются с течением времени.

Тело, относительно которого определяют положения и рассматривают перемещения других тел, называется *телом отсчета*. Для количественного описания движения других тел с этим телом связывают некоторую систему координат. Приборы для измерения времени t и координат x, y, и z произвольной точки пространства вместе с телом, на котором они находятся, составляют *систему отсчета*.

Кинематика – раздел механики, в котором дается математическое описание движения тел, но не объясняются причины, определяющие тот или иной характер их движения.

2.2. Кинематика прямолинейного движения

Самое простое механическое движение – это *прямолинейное поступательное движение*, т.е. движение тела вдоль прямой линии без вращения. Положение тела на прямой можно задать при помощи координаты x (рис. 2.1), которая есть расстояние от начала отсчета до тела, взятое с учетом знака. Иначе говоря, координата равна названному расстоянию, когда тело находится справа от начала отсчета, и расстоянию, взятому со знаком минус, когда оно находится слева от начала отсчета.

Прямолинейное движение тела удобно описывать при помощи функции

$$x = x(t)\,. \tag{2.1}$$

Зная эту зависимость, можно определить положение тела на оси x в любой момент времени t.

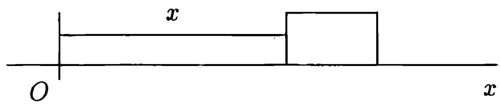

Рис. 2.1. Координата тела

Пусть t_1 и t_2 – два произвольных момента времени. Разность

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

называется *приращением времени*, а разность

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

соответствующих значений функции (2.1)

$$x_1 = x(t_1) \quad \text{и} \quad x_2 = x(t_2)$$

– *приращением координаты*. Отношение этих приращений

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.2}$$

называется *средней скоростью* тела за время от t_1 до t_2.

Производная от координаты $x(t)$ по времени t, которую принято обозначать точкой над дифференцируемой функцией

$$v = \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}\,, \tag{2.3}$$

называется *мгновенной скоростью* тела, или просто *скоростью*, а производная от скорости $v = v(t)$ по времени t

$$a = \dot{v} \equiv \frac{dv}{dt} \tag{2.4}$$

называется *ускорением* тела. На основании определения (2.3) мгновенной скорости, можно утверждать, что ускорение есть вторая производная от координаты по времени:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}\,. \tag{2.5}$$

Скорость тела есть некоторая функция от времени $v = v(t)$. Отношение приращения этой функции

$$\Delta v = v_2 - v_1 \equiv v(t_2) - v(t_1)$$

к соответствующему приращению времени Δt называется *средним ускорением* тела за время от t_1 до t_2 :

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} \, .$$

Путь ds, пройденный телом вдоль оси x за время от t до $t+dt$, есть неотрицательная величина, которая связана с приращением dx координаты соотношением

$$ds = |\, dx \,| \, . \tag{2.6}$$

Из этого соотношения следует, что за время от t_1 до $t_2 > t_1$ тело проходит путь

$$s = \int ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{|\, dx \,|}{dt} \, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\, v \,| \, dt \, . \tag{2.7}$$

2.3. Кинематика движения материальной точки

Рассмотрим движение материальной точки в пространстве. В дальнейшем для краткости будем иногда называть материальную точку частицей. Положение частицы в пространстве относительно некоторой декартовой прямоугольной системы координат определяется значениями координат x, y, z точки пространства, в которой она находится. При движении частицы ее координаты изменяются с течением времени:

$$x = x(t) \, , \qquad y = y(t) \, , \qquad z = z(t) \, . \tag{2.8}$$

Движение материальной точки считается известным, если заданы функции (2.8), при помощи которых можно в любой момент времени t определить ее положение в пространстве.

В силу соотношения (1.41) совокупность функций (2.8) эквивалентна зависимости радиус-вектора частицы от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \, . \tag{2.9}$$

Линия, которую прочерчивает материальная точка при своем движении в пространстве, называется ее *траекторией*. Функции (2.8) и (2.9) есть записанные в параметрической форме уравнения траектории, в которых роль параметра играет время t.

Пусть в момент времени t_1 частица находилась в точке P_1 (рис. 2.2), радиус-вектор которой

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)\,.$$

За время Δt частица изменит свое положение и в момент времени $t_2 = t_1 + \Delta t$ окажется в точке P_2, радиус-вектор которой

$$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)\,.$$

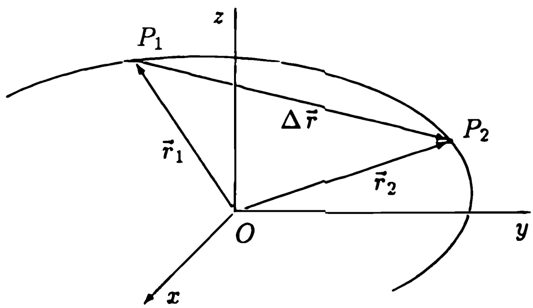

Рис. 2.2. Траектория материальной точки

Вектор

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

называется *вектором перемещения* частицы из точки P_1 в точку P_2, а вектор

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (2.10)$$

– ее *средней скоростью* за время от t_1 до t_2.

Дадим некоторому значению времени t приращение Δt. При этом радиус-вектор $\vec{r}$ получит приращение (рис. 2.3)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)\,. \qquad (2.11)$$

Производной от вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ по времени t называется предел отношения приращения функции $\Delta\vec{r}$ к приращению Δt ее аргумента при стремлении Δt к нулю. Так как производную по времени принято обозначать точкой над дифференцируемой функцией, производная от $\vec{r}$ по t будет

$$\dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}\,. \qquad (2.12)$$

После вычисления предела получим некоторый вектор, зависящий от времени t, но не зависящий от Δt. Этот вектор называется *мгновенной скоростью* материальной точки, или просто *скоростью* и обозначается так:

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}\,. \tag{2.13}$$

Вектор $\Delta\vec{r}$ соединяет две точки P и Q траектории (рис. 2.3). При $\Delta t \to 0$ точка Q стремится к точке P, а приращение $\Delta\vec{r}$ становится бесконечно малым и обозначается $d\vec{r}$. Производную (2.13) можно рассматривать как отношение бесконечно малого приращения $d\vec{r}$ радиус-вектора к дифференциалу времени dt. Поэтому при необходимости соотношение (2.13) можно записать в виде

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt\,. \tag{2.14}$$

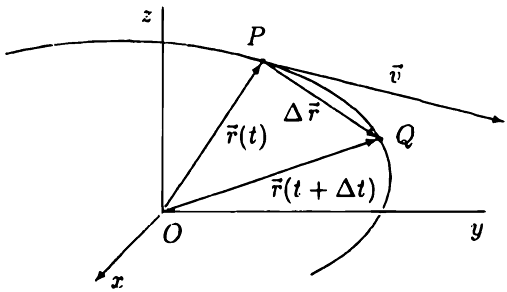

Рис. 2.3. Вектор перемещения частицы и ее скорость

Касательной к траектории в точке P называется прямая, которая совпадает с предельным положением хорды PQ при $Q \to P$. Вектор $d\vec{r}$ соединяет две бесконечно близкие одна к другой точки траектории и направлен к ней по касательной. Из определения (2.13) следует, что вектор скорости $\vec{v}$ коллинеарен вектору $d\vec{r}$ и, следовательно, также является касательным к траектории в точке P.

Применяя формулу (1.41) разложения радиус-вектора по координатным ортам, запишем соотношение, связывающее функции (2.8) и (2.9):

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}\,. \tag{2.15}$$

Подставив это выражение в формулу (2.13), после дифференцирования получим:

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}\,. \tag{2.16}$$

По определению *координатами вектора скорости* называются коэффициенты в формуле его разложения по единичным ортам:

$$\vec{v} = v_x \, \vec{i} + v_y \, \vec{j} + v_z \, \vec{k} \, . \tag{2.17}$$

Сравнив две последние формулы, придем к заключению, что координаты вектора скорости есть производные по времени t от координат радиус-вектора:

$$v_x = \dot{x} \, , \qquad v_y = \dot{y} \, , \qquad v_z = \dot{z} \, . \tag{2.18}$$

Эти три равенства эквивалентны векторному равенству (2.13). Согласно общей формуле (1.44) модуль вектора скорости будет

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \, . \tag{2.19}$$

Длина Δs части траектории между точками P и Q на рис. 2.3 тем меньше отличается от длины хорды PQ, т.е. от модуля $|\Delta\vec{r}\,|$ вектора перемещения, чем ближе точка Q находится к точке P. В пределе при $Q \to P$ отношение этих величин будет равно единице:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}\,|}{\Delta s} = 1 \, .$$

Символически это равенство записывают так.

$$\frac{|\, d\vec{r}\,|}{ds} = 1 \, , \qquad \text{или} \qquad |\, d\vec{r}\,| = ds \, , \tag{2.20}$$

где величина ds называется *длиной бесконечно малой части траектории*, которая равна пути, пройденному частицей за время от t до $t + dt$.

Используя формулу (2.15), найдем, что вектор бесконечно малого перемещения $d\vec{r}$ связан с дифференциалами координат соотношением

$$d\vec{r} = dx \, \vec{i} + dy \, \vec{j} + dz \, \vec{k} \, , \tag{2.21}$$

а его модуль будет

$$|\, d\vec{r}\,| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \, . \tag{2.22}$$

Пусть $s = s(t)$ есть путь, пройденный частицей вдоль траектории к моменту времени t. Производную от s по t

$$\dot{s} \equiv \frac{ds}{dt}$$

можно рассматривать как отношение длины ds к бесконечно малому приращению времени dt. По формулам (2.20) и (2.22) найдем, что

$$\dot{s} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}\,.$$

Внесем дифференциал dt под знак корня. С учетом соотношений (2.18) и (2.19) придем к формуле

$$\dot{s} = v\,, \tag{2.23}$$

согласно которой производная от пути по времени равна модулю вектора скорости. Эту формулу можно преобразовать к виду

$$ds = v(t)\,dt\,. \tag{2.24}$$

Путь s, пройденный частицей за время от момента t_1 до момента t_2, равен длине куска траектории между точками P_1 и P_2 на рис. 2.2. Чтобы найти путь s, разобьем этот кусок траектории на части, длина самой большой из которых называется шагом разбиения. Если шаг разбиения устремить к нулю, то длину одной из частей траектории, т.е. путь ds, пройденный частицей за время dt, можно найти, зная скорость $v(t)$, по формуле (2.24). Весь путь s равен сумме длин малых частей траектории. В пределе при стремлении шага разбиения к нулю придем к определенному интегралу

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt\,. \tag{2.25}$$

Пусть вектор

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$$

есть скорость частицы в момент времени t_1, а вектор

$$\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2)$$

– ее скорость в момент времени t_2. Отношение

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\,,$$

приращения вектора скорости

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

к приращению времени $\Delta t = t_2 - t_1$ называется *средним ускорением* частицы за время от t_1 до t_2.

Производная от вектора скорости $\vec{v}(t)$ по времени t называется *мгновенным ускорением* частицы:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} \,. \tag{2.26}$$

Ускорение $\vec{a}$ есть вектор, координаты которого, т.е. коэффициенты в формуле

$$\vec{a} = a_x \,\vec{i} + a_y \,\vec{j} + v_z \,\vec{k} \tag{2.27}$$

его разложения по единичным ортам, можно найти, подставив выражение (2.17) в (2.26):

$$a_x = \dot{v}_x \,, \qquad a_y = \dot{v}_y \,, \qquad a_z = \dot{v}_z \,. \tag{2.28}$$

Таким образом, координаты вектора ускорения есть производные по времени t от соответствующих координат вектора скорости. Подстановка функций (2.18) в формулу (2.28) дает

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x} \,, \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \equiv \ddot{y} \,, \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \equiv \ddot{z} \,, \tag{2.29}$$

т.е. координаты вектора ускорения есть вторые производные от координат радиус-вектора. Равенства (2.29) эквивалентны векторному равенству

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}} \,, \tag{2.30}$$

которое можно было бы получить, подставив вектор скорости (2.13) в формулу (2.26). Модуль вектора ускорения можно найти, зная его координаты, по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \,.$$

Вектор $\vec{a}$ ускорения частицы можно представить в виде суммы двух взаимно ортогональных векторов $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ (рис. 2.4):

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \,, \qquad \vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau \,.} \tag{2.31}$$

Вектор $\vec{a}_\tau$ называется *касательным*, или *тангенциальным ускорением*. Этот вектор является касательным к траектории в любой ее точке, т.е. он направлен так же, как вектор скорости, или противоположен ему:

$$\vec{a}_\tau \parallel \vec{v} \,.$$

Проекция касательного ускорения на вектор скорости равна производной от модуля вектора скорости по времени:

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v}\,.} \tag{2.32}$$

Вектор $\vec{a}_n$ называется *нормальным*, или *центростремительным ускорением*. Этот вектор перпендикулярен к траектории частицы в любой ее точке:

$$\vec{a}_n \perp \vec{v}$$

и направлен к точке C, которая называется *центром кривизны* траектории. Модуль центростремительного ускорения определяется формулой

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}\,,} \tag{2.33}$$

где величина R называется *радиусом кривизны* траектории. Если траекторией движения частицы является окружность, то центр кривизны есть центр окружности, а радиус кривизны равен ее радиусу. В силу теоремы Пифагора модули векторов $\vec{a}$, $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ связаны соотношением

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2\,.$$

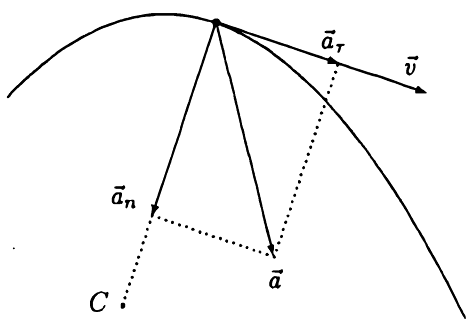

Рис. 2.4. Векторы нормального $\vec{a}_n$, тангенциального $\vec{a}_\tau$ и полного $\vec{a}$ ускорений. Центр кривизны траектории

2.4. Движение материальной точки по окружности

Пусть траекторией, по которой движется частица, является окружность. Такое движение называется *вращательным*, или просто *вращением*. Построим прямоугольную декартову систему координат так, чтобы рассматриваемая окружность лежала в плоскости xy, а ее центр находился в начале координат (рис. 2.5). Положение частицы на окружности удобно задавать при помощи угла φ, который образует радиус-вектор частицы с осью x. Если частица движется по окружности, то угол φ изменяется с течением времени. Таким образом, движение по окружности можно описать посредством функции

$$\varphi = \varphi(t)\,. \tag{2.34}$$

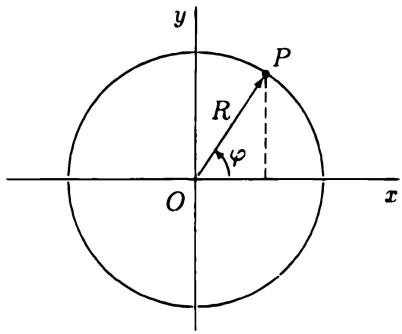

Рис. 2.5. К описанию движения точки по окружности

Угловой скоростью ω называется производная от функции $\varphi(t)$ по времени t:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}\,. \tag{2.35}$$

Угловое ускорение ε есть производная от угловой скорости $\omega(t)$ по времени t :

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \equiv \dot{\omega}\,. \tag{2.36}$$

Подстановка (2.35) в (2.36) приводит к формуле

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \equiv \ddot{\varphi}\,, \tag{2.37}$$

согласно которой угловое ускорение есть вторая производная от угла по времени.

Найдем декартовы координаты векторов скорости и ускорения, которые в отличие от угловых скорости и ускорения называются *линейными*.

Декартовы координаты частицы выражаются через радиус R окружности и угол φ следующим образом:

$$x = R\cos\varphi\,, \qquad y = R\sin\varphi\,. \tag{2.38}$$

Применяя формулы (1.8) и (1.9) и правило дифференцирования сложной функции, найдем проекцию вектора скорости на ось x:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -\,R\omega\sin\varphi\,. \tag{2.39}$$

Аналогично

$$v_y = R\omega\cos\varphi\,. \tag{2.40}$$

Следуя правилу (1.13) дифференцирования произведения, найдем проекции вектора ускорения:

$$a_x = -R\,(\varepsilon\sin\varphi + \omega^2\cos\varphi)\,, \quad a_y = R\,(\varepsilon\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi)\,. \tag{2.41}$$

По формуле (2.19) найдем модуль вектора скорости

$$\boxed{v = R\,|\,\omega\,|\,.} \tag{2.42}$$

Эта формула устанавливает связь между линейной и угловой скоростями.

Используя формулы (2.41), получим для модуля ускорения выражение

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,.$$

При этом формулы (2.32) и (2.33) дают следующие выражения для модулей нормального и тангенциального ускорений:

$$a_n = R\omega^2\,, \qquad a_\tau = R\,|\,\varepsilon\,|\,.$$

2.5. Кинематика движения твердого тела

Рассмотрим вращательное движение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси. Для этого построим прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось z совпала с осью вращения (рис. 2.6). Пусть P есть произвольная точка твердого тела. Координаты радиус-вектора $\vec{r}$ этой точки можно представить в виде

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi, \qquad z = \text{const}\,, \tag{2.43}$$

где R – расстояние от точки P до оси вращения, φ – угол между плоскостью, проходящей через ось z и точку P, и координатной плоскостью xz. При вращении тела угол φ будет изменяться со временем, а вектор скорости точки P согласно формулам (2.18) будет иметь координаты

$$v_x = -R\omega \sin\varphi, \qquad v_y = R\omega \cos\varphi, \qquad v_z = 0, \tag{2.44}$$

где

$$\omega = \dot{\varphi}.$$

Углы φ и φ' для двух точек твердого тела отличаются друг от друга на некоторую постоянную величину φ_o:

$$\varphi'(t) = \varphi(t) + \varphi_o.$$

Поэтому производные от функций $\varphi'(t)$ и $\varphi(t)$ по времени t одинаковы. Это означает, что все точки твердого тела имеют одну и ту же угловую скорость.

Введем *вектор угловой скорости* при помощи формулы

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}, \tag{2.45}$$

где $\vec{k}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси вращения. Из этого определения следует, что направление вектора $\vec{\omega}$ связано с направлением вращения тела правилом правого винта. В самом деле, при увеличении угла $\varphi(t)$ производная $\dot{\varphi} = \omega$ этой функции положительна и вектор (2.45) будет сонаправлен вектору $\vec{k}$, т.е. направлен вверх (рис. 2.6). При вращении тела в противоположном направлении функция $\varphi(t)$ убывает, ее производная отрицательна ($\omega < 0$) и вектор угловой скорости (2.45) будет направлен вниз.

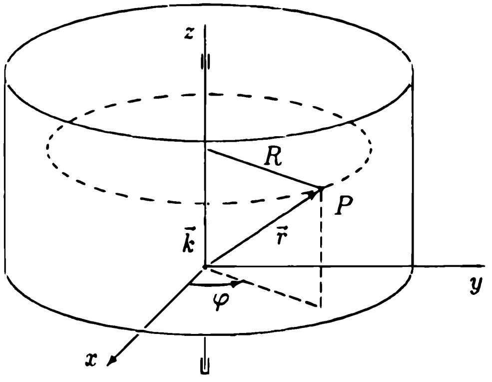

Рис. 2.6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Из определения (2.45) следует, что в случае, когда ось z совпадает с осью вращения тела, координаты вектора $\vec{\omega}$ угловой скорости будут

$$\omega_x = 0\,, \qquad \omega_y = o\,, \qquad \omega_z = \omega\,. \tag{2.46}$$

При помощи формулы (1.58) или (1.59) нетрудно убедиться в том, что векторное произведение вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ на радиус-вектор $\vec{r}$ точки P с координатами (2.43)

$$[\vec{\omega}\,\vec{r}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

равно вектору скорости, координаты которого даются формулами (2.44):

$$\boxed{\vec{v} = [\vec{\omega}\,\vec{r}\,]\,.} \tag{2.47}$$

Это соотношение называется *формулой Эйлера* в честь швейцарского ученого Леонарда Эйлера (1707 – 1783).

Вектор бесконечно малого перемещения произвольной точки P твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси в соответствии с формулами (2.14) и (2.55) будет равен

$$d\vec{r} = [\vec{\omega}\,\vec{r}\,]\,dt\,. \tag{2.48}$$

Рассмотрим теперь произвольное движение абсолютно твердого тела в пространстве. Выделим две какие-нибудь точки A и B, жестко связанные с телом. Мгновенные скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ этих точек связаны соотношением

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \left[\vec{\omega}\,\overrightarrow{AB}\right],} \tag{2.49}$$

которое также называют формулой Эйлера.

Скорости разных точек твердого тела в общем случае различны, но вращение тела в заданный момент времени характеризуется одним вектором $\vec{\omega}$ угловой скорости. Любую прямую линию, параллельную вектору угловой скорости, можно назвать *осью вращения*. *Поступательным* называется движение абсолютно твердого тела, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается, оставаясь параллельной самой себе. При поступательном движении угловая скорость равна нулю и все точки тела имеют одну и ту же мгновенную линейную скорость. Формула (2.49) допускает следующую интерпретацию. Произвольное движение твердого тела можно рассматривать как совокупность поступательного и вращательного движений. Первые слагаемые в правых частях этих формул в такой интерпретации описывают поступательное движение тела, а последние – вращение тела вокруг оси, проходящей через точку A.

Движение твердого тела называется *плоским*, когда траектория произвольной точки тела является плоской линией, т.е. когда все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. Примером плоского движения может служить качение цилиндра по плоскости (рис. 2.7).

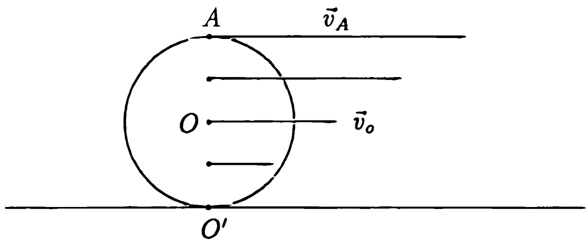

Рис. 2.7. Мгновенная ось вращения

Если цилиндр катится без скольжения, то мгновенные скорости точек соприкосновения его с плоскостью будут равны нулю. Прямая, которую образуют эти точки, называется *мгновенной осью вращения*. При плоском движении твердого тела в его пределах или вне него всегда можно найти прямую линию, мгновенные скорости точек которой равны нулю, т.е. мгновенную ось вращения. Положение мгновенной оси вращения относительно выбранной системы отсчета и относительно самого тела может изменяться со временем. В примере с катящимся по плоскости цилиндром мгновенная ось вращения перемещается по плоскости и изменяет свое положение на поверхности цилиндра.

ГЛАВА 2*

КИНЕМАТИКА

(продолжение)

2.6. Центростремительное и касательное ускорения

Получим выражения для центростремительного и касательного ускорений материальной точки, которые были записаны в разделе 2.3 без вывода. При помощи соотношения

$$\vec{v} = v\,\vec{\tau} \tag{2.50}$$

введем вектор $\vec{\tau}$. В силу определения операции умножения вектора на число вектор $\vec{\tau}$ направлен так же, как и вектор скорости, а его модуль равен единице. Таким образом, вектор $\vec{\tau}$ есть единичный вектор, касательный к траектории в произвольной точке P. Найдем вектор ускорения материальной точки, который по определению есть производная по времени от вектора скорости:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}\,.$$

По правилу дифференцирования произведения получим равенство

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{\tau} + v\,\dot{\vec{\tau}}\,. \tag{2.51}$$

Таким образом, вектор ускорения может быть представлен в виде суммы двух слагаемых, одно из которых

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \dot{v}\,\vec{\tau}} \tag{2.52}$$

есть вектор, направленный по касательной к траектории. Этот вектор называется *касательным*, или *тангенциальным ускорением*. Его проекция на вектор скорости равна

$$a_\tau = \dot{v}\,. \tag{2.53}$$

Если $\dot{v} > 0$, то вектор $\vec{a}_\tau$ сонаправлен с вектором скорости. Если же $\dot{v} < 0$, то векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{v}$ направлены в противоположные стороны.

Покажем, что вектор $\dot{\vec{\tau}}$ ортогонален вектору $\vec{\tau}$. Так как модуль вектора $\vec{\tau}$ равен единице, справедливо равенство

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = 1\,.$$

Продифференцировав обе части этого равенства по времени t, получим соотношение

$$\tau_x\,\dot{\tau}_x + \tau_y\,\dot{\tau}_y + \tau_z\,\dot{\tau}_z = 0\,,$$

левая часть которого представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{\tau}$ и $\dot{\vec{\tau}}$, записанное в координатной форме. Таким образом, будем иметь

$$\vec{\tau}\,\dot{\vec{\tau}} = 0\,.$$

Отсюда следует, что в случае, когда вектор $\dot{\vec{\tau}}$ не равен нулю, он ортогонален вектору $\vec{\tau}$.

Единичный вектор

$$\vec{n} = \frac{\dot{\vec{\tau}}}{|\,\dot{\vec{\tau}}\,|} \qquad (2.54)$$

называется *вектором главной нормали* к траектории в произвольной точке P. По определению вектор $\vec{n}$ перпендикулярен вектору $\vec{\tau}$:

$$\vec{n} \perp \vec{\tau}\,.$$

Модуль вектора $\dot{\vec{\tau}}$ можно представить в виде

$$|\,\dot{\vec{\tau}}\,| \equiv \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{|\,d\vec{\tau}\,|}{ds}\,.$$

Так как производная от пути по времени равна модулю скорости: $\dot{s} = v$, получим формулу

$$|\,\dot{\vec{\tau}}\,| \equiv \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{v}{R}\,, \qquad (2.55)$$

где скалярная величина

$$R = \frac{ds}{|\,d\vec{\tau}\,|} \qquad (2.56)$$

называется *радиусом кривизны траектории* в данной точке P. При помощи формул (2.54) и (2.55) второму слагаемому в правой части равенства (2.51) можно придать вид

$$v\,\dot{\vec{\tau}} = v\,|\,\dot{\vec{\tau}}\,|\,\vec{n} = \frac{v^2}{R}\,\vec{n}\,.$$

Этот вектор обозначается $\vec{a}_n$ и называется *нормальным*, или *центростремительным ускорением*:

$$\boxed{\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\vec{n}\,.} \tag{2.57}$$

Его модуль равен

$$a_n = \frac{v^2}{R}\,. \tag{2.58}$$

Таким образом, доказана теорема о том, что вектор ускорения можно представить как сумму двух взаимно ортогональных составляющих:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\,.} \tag{2.58}$$

По теореме Пифагора модули этих векторов связаны соотношением

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2\,. \tag{2.59}$$

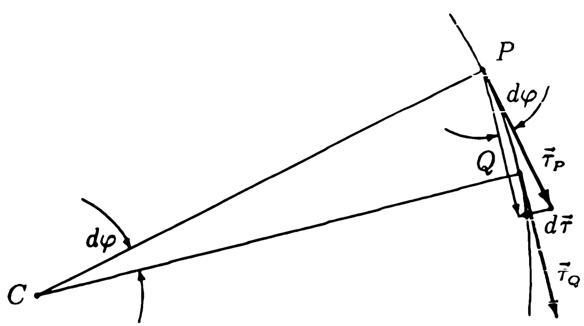

Рис. 2.8. Центр кривизны траектории

Установим, какой геометрический смысл имеет радиус кривизны траектории. Для этого между точками P и Q траектории на рис. 2.8 отметим точку P'. Проведем через эти три точки окружность. Это можно сделать единственным образом. Предельное положение C, которое принимает центр этой окружности при $Q \to P$, называется *центром кривизны траектории* для точки P. Рассмотрим малую часть PQ траектории. Эта часть очень мало отличается от дуги окружности с центром в точке C

при $Q \to P$. Так как модули векторов $\vec{\tau}_P$ и $\vec{\tau}_Q$, касательных к траектории в точках P и Q соответственно, равны единице, модуль приращения

$$d\vec{\tau} = \vec{\tau}_Q - \vec{\tau}_P$$

будет равен углу $d\varphi$ между этими векторами:

$$|\, d\vec{\tau}\,| = d\varphi\,.$$

Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны между собой. Поэтому угол, под которым видна дуга $\overset{\frown}{PQ}$ окружности из ее центра C, также равен $d\varphi$. Длина ds дуги $\overset{\frown}{PQ}$ окружности пропорциональна ее радиусу:

$$ds = R\, d\varphi\,.$$

Выразив из последних двух равенств радиус окружности, придем к формуле (2.56). Таким образом, пришли к заключению, что радиус кривизны есть расстояние между точкой P на траектории и соответствующим ей центром кривизны C. Если совершить параллельный перенос вектора $d\vec{\tau}$ так, чтобы его начало оказалось в точке P, то он будет направлен вдоль отрезка CP к центру кривизны траектории (рис. 2.8). Поэтому вектор $\vec{a}_n$, который сонаправлен с вектором $d\vec{\tau}$, называется центростремительным ускорением.

2.7. Формула Эйлера

Рассмотрим произвольное движение абсолютно твердого тела в пространстве и получим соотношение, связывающее скорости двух точек этого тела. Выделим две какие-нибудь точки, жестко связанные с телом, и отметим их положения в пространстве в момент времени t буквами A и B. Спустя время dt эти точки переместятся и примут положения A' и B' (рис. 2.9). Векторы $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$ есть векторы бесконечно малых перемещений точек A и B соответственно:

$$\overrightarrow{AA'} = d\,\vec{r}_A\,, \qquad \overrightarrow{BB'} = d\,\vec{r}_B\,. \tag{2.60}$$

Совершим параллельный перенос вектора $\overrightarrow{AA'}$ так, чтобы его конец совпал с точкой B'. Полученный в результате этого переноса вектор обозначим $\overrightarrow{CB'}$. По определению

$$\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{AA'}. \tag{2.61}$$

Из треугольника BCB' найдем, что

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'}. \tag{2.62}$$

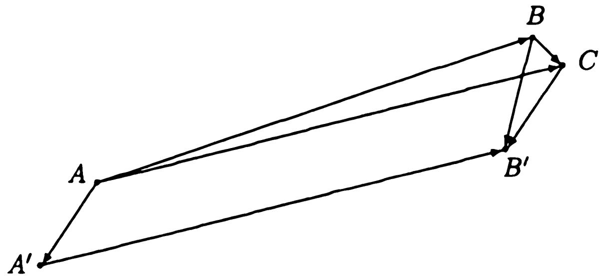

Рис. 2.9. К выводу соотношения, связывающего скорости двух точек твердого тела

Вектор $\overrightarrow{BC}$ можно рассматривать как вектор бесконечно малого перемещения точки B при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через точку A. По формуле (2.48) найдем, что

$$\overrightarrow{BC} = \left[\vec{\omega}\, \overrightarrow{AB}\right] dt\,, \tag{2.63}$$

где вектор $\vec{\omega}$ может быть направлен произвольным образом. Подстановка векторов (2.60), (2.61) и (2.63) в равенство (2.62) преобразует его к виду

$$d\vec{r}_B = d\vec{r}_A + \left[\vec{\omega}\, \overrightarrow{AB}\right] dt\,. \tag{2.64}$$

Разделив это равенство на dt, получим формулу Эйлера (2.49)

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \left[\vec{\omega}\, \overrightarrow{AB}\right],}$$

связывающую скорости двух точек A и B абсолютно твердого тела.

ГЛАВА 3
ДИНАМИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1. Принцип инерции Галилея. Инерциальные системы отсчета

Динамика – это раздел механики, предметом исследования в котором так же, как и в кинематике, является механическое движение тел, но с учетом физических причин, обусловливающих тот или иной характер движения. *Прямолинейным* называется движение материальной точки вдоль прямой линии или поступательное движение абсолютно твердого тела, при котором траектории всех точек тела суть параллельные прямые. Прямолинейное движение представляет собой самый простой вид механического движения.

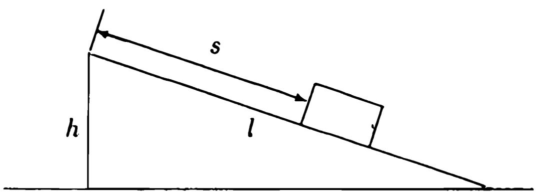

Рис. 3.1. К описанию опытов Галилея с телом, скользящим по наклонной плоскости

Первые количественные исследования механического движения были проведены итальянским ученым Галилео Галилеем (1564 – 1642). Принято считать, что современная физика берет свое начало от его опытов с телом, скользящим по наклонной плоскости (рис. 3.1). Галилей измерял путь s и время t, за которое этот путь был пройден. Измерения привели его к формуле

$$s = \frac{1}{2}\,a\,t^2\,. \tag{3.1}$$

Из этой формулы следует, что скользящее по наклонной плоскости тело движется с постоянным ускорением a. Затем Галилей экспериментально установил зависимость ускорения от высоты h, с которой соскальзывает тело, и длины l наклонной плоскости:

$$a = \frac{h}{l}\,g\,, \tag{3.2}$$

где g – ускорение свободного падения. Из этой формулы видно, что при $h = l$, т.е. при вертикальном положении плоскости тело падает свободно с ускорением g под действием притяжения со стороны Земли. По наклонной плоскости тело скользит с меньшим ускорением. И, когда плоскость расположена горизонтально ($h = 0$), ускорение тела равно нулю, а его скорость постоянна или тоже равна нулю. На основании этих измерений Галилей сформулировал утверждение, которое теперь называют ***принципом инерции Галилея*** (этот принцип называют также ***первым законом Ньютона***): всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, если отсутствует воздействие на него со стороны других тел. Иначе говоря, принцип инерции утверждает, что свободное тело, т.е. тело, не взаимодействующее с другими телами, имеет равное нулю ускорение. Однако прежде, чем говорить о величине ускорения, следует указать систему отсчета, по отношению к которой это ускорение измеряется.

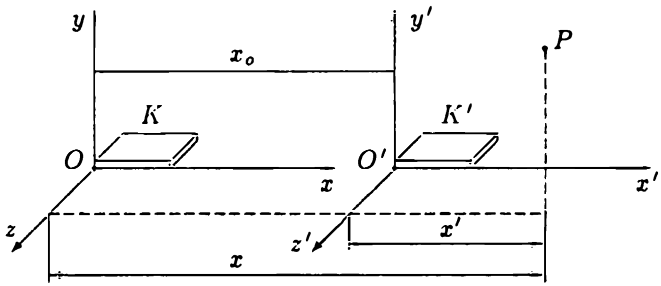

Рис. 3.2. Две системы отсчета

Рассмотрим два тела, движущиеся одно относительно другого прямолинейно и поступательно. Построим две прямоугольные декартовы системы координат K и K', связанные с этими телами. В рассматриваемом случае направления осей координат удобно выбрать так, чтобы оси абсцисс этих систем совпадали по направлению, а оси ординат и аппликат были параллельны друг другу (рис. 3.2). Установим связь между координатами x, y и z некоторой точки P в система отсчета K с координатами x', y' и z' той же точки в системе отсчета K'. Как видно из рис. 3.2, эта связь осуществляется соотношениями

$$x = x_o + x', \qquad y = y', \qquad z = z', \tag{3.3}$$

где x_o есть координата точки O', которая служит началом отсчета системы K', в системе отсчета K.

Если в точке P находится движущаяся частица m, то все величины в соотношениях (3.3) следует рассматривать как функции от времени.

Продифференцировав соотношения (3.3) по времени, получим равенства

$$v_x = \dot{x}_o + v'_x, \qquad v_y = v'_y, \qquad v_z = v'_z, \tag{3.4}$$

связывающие координаты векторов $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ скорости материальной точки относительно систем отсчета K и K' соответственно.

Продифференцировав равенства (3.4), найдем связь между координатами векторов $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ ускорений точки m в системах K и K' соответственно:

$$a_x = \ddot{x}_o + a'_x, \qquad a_y = a'_y, \qquad a_z = a'_z. \tag{3.5}$$

Из этих соотношений следует, что одно и то же тело может иметь равное нулю ускорение в одной системе отсчета (например, $a'_x = a'_y = a'_z = 0$) и одновременно двигаться с ненулевым ускорением относительно другой системы отсчета ($a_x = \ddot{x}_o \neq 0$). Иначе говоря, принцип инерции не может выполняться во всех системах отсчета одновременно.

Системы отсчета, в которых принцип инерции Галилея выполняется, называют *инерциальными*. Тогда как системы отсчета, в которых этот принцип не справедлив, называют *неинерциальными*. Инерциальных (так же, как и неинерциальных) систем отсчета бесконечно много. Пусть

$$x_o = V\,t, \tag{3.6}$$

т.е. точка O' движется вдоль оси x в системе отсчета K с постоянной скоростью V. В этом случае соотношения (3.3) принимают вид

$$x = x' + V\,t, \qquad y = y', \qquad z = z', \tag{3.7}$$

а из соотношений (3.4) и (3.5) следует, что координаты векторов скорости $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ подчиняются закону

$$v_x = v'_x + V, \qquad v_y = v'_y, \qquad v_z = v'_z \tag{3.8}$$

и векторы ускорений $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ равны друг другу:

$$\vec{a} = \vec{a}'. \tag{3.9}$$

Равенства (3.6) и (3.9) позволяют сделать следующий вывод. Если некоторая система отсчета K является инерциальной, то любая другая система отсчета K', движущаяся относительно системы K с постоянной скоростью, также будет инерциальной.

Гипотеза абсолютности времени предполагает, что ход времени во всех системах отсчета одинаков, т.е. синхронизированные часы в различных системах отсчета показывают одно и то же время:

$$t = t'.$$

Формулы преобразования координат (3.7) вместе с равенством $t = t'$ называются *преобразованиями Галилея*. Эти преобразования описывают переход от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Как практически определить, является ли та или другая система отсчета инерциальной? Многочисленные результаты наблюдений за движением планет вокруг Солнца дали возможность установить, что с большой точностью можно считать инерциальной систему отсчета, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены на "неподвижные" звезды. Эта система отсчета называется *гелиоцентрической*. Система отсчета, начало которой связано с какой-либо точкой на поверхности Земли или с ее центром, строго говоря, не является инерциальной по той причине, что Земля совершает вращательное движение вокруг Солнца и вокруг своей оси, т.е. движется с ускорением относительно гелиоцентрической системы отсчета.

Ускорение точки земной поверхности, обусловленное вращением Земли вокруг своей оси, будет наибольшим, если эта точка лежит на экваторе. Центростремительное ускорение можно вычислить по формуле

$$a = R\omega^2 . \tag{3.10}$$

Угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси равна

$$\omega = \frac{2\pi}{T} , \tag{3.11}$$

где T – время, за которое Земля делает полный оборот (сутки). Подставив в эти формулы числовые значения радиуса Земли ($R = 6,4 \cdot 10^6$ *м*) и длительности суток T, получим значение центростремительного ускорения точки на экваторе $a = 3,4 \cdot 10^{-2}$ *м/с*^{2}. Среднее значение ускорения свободного падения тел у поверхности Земли равно $g = 9,8$ *м/с*^{2}. Это значение на два порядка превышает значение a центростремительного ускорения. Поэтому во многих случаях ускорением a можно пренебречь и считать систему отсчета, неподвижную относительно Земли, инерциальной. Такую систему отсчета называют *лабораторной*. Эффекты в движениях тел, обусловленные вращением Земли, могут быть обнаружены и измерены, только если измерительные приборы имеют достаточно высокую точность. В самом деле, существуют экспериментальные факты, свидетельствующие о вращении Земли вокруг своей оси. К таким фактам относятся вращение плоскости колебаний маятника Фуко относительно Земли и отклонение падающего тела от линии отвеса.

Система отсчета, начало которой помещено в центр Земли, а оси координат направлены на неподвижные звезды, называется *геоцентрической*. Ее неинерциальность связана с движением Земли по орбите вокруг

Солнца. Подстановка в формулы (3.10) и (3.11) значений радиуса орбиты Земли ($R = 1,5 \cdot 10^{11}$ *м*) и длительности одного года ($T = 3 \cdot 10^7$ *с*) дает следующее значение центростремительного ускорения Земли при ее вращении вокруг Солнца: $a = 6 \cdot 10^{-3}$ *м/с*^{2}. Это значение на порядок меньше центростремительного ускорения тел на экваторе, обусловленного вращением Земли вокруг собственной оси. Это сравнение дает основания считать геоцентрическую систему отсчета инерциальной с большей степенью точности, чем лабораторную.

3.2. Сила. Масса. Законы Ньютона

Различные тела и частицы материи взаимодействуют друг с другом. Количественной характеристикой взаимодействия тел и частиц является *сила*.

Определить какую-либо величину – это значит указать способ ее измерения или дать формулу, связывающую эту величину с другими ранее определенными величинами. Например, длина есть физическая величина, для измерения которой необходимо использовать линейку или аналогичный по назначению измерительный прибор (микроскоп, штангенциркуль, радар и т.п.). Время есть величина, измеряемая при помощи хронометра. Для определения силы также необходимо указать способ ее измерения.

На опыте установлено, что ускоренное движение тел и их деформация, т.е. изменение размеров и формы тел, являются результатом их взаимодействия. Каждое из этих проявлений взаимодействия тел может быть использовано для измерения силы. Однако практически удобнее измерять величину деформации, чем ускорение тел.

Прибор для измерения силы по величине деформации тела, подвергающегося воздействию со стороны других тел, называется *динамометром* (рис. 3.3). Деформация тела называется *упругой*, если после прекращения воздействия размеры и форма тела становятся такими же, как и до воздействия. Основной деталью динамометра служит тело, испытывающее упругую деформацию. Например, таким телом может быть пружина, деформация которой (удлинение или сжатие) тем больше, чем больше приложенное к ней усилие. Мерой деформации является величина

$$\Delta l = l - l_o\,, \tag{3.12}$$

называемая *удлинением*, где l – длина деформированного тела, l_o – длина тела до его деформации. Экспериментально установлено, что при определенных условиях удлинение тела пропорционально приложенной силе F, которая называется *силой упругости*:

$$F = k \mid \Delta l \mid , \tag{3.13}$$

где коэффициент пропорциональности k называется *коэффициентом упругости*. В случае, когда деформируемым телом является пружина, коэффициент k называется ее *жесткостью*. Соотношение (3.13) выражает собой *закон Гука*. Этот закон выполняется, когда удлинение тела не очень велико. При этом из формулы (3.13) следует, что шкала динамометра будет равномерной. Это существенно облегчает его градуировку.

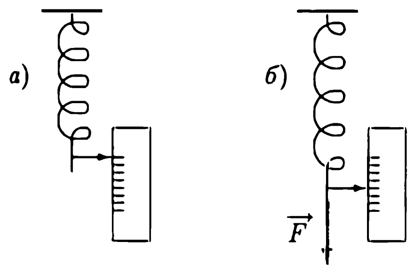

Рис. 3.3. Простейший динамометр

Воздействие одного тела на другое характеризуется не только величиной силы, но и ее направлением. Поэтому для более полного описания воздействия на тело используют *вектор силы* $\vec{F}$, направление которого совпадает с направлением оказываемого воздействия. *Точкой приложения силы* называется точка тела, в которой оно испытывает воздействие со стороны другого тела. Принято считать, что начало вектора силы совпадает с точкой ее приложения. *Линией действия силы* называется прямая, вдоль которой направлен вектор силы. На одно тело могут одновременно действовать сразу несколько сил. Векторная сумма

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} \tag{3.14}$$

всех сил, приложенных к телу, называется *равнодействующей*, или *результирующей силой*.

Ньютоном был установлен закон: *ускорение тела прямо пропорционально действующей на него силе*:

$$m a = F , \tag{3.15}$$

где коэффициент пропорциональности m, являющийся количественной характеристикой рассматриваемого тела, называется *инертной массой* этого тела. Равенство (3.15) называют *вторым законом Ньютона.* В более строгой формулировке этот закон звучит так: *вектор ускорения материальной точки коллинеарен вектору силы, которая к ней приложена*:

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}\,.} \tag{3.16}$$

Из соотношения (3.16) следует, что в частном случае, когда $\vec{F} = 0$, т.е. отсутствует воздействие на тело со стороны других тел, его ускорение будет также равно нулю. Таким образом, принцип инерции Галилея, или первый закон Ньютона, можно рассматривать как следствие второго закона Ньютона. Но принцип инерции по существу является определением инерциальной системы отсчета. Поэтому к формулировке второго закона Ньютона необходимо сделать следующее очень важное дополнение. В приведенной выше форме этот закон справедлив только относительно некоторой инерциальной системы отсчета.

Воздействие одного тела на другое никогда не бывает односторонним, но всегда имеет характер взаимодействия. Если тело *1* действует на тело *2* с силой $\vec{F}_{21}$, то и тело *2* в свою очередь действует на тело *1* с некоторой силой $\vec{F}_{12}$ (рис. 3.4). Причем эти силы равны по величине, но противоположны по направлению:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}\,, \qquad F_{12} = F_{21}\,.} \tag{3.17}$$

Это утверждение составляет содержание *третьего закона Ньютона.*

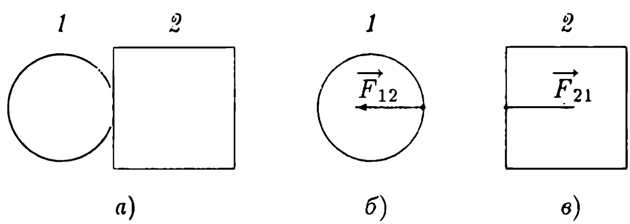

Рис. 3.4. К формулировке третьего закона Ньютона

3.3. Принцип относительности

Так как ускорения какого-либо тела в двух произвольно выбранных инерциальных системах отсчета одинаковы, уравнение Ньютона (3.16) не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. В таком случае говорят, что *уравнения динамики инвариантны по отношению к преобразованиям координат* (3.7), *которые соответствуют переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.* Это утверждение составляет содержание *принципа относительности Галилея.* Другими словами можно сказать, что согласно этому принципу все инерциальные системы отсчета физически эквивалентны, т.е. относительно любой инерциальной системы отсчета рассматриваемая механическая система движется по одному и тому же закону (3.16).

3.4. Сила тяжести и вес тела

Силой тяжести P, действующей на некоторое тело, называется сила, с которой Земля притягивает это тело к себе. Эта сила может быть измерена при помощи динамометра. Такие измерения показывают, что для одного и того же тела сила тяжести будет изменяться в зависимости от положения этого тела относительно Земли. А именно, сила тяжести зависит от географической широты точки земной поверхности и от высоты тела над уровнем моря.

Под действием силы тяжести тела падают на Землю, если этому не препятствуют другие тела. *Свободным падением* называется движение тела, происходящее только под действием его силы тяжести. Экспериментально доказано, что все тела, независимо от того, какие по величине силы тяжести на них действуют, в свободном падении имеют одно и то же ускорение g, называемое *ускорением свободного падения*, или *ускорением силы тяжести.* Таким образом, для двух свободно падающих тел второй закон Ньютона можно записать в виде

$$m_1\, g = P_1\,, \quad m_2\, g = P_2\,.$$

Разделив первое уравнение на второе, найдем, что

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1}{P_2}\,,$$

т.е. отношение масс двух тел равно отношению действующих на них сил тяжести. На этом соотношении основан метод измерения масс. Напомним, что измерить массу тела означает сравнить ее с массой другого тела, которая принята за единицу. Такое сравнение можно сделать при помощи рычажных или пружинных весов. В системе СИ единица измерения массы – килограмм (*кг*) является одной из основных, а единицу измерения силы определяют при помощи второго закона Ньютона. Единица измерения силы – ньютон (H) – это сила, под действием которой тело массой 1 *кг* движется с ускорением 1 $м/с^2$.

Весом тела называется сила $\vec{F}$, с которой это тело вследствие тяготения к Земле действует на опору или подвес, удерживающие его от падения. Когда тело свободно падает, его вес равен нулю.

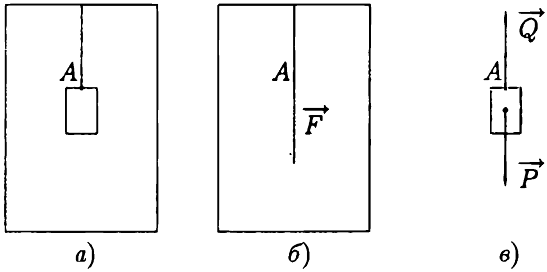

Рис. 3.5. Вес тела и сила тяжести

Рассмотрим пример, в котором находят применение законы Ньютона. К потолку кабины лифта подвешено тело массой m (рис. 3.5). Лифт движется вертикально с ускорением $\vec{a}$ относительно Земли. Вес тела $\vec{F}$ действует на подвес и приложен в точке A. Пусть $\vec{Q}$ есть сила, действующая на тело со стороны подвеса. Согласно третьему закону Ньютона

$$\vec{Q} = -\vec{F}\,.$$

Кроме силы $\vec{Q}$ на тело действует еще сила тяжести $\vec{P}$. Запишем второй закон Ньютона для рассматриваемого тела. Так как тело движется с тем же ускорением, что и лифт, будем иметь уравнение

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{Q}\,.$$

Силу тяжести можно выразить через вектор $\vec{g}$ ускорения свободного падения:

$$\vec{P} = m\vec{g}\,.$$

Разрешив полученные три уравнения относительно веса тела, придем к формуле

$$\vec{F} = m\,(\vec{g} - \vec{a})\,,$$

из которой видно, что вес тела зависит от ускорения лифта. Если лифт неподвижен или движется без ускорения ($\vec{a} = 0$), то вес тела будет равен силе тяжести. Когда лифт свободно падает ($\vec{a} = \vec{g}$), вес тела будет равен нулю. В этом случае говорят, что тело находится в состоянии *невесомости*. Если же ускорение лифта направлено вверх, т.е. противоположно ускорению $\vec{g}$ силы тяжести, то вес тела по величине будет превышать силу тяжести.

3.5. Основная задача динамики

Во многих прикладных задачах требуется знать движение тела под действием заданных сил. Все подобные задачи вместе взятые составляют *основную задачу динамики*: найти закон движения тела или системы тел при условии, что действующие силы известны. Решение задачи динамики может быть найдено при помощи второго закона Ньютона. В некоторых случаях эта задача имеет простое решение, в других ее решение наталкивается на непреодолимые математические трудности. Ниже будут рассмотрены различные задачи динамики и методы их решения.

3.6. Решения уравнений прямолинейного движения

Прямолинейное движение тела можно описать при помощи только одной функции

$$x = x(t)\,, \tag{3.18}$$

которая определяет зависимость координаты тела от времени (рис. 3.6). Для того чтобы установить эту зависимость, следует применить второй закон Ньютона, записав его в виде

$$m\ddot{x} = F(t,\, x,\, \dot{x})\,, \tag{3.19}$$

где силу F следует рассматривать в общем случае как заданную функцию трех переменных: времени t, координаты x и скорости $\dot{x}$.

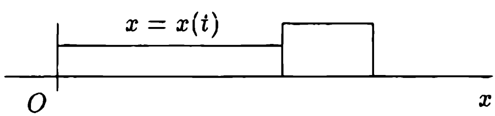

Рис. 3.6. Функция $x(t)$ описывает прямолинейное движение тела

Равенство (3.19) называют *уравнением движения тела*. Оно представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка для неизвестной функции $x = x(t)$. Найти аналитическое решение уравнения (3.19) в общем случае невозможно. Рассмотрим несколько частных случаев, когда решение этого дифференциального уравнения может быть найдено в виде конкретной зависимости x от t.

1. *Сила зависит только от времени*: $F = F(t)$. В этом случае из закона Ньютона найдем зависимость ускорения от времени:

$$a(t) = \frac{1}{m} F(t) .$$

Имея в виду, что $\dot{v} = a$, получим зависимость

$$v(t) = \int a(t)\, dt + C_1 .$$

Интегрируя эту функцию по времени с учетом того, что $\dot{x} = v$, найдем искомую функцию

$$x(t) = \int v(t)\, dt + C_2 .$$

Полученные функции

$$x = x(t;\, C_1,\, C_2) \qquad \text{и} \qquad v = v(t;\, C_1)$$

содержат в себе в качестве параметров постоянные интегрирования C_1 и C_2, которые могут быть найдены из так называемых *начальных условий*. Пусть в момент времени $t = t_o$ координата принимает значение x_o, а скорость тела в этот момент равна v_o :

$$x_o = x(t_o;\, C_1,\, C_2)\,, \qquad v_o = v(t_o;\, C_1)\,.$$

Эти условия фактически образуют систему двух уравнений для постоянных C_1 и C_2. Установив их значения, найдем единственное решение уравнения (3.19), которое описывает движение тела и удовлетворяет заданным начальным условиям.

2. *Сила зависит только от координаты*: $F = F(x)$. При этом силу можно представить в виде

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}\,, \tag{3.20}$$

где функция $U = U(x)$ называется *потенциальной энергией* тела. Подставив это выражение в уравнение (3.19), с учетом того, что $a = \dot{v}$, получим:

$$m\,\frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dx} = 0\,.$$

После умножения этого уравнения на

$$v = \frac{dx}{dt}$$

будем иметь

$$m\,v\,\frac{dv}{dt}+\frac{dU}{dx}\,\frac{dx}{dt}=0\,.$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, нетрудно убедиться в том, что уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2+U\right)=0 \tag{3.21}$$

эквивалентно предыдущему уравнению.

Величина

$$T=\frac{1}{2}\,m\,v^2 \tag{3.22}$$

называется *кинетической энергией* тела, совершающего поступательное движение; а величина

$$E=T+U \tag{3.23}$$

– его *полной механической энергией*, которую можно рассматривать как сложную функцию от времени:

$$E(t)=\frac{1}{2}\,m\,v^2(t)+U\big(\,x(t)\,\big)\,. \tag{3.24}$$

Из уравнения (3.21) видно, что производная этой функции по времени равна нулю:

$$\frac{dE}{dt}=0\,.$$

Производная функции может быть равна нулю при всех значениях аргумента только в том случае, когда она фактически от этого аргумента не зависит, т.е. является постоянной величиной:

$$E=\mathrm{const}\ . \tag{3.25}$$

Таким образом, приходим к заключению. Если при поступательном движении тела действующая на него сила зависит только от его координаты, то полная механическая энергия тела сохраняется, т.е. не зависит от времени. Это утверждение называется *законом сохранения энергии* при механическом движении.

При условии (3.25) равенство (3.24) можно рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка для функции $x=x(t)$:

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2+U(x)=E\,. \tag{3.26}$$

Даже не решая этого уравнения, можно извлечь из него некоторые сведения о движении тела. Так как кинетическая энергия – величина неотрицательная, потенциальная энергия тела при его движении всегда будет не больше полной механической энергии. Другими словами, при движении с заданной полной механической энергией тело может находиться только в тех положениях, для которых выполняется неравенство

$$U(x) \le E\,. \tag{3.27}$$

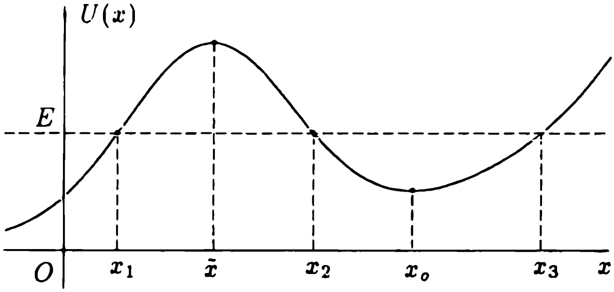

Рис. 3.7. Потенциальная энергия

Пусть, например, график зависимости $U = U(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 3.7. Горизонтальная прямая, соответствующая заданному значению E полной энергии, пересекает график функции $U = U(x)$ в точках с координатами x_1, x_2, x_3 :

$$U(x_1) = U(x_2) = U(x_3) = E\,,$$

т.е. в этих положениях потенциальная энергия тела равна полной энергии E, а его кинетическая энергия здесь будет равна нулю. При этом скорость тела также будет равна нулю. Поэтому эти положения тела называются *точками остановки.* Неравенство (3.27) выполняется при $x \in (-\infty,\, x_1] \bigcup [x_2,\, x_3]$. В области $x \le x_1$ тело сначала движется слева направо из бесконечности, достигает точки $x = x_1$, где оно на мгновение останавливается; а затем начинает двигаться в обратном направлении и уходит на бесконечность. Такое движение называется *инфинитным*, т.е. неограниченным. В области, где $x_2 \le x \le x_3$, тело совершает периодически повторяющееся колебательное движение между точками остановки x_2 и x_3. Такое движение называется *финитным.*

Как видно из графика на рис. 3.7, при $x = x_o$ функция $U = U(x)$ имеет минимум. В этом положении на тело сила не действует, так как производная от U по x в этой точке равна нулю:

$$F(x_o) = -\frac{dU(x_o)}{dx} = 0\,.$$

Пусть в некоторый момент времени t_o тело находится в положении, которому соответствует $x = x_o$, а его скорость равна нулю. Так как при этом сила на тело не действует, оно будет находиться в этом положении во все последующие моменты времени $t > t_o$. В таком случае говорят, что тело находится в *положении равновесия*. При смещении тела вправо от точки x_o на него будет действовать сила, возвращающая его в положение равновесия (рис. 3.8), так как при $x > x_o$ функция $U = U(x)$ возрастает и ее производная положительна:

$$F(x) = -U'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x > x_o\,.$$

При $x < x_o$ функция $U = U(x)$ убывает, ее производная отрицательна, а сила будет положительна:

$$F(x) = -U'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < x_o,$$

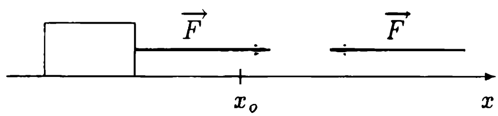

Рис. 3.8. Положение устойчивого равновесия

т.е. при смещении тела влево от точки x_o сила опять стремится вернуть его в положение равновесия. Такое положение равновесия называется *устойчивым*. Если тело совершает колебательное финитное движение с заданным значением E полной энергии, то в момент прохождения им положения устойчивого равновесия его кинетическая энергия будет наибольшей:

$$T_{max} = E - U(x_o)\,,$$

так как потенциальная энергия здесь минимальна.

В точке $x = \tilde{x}$ на рис. 3.7 функция $U = U(x)$ имеет максимум. Так как при этом сила равна нулю, соответствующее положение тела также будет равновесным при условии, что $v = 0$. Однако это положение равновесия будет *неустойчивым* потому, что при смещении тела на него будет действовать сила, удаляющая его от положения равновесия.

Часть графика функции $U = U(x)$, включающая точку минимума, называется *потенциальной ямой*; а другая его часть, содержащая точку максимума, – *потенциальным барьером*.

3. *Сила зависит только от скорости*: $F = F(v)$. Примером зависимости силы от скорости может служить сила трения. В таком случае уравнение движения (3.19) удобно представить в виде

$$m\,\frac{dv}{dt} = F(v)\,.$$

Это есть уравнение с разделяющимися переменными v и t. Разделяя переменные и производя интегрирование, придем к равенству

$$m\int\frac{dv}{F(v)} + C = t\,,$$

которое необходимо разрешить относительно скорости с тем, чтобы получить в явном виде зависимость $v = v(t)$. Интегрируя затем уравнение $\dot{x} = v(t)$, найдем искомую функцию $x = x(t)$.

3.7. Сила трения

Взаимодействие тел, соприкасающихся своими поверхностями, можно описать при помощи двух сил, одна из которых перпендикулярна к поверхности и называется *силой нормального давления*, а другая направлена по касательной к поверхности и называется *силой трения*. Эти силы приложены не к одной точке тела, а распределены по той части его поверхности, которая соприкасается с другими телами, т.е. эти силы действуют в любой точке поверхности тела, где оно испытывает воздействие со стороны других тел. На рис. 3.9 векторы $\overrightarrow{N}$ и $\overrightarrow{F}_{mp}$ есть результат сложения всех сил нормального давления и всех сил трения, действующих на поверхность тела, находящегося на наклонной плоскости.

Трение между движущимися слоями жидкости или газа, также как и трение, возникающее при движении твердого тела в жидкой или газообразной среде, называется *вязким*, или *внутренним трением*. Тогда как трение между соприкасающимися поверхностями твердых тел называется *сухим*, или *внешним*.

Основными причинами, которые обусловливают возникновение сил сухого трения, являются шероховатость соприкасающихся поверхностей и силы притяжения, действующие между молекулами, из которых состоят трущиеся твердые тела. Поверхность твердого тела не бывает идеально гладкой. На ней имеются различного рода неровности: микровыступы, впадины, трещины и т.п. При соприкосновении тел микровыступы одного тела внедряются во впадины другого. Это приводит к сцеплению поверхностей, которое будет препятствовать перемещению тел относительно друг друга. Если же поверхности тел достаточно гладкие, то во многих участках расстояние между телами может оказаться меньше радиуса действия межмолекулярных сил. При этом притяжение молекул приводит к слипанию тел на таких участках, что также будет препятствовать их относительному перемещению.

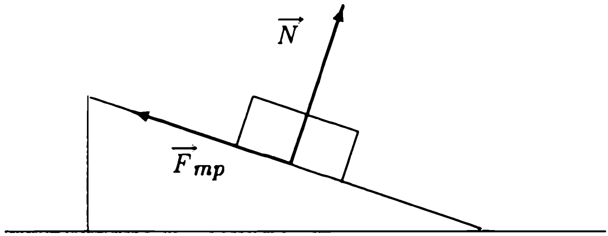

Рис. 3.9. Сила трения и сила нормального давления

Рассмотрим тело, покоящееся на горизонтальной плоской поверхности (рис. 3.10). Приложим к телу силу $\vec{F}$, направленную параллельно этой поверхности и будем постепенно ее увеличивать. В результате обнаружим, что тело будет находиться в покое до тех пор, пока величина этой силы не превысит некоторое значение F_o, т.е. тело будет покоиться при условии, что $0 \leq F < F_o$. Такое поведение тела объясняется действием силы трения, которая препятствует его движению по поверхности. Запишем второй закон Ньютона для рассматриваемого тела в проекциях на ось x :

$$m\,a_x = F - F_{тр}\,. \tag{3.28}$$

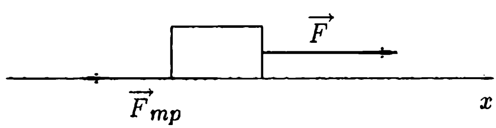

Рис. 3.10. Сила трения

Уравнение (3.28) справедливо и для движущегося, и для покоящегося тела. Если тело покоится, то его ускорение равно нулю. При этом модули сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_{тр}$ равны друг другу: $F_{тр} = F$. Сила трения, действующая на покоящееся тело, называется *силой трения покоя*. Так как для покоящегося тела $F_{тр.\ покоя} = F$, а приложенная сила F такова, что $0 \leq F < F_o$; модуль силы трения покоя будет удовлетворять неравенству

$$0 \leq F_{тр.\ покоя} < F_o\,. \tag{3.29}$$

Когда модуль силы $\vec{F}$ станет больше F_o, тело начнет скользить по поверхности. Действующая на него в этом случае сила трения называется *силой трения скольжения*, которая всегда направлена противоположно вектору скорости тела. При этом модуль силы трения скольжения может довольно сложным образом зависеть от модуля скорости. Однако в приближенных расчетах такой зависимостью часто пренебрегают и считают силу трения скольжения постоянной величиной:

$$F_{\textit{тр. скольжения}} = F_o\,. \tag{3.30}$$

Давление, прижимающее твердые тела друг к другу, способствует механическому зацеплению неровностей на поверхностях этих тел и их слипанию. Поэтому можно предположить, что сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления N (*закон Амонтона*):

$$\boxed{F_{\textit{тр. скольжения}} = \mu\, N\,,} \tag{3.31}$$

где μ – безразмерный *коэффициент трения скольжения*. Модуль силы трения покоя удовлетворяет неравенству

$$F_{\textit{тр. покоя}} < \mu\, N\,.$$

Опыт показывает, что эти соотношения во многих случаях выполняются с достаточно высокой точностью. Значение коэффициента трения определяется свойствами соприкасающихся поверхностей и может зависеть не только от положения тела, скользящего по поверхности, но и от его скорости.

Характерной особенностью вязкого трения является то, что для покоящегося относительно среды тела сила вязкого трения равна нулю. Сила, с которой сплошная среда действует на движущееся в ней тело, может быть описана формулой

$$\vec{F} = -\,\alpha\,\vec{v}\,, \tag{3.32}$$

где знак минус означает, что сила вязкого трения направлена противоположно скорости. Коэффициент α зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности и свойств среды. Этот коэффициент почти не зависит от модуля скорости, если скорость тела не очень велика. При больших скоростях коэффициент вязкого трения пропорционален модулю скорости тела: $\alpha \sim v$.

ГЛАВА 4
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

4.1. Второй закон Ньютона

Движение материальной точки в пространстве можно описать посредством зависимости ее радиус-вектора от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\,. \tag{4.1}$$

Эта зависимость может быть найдена из второго закона Ньютона

$$m\,\vec{a} = \vec{F}\,,$$

в котором следует положить $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$:

$$\boxed{m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\,.} \tag{4.2}$$

В этом уравнении действующая на частицу сила считается известной и рассматривается как заданная функция от времени, радиус-вектора и скорости:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})\,, \tag{4.3}$$

где $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. В координатной форме второй закон Ньютона (4.2) для материальной точки будет иметь вид

$$m\,\ddot{x} = F_x\,, \qquad m\,\ddot{y} = F_y\,, \qquad m\,\ddot{z} = F_z\,, \tag{4.4}$$

где проекции F_x, F_y и F_z вектора силы являются известными функциями от времени t, координат частицы x, y, z и проекций v_x, v_y, v_z вектора ее скорости на координатные оси. Уравнения (4.4) образуют систему дифференциальных уравнений для трех неизвестных функций

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)\,. \tag{4.5}$$

Основной задачей динамики в данном случае является решение уравнений движения (4.2) или (4.4). Единственное частное решение этих уравнений может быть найдено, если заданы *начальные условия*:

$$\vec{r}(t_o) = \vec{r}_o\,, \qquad \vec{v}(t_o) = \vec{v}_o\,,$$

где $\vec{r}_o$ и $\vec{v}_o$ – известные векторы, первый из которых определяет положение частицы в момент времени t_o, а второй – ее скорость в этот момент времени. Эти условия в координатной форме можно записать так:

$$x(t_o) = x_o,\ y(t_o) = y_o,\ z(t_o) = z_o,\ v_x(t_o) = v_{x_o},\ v_y(t_o) = v_{y_o},\ v_z(t_o) = v_{z_o},$$

где x_o, y_o, z_o и v_{x_o}, v_{y_o}, v_{z_o} – координаты векторов $\vec{r}_o$ и $\vec{v}_o$ соответственно.

Получить общее решение поставленной задачи для произвольной силы невозможно. Поэтому главной целью дальнейшего изложения будет описание способов отыскания частных решений уравнений движения и методов, которые позволяют исследовать движение частицы, не решая сами уравнения Ньютона.

4.2. Импульс

Произведение массы частицы на ее скорость

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{4.6}$$

называют ее *импульсом.*

Учитывая, что ускорение $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, второй закон Ньютона можно записать так:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,.} \tag{4.7}$$

Из этого уравнения следует, что, когда сила равна нулю ($\vec{F} \equiv 0$), импульс частицы со временем не изменяется, т.е. остается постоянным. Это утверждение называется *законом сохранения импульса.*

4.3. Момент импульса

Векторное произведение радиус-вектора материальной точки на ее импульс

$$\vec{L} = [\,\vec{r}\,\vec{p}\,], \tag{4.8}$$

называют *моментом импульса частицы относительно точки O*, выбранной в качестве начала инерциальной системы отсчета (рис. 4.1). Вычислим производную от этого вектора по времени. Применяя правило дифференцирования произведения, найдем, что

$$\dot{\vec{L}} = [\,\dot{\vec{r}}\,\vec{p}\,] + [\,\vec{r}\,\dot{\vec{p}}\,].$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю, так как векторы $\dot{\vec{r}}$ и $\vec{p}$ коллинеарны. Используя второй закон Ньютона в форме (4.7), получим:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\,,} \tag{4.9}$$

где вектор

$$\vec{M} = [\,\vec{r}\,\vec{F}\,] \tag{4.10}$$

называется *моментом силы относительно точки* O, или *вращательным моментом.*

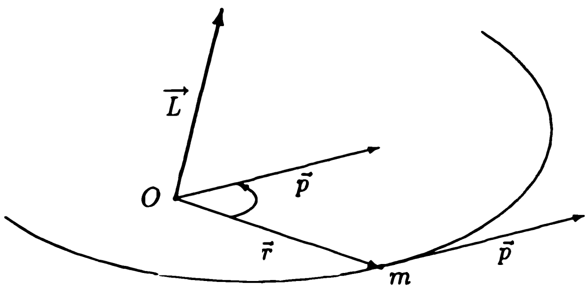

Рис. 4.1. Момент импульса материальной точки

Модуль момента силы равен

$$M = r\,F\,\sin\alpha = F\,l\,, \tag{4.11}$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, $l = r\,\sin\alpha$ – *плечо силы относительно точки* O, т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы (рис. 4.2).

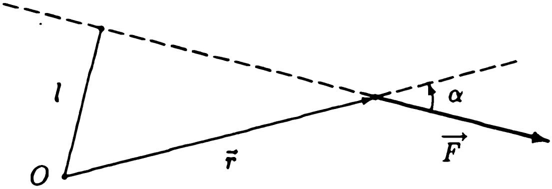

Рис. 4.2. Плечо силы

Проекция M_z вектора $\overrightarrow{M}$ на некоторую ось z, проходящую через точку O, называется *моментом силы* $\overrightarrow{F}$ *относительно этой оси*:

$$M_z = [\,\vec{r}\,\overrightarrow{F}\,]_z\,. \tag{4.12}$$

Используя формулу (1.58), эту величину можно выразить через координаты векторов $\vec{r}$ и $\overrightarrow{F}$:

$$M_z = x\,F_y - y\,F_x\,. \tag{4.13}$$

Введем векторы

$$\overrightarrow{R} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{F}_\perp = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j}\,, \tag{4.14}$$

которые представляют собой составляющие векторов $\vec{r}$ и $\overrightarrow{F}$, перпендикулярные к оси z. При помощи векторов (4.14) формулу (4.13) можно записать в векторной форме так:

$$M_z\,\vec{k} = [\,\overrightarrow{R}\,\overrightarrow{F}_\perp\,]\,. \tag{4.15}$$

Модуль этого вектора равен

$$|\,M_z\,| = R\,F_\perp\,\sin\beta = F_\perp\,l_\perp\,, \tag{4.16}$$

где R и $F_\perp$ – модули векторов $\overrightarrow{R}$ и $\overrightarrow{F}_\perp$, β – угол между ними,

$$l_\perp = R\,\sin\beta$$

– *плечо силы относительно оси* z, т.е. расстояние между линией действия силы и осью z.

Если момент силы, действующей на частицу, тождественно равен нулю, то, как следует из уравнения (4.9), момент импульса не будет зависеть от времени, т.е. будет сохраняться. Это утверждение составляет содержание *закона сохранения момента импульса материальной точки.* Момент силы, т.е. векторное произведение $[\,\vec{r}\,\overrightarrow{F}\,]$, будет тождественно равно нулю в частном случае, когда векторы $\vec{r}$ и $\overrightarrow{F}$ коллинеарны при любом положении частицы в пространстве.

4.4. Работа

Пусть за время от некоторого момента t до момента $t+dt$ частица переместилась из точки $\vec{r}$ в точку $\vec{r}+d\vec{r}$ (рис. 4.3). Скалярное произведение вектора силы, которая действовала на частицу в это время, на вектор бесконечно малого перемещения $d\vec{r}$ называется *элементарной работой*, или работой, совершенной силой $\vec{F}$ при перемещении $d\vec{r}$, и обозначается как

$$\delta A = \vec{F}\, d\vec{r}\,. \tag{4.17}$$

Согласно определению скалярного произведения векторов формула (4.17) может быть записана так:

$$\delta A = F \cos\varphi\, ds\,, \tag{4.18}$$

где F – модуль силы, φ – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$, ds – длина вектора перемещения. В координатной форме равенство (4.17) имеет вид

$$\delta A = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz\,. \tag{4.19}$$

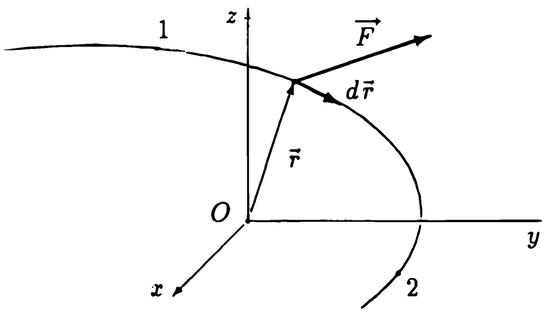

Рис. 4.3. К определению работы

Работа, совершенная силой $\vec{F}$ при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 вдоль некоторой кривой, равна сумме совершенных при этом элементарных работ и выражается интегралом

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{r}\,, \tag{4.20}$$

который называется криволинейным. Этот интеграл может быть сведен к определенному интегралу. Для этого, используя формулу

$$d\vec{r} = \vec{v}\, dt\,,$$

преобразуем выражение (4.17) к виду

$$\delta A = P\, dt\,, \tag{4.21}$$

где величина

$$P = \vec{F}\,\vec{v} \qquad (4.22)$$

называется *мощностью.* Как следует из формулы (4.21), мощность есть работа, совершенная за единицу времени. В том случае, когда движение частицы известно, мощность можно рассматривать как заданную функцию от времени: $P = P(t)$. При этом подстановка выражения (4.21) в криволинейный интеграл (4.20) преобразует его в определенный интеграл

$$A = \int\limits_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt\,, \qquad (4.23)$$

где t_1 и t_2 – моменты времени, когда частица находилась в точках 1 и 2 соответственно.

4.5. Кинетическая энергия

Величина

$$T = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \qquad (4.24)$$

называется *кинетической энергией материальной точки.* В некоторых случаях кинетическую энергию частицы удобно выразить через ее импульс $p = m\,v$, т.е. представить кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{p^2}{2\,m}\,.$$

Более подробно формулу (4.24) можно записать так:

$$T = \frac{1}{2}\,m\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\,.$$

Вычислим производную от кинетической энергии по времени:

$$\dot{T} = m\,(v_x\,\dot{v}_x + v_y\,\dot{v}_y + v_z\,\dot{v}_z) \equiv m\,\vec{v}\,\dot{\vec{v}}\,.$$

Используя второй закон Ньютона и определение мощности (4.22), придем к уравнению

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = P\,.} \qquad (4.25)$$

Из этого уравнения вытекает *закон сохранения кинетической энергии частицы.* Когда мощность силы равна нулю, кинетическая энергия частицы остается постоянной: если $P = 0$, то $T = \mathrm{const}$. Из формулы (4.22) видно, что мощность будет равна нулю, когда сила перпендикулярна скорости ($\cos\varphi = 0$) или когда сама сила равна нулю.

Найдем из уравнения (4.25) приращение кинетической энергии:

$$dT = P\,dt\,,$$

или

$$dT = \delta A\,. \tag{4.26}$$

Интегрируя обе части этого равенства по времени в пределах от t_1 до t_2, получим:

$$\boxed{\Delta T = A\,,} \tag{4.27}$$

где

$$\Delta T = T_2 - T_1 \equiv T(t_2) - T(t_1)\,.$$

Из соотношений (4.26) и (4.27) следует, что приращение кинетической энергии частицы, которое она получила за некоторое время, равно работе, совершенной за это время действующей на частицу силой. Из этих соотношений следует также, что работа и энергия имеют одинаковые размерности. В системе СИ единицей измерения энергии и работы является джоуль (*Дж*), который равен работе, совершенной силой в 1 *Н* на пути в 1 *м*. Формулы (4.21) и (4.25) позволяют определить единицу мощности. В системе СИ единицей мощности является ватт (*Вт*). Это есть работа в 1 *Дж*, совершенная за 1 *с*, или энергия в 1 *Дж*, полученная или отданная какой-либо системой за время 1 *с*.

4.6. Движение частицы в вязкой среде *

На частицу, движущуюся в сплошной среде, действует сила вязкого трения (3.32). Предположим, что условия задачи таковы, что другие силы на частицу не действуют или их действием можно пренебречь. В таком случае второй закон Ньютона можно записать в виде

$$m\dot{\vec{v}} = -\,\alpha\,\vec{v}\,. \tag{4.28}$$

По формуле (4.22) найдем мощность силы вязкого трения:

$$P = -\,\alpha\,v^2\,.$$

Подставив это выражение в уравнение (4.25), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right) = -\,\alpha\,v^2\,. \tag{4.29}$$

Из этого равенства видно, что производная от кинетической энергии по времени отрицательна. Это означает, что кинетическая энергия частицы, движущейся в вязкой среде, убывает со временем.

Уравнение (4.29) нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{dv}{v} = -\,\beta\, dt\,,$$

где $\beta = \alpha/m$. Интегрирование этого уравнения приводит к равенству

$$\ln\, v - \ln\, v_o = -\,\beta\, t\,,$$

разрешив которое относительно скорости, получим зависимость

$$v(t) = v_o\, e^{-\beta t}\,,$$

где v_o – постоянная интегрирования такая, что

$$v(0) = v_o\,,$$

т.е. v_o есть модуль скорости частицы в момент времени $t = 0$.

Величина

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

называется *временем релаксации.* За это время скорость частицы уменьшается в e раз, т.е.

$$\frac{v(t)}{v(t+\tau)} = e\,.$$

Пусть $\vec{v}_o$ есть вектор скорости частицы при $t = 0$. С помощью этого вектора решение уравнения движения (4.28) можно записать так:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o\, e^{-\beta t}\,.$$

В том, что эта функция является решением уравнения (4.28), легко убедиться ее непосредственной подстановкой в это дифференциальное уравнение.

Учитывая, что $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, найдем функцию

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \frac{1}{\beta}\,\left(1 - e^{-\beta t}\right)\,\vec{v}_o\,,$$

где $\vec{r}(0) = \vec{r}_o$. Эта функция описывает прямую линию в пространстве, которая представляет собой траекторию движения частицы.

Запишем полученное решение в координатной форме. Для этого введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы при $t = 0$

частица находилась в начале координат, а ее скорость была направлена вдоль оси x:

$$\vec{r}_o = 0\,, \qquad \vec{v}_o = v_o\,\vec{i}\,.$$

В таком случае будем иметь

$$x(t) = \frac{v_o}{\beta}\,\left(1 - e^{-\beta t}\right)\,,\ \ y = z = 0\,;\ \ v_x(t) = v_o\,e^{-\beta t}\,,\ \ v_x = v_y = 0\,.$$

4.7. Консервативная сила

Пусть сила, действующая на частицу, зависит только от ее положения в пространстве, т.е. является функцией ее радиус-вектора:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})\,. \tag{4.30}$$

Такая функция описывает *постоянное силовое поле.* Существование в пространстве силового поля означает, что в какой бы точке пространства ни оказалась частица в любой момент времени на нее будет действовать сила, определяемая заданной функцией (4.30). В том случае, когда сила не зависит от координат, т.е. вектор силы принимает одно и то же значение во всех точках некоторой области пространства, *силовое поле* называется *однородным.*

Пусть задано некоторое скалярное поле

$$\varphi = \varphi(\vec{r})\,.$$

Вектор, декартовы координаты которого равны соответственно частным производным φ'_x, φ'_y и φ'_z от функции φ по координатам x, y и z, называется *градиентом* этой функции и обозначается символами

$$\mathrm{grad}\,\varphi\,, \qquad \text{или} \qquad \nabla\varphi\,,$$

где ∇ – так называемый оператор "набла":

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}\,.$$

По определению

$$\mathrm{grad}\;\varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\vec{k}\,. \tag{4.31}$$

Постоянное силовое поле $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ называется *консервативным,* если существует скалярная функция

$$U = U(\vec{r})\,, \tag{4.32}$$

называемая *потенциальной энергией частицы*, такая, что

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U\,, \qquad \text{или} \qquad \vec{F} = -\nabla U\,. \tag{4.33}$$

С учетом определения градиента скалярной функции эту формулу можно записать в виде

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\,\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\,\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\,\vec{k}\,, \tag{4.34}$$

или в координатной форме как

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}\,, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}\,, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}\,.$$

Дифференциал функции $U = U(\vec{r})$ согласно определению (1.32) будет

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz\,.$$

Это выражение можно рассматривать как скалярное произведение векторов $\operatorname{grad} U$ и $d\vec{r}$:

$$dU(\vec{r}) = \operatorname{grad} U(\vec{r}) \cdot d\vec{r}\,, \qquad \text{или} \qquad dU = \nabla U \cdot d\vec{r}\,. \tag{4.35}$$

Элементарная работа (4.17), совершаемая консервативной силой (4.33), равна с обратным знаком дифференциалу потенциальной энергии:

$$\delta A = \vec{F}\,d\vec{r} = -\operatorname{grad} U(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \delta A = -\,dU\,. \tag{4.36}$$

Проинтегрируем это соотношение вдоль траектории частицы от точки 1 до точки 2 (рис. 4.3), т.е. найдем сумму элементарных работ, совершенных на различных малых участках траектории:

$$A \equiv \int_1^2 \delta A = -\int_1^2 dU\,.$$

Так как в рассматриваемом случае потенциальная энергия (4.32) зависит только от координат, сумма бесконечно малых ее приращений будет равна ее полному приращению, которое равняется разности значений этой функции в точках 1 и 2:

$$A = -\,\Delta U\,, \tag{4.37}$$

где

$$\Delta U = U_2 - U_1 \equiv U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)\,.$$

Таким образом, приходим к заключению, что *работа, совершаемая консервативной силой, не зависит от пути, по которому движется частица, и определяется только значениями потенциальной энергии в начале и конце пути.* Справедливо обратное утверждение. Если работа при перемещении частицы в постоянном силовом поле из точки 1 в точку 2 не зависит от пути (т.е. от формы траектории, по которой частица перемещается из точки 1 в точку 2), то это означает, что на частицу действует консервативная сила. Это утверждение иногда принимают за определение консервативной силы.

Если, перемещаясь по некоторой замкнутой кривой C, частица возвращается в точку, из которой она начала свое движение, то, как следует из формулы (4.37), работа консервативной силы будет равна нулю:

$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = 0\,.$$

Криволинейный интеграл по замкнутой линии C в левой части этого равенства называется *циркуляцией* вектора $\vec{F}$ по контуру C.

4.8. Полная механическая энергия

Пусть частица движется в поле консервативной силы (4.33). В этом случае второй закон Ньютона можно записать так:

$$m\,\dot{\vec{v}} = -\,\mathrm{grad}\,U\,, \tag{4.38}$$

где $U = U(\vec{r})$ – потенциальная энергия частицы.

Величина

$$E = T + U \tag{4.39}$$

называется *полной механической энергией* материальной точки. Эту величину можно рассматривать как сложную функцию от времени:

$$E(t) = \frac{1}{2}\,m\,v^2(t) + U\left(\,\vec{r}(t)\right)\,. \tag{4.40}$$

Найдем производную от этой функции по времени. Производная от кинетической энергии по времени была найдена в разделе 4.5:

$$\dot{T} = m\,\vec{v}\,\dot{\vec{v}}\,.$$

Для того чтобы найти производную по времени от потенциальной энергии, разделим выражение (4.35) для полного дифференциала потенциальной энергии $U = U(\vec{r})$ на приращение времени dt. Получим

$$\dot{U} = \mathrm{grad}\;U\cdot\vec{v}\,.$$

Таким образом, производная по времени от функции (4.40) будет

$$\dot{E} = m\,\vec{v}\,\dot{\vec{v}} + \operatorname{grad} U \cdot \vec{v}\,.$$

В силу второго закона Ньютона (4.38) будем иметь

$$\frac{dE}{dt} = 0\,.$$

Из полученного равенства вытекает *закон сохранения энергии. Если на частицу действует только консервативная сила, то полная механическая энергия частицы не изменяется при ее движении:*

$$E\left(\vec{r}(t),\, \vec{v}(t)\right) = E = \text{const}\,, \tag{4.41}$$

или

$$\boxed{E(t_1) = E(t_2)}\,, \tag{4.42}$$

где t_1 и t_2 – произвольные моменты времени.

Пусть на частицу действуют несколько сил различной природы. Сумму консервативных сил обозначим $\vec{F}_{к}$, а сумму всех остальных сил – $\vec{F}_{нк}$. Эти силы будем называть *неконсервативными*. Работа, совершаемая силой

$$\vec{F} = \vec{F}_{к} + \vec{F}_{нк}\,,$$

равна сумме работ консервативных и неконсервативных сил:

$$\delta A = \delta A_{кс} + \delta A_{нкс}\,, \qquad \text{или} \qquad A = A_{кс} + A_{нкс}\,.$$

Как показано в разделе 4.7, работа консервативной силы равна с обратным знаком приращению потенциальной энергии:

$$\delta A_{кс} = -\,dU\,, \qquad \text{или} \qquad A_{кс} = -\,\Delta U\,.$$

Используя эти формулы, равенства (4.26) и (4.27) можно преобразовать к виду

$$dE = \delta A_{нкс} \tag{4.43}$$

и

$$\boxed{\Delta E = A_{нкс}}\,, \tag{4.44}$$

где

$$\Delta E = E_2 - E_1 \equiv E(t_2) - E(t_1)\,.$$

Эти соотношения определяют изменение полной энергии при движении частицы. Из них следует, что *приращение полной энергии частицы равно работе неконсервативных сил.*

Разделив равенство (4.43) на приращение времени dt, придем к уравнению

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = P_{нкс}\,,} \tag{4.45}$$

где $P_{нкс}$ есть мощность неконсервативных сил.

Формулы (4.44) и (4.45) дают возможность сформулировать *закон сохранения энергии* в более общем виде. *Полная механическая энергия частицы не изменяется со временем, когда неконсервативные силы работу не совершают*:

$$\text{если} \qquad A_{нкс} = 0\,, \qquad \text{или} \qquad P_{нкс} = 0\,,$$

то

$$E(t_1) = E(t_2)\,, \qquad \text{или} \qquad E(t) = \text{const}\,.$$

Потенциальная энергия может быть определена только с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Это значит, что две функции $U(\vec{r})$ и $\tilde{U}(\vec{r})$, связанные соотношением

$$U(\vec{r}) = \tilde{U}(\vec{r}) + \text{const}\,,$$

описывают одно и то же силовое поле, так как при вычислении градиента функции $U(\vec{r})$ постоянная в правой части равенства исчезает из выражения (4.33) для силы. Работа консервативной силы равна разности значений потенциальной энергии и поэтому на ее значение аддитивная постоянная также не оказывает влияния.

4.9. Движение частицы в постоянном и однородном силовом поле

Пусть на частицу действует сила, которая не зависит ни от времени, ни от координат частицы:

$$\vec{F} = \text{const}\,. \tag{4.46}$$

В этом случае интегрирование уравнений движения производится без затруднений. Согласно второму закону Ньютона ускорение

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\,\vec{F}$$

также будет постоянным. Движение с постоянным ускорением называется *равноускоренным*. Из уравнения

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

найдем, что

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a}\,t\,.$$

Наконец, интегрируя уравнение

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)\,,$$

получим закон движения частицы:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \vec{v}_o\,t + \frac{1}{2}\,\vec{a}\,t^2\,.$$

Запишем полученные решения в координатной форме. Для этого построим прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпало с точкой, в которой находилась частица в момент времени $t = 0$, т.е. $\vec{r}(0) = 0$. Это условие дает $\vec{r}_o = 0$. Направим координатные оси так, чтобы вектор $\vec{v}_o$ лежал в плоскости y-z, а вектор ускорения был направлен вдоль оси z. В этом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}(t)$ будут иметь координаты:

$$a_x = a_y = 0\,, \qquad a_z = \frac{F_z}{m}\,; \qquad v_x = 0\,, \qquad v_y = v_{y_o}\,, \qquad v_z(t) = v_{z_o} + a_z\,t\,,$$

а движение частицы будет описываться функциями:

$$x = 0\,, \qquad y = v_{y_o}\,t\,, \qquad z = v_{z_o}\,t + \frac{1}{2}\,a_z\,t^2\,,$$

На рис. 4.4 изображена траектория движения частицы для случая, когда ускорение a_z отрицательно. Примером такого движения может служить движение частицы в однородном поле силы тяжести. При этом ускорение $a_z = -\,g$.

Постоянное и однородное силовое поле (4.46) является консервативным. Чтобы в этом убедиться, достаточно найти функцию $U = U(\vec{r})$, градиент которой равен $-\vec{F} = \mathrm{const}$. Нетрудно проверить, что функция

$$U(\vec{r}) = -\vec{F}\,\vec{r} + \mathrm{const} \tag{4.47}$$

обладает этим свойством. Аддитивную постоянную можно положить равной нулю, так как ее конкретное числовое значение не имеет физического смысла. Если сила направлена вдоль оси z, то потенциальная энергия частицы будет

$$U = -F_z z . \tag{4.48}$$

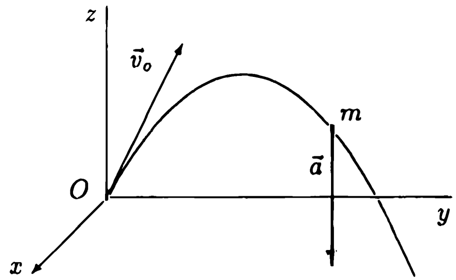

Рис. 4.4. Траектория движения частицы в постоянном и однородном силовом поле

Например, для частицы в однородном поле силы тяжести, когда

$$F_x = F_y = 0 , \quad F_z = -m g ,$$

потенциальная энергия равна

$$U(z) = m g z .$$

Как было доказано в предыдущем разделе, при движении частицы в консервативном силовом поле ее полная механическая энергия сохраняется. Поэтому в рассматриваемом случае можно записать закон сохранения энергии так:

$$\frac{1}{2} m v^2 - F_z z = E = \text{const} .$$

4.10. Центральная сила

Пусть частица движется в постоянном силовом поле $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, которое обладает следующими свойствами: 1) величина силы зависит только от расстояния между частицей и некоторой неподвижной точкой C, называемой *центром силового поля*, 2) направление вектора силы совпадает с прямой линией, соединяющей частицу с центром C. Такая сила называется *центральной*.

Построим прямоугольную декартову систему координат, начало которой совместим с центром силового поля (рис. 4.5). В такой системе координат центральная сила описывается формулой

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\frac{\vec{r}}{r}\,, \tag{4.49}$$

где $F(r)$ – проекция вектора силы на радиус-вектор,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{4.50}$$

– расстояние между частицей, находящейся в произвольной точке пространства и центром силы C. Из определения центральной силы вытекают другие ее замечательные свойства.

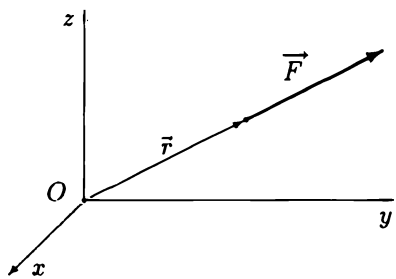

Рис. 4.5. Центральная сила

1. Так как вектор силы (4.49) коллинеарен радиус-вектору, векторное произведение этих векторов равно нулю, т.е. момент центральной силы равен нулю:

$$\vec{M} = [\,\vec{r}\,\vec{F}\,] = 0\,. \tag{4.51}$$

При этом из уравнения (4.9) следует, что

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

и момент импульса частицы не изменяется со временем:

$$\vec{L} = \text{const}\,. \tag{4.52}$$

2. Центральное силовое поле (4.49) является сферически симметричным. Если это поле консервативно, то потенциальная энергия частицы

в таком поле также должна быть сферически симметричной функцией координат, т.е. должна иметь вид

$$U = U(r)\,. \tag{4.53}$$

Найдем градиент этой функции. Согласно правилу дифференцирования сложной функции будем иметь для частной производной от U по x следующее выражение:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}\,,$$

где

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

– частная производная от функции (4.50) по x. Аналогично можно найти частные производные от U по y и z. По определению градиент U есть вектор

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\,.$$

В рассматриваемом случае эта формула приводит к выражению

$$\text{grad } U = \frac{dU}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}\,, \tag{4.54}$$

которое также описывает центрально симметричное векторное поле. Сравнивая выражения (4.49) и (4.54), приходим к выводу, что *центральная сила является консервативной*, а потенциальная энергия связана с проекцией силы на радиальное направление соотношением

$$F(r) = -\,\frac{dU}{dr}\,. \tag{4.55}$$

Если потенциальная энергия частицы описывается функцией

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}\,, \tag{4.56}$$

где α – постоянная величина, то формула (4.55) приводит к зависимости

$$F(r) = \frac{\alpha}{r^2}\,, \tag{4.57}$$

т.е. величина силы будет обратно пропорциональна квадрату расстояния от частицы до силового центра. К таким силам относятся сила Кулона и сила всемирного тяготения. Подстановка (4.57) в формулу (4.49) дает векторное выражение для таких сил:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\alpha\,\vec{r}}{r^3}\,. \tag{4.58}$$

ГЛАВА 5
ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

5.1. Внутренние и внешние силы

Самая простая составная механическая система представляет собой две материальные точки, движущиеся некоторым образом в пространстве. Описывать движение этих точек удобно посредством зависимостей их радиус-векторов от времени:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)\,, \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)\,.$$

Эти зависимости можно найти из уравнений Ньютона, если известны силы, действующие на рассматриваемые частицы.

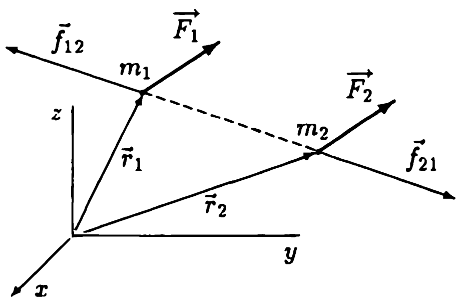

Рис. 5.1. Система из двух частицы. Внутренние и внешние силы

В общем случае частицы взаимодействуют друг с другом. Пусть $\vec{f}_{12}$ есть сила, с которой на первую частица действует вторая, а $\vec{f}_{21}$ – сила, действующая на вторую частицу со стороны первой. Силы $\vec{f}_{12}$ и $\vec{f}_{21}$, с которыми частицы действуют одна на другую, называют *внутренними*. Эти силы подчиняются третьему закону Ньютона

$$\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = 0\,. \tag{5.1}$$

Все другие силы, действующие на частицы рассматриваемой системы, называют *внешними*. Пусть $\overrightarrow{F_1}$ есть сумма всех внешних сил, которые действуют на первую частицу, а $\overrightarrow{F_2}$ есть сумма всех внешних сил, которые действуют на вторую частицу (рис. 5.1). Теперь второй закон Ньютона приводит к следующим уравнениям:

$$\boxed{m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{f}_{12} + \vec{F}_1 , \qquad m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{f}_{21} + \vec{F}_2 ,} \tag{5.2}$$

где m_1 и m_2 – массы частиц.

Рассмотрим еще один пример системы двух тел. Пусть два тела с массами m_1 и m_2 движутся вдоль одной прямой. Направим ось x вдоль этой прямой (рис. 5.2).

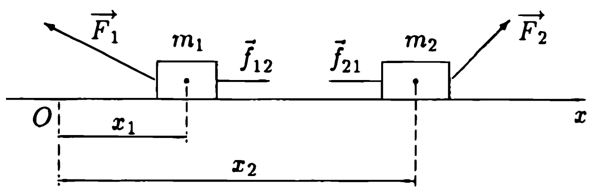

Рис. 5.2. Система двух взаимодействующих тел

Пусть x_1 и x_2 есть координаты тел. При этом движения тел удобно описывать посредством функций

$$x_1 = x_1(t) \quad \text{и} \quad x_2 = x_2(t) .$$

Эти функции можно найти из второго закона Ньютона. На первое тело со стороны второго действует сила $\vec{f}_{12}$, а также на него могут действовать с некоторой силой $\vec{F}_1$ тела, не входящие в состав рассматриваемой системы. На второе тело действует внутренняя сила $\vec{f}_{21}$ и внешняя сила $\vec{F}_2$. Если проекция на ось x внутренней силы $\vec{f}_{12}$ равна f, то проекция на ось x другой внутренней силы $\vec{f}_{21}$ будет равна $-f$. Теперь запишем для каждого тела второй закон Ньютона в проекциях на ось x:

$$m_1 a_1 = f + F_{x_1} , \qquad m_2 a_2 = -f + F_{x_2} , \tag{5.3}$$

где $a_1 = \ddot{x}_1$ и $a_2 = \ddot{x}_2$ – ускорения тел, F_{x_1} и F_{x_2} – проекции внешних сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ на ось x.

Дифференциальные уравнения (5.2) и (5.3) кажутся довольно простыми с виду. Однако их решения в общем случае встречают на своем пути непреодолимые математические трудности. Поэтому интересно рассмотреть случаи, когда можно найти решения этих уравнений, или случаи, когда можно хоть что-то узнать о движении тел.

5.2. Импульс системы тел

Импульсом системы частиц или тел называют векторную сумму импульсов всех частиц, входящих в рассматриваемую систему. Например, импульс двух частиц равен

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \,, \tag{5.4}$$

где

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 \,, \qquad \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 \tag{5.5}$$

– импульсы отдельных частиц.

При помощи формул (5.5) уравнениям (5.2) можно придать вид

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{F}_1 \,, \qquad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{F}_2 \,. \tag{5.6}$$

Эти уравнения представляют законы изменения импульсов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ с течением времени.

Так как внутренние силы $\vec{f}_{12}$ и $\vec{f}_{21}$ подчиняются третьему закону Ньютона (5.1), сложив уравнения (5.6), получим закон, по которому импульс системы изменяется с течением времени,

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \,,} \tag{5.7}$$

где

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

– сумма всех внешних сил, действующих на частицы системы.

Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\vec{F} = 0 \,, \tag{5.8}$$

то из уравнения (5.7) следует, что импульс системы частиц со временем не изменяется, т.е. сохраняется:

$$\boxed{\vec{p} = \text{const} \,.} \tag{5.9}$$

С учетом определения (5.4) равенство (5.9) можно записать так:

$$\vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = \text{const} \,. \tag{5.10}$$

Эти равенства выражают собой *закон сохранения импульса* системы частиц. Согласно равенству (5.10) сумма импульсов частиц рассматриваемой системы со временем не изменяется, если сумма внешних сил равна нулю. При этом импульсы отдельных частиц системы могут изменяться со временем.

Возможны случаи, когда векторная сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю сумма проекций этих сил на какое-то направление. В таком случае проекция импульса системы на это направление со временем изменяться не будет. Например, когда равна нулю сумма проекций внешних сил на ось x: $F_x = 0$, проекция на ось x импульса системы сохраняется:

$$p_{x_1}(t) + p_{x_2}(t) = \text{const} \quad \text{или} \quad p_{x_1}(t_1) + p_{x_2}(t_1) = p_{x_1}(t_2) + p_{x_2}(t_2)\,, \tag{5.11}$$

где t_1 и t_2 – два произвольных момента времени.

Уравнение (5.7) можно преобразовать к виду

$$d\vec{p} = \overrightarrow{F}\, dt\,. \tag{5.12}$$

Согласно этому равенству приращение

$$d\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

импульса системы, которое он получает за время от момента t_1 до момента t_2, равно произведению суммы внешних сил на приращение времени $dt = t_2 - t_1$.

Существуют такие кратковременные, но сильные взаимодействия тел и частиц, что за короткое время dt импульсы отдельных частиц системы могут существенно измениться. Примерами кратковременных взаимодействий тел, в результате которых происходит заметное изменение их импульсов, служат соударения тел, взрывы и выстрелы. Если приращение времени dt очень мало, а действующие в системе внутренние силы существенно превышают по величине внешние силы, то в уравнении (5.12) можно положить $dt = 0$. При этом приращение импульса системы также будет равно нулю: $d\vec{p} = 0$, т.е. импульс $\vec{p}(t_1)$ системы в момент времени t_1 равен импульсу $\vec{p}(t_2)$ системы в момент времени t_2:

$$\boxed{\vec{p}(t_1) = \vec{p}(t_2)\,.} \tag{5.13}$$

Это равенство выражает собой *закон сохранения импульса* системы частиц при кратковременных взаимодействиях этих частиц друг с другом.

Равенство (5.13) для системы двух частиц можно записать так:

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'\,,} \tag{5.14}$$

где $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ – импульсы частиц в момент времени t_1; $\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_2'$ – импульсы частиц после их взаимодействия, т.е. в момент времени t_2.

5.3. Момент импульса системы тел

Моментом импульса системы двух материальных точек называют сумму моментов импульсов этих точек:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2\,, \tag{5.15}$$

где

$$\vec{L}_1 = [\,\vec{r}_1\,\vec{p}_1\,]\,, \qquad \vec{L}_2 = [\,\vec{r}_2\,\vec{p}_2\,] \tag{5.16}$$

моменты импульсов рассматриваемых частиц относительно точки O, которая выбрана в качестве начала инерциальной системы отсчета.

Момент импульса частицы изменяется со временем согласно уравнению (4.9). Это уравнение для первой частицы системы принимает вид

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = [\,\vec{r}_1\,,\ \vec{f}_{12} + \vec{F}_1\,] = \vec{M}_{12} + \vec{M}_1\,, \tag{5.17}$$

где

$$\vec{M}_{12} = [\,\vec{r}_1\,\vec{f}_{12}\,] \quad \text{и} \quad \vec{M}_1 = [\,\vec{r}_1\,\vec{F}_1\,]$$

– моменты соответственно внутренней и внешней сил, которые действуют на первую частицу. Производная по времени от момента импульса второй частицы также равна сумме моментов действующих на нее сил:

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_{21} + \vec{M}_2\,, \tag{5.18}$$

где

$$\vec{M}_{21} = [\,\vec{r}_2\,\vec{f}_{21}\,] \quad \text{и} \quad \vec{M}_2 = [\,\vec{r}_2\,\vec{F}_2\,]$$

– моменты соответственно внутренней и внешней сил, которые действуют на вторую частицу.

Можно показать, что сумма моментов внутренних сил равна нулю:

$$\vec{M}_{12} + \vec{M}_{21} = 0\,. \tag{5.19}$$

Поэтому, сложив равенства (5.17) и (5.18), получим уравнение

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\ ,} \tag{5.20}$$

которое описывает изменение со временем момента импульса системы. Правая часть этого уравнения есть сумма моментов всех внешних сил, действующих на частицы системы:

$$\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2}\ .$$

Если сумма моментов внешних сил, действующих на систему материальных точек, в течение некоторого времени равна нулю

$$\vec{M} = 0\ , \tag{5.21}$$

то момент импульса системы в это время изменяться не будет:

$$\boxed{\vec{L} = \text{const}\ .} \tag{5.22}$$

5.4. Центр масс

Центром инерции, или *центром масс* системы двух частиц называется точка C, радиус-вектор которой определяется формулой

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\ , \tag{5.23}$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиус-векторы рассматриваемых частиц, m_1 и m_2 – их массы.

Используя определение (5.23), можно доказать, что центр масс симметричного тела находится в его центре симметрии, а центр масс двух каких-либо тел лежит на прямой, соединяющей их центры масс.

Из формулы (5.23) следует формула для координаты центра масс

$$x_C = \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2}{m_1 + m_2}\ , \tag{5.24}$$

где x_1 и x_2 – координаты частиц, входящих в состав рассматриваемой системы.

Рассмотрим следующий пример. Две материальные точки с массами m_1 и m_2 укреплены на жестком невесомом стержне длиной l (рис. 5.3). Центр масс этой системы можно найти следующим образом.

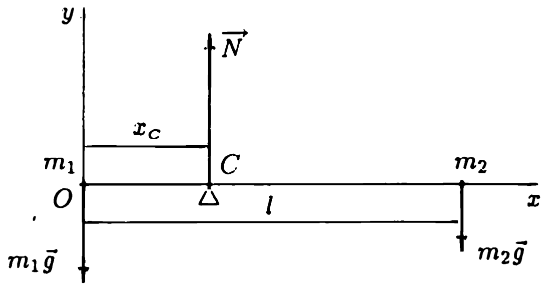

Рис. 5.3. Центр масс системы двух материальных точек

Проведем ось x вдоль стержня и расположим начало отсчета так, чтобы координата x_1 первой точки была равна нулю: $x_1 = 0$. Тогда координата x_2 второй точки будет равна длине стержня: $x_2 = l$. По определению (5.24) координата x_C центра масс будет

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

Поместим в точке C под стержнем опору (рис. 5.3). На систему, т.е. на стержень с прикрепленными к нему грузами, действуют три силы: сила реакции опоры $\vec{N}$ и силы тяжести грузов $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$. Момент силы равен произведению модуля силы на плечо. Твердое тело находится в покое при условии, что алгебраическая сумма моментов всех действующих на него внешних сил равна нулю:

$$\sum M = 0.$$

В данной задаче удобно вычислять моменты сил относительно центра масс C. При этом плечо силы $\vec{N}$ будет равно нулю, плечо силы $m_1\vec{g}$ – координате x_C центра масс, а плечо силы $m_2\vec{g}$ – $l - x_C$. Так как силы $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ стремятся повернуть стержень в различных направлениях: одна по часовой стрелке, а другая – против, условие равновесия принимает вид

$$-m_1 g\, x_C + m_2 g\,(l - x_C) = 0.$$

Разрешив это уравнение относительно x_C, получим предыдущую формулу. Таким образом, приходим к выводу, что в том случае, когда точка опоры совпадает с центром масс, система будет находиться в состоянии равновесия, если на нее действуют только силы тяжести и реакция опоры. Поэтому центр масс иногда называют центром тяжести системы.

Скорость $\vec{v}_C$ центра масс C есть производная от его радиус-вектора $\vec{r}_C = \vec{r}_C(t)$ по времени t. Дифференцирование функции (5.23) приводит к следующему выражению для скорости центра масс:

$$\vec{v}_C = \frac{m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \tag{5.25}$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости первой и второй частиц соответственно. Масса m системы по определению равна сумме масс тел, входящих в состав этой системы:

$$m = m_1 + m_2\,. \tag{5.26}$$

С учетом этого определения и определения (5.4) импульса системы равенство (5.25) можно записать так:

$$m\,\vec{v}_C = \vec{p}\,. \tag{5.27}$$

Согласно этому равенству произведение массы системы на скорость ее центра масс равно импульсу системы.

Так как ускорение $\vec{a}_C$ центра масс C есть производная от его скорости $\vec{v}_C = \vec{v}_C(t)$ по времени t:

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt},$$

при помощи равенства (5.27) уравнение (5.7) можно преобразовать к виду

$$\boxed{m\,\vec{a}_C = \vec{F}\,.} \tag{5.28}$$

Из этого уравнения видно, что центр масс системы тел движется с таким же ускорением, какое имеет материальная точка массы m, к которой приложены все внешние силы, действующие на частицы системы. Из этого уравнения следует также, что в том случае, *когда сумма внешних сил равна нулю, центр масс системы тел или неподвижен, или движется с постоянной скоростью.*

5.5. Энергия системы тел

Полная механическая энергия системы, состоящей из двух частиц, равна сумме кинетических и потенциальных энергий этих частиц:

$$E = T_1 + T_2 + U_1 + U_2 + W_{12}\,, \tag{5.29}$$

где

$$T_1 = \frac{1}{2}\, m_1\, v_1^2 \qquad \text{и} \qquad T_2 = \frac{1}{2}\, m_2\, v_2^2$$

– кинетические энергии частиц; U_1 и U_2 – их потенциальные энергии, соответствующие внешним консервативным силам, действующим на эти частицы; W_{12} – потециальная энергия взаимодействия частиц.

Полная механическая энергия E системы частиц изменяется с течением времени по закону

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = P_{нкс}\,,} \tag{5.30}$$

где $P_{нкс}$ – мощность неконсервативных сил, действующих на частицы рассматриваемой системы.

Если мощность неконсервативных сил в течение некоторого времени равна нулю:

$$P_{нкс} = 0\,, \tag{5.31}$$

то полная механическая энергия системы в это время изменяться не будет:

$$\boxed{E = \mathrm{const}\;.} \tag{5.32}$$

Это утверждение составляет содержание *закона сохранения энергии.*

Из уравнения (5.30) следует, что приращение $\Delta E = E(t_2) - E(t_1)$ полной механической энергии системы частиц за время от t_1 до t_2 равно работе $A_{нкс}$ действующих на частицы неконсервативных сил, которую они совершают за это время:

$$\boxed{\Delta E = A_{нкс}\,.} \tag{5.33}$$

Полная механическая энергия системы тел в моменты времени t_1 и t_2 принимает одно и то же значение, если работа $A_{нкс}$ неконсервативных сил за это время равна нулю:

$$\boxed{E(t_1) = E(t_2)\,, \qquad \text{если} \qquad A_{нкс} = 0\,.} \tag{5.34}$$

5.6. Удар

Ударом называется кратковременное взаимодействие тел при их столкновении и совокупность возникающих при этом явлений. При соударении твердых тел они претерпевают упругие и пластические деформации, нагреваются и даже частично разрушаются. В течение очень короткого промежутка времени, когда длится удар, между соударяющимися телами действуют весьма значительные силы, называемые *ударными*, или *мгновенными*. Действие этих сил приводит к существенным изменениям скоростей частиц, входящих в состав соударяющихся тел. Так как длительность удара очень мала, можно считать, что положения частиц в процессе удара практически не изменяются.

Импульс системы соударяющихся частиц сохраняется, т.е. сумма импульсов всех частиц системы до удара равна сумме импульсов этих частиц после удара. Этот закон описывается уравнениями (5.11), (5.13) и (5.14).

При столкновении макроскопических тел кинетическая энергия T, которой они обладали перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругих деформаций этих тел и тепловую энергию Q атомов и молекул, входящих в их состав. При этом температура тел повышается. После удара упругие деформации исчезают, а их энергия переходит в кинетическую энергию T' разлетающихся тел:

$$\boxed{T = T' + Q\,.} \tag{5.35}$$

Это равенство выражает собой *закон сохранения энергии при ударе*. Более подробно этот закон можно записать следующим образом:

$$\boxed{T_1 + T_2 = T_1' + T_2' + Q\,.} \tag{5.36}$$

где T_1, T_2 и T_1', T_2' – кинетические энергии частиц до и после удара.

Удар называется *абсолютно упругим*, если кинетическая энергия соударяющихся тел сохраняется:

$$T = T'\,, \qquad \text{или} \qquad T_1 + T_2 = T_1' + T_2'\,, \tag{5.37}$$

т.е. $Q = 0$.

Удар называется *неупругим*, когда $Q \neq 0$. Удар называется *абсолютно неупругим*, если после него тела слипаются и движутся затем с одинаковой скоростью как единое целое.

ГЛАВА 5*

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

(продолжение)

5.7. Уравнение изменения импульса системы частиц

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек. Каждой из этих точек припишем некоторый порядковый номер $i = 1, 2, ..., N$. Пусть $\vec{r}_i$ есть радиус-вектор частицы с номером i. Этот вектор определяет положение частицы относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Движение всех частиц системы можно описать при помощи N векторных функций

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)\,, \qquad \text{где} \qquad i = 1, 2, ..., N\,.$$

Каждая из этих функций подчиняется второму закону Ньютона. Запишем уравнения движения частиц. Для этого классифицируем действующие на них силы.

Каждая частица системы в общем случае взаимодействует не только с другими частицами этой системы, но также она может испытывать воздействие со стороны частиц, не входящих в состав исследуемой системы. Сила $\vec{f}_{ik}$, с которой частица под номером k действует на частицу под номером i, называется *внутренней*, если обе частицы принадлежат данной системе. Сила $\vec{F}_i$, характеризующая воздействие, которое оказывают на i-ю частицу частицы, не принадлежащие данной системе, называется *внешней*. Учитывая все силы, действующие на частицу под номером i, запишем второй закон Ньютона для этой частицы:

$$m_i\,\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i\,, \tag{5.38}$$

где m_i – масса i-й частицы, $i = 1, 2, ..., N$; суммирование внутренних сил $\vec{f}_{ik}$ производится по всем значениям индекса k, кроме $k = i$. Соответствующие различным значениям индекса i уравнения (5.38) вместе взятые образуют систему для неизвестных функций $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$. Однако следует заметить, что уже для трех взаимодействующих частиц решение этой системы в общем случае представляет собой очень сложную математическую задачу.

Импульсом системы материальных точек называют сумму импульсов всех частиц этой системы:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \,, \tag{5.39}$$

где

$$\vec{p}_i = m_i \, \vec{v}_i \equiv m_i \, \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

– импульс i-й частицы.

Предполагая, что число частиц в системе со временем не изменяется, продифференцируем равенство (5.39) по времени:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \,.$$

Так как

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = m_i \, \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \,,$$

с учетом уравнений движения (5.38) получим:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \vec{f}_{ik} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \,. \tag{5.40}$$

Первая сумма в правой части этого равенства, т.е. сумма всех внутренних сил, содержит как силу $\vec{f}_{ik}$, с которой k-я частица действует на i-ю частицу, так и силу $\vec{f}_{ki}$, с которой i-я частица действует на частицу под номером k. Таким образом, все слагаемые в этой сумме можно разбить на пары

$$\vec{f}_{ik} + \vec{f}_{ki} \,.$$

В силу третьего закона Ньютона это выражение равно нулю. Поэтому сумма всех внутренних сил также равна нулю:

$$\sum_{i} \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} = 0 \,.$$

При этом уравнение (5.40) принимает вид

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i} \vec{F}_i \,.} \tag{5.41}$$

Согласно этому уравнению *производная по времени от импульса системы материальных точек равна сумме всех внешних сил, действующих на систему.*

Из уравнения (5.41) вытекает *закон сохранения импульса*, который формулируется следующим образом. *Импульс системы материальных точек не изменяется со временем, если сумма всех внешних сил, действующих на систему, тождественно равна нулю.* В самом деле, если

$$\sum_i \vec{F_i} \equiv 0$$

на некотором отрезке времени, то $\dot{\vec{p}} \equiv 0$, т.е. импульс системы в течение этого времени остается постоянным:

$$\vec{p} = \text{const}\,, \qquad \text{или} \qquad \sum_i \vec{p_i}(t) = \text{const}\,. \tag{5.42}$$

Однако импульсы отдельных частиц могут изменяться вследствие их взаимодействия друг с другом или под действием внешних сил.

Из равенств (5.42) следует, что *импульс системы частиц в некоторый момент времени t_1 равен импульсу этих частиц в любой другой момент времени t_2*:

$$\boxed{\sum_i \vec{p_i}(t_1) = \sum_i \vec{p_i}(t_2)\,,} \tag{5.43}$$

или

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} + \ldots + \vec{p_N} = \vec{p_1}' + \vec{p_2}' + \ldots + \vec{p_N}'\,,$$

где левые и правые части равенств соответствуют различным моментам времени.

Согласно уравнению (5.41) проекция p_x на ось x вектора импульса системы частиц изменяется со временм так, что ее производная равна сумме проекций на эту ось всех внешних сил:

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum_i F_{x_i}\,. \tag{5.44}$$

Из уравнения (5.44) следует, что в том случае, *когда сумма проекций всех внешних сил на некоторое направление равна нулю, проекция импульса системы на это направление не изменяется со временем*:

$$\sum_i p_{x_i}(t) = \text{const}\,, \qquad \text{если} \qquad \sum_i F_{x_i} \equiv 0\,. \tag{5.45}$$

5.8. Уравнение движения центра масс

Центром инерции, или *центром масс системы частиц* называют точку C, радиус-вектор $\vec{r}_C$ которой определяют формулой

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_i m_i \, \vec{r}_i \, , \tag{5.46}$$

где

$$m = \sum_i m_i$$

– масса системы. Согласно определению (5.46) декартовы координаты центра инерции будут

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_i m_i \, x_i \, , \qquad y_C = \frac{1}{m} \sum_i m_i \, y_i \, , \qquad z_C = \frac{1}{m} \sum_i m_i \, z_i \, .$$

Если число частиц в системе и ее масса со временем не изменяются, то продифференцировав равенство (5.8) по времени, найдем, что скорость центра инерции

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \, \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{p}_i = \frac{1}{m} \, \vec{p} \, .$$

Отсюда получим:

$$\vec{p} = m \, \vec{v}_C \, , \tag{5.47}$$

т.е. *импульс системы материальных точек равен произведению ее массы m на вектор скорости центра инерции.* Используя эту формулу, уравнение (5.41) можно преобразовать к виду

$$\boxed{m \, \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i \, .} \tag{5.48}$$

Из этого уравнения видно, что *центр инерции системы движется как материальная точка, масса которой равна массе m системы и на которую действуют все внешние силы*, приложенные к различным частицам системы.

В частности, *если сумма всех внешних сил равна нулю, то центр инерции будет двигаться прямолинейно и равномерно или оставаться неподвижным.*

5.9. Уравнение для момента импульса системы частиц

По определению момент импульса одной из частиц системы равен

$$\vec{L_i} = [\,\vec{r}_i\,\vec{p}_i\,]\,,$$

где $i = 1, 2, ..., N$. Сумма этих векторов

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L_i} \tag{5.49}$$

называется *моментом импульса системы материальных точек относительно точки* O, которая выбрана как начало инерциальной системы отсчета.

В соответствии с уравнением (4.9) производная по времени от момента импульса i-й частицы равна сумме моментов всех сил, которые действуют на эту частицу:

$$\frac{d\vec{L_i}}{dt} = [\,\vec{r}_i\,,\, \sum_{k\neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F_i}\,] = \sum_{k\neq i} \vec{M}_{ik} + \vec{M_i}\,, \tag{5.50}$$

где

$$\vec{M}_{ik} = [\,\vec{r}_i\,\vec{f}_{ik}\,] \quad \text{и} \quad \vec{M_i} = [\,\vec{r}_i\,\vec{F_i}\,]$$

– моменты внутренних и внешних сил соответственно. Сложив равенства (5.50), т.е. просуммировав их по всем значениям индекса i, получим с учетом определения (5.49) выражение для производной по времени от момента импульса системы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{N} \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^{N} \vec{M_i}\,. \tag{5.51}$$

Моменты внутренних сил в этой сумме образуют пары

$$\vec{M}_{ik} + \vec{M}_{ki} = [\,\vec{r}_i\,\vec{f}_{ik}\,] + [\,\vec{r}_k\,\vec{f}_{ki}\,]\,.$$

В силу третьего закона Ньютона

$$\vec{f}_{ki} = -\vec{f}_{ik}\,.$$

Поэтому

$$\vec{M}_{ik} + \vec{M}_{ki} = [\,\vec{r}_i - \vec{r}_k,\, \vec{f}_{ik}\,]\,.$$

Сила $\vec{f}_{ik}$ взаимодействия двух материальных точек направлена вдоль прямой, соединяющей эти точки, т.е. векторы $\vec{f}_{ik}$ и $\vec{r}_i - \vec{r}_k$ коллинеарны (рис. 5.4):

$$\vec{f}_{ik} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_k \,.$$

Поэтому их векторное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{M_{ik}} + \overrightarrow{M_{ki}} = 0 \,.$$

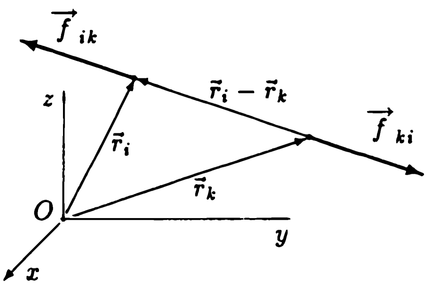

Рис. 5.4. Внутренние силы

Из этого равенства следует, что

$$\sum_i \sum_{k \neq i} \overrightarrow{M_{ik}} = 0$$

и уравнение (5.51) для момента импульса системы будет иметь вид

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{M_i}\,,} \qquad (5.52)$$

т.е. *производная по времени от момента импульса системы материальных точек равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на эту систему.*

Следствием уравнения (5.52) является *закон сохранения момента импульса системы. Если сумма моментов внешних сил, действующих на систему материальных точек, равна нулю в течение некоторого времени, то момент импульса системы в это время изменяться не будет:*

$$\vec{L} = \text{const}\,, \quad \text{или} \quad \sum_i \vec{L}_i(t) = \text{const}\,, \quad \text{если} \quad \sum_i \overrightarrow{M_i} \equiv 0\,. \qquad (5.53)$$

В проекциях на ось z уравнение (5.52) имеет вид

$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{z_i}\,.} \qquad (5.54)$$

Из этого уравнения следует, что в том случае, *когда сумма моментов внешних сил относительно некоторой оси тождественно равна нулю,* *проекция вектора момента импульса на эту ось со временем не изменяется*:

$$L_z = \text{const}, \quad \text{или} \quad \sum_i L_{z_i}(t) = \text{const}, \quad \text{если} \quad \sum_i M_{z_i} \equiv 0. \qquad (5.55)$$

Из этих равенств следует, что

$$\sum_i L_{z_i}(t_1) = \sum_i L_{z_i}(t_2),$$

где t_1 и t_2 – произвольные моменты времени.

5.10. Инвариантность уравнения для момента импульса

Введем еще одну прямоугольную декартову систему координат K', началом которой служит центр масс C исследуемой системы, а координатные оси которой направлены так же, как оси исходной инерциальной системы отсчета K (рис. 5.5). Такая система отсчета называется *системой центра инерции* для данной системы частиц. Эта система отсчета может быть неинерциальной, если точка C движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчета K.

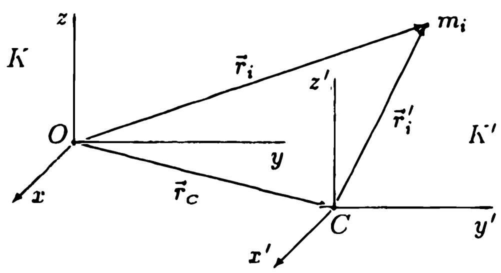

Рис. 5.5. К вопросу об инвариантности уравнения для момента импульса

Пусть $\vec{r}_C = \vec{r}_C(t)$ есть векторная функция, описывающая движение точки C в системе отсчета K. Тогда функция $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, описывающая движение частицы с номером i относительно системы отсчета K, будет связана с функцией $\vec{r}_i' = \vec{r}_i'(t)$, описывающей движение той же частицы относительно системы отсчета K', соотношением

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_C(t) + \vec{r}_i'(t). \qquad (5.56)$$

Умножим это равенство на массу m_i частицы с номером i и просуммируем обе его части по i от 1 до N. В результате получим:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i \vec{r}_C + \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\prime} .$$

С учетом определения (5.46) центра масс системы частиц будем иметь

$$\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\prime} = 0 .$$

Дифференцирование этого равенства по времени дает

$$\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,\prime} = 0 , \tag{5.57}$$

где

$$\vec{v}_i^{\,\prime} = \frac{d\vec{r}_i^{\,\prime}}{dt}$$

– скорость i-й частицы в системе отсчета K'.

Продифференцируем по времени обе части равенства (5.56). Получим соотношение

$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}_C(t) + \vec{v}_i^{\,\prime}(t) , \tag{5.58}$$

которое связывает скорости $\vec{v}_i$ и $\vec{v}_i^{\,\prime}$ частицы в системах отсчета K и K' со скоростью $\vec{v}_C$ движения точки C относительно инерциальной системы отсчета K.

Используя формулы (5.56) и (5.58), преобразуем выражение (5.49) для момента импульса системы материальных точек следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i \,[\, \vec{r}_i \, \vec{v}_i \,] = \sum_i m_i \,[\, \vec{r}_C + \vec{r}_i^{\,\prime} , \, \vec{v}_C + \vec{v}_i^{\,\prime} \,] = \\ &= \sum_i m_i \Big([\, \vec{r}_i \, \vec{v}_C \,] + [\, \vec{r}_C \, \vec{v}_i^{\,\prime} \,] + [\, \vec{r}_i^{\,\prime} \, \vec{v}_i^{\,\prime} \,] \Big) = \\ &= m \,[\, \vec{r}_C \, \vec{v}_C \,] + \Big[\, \vec{r}_C \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,\prime} \Big] + \sum_i m_i \,[\, \vec{r}_i^{\,\prime} \, \vec{v}_i^{\,\prime} \,] .\end{aligned}$$

С учетом равенства (5.57) придем к формуле

$$\vec{L} = m \,[\, \vec{r}_C \, \vec{v}_C \,] + \vec{L}_C , \tag{5.59}$$

где

$$\vec{L}_C = \sum_i [\, \vec{r}_i^{\,\prime} \, \vec{p}_i^{\,\prime} \,] \tag{5.60}$$

– момент импульса системы частиц относительно ее центра масс.

Продифференцируем обе части равенства (5.59) по времени. Получим:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left[\frac{d\vec{r}_C}{dt}\,\vec{v}_C\right] + m\left[\vec{r}_C\,\frac{d\vec{v}_C}{dt}\right] + \frac{d\vec{L}_C}{dt}.$$

В этом выражении первое слагаемое равно нулю, так как векторы $\dot{\vec{r}}_C$ и $\vec{v}_C$ коллинеарны; а второе слагаемое можно преобразовать при помощи уравнения (5.48). В результате получим:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}_C \sum_i \vec{F}_i\right] + \frac{d\vec{L}_C}{dt}. \qquad (5.61)$$

Равенство (5.56) позволяет преобразовать сумму моментов всех внешних сил следующим образом:

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\,\vec{r}_i\,\vec{F}_i\,] = \sum_i [\,\vec{r}_C + \vec{r}_i\,', \vec{F}_i\,] = \left[\vec{r}_C \sum_i \vec{F}_i\right] + \vec{M}_C, \qquad (5.62)$$

где

$$\vec{M}_C = \sum_i [\,\vec{r}_i\,'\,\vec{F}_i\,] \qquad (5.63)$$

есть сумма моментов всех внешних сил относительно центра инерции системы.

Подстановка выражений (5.61) и (5.62) в равенство (5.52) приводит к уравнению

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C.} \qquad (5.64)$$

В согласии с принципом относительности уравнение (5.52) для момента импульса системы частиц инвариантно относительно преобразования Галилея, т.е. его вид не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Теперь доказано, что *уравнение для момента импульса системы частиц имеет один и тот же вид не только в любой инерциальной системе отсчета, но также в невращающейся системе отсчета, начало которой совпадает с центром инерции исследуемой системы частиц.*

5.11. Потенциальная энергия взаимодействия частиц

Сила, которая действует на одну из частиц системы (скажем, на частицу под номером i) со стороны всех других частиц этой системы, равна сумме внутренних сил, действующих на рассматриваемую частицу:

$$\vec{f}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \vec{f}_{ik} \,. \tag{5.65}$$

Характеризующие взаимодействие частиц внутренние силы могут быть как консервативными, так и неконсервативными. Внутренние силы называются консервативными, если существует функция

$$W = W(\vec{r}_1,\, \vec{r}_2, \ldots,\, \vec{r}_N)\,, \tag{5.66}$$

зависящая от радиус-векторов частиц, т.е. от расположения частиц в пространстве, и называемая *потенциальной энергией взаимодействия частиц*, такая, что внутренняя сила, действующая на i-ю частицу, равна

$$\vec{f}_i = -\operatorname{grad}_i W \equiv -\nabla_i W \equiv -\frac{\partial W}{\partial x_i}\vec{i} - \frac{\partial W}{\partial y_i}\vec{j} - \frac{\partial W}{\partial x_i}\vec{k}\,. \tag{5.67}$$

Чтобы представить себе, какой может быть функция (5.66), рассмотрим сначала систему, состоящую только из двух частиц. В этом случае потенциальная энергия взаимодействия частиц будет зависеть только от двух векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$:

$$W = W(\vec{r}_1,\, \vec{r}_2)\,.$$

Если частицы сферически симметричны, то можно утверждать, что энергия их взаимодействия должна зависеть только от расстояния R между ними:

$$W = W(R)\,, \tag{5.68}$$

где

$$R = |\,\vec{r}_1 - \vec{r}_2\,| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\,.$$

По определению функция W такова, что внутренние силы, действующие на частицы 1 и 2, равны соответственно

$$\vec{f}_{12} = -\operatorname{grad}_1 W\,, \qquad \vec{f}_{21} = -\operatorname{grad}_2 W\,. \tag{5.69}$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, найдем проекции этих сил на ось x:

$$f_{x_{12}} = -\frac{\partial W}{\partial x_1} = -\frac{dW}{dR}\cdot\frac{\partial R}{\partial x_1}\,, \qquad f_{x_{21}} = -\frac{\partial W}{\partial x_2} = -\frac{dW}{dR}\cdot\frac{\partial R}{\partial x_2}\,.$$

Нетрудно доказать, что

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{x_1 - x_2}{R}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x_2} = -\frac{x_1 - x_2}{R}.$$

Аналогично можно найти проекции векторов $\vec{f}_{12}$ и $\vec{f}_{21}$ на оси y и z. Полученные формулы дают возможность записать векторные выражения

$$\vec{f}_{12} = -\frac{dW}{dR}\frac{\vec{R}}{R}, \qquad \vec{f}_{21} = \frac{dW}{dR}\frac{\vec{R}}{R}, \tag{5.70}$$

где

$$\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 .$$

Из формул (5.70) видно, что силы взаимодействия сферически симметричных частиц являются центральными и подчиняются третьему закону Ньютона:

$$\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = 0 .$$

Вернемся теперь к рассмотрению системы, состоящей из произвольного числа частиц. Предположим, что частицы взаимодействуют попарно, т.е. энергия взаимодействия двух частиц не зависит от расположения других частиц в пространстве. Пусть

$$W_{ik} = W_{ik}(R_{ik}) \tag{5.71}$$

есть энергия взаимодействия частиц с номерами i и k, где

$$R_{ik} = |\, \vec{r}_i - \vec{r}_k \,|$$

– расстояние между этими частицами. Очевидно, что

$$W_{ik} = W_{ki} . \tag{5.72}$$

Потенциальная энергия (5.34) определяет силу взаимодействия частиц:

$$\vec{f}_{ik} = -\operatorname{grad}_i W_{ik} = -\frac{dW_{ik}}{dR_{ik}} \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{R_{ik}} .$$

Из этой формулы следует, что для любой пары частиц силы их взаимодействия будут центральными и ньютоновскими:

$$\vec{f}_{ik} + \vec{f}_{ki} = 0 .$$

Сумму

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} W_{ik} \tag{5.73}$$

назовем *энергией взаимодействия* i-й частицы со всеми другими частицами системы. Насколько такое название оправдано, можно судить по следующим равенствам:

$$- \operatorname{grad}_i \sum_{k \neq i} W_{ik} = - \sum_{k \neq i} \operatorname{grad}_i W_{ik} = \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} = \vec{f}_i \,. \tag{5.74}$$

Как видно из этих равенств, внутренняя сила $\vec{f}_i$, действующая на i-ю частицу, равна с обратным знаком градиенту ее энергии (5.73), что соответствует определению потенциальной энергии.

Предположим, что потенциальная энергия (5.66) взаимодействия всех частиц системы равна сумме энергий взаимодействия различных пар частиц:

$$W = W_{12} + W_{13} + \ldots + W_{1N} + W_{23} + W_{24} \ldots + W_{2N} + \\ + \ldots + W_{N-1,\,N} \equiv \sum_i \sum_{k > i} W_{ik} \,. \tag{5.75}$$

Чтобы убедиться в справедливости этого предположения, необходимо проверить, удовлетворяет ли функция (5.75) определению (5.67). Слагаемые в формуле (5.75) для любого номера i можно сгруппировать так, что первые $N - 1$ из них будут зависеть от вектора $\vec{r}_i$, а все другие нет:

$$W = W_{i1} + W_{i2} + \ldots + W_{i,\,i-1} + W_{i,\,i+1} + \ldots + W_{iN} + \ldots \equiv \sum_{k \neq i} W_{ik} + \ldots$$

Поэтому с учетом равенства (5.74) будем иметь

$$- \operatorname{grad}_i W = - \operatorname{grad}_i \sum_{k \neq i} W_{ik} = \vec{f}_i \,.$$

Что и требовалось доказать.

В некоторых случаях удобно суммировать энергии W_{ik} по всем возможным значениям индексов i и k. Полученная таким образом сумма будет вдвое больше энергии W взаимодействия частиц, так как энергия каждой пары войдет в эту сумму дважды. Поэтому можно записать

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} W_{ik} \,. \tag{5.76}$$

5.12. Закон сохранения энергии

В общем случае на каждую частицу исследуемой системы действуют и внутренние, и внешние силы; и консервативные, и неконсервативные. С учетом сказанного запишем второй закон Ньютона для i-й частицы в виде

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_i + \vec{F}_i + \vec{F}_i^{(нк)}, \tag{5.77}$$

где $\vec{f}_i$ и $\vec{F}_i$ – действующие на эту частицу внутренняя и внешняя консервативные силы соответственно; $\vec{F}_i^{(нк)}$ – внутренние и внешние неконсервативные силы вместе взятые.

Внешняя консервативная сила $\vec{F}_i$, которая действует на частицу с номером i, по определению равна

$$\vec{F}_i = -\operatorname{grad}_i U_i \equiv -\nabla_i U_i \equiv -\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\vec{i} + \frac{\partial U_i}{\partial y_i}\vec{j} + \frac{\partial U_i}{\partial z_i}\vec{k}\right), \tag{5.78}$$

где

$$U_i = U_i(\vec{r}_i)$$

– потенциальная энергия i-й частицы во внешнем силовом поле.

Используя формулы (5.67) и (5.78), консервативную силу можно представить так:

$$\vec{f}_i + \vec{F}_i = -\nabla_i U, \tag{5.79}$$

где

$$U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{k \neq i} W_{ik} + \sum_i U_i \tag{5.80}$$

– *потенциальная энергия системы частиц*. Подставив выражение (5.79) в уравнение (5.77), получим:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\nabla_i U + \vec{F}_i^{(нк)}. \tag{5.81}$$

Полная механическая энергия системы равна сумме кинетических и потенциальных энергий входящих в систему частиц:

$$E = T + U, \tag{5.82}$$

где

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{5.83}$$

– *кинетическая энергия системы частиц.* При движении частиц, когда их радиус-векторы и скорости изменяются с течением времени:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t) \quad \text{и} \quad \vec{v}_i = \vec{v}_i(t)\,,$$

энергия системы также, вообще говоря, изменяется со временем:

$$E(t) = \sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, v_i^2(t) + U\Big(\vec{r}_1(t),\ \vec{r}_2(t), \ldots,\ \vec{r}_N(t)\Big)\,.$$

Найдем закон изменения полной механической энергии системы частиц с течением времени. Для этого вычислим производную по времени от этой функции. Сначала, используя результаты, полученные в разделе 4.5, запишем выражение для производной по времени от кинетической энергии:

$$\dot{T} = \sum_i m_i\, \vec{v}_i\, \dot{\vec{v}}_i\,.$$

С учетом уравнений движения (5.81) будем иметь

$$\dot{T} = \sum_i \left(-\nabla_i\, U + \vec{F}_i^{(\text{нк})} \right) \vec{v}_i\,. \tag{5.82}$$

Дифференциал потенциальной энергии (5.80) по определению (4.35) равен

$$dU = \sum_i \nabla_i\, U \cdot d\vec{r}_i\,.$$

Разделив это равенство на бесконечно малое приращение времени dt, найдем производную по времени от потенциальной энергии системы:

$$\dot{U} = \sum_i \nabla_i\, U \cdot \vec{v}_i\,.$$

При помощи этой формулы преобразуем равенство (5.82) к виду

$$\dot{T} = -\,\dot{U} + P_{\text{нкс}}\,, \tag{5.83}$$

где

$$P_{\text{нкс}} = \sum_i \vec{F}_i^{(\text{нк})}\, \vec{v}_i \tag{5.84}$$

есть *мощность неконсервативных сил.* Из равенства (5.84) следует, что

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = P_{\text{нкс}}\,,} \tag{5.85}$$

т.е. *производная от полной механической энергии системы по времени равна мощности внутренних и внешних неконсервативных сил.*

Равенству (5.85) можно придать вид

$$dE = \delta A_{нкс}\,, \tag{5.86}$$

где

$$\delta A_{нкс} = P_{нкс}\,dt$$

– элементарная работа неконсервативных сил. Проинтегрировав обе части равенства (5.86) по времени в пределах от t_1 до t_2, получим:

$$\boxed{\Delta E = A_{нкс}\,,} \tag{5.87}$$

где

$$\Delta E = E_2 - E_1 \equiv E(t_2) - E(t_1)$$

– приращение полной энергии системы за время от t_1 до t_2,

$$A_{нкс} = \int_{t_1}^{t_2} P_{нкс}\,dt$$

– работа, совершенная за это время неконсервативными силами.

Следствием равенства (5.85) является *закон сохранения полной энергии системы частиц. Если мощность неконсервативных сил, действующих на частицы системы, равна нулю в течение некоторого времени, то полная механическая энергия системы в это время не изменяется*:

$$\boxed{T(t) + U(t) = E = \text{const}\,, \quad \text{если} \quad P_{нкс} \equiv 0\,.} \tag{5.88}$$

Из равенства (5.87) следует, что полная механическая энергия $E(t_1)$ системы в момент времени t_1 будет равна энергии $E(t_2)$ системы в момент времени $t_2 > t_1$, если работа неконсервативных сил за это время равна нулю:

$$\boxed{E(t_1) = E(t_2)\,, \quad \text{или} \quad T(t_1) + U(t_1) = T(t_2) + U(t_2)\,,} \tag{5.89}$$

при условии

$$A_{нкс} = 0\,.$$

5.13. Задача о космическом корабле

Двигатели космического корабля, выбрасывая газы от сгоревшего топлива, создают силу, движущую корабль через пространство. Такое движение называется *реактивным.* Идея использовать реактивное движение для осуществления космических полетов принадлежит русскому ученому К.Э.Циолковскому (1857 - 1935). Составим и решим уравнение, описывающее движение корабля в глубоком космосе, где можно пренебречь внешними силами, действующими на корабль, такими, как сила тяготения космических тел и сила сопротивления среды. Эту задачу впервые сформулировал и решил другой русский ученый И.В.Мещерский (1859 - 1935).

Масса m корабля и содержащегося в нем топлива во время работы двигателей изменяется вследствие того, что топливо непрерывно сгорает и вырывающиеся из сопел газы (продукты сгорания топлива) уносят часть массы: $m = m(t)$. Пусть dm есть приращение этой функции за время от некоторого момента t до момента $t + dt$, т.е. $dm = m(t + dt) - m(t)$. Так как масса корабля со временем уменьшается, приращение $dm < 0$. Поэтому масса выброшенных двигателем за время dt газов будет равна $-dm$. Если $\vec{w}$ есть скорость этих газов, то их импульс будет равен $-\vec{w}\,dm$.

Когда внешние силы отсутствуют, импульс системы сохраняется. Поэтому импульс $\vec{p}(t)$ корабля в момент времени t можно приравнять сумме импульсов корабля в момент времени $t + dt$ и выброшенных за время dt газов:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(t + dt) - \vec{w}\,dm\,. \tag{5.90}$$

Отсюда, учитывая, что

$$d\vec{p} = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)\,,$$

получим уравнение

$$d\vec{p} = \vec{w}\,dm\,. \tag{5.91}$$

Пусть $\vec{v}$ – скорость корабля. Подстановка выражения $\vec{p} = m\,\vec{v}$ в левую часть уравнения (5.91) позволяет преобразовать его к виду

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\,\frac{dm}{dt}\,, \tag{5.92}$$

где

$$\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

– относительная скорость истечения газов.

Вектор

$$\vec{F} = \vec{u}\,\frac{dm}{dt}\,,$$

в правой части уравнения (5.92) называют *реактивной силой.* Так как $\dot{m} < 0$, реактивная сила направлена в сторону, противоположную скорости $\vec{u}$ истечения газов из сопел двигателей (рис. 5.6).

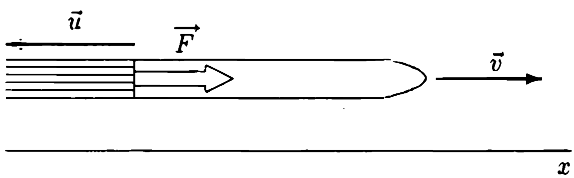

Рис. 5.6. Космический корабль движется под действием реактивной силы

Пусть корабль движется вдоль прямой. При этом уравнение (5.92) можно записать в координатной форме как

$$m\,\dot{v} = -\,u\,\dot{m}\,.$$

В этом уравнении переменные v и m разделяются:

$$dv = -\,u\,\frac{dm}{m}\,.$$

При $u = \mathrm{const}$ полученное уравнение нетрудно проинтегрировать:

$$v = C - u\,\ln m\,.$$

Постоянную интегрирования C найдем из условий

$$m(t_o) = m_o\,, \qquad v(t_o) = v_o\,,$$

где m_o и v_o – заданные значения массы и скорости корабля соответственно. После несложных преобразований придем к формуле

$$v(t) = v_o + u\,\ln\frac{m_o}{m(t)}\,.$$

Закон изменения массы корабля со временем определяется режимом работы двигателей. Если функция $m = m(t)$ известна, то полученная формула дает возможность установить зависимость скорости корабля от времени.

5.14. Соударения частиц

Ударом называется кратковременное взаимодействие тел при их столкновении и совокупность возникающих при этом явлений. При соударении твердых тел они претерпевают упругие и пластические деформации, нагреваются и даже частично разрушаются.

Столкновения микроскопических частиц – атомов, молекул, атомных ядер и элементарных частиц – существенно отличаются от столкновений макроскопических тел. Столкновения частиц, вследствие которых изменяются их скорости, но не изменяются внутренние состояния частиц и соответствующие этим состояниям энергии, называют *упругими*. Столкновения частиц, при которых изменяются их внутренние состояния или происходят превращения одних частиц в другие, называют *неупругими*. Столкновения частиц, сопровождающиеся их превращениями из одних в другие, называют *реакциями*. Реакции с участием атомов и молекул называются химическими, а с участием ядер атомов – ядерными.

В процессе соударения, которое длится очень короткое время, между соударяющимися телами или частицами действуют весьма значительные по величине так называемые *ударные*, или *мгновенные* силы. Именно действие этих сил приводит к заметным изменениям скоростей частиц, входящих в состав соударяющихся тел.

Если внешние силы отсутствуют или их сумма равна нулю, то импульс соударяющихся частиц сохраняется:

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \vec{p}_i{}' , \tag{5.93}$$

где $\vec{p}_i$ и $\vec{p}_i{}'$ – импульсы i-й частицы соответственно до и после удара. Закон сохранения импульса является следствием уравнения (5.41). Из этого уравнения следует также, что импульс системы частиц может сохраняться даже тогда, когда на них действуют внешние силы, сумма которых не равна нулю. Необходимо только, чтобы внешние силы не были ударными. Длительность удара $dt = t_2 - t_1$ очень мала и в уравнении (5.41) можно положить $dt \to 0$. В том случае, когда сумма внешних сил во время соударения частиц не принимает очень большие значения, левая часть уравнения (5.41) также не должна быть очень большой при $dt \to 0$. Для этого приращение импульса $d\vec{p}$ системы за время удара следует положить равным нулю. Подобным образом можно доказать, что из уравнения (5.52) вытекает закон сохранения момента импульса системы частиц при их соударениях друг с другом:

$$\sum_i \overrightarrow{L_i} = \sum_i \overrightarrow{L_i}' , \tag{5.94}$$

где $\overrightarrow{L_i}$ и $\overrightarrow{L_i}'$ – моменты импульса i-й частицы соответственно до и после удара.

При столкновении макроскопических тел кинетическая энергия T, которой они обладали перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругих деформаций этих тел и тепловую энергию Q атомов и молекул, входящих в их состав. При этом температура тел повышается. После удара упругие деформации исчезают, а их энергия переходит в кинетическую энергию T' разлетающихся осколков:

$$T = T' + Q\,. \tag{5.95}$$

Равенство (5.95) выражает собой *закон сохранения энергии при ударе*. Более подробно этот закон можно записать следующим образом:

$$\sum_i T_i = \sum_i T_i' + Q\,, \tag{5.96}$$

где

$$T_i = \frac{p_i^2}{2\,m_i} \quad \text{и} \quad T_i' = \frac{{p_i'}^2}{2\,m_i}$$

есть кинетические энергии i-й частицы до и после удара, представленные в виде функций от ее импульсов. При абсолютно упругом ударе $Q = 0$ и кинетическая энергия соударяющихся тел сохраняется: $T = T'$.

При сближении атомов вследствие взаимодействия их внешних электронов возникают так называемые силы межмолекулярного взаимодействия, или химические силы, которые могут как притягивать, так и отталкивать атомы друг от друга. Если между атомами действуют силы притяжения, они могут создавать более или менее прочные образования, называемые молекулами. В свою очередь молекулы могут соединяться с другими атомами и молекулами в еще более сложные молекулярные образования. Молекула, образованная из n атомов ($n = 1,\ 2,\ \ldots$), называется n-атомной.

Основы молекулярно-кинетической теории вещества были заложены великим русским ученым М.В.Ломоносовым (1711 – 1765). Он утверждал, что молекулы состоят из атомов; что многообразие веществ объясняется различными сочетаниями и расположениями атомов в молекулах; что теплота – не особый вид материи, а энергия движущихся атомов и молекул. Он открыл закон сохранения массы в химических реакциях и экспериментально доказал, что масса вещества в ходе реакции не изменяется.

В ходе химических реакций число атомов сохраняется, т.е. атомы не исчезают и не возникают, а только происходит их перегруппировка. Из тех же самых атомов, что входят в состав молекул, вступающих в реакцию, образуются новые молекулы, которые называются продуктами реакции. При этом суммарная масса атомов не изменяется.

Закон сохранения импульса (5.93) можно почти без изменения применять при исследовании химических реакций с той лишь разницей, что числа слагаемых в левой и правой частях этого равенства, т.е. числа частиц, вступающих в реакцию, и частиц ее продуктов, вообще говоря, не равны друг другу. Пусть индекс i нумерует частицы, вступающие в реакцию, а индекс k – ее продукты; $i = 1, 2, ..., n$; $k = n+1, ..., n+n'$; где n и n' – числа частиц до и после реакции соответственно. Закон сохранения импульса для системы реагирующих частиц можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{k=n+1}^{n+n'} \vec{p}_k \,. \tag{5.97}$$

Рассмотрим теперь, какой вид принимает закон сохранения энергии в химических реакциях. Входящие в состав молекулы частицы, т.е. атомы и образующие их ядра и электроны, находятся в непрерывном движении и взаимодействуют между собой. Поэтому, как и любая другая многочастичная система, молекула обладает некоторой внутренней энергией ε, значение которой определяется строением и состоянием молекулы. Таким образом, энергия молекулы складывается из кинетической энергии поступательного движения и ее внутренней энергии. В химических реакциях образование новых молекул сопровождается изменением характера движения электронов вокруг атомов. В результате изменяется внутренняя энергия молекул. При этом закон сохранения энергии в химической реакции можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{n} (T_i + \varepsilon_i) = \sum_{k=n+1}^{n+n'} (T_k + \varepsilon_k)\,, \tag{5.98}$$

где

$$T_i = \frac{p_i^2}{2\,m_i}\,, \qquad T_k = \frac{p_k^2}{2\,m_k}\,,$$

ε_i, ε_k – кинетические и внутренние энергии молекул до и после их взаимодействия. Уравнению (5.98) можно придать следующий вид:

$$\sum_i T_i + Q = \sum_k T_k\,, \tag{5.99}$$

где величина

$$Q = \sum_i \varepsilon_i - \sum_k \varepsilon_k \tag{5.100}$$

называется *энергией реакции.* Как видно из формулы (5.100), энергия реакции равна разности внутренних энергий исходных молекул и продуктов реакции. Эта величина является основной энергетической характеристикой химической реакции. Если энергия реакции положительна: $Q > 0$, то, как следует из уравнения (5.99), кинетическая энергия продуктов реакции будет больше кинетической энергии частиц, вступающих в реакцию:

$$\sum_i T_i < \sum_k T_k .$$

Из этого следует, что температура прореагировавшего вещества будет выше, чем его температура до начала реакции. Про такие реакции говорят, что они протекают с выделением тепла. В противном случае, когда энергия реакции отрицательна: $Q < 0$, реакция протекает с поглощением тепла, т.е. температура вещества после реакции понижается.

5.15. Принцип относительности и законы сохранения

Следует заметить, что величины $\vec{r}$, $\vec{p}$ и T, для которых записаны законы сохранения импульса, момента импульса и энергии системы соударяющихся частиц, определены относительно произвольной инерциальной системы отсчета. Поэтому эти уравнения будут иметь точно такой же вид при любом выборе инерциальной системы отсчета. Это утверждение находится в полном согласии с принципом относительности Галилея, в силу которого все уравнения динамики инвариантны относительно преобразования Галилея, т.е. их вид не зависит от выбора инерциальной системы отсчета.

При выводе закона сохранения импульса для системы материальных точек было использовано предположение, что действующие в системе внутренние силы подчиняются третьему закону Ньютона. Однако для некоторых типов взаимодействия этот закон может нарушаться. Например, в том случае, когда частицы, взаимодействующие друг с другом на расстоянии посредством силового поля, движутся с большими скоростями, справедливость третьего закона Ньютона может вызывать сомнения. Несмотря на это, закон сохранения импульса выполняется независимо от того, какой характер имеют внутренние силы. В этой связи интересно найти более строгий вывод этого закона. В самом деле, такой вывод существует. Закон сохранения импульса можно получить без ссылки на третий закон Ньютона, основываясь на более строгих и общих утверждениях таких, как принцип относительности Галилея и законы сохранения массы и энергии.

Запишем закон сохранения энергии (5.99) в химической реакции так:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + Q = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 , \tag{5.101}$$

где m_i, v_i и m_k, v_k – массы и скорости частиц до и после реакции соответственно. Пусть $\vec{w}_i$ и $\vec{w}_k$ – скорости частиц до и после реакции в другой инерциальной системе отсчета, которая движется относительно ранее выбранной с постоянной скоростью $\vec{V}$. Согласно правилу сложения скоростей (3.8) будем иметь

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{w}_i , \qquad \vec{v}_k = \vec{V} + \vec{w}_k .$$

Подстановка этих выражений в (5.101) после несложных преобразований приводит к равенству

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 + \vec{V} \sum_i m_i \vec{w}_i + \sum_i \frac{1}{2} m_i w_i^2 + Q =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k m_k V^2 + \vec{V} \sum_k m_k \vec{w}_k + \sum_k \frac{1}{2} m_k w_k^2 . \tag{5.102}$$

Пусть масса частиц, вступающих в реакцию, равна массе частиц, образовавшихся в ходе реакции:

$$\sum_i m_i = \sum_k m_k . \tag{5.103}$$

Это утверждение есть закон сохранения массы системы частиц.

Принцип относительности Галилея требует, чтобы закон сохранения энергии в новой системе отсчета имел такой же вид, что и в исходной инерциальной системе отсчета, т.е. кинетическая энергия частиц до реакции в сумме с энергией реакции должна быть равна кинетической энергии частиц после реакции:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i w_i^2 + Q = \sum_k \frac{1}{2} m_k w_k^2 . \tag{5.104}$$

При помощи соотношений (5.103) и (5.104) преобразуем равенство (5.102) к виду

$$\vec{V} \sum_i m_i \vec{w}_i = \vec{V} \sum_k m_k \vec{w}_k .$$

Это равенство должно выполняться для любого вектора $\vec{V}$. Такое возможно только в том случае, если

$$\sum_i m_i \vec{w}_i = \sum_k m_k \vec{w}_k .$$

Полученное равенство выражает собой закон сохранения импульса системы материальных точек, записанный по отношению к новой системе отсчета. Принцип относительности Галилея требует, чтобы этот закон имел такой же вид и в любой другой системе отсчета:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_k m_k \vec{v}_k . \tag{5.105}$$

Что и требовалось доказать.

Так как в силу принципа относительности Галилея законы сохранения одинаково формулируются для любой инерциальной системы отсчета, с целью достижения наибольшей простоты вычислений следует выбрать систему отсчета, в которой выражающие эти законы уравнения имеют самый простой вид. Такой системой отсчета может служить система, относительно которой одна из частиц покоится, или система центра инерции исследуемой системы материальных точек.

5.16. Реакции

Рассмотрим примеры использования законов сохранения импульса и энергии для описания поведения соударяющихся частиц. Начнем с реакции разложения $AB \to A + B$, в ходе которой составная частица AB разделяется на две частицы A и B. В физике такой процесс называют *распадом частицы.* Наиболее просто уравнения, описывающие этот процесс, выглядят в системе отсчета, относительно которой распадающаяся частица покоится. Эта система отсчета совпадает в данном случае с системой центра инерции. Пусть $\vec{p}_i$, T_i и m_i есть импульс, кинетическая энергия и масса i-й частицы в продуктах распада ($i = A$, B). В системе центра инерции законы сохранения импульса и энергии будут выражаться равенствами:

$$0 = \vec{p}_A + \vec{p}_B , \tag{5.106}$$

$$Q = T_A + T_B , \quad \text{или} \quad Q = \frac{p_A^2}{2\, m_A} + \frac{p_B^2}{2\, m_B} , \tag{5.107}$$

где согласно определению (5.100) энергия реакции

$$Q = \varepsilon_{AB} - \varepsilon_A - \varepsilon_B , \tag{5.108}$$

ε_{AB}, ε_A, ε_B – внутренние энергии частиц. Очевидно, что в данном случае энергия реакции Q должна быть положительной. Иначе распад будет вообще невозможен, так как теряет смысл равенство (5.107). Кстати сказать, частица AB, способная при определенных условиях разделиться на части A и B, но не подверженная самопроизвольному распаду, называется *стабильной*. Для такой частицы $Q < 0$. Мерой стабильности частицы AB является величина

$$E_{св} = |\,Q\,| = \varepsilon_A + \varepsilon_B - \varepsilon_{AB}\,, \tag{5.109}$$

называемая *энергией связи*. Как видно, это есть разность между суммарной внутренней энергией свободных частиц A и B и внутренней энергией этих частиц, химически связанных в составной частице AB.

Из закона сохранения импульса (5.106) следует, что импульсы частиц, образовавшихся после распада частицы AB, противоположны по направлениям, но равны по величине:

$$p_A = p_B\,. \tag{5.110}$$

Уравнения (5.107) и (5.110) образуют систему для p_A и p_B. Решение этой системы имеет вид

$$p_A = p_B = \sqrt{2\,\mu\,Q}\,,$$

где

$$\mu = \frac{m_A\,m_B}{m_A + m_B} \tag{5.111}$$

– так называемая *приведенная масса* двух частиц.

Рассмотрим теперь случай, когда столкновение частицы a массы m с частицей X массы M возбуждает реакцию

$$a + X \to Y_1 + Y_2\,,$$

в ходе которой образуются частицы Y_1 и Y_2 с массами m_1 и m_2. Запишем законы сохранения импульса и энергии для этой реакции в системе отсчета, относительно которой частица X покоится:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\,, \tag{5.112}$$

$$T + Q = T_1 + T_2\,, \tag{5.113}$$

где $\vec{p}$ и T – импульс и кинетическая энергия частицы a,

$$Q = \varepsilon_a + \varepsilon_X - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

энергия реакции, ε_a, ε_X, ε_1, ε_2 – внутренние энергии частиц a, X, Y_1 и Y_2 соответственно, $\vec{p}_i$ и T_i – импульс и кинетическая энергия одной из образовавшихся частиц ($i = 1, 2$).

Разрешим уравнение (5.112) относительно импульса $\vec{p}_2$ и возведем его в квадрат. Получим уравнение

$$p_2^2 = p^2 - 2\,p\,p_1\,\cos\theta + p_1^2\,,$$

где θ – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{p}_1$. Используя соотношения

$$p^2 = 2\,m\,T\,, \qquad p_i^2 = 2\,m_i\,T_i\,,$$

связывающие импульсы и кинетические энергии частиц, преобразуем это уравнение к виду

$$m_2\,T_2 = m\,T - 2\,\sqrt{m\,m_1\,T\,T_1}\,\cos\theta + m_1\,T_1\,. \tag{5.114}$$

Уравнения (5.113) и (5.114) образуют систему, в которой неизвестными можно считать кинетические энергии T_1 и T_2. Как видно из уравнения (5.114), решение этой системы будет зависеть от угла θ, под которым начинает двигаться одна из частиц, образовавшихся в ходе реакции. Удар называется *лобовым*, или *центральным*, когда угол θ равен нулю.

Если энергия реакции Q положительна, то, как видно из уравнения (5.113), рассматриваемая реакция возможна при любом значении T кинетической энергии налетающей частицы a. Если же энергия реакции отрицательна, то столкновение частиц a и X может вызвать реакцию только тогда, когда кинетическая энергия T налетающей частицы превышает некоторое пороговое значение $T_{порог}$. Это наименьшее значение кинетической энергии частицы a, при которой реакция еще возможна, соответствует случаю, когда образовавшиеся в ходе реакции частицы Y_1 и Y_2 имеют одну и ту же скорость: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. С учетом этого условия и равенства

$$m + M = m_1 + m_2\,,$$

которое выражает закон сохранения массы, из уравнений (5.112) и (5.113) найдем, что

$$T_{порог} = \frac{m + M}{M}\,|\,Q\,|\,.$$

ГЛАВА 6
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

6.1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим абсолютно твердое тело, которое может совершать только одно движение – вращение вокруг неподвижной оси (см. рис. 2.6). Для описания этого движения удобно использовать функцию $\varphi = \varphi(t)$, т.е. зависимость угла поворота от времени. Установим закон, которому должна подчиняться эта функция. Для этого построим прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось z совпала с осью вращения этого тела. Представим себе это тело как систему материальных точек и найдем проекцию L_z момента импульса $\overrightarrow{L}$ этой системы на ось z. По определению

$$L_z = \sum_i L_{z_i}\,, \tag{6.1}$$

где

$$L_{z_i} = [\,\vec{r}_i\,\vec{p}_i\,]_z \tag{6.2}$$

– проекция на ось z момента импульса $\overrightarrow{L_i}$ частицы твердого тела под номером i.

Скорость произвольной точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера (2.47):

$$\boxed{\vec{v} = [\,\vec{\omega}\,\vec{r}\,]\,,} \tag{6.3}$$

где временно отсутствует индекс i у векторов $\vec{v}$ и $\vec{r}$,

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$$

– вектор угловой скорости, $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость тела. Найдем координаты вектора (6.3). Для этого воспользуемся формулой (1.59):

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\,\omega\,y\,\vec{i} + \omega\,x\,\vec{j}\,.$$

Вычисления определителя приводят к формулам

$$v_x = -\,\omega\,y\,, \qquad v_y = \omega\,x\,, \qquad v_z = 0\,.$$

Проекции вектора момента импульса одной из частиц твердого тела можно найти по формуле

$$\vec{L} = m\,[\,\vec{r}\,\vec{v}\,] = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ -\omega\, y & \omega\, x & 0 \end{vmatrix} = m\,(x^2 + y^2)\,\omega\,\vec{k}\,.$$

Проекция этого вектора на ось z будет

$$L_z = m\,R^2\,\omega\,, \tag{6.4}$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

– расстояние от частицы до оси z.

Согласно формуле (6.4) момент импульса i-й частицы тела относительно оси z будет

$$L_{z_i} = m_i\,R_i^2\,\omega\,.$$

Подставим это выражение в формулу (6.1) и найдем *момент импульса твердого тела относительно оси* z:

$$\boxed{L_z = I_z\,\omega\,,} \tag{6.5}$$

где величина

$$I_z = \sum_i m_i\,R_i^2 \tag{6.6}$$

называется *моментом инерции твердого тела относительно оси* z. Согласно этой формуле момент инерции тела равен сумме моментов инерции материальных точек, из которых это тело состоит, т.е. он равен сумме произведений $m_i\,R_i^2$, где m_i – масса частицы под номером i, а R_i – ее расстояние до оси z.

В проекциях на ось z уравнение (5.20) для момента импульса системы материальных точек имеет вид

$$\dot{L}_z = M_z\,, \tag{6.7}$$

где M_z – сумма моментов всех внешних сил относительно оси z. Подставив выражение (6.5) в уравнение (6.7), получим:

$$\boxed{I_z\,\ddot{\varphi} = M_z\,.} \tag{6.8}$$

Вторая производная от угла поворота тела по времени есть угловое ускорение: $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$. Используя это обозначение, запишем уравнение (6.8) так:

$$I_z\, \varepsilon = M_z\,. \tag{6.9}$$

Уравнение (6.8), или (6.9) называют *основным уравнением вращательного движения* твердого тела. Это есть дифференциальное уравнение для функции $\varphi = \varphi(t)$, которая описывает вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Напомним, что угол φ – это угол между осью x и проекцией радиус-вектора некоторой точки тела на плоскость xy (см. рис. 2.5 и 2.6). Положительные значения угла φ принято отсчитывать в направлении, противоположном движению часовой стрелки, если смотреть на плоскость xy сверху. При этом момент силы M_z относительно оси z можно найти следующим образом. Его модуль определяется по формуле (4.16):

$$|\,M_z\,| = F_\perp\, l_\perp\,,$$

т.е. равен произведению силы на плечо. Согласно формуле (4.15) момент силы M_z будет положительным, если сила "пытается" угол φ увеличить, т.е. стремится повернуть тело против часовой стрелки. В противном случае момент силы будет отрицательным.

6.2. Момент инерции. Теорема Штейнера

Формула (6.6), которая служит определением момента инерции твердого тела относительно некоторой оси, может быть использована для расчетов только в том случае, когда тело состоит из отдельных материальных точек. Во многих случаях твердое тело удобно рассматривать как сплошную среду, состоящую из материальных точек, непрерывным образом распределенных в пространстве, на поверхности или вдоль линии. В таких случаях суммирование в формуле (6.6) следует заменить интегрированием. Для этого твердое тело мысленно разделяют на части, размеры которых так малы, что каждую из них можно принять за материальную точку. Момент инерции dI одной из таких частей равен произведению ее массы dm на квадрат ее расстояния R до оси, относительно которой вычисляется момент инерции:

$$dI = R^2\, dm\,. \tag{6.10}$$

Момент инерции тела будет равен сумме моментов инерции его малых частей, т.е. интегралу по объему, поверхности или кривой линии в зависимости от характера распределения материальных точек, составляющих это тело:

$$I = \int R^2\, dm\,. \tag{6.11}$$

Непрерывное распределение материальных точек в пространстве характеризуется *объемной плотностью* ϱ, которая определяется как отношение массы dm малой части тела к ее объему dV:

$$\varrho(\vec{r}\,) = \frac{dm}{dV}\,,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, определяющий положение этой части тела в пространстве. Если зависимость плотности от координат известна, то масса малой части тела может быть найдена по формуле

$$dm = \varrho(\vec{r}\,)\,dV\,. \tag{6.12}$$

Очевидно, что вся масса тела равна интегралу от этого выражения:

$$m = \int\limits_V \varrho(\vec{r}\,)\,dV\,, \tag{6.13}$$

где символ V под знаком интеграла означает, что интегрирование производится по объему тела. Такие интегралы называют *объемными*.

Объемный интеграл достаточно просто вычислить в тех случаях, когда подынтегральное выражение и объем, по которому производится интегрирование, обладают каким-либо типом симметрии: плоской, осевой, цилиндрической или сферической. В этих случаях объемный интеграл сводится к определенному интегралу. Только такие случаи рассматриваются в курсе общей физики.

Подставив выражение (6.12) в интеграл (6.11), получим формулу для расчета момента инерции объемного тела:

$$I = \int\limits_V R^2\,\varrho\,dV\,. \tag{6.14}$$

Иногда для вычисления момента инерции удобно использовать теорему Штейнера, которую называют также теоремой о параллельных осях. Согласно этой теореме момент инерции I тела относительно некоторой оси z равен моменту инерции I_C этого тела относительно параллельной оси z', которая проходит через центр масс тела C, плюс произведение массы m тела на квадрат расстояния a между осями:

$$\boxed{I = I_C + m\,a^2\,.} \tag{6.15}$$

6.3. Уравнения движения твердого тела

Положение твердого тела в пространстве можно определить следующим образом. Заданием координат x_C, y_C и z_C центра масс тела C можно указать его положение относительно выбранной системы координат. Пусть точка D есть одна из точек твердого тела. Направление отрезка CD в пространстве можно определить при помощи углов φ и θ, которые показаны на рис. 6.1. Когда положение центра масс твердого тела и направление отрезка CD фиксированы, тело может еще вращаться вокруг прямой CD. Задав значение угла ψ поворота тела, можно полностью определить его положение в пространстве.

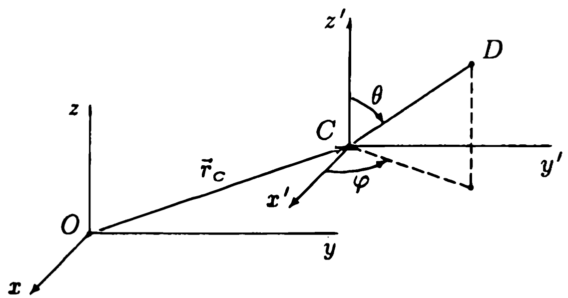

Рис. 6.1. К описанию движения твердого тела

Итак, положение центра масс твердого тела относительно некоторой инерциальной системы отсчета задается его координатами x_C, y_C, z_C, а ориентация тела в пространстве – тремя углами φ, θ, ψ (эйлеровы углы). Таким образом, твердое тело в общем случае представляет собой механическую систему с шестью *степенями свободы*, т.е. систему, для определения положения которой в пространстве необходимо задать шесть независимых величин. При этом для описания движения твердого тела необходимо использовать шесть функций:

$$x_C = x_C(t), \quad y_C = y_C(t), \quad z_C = z_C(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \psi = \psi(t).$$

Эти функции могут быть найдены из уравнений (5.20) и (5.28):

$$m\,\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i\,, \tag{6.16}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i\,. \tag{6.17}$$

При исследовании вращения твердого тела в общем случае вместо уравнения (6.17) удобно использовать уравнение (5.64)

$$\frac{d\overrightarrow{L_C}}{dt} = \overrightarrow{M_C}\,, \tag{6.18}$$

в котором момент импульса тела и моменты внешних сил вычисляются относительно центра масс этого тела C.

6.4. Статика

Когда твердое тело покоится относительно некоторой системы отсчета, скорость его центра масс и его момент импульса равны нулю:

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} = 0 \qquad \text{и} \qquad \overrightarrow{L} = 0\,.$$

При этом из уравнений (6.16) и (6.17) вытекают *условия равновесия твердого тела*. Согласно этим уравнениям для того, чтобы твердое тело находилось в покое, необходимо выполнение следующих двух условий: 1) сумма всех внешних сил, действующих на тело, должна быть равна нулю:

$$\sum_i \overrightarrow{F_i} = 0\,, \tag{6.19}$$

2) сумма моментов всех внешних сил относительно произвольной точки O также должна быть равна нулю:

$$\sum_i \overrightarrow{M_i} = 0\,. \tag{6.20}$$

6.5. Динамика плоского движения твердого тела

Рассмотрим плоское движение твердого тела. При этом движении направление оси вращения тела со временем не изменяется. Построим неподвижную прямоугольную систему координат так, чтобы ось z была направлена параллельно оси вращения. В таком случае для определения положения тела в пространстве достаточно задать только три величины: декартовы координаты x_C и y_C центра масс тела в инерциальной системе отсчета и угол φ поворота тела вокруг оси, проходящей через центр масс параллельно оси z (рис. 6.2). Поэтому для описания плоского движения твердого тела достаточно использовать три функции:

$$x_C = x_C(t)\,, \quad y_C = y_C(t)\,, \quad \varphi = \varphi(t)\,. \tag{6.21}$$

Первые две из этих функций могут быть найдены из уравнений

$$\boxed{m\,\ddot{x}_C = \sum_i F_{x_i}\,, \qquad m\,\ddot{y}_C = \sum_i F_{y_i}\,,} \tag{6.22}$$

которые являются следствием векторного равенства (6.16).

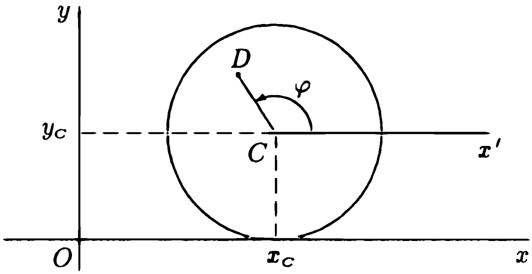

Рис. 6.2. К описанию плоского движения твердого тела

Уравнение для функции $\varphi = \varphi(t)$ может быть выведено из уравнения (6.18) таким же образом, как из уравнения (5.20) было получено уравнение (6.8). В результате будем иметь уравнение

$$\boxed{I_C\,\ddot{\varphi} = \sum_i M_{z_i}\,,} \tag{6.23}$$

где момент инерции I_C и моменты сил M_{z_i} вычисляются относительно оси, которая проходит через центр масс параллельно оси z.

6.6. Кинетическая энергия твердого тела

Пусть точка A есть одна из точек абсолютно твердого тела. Скорость $\vec{v}_i$ любой другой точки B_i твердого тела связана со скоростью $\vec{v}_A$ точки A соотношением (2.49):

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_A + [\,\vec{\omega}\,\vec{r}_i\,]\,,} \tag{6.24}$$

где $\vec{r}_i = \overrightarrow{AB}_i$. Используя это соотношение, преобразуем выражение для кинетической энергии твердого тела:

$$T = \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\,v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\Big(\vec{v}_A + [\,\vec{\omega}\,\vec{r}_i\,]\Big)^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(v_A^2 + 2\,\vec{v}_A\,[\vec{\omega}\,\vec{r}_i\,] + \omega^2\, R_i^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 + \vec{v}_A \left[\vec{\omega} \;\; \sum_i m_i\, \vec{r}_i \right] + \frac{1}{2}\, I_A\, \omega^2\,, \tag{6.25}$$

где

$$I_A = \sum_i m_i\, R_i^2$$

– момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через точку A; R_i – расстояние от точки B_i до этой оси (рис. 6.3).

Выражение (6.25) становится более простым в двух случаях. Пусть точка A совпадает с центром масс тела. При этом

$$\sum_i m_i\, \vec{r}_i = 0$$

и

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\, m\, v_C^2 + \frac{1}{2}\, I_C\, \omega^2\,,} \tag{6.26}$$

где v_C – скорость центра масс; I_C – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через его центр масс. Первое слагаемое в этой формуле называют *энергией поступательного движения*, а второе – *энергией вращения*.

Когда скорость точки A равна нулю: $\vec{v}_A = 0$ формула (5.25) принимает вид

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\, I_A\, \omega^2\,.} \tag{6.27}$$

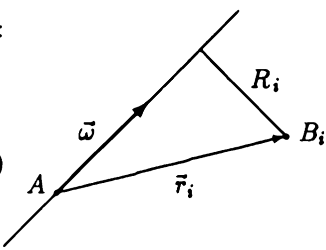

Рис. 6.3. Ось вращения твердого тела

ГЛАВА 6*

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

(продолжение)

6.7. Моменты инерции простых тел

Если твердое тело представляет собой несколько небольших по размерам тел, скрепленных невесомыми стержнями, то момент инерции такого тела можно вычислить по формуле (6.6). В тех случаях, когда твердое тело состоит из очень большого количества материальных точек, непрерывным образом распределенных в пространстве, на поверхности или вдоль линии, момент инерции тела вычисляют по формуле (6.11). В качестве примеров применения этих формул найдем моменты инерции некоторых простых тел.

Пример 1. *Моменты инерции стержня и тонкой прямоугольной пластинки.* Вычислим момент инерции тонкой прямоугольной пластинки относительно оси y, которая проходит через одну из ее сторон (рис. 6.4). Направим ось x вдоль другой стороны пластинки, длина которой равна l. Рассмотрим малую часть пластинки в виде тонкой полоски, параллельной оси y и расположенной на расстоянии x от нее. Ширина полоски равна dx. Если масса m пластинки равномерно распределена по ее поверхности, то масса полоски будет

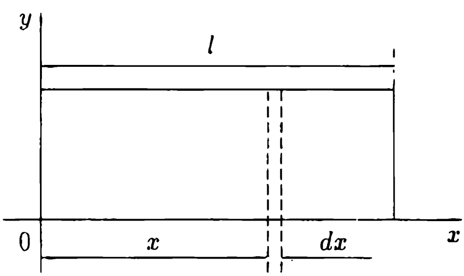

Рис. 6.4. К вычислению момента инерции прямоугольной пластинки

$$dm = \frac{m}{l}\,dx\,.$$

Момент инерции пластинки выражается интегралом

$$I = \int x^2\,dm = \frac{m}{l}\int_0^l x^2\,dx\,.$$

По формуле Ньютона – Лейбница найдем, что момент инерции тонкой прямоугольной пластинки относительно оси, проходящей через одну из ее сторон, равен

$$I = \frac{1}{3}\,m\,l^2\,. \qquad (6.28)$$

Так как в эту формулу входит длина только одной из сторон пластинки, эта же формула определяет момент инерции тонкого стержня.

Пример 2. *Момент инерции полого цилиндра и обруча.* Вычислим момент инерции полого тонкостенного цилиндра относительно оси z, которая совпадает с осью симметрии цилиндра. Расстояние от любой точки на поверхности цилиндра до оси z равно его радиусу R. Поэтому в формуле (6.11) постоянную величину R^2 можно вынести за знак интеграла:

$$I = R^2 \int dm \,.$$

Здесь интеграл представляет сумму масс всех частей цилиндра, т.е. равен массе m цилиндра. Таким образом, получим:

$$I = m R^2 \,. \tag{6.29}$$

Эта же формула справедлива для момента инерции обруча.

Пример 3. *Момент инерции однородного цилиндра или диска.* Вычислим момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно оси z, совпадающей с его осью симметрии (рис. 6.5).

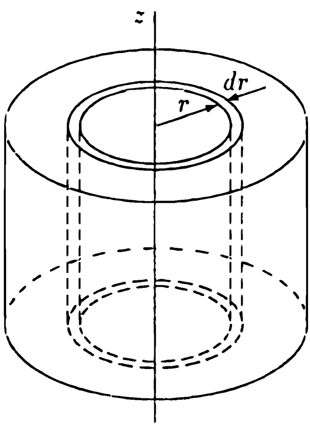

Рис. 6.5. К вычислению момента инерции цилиндра

В однородном цилиндре масса m равномерно распределена по его объему. Поэтому плотность будет равна отношению массы m к объему V цилиндра:

$$\varrho = \frac{m}{V} \,,$$

где

$$V = \pi R^2 h \,,$$

R и h – радиус и высота цилиндра.

Построим внутри этого цилиндра две соосные цилиндрические поверхности, радиусы которых равны r и $r + dr$. Часть цилиндра, заключенная между этими поверхностями, называется *цилиндрическим слоем.* Его объем dV равен произведению площади $2\pi r h$ его поверхности на толщину dr:

$$dV = 2\,\pi\, r\, h\, dr\,.$$

При этом масса цилиндрического слоя будет

$$dm = \varrho\, dV = \frac{2\, m\, r\, dr}{R^2}\,.$$

Применяя формулу (6.29) для момента инерции полого цилиндра, найдем момент инерции цилиндрического слоя:

$$dI = r^2\, dm = \frac{2\, m\, r^3\, dr}{R^2}\,.$$

Момент инерции всего цилиндра будет равен интегралу от этого выражения:

$$I = \frac{2\, m}{R^2} \int\limits_0^R r^3\, dr\,.$$

Вычисления по формуле Ньютона – Лейбница дают

$$I = \frac{1}{2}\, m\, R^2\,. \tag{6.30}$$

Пример 4. *Момент инерции шара.* Вычислим момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр (рис. 6.6). Построим прямоугольную декартову систему координат, начало которой поместим в центр шара. Согласно формуле (6.14) момент инерции шара относительно оси z будет выражаться интегралом по его объему:

$$I_z = \int\limits_V (x^2 + y^2)\, \varrho\, dV\,.$$

Моменты инерции шара относительно координатных осей x и y выражаются аналогичными интегралами:

$$I_x = \int\limits_V (y^2 + z^2)\, \varrho\, dV\,, \qquad I_y = \int\limits_V (x^2 + z^2)\, \varrho\, dV\,.$$

Если масса шара распределена сферически симметрично по его объему, т.е. плотность есть сферически симметричная функция координат:

$$\varrho = \varrho(r)\,,$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

то три написанные выше интеграла будут равны друг другу:

$$I_x = I_y = I_z \equiv I\,.$$

Сложив эти интегралы, получим равенство

$$3\,I = 2\int\limits_V r^2\,\varrho(r)\,dV\,. \tag{6.31}$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, обладает замечательным свойством: подынтегральная функция и объем, по которому производится интегрирование, сферически симметричны.

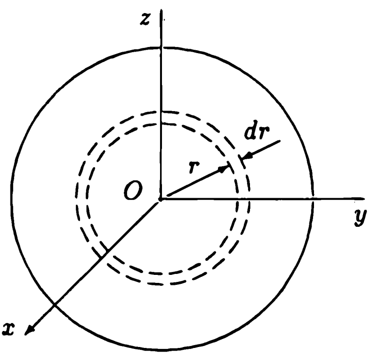

Рис. 6.6. К вычислению момента инерции шара

Если вся масса m шара сосредоточена на его поверхности, то в формуле (6.31) следует положить $r = R$, где R – радиус шара. С учетом соотношения (6.13) получим формулу для момента инерции полого тонкостенного шара:

$$I = \frac{2}{3}\,m\,R^2\,. \tag{6.32}$$

Для того чтобы найти момент инерции сплошного шара, построим внутри него две концентрические сферы радиусов r и $r + dr$ с центрами в начале координат, т.е. в центре шара. Часть пространства, заключенная между этими сферами, называется *сферическим слоем.* Его объем dV равен произведению площади $4\pi r^2$ поверхности сферы на толщину dr слоя:

$$dV = 4\,\pi\, r^2\, dr\,.$$

Так как внутри этого слоя функция $r^2\,\varrho(r)$ всюду принимает одно и то же значение вследствие того, что толщина слоя бесконечно мала, объемный интеграл в равенстве (6.31) сводится к определенному интегралу и из этого равенства найдем момент инерции

$$I = \frac{8\,\pi}{3}\int\limits_0^R r^4\,\varrho(r)\,dr\,.$$

Для однородного шара плотность

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{3\,m}{4\,\pi\,R^3}\,.$$

В таком случае этот интеграл легко вычислить по формуле Ньютона – Лейбница. В результате получим:

$$I = \frac{2}{5}\,m\,R^2\,. \tag{6.33}$$

6.8. Теорема Штейнера и ее применения

Как показывают рассмотренные примеры, расчет момента инерции существенно упрощается, если ось, относительно которой вычисляют момент инерции тела, является его осью симметрии. Когда этого нет, для облегчения расчетов удобно использовать теорему Штейнера.

Теорема Штейнера, или теорема о параллельных осях. Момент инерции I тела относительно некоторой оси z равен моменту инерции I_C этого тела относительно параллельной оси z', проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы m тела на квадрат расстояния a между осями:

$$\boxed{I = I_C + m\,a^2\,.} \tag{6.34}$$

Доказательство. В формуле (6.6), которая служит определением момента инерции, расстояние R_i от i-й частицы до оси z, можно рассматривать как модуль вектора

$$\vec{R_i} = x_i\,\vec{i} + y_i\,\vec{j}\,.$$

Построим ось z', которая проходит через центр масс тела C параллельно оси z, и введем перпендикулярный к этим осям вектор $\vec{a}$, соединяющий две точки на них. На рис. 6.7 оси z и z' проходят соответственно через точки O и C перпендикулярно плоскости чертежа. Модуль a вектора $\vec{a}$ есть расстояние между осями z и z'. Расстояние R_i' от i-й частицы тела до оси z' равно модулю вектора $\vec{R_i}'$, который связан с векторами $\vec{R_i}$ и $\vec{a}$ соотношением

$$\vec{R_i} = \vec{R_i}' + \vec{a}\,. \tag{6.35}$$

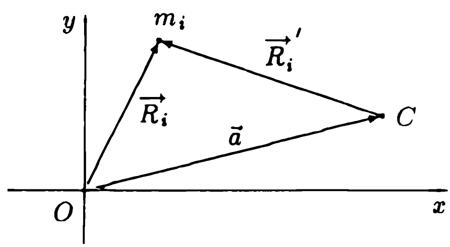

Рис. 6.7. К доказательству теоремы Штейнера

В силу определения центра масс

$$\sum_i m_i \vec{R_i} = m\,\vec{a}\,.$$

С учетом этого равенства получим

$$\sum_i m_i \vec{R_i}' = 0\,. \tag{6.36}$$

При помощи формул (6.35) и (6.36) преобразуем выражение

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

для момента инерции тела относительно оси z:

$$I = \sum_i m_i \left(R_i'^2 + 2\,\vec{R_i}'\,\vec{a} + a^2\right) =$$

$$= \sum_i m_i R_i'^2 + 2\,\vec{a} \sum_i m_i \vec{R_i}' + \sum_i m_i a^2 = I_C + m\,a^2\,,$$

где

$$I_C = \sum_i m_i \, R_i'^2$$

– момент инерции тела относительно оси z', проходящей через центр масс тела. Таким образом, теорема (6.34) доказана. Рассмотрим несколько приложений теоремы Штейнера.

П р и м е р 1. Найдем момент инерции тонкой прямоугольной пластинки относительно оси, проходящей через ее центр масс параллельно одной из сторон. Момент инерции пластинки относительно оси, проходящей через одну из ее сторон, определяется формулой (6.28). Расстояние между этой осью и параллельной ей осью, проходящей через центр масс пластинки, равно $\frac{1}{2}l$. При этом теорему Штейнера можно записать так:

$$\frac{1}{3} m\, l^2 = I_C + \frac{1}{4} m\, l^2 .$$

Из этого уравнения найдем искомый момент инерции

$$I_C = \frac{1}{12} m\, l^2 . \qquad (6.37)$$

П р и м е р 2. *Момент инерции прямоугольного параллелепипеда.* Найдем момент инерции прямоугольного однородного параллелепипеда относительно оси z, проходящей через центр масс параллельно одной из его сторон (рис. 6.8). Координатные оси x и y направим параллельно другим сторонам параллелепипеда. Выделим внутри параллелепипеда тонкую пластинку, заключенную между плоскостями, которые параллельны плоскости xz и соответствуют значениям ординаты y и $y + dy$. Пусть длина стороны параллелепипеда, вдоль которой направлена ось x, равна a. Используя формулу (6.37), найдем по теореме Штейнера момент инерции пластинки относительно оси z:

$$dI = \frac{1}{12} a^2\, dm + y^2\, dm ,$$

где dm – масса пластинки. Очевидно, что

$$dm = \frac{m}{b}\, dy ,$$

где b – длина стороны параллелепипеда, параллельной оси y. При этом момент инерции параллелепипеда будет равен интегралу

$$I = \frac{m}{b} \int\limits_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{1}{12} a^2 + y^2 \right) dy .$$

Вычисления по формуле Ньютона – Лейбница дают

$$I = \frac{1}{12} m \left(a^2 + b^2\right). \tag{6.38}$$

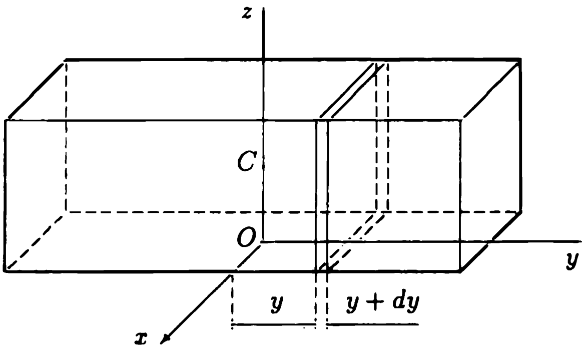

Рис. 6.8. К вычислению момента инерции прямоугольного параллелепипеда

6.9. Инвариантность законов статики

Твердое тело может находиться в покое только в том случае, когда сумма всех действующих на тело внешних сил равна нулю:

$$\sum_i \vec{F_i} = 0 \tag{6.39}$$

и сумма моментов всех внешних сил относительно произвольной точки O также равна нулю:

$$\sum_i \vec{M_i} = 0. \tag{6.40}$$

Докажем, что при условии (6.39) равенство (6.40) выполняется для произвольной точки O, если оно справедливо для какой-либо одной точки O'. Относительно точки O', принятой за начало отсчета, сумма моментов сил будет

$$\sum_i \vec{M_i}' = \sum_i [\vec{r}_i' \vec{F_i}].$$

Возьмем в качестве начала отсчета какую-нибудь другую точку O (рис. 6.9). Радиус-векторы $\vec{r}_i'$ и $\vec{r}_i$, определяющие положение i-й частицы тела в различных системах отсчета, связаны соотношением

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_o + \vec{r}_i,$$

где $\vec{r}_o$ – вектор, соединяющий точки O' и O: $\vec{r}_o = \overline{O'O}$. При помощи этого соотношения найдем, что

$$\sum_i \overrightarrow{M_i}' = \sum_i [\, \vec{r}_o + \vec{r}_i \,, \overrightarrow{F_i} \,] = [\, \vec{r}_o \sum_i \overrightarrow{F_i} \,] + \sum_i [\, \vec{r}_i \,, \overrightarrow{F_i} \,] .$$

Отсюда при условии (6.39) получим:

$$\sum_i \overrightarrow{M_i}' = \sum_i \overrightarrow{M_i} .$$

Это равенство означает, что сумма моментов всех внешних сил не зависит от выбора точки отсчета, если выполняются условия (6.39). Таким образом, при условии (6.39) равенство (6.40) выполняется для любой точки отсчета. Что и требовалось доказать.

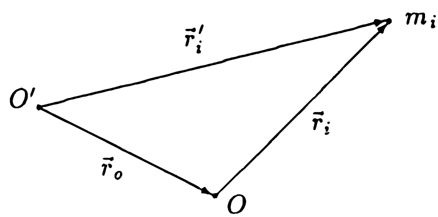

Рис. 6.9. К доказательству инвариантности законов статики

6.10. Задача о катящемся цилиндре

Цилиндр радиуса R и массы m скатывается по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 6.10). Центр масс C лежит на оси цилиндра, а его момент инерции относительно этой оси равен I. Цилиндр совершает плоское движение. Первым делом следует определить функции, при помощи которых можно описать это движение. В данной задаче ось x удобно направить вдоль прямой, являющейся траекторией движения центра масс. При этом движение цилиндра можно описать посредством двух функций, выражающих зависимости от времени t координаты x центра масс и угла φ поворота цилиндра:

$$x = x(t) , \qquad \varphi = \varphi(t) . \tag{6.41}$$

Для того чтобы записать уравнения для этих функций, необходимо установить, какие силы действуют на цилиндр. Таких сил – три: $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\overrightarrow{N}$ – сила нормального давления и $\overrightarrow{F}_{mp}$ – сила трения.

Учитывая эти силы, запишем уравнения (6.22) в виде

$$m\,\ddot{x} = m\,g\,\sin\alpha - F_{mp}\,, \tag{6.42}$$

$$0 = N - m\,g\,\cos\alpha\,, \tag{6.43}$$

где левая часть второго уравнения равна нулю вследствие того, что равно нулю ускорение a_y центра масс цилиндра вдоль оси y.

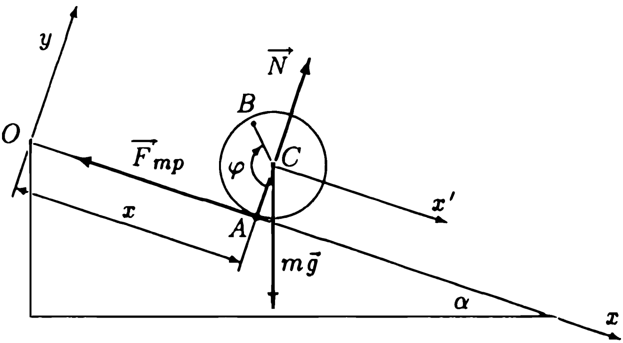

Рис. 6.10. Катящийся цилиндр

Когда твердое тело находится в некотором силовом поле $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, на каждую его частицу действует сила $\vec{F_i} = \vec{F}(\vec{r}_i)$. Вычисление суммы моментов всех этих сил

$$\vec{M} = \sum_i [\,\vec{r}_i\,\vec{F_i}\,]$$

в общем случае может встречать определенные математические трудности. Однако, если силовое поле однородно, то вычислить эту сумму не очень трудно. Например, сумма моментов сил тяжести

$$\vec{F_i} = m_i\,\vec{g}$$

будет равна

$$\vec{M} = \sum_i [\,m_i\,\vec{r}_i\,,\,\vec{g}\,] = \left[\,\sum_i m_i\,\vec{r}_i\,,\,\vec{g}\,\right].$$

Используя определение центра масс тела, получим:

$$\vec{M} = [\,\vec{r}_C\,,\,m\,\vec{g}\,]\,.$$

Из этой формулы видно, что сумма моментов сил тяжести такова, как будто все эти силы приложены к центру масс тела.

Моменты сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ относительно оси z', проходящей через центр масс, равны нулю, так как линии действия этих сил проходят через ось z'. При этом уравнение (6.23) принимает вид

$$I\,\ddot{\varphi} = F_{mp}\,R\,. \tag{6.44}$$

1. *Предположим, что цилиндр катится с проскальзыванием.* В этом случае справедлив закон Амонтона

$$F_{mp} = \pm\,\mu\,N\,, \tag{6.45}$$

где знак плюс или минус следует оставить в зависимости от того, как направлен вектор силы трения. При этом уравнения (6.42) – (6.45) образуют систему с четырьмя неизвестными: $x = x(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, F_{mp} и N, которая имеет единственное решение.

2. *Пусть цилиндр катится без скольжения.* В этом случае прямая, образованная точками соприкосновения цилиндра и наклонной плоскости, является мгновенной осью вращения, т.е. скорости этих точек равны нулю. Вследствие этого справедливы следующие соотношения:

$$x = R\,\varphi\,,$$

$$\dot{x} \equiv v_c = R\,\dot{\varphi}\,, \tag{6.46}$$

$$\ddot{x} = R\,\ddot{\varphi}\,. \tag{6.47}$$

Теперь уравнения (6.42), (6.44) и (6.47) образуют систему, решение которой приводит к следующему выражению для ускорения центра масс цилиндра

$$\ddot{x} \equiv a = \frac{m\,g\,R^2\,\sin\alpha}{m\,R^2 + I}\,. \tag{6.48}$$

Качение цилиндра без скольжения можно исследовать при помощи закона сохранения энергии. С этой целью найдем кинетическую и потенциальную энергии цилиндра. Так как его момент инерции относительно мгновенной оси вращения A в силу теоремы Штейнера равен

$$I_A = I + m\,R^2\,,$$

согласно формуле (6.27) кинетическая энергия цилиндра

$$T = \frac{1}{2}\left(I + m\,R^2\right)\dot{\varphi}^2\,.$$

Потенциальная энергия тела, характеризующая воздействие на него внешних силовых полей, равна сумме потенциальных энергий отдельных частиц этого тела:

$$U = \sum_i U_i \, .$$

Так как потенциальная энергия i-й частицы в однородном поле силы тяжести в соответствии с формулой (4.47) равна

$$U_i = - m_i \, \vec{g} \, \vec{r}_i \, ,$$

будем иметь

$$U = - \sum_i m_i \, \vec{r}_i \, \vec{g} = - m \, \vec{g} \, \vec{r}_C \, ,$$

т.е. потенциальная энергия системы материальных точек в однородном поле силы тяжести совпадает с энергией одной частицы массы m, находящейся в центре масс этой системы.

Разложения векторов $\vec{g}$ и $\vec{r}_C$ по единичным ортам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в выбранной инерциальной системе отсчета имеют вид

$$\vec{g} = g \, \sin\alpha \, \vec{i} - g \, \cos\alpha \, \vec{j} \, , \qquad \vec{r}_C = x \, \vec{i} + y \, \vec{j} \, .$$

Используя эти формулы, найдем зависимость потенциальной энергии от координат центра масс

$$U = - m \, g \, (x \, \sin\alpha - y \, \cos\alpha) \, .$$

В этой формуле следует положить $y = R$.

При качении без скольжения работа силы трения равна нулю и полная механическая энергия цилиндра со временем не изменяется:

$$T + U = E = \mathrm{const} \, . \tag{6.49}$$

Используя равенство (6.46), получим соотношение

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{R^2} \right) \dot{x}^{\,2} - m \, g \, x \, \sin\alpha = \mathrm{const} \, ,$$

связывающее координату x центра масс и его скорость $\dot{x}$. Продифференцировав обе части этого равенства по времени t, после элементарных преобразований придем к формуле (6.48).

ГЛАВА 7
ГРАВИТАЦИЯ

7.1. Закон всемирного тяготения

Все тела притягиваются друг к другу. Закон, описывающий взаимное тяготение тел, имеет наиболее простое выражение для двух материальных точек. Этот закон был установлен Ньютоном и называется *законом всемирного тяготения.* Рассмотрим две материальные точки с массами m_1 и m_2, расположенные на расстоянии R друг от друга (рис. 7.1). Пусть $\vec{F}_{12}$ есть сила, с которой на первую частицу действует вторая, а $\vec{F}_{21}$ – сила, с которой на вторую частицу действует первая. В силу третьего закона Ньютона эти силы равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}\,. \tag{7.1}$$

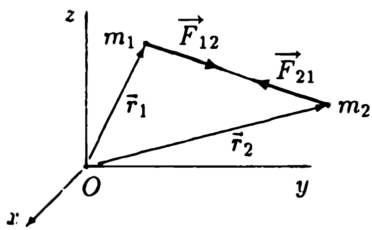

Рис. 7.1. К описанию закона всемирного тяготения

Согласно закону всемирного тяготения модуль F сил $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$, с которыми две материальные точки притягиваются друг к другу, прямо пропорционален их массам и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними:

$$\boxed{F = \gamma\,\frac{m_1\,m_2}{R^2}\,,} \tag{7.2}$$

где коэффициент пропорциональности γ называется гравитационной постоянной. При помощи вектора

$$\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,,$$

который начинается на второй частице и заканчивается на первой, можно записать векторные выражения для сил тяготения:

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{R^3} \vec{R}\,, \qquad \vec{F}_{21} = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^3} \vec{R}\,. \tag{7.3}$$

Иначе эти силы называются *гравитационными*, а само явление взаимного притяжения массивных тел – *гравитацией.*

Как видно из приведенных формул, определенные законом всемирного тяготения силы (7.3) являются центральными. В разделе 5.11 было показано, что центральные силы взаимодействия частиц являются консервативными, т.е. они могут быть выражены через потенциальную энергию W согласно формулам (5.69). Приравняем векторные выражения (5.70) и (7.3) для сил взаимодействия. Получим уравнение для потенциальной энергии

$$\frac{dW}{dR} = \frac{\gamma m_1 m_2}{R^2}\,,$$

из которого следует, что потенциальная энергия взаимодействия тяготеющих друг к другу материальных точек отрицательна и обратно пропорциональна расстоянию между ними:

$$\boxed{W = -\frac{\gamma m_1 m_2}{R}\,.} \tag{7.4}$$

Опыт показывает, что любая система, предоставленная сама себе, стремится к состоянию, в котором ее энергия минимальна. В силу этого принципа отрицательный знак потенциальной энергии свидетельствует о взаимном притяжении частиц, так как согласно формуле (7.4) с уменьшением расстояния между частицами их энергия уменьшается.

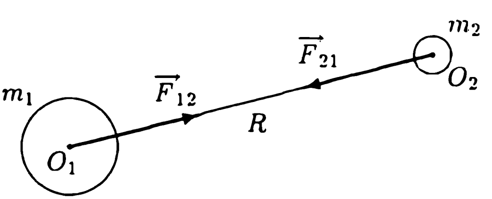

Рис. 7.2. Силы тяготения двух сферически симметричных тел

Можно показать и это установлено на опыте, что гравитационное притяжение двух сферически симметричных тел также описывается формулами (7.1) – (7.4), в которых теперь R есть расстояние между центрами тел. На рис. 7.2 изображены два сферически симметричных тела. Линия действия сил, с которыми притягиваются друг к другу эти тела, есть прямая, проходящая через центры O_1 и O_2 симметрии тел.

Принято считать, что гравитационное взаимодействие тел осуществляется посредством некоторого физического поля, которое называют *гравитационным полем*, или полем тяготения. Однако механизм этого взаимодействия до настоящего времени не вполне понятен.

7.2. Гравитационное поле вблизи поверхности Земли

В небольших по размерам областях пространства гравитационное поле является практически однородным. Так, гравитационное поле Земли в небольшой области пространства у ее поверхности можно считать однородным. При этом на тело массы m со стороны Земли действует сила тяготения, которую называют также силой тяжести. Согласно второму закону Ньютона сила тяжести равна произведению массы тела на ускорение $\vec{g}$ свободного падения тела:

$$\vec{F} = m\vec{g}\,. \tag{7.5}$$

В силу закона всемирного тяготения (7.2) сила, с которой Земля притягивает к себе тело m, расположенное у ее поверхности, равна

$$F = \frac{\gamma\, m\, M}{R^2}\,, \tag{7.6}$$

где M – масса Земли, R – ее радиус. Найдем ускорение g, с которым тела движутся у поверхности Земли, когда на них действует только сила тяжести. Для этого используем выражение (7.6) и запишем второй закон Ньютона

$$m\, g = \frac{\gamma\, m\, M}{R^2}\,.$$

Из этого уравнения найдем, что модуль вектора ускорения свободного падения тела любой массы

$$g = \frac{\gamma\, M}{R^2}\,. \tag{7.7}$$

Это соотношение дает возможность вычислить массу Земли. Подстановка измеренных значений g, R и γ в формулу

$$M = \frac{g\, R^2}{\gamma}$$

приводит к следующему значению массы Земли:

$$M = 5,98 \cdot 10^{24}\ кг\,.$$

7.3. Законы движения планет и спутников

Планеты солнечной системы обращаются вокруг Солнца по орбитам, которые можно считать круговыми. Причем плоскости этих орбит почти совпадают друг с другом. Движение планет подчиняется второму закону Ньютона. Для одной из планет уравнение ее движения имеет вид

$$\frac{m\,v^2}{r} = \frac{\gamma\, m\, M}{r^2}\,, \tag{7.8}$$

где M – масса Солнца, m – масса планеты, r – радиус орбиты. Это уравнение описывает также движение спутника Земли в том случае, когда он движется по круговой орбите.

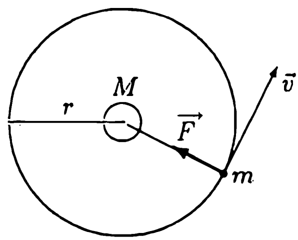

Рис. 7.3. Движение тела m по круговой орбите под действием силы тяготения к массивному телу M

7.4. Космические скорости

Запишем второй закон Ньютона для искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите, радиус которой почти равен радиусу Земли R :

$$\frac{m\,v^2}{R} = \frac{\gamma\, m\, M}{R^2}\,, \tag{7.9}$$

где m – масса спутника, M – масса Земли. Разрешим уравнение (7.9) относительно скорости спутника. Получим

$$v = \sqrt{\frac{\gamma\, M}{R}}\,. \tag{7.10}$$

При помощи формулы (7.7) это выражение можно преобразовать к виду

$$v = \sqrt{g\,R}\,. \tag{7.11}$$

Скорость такого спутника называется *первой космической скоростью.* Она имеет значение $8 \cdot 10^3$ *м/с.*

Наименьшая скорость, которую необходимо сообщить телу на поверхности Земли для того, чтобы оно могло, преодолев ее притяжение, удалиться на бесконечно большое расстояние, называют *второй космической скоростью.* Ее значение можно установить при помощи закона сохранения энергии:

$$\frac{m\,v^2}{2} - \frac{\gamma\,m\,M}{r} = E = \text{const}\,, \tag{7.12}$$

где v – скорость тела, когда оно находится на расстоянии r от центра Земли. Первое слагаемое в равенстве (7.12) есть кинетическая энергия тела, а второе – потенциальная энергия его взаимодействия с Землей.

Пусть телу у поверхности Земли сообщили скорость v_o. В таком случае энергия тела у поверхности Земли будет равна

$$E_o = \frac{m\,v_o^2}{2} - \frac{\gamma\,m\,M}{R}\,.$$

На бесконечно большом расстоянии от Земли потенциальная энергия тела станет равна нулю, а скорость уменьшится до значения v_∞. Теперь энергия тела будет

$$E_\infty = \frac{m\,v_\infty^2}{2}\,.$$

Согласно закону сохранения энергии эти значения энергии равны друг другу:

$$E_o = E_\infty\,. \tag{7.13}$$

Это равенство приводит к соотношению

$$v_o^2 = v_\infty^2 + \frac{2\,\gamma\,M}{R}\,,$$

из которого следует, что скорость v_o принимает наименьшее значение, когда скорость тела на бесконечности равна нулю: $v_\infty = 0$. Таким образом придем к формуле для второй космической скорости

$$v_{o\,min} = \sqrt{\frac{2\,\gamma\,M}{R}} = \sqrt{2\,g\,R}\,. \tag{7.14}$$

Ее числовое значение равно $1{,}1 \cdot 10^4$*м/с.*

ГЛАВА 7*

ГРАВИТАЦИЯ

(продолжение)

7.5. Гравитационное поле

Найдем силу $\vec{F}$, с которой система неподвижных материальных точек действует на отдельную материальную точку массы m, называемую *пробной частицей.* Перенумеруем материальные точки рассматриваемой системы. Пусть M_i есть масса частицы под номером i, где $i = 1, 2, ..., N$. Сила $\vec{F_i}$, с которой i-я частица системы действует на пробную частицу, определяется *законом всемирного тяготения*:

$$\boxed{\vec{F_i} = -\frac{\gamma\, m\, M_i}{R_i^3}\,\vec{R_i}\,,} \tag{7.15}$$

где

$$\vec{R_i} = \vec{r} - \vec{r}_i$$

– вектор, соединяющий частицу под номером i с пробной частицей (рис. 7.4),

$$R_i = |\,\vec{r} - \vec{r}_i\,|$$

– расстояние между этими частицами, $\vec{r}_i$ и $\vec{r}$ – их радиус-векторы.

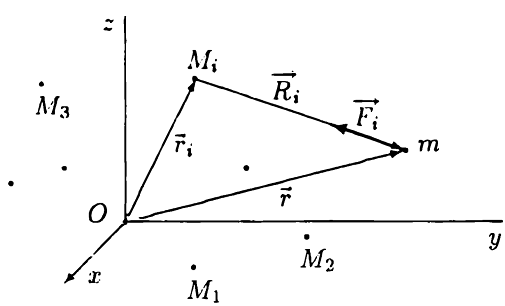

Рис. 7.4. Система материальных точек и пробная частица

Сила $\vec{F}$, с которой вся система притягивает к себе пробную частицу, равна сумме сил (7.15):

$$\boxed{\vec{F} = \sum_i \vec{F_i}\,.} \tag{7.16}$$

Это равенство выражает собой так называемый *принцип суперпозиции*, который вместе с законом всемирного тяготения позволяет вычислить силу, действующую на пробную частицу со стороны произвольной системы частиц.

Формулы (7.15) и (7.16) всего лишь описывают гравитационное взаимодействие тел, но не объясняют, как это взаимодействие осуществляется. Трудно представить себе, как могут взаимодействовать тела, не соприкасаясь непосредственно друг с другом. Для того чтобы преодолеть эту трудность, было сделано предположение, что гравитационное взаимодействие осуществляется посредством особого рода материи, которую назвали *гравитационным полем.* Принято считать, что каждое тело окружено создаваемым им самим гравитационным полем. Это поле проявляет себя, когда в пространство, где оно имеется, попадает другое тело. Тогда со стороны поля на это тело будет действовать сила, которая притягивает его к телу, создающему поле.

Количественной характеристикой гравитационного поля является его *напряженность* $\vec{G}$, которая определяется соотношением

$$\vec{F} = m\vec{G}\,, \tag{7.17}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на пробную частицу массы m, помещенную в некоторую точку пространства, где имеется гравитационное поле. Согласно этому определению напряженность поля $\vec{G}$ есть векторная функция от радиус-вектора $\vec{r}$ произвольной точки пространства:

$$\vec{G} = \vec{G}(\vec{r})\,.$$

Физический смысл этой величины заключается в том, что напряженность поля есть сила, с которой гравитационное поле действует на частицу массы $m = 1$ *кг*. Из формулы (7.17) следует, что размерность напряженности гравитационного поля совпадает с размерностью ускорения.

Используя равенства (7.15) – (7.17), получим формулу

$$\vec{G} = -\sum_i \frac{\gamma M_i}{R_i^3} \vec{R_i} . \tag{7.18}$$

по которой можно вычислить напряженность гравитационного поля, создаваемого системой материальных точек в произвольной точке пространства. Расчетное значение напряженности гравитационного поля можно проверить экспериментально. Для этого в данную точку пространства следует поместить пробную частицу, измерить силу, которая на нее действует, а затем по формуле (7.17) найти значение напряженности гравитационного поля в этой точке:

$$\vec{G} = \frac{1}{m} \vec{F} .$$

Из сказанного ясно, почему частицу, на которой испытывают действие гравитационного поля, называют пробной.

Так как центральное силовое поле является консервативным, силу (7.5) можно представить в виде

$$\vec{F_i} = -\operatorname{grad} U_i , \tag{7.19}$$

где

$$U_i = -\frac{\gamma\, m\, M_i}{R_i} \tag{7.20}$$

– потенциальная энергия взаимодействия пробной частицы с i-й частицей системы. Подставив выражение (7.19) в формулу (7.16), получим:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U , \tag{7.21}$$

где

$$U = U(\vec{r}\,) = \sum_i U_i = -\gamma\, m \sum_i \frac{M_i}{R_i} \tag{7.22}$$

есть *энергия взаимодействия* пробной частицы, находящейся в произвольной точке пространства, с системой материальных точек. Из формулы (7.21) следует, что сила тяготения, действующая на пробную частицу со стороны системы материальных точек, является консервативной.

Скалярная функция $\varphi = \varphi(\vec{r}\,)$, определяемая соотношением

$$U = m\, \varphi , \tag{7.23}$$

называется *потенциалом гравитационного поля.* Приравняем правые части равенств (7.22) и (7.23). Получим формулу

$$\varphi = -\gamma \sum_i \frac{M_i}{R_i}, \tag{7.24}$$

по которой можно вычислить значение потенциала в произвольной точке пространства.

Подстановка выражения (7.23) в формулу (7.21) с учетом (7.17) приводит к соотношению, связывающему напряженность гравитационного поля и его потенциал:

$$\vec{G} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{7.25}$$

Из формул (7.18) и (7.24) видно, что напряженность и потенциал гравитационного поля зависят только от масс частиц, создающих поле, и от их расположения в пространстве, но не зависят от массы пробной частицы, при помощи которой гравитационное поле исследуется. На этом основании можно предполагать, что гравитационное поле существует вокруг каждого тела или системы тел независимо от того, имеются или нет в этом поле другие тела, на которые оно может воздействовать.

7.6. Гравитационное поле сферически симметрично распределенного вещества

Если масса вещества распределена в пространстве сферически симметрично относительно некоторого центра, то для описания создаваемого этим веществом гравитационного поля удобно построить прямоугольную декартову систему координат, начало которой совпадает с центром симметрии. В этом случае плотность массы вещества будет сферически симметричной функцией от координат точки пространства:

$$\varrho = \varrho(r), \tag{7.26}$$

а сила тяготения, действующая на пробную частицу, будет центральной, т.е. будет иметь вид (4.49)

$$\vec{F} = F(r)\,\frac{\vec{r}}{r}, \tag{7.27}$$

где $F(r)$ – проекция вектора силы на радиальное направление. Функция $F = F(r)$ связана с потенциальной энергией $U = U(r)$ пробной частицы соотношением (4.55)

$$F = -\frac{dU}{dr}. \tag{7.28}$$

Рассмотрим несколько примеров систем, создающих сферически симметричное гравитационное поле.

П р и м е р 1. *Гравитационное поле материальной точки.* Пусть в начале прямоугольной декартовой системы координат расположена материальная точка массы M. Согласно формуле (7.4) потенциальная энергия пробной частицы массы m в поле сил тяготения, создаваемом частицей M,

$$U = -\frac{\gamma m M}{r}. \tag{7.29}$$

При этом формула (7.28) дает

$$F = -\frac{\gamma m M}{r^2}. \tag{7.30}$$

Отрицательный знак проекции силы на радиальное направление означает, что вектор силы $\vec{F}$ направлен в сторону противоположную направлению радиус-вектора $\vec{r}$, т.е. к началу координат, где находится частица M (рис. 7.5).

Подстановка выражения (7.30) в формулу (7.27) приводит к формуле

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\gamma m M}{r^3}\vec{r},} \tag{7.31}$$

которая описывает силовое поле, создаваемое телом массы M.

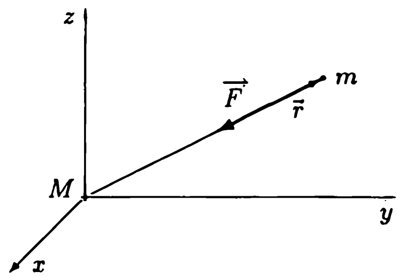

Рис. 7.5. Гравитационное поле материальной точки

П р и м е р 2. *Гравитационное поле тонкого сферического слоя.* Рассмотрим взаимодействие между бесконечно тонким однородным сферическим слоем массы M и пробной частицей, масса которой равна m. Построим прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром сферического слоя. Поместим пробную частицу на оси z на расстоянии r от начала координат (рис. 7.6). Найдем по формуле (7.22) энергию пробной частицы. Для этого сферический слой следует мысленно разделить на малые части, найти энергию взаимодействия пробной частицы с каждой из этих частей, а затем сложить полученные выражения.

Множество прямых, проходящих через начало координат под углом θ к оси z, образует конус: $\theta = \text{const}$, который вместе с другим конусом, определяемым уравнением $\theta + d\theta = \text{const}$, вырезает из поверхности сферы с центром в точке O узкое кольцо, называемое *сферическим поясом.* В данном примере кольцо, вырезаемое конусами из сферического слоя, представляет интерес потому, что все его элементы находятся на одинаковом расстоянии R от пробной частицы. Поэтому в соответствии с формулой (7.22) для энергии взаимодействия пробной частицы с сферическим поясом можно записать выражение

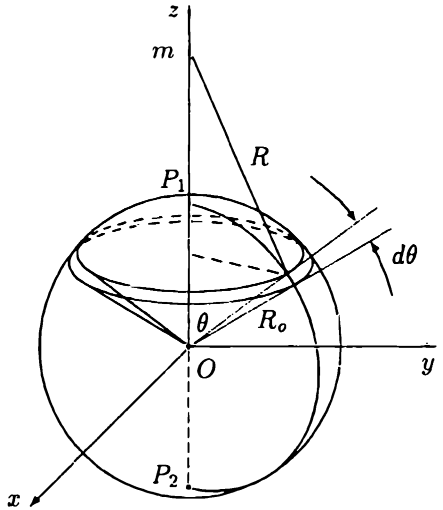

Рис. 7.6. Сферический слой и пробная частица

$$dU = -\frac{\gamma m}{R}\, dM\,, \tag{7.32}$$

где dM – масса сферического пояса. Так как масса M сферического слоя распределена равномерно по его поверхности, масса dM сферического пояса будет пропорциональна его площади и массе слоя:

$$dM = \frac{M}{4\pi R_o^2}\, dS\,, \tag{7.33}$$

где R_o – радиус сферического слоя. Площадь dS сферического пояса равна произведению его длины $2\pi R_o \sin\theta$ на ширину $R_o d\theta$:

$$dS = 2\pi R_o^2 \sin\theta\, d\theta\,. \tag{7.34}$$

С учетом формул (7.33) и (7.34) преобразуем выражение (7.32) к виду

$$dU = -\frac{\gamma m M}{2R} \sin\theta\, d\theta\,. \tag{7.35}$$

В правой части этого равенства присутствуют две переменные величины R и θ, которые не являются независимыми. Составить связывающее их уравнение можно, применив теорему косинусов к треугольнику, образованному отрезками R, R_o и r:

$$R^2 = R_o^2 - 2R_o r\cos\theta + r^2\,.$$

Продифференцируем обе части этого равенства, имея в виду, что R_o и r постоянны для любого сферического пояса. Получим:

$$2R\,dR = 2R_o r\sin\theta\, d\theta\,.$$

Используя это соотношение, выражению (7.35) можно придать вид

$$dU = -\frac{\gamma m M\, dR}{2R_o r}\,.$$

Проинтегрировав это выражение по R, найдем энергию взаимодействия пробной частицы со всем сферическим слоем:

$$U(r) = -\frac{\gamma m M}{2 R_o r}(R_2 - R_1), \tag{7.36}$$

где R_1 и R_2 – пределы изменения величины R, т.е. R_1 есть расстояние от пробной частицы до ближайшей точки P_1 на поверхности сферического слоя, а R_2 – расстояние до наиболее удаленной точки P_2 (рис. 7.6).

Если пробная частица находится внутри сферического слоя ($r < R_o$), то

$$R_1 = R_o - r\,, \qquad R_2 = R_o + r\,.$$

При этом формула (7.36) принимает вид

$$U(r) = -\frac{\gamma m M}{R_o} \quad \text{при} \quad r < R_o\,. \tag{7.37}$$

В том случае, когда пробная частица находится вне сферического слоя ($r \geq R_o$), будем иметь

$$R_1 = r - R_o\,, \qquad R_2 = r + R_o\,.$$

Подставив эти выражения в формулу (7.36), получим:

$$U(r) = -\frac{\gamma m M}{r} \quad \text{при} \quad r \geq R_o\,. \tag{7.38}$$

Формулы (7.37) и (7.38) определяют зависимость потенциальной энергии пробной частицы от ее расстояния r до центра сферического слоя. График этой зависимости изображен на рис. 7.7. Следует отметить, что потенциальная энергия пробной частицы во всех точках внутри сферического слоя принимает одно и то же значение, совпадающее с ее энергией на поверхности слоя.

По формуле (7.28) найдем проекцию силы на радиальное направление:

$$F(r) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r < R_o\,, \\ -\dfrac{\gamma m M}{r^2} & \text{при} \quad r > R_o\,. \end{cases} \tag{7.39}$$

График зависимости $F = F(r)$ приведен на рис. 7.8. Зависимость силы от расстояния r такова, что на пробную частицу внутри сферического слоя сила тяготения не действует, т.е. гравитационное поле внутри слоя отсутствует. Когда частица находится вне слоя, на нее со стороны сферического слоя действует такая же сила, как со стороны материальной точки массы M, помещенной в точку O.

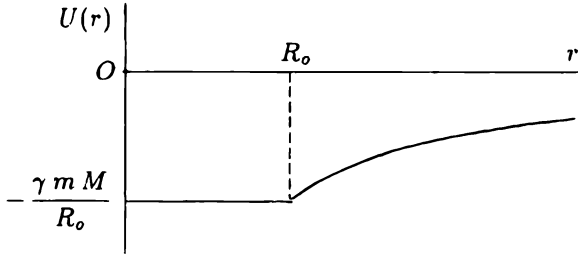

Рис. 7.7. Потенциальная энергия пробной частицы в гравитационном поле сферического слоя

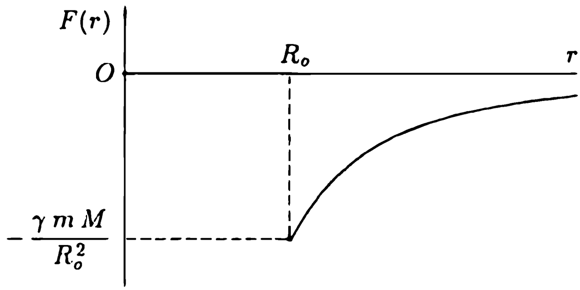

Рис. 7.8. Сила, с которой сферический слой действует на пробную частицу

Пример 3. *Гравитационное поле сферически симметрично распределенного вещества.* Рассмотрим теперь, как взаимодействует пробная частица с веществом, сферически симметрично распределенным в пространстве вокруг начала координат с плотностью (7.26). Для этого разобьем заполненное веществом пространство на сферические слои (рис. 7.9). Объем dV тонкого сферического слоя радиуса R_o и толщины dR_o равен произведению площади его поверхности на толщину: $dV = 4\pi R_o^2\, dR_o$. Поэтому масса dM слоя будет равна

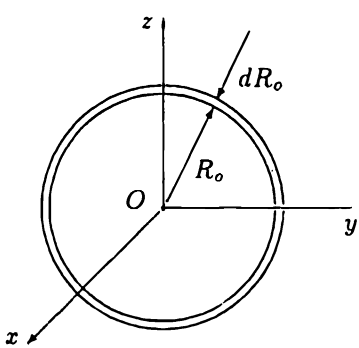

Рис. 7.9. Сферический слой

$$dM = \varrho(R_o) \cdot 4\pi R_o^2\, dR_o\,. \qquad (7.40)$$

Согласно формуле (7.39) сила dF, с которой сферический слой массы dM действует на пробную частицу, находящуюся на расстоянии r от начала координат, будет

$$dF = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r < R_o \,, \\ -\dfrac{\gamma\, m}{r^2}\, dM & \text{при} \quad r > R_o \,. \end{cases}$$

Результирующую силу F, которая действует на пробную частицу, найдем, применив принцип суперпозиции, т.е. проинтегрировав выражение для силы dF по R_o. Интегрирование по R_o в пределах от 0 до r дает формулу

$$F(r) = -\frac{\gamma\, m}{r^2}\, M(r)\,, \tag{7.41}$$

где

$$M(r) = 4\,\pi \int\limits_0^r \varrho(R_o)\, R_o^2\, dR_o \tag{7.42}$$

– масса вещества внутри сферы радиуса r. Формула (7.41) учитывает, что на пробную частицу оказывают действие только те слои вещества, радиус которых меньше r.

Сила (7.41) обладает замечательным свойством. Если вся масса вещества заключена внутри сферы радиуса R, а вне этой сферы плотность всюду равна нулю:

$$\varrho(r) = 0 \quad \text{при} \quad r > R\,,$$

то на пробную частицу за пределами сферы будет действовать сила

$$F = -\frac{\gamma\, m\, M}{r^2} \quad \text{при} \quad r > R\,, \tag{7.43}$$

где $M = M(R)$ – вся масса вещества. Таким образом, приходим к выводу, что для любого сферически симметричного распределения вещества внутри сферы некоторого радиуса R, вне этой сферы гравитационное поле будет таким же, как поле, создаваемое материальной точкой массы M, находящейся в центре симметрии. При этом вектор силы, с которой вещество притягивает к себе частицу массы m, согласно формулам (7.27) и (7.43) будет иметь вид

$$\vec{F} = -\frac{\gamma\, m\, M\, \vec{r}}{r^3} \quad \text{при} \quad r > R\,. \tag{7.44}$$

Если внутри сферы радиуса R плотность ϱ вещества постоянна, то формулы (7.41) и (7.42) дают

$$F = -\frac{\gamma\, m\, M\, r}{R^3} \quad \text{при} \quad r \leq R\,, \tag{7.45}$$

где

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho$$

– масса шара радиуса R. Формулы (7.43) и (7.45) описывают силу, с которой однородный шар действует на частицу, находящуюся на расстоянии r от его центра. График зависимости проекции этой силы на радиальное направление от расстояния r приведен на рис. 7.10.

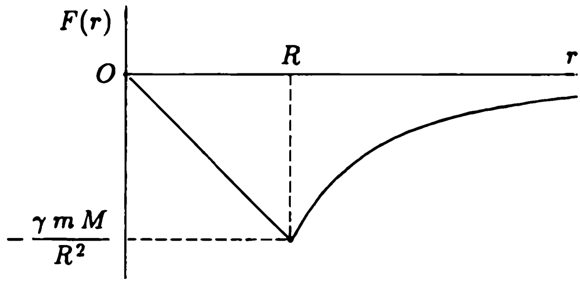

Рис. 7.10. Сила, с которой однородный шар действует на пробную частицу

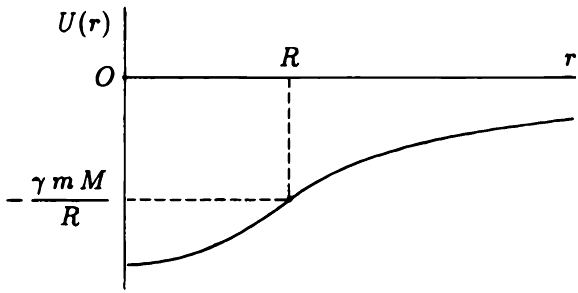

Рис. 7.11. Потенциальная энергия пробной частицы в гравитационном поле однородного шара

В силу соотношения (7.28) потенциальная энергия $U = U(r)$ пробной частицы является первообразной для функции $-F(r)$. Проинтегрировав выражения (7.43) и (7.45), придем к зависимости

$$U(r) = \begin{cases} \dfrac{\gamma m M}{2R}\left(\left(\dfrac{r}{R}\right)^2 - 3\right) & \text{при} \quad r < R, \\[2ex] -\dfrac{\gamma m M}{r} & \text{при} \quad r \geq R. \end{cases} \tag{7.46}$$

График этой зависимости изображен на рис. 7.11.

7.7. Протяженные тела в гравитационном поле

В предыдущем разделе было показано, как при помощи закона всемирного тяготения и принципа суперпозиции можно найти силу, с которой сферически симметрично распределенное в пространстве вещество действует на материальную точку. В частности было доказано, что в том случае, когда частица массы m находится за пределами сферы радиуса R, внутри которой распределено вещество, на нее действует сила

$$\vec{F} = -\gamma m \sum_i \frac{M_i \vec{R}_i}{R_i^3} = -\frac{\gamma m M \vec{r}}{r^3}, \qquad (7.47)$$

где расстояние r от частицы до центра распределения вещества больше радиуса R,

$$M = \sum_i M_i .$$

Эти равенства являются следствием формул (7.15), (7.16) и (7.44). Напомним, что вектор $\vec{r}$ начинается в центре масс системы частиц M_i.

Рассмотрим теперь как будет вести себя в силовом поле (7.47) система материальных точек. Пусть $k = 1, 2, \ldots$ есть номер частицы этой системы. В соответствии с формулой (7.47) на k-ю частицу действует сила

$$\vec{F}_k = -\frac{\gamma m_k M \vec{r}_k}{r_k^3}, \qquad (7.48)$$

где m_k и $\vec{r}_k$ – масса и радиус-вектор k-й частицы.

Радиус-вектор $\vec{r}_C = \vec{r}_C(t)$ центра масс системы частиц m_k подчиняется второму закону Ньютона, выраженному уравнением (5.48)

$$m \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \sum_k \vec{F}_k, \qquad (7.49)$$

где

$$m = \sum_k m_k$$

– масса системы. Как следует из уравнения (7.49), движение центра масс системы в силовом поле (7.47) определяется суммой всех сил (7.48), действующих на частицы этой системы:

$$\sum_k \vec{F}_k = -\gamma M \sum_k \frac{m_k \vec{r}_k}{r_k^3} .$$

Нетрудно видеть, что эта сумма аналогична сумме в равенстве (7.47). Поэтому для сферически симметричного распределения частиц m_k суммирование дает аналогичный результат:

$$\sum_k \vec{F}_k = -\frac{\gamma M m \vec{r}_C}{r_C^3}. \tag{7.50}$$

Таким образом, пришли к выводу, что центр масс сферически симметричной системы частиц движется в гравитационном поле, создаваемом другой сферически симметричной системой так же, как материальная точка такой же массы. Другими словами можно сказать, что согласно формуле (7.50) *две сферически симметричные системы взаимодействуют, как две материальные точки, расположенные в центрах масс этих систем и обладающие такими же массами.* В частности, так взаимодействуют однородные шары. Из формулы (7.50) следует, что модуль силы, с которой взаимодействуют две сферически симметричные системы частиц, равен

$$F = \frac{\gamma m M}{r^2}, \tag{7.51}$$

где r – расстояние между центрами масс этих систем.

7.8. Опыт Кавендиша

Значение гравитационной постоянной γ может быть установлено по формуле (7.51), если известны массы двух сферически симметричных тел, расстояние между их центрами инерции и сила, с которой они притягиваются друг к другу. Проблема заключается в том, что для тел, массы которых могут быть измерены непосредственно, сила тяготения оказывается настолько малой, что ее очень трудно измерить. Впервые это удалось сделать лорду Кавендишу в 1798 г. (Генри Кавендиш (1731 – 1810) – английский ученый). В качестве основного измерительного инструмента он использовал крутильные весы, которые имеют очень высокую чувствительность и дают возможность измерять очень слабые силы.

Крутильные весы представляют собой подвешенный на упругой нити легкий стержень (коромысло), на концах которого закреплены два свинцовых шарика массы m каждый (рис. 7.12). При повороте стержня в горизонтальной плоскости нить закручивается и в ней возникают упругие деформации, которые порождают силы, стремящиеся вернуть стержень в положение равновесия. Чем больше угол φ поворота стержня, тем больше силы упругих деформаций и тем больше вращательный момент M_z, с которым они действуют на стержень:

$$M_z = -c\varphi,$$

где c – коэффициент пропорциональности, называемый *крутильной жесткостью* нити.

Если к шарикам приложить равные по величине и противоположные по направлению перпендикулярные к стержню горизонтальные силы $\vec{F}$ и $-\vec{F}$, то положение равновесия стержня изменится и будет соответствовать такому значению угла поворота, при котором алгебраическая сумма моментов, действующих на стержень сил $\vec{F}$, $-\vec{F}$ и сил упругости нити, равна нулю:

$$Fl - c\varphi = 0,$$

где l – длина стержня. Отсюда найдем, что сила, удерживающая стержень в новом равновесном положении, пропорциональна углу поворота:

$$F = \frac{c}{l}\varphi.$$

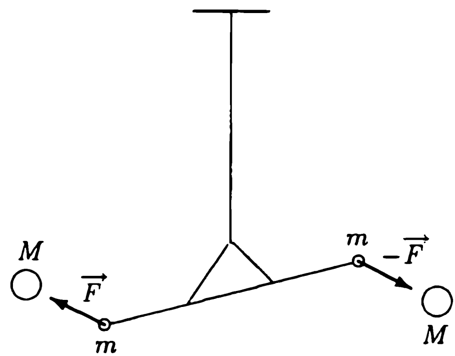

Рис. 7.12. Крутильные весы

Из этой формулы следует, что значение силы F, приложенной к шарикам и удерживающей их в положении равновесия, можно измерить по углу поворота стержня. Для измерения угла на нити укреплено небольшое зеркальце. Тонкий луч света падает на зеркальце, отражается от него под некоторым углом и попадает на измерительную шкалу. При повороте стержня отраженный луч перемещается по шкале. Измерив смещение луча, можно найти угол поворота стержня и значение силы F.

Кавендиш поместил вблизи крутильных весов два симметрично расположенных свинцовых шара массы M каждый. Измерив силу притяжения шаров с массами m и M по углу поворота коромысла крутильных весов, он вычислил по формуле (7.51) значение гравитационной постоянной. Проведенные позднее более точные измерения дали следующий результат:

$$\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11}\ \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}.$$

7.9. Гравитационная энергия

Потенциальная энергия взаимодействия двух и более частиц определяется формулой (5.76)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{k \neq i} W_{ik} \,, \tag{7.52}$$

где W_{ik} – энергия взаимодействия частиц с номерами i и k. Для двух тяготеющих друг к другу материальных точек с массами m_i и m_k энергия их взаимодействия согласно формуле (7.4) равна

$$W_{ik} = -\frac{\gamma\, m_i\, m_k}{R_{ik}} \,, \tag{7.53}$$

где R_{ik} – расстояние между этими частицами. Подставив энергию (7.53) в формулу (7.52), получим выражение для гравитационной энергии системы материальных точек:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i} m_i \left(-\gamma \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{R_{ik}} \right) . \tag{7.54}$$

Согласно формуле (7.24) выражение в круглых скобках

$$\varphi_i = -\gamma \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{R_{ik}}$$

есть потенциал гравитационного поля, создаваемого всеми частицами системы, кроме частицы с номером i, в точке пространства, где находится эта частица. Теперь выражению (7.54) можно придать вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i} m_i\, \varphi_i \,. \tag{7.55}$$

Если вещество распределено в пространстве непрерывным образом с объемной плотностью $\varrho = \varrho(\vec{r})$, то от суммирования в формуле (7.55) следует перейти к интегрированию по пространству, т.е. заменить сумму объемным интегралом:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V} \varphi(\vec{r})\, dm \equiv \frac{1}{2} \int_{V} \varphi(\vec{r})\, \varrho(\vec{r})\, dV \,. \tag{7.56}$$

Вычислим по этой формуле гравитационную энергию однородного шара массы M и радиуса R. Его плотность есть сферически симметричная функция такая, что

$$\varrho(r) = \begin{cases} \dfrac{3\,M}{4\,\pi\,R^3} & \text{при} \quad r < R\,, \\ 0 & \text{при} \quad r > R\,. \end{cases} \tag{7.57}$$

Так как плотность массы в пространстве вне шара равна нулю, интегрирование в формуле (7.56) следует проводить только по объему шара. Согласно формуле (7.46) потенциал гравитационного поля внутри шара есть сферически симметричная функция:

$$\varphi(r) = \frac{\gamma\,M}{2\,R}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3\right) \tag{7.58}$$

при $r < R$. Таким образом, под знаком интеграла в формуле (7.56) будет стоять сферически симметричное выражение. Поэтому в качестве элементарного объема интегрирования dV удобно взять объем тонкого сферического слоя радиуса r и толщины dr:

$$dV = 4\,\pi\,r^2\,dr\,. \tag{7.59}$$

Подстановка формул (7.57) – (7.59) в интеграл (7.56) приводит к определенному интегралу

$$W = -\,\frac{3\,\gamma\,M^2}{4\,R^4}\int\limits_0^R\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3\right)r^2\,dr\,.$$

Вычисление этого интеграла по формуле Ньютона – Лейбница дает следующий результат:

$$W = -\,\frac{3\,\gamma\,M^2}{5\,R}\,. \tag{7.60}$$

В случае произвольного сферически симметричного распределения вещества вместо общей формулы (7.56) удобно использовать более простую формулу для гравитационной энергии, которую нетрудно вывести следующим образом. Так как величина $M(r)$, определяемая формулой (7.42), есть масса вещества внутри сферы радиуса r, а $dM = \varrho(r)\cdot 4\pi r^2 dr$ есть масса вплотную к этой сфере прилегающего сферического слоя, его гравитационная энергия согласно формуле (7.46) будет равна

$$dW = -\,\frac{\gamma\,M(r)\,dM}{r} = -\,4\,\pi\,\gamma\,M(r)\,\varrho(r)\,r\,dr\,.$$

Полная гравитационная энергия всего вещества равна интегралу от этого выражения:

$$W = -4\pi\gamma \int_0^{\infty} M(r)\,\varrho(r)\,r\,dr\,.$$

Для однородного шара зависимость $\varrho = \varrho(r)$ имеет вид (7.57) и интегрирование приводит к формуле (7.60).

7.10. Давление в недрах планеты

Каждая малая частица Земли, будь то атом или молекула, вносит свой незначительный вклад в создание ее гравитационного поля. Как показывают расчеты и наблюдения, это поле существует как в недрах Земли, так и далеко за ее пределами. Каждая молекула испытывает на себе силу ее тяготения как результат коллективного воздействия на нее всех других молекул Земли. Но при изучении взаимодействия двух или нескольких молекул их взаимным тяготением можно пренебречь, так как, кроме гравитационных сил, между молекулами вещества действуют еще и другие весьма разнообразные по своему характеру силы, имеющие электромагнитное происхождение и носящие общее название *сил межмолекулярного взаимодействия*. Эти силы существенно превышают по величине силы тяготения, когда расстояния между молекулами сравнимы с их размерами. При малых расстояниях ($r < r_o$) между молекулами действуют силы отталкивания. Причем расстояние r_o, которое называют радиусом действия межмолекулярных сил, равно по порядку величины диаметру d молекулы: $r_o \simeq d$. Поэтому практически молекула может взаимодействовать одновременно только с небольшим числом других молекул, которые являются ее ближайшими соседями. Кратко характеризуя зависимости от расстояния r сил взаимодействия двух молекул, можно сказать, что гравитационные силы являются слабыми, но дальнодействующими, а силы межмолекулярного взаимодействия – сильными и близкодействующими.

Произвольная воображаемая поверхность, расположенная внутри какого-либо вещества, разделяет его две части. Только те из находящихся по разные стороны от этой поверхности молекулы могут взаимодействовать друг с другом, для которых расстояния от их центров до разделяющей поверхности меньше радиуса действия межмолекулярных сил. Поэтому создается впечатление, что силы взаимодействия двух частей вещества, разделенных некоторой воображаемой поверхностью, распределены по этой поверхности. Такие силы называются *поверхностными*. Другими словами можно сказать, что поверхностные силы – это силы, с которыми тонкий слой молекул, расположенных вдоль некоторой поверхности, действует на прилегающий к обратной ее стороне другой слой молекул.

Рассмотрим два слоя молекул, разделенных небольшой по размерам плоской (или почти плоской) поверхностью, площадь которой равна dS. Поверхностную силу, с которой один слой молекул действует на другой, можно разложить на две составляющие: нормальную dF_n и касательную dF_τ к поверхности раздела. *Давлением* P, или *нормальным напряжением* называется отношение силы dF_n нормального давления к площади dS поверхности, на которую эта сила действует:

$$P = \frac{dF_n}{dS} \tag{7.61}$$

Единицей измерения давления в системе СИ является паскаль (*Па*), который равен силе нормального давления в 1 *Н*, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 $м^2$: 1 *Па* = 1 $Н/м^2$.

Давление в любом месте жидкой или газообразной сплошной среды не зависит от ориентации поверхности, при помощи которой оно определяется. Но в общем случае давление может изменяться с течением времени и при переходе от одной точки пространства к другой, т.е. давление является некоторой функцией от времени и координат:

$$P = P(t, \vec{r}).$$

Касательным напряжением τ называется отношение касательной поверхностной силы к площади поверхности, на которую эта сила действует:

$$\tau = \frac{dF_\tau}{dS}.$$

Для жидкостей и газов, находящихся в равновесном состоянии, касательные напряжения равны нулю.

Большая часть вещества Вселенной сосредоточена в звездах, одной из которых является наше Солнце. Вокруг Солнца вращаются девять больших планет (в том числе Земля) и очень много малых планет – астероидов. Имеются ли планеты у других звезд – неизвестно. Почти все звезды, Солнце и его планеты имеют шарообразную форму, которая обусловлена действием сил всемирного тяготения.

Предполагают, что звезды и большие планеты возникли в результате конденсации космической пыли и газов. Система тяготеющих друг к другу частиц, если только она не вращается с большой скоростью, должна принимать форму шара, так как в этом случае ее гравитационная энергия будет наименьшей. Причем гравитационная энергия шарообразного скопления частиц будет тем меньше, чем меньше его радиус. Об этом, например, свидетельствует формула (7.60).

На ранних этапах эволюции нарождающихся звезд и планет гравитационные силы сжимали шарообразные скопления частиц, уменьшая их размеры и тем самым увеличивая плотность вещества в их недрах. С увеличением плотности молекулы все чаще сталкивались и взаимодействовали друг с другом. Все большую роль начинали играть силы межмолекулярного отталкивания, которые обусловливали рост давления и препятствовали сжатию вещества. При определенных условиях устанавливалось такое распределение давления в веществе, что гравитационное сжатие прекращалось и наступало статическое равновесие.

Выведем уравнение, описывающее статическое равновесие сферически симметрично распределенного вещества. Прежде всего отметим, что давление в данном случае будет независящей от времени сферически симметричной функцией координат:

$$P = P(r)\,, \tag{7.62}$$

где r – расстояние от центра симметрии до произвольной точки пространства.

Рассмотрим силы, действующие на малую часть площадью dS тонкого сферического слоя вещества радиуса r и толщины dr, вырезаемую узким конусом с вершиной в центре скопления. На этот элемент слоя действует гравитационная сила dF, определяемая формулой (7.41):

$$dF = \frac{\gamma\, M(r)\, dm}{r^2}\,, \tag{7.63}$$

которая притягивает его к центру скопления. Здесь dm есть масса рассматриваемого элемента сферического слоя, которую можно выразить через массу

$$dM = \varrho(r)\, 4\,\pi\, r^2\, dr$$

всего слоя при помощи соотношения:

$$dm = \frac{dM\, dS}{4\,\pi\, r^2} = \varrho(r)\, dr\, dS\,. \tag{7.64}$$

Давление $P(r)$, оказываемое на внутреннюю поверхность элемента сферического слоя, создает силу $P(r)\,dS$, которая направлена от центра, а давление $P(r+dr)$ на внешнюю поверхность – силу $P(r+dr)\,dS$, направленную к центру. Сложим проекции на радиальное направление перечисленных сил и приравняем результирующую силу нулю. Придем к условию, при выполнении которого для всех значений расстояния r

сферически симметричное скопление частиц будет находиться в состоянии статического равновесия:

$$- dF + P(r)\, dS - P(r + dr)\, dS = 0\,. \tag{7.65}$$

Учитывая, что

$$dP = P(r + dr) - P(r)$$

есть дифференциал функции (7.62), при помощи формул (7.63) и (7.64) преобразуем равенство (7.65) к виду

$$\frac{dP}{dr} = -\,\frac{\gamma\, M(r)\, \varrho(r)}{r^2}\,. \tag{7.66}$$

Найдем зависимость (7.62) в предположении, что плотность вещества звезды или планеты постоянна и определяется формулой (7.57). При этом масса $M(r)$ вещества внутри сферы радиуса r будет равна

$$M(r) = \frac{4}{3}\,\pi\,\varrho\, r^3\,.$$

Подставив это выражение в формулу (7.66), найдем, что производная искомой функции

$$\frac{dP}{dr} = -\,\frac{4}{3}\,\pi\,\gamma\,\varrho^2\, r\,.$$

Интегрирование приводит к зависимости

$$P(r) = -\,\frac{2}{3}\,\pi\,\gamma\,\varrho^2\, r^2 + C\,.$$

Значение постоянной интегрирования может быть найдено из условия

$$P(R) = 0\,,$$

которое означает, что на границе между веществом и пустотой давление обращается в ноль. Окончательно получим:

$$P(r) = \frac{2}{3}\,\pi\,\gamma\,\varrho^2\,\left(R^2 - r^2\right)\,. \tag{7.67}$$

Средняя плотность земного вещества равна $\varrho = 5,5$ *кг/м*^{3}, а радиус Земли $R = 6,4 \cdot 10^6$ *м*. Используя эти значения, вычислим по формуле (7.67) давление в центре земного шара:

$$P(0) = 1,7 \cdot 10^{11}\ \textit{Па}\,.$$

Учитывая, что атмосферное давление равно $P_a = 1$ *атм* $\simeq 10^5$ *Па*, приходим к заключению, что давление в центре Земли почти в два миллиона раз выше атмосферного давления.

ГЛАВА 8*

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

8.1. Движение тел в солнечной системе

Вокруг Солнца обращаются девять больших планет, которые имеют 31 спутник. В движениях этих небесных тел наблюдаются следующие основные закономерности:

1. Орбиты планет и их спутников почти круговые.
2. Плоскости этих орбит почти совпадают друг с другом.
3. Все планеты обращаются вокруг Солнца в одном и том же направлении.
4. Большинство спутников обращается вокруг своих планет в том же направлении.
5. Солнце и все планеты (кроме Урана) вращаются вокруг собственных осей в том же направлении, в котором планеты обращаются вокруг Солнца.

На протяжении многих веков общепринятой была геоцентрическая теория мироздания, согласно которой Земля считалась неподвижной, а другие планеты, Солнце и звезды – вращающимися вокруг нее. Завершенный вид геоцентрическая теория приняла в трудах древнегреческого ученого Клавдия Птолемея, жившего во II в. н. э. Он разработал математическую теорию движения планет вокруг неподвижной Земли, позволявшую предвычислять их положения на небе и предсказывать время лунных и солнечных затмений. Польский астроном Николай Коперник (1473 – 1543) создал гелиоцентрическую теорию строения солнечной системы. По этой теории Земля и другие планеты обращаются вокруг Солнца, а суточное движение небесного свода объясняется вращением Земли вокруг собственной оси. Одним из следствий гелиоцентрической теории явилось предсказание так называемых параллактических смещений наиболее близких к солнечной системе звезд. Параллакс – это видимое изменение положения звезды на небесной сфере, обусловленное перемещением наблюдателя вследствие обращения Земли вокруг Солнца (годичный параллакс). Эти смещения очень малы. Первое измерение параллакса одной из звезд было проведено в 1837 г. русским астрономом В.Я.Струве.

Датский астроном Тихо Браге (1546 – 1601) посвятил всю свою жизнь точным измерениям положений звезд и планет на небесной сфере. Сотрудник Тихо Браге – немецкий ученый Иоганн Кеплер (1571 – 1630) – унаследовал результаты его многолетних наблюдений и использовал их для исследования движений планет вокруг Солнца. Эти исследования привели Кеплера к открытию трех знаменитых законов.

1. Каждая планета движется по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится Солнце. Напомним, что *эллипсом* называется плоская кривая, сумма расстояний r_1 и r_2 между любой точкой которой и двумя неподвижными точками внутри нее, называемыми *фокусами*, постоянна:

$$r_1 + r_2 = 2\,a\,,$$

где постоянная a называется *большой полуосью* эллипса (рис. 8.1).

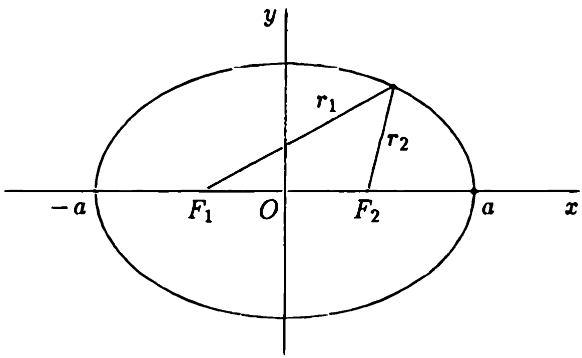

Рис. 8.1. Эллипс

2. Радиус-вектор, соединяющий центр Солнца с планетой, за равные промежутки времени описывает равные площади.

3. Отношение куба большой полуоси орбиты к квадрату периода обращения для всех планет принимает одно и то же значение:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const}\ .$$

Все задачи о движении тел в солнечной системе можно решить, используя только закон всемирного тяготения и второй закон Ньютона. Сформулируем так называемую проблему N тел. Пусть в пространстве движутся материальные точки, взаимодействующие друг с другом только посредством гравитационных сил. Движения этих частиц будем описывать при помощи векторных функций

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)\,, \tag{8.1}$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор частицы под номером i; $i = 1, 2, ..., N$. Запишем второй закон Ньютона для одной из этих частиц:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -\gamma m_i \sum_{k\neq i} \frac{m_k \overrightarrow{R}_{ik}}{R_{ik}^3}, \tag{8.2}$$

где

$$\overrightarrow{R}_{ik} = \vec{r}_i - \vec{r}_k$$

– вектор, соединяющий частицы с номерами i и k. Уравнения (8.2) образуют систему для N неизвестных функций (8.1). В разделе 7.4 было показано, что сферически симметричные тела взаимодействуют, как материальные точки. Поэтому уравнения (8.2) можно применять для описания движения тел в солнечной системе, так как все они или имеют шарообразную форму, или так малы, что их размерами можно пренебречь. Для того чтобы найти единственное решение системы уравнений (8.2), соответствующее движению каких-либо реальных тел, необходимо принять определенные начальные условия:

$$\vec{r}_i(t_o) = \vec{r}_{io}, \qquad \vec{v}_i(t_o) = \vec{v}_{io}. \tag{8.3}$$

Для системы из двух тел поставленная задача имеет точное аналитическое решение. Уравнения движения системы, состоящей более чем из двух тел, решают численными методами.

8.2. Задача двух тел. Приведенная масса

Уравнения движения (8.2) для двух тел, притягиваемых друг к другу гравитационными силами, можно записать в виде:

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, \qquad m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, \tag{8.4}$$

где

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \tag{8.5}$$

Сложив уравнения (8.4), получим:

$$\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = 0, \tag{8.6}$$

где

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

радиус-вектор центра масс системы. Согласно уравнению (8.6) центр масс движется без ускорения. Поместим начало координат инерциальной системы отсчета в центре масс, т.е. положим $\vec{r}_C \equiv 0$:

$$m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 \equiv 0\,. \tag{8.7}$$

Разрешив уравнения (8.5) и (8.7) относительно $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, выразим эти векторы через вектор $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{r}\,, \qquad \vec{r}_2 = -\,\frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{r}\,. \tag{8.8}$$

Подставив эти выражения в уравнения (8.4), придем к уравнению для векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

$$\mu\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\,\frac{\gamma\, m_1\, m_2}{r^3}\,\vec{r}\,, \tag{8.9}$$

где

$$\mu = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$$

– так называемая *приведенная масса.* По своему виду уравнение (8.9) совпадает с уравнением, выражающим второй закон Ньютона для материальной точки массы μ, которая движется в поле центральной силы. Таким образом, задача о движении двух тел сводится к задаче о движении одного тела. Решив эту задачу, т.е. отыскав функцию $\vec{r} = \vec{r}(t)$, по формулам (8.8) найдем траектории $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$ движения каждого тела вокруг их общего центра масс.

Если масса одного тела во много раз больше массы другого (пусть $m_2 \gg m_1$), то формулы (8.8) дают

$$\vec{r}_1 \simeq \vec{r}\,, \qquad \vec{r}_2 \simeq 0\,,$$

т.е. тело большей массы будет оставаться практически неподвижным, а легкое тело – двигаться вокруг него.

8.3. Движение в поле центральной силы

Приступим к решению уравнения (8.9), которое описывает движение частицы массы μ под действием центральной силы

$$\vec{F} = -\,\frac{\gamma\, m_1\, m_2}{r^3}\,\vec{r}\,. \tag{8.10}$$

Эта сила коллинеарна радиус-вектору $\vec{r}$. Поэтому ее момент равен нулю:

$$[\,\vec{r}\,\vec{F}\,] = 0\,.$$

Как было доказано в разделе 4.3, в этом случае момент импульса частицы со временем не изменяется:

$$\vec{L} = [\,\vec{r}\,\vec{p}\,] = \text{const} . \tag{8.11}$$

По определению векторного произведения радиус-вектор частицы $\vec{r}$ и ее импульс $\vec{p}$ перпендикулярны вектору $\vec{L}$ момента импульса:

$$\vec{r}(t) \perp \vec{L} , \qquad \vec{p}(t) \perp \vec{L} .$$

При неизменном направлении вектора $\vec{L}$ эти условия будут соблюдаться для любого момента времени только тогда, когда частица движется в плоскости, к которой вектор $\vec{L}$ ортогонален (рис. 8.2). Построим прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось z была сонаправлена с вектором $\vec{L}$. При этом частица будет двигаться в плоскости xy.

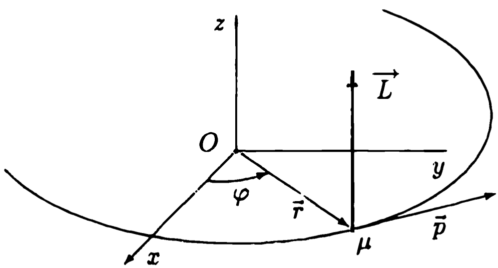

Рис. 8.2. Так как момент импульса частицы в центральном силовом поле не изменяется со временем, ее траектория представляет собой плоскую кривую

Для описания движения частицы удобно использовать *полярные координаты* r и φ, которые связаны с декартовыми координатами x и y соотношениями:

$$x = r\,\cos\varphi\,, \qquad y = r\,\sin\varphi\,, \tag{8.12}$$

где r – расстояние от частицы до начала координат, а φ – угол между радиус-вектором и осью x.

При движении частицы полярные координаты будут изменяться с течением времени:

$$r = r(t)\,, \qquad \varphi = \varphi(t)\,.$$

Продифференцируем функции (8.12) по времени. Получим следующие выражения для проекций вектора скорости на оси координат:

$$v_x = \dot{x} = \dot{r}\,\cos\varphi - r\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\,, \qquad v_y = \dot{y} = \dot{r}\,\sin\varphi + r\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi\,. \tag{8.13}$$

Вычислим векторное произведение $[\,\vec{r}\,\vec{v}\,]$. С учетом того, что $z = 0$ и $v_z = 0$, будем иметь

$$[\,\vec{r}\,\vec{v}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\,\dot{y} - \dot{x}\,y)\,\vec{k}\,.$$

Используя соотношения (8.12) и (8.13), найдем, что

$$x\,\dot{y} - \dot{x}\,y = r^2\,\dot{\varphi}\,.$$

Это равенство позволяет записать закон сохранения момента импульса (8.11) в виде

$$\mu\,r^2\,\dot{\varphi} = L = \mathrm{const}\,. \tag{8.14}$$

Найдем полную механическую энергию частицы $E = T + U$. Используя соотношения (8.13), преобразуем квадрат скорости частицы следующим образом:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\,.$$

При этом кинетическая энергия частицы будет

$$T = \frac{1}{2}\,\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right).$$

Так как центральной силе (8.10) соответствует потенциальная энергия

$$U = -\,\frac{\gamma\,m_1\,m_2}{r}\,,$$

для полной механической энергии частицы будем иметь выражение

$$E = \frac{1}{2}\,\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\gamma\,m_1\,m_2}{r}\,. \tag{8.15}$$

Когда кроме центральной силы (8.10), которая является консервативной, другие силы на частицу не действуют, справедлив закон сохранения полной механической энергии. Этот закон вместе с законом сохранения момента импульса (8.14) приводит к системе из двух дифференциальных уравнений для функций $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$:

$$\mu\,r^2\,\dot{\varphi} = L = \mathrm{const}\,, \qquad \frac{1}{2}\,\mu\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,\mu\,r^2\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r} = E = \mathrm{const}\,, \tag{8.16}$$

где

$$\alpha = \gamma\, m_1\, m_2 \,.$$

Из этой системы очень просто исключить угловую скорость $\dot{\varphi}$, разрешив относительно нее уравнение (8.14):

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu\, r^2} \,. \tag{8.17}$$

Подстановка этого выражения в (8.16) дает

$$\frac{1}{2}\,\mu\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,\mu\, r^2} - \frac{\alpha}{r} = E \,. \tag{8.18}$$

8.4. Орбиты планет и спутников

Функция

$$\Phi(r) = \frac{L^2}{2\,\mu\, r^2} - \frac{\alpha}{r} \tag{8.19}$$

называется *эффективной потенциальной энергией* частицы. Первое слагаемое в этом выражении

$$\frac{L^2}{2\,\mu\, r^2}$$

называется *центробежной энергией* частицы.

График зависимости эффективной потенциальной энергии частицы от расстояния r изображен на рис. 8.3. При $r \to 0$ функция $\Phi(r)$ обращается в $+\infty$, а при $r \to \infty$ она стремится к нулю:

$$\lim_{r\to 0} \Phi(r) = +\infty \,, \qquad \lim_{r\to\infty} \Phi(r) = 0 \,.$$

При $r = r_o$, где

$$r_o = \frac{L^2}{\alpha\,\mu} \,, \tag{8.20}$$

функция $\Phi(r)$ принимает наименьшее значение

$$\Phi_{min} = \Phi(r_o) = -\,\frac{\alpha^2\,\mu}{2\,L^2} = -\,\frac{\alpha}{2\,r_o} \equiv \frac{1}{2}\,U(r_o) \,. \tag{8.21}$$

При помощи функции (8.19) уравнению (8.18) можно придать вид

$$\frac{1}{2}\,\mu\,\dot{r}^2 + \Phi(r) = E \,. \tag{8.22}$$

Первое слагаемое в левой части этого равенства есть положительная величина. Из этого следует, что частица может находиться только на таком расстоянии от начала координат, при котором ее эффективная потенциальная энергия меньше полной:

$$\Phi(r) \leq E\,. \tag{8.23}$$

Это неравенство позволяет качественно исследовать возможный характер движения частицы.

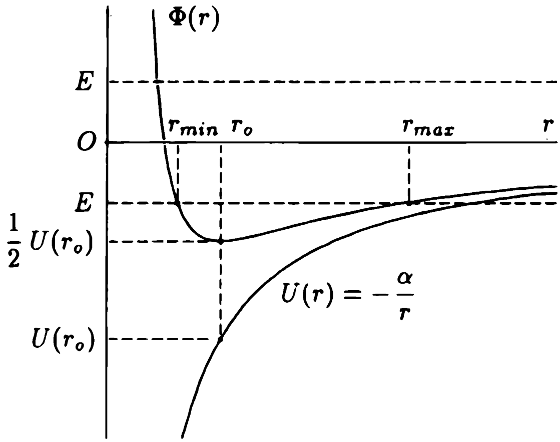

Рис. 8.3. Эффективная потенциальная энергия

Неравенство (8.23) можно решить графически. Для этого на оси Φ следует отметить заданное значение полной энергии и провести горизонтальную прямую, соответствующую этому значению. Неравенству (8.23) будут удовлетворять только те значения r, для которых график функции $\Phi = \Phi(r)$ лежит ниже проведенной прямой. Из рис. 8.3 видно, что при $E \geq 0$ движение частицы будет *инфинитным*, т.е. при движении частицы ее расстояние r до начала координат будет принимать все значения, большие некоторого r_{min} : $r \geq r_{min}$. При $\Phi_{min} \leq E < 0$ движение частицы будет *финитным*, т.е. расстояние r будет удовлетворять неравенству

$$r_{min} \leq r \leq r_{max}\,.$$

Если $E = \Phi_{min}$, то решением неравенства (8.23) будет только одно значение $r = r_o$, т.е. частица будет двигаться по окружности радиуса r_o. При этом согласно формуле (8.17) угловая скорость частицы не будет зависеть от времени. Второй закон Ньютона для движения частицы по окружности с постоянной по величине скоростью имеет вид

$$\frac{\mu v^2}{r_o} = \frac{\alpha}{r_o^2}.$$

Умножив это равенство на r_o, получим равенство, левая часть которого есть удвоенная кинетическая энергия, а правая – модуль потенциальной энергии:

$$2T = -U. \tag{8.24}$$

Из этого равенства следует, что полная энергия частицы, движущейся по окружности под действием силы тяготения, равна с обратным знаком ее кинетической энергии: $E = -T$. Равенство (8.24) является частным случаем теоремы, которая имеет следующую формулировку. Средняя кинетическая энергия $\langle T \rangle$ системы частиц, которые совершают финитные движения под действием сил притяжения, подчиняющихся закону обратных квадратов, равна половине ее средней потенциальной энергии $\langle W \rangle$, взятой со знаком минус:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle W \rangle. \tag{8.25}$$

Найдем теперь уравнение траектории частицы в полярных координатах, т.е. зависимость $r = r(\varphi)$. Для этого продифференцируем обе части уравнения (8.18) по времени. После несложных преобразований придем к уравнению

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{L^2}{\mu r^3}, \tag{8.26}$$

которое выражает собой второй закон Ньютона в проекциях на радиальное направление. Слагаемое $L^2/\mu r^3$ в правой части этого уравнения есть центробежная сила инерции. Чтобы найти решение этого уравнения, представим функцию $r = r(t)$ в виде

$$r(t) = \frac{1}{\xi(\varphi(t))}, \tag{8.27}$$

где $\xi = \xi(\varphi)$ – неизвестная функция. Выведем уравнение для этой функции.

Применяя правило дифференцирования сложной функции, найдем производную от функции (8.27) по времени t :

$$\dot{r} = -\frac{1}{\xi^2}\frac{d\xi}{d\varphi}\dot{\varphi}.$$

С учетом формулы (8.17) будем иметь

$$\dot{r} = -\frac{L}{\mu}\frac{d\xi}{d\varphi}. \tag{8.28}$$

Найдем теперь вторую производную от r по t :

$$\ddot{r} = -\frac{L}{\mu}\frac{d^2\xi}{d\varphi^2}\dot{\varphi} = -\frac{L^2}{\mu^2}\xi^2\frac{d^2\xi}{d\varphi^2}. \tag{8.29}$$

Подстановка (8.27) и (8.29) в (8.26) приводит к уравнению для функции $\xi = \xi(\varphi)$:

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} + \xi = \frac{\alpha\,\mu}{L^2}. \tag{8.30}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$\xi(\varphi) = \frac{\alpha\,\mu}{L^2} + A\cos\varphi \tag{8.31}$$

является решением уравнения (8.30). Постоянную интегрирования A удобно представить в виде

$$A = -\frac{\epsilon}{p},$$

где ϵ – новая постоянная,

$$p = \frac{L^2}{\alpha\,\mu}. \tag{8.32}$$

Используя эти обозначения и соотношения (8.27) и (8.31), запишем искомое уравнение траектории так:

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon\cos\varphi}, \tag{8.33}$$

здесь величины p и ϵ называются соответственно *параметром* и *эксцентриситетом* орбиты.

Графики функции (8.33) для различных значений эксцентриситета ϵ приведены на рис. 8.4. При $\epsilon = 0$ функция (8.33) имеет вид $r = p$. Это есть уравнение окружности радиуса p. Кривая, описываемая уравнением (8.33), при $0 < \epsilon < 1$ является эллипсом, при $\epsilon = 1$ – параболой, а при $\epsilon > 1$ – гиперболой. Все эти кривые имеют общее название – *конические сечения*, так как все они есть линии пересечения конуса и плоскости.

Ньютон установил следующий закон движения двух тел, взаимодействующих по закону (8.10). Орбита каждого из этих тел представляет собой коническое сечение с фокусом в их общем центре инерции. Как видим, первый закон Кеплера является частным случаем этого закона.

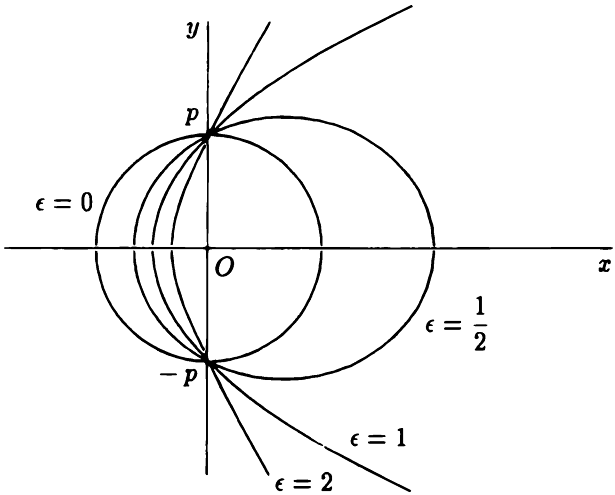

Рис. 8.4. Траектории движения тел, взаимодействующих по закону обратных квадратов. Конические сечения

Установим теперь соотношение, связывающее эксцентриситет орбиты и энергию частицы. Так как полная энергия частицы не изменяется при ее движении, достаточно определить ее значение только в какой-то одной точке орбиты, например, когда расстояние от частицы до начала координат достигает минимума. Функция (8.33) принимает наименьшее значение при $\varphi = \pi$:

$$r_{min} = \frac{p}{1+\epsilon} . \tag{8.34}$$

При этом, как следует из формул (8.28) и (8.31), $\dot{r} = 0$. Поэтому согласно (8.20) полная энергия будет равна

$$E = \Phi(r_{min}) .$$

Вычисления по формуле (8.19) дают

$$E = \frac{\alpha^2 \mu}{2L^2} \left(\epsilon^2 - 1\right) = \left(1 - \epsilon^2\right) \Phi_{min} .$$

Из этого соотношения следует, что при $0 \le \epsilon < 1$ энергия частицы удовлетворяет неравенству $\Phi_{min} \le E < 0$ и ее движение финитно, а при $\epsilon \ge 1$ энергия неотрицательна ($E \ge 0$) и движение частицы инфинитно.

8.5. Второй закон Кеплера

Пусть за время t радиус-вектор частицы "заметает" площадь $S(t)$. При этом за время dt он будет "заметать" площадь dS, которая суть площадь треугольника, образованного радиус-векторами $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}(t+dt)$ частицы и бесконечно малым участком траектории (рис. 8.5). Из рисунка видно, что

$$dS = \frac{1}{2}\, r^2\, d\varphi\,.$$

Разделив обе части этого равенства на dt, с учетом (8.14) найдем производную от функции $S = S(t)$ по времени t

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\, r^2\, \dot{\varphi} = \frac{L}{2\,\mu} = \text{const}\,, \tag{8.35}$$

которая называется *секториальной скоростью*. Как следует из закона сохранения момента импульса (8.14), секториальная скорость частицы при движении в поле центральной силы со временем не изменяется. При этом площадь, описываемая радиус-вектором $\vec{r}$ за время от t_1 до t_2 будет пропорциональна длительности этого промежутка времени:

$$\Delta S = \frac{L}{2\,\mu}\,(t_2 - t_1)\,,$$

что соответствует второму закону Кеплера.

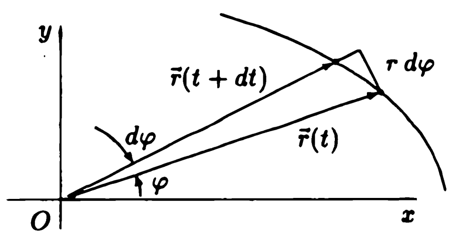

Рис. 8.5. К выводу второго закона Кеплера

8.6. Третий закон Кеплера

Запишем второй закон Ньютона для тела массы m, которое обращается по круговой орбите радиуса a вокруг тела массы $M \gg m$:

$$\frac{m\,v^2}{a} = \frac{\gamma\, m\, M}{a^2}\,.$$

Из этого уравнения найдем скорость тела:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{a}}\,.$$

Период обращения равен отношению длины орбиты к скорости тела:

$$T = \frac{2\pi a}{v}\,.$$

Окончательно получим:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}\,. \tag{8.36}$$

Применяя эту формулу для описания движения планет вокруг Солнца, придем к третьему закону Кеплера.

Формула (8.36) дает возможность вычислить массу Солнца. Используя известные значения периода обращения Земли вокруг Солнца (1 *год*) и расстояния от Земли до Солнца ($a = 1,5 \cdot 10^{11}$ *м* – астрономическая единица), найдем значение массы Солнца по формуле

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma T^2} = 2 \cdot 10^{30}\ \text{кг}\,.$$

8.7. Температура Солнца

Физические формулы обладают замечательным свойством. Иногда с их помощью можно сделать то, что невозможно сделать при помощи измерительных приборов. Например, формулы позволяют "взвесить" Солнце, Землю и другие планеты (т.е. определить их массы), "измерить" давление в центре Земли и вычислить значения других физических величин, которые недоступны прямым измерениям. Покажем, как можно вычислить температуру Солнца.

Солнце – это газовый шар, состоящий главным образом из атомов водорода и гелия. Средняя кинетическая энергия ε одного атома вещества, находящегося в газообразном состоянии, согласно закону Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы пропорциональна абсолютной температуре T:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\,k\,T\,,$$

где коэффициент пропорциональности $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ *Дж*/К называется *постоянной Больцмана*. Если N есть число атомов в газе, то его средняя кинетическая энергия будет равна

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2}\, k\, T\, N\,.$$

Пусть m – средняя масса одного атома солнечного вещества. Тогда число атомов

$$N = \frac{M}{m}\,,$$

где M – масса Солнца.

Среднюю потенциальную энергию шарообразного скопления частиц, притягивающихся друг к другу гравитационными силами, можно оценить по формуле (7.60):

$$\langle W \rangle = -\,\frac{3\,\gamma\, M^2}{5\, R}\,.$$

Применяя теорему (8.25)

$$\langle T \rangle = -\,\frac{1}{2}\,\langle W \rangle\,,$$

придем к уравнению, из которого найдем среднее значение абсолютной температуры Солнца

$$T = \frac{\gamma\, m\, M}{5\, k\, R}\,. \qquad (8.37)$$

Если смотреть на Солнце с Земли, то его радиус будет виден под некоторым углом α, который нетрудно измерить. Так как расстояние a до Солнца известно, его радиус можно вычислить по формуле $R = a\,\sin\alpha$. Вычисления дают значение $R \simeq 7 \cdot 10^8$ *м*. Среднюю массу одного атома солнечного вещества принимают равной примерно удвоенной массе протона, т.е. $m = 3 \cdot 10^{-27}$ *кг*. Подстановка в формулу (8.39) значений известных величин дает среднюю температуру Солнца

$$T \approx 10^7\,\text{K}.$$

ГЛАВА 9
КОЛЕБАНИЯ

9.1. Гармонические колебания

Колебаниями, или *колебательным процессом* называются изменения состояния какой-либо системы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени. В зависимости от физической природы системы, в которой протекает колебательный процесс, различают колебания механические, звуковые, электромагнитные и др.

Колебания называются *периодическими*, если в процессе колебаний каждое состояние системы повторяется через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени, по истечении которого система возвращается в исходное состояние, называется *периодом колебаний* T. Говорят, что за период система совершает одно колебание. Число периодических колебаний

$$\nu = \frac{1}{T},$$

совершаемых за единицу времени, называется *частотой колебаний*. Единицей измерения частоты является 1 *герц* (*Гц*), т.е. частота колебаний, период которых равен 1 *с*. Эволюция во времени системы, совершающей периодические колебания, описывается периодической функцией $x = x(t)$, которая по определению такова, что

$$x(t + nT) = x(t),$$

где n – целое число.

Колебания, описываемые функцией

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \alpha),} \tag{9.1}$$

называются *гармоническими*; а система, в которой они происходят, – *гармоническим осциллятором*. Постоянные A, ω и α в формуле (9.1) имеют следующие названия: A – *амплитуда колебаний* ($A > 0$), ω – *циклическая*, или *круговая частота* ($\omega > 0$), α – *начальная фаза*. Функция

$$\varphi = \omega t + \alpha \tag{9.2}$$

называется *фазой колебания.* При $t = 0$ функция (9.2) принимает значение α: $\varphi(0) = \alpha$.

Так как период функции $\cos\varphi$ равен 2π, период функции (9.1) можно определить из условия

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\,, \quad \text{или} \quad \omega\cdot(t+T)+\alpha = \omega\,t+\alpha+2\pi\,.$$

Из этого равенства найдем, что период колебаний и частота связаны соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,. \tag{9.3}$$

График функции (9.1) приведен на рис. 9.1. Поскольку $|\cos\varphi| \le 1$, область значений этой функции определяется неравенствами

$$-A \le x(t) \le A\,.$$

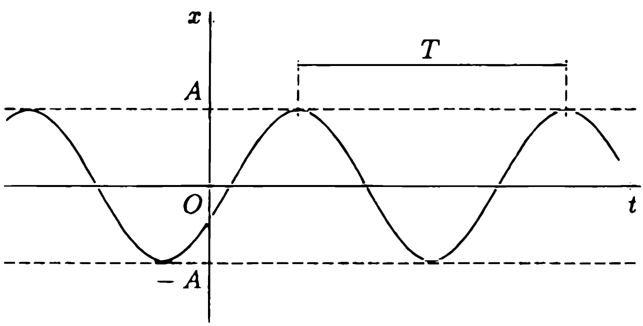

Рис. 9.1. Гармонические колебания

Покажем, что функция (9.1) является общим решением уравнения

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,,} \tag{9.4}$$

которое называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.* Для этого необходимо найти первую, а затем вторую производные функции (9.1), подставить вторую производную и саму функцию в уравнение (9.4) и убедиться в том, что полученное равенство является тождеством. Запишем функцию (9.1) так:

$$x(t) = A\,\cos\varphi(t)\,, \tag{9.5}$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции к этой зависимости, получим:

$$\dot{x} = -A\,\omega\,\sin\varphi\,, \tag{9.6}$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos\varphi \,. \tag{9.7}$$

Подстановка выражений (9.5) и (9.7) в уравнение (9.4) обращает его в тождество. Поскольку функция (9.1) содержит две произвольные постоянные A и α, она является общим решением этого уравнения. Что и требовалось доказать.

Значения постоянных A и α могут быть найдены из начальных условий

$$x(0) = x_o\,, \qquad \dot{x}(0) = v_o\,,$$

которые при помощи зависимостей (9.1) и (9.6) можно преобразовать к виду

$$A\cos\alpha = x_o\,, \qquad -A\omega\sin\alpha = v_o\,.$$

Разрешив эти уравнения относительно амплитуды A и начальной фазы α, придем к формулам

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{v_o}{\omega x_o}\,.$$

Нетрудно убедиться в том, что функция (9.5) и ее производная (9.6) связаны соотношением

$$\boxed{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = A^2\omega^2\,.} \tag{9.8}$$

9.2. Пружинный маятник

В качестве примера системы, совершающей гармонические колебания, рассмотрим тело массы m, которое движется без трения по горизонтальной плоскости под действием упругой силы, создаваемой невесомой пружиной жесткости k (рис. 9.2). Пусть l_o есть длина недеформированной пружины, а l – ее длина в произвольном положении. Деформация пружины характеризуется величиной $\Delta l = l - l_o$, которую называют удлинением пружины. При не очень больших значениях удлинения справедлив закон Гука (3.13):

$$F_x = -k\,x\,, \tag{9.9}$$

здесь F_x есть проекция вектора $\overrightarrow{F}$ силы упругости на ось x, начало отсчета на которой выбрано так, что координата тела x равна удлинению пружины: $x = \Delta l$. Положению равновесия тела, где сила равна нулю, соответствует при таком определении координаты ее значение $x = 0$. При смещении тела вправо от положения равновесия пружина удлиняется и тянет тело влево ($F_x < 0$). Если тело смещается влево от положения равновесия, то пружина сжимается и толкает его вправо ($F_x > 0$). Таким образом, сила упругости всегда направлена к положению равновесия.

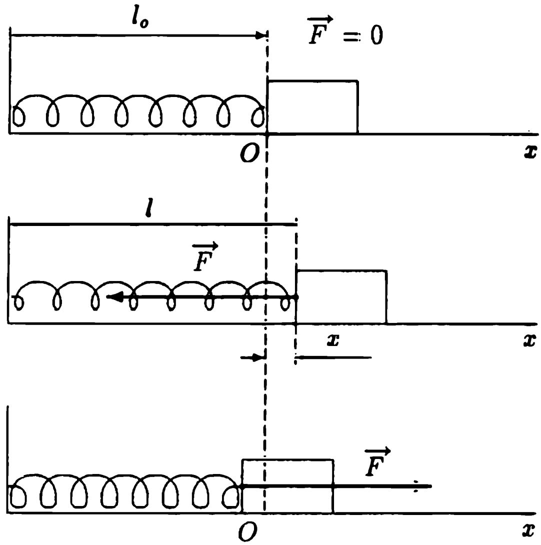

Рис. 9.2. Пружинный маятник

Второй закон Ньютона для рассматриваемого тела выражается уравнением

$$m\ddot{x} = -kx\,, \tag{9.10}$$

которое нетрудно преобразовать к виду

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$

Сравним это уравнение с дифференциальным уравнением (9.4) гармонических колебаний. Приходим к выводу, что они идентичны, если циклическая частота связана с параметрами k и m исследуемой системы соотношением

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{9.11}$$

Из этого следует, что функция (9.1) является решением уравнения (9.10), т.е. тело под действием упругой силы совершает гармонические колебания с частотой (9.11).

В некоторых случаях колебательные системы удобно исследовать при помощи закона сохранения энергии. Сила упругости (9.9) является консервативной, т.е. ее можно представить в виде

$$F_x = -\frac{dU}{dx},$$

где функция

$$U(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \tag{9.12}$$

есть потенциальная энергия деформированной пружины. Так как кроме силы упругости другие силы вдоль оси x на тело не действуют, полная механическая энергия E системы не изменяется с течением времени:

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2 = E = \text{const} . \tag{9.13}$$

Отсюда придем к равенству

$$\dot{x}^2 + \frac{k}{m}\,x^2 = \frac{2\,E}{m},$$

при сравнении которого с равенством (9.8) вновь получим формулу (9.11), а также установим, что

$$\frac{2\,E}{m} = A^2\,\omega^2 . \tag{9.14}$$

Из формулы (9.6) следует, что амплитуда скорости равна

$$v_{max} = A\,\omega . \tag{9.15}$$

Соотношения (9.11), (9.14) и (9.15) приводят к равенствам

$$E = T_{max} = U_{max} ,$$

где

$$T_{max} = \frac{1}{2}\,m\,v_{max}^2 \quad \text{и} \quad U_{max} = \frac{1}{2}\,k\,A^2$$

– максимальные значения кинетической и потенциальной энергий соответственно. Анализируя эти формулы и уравнение (9.13), приходим к следующему заключению. Кинетическая и потенциальная энергии пружинного маятника изменяются в пределах от 0 до E каждая. Причем при движении тела происходит их непрерывное взаимное преобразование, т.е. в то время, как одна из них увеличивается, другая уменьшается; когда одна достигает наибольшего значения, другая обращается в ноль.

9.3. Физический и математический маятники

Исследуем движение абсолютно твердого тела, имеющего возможность только вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис. 9.3). Если центр масс C тела не лежит на оси вращения, то при равновесии тела он будет находиться на вертикальной прямой, проходящей через ось вращения. При повороте тела на некоторый угол θ от положения равновесия сила тяжести будет стремиться вернуть тело в положение равновесия. Вследствие этого тело будет совершать колебания. Такое тело называется *физическим маятником.*

Функцию

$$\theta = \theta(t) \, ,$$

описывающую движение физического маятника, можно найти при помощи основного уравнения вращательного движения (6.8):

$$I \ddot{\theta} = M \, , \qquad (9.16)$$

где I – момент инерции тела относительно неподвижной оси вращения O,

$$M = -m g l \sin\theta \qquad (9.17)$$

– момент силы тяжести, l – расстояние от центра масс C тела до оси вращения. Произведение $l \sin\theta$ есть плечо силы тяжести.

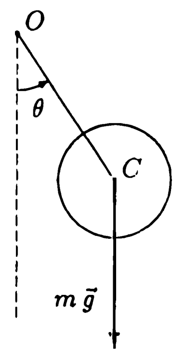

Рис. 9.3. Физический маятник

Колебания маятника называют малыми, когда он отклоняется от положения равновесия на малые углы, т.е. справедливо неравенство

$$|\theta| \ll 1 \, .$$

Можно доказать, что при этом

$$\sin\theta \approx \theta \, .$$

В таком случае уравнение (9.16) можно преобразовать к виду

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \, , \qquad (9.18)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{m g l}{I}} \, . \qquad (9.19)$$

Уравнение (9.18) есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний, общее решение которого можно записать в стандартной форме:

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \alpha) .$$

Таким образом доказано, что малые колебания физического маятника являются гармоническими с частотой ω, определяемой формулой (9.19). Период малых колебаний физического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g l}} . \tag{9.20}$$

Система, представляющая собой небольшое тело, подвешенное на невесомой и нерастяжимой нити, длина l которой много больше размеров тела, называется *математическим маятником*. Такое тело можно рассматривать как материальную точку, момент инерции которой относительно горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса, равен

$$I = m l^2 .$$

Подставив это выражение в формулу (9.20), найдем период малых колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \tag{9.21}$$

Подставив выражение (9.17) в уравнение (9.16) движения физического маятника, запишем это уравнение так:

$$I \ddot{\theta} + m g l \sin\theta = 0 .$$

После умножения на $\dot{\theta}$ и несложных преобразований придем к уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - m g l \cos\theta\right) = 0 .$$

В правильности сделанных преобразований можно убедиться, продифференцировав выражение в круглых скобках по времени. Это выражение есть полная механическая энергия рассматриваемого тела. Полученное уравнение приводит к закону сохранения полной механической энергии физического маятника:

$$\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - m g l \cos\theta = E = \text{const} ,$$

где первое слагаемое в левой части есть кинетическая энергия вращательного движения маятника, а второе – его потенциальная энергия. Когда угол θ принимает наибольшее значение θ_m, угловая скорость $\dot{\theta}$ обращается в ноль. При этом энергия маятника будет

$$E = -\,m\,g\,l\,\cos\theta_m\,.$$

9.4. Крутильные колебания

Твердое тело, подвешенное на упругой нити (или стержне), верхний конец которой закреплен неподвижно, и совершающее вращательное движение вокруг вертикальной оси, называется *крутильным маятником* (рис. 9.4). Колебания такого маятника обусловлены упругими силами, возникающими в нити при ее закручивании. Вращательный момент M, с которым эти силы действуют на тело, пропорционален углу поворота ψ тела из положения равновесия:

$$M = -\,c\,\psi\,, \qquad (9.22)$$

где c – крутильная жесткость нити.

Функцию $\psi = \psi(t)$, которая описывает движение крутильного маятника, найдем из основного уравнения вращательного движения

$$I\,\ddot{\psi} = M\,, \qquad (9.23)$$

где I – момент инерции тела относительно вертикальной оси z, проходящей через его центр масс. Подставим выражение (9.22) в уравнение (9.23) и преобразуем последнее к виду

$$\ddot{\psi} + \frac{c}{I}\,\psi = 0\,.$$

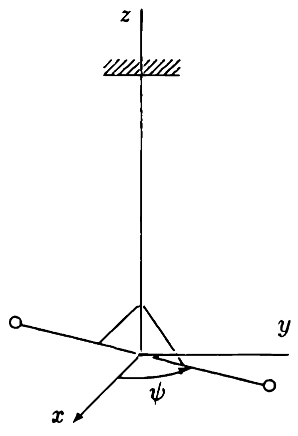

Рис. 9.4. Крутильный маятник

Таким образом, вновь пришли к дифференциальному уравнению гармонических колебаний, в котором коэффициент перед функцией ψ есть квадрат частоты:

$$\omega^2 = \frac{c}{I}\,.$$

Период крутильных колебаний равен

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{I}{c}}\,. \qquad (9.24)$$

9.5. Затухающие колебания

Пусть тело, изображенное на рис. 9.2, движется в вязкой среде. Тогда на него, кроме силы упругости, будет действовать еще и сила сопротивления среды, которая по величине пропорциональна скорости и направлена в противоположную ей сторону:

$$F = -r\,\dot{x}\,. \tag{9.25}$$

Здесь коэффициент пропорциональности r называется *коэффициентом сопротивления* среды, или *коэффициентом трения*.

В таком случае второй закон Ньютона будет иметь вид

$$m\,\ddot{x} = -k\,x - r\,\dot{x}\,. \tag{9.26}$$

Используя обозначения

$$2\,\beta = \frac{r}{m}\,, \qquad \omega_o^2 = \frac{k}{m}\,, \tag{9.27}$$

запишем уравнение (9.26) следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\,\beta\,\dot{x} + \omega_o^2\,x = 0\,. \tag{9.28}$$

Общее решение уравнения (9.28) имеет вид

$$x(t) = a\,e^{-\beta t}\,\cos(\omega\,t + \alpha)\,, \tag{9.29}$$

где частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}\,, \tag{9.30}$$

a и α – постоянные величины. Формула (9.30) имеет смысл при условии, что

$$\omega_o > \beta\,. \tag{9.31}$$

Функция (9.29) описывает так называемые *затухающие колебания*. Убедиться в том, что она является общим решением дифференциального уравнения (9.28), можно следующим образом. Нужно найти производные этой функции и подставить их вместе с функцией в уравнение (9.28). Если при этом уравнение превращается в тождество, то функция (9.29) в самом деле есть общее решение уравнения (9.28), так как оно содержит в себе две произвольные постоянные a и α.

Функция

$$A(t) = a\,e^{-\beta t} \tag{9.32}$$

называется *амплитудой затухающих колебаний*. Это есть монотонно убывающая функция, скорость убывания которой характеризуется *коэффициентом затухания* β. Величина

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

называется *временем релаксации*. За это время амплитуда уменьшается в e раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e\,.$$

График функции (9.29) изображен на рис. 9.6. Верхняя пунктирная кривая представляет собой график зависимости амплитуды (9.32) от времени.

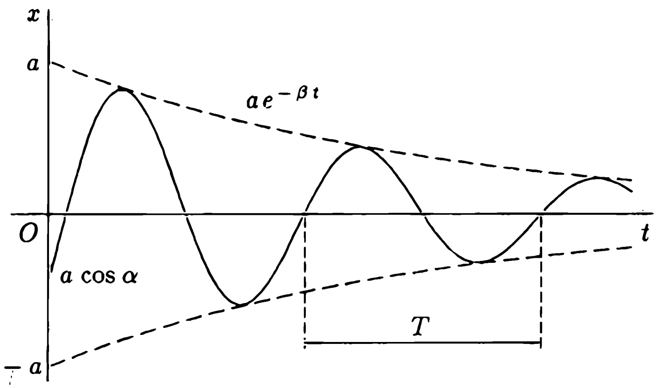

Рис. 9.6. Затухающие колебания

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}} \tag{9.33}$$

зависит от коэффициента затухания β. Чем больше коэффициент затухания, тем больше период колебаний. При $\beta = \omega_o$ период колебаний становится бесконечно большим. Иначе говоря, колебания прекращаются.

Декрементом затухания колебаний называют отношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}\,,$$

а его логарифм

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T \tag{9.34}$$

называют *логарифмическим декрементом затухания.* За время τ система совершает число колебаний

$$N_\tau = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания λ есть величина обратная числу колебаний N_τ, совершаемых за время релаксации τ.

При условии

$$\beta > \omega_o \tag{9.35}$$

общее решение дифференциального уравнения (9.28) будет линейной комбинацией двух экспонент:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{9.36}$$

где C_1 и C_2 – постоянные величины,

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}. \tag{9.37}$$

Движение, описываемое такой функцией, называется *апериодическим.* Ее графики, соответствующие различным начальным условиям, приведены на рис. 9.7.

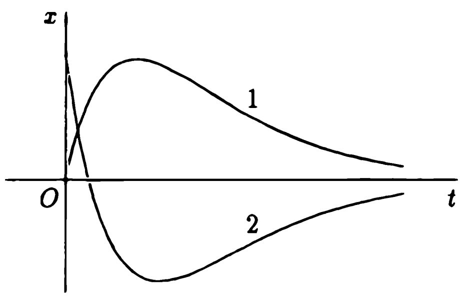

Рис. 9.7. Апериодическое движение

Кривая 1 на рис. 9.7 соответствует начальным условиям:

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_o,$$

которые означают, что тело начинает свое движение в момент времени $t = 0$ из положения равновесия со скоростью v_o. Затем оно отклоняется на некоторое расстояние и возвращается в положение равновесия, не совершив ни одного колебания. Кривая 2 соответствует условиям

$$x(0)=x_o\,,\qquad \dot{x}(0)=-\,v_o\,.$$

В этом случае тело начинает двигаться при $t=0$ из положения, определяемого значением координаты x_o, в направлении к положению равновесия со скоростью v_o; проходит через это положение, не останавливаясь, а затем возвращается в положение равновесия с противоположной стороны.

Исследуем систему, в которой происходят затухающие колебания, при помощи закона сохранения энергии. С этой целью умножим уравнение (9.26) на $\dot{x}$ и преобразуем его к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2+\frac{1}{2}\,k\,x^2\right)=-\,r\,\dot{x}^2\,,$$

или

$$\frac{dE}{dt}=-\,r\,\dot{x}^2<0\,.$$

Правая часть этого уравнения есть мощность силы трения, которая всегда отрицательна. Поэтому полная энергия E маятника убывает со временем. На этом основании можно утверждать, что причиной затухания колебаний являются потери энергии при трении.

9.6. Вынужденные колебания

Пусть на тело, изображенное на рис. 9.2, движется по горизонтальной плоскости без трения под действием силы упругости и периодической силы

$$F=F_o\,\cos\,\Omega\,t\,, \tag{9.38}$$

которая называется *вынуждающей*; F_o и Ω – амплитуда и частота этой силы. Подстановка выражения (9.38) в правую часть уравнения (9.10) приводит к уравнению движения маятника

$$\ddot{x}+\omega^2\,x=f\,\cos\,\Omega t\,, \tag{9.39}$$

где

$$f=\frac{F_o}{m}\,.$$

Общее решение уравнения (9.39) представляет собой сумму двух функций:

$$x(t)=A_{своб}\,\cos\,(\omega\,t+\alpha)+A_{вынужд}\,\cos\,\Omega\,t\,, \tag{9.40}$$

где первое слагаемое описывает *свободные*, или *собственные колебания* маятника, а второе – колебания, которые называют *вынужденными*. Амплитуда $A_{своб}$ и начальная фаза α свободных колебаний могут принимать любые значения в зависимости от начальных условий движения тела. Эти колебания совершаются с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

которая определяется параметрами маятника и называется его собственной частотой. Вынужденные колебания происходят с частотой Ω вынуждающей силы, а их амплитуда $A_{вынужд}$ является некоторой функцией от этой частоты.

Убедиться в том, что функция (9.40) является решением уравнения (9.39), можно при помощи непосредственной подстановки ее в это уравнение. При этом найдем, что амплитуда вынужденных колебаний

$$A_{вынужд} = \frac{f}{|\omega^2 - \Omega^2|}. \tag{9.41}$$

График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты Ω вынуждающей силы показан на рис.9.8.

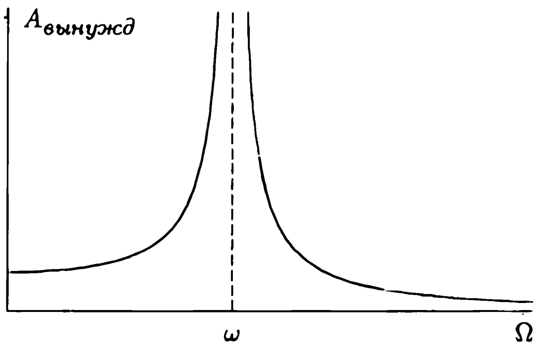

Рис. 9.8. Резонансная кривая

Как видно из этого рисунка, чем ближе частота Ω к частоте ω свободных колебаний маятника, тем больше амплитуда вынужденных колебаний. Когда $\Omega \to \omega$, амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности. В действительности амплитуда вынужденных колебаний не бывает бесконечно большой. Однако иногда она достигает таких больших значений, что механическая система, в которой происходят вынужденные колебания, разрушается. Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний, когда частота вынуждающей силы приближается к частоте свободных колебаний маятника, называется *резонансом*.

9.7. Сложение колебаний. Векторные диаграммы

Пусть некоторая физическая величина изменяется со временем так, что это изменение описывается суммой функций

$$x = x_1(t) + x_2(t)\,, \tag{9.42}$$

где

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)\,, \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)\,. \tag{9.43}$$

В таком случае величина (9.42) называется *суммой однонаправленных гармонических колебаний* одинаковой частоты. Покажем, что эта сумма также является гармоническим колебанием той же частоты.

Для этого, применяя тригонометрическое тождество

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta\,, \tag{9.44}$$

преобразуем выражение (9.42) следующим образом:

$$x = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) =$$

$$= A_1(\cos\omega t \cos\alpha_1 - \sin\omega t \sin\alpha_1) + A_2(\cos\omega t \cos\alpha_2 - \sin\omega t \sin\alpha_2) =$$

$$= A(\cos\omega t \cos\alpha - \sin\omega t \sin\alpha)\,, \tag{9.45}$$

где

$$\begin{aligned} A \cos\alpha &= A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2\,, \\ A \sin\alpha &= A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2\,. \end{aligned} \tag{9.46}$$

Возведем каждое из уравнений (9.46) в квадрат и сложим полученные равенства. В результате придем к соотношению

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2)\,.$$

Так как выражение в круглых скобках есть $\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$, будем иметь

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\,. \tag{9.47}$$

Разделим второе из уравнений (9.45) на первое. Получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}\,. \tag{9.48}$$

При помощи тригонометрического тождества (9.44) выражение (9.45) можно записать так:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)\,. \tag{9.49}$$

Таким образом, доказано, что сумма гармонических колебаний частоты ω есть также гармоническое колебание, амплитуда A и начальная фаза α которого определяются формулами (9.47) и (9.48).

При сложении трех и более гармонических колебаний удобно применять графический метод. Суть этого метода заключается в том, что функцию

$$x(t) = A\cos\varphi(t)\,,$$

описывающую гармонические колебания, можно рассматривать как проекцию на ось x вращающегося в плоскости xy вокруг начала координат вектора $\vec{A}$, длина которого равна амплитуде A, а угол между этим вектором и осью x – фазе $\varphi(t) = \omega t + \alpha$ колебаний (рис. 9.9). При этом угловая скорость вращения вектора $\vec{A}$ будет равна частоте колебаний ω.

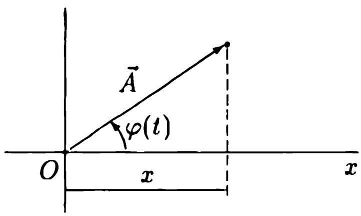

Рис. 9.9. Проекция на ось x вращающегося вектора совершает гармонические колебания

Проекция суммы векторов $\vec{A}_i$ $(i = 1,\,2,\,3,\,\ldots)$ на ось x равна сумме проекций x_i каждого из этих векторов:

$$\Big(\sum_i \vec{A}_i\Big)_x = \sum_i x_i\,.$$

На этом равенстве основана следующая процедура вычисления суммы колебаний

$$x(t) = \sum_i x_i(t)\,,$$

где

$$x_i(t) = A_i\cos(\omega_i t + \alpha_i)\,.$$

Для того чтобы вычислить эту сумму при помощи метода векторных диаграмм, необходимо: 1) построить векторы $\vec{A}_i$, представляющие слагаемые колебания $x_i(t)$, 2) найти графически сумму

$$\vec{A} = \sum_i \vec{A}_i$$

этих векторов и 3) спроецировать полученный вектор $\vec{A}$ на ось x. Эта проекция и будет искомой функцией $x = x(t)$.

Если все слагаемые колебания имеют одну и ту же частоту ω, то фазы

$$\varphi_i(t) = \omega\, t + \alpha_i$$

этих колебаний будут отличаться друг от друга только начальными значениями α_i, а все векторы $\vec{A}_i$ будут вращаться с одной скоростью ω. Поэтому суммарный вектор $\vec{A}$ также будет вращаться с той же скоростью, т.е. суммарное колебание будет иметь ту же частоту ω. В таком случае остается только найти амплитуду A и начальную фазу α суммарного колебания. Для этого достаточно изобразить векторы $\vec{A}_i$ только для момента времени $t = 0$, сложить их, найти модуль A вектора суммы и угол α, который он образует с осью x. Затем остается записать суммарное колебание в виде (9.75).

П р и м е р. Для того чтобы сложить три гармонических колебания

$$x_1 = a\, \cos\left(\omega\, t + \pi\right), \quad x_2 = 2\, a\, \cos\left(\omega\, t + \frac{\pi}{2}\right), \quad x_3 = \sqrt{2}\, a\, \cos\left(\omega\, t - \frac{\pi}{4}\right),$$

построим векторы $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ и $\vec{A}_3$, представляющие эти колебания при $t = 0$ и найдем их сумму $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$ (рис. 9.10). Как видно, модуль вектора $\vec{A}$ равен a, а начальная фаза – $\pi/2$. Таким образом, суммарное колебание будет иметь вид

$$x(t) = a\, \cos\left(\omega\, t + \frac{\pi}{2}\right).$$

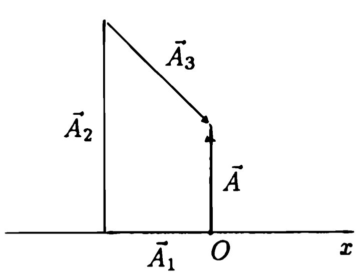

Рис. 9.10. Векторная диаграмма

Сложим теперь два гармонических колебания

$$x_1 = a \cos \omega_1 t \quad \text{и} \quad x_2 = a \cos \omega_2 t\,,$$

которые имеют одинаковые амплитуды, но различные частоты. Применим тригонометрическое тождество

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,.$$

Найдем, что

$$x(t) = x_1 + x_2 = 2\,a\,\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)\,t}{2}\cdot\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)\,t}{2}\,. \tag{9.50}$$

Так как функция $\cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\,t\right)$ изменяется медленнее, чем функция $\cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\,t\right)$, зависимость (9.50) можно рассматривать как "гармоническое" колебание частоты $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$ с переменной амплитудой

$$A(t) = 2\,a\left|\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)\,t}{2}\right|\,.$$

График зависимости (9.50) представлен на рис. 9.11. Такие колебания называют *биениями*.

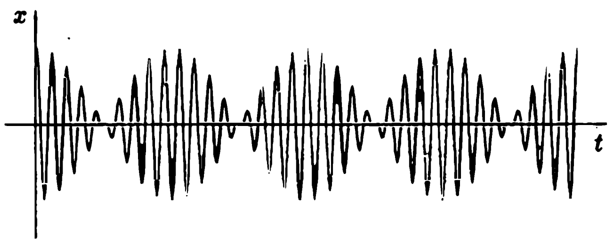

Рис. 9.11. Биения

Движение точки на плоскости описывается двумя функциями: $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Когда эти функции представляют собой гармонические колебания

$$x = a\,\cos(\omega_1 t + \alpha_1)\,, \qquad y = b\,\cos(\omega_2 t + \alpha_2)\,, \tag{9.51}$$

говорят о сложении взаимно перпендикулярных колебаний.

Соотношения (9.51) есть записанные в параметрической форме уравнения кривой на плоскости. Когда отношение частот ω_1 и ω_2 есть рациональное число, т.е. может быть представлено в виде дроби

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}\,,$$

где n_1 и n_2 – целые числа, такие кривые называются *фигурами Лиссажу*. Эти фигуры заключены в прямоугольнике, определяемом неравенствами

$$-a \le x \le a \quad \text{и} \quad -b \le y \le b$$

Рассмотрим простейшие из фигур Лиссажу.

1. Положим в формулах (9.51)

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha\,.$$

Получим:

$$x = a\,\cos(\omega t + \alpha)\,, \qquad y = b\,\cos(\omega t + \alpha)\,. \tag{9.52}$$

Нетрудно видеть, что при этом

$$y = \frac{b}{a}\,x\,.$$

Таким образом, функции (9.52) описывают колебательное движение точки на плоскости xy, траекторией которого является отрезок прямой, проходящей через начало координат (рис. 9.12).

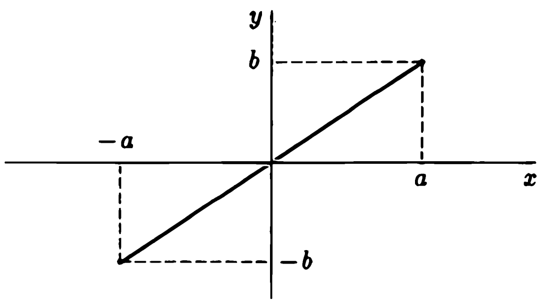

Рис. 9.12. Фигура Лиссажу

2. Пусть

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega\,, \qquad \alpha_1 = \alpha \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \alpha \pm \frac{\pi}{2}\,.$$

В этом случае функции (9.51) принимают вид

$$x = a\,\cos(\omega\,t + \alpha)\,, \qquad y = \mp b\,\sin(\omega\,t + \alpha)\,. \tag{9.53}$$

Используя основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,,$$

придем к уравнению эллипса (рис. 9.13):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

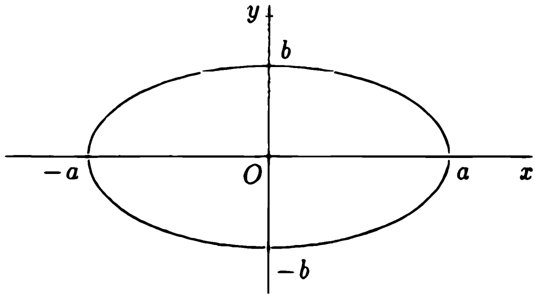

Рис. 9.13. Фигура Лиссажу

3. Наконец, рассмотрим случай, когда

$$\omega_1 = \omega\,, \qquad \omega_2 = 2\,\omega\,, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 0\,.$$

При этом функции (9.51) превращаются в

$$x = a\,\cos\,\omega t\,, \qquad y = b\,\cos\,2\,\omega t\,. \tag{9.54}$$

Применяя тригонометрическое тождество

$$\cos\,2\varphi = 2\,\cos\varphi - 1\,,$$

придем к уравнению траектории

$$y = b\,\left(\frac{2\,x^2}{a^2} - 1\right)\,.$$

В этом случае точка совершает колебательное движение, перемещаясь в плоскости xy по параболе (рис. 9.14) из точки A в точку B и обратно.

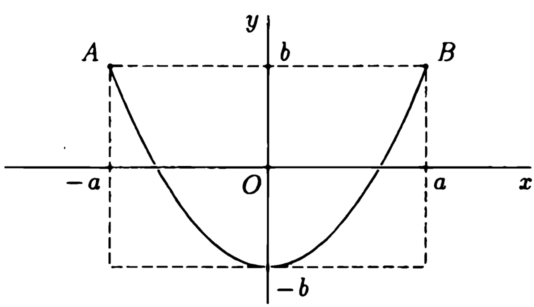

Рис. 9.14. Фигура Лиссажу

ГЛАВА 9*
КОЛЕБАНИЯ
(продолжение)

9.8. Оборотный маятник

Приведенной длиной физического маятника называют величину

$$l_{np} = \frac{I}{m\,l}\,, \tag{9.55}$$

где I – момент инерции маятника, l – расстояние от оси вращения до центра масс. Используя эту величину, формулу (9.20) для периода колебаний физического маятника можно записать так:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l_{np}}{g}}\,. \tag{9.56}$$

Эта формула по виду напоминает формулу (9.21) для периода колебаний математического маятника.

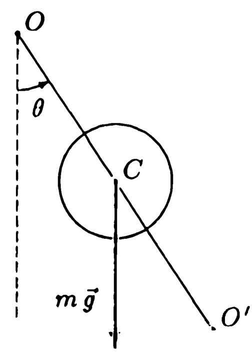

Рис. 9.15. Центр качания. Оборотный маятник

Проведем через центр масс C прямую OC, перпендикулярную к оси вращения O физического маятника (рис. 9.3). Точка O' на этой прямой, лежащая на расстоянии приведенной длины l_{np} от оси вращения, называется *центром качания* физического маятника.

По формуле (9.20) найдем период T' колебаний маятника для случая, когда он вращается вокруг оси, проходящей через его центр качания параллельно прежней оси вращения:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{m\,g\,l'}}\,, \tag{9.57}$$

где I' – момент инерции маятника относительно новой оси вращения, l' – расстояние от центра масс до этой оси. Как видно из рис. 9.15, сумма расстояний l и l' равна приведенной длине маятника:

$$l + l' = l_{np}\,. \tag{9.58}$$

В силу теоремы Штейнера справедливы следующие соотношения:

$$I = I_C + m\,l^2\,, \qquad I' = I_C + m\,l'^2\,, \tag{9.59}$$

где I_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс. Используя равенства (9.58) и (9.59), нетрудно доказать справедливость соотношения

$$\frac{I'}{l'} = \frac{I}{l}\,,$$

из которого следует, что периоды (9.20) и (9.57) равны между собой:

$$T = T'\,. \tag{9.60}$$

Таким образом, доказано, что центр качания маятника обладает свойством: ***период колебаний физического маятника не изменяется, если новая ось вращения проходит через его центр качания.*** Это свойство используют для измерения ускорения свободного падения g методом *оборотного маятника*. Так называют физический маятник, для которого с достаточно высокой точностью измерены его приведенная длина и период колебаний. В этих измерениях используют соотношения (9.58) и (9.60). Затем из формулы (9.56) находят ускорение свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2\,l_{np}}{T^2}\,.$$

9.9. Комплексные числа

Мнимой единицей называют величину i, квадрат которой равен -1:

$$i^2 = -1\,. \tag{9.61}$$

Выражение

$$z = x + i\,y\,, \tag{9.62}$$

где x и y – действительные числа, называется *комплексным числом.* При этом число x называется *действительной*, или *вещественной частью* комплексного числа z и обозначается как

$$x = \mathrm{Re}\; z\,,$$

а число y – *мнимой частью* числа z и обозначается так:

$$y = \mathrm{Im}\; z\,.$$

Для более полного представления о комплексных числах и понимания производимых над ними алгебраических операций комплексному числу дают следующую геометрическую интерпретацию. Числа x и y рассматривают как декартовы координаты точки на плоскости xy (рис. 9.16). Так что комплексное число (9.60) соответствует точке, имеющей координаты x и y. Поэтому говорят, что точка на плоскости изображает некоторое комплексное число. Например, мнимая единица изображается точкой с координатами $x = 0$ и $y = 1$, которая лежит на оси y. При $x = 0$ комплексное число $z = i\,y$ называется *чисто мнимым.* Точки, изображающие такие числа, также лежат на оси y. Все точки оси x изображают действительные числа. Поэтому ось абсцисс называется *действительной* осью, а ось ординат – *мнимой.*

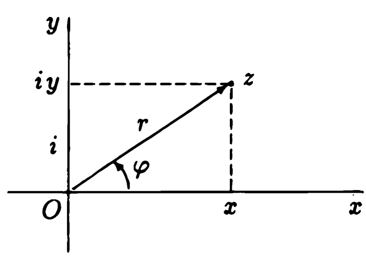

Рис. 9.16. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Комплексное число $z = x + i\,y$ можно также представить вектором на плоскости, который соединяет начало координат с точкой $(x,\ y)$. Длина r

этого вектора называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$. Угол φ, который вектор z образует с осью x, называется *аргументом* комплексного числа. Декартовы координаты точки на плоскости связаны с r и φ соотношениями

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \tag{9.63}$$

при помощи которых формулу (9.62) можно записать в виде

$$z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,. \tag{9.64}$$

Это выражение называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Очевидно, что

$$|z| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,. \tag{9.65}$$

Показательная функция $e^{i\varphi}$ мнимого аргумента $i\varphi$ определяется *формулой Эйлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi\,. \tag{9.66}$$

Это определение позволяет записать комплексное число (9.64) в так называемой *показательной форме*:

$$z = r\,e^{i\varphi}\,. \tag{9.67}$$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ равны друг другу, если они изображаются одной и той же точкой на плоскости. При этом равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$; или равны их модули, а аргументы отличаются один от другого на $2\pi n$, где n – целое число: $r_1 = r_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n$.

Комплексное число

$$z^* = x - i\,y \tag{9.68}$$

называется *комплексно сопряженным* числу $z = x + i\,y$. Очевидно, что сумма

$$z + z^* = 2\,x$$

есть действительное число, а разность

$$z - z^* = 2\,i\,y$$

есть число чисто мнимое. Из последнего равенства следует, что число z будет действительным при условии

$$z^* = z\,. \tag{9.69}$$

Нетрудно также доказать, что

$$z^* z = |z|^2 . \tag{9.70}$$

9.10. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Расмотрим один из методов решения уравнения затухающих колебаний (9.28)

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0 . \tag{9.71}$$

В теории дифференциальных уравнений это уравнение называют *линейным*, так как его левая часть представляет собой линейную комбинацию функции $x(t)$ и ее производных $\dot{x}$ и $\ddot{x}$. Нетрудно доказать, что функция

$$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) , \tag{9.72}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, является решением уравнения (9.71), если его решениями являются функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Для этого просто следует подставить выражение (9.72) в уравнение (9.71).

Будем искать решение уравнения (9.71) в виде

$$x(t) = e^{\lambda t} . \tag{9.73}$$

Производные этой функции равны

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \qquad \text{и} \qquad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t} . \tag{9.74}$$

Подставив выражения (9.73) и (9.74) в (9.71), получим так называемое *характеристическое уравнение*

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_o^2 = 0 . \tag{9.75}$$

Это квадратное уравнение при условии

$$\omega_o > \beta \tag{9.76}$$

имеет комплексные корни

$$\lambda_1 = -\beta - i\omega , \qquad \lambda_2 = -\beta + i\omega , \tag{9.77}$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} . \tag{9.78}$$

Функции

$$x_1 = e^{\lambda_1 t} \qquad \text{и} \qquad x_2 = e^{\lambda_2 t}$$

суть линейно независимые решения уравнения (9.71), т.е. ни одну из них нельзя выразить через другую. Поэтому их линейная комбинация (9.72) есть общее решение этого уравнения:

$$x = e^{-\beta t}\left(C_1\, e^{-i\omega t} + C_2\, e^{i\omega t}\right). \tag{9.79}$$

Любая имеющая физический смысл величина может быть только действительной. В частности, это относится к рассматриваемой величине x. Поэтому выражение в круглых скобках должно быть действительным, т.е. должно удовлетворять условию (9.69):

$$C_1^*\, e^{i\omega t} + C_2^*\, e^{-i\omega t} = C_1\, e^{-i\omega t} + C_2\, e^{i\omega t},$$

которое выполняется для любого t, если

$$C_2 = C_1^*. \tag{9.80}$$

Представим число C_1 в показательной форме:

$$C_1 = \frac{1}{2}\, a\, e^{-i\alpha} \tag{9.81}$$

где a и α – действительные числа. При этом число C_2 согласно формуле (9.80) будет

$$C_2 = \frac{1}{2}\, a\, e^{i\alpha}. \tag{9.82}$$

Подставим числа (9.81) и (9.82) в формулу (9.79). Полученное выражение

$$x = \frac{1}{2}\, a\, e^{-\beta t}\left(e^{-i(\omega t+\alpha)} + e^{i(\omega t+\alpha)}\right)$$

преобразуем при помощи формулы Эйлера (9.66). В результате придем к функции

$$x = a\, e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha), \tag{9.83}$$

которая описывает *затухающие колебания* и является общим решением дифференциального уравнения (9.71).

При условии

$$\beta > \omega_o \tag{9.84}$$

корни характеристического уравнения (9.75) есть действительные отрицательные числа λ_1 и λ_2:

$$\lambda_{1,\,2} = -\,\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}, \tag{9.85}$$

а общее решение дифференциального уравнения (9.71) будет линейной комбинацией двух экспонент:

$$x = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t}. \tag{9.86}$$

Эта функция описывает апериодическое движение маятника.

9.11. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение

Пусть на тело (рис. 9.2), кроме сил упругости и вязкого трения, действует еще периодическая вынуждающая сила

$$F = F_o \cos \Omega t \, .$$

Подстановка этой силы в правую часть уравнения (9.26) приводит к уравнению движения маятника

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = f \cos \Omega t \, , \tag{9.87}$$

где

$$f = \frac{F_o}{m} \, .$$

Линейное дифференциальное уравнение называют неоднородным, если его правая часть не равна нулю. Общее решение линейного неоднородного уравнения (9.87) равно сумме

$$x(t) = x_{своб}(t) + x_{вынужд}(t) \, , \tag{9.88}$$

где функция $x = x_{своб}(t)$ есть общее решение однородного уравнения (9.71), а функция $x = x_{вынужд}(t)$ – частное решение уравнения (9.87). Функция $x = x_{своб}(t)$ описывает свободные колебания маятника, а функция $x = x_{вынужд}(t)$ – вынужденные.

Чтобы найти частное решение уравнения (9.87), применим следующий метод. Запишем дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_o^2 y = f \sin \Omega t$$

для некоторой функции $y = y(t)$. Умножив это уравнение на мнимую единицу i и сложив его с уравнением (9.87), получим при помощи формулы Эйлера уравнение

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_o^2 z = f e^{i\Omega t} \tag{9.89}$$

для комплексной функции

$$z = z(t) = x(t) + i\, y(t) \, ,$$

действительная часть которой есть искомая функция:

$$x_{вынужд}(t) = \mathrm{Re}\; z(t) \, . \tag{9.90}$$

Решение уравнения (9.89) будем искать в виде

$$z(t) = z_o\, e^{i\Omega t}\,, \tag{9.91}$$

где z_o – постоянная величина. Подставив эту функцию вместе с ее производными

$$\dot{z} = z_o\, i\,\Omega\, e^{i\Omega t} \qquad \text{и} \qquad \ddot{z} = -\, z_o\, \Omega^2\, e^{i\Omega t}$$

в уравнение (9.89), придем к алгебраическому уравнению

$$\left(-\,\Omega^2 + 2\,i\,\beta\,\Omega + \omega_o^2\right)\, z_o = f\,.$$

Представим комплексное число, стоящее в круглых скобках, в показательной форме:

$$\omega_o^2 - \Omega^2 + 2\,i\,\beta\,\Omega = \sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\beta^2\,\Omega^2}\; e^{-i\varphi}\,,$$

где аргумент

$$\varphi = -\ \mathrm{arctg}\ \frac{2\,\beta\,\Omega}{\omega_o^2 - \Omega^2}\,.$$

Используя полученные соотношения, запишем функцию (9.91) так:

$$z(t) = \frac{f\, e^{i(\Omega t+\varphi)}}{\sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\beta^2\,\Omega^2}}\,.$$

Отсюда по формуле (9.90) найдем функцию, описывающую вынужденные колебания:

$$x_{\text{вынужд}}(t) = A\,\cos(\Omega\, t + \varphi)\,, \tag{9.92}$$

где

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\beta^2\,\Omega^2}} \tag{9.93}$$

– амплитуда вынужденных колебаний.

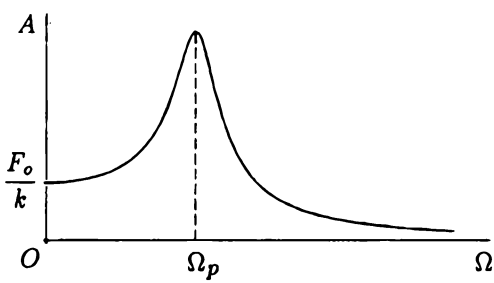

Рис. 9.17. Резонансная кривая

Как видно из формулы (9.92), вынужденные колебания происходят с частотой Ω вынуждающей силы. При этом согласно формуле (9.93) их амплитуда A является функцией от этой частоты. График зависимости $A = A(\Omega)$ приведен на рис. 9.8. Подобного вида кривые называются резонансными.

Амплитуда вынужденных колебаний принимает наибольшее значение при частоте $\Omega = \Omega_p$, которая называется *резонансной*. Эту частоту можно найти из условия экстремума функции

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0\,.$$

Продифференцировав функцию (9.93), придем к уравнению

$$-4\,(\omega_o^2 - \Omega^2)\,\Omega + 8\,\beta^2\,\Omega = 0\,,$$

из которого найдем, что резонансная частота

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_o^2 - 2\,\beta^2}\,. \tag{9.94}$$

Подставив это значение частоты в формулу (9.93), получим выражение для наибольшего значения амплитуды вынужденных колебаний:

$$A_p = \frac{f}{2\,\beta\,\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}\,. \tag{9.95}$$

Из этой формулы следует, что амплитуда A_p вынужденных колебаний резонансной частоты тем больше, чем меньше коэффициент затухания β. Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний, когда частота вынуждающей силы приближается к резонансной частоте, называется *резонансом*.

ГЛАВА 10

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

10.1. Принцип относительности

Сформулированный в разделе 3.3 принцип относительности Галилея касается только механических движений. Опыт показывает, что этот принцип можно обобщить на все природные явления.

Для математического описания какого-либо явления необходимо выбрать некоторую систему отсчета. Затем, используя определенные при помощи выбранной системы отсчета координаты x, y, z и время t, необходимо записать уравнения, выражающие физический закон, которому подчиняется исследуемое явление. Наиболее простой вид эти уравнения имеют, когда исследования производят в инерциальной системе отсчета. Согласно обобщенному принципу относительности *вид уравнений, выражающих какой-либо закон природы, не зависит от выбора той или иной инерциальной системы отсчета.* Иначе говоря, все инерциальные системы отсчета равноправны.

В частности, принцип относительности можно применить к электромагнитным явлениям. Для описания электромагниного поля также необходимо выбрать некоторую систему отсчета (желательно инерциальную) и записать с ее помощью уравнения, выражающие законы электромагнетизма. Согласно принципу относительности форма этих уравнений не должна зависеть от выбора инерциальной системы отсчета. Записанные в системе единиц измерения СИ, эти уравнения содержат в себе две абсолютные постоянные: диэлектрическую ε_o и магнитную μ_o проницаемости вакуума.

Экспериментально и теоретически установлено, что свет есть электромагнитные волны. В пустом пространстве свет распространяется со скоростью

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} \tag{10.1}$$

относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Из принципа относительности следует, что скорость света в вакууме относительно любой инерциальной системы отсчета должна иметь одно и то же значение. Это утверждение называется *принципом постоянства скорости света.* Многочисленные измерения, а также расчеты по формуле (10.1), дают следующее значение скорости света в пустоте:

$$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' (рис. 10.1). Пусть относительно одной из них свет распространяется вдоль оси x со скоростью c. Тогда, если справедливы преобразования Галилея, относительно другой системы отсчета согласно формулам (3.8) скорость распространения света вдоль оси x будет равна $c - V$ или $c + V$ в зависимости от направления, в котором распространяется свет. Как видно, существует некоторое несоответствие между преобразованиями Галилея и принципом постоянства скорости света. Для того чтобы выяснить причины этого несоответствия необходимо пересмотреть ньютоновские представления о пространстве и времени.

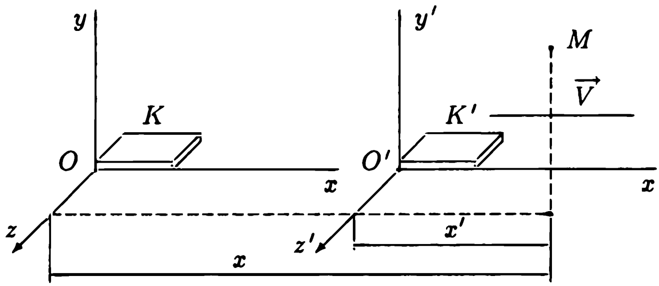

Рис. 10.1. Две инерциальные системы отсчета

10.2. Пространство-время Минковского

Любое действительное событие, когда-либо произошедшее в каком-нибудь месте материального мира, занимало некоторую протяженную область пространства и имело определенную длительность, т.е. протекало в течение некоторого промежутка времени. Основным понятием в теории относительности является *точечное событие*, т.е. такое событие размерами и длительностью которого можно пренебречь. При этом действительные события можно рассматривать как совокупность точечных событий. Все события во Вселенной, которые когда-либо происходили или будут происходить, образуют пространственно-временное многообразие. Это многообразие всех событий называется *пространством-временем*, или *пространством Минковского* (Герман Минковский (1864 – 1909) – немецкий ученый).

Для определения точечного события необходимо указать его место и время, т.е. задать его координаты относительно некоторой системы отсчета и момент времени, когда оно произошло или произойдет. Другими словами, для определения точки в пространственно-временном многообразии необходимо задать четыре величины: x, y, z и t. Поэтому пространственно-временное многообразие называется *четырехмерным*.

Каждой точке A пространственно-временного многообразия, т.е. каждому точечному событию поставим в соответствие четверку чисел: x, y, z и t. Эти величины не имеют физического смысла и являются просто "номерами" пространственно-временных точек до тех пор, пока не определены физические операции, при помощи которых каждому точечному событию можно приписать три пространственные координаты x, y, z и момент времени t. Иначе говоря, должен быть указан способ измерения этих величин.

Для измерения координат и времени какого-либо события в распоряжении физика-экспериментатора, производящего такие измерения, должны находиться определенные приборы и измерительные инструменты. Все это оборудование называется обобщенно *системой отсчета*, а работающий на этом оборудовании экспериментатор – *наблюдателем*, находящимся в данной системе отсчета. Основными приборами из имеющегося в распоряжении наблюдателя оборудования являются жесткие стержни, посредством которых строится декартова прямоугольная система координат, и часы. Однако при помощи линеек и часов наблюдатель может определить координаты и время только тех событий, которые происходят в непосредственной близости от него. Поэтому время τ, отсчитываемое часами данного наблюдателя, называется *местным временем*, или *собственным временем наблюдателя*.

Для определения координат и времени удаленных от наблюдателя событий удобно применить радиолокационный метод. Пусть в распоряжении наблюдателя имеются источник и приемник световых сигналов. Иногда для краткости вместо слов "световой сигнал" как синоним употребляется слово *фотон*. Наблюдатель посылает короткие световые сигналы в направлении места, в котором происходят интересующие его события. Для того, чтобы наблюдатель мог получать информацию с места событий, там должен находиться отражатель, сразу же возвращающий назад падающий на него световой сигнал. Наблюдатель по своим часам отмечает момент времени τ_1 отправления светового сигнала и момент времени τ_2 приема соответствующего ему отраженного сигнала. Используя значения τ_1 и τ_2 собственного времени, событию, которое произошло в момент отражения светового сигнала, можно приписать следующие значения расстояния r до наблюдателя и времени t:

$$r = \frac{1}{2}\, c\,(\tau_2 - \tau_1)\,, \tag{10.2}$$

$$t = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) \equiv \tau_1 + \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1). \tag{10.3}$$

Формула (10.2) дает наиболее простое и естественное определение расстояния r от наблюдателя до наблюдаемого им события A. В самом деле, если время распространения светового сигнала к месту события и обратно равно

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 ,$$

то естественно определить пройденное светом за это время расстояние как

$$2r = c\,\Delta\tau .$$

Из этого определения вытекает формула (10.2). Формула (10.3) служит определением одновременности двух событий. Согласно этой формуле событие P произошло, когда часы наблюдателя показывали время

$$t = \tau_1 + \frac{1}{2}\Delta\tau ,$$

т.е. одновременно с событием, которое произошло в непосредственной близости от наблюдателя в этот момент времени. Следует отдавать себе отчет в том, что понятие одновременности двух событий не является очевидным и не подлежащим определению, как это считалось в ньютоновской механике, а является всего лишь предметом соглашения.

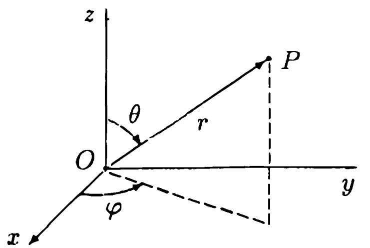

Рис. 10.2. Сферические координаты

Если наблюдатель измеряет также углы θ и φ, задающие направление, в котором был послан световой сигнал (рис. 10.2), то он может определить координаты точки P, где произошло событие A, по формулам

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta. \tag{10.4}$$

Таким образом, измеряя величины θ, φ, τ_1 и τ_2, наблюдатель может в принципе любому событию поставить в соответствие по формулам (10.2) – (10.4) четверку чисел x, y, z и t. Отметим, что координаты x, y, z, определяемые формулами (10.4), удовлетворяют соотношению

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 , \tag{10.5}$$

которое при $r = \mathrm{const}$ есть уравнение сферы радиуса r с центром в начале координат.

10.3. Преобразования Лоренца

Два наблюдателя, находящихся в различных инерциальных системах отсчета K и K', будут приписывать одному и тому же событию A, вообще говоря, различные значения координат и времени даже в том случае, когда они используют абсолютно одинаковые измерительные приборы и применяют одни и те же методы измерений. Координаты и время события A, измеренные наблюдателем в системе K, обозначим x, y, z и t; а координаты и время того же события, измеренные наблюдателем в системе K', – x', y', z' и t'. Пусть система отсчета K' движется вдоль оси x со скоростью V относительно системы отсчета K (рис. 10.1). На основе принципа постоянства скорости света можно получить соотношения, которые связывают координаты и время одного и того же события, измеренные различными наблюдателями:

$$x = \gamma\,(x' + V\,t')\,, \quad y = y', \quad z = z'\,, \quad t = \gamma\left(\frac{V\,x'}{c^2} + t'\right)\,, \tag{10.6}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\,. \tag{10.7}$$

Впервые эти соотношения были получены Лоренцем (Хендрик Лоренц (1853 – 1928) – нидерландский физик-теоретик) и называются *преобразованиями Лоренца*. Эти формулы описывают переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Если разрешить равенства (10.6) относительно координат и времени события A, измеряемых наблюдателем в системе отсчета K', то получим зависимости

$$x' = \gamma\,(x - V\,t)\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad t' = \gamma\left(-\,\frac{V\,x}{c^2} + t\right)\,, \tag{10.8}$$

которые, как и следовало ожидать, в силу равноправности инерциальных систем отсчета K и K' отличаются от зависимостей (10.6) только знаком перед скоростью V.

Как видно из формулы (10.7), скорость V относительного движения систем отсчета может быть только меньше скорости света c, так как в противном случае коэффициент γ становится мнимым (если $V > c$) или обращается в бесконечность (если $V = c$) и преобразования Лоренца теряют смысл. В случае, когда $V \ll c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Чтобы в этом убедиться, достаточно в формулах (10.6) совершить предельный переход при $c \to \infty$.

Зная формулы преобразования координат и времени произвольного события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, можно более строго сформулировать *обобщенный принцип относительности: уравнения, выражающие законы природы, должны быть инвариантны (или ковариантны) относительно преобразований Лоренца, т.е. их вид не должен изменяться при этих преобразованиях.*

10.4. Преобразования скоростей

Пусть движение одной и той же частицы исследуют одновременно два наблюдателя, находящихся в различных инерциальных системах отсчета K и K'. Относительно системы отсчета K движение частицы описывается векторной функцией $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а относительно системы K' – функцией $\vec{r}\,' = \vec{r}\,'(t')$. Соответственно скорости $\vec{v}$ и $\vec{v}\,'$ этой частицы относительно систем отсчета K и K' будут

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{и} \qquad \vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} .$$

Проекции этих векторов на оси координат равны

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{10.9}$$

и

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \qquad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \qquad v'_z = \frac{dz'}{dt'} . \tag{10.10}$$

Бесконечно малые приращения функций (10.6) имеют вид

$$dx = \gamma\,(dx' + V\,dt'), \qquad dy = dy', \qquad dz = dz',$$

$$dt = \gamma\left(\frac{V}{c^2}\,dx' + dt'\right) . \tag{10.11}$$

Подставив дифференциалы (10.11) в формулы (10.9), с учетом (10.10) получим:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \dfrac{V\,v'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{V\,v'_x}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \dfrac{V\,v'_x}{c^2}\right)} . \tag{10.12}$$

Эти формулы описывают *закон преобразования скоростей* при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Они соответствуют преобразованиям Лоренца и заменяют собой закон сложения скоростей (3.8), соответствующий преобразованиям Галилея. Предельный переход $c \to \infty$ трансформирует формулы (10.12) в (3.8).

Используя формулы (10.12), нетрудно доказать следующее соотношение:

$$v^2 - c^2 = \frac{v'^2 - c^2}{\gamma^2 \left(1 + \frac{V\,v'_x}{c^2}\right)^2}.$$

Из этого соотношения вытекает, что для частицы, движущейся со скоростью света относительно какой-либо инерциальной системы отсчета, модуль вектора скорости во всех других системах отсчета также будет равен скорости света; т.е. если $v' = c$, то и $v = c$. Этого следовало ожидать, так как принцип постоянства скорости света был заложен в основу теории преобразований Лоренца.

10.5. Релятивистская динамика

Как следует из предшествующих разделов этой главы, фундаментом специальной теории относительности служит обобщенный принцип относительности, от которого эта теория берет свое название. Величины и формулы, применяемые в теории относительности называются релятивистскими (от лат. *relativ* – относительный).

При помощи принципа относительности можно получить математические формулировки основных законов релятивистской динамики, а именно: вывести уравнения движения материальной точки и записать равенства, выражающие законы сохранения энергии и импульса. Согласно принципу относительности искомые уравнения должны быть ковариантны относительно преобразований Лоренца. Для этого необходимо, чтобы величины, входящие в эти уравнения, преобразовывались специальным образом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Релятивистское уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\,\frac{d}{dt}\,\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F}\,. \qquad (10.13)$$

Это векторное уравнение является обобщением второго закона Ньютона на случай, когда частица движется со скоростью близкой к скорости света. При $c \to \infty$ уравнение (10.13) переходит в уравнение

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\,,$$

которое описывает движение нерелятивистской частицы.

Умножим уравнение (10.13) на вектор скорости $\vec{v}$. Применив известные правила дифференцирования, после несложных преобразований придем к уравнению

$$m c^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = P, \tag{10.14}$$

где

$$P = \vec{F}\,\vec{v}$$

есть мощность силы, действующей на частицу.

10.6. Релятивистские импульс и энергия

Импульс релятивистской частицы определяют формулой

$$\vec{p} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{10.15}$$

При этом уравнение (10.13) можно записать так:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},} \tag{10.16}$$

т.е. производная от импульса частицы по времени равна действующей на нее силе.

Величина

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10.17}$$

назвается энергией релятивистской частицы. Используя это определение, запишем уравнение (10.14) так:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = P.} \tag{10.18}$$

Согласно этому уравнению производная от энергии частицы по времени равна мощности.

Если скорость частицы равна нулю ($v = 0$), то формула (10.17) дает значение энергии

$$E_o = m c^2, \tag{10.19}$$

которое называется *энергией покоя частицы*. Поэтому *кинетическую энергию частицы* определяют так:

$$T = E - m\,c^2 = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m\,c^2\,. \tag{10.20}$$

График зависимости кинетической энергии релятивистской частицы от скорости представлен на рис. 10.3. Как видно из этого рисунка, когда скорость частицы приближается к скорости света, ее энергия возрастает до бесконечности.

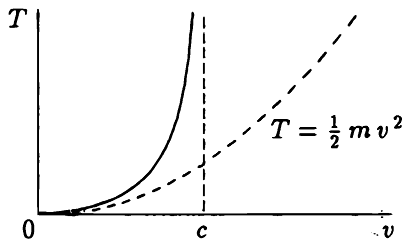

Рис. 10.3. Зависимость кинетической энергии релятивистской частицы от ее скорости

Импульс и энергия релятивистской частицы связаны соотношением

$$E^2 - p^2\,c^2 = m^2\,c^4\,, \tag{10.21}$$

в справедливости которого нетрудно убедиться при помощи определений (10.15) и (10.17). В самом деле, подставив эти выражения в равенство (10.21), получим тождество.

В нерелятивистском пределе, когда $v/c \ll 1$, формула (10.15) принимает вид

$$\vec{p} \approx m\,\vec{v}\,.$$

При помощи приближенного равенства

$$(1 - x)^{-1/2} \approx 1 + \frac{x}{2}\,,$$

где $x \ll 1$, формулу (10.17) можно преобразовать к виду

$$E \approx m\,c^2 + \frac{1}{2}\,m\,v^2\,.$$

Из этой формулы следует, что в нерелятивистском пределе кинетическая энергия (10.20) будет

$$T \approx \frac{1}{2} m v^2 .$$

Таким образом, видим, что в случае, когда скорость частицы существенно меньше скорости света ($v \ll c$), релятивистские выражения для импульса и кинетической энергии переходят в известные из ньютоновской динамики выражения.

10.7. Законы сохранения импульса и энергии

Соударения элементарных частиц и атомных ядер при определенных условиях возбуждают реакции, т.е. такие взаимодействия частиц, в результате которых образуются другие частицы. Соударения частиц, при которых реакции не протекают и внутренние состояния частиц не изменяются, называются *упругими*. Независимо от того, какой характер имеет взаимодействие частиц при их соударении (возбуждается реакция или нет), поведение частиц до и после столкновения подчиняется законам сохранения импульса и энергии. Уравнения, выражающие эти законы, могут быть получены при помощи обобщенного принципа относительности, согласно которому они должны быть ковариантны. Эти уравнения имеют вид

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_k \vec{p}_k , \tag{10.22}$$

$$\sum_i E_i = \sum_k E_k , \tag{10.23}$$

где $\vec{p}_i$ – импульсы соударяющихся частиц, $i = 1, 2, ..., n$ – номера этих частиц, n – их число; $\vec{p}_k$ – импульсы частиц после столкновения, $k = n+1, ..., n+n'$ – номера этих частиц, n' – их число; E_i и E_k – энергии частиц до и после столкновения соответственно.

Обладать большими скоростями, т.е. быть релятивистскими, могут только достаточно легкие частицы. Такими являются элементарные частицы и ядра легких атомов. Каждая элементарная частица или атомное ядро характеризуется определенным значением массы. В тех случаях, когда соударения частиц сопровождаются их превращениями, суммарная масса всех частиц, вообще говоря, не сохраняется:

$$\sum_i m_i \neq \sum_k m_k ,$$

т.е. масса соударяющихся частиц не равна массе частиц-продуктов реакции.

ГЛАВА 10*

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
(продолжение)

10.8. Мировая линия частицы. Световой конус

Существование любого тела представляет собой непрерывную последовательность происходящих с этим телом событий. Если какое-либо тело можно рассматривать как материальную точку, то и события, с ним происходящие, также будут точечными. Все эти события образуют линию в 4-мерном пространственно-временном многообразии, которая называется *мировой линией* рассматриваемой частицы (рис. 10.4). Параметрическое уравнение мировой линии материальной точки можно записать в виде $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ – радиус-вектор точки, t – время.

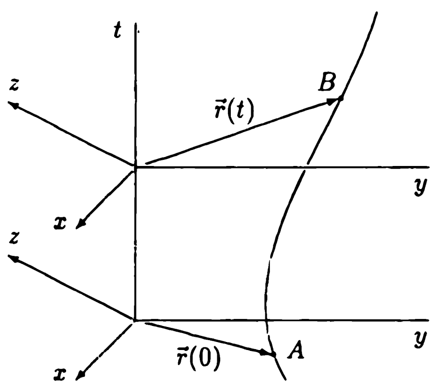

Рис. 10.4. Мировая линия частицы

Ось времени, уравнение которой $\vec{r} = 0$, есть мировая линия наблюдателя. При этом из формул (10.2) и (10.3) следует, что $\tau_1 = \tau_2$ и время t совпадает с собственным временем наблюдателя τ.

Между событиями на мировой линии частицы, т.е. между событиями, с этой частицей происходящими, может быть установлена причинно-следственная связь. Из двух событий на мировой линии частицы всегда одно происходит раньше другого; одно может быть названо причиной, а другое – следствием. Так, на рис. 10.4 событие A происходит раньше события B и может быть названо его причиной. Соответственно, событие B есть следствие события A. Все события, которые могут быть следствиями некоторого события A, образуют область в 4-мерном пространстве-времени, называемую *будущим* события A. Все события, которые могут быть причиной какого-либо события, образуют область, называемую *прошлым* этого события.

Исключим из формул (10.2) – (10.3) момент собственного времени τ_2. Получим

$$r = c\,(t - \tau_1)\,, \qquad \text{где} \qquad t \geq \tau_1\,. \tag{10.24}$$

Это соотношение связывает между собой время t прихода светового сигнала в некоторую точку пространства и расстояния r от этой точки до наблюдателя при условии, что сигнал был отправлен в момент времени τ_1. Проще говоря, r есть расстояние, которое преодолевает световой сигнал (фотон) за время от τ_1 до t. Если подставить выражение (10.24) в формулы (10.4), то получим параметрические уравнения линии в пространственно-временном многообразии, которая представляет собой мировую линию фотона, испущенного из начала координат в момент времени $t = \tau_1$.

Точки в трехмерном пространстве переменных x, y, z, расстояния от которых до начала координат одинаковы и равны r, образуют сферу радиуса r с центром в начале координат (рис. 10.5). Если радиус сферы увеличивается со временем в соответствии с формулой (10.24), то эту сферу можно рассматривать как *волновой фронт сферической световой волны*, испущенной в момент времени τ_1 точечным источником света, который находится в начале координат.

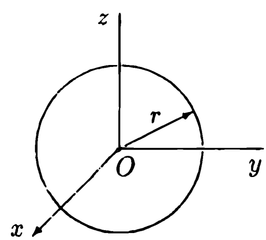

Рис. 10.5. Волновой фронт сферической световой волны

Используя соотношение (10.5), уравнение (10.24) сферического волнового фронта можно записать так:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c\,(t - \tau_1)\,. \tag{10.25}$$

В 4-мерном пространстве-времени, т.е. в пространстве переменных x, y, z и t, уравнение (10.25) представляет поверхность, которая называется *световым конусом* (рис. 10.6). Сечение этого конуса плоскостью $t = \text{const} > \tau_1$ есть сфера радиуса r в трехмерном пространстве (рис. 10.5).

До настоящего времени не обнаружены частицы, которые могли бы двигаться в пустом пространстве со скоростями, превышающими скорость света. Поэтому можно предположить, что таких частиц в природе не существует. Пусть в момент времени τ_1 в начале координат O произошло некоторое событие A. И в этот момент времени из точки O стало двигаться тело m. Так как это тело в момент времени τ_1 находилось в начале координат, можно считать, что оно участвовало в событии A или это событие с ним и произошло. Любое событие B, произошедшее с телом m в более поздний момент времени $t > \tau_1$, будет следствием события A и будет лежать в области будущего. В силу предположения о том, что скорость света является предельной скоростью распространения частиц и волн в пространстве, скорость движения тела m также не должна превышать скорости света в вакууме. Поэтому фронт сферической световой волны, испущенной из начала координат в момент времени τ_1 будет двигаться в пустом пространстве быстрее тела m. В результате это тело в любой момент времени $t > \tau_1$ будет находиться внутри сферы радиуса (10.24), а его мировая линия будет проходить внутри светового конуса (10.25) через его вершину A (рис. 10.6). Таким образом, приходим к заключению, что область внутри светового конуса является *областью будущего* относительно события A, лежащего в вершине этого конуса. Только на события внутри этой области событие A может оказывать какое-либо влияние.

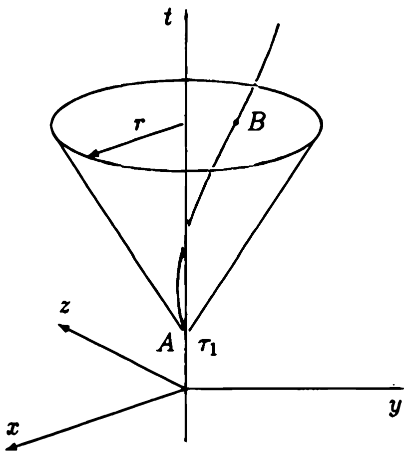

Рис. 10.6. Световой конус будущего

Исключим из формул (10.2) и (10.3) момент времени τ_1. Получим:

$$r = c\,(\tau_2 - t)\,, \qquad \text{где} \qquad t \leq \tau_2\,. \tag{10.26}$$

Подстановка этого выражения в формулы (10.4) дает параметрическое уравнение мировой линии фотона, попадающего в приемник наблюдателя в момент времени τ_2. Мировые линии различных фотонов, попадающих в приемник в этот момент времени, отличаются одна от другой значениями углов θ и φ, которые определяют направление движения фотона. Все эти линии образуют *световой конус прошлого* (рис. 10.7). Вершиной этого конуса является событие A на мировой линии наблюдателя, соответствующее моменту собственного времени τ_2. Уравнение конуса прошлого имеет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c\,(\tau_2 - t). \qquad (10.27)$$

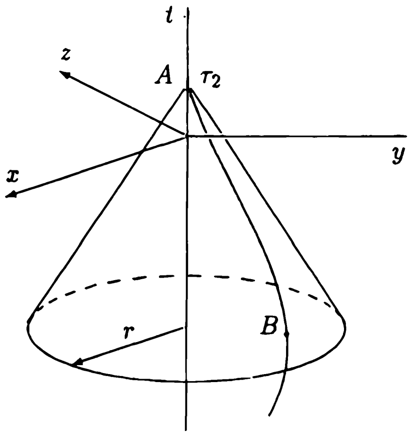

Рис. 10.7. Световой конус прошлого

Какое-либо тело m, двигаясь со скоростью, меньшей скорости света, может оказаться в начале координат одновременно с рассматриваемыми фотонами только в том случае, если в любой момент времени $t < \tau_2$ оно находится внутри сферы радиуса $r = c\,(\tau_2 - t)$. При этом мировая линия тела будет лежать внутри конуса прошлого и проходить через точку A (рис. 10.7). Событие A можно рассматривать как следствие любого из событий B, произошедших с телом m при $t < \tau_2$. Поэтому область, которая состоит из событий, лежащих внутри конуса прошлого, называется *областью прошедшего* для события A.

Положим в уравнениях (10.25) и (10.27) $\tau_1 = \tau_2 = \tau_o$ и возведем полученное уравнение в квадрат. Таким путем придем к уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 (t - \tau_o)^2 \qquad (10.28)$$

полного светового конуса с вершиной A, лежащей на оси времени t (рис. 10.8). Этот световой конус разделяет пространство-время на три области: области будущего и прошедшего для события A и *область абсолютно удаленных от A событий*. Такое название последней области обусловлено тем, что любое из событий в этой области не может быть ни причиной, ни следствием события A.

Разделение пространственно-временного многообразия на области будущего, прошедшего и область абсолютно удаленных событий для любого точечного события A имеет абсолютный физический смысл. Иначе говоря, кто бы ни наблюдал это событие, оно всегда будет следствием событий, лежащих в области прошедшего, причиной событий в области будущего и никак не будет связано с абсолютно удаленными событиями.

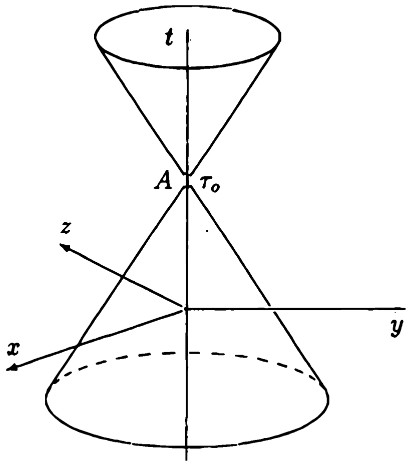

Рис. 10.8. Световой конус

10.9. Вывод преобразований Лоренца

Наблюдатель, находящийся в инерциальной системе отсчета K, будет приписывать событию A значения координат x, y, z и времени t. Тогда как наблюдатель, находящийся в другой инерциальной системе отсчета K', будет приписывать тому же событию A другие значения координат x', y', z' и времени t'. Найдем соотношения, связывающие эти величины. Для простоты положим, что в какой-то момент времени начала координат O и O' систем отсчета K и K' совпадали и этот момент наблюдатели условились принять за начало отсчета времени. Разумеется, каждый из них отсчитывает время по часам, имеющимся в его распоряжении. Положим также, что оси декартовых прямоугольных систем координат K и K' всегда направлены так, как показано на рис. 10.1, т.е. оси абсцисс совпадают, а оси ординат и аппликат этих систем параллельны. В таком случае справедливы соотношения

$$y = y' \quad \text{и} \quad z = z'\,. \tag{10.29}$$

Пусть система отсчета K' движется вдоль оси x со скоростью V относительно системы отсчета K. Необходимо установить связь между величинами x, t и x', t'.

В силу однородности пространства и времени искомые зависимости не должны изменяться при переносе начала координат и изменении начала отсчета времени, т.е. при замене x на $x+x_o$ и t на $t+t_o$. Таким свойством обладают только линейные зависимости. Поэтому искомая зависимость x от x' и t' должна иметь вид

$$x = \gamma\, x' + \alpha\, t' \,, \tag{10.30}$$

где γ и α – неизвестные коэффициенты, зависящие от скорости V относительного движения систем отсчета K и K'. Причем коэффициент γ должен быть положительным, так как оси x и x' направлены в одну сторону и при увеличении одной из координат x или x' другая также должна увеличиваться.

Началу координат (т.е. точке O) в системе отсчета K соответствует значение $x = 0$. Поэтому, положив в равенстве (10.30) $x = 0$, получим уравнение

$$\gamma\, x' + \alpha\, t' = 0 \,,$$

связывающее координату x' и время t', которые наблюдатель в системе отсчета K' приписывает событиям, происходящим в точке O. Другими словами, найдем закон движения точки O относительно системы отсчета K', а именно:

$$x' = -\,\frac{\alpha\, t'}{\gamma} \,. \tag{10.31}$$

Так как система отсчета K движется вдоль оси x' со скоростью $-V$ относительно системы отсчета K', продифференцировав функцию (10.31) по времени t', придем к уравнению

$$-\,V = -\,\frac{\alpha}{\gamma} \,,$$

из которого найдем, что $\alpha = \gamma\, V$. Подставив это выражение в равенство (10.30), получим:

$$x = \gamma\,(x' + V\, t') \,. \tag{10.32}$$

Системы отсчета K и K' равноправны. Поэтому координата x' должна зависеть от x и t так же, как x от x' и t' с той только разницей, что скорость V следует заменить на $-V$. Таким образом, вместо зависимости (10.32) будем иметь

$$x' = \gamma\,(x - V\, t) \,. \tag{10.33}$$

Применим теперь принцип постоянства скорости света. Пусть в момент времени $t = 0$ из точки O вылетает фотон и движется вдоль оси x в положительном направлении. В силу принципа относительности его движение должно описываться одинаковыми уравнениями в любой из систем отсчета K и K'. Если $x = ct$, то $x' = ct'$; т.е. фотон должен двигаться прямолинейно и равномерно с одной и той же скоростью c относительно любой из систем отсчета K и K'. Подстановка этих выражений в равенства (10.32) и (10.33) приводит к системе равенств

$$ct = \gamma (c + V) t', \qquad ct' = \gamma (c - V) t,$$

из которой нетрудно найти, что

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10.34}$$

Для того чтобы установить зависимость t от x' и t', равенство (10.34) следует разрешить относительно t и исключить x при помощи равенства (10.33):

$$t = \frac{1}{V}\left(x - \frac{x'}{\gamma}\right) = \gamma \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{x'}{V} + t'\right].$$

Используя выражение (10.34), получим:

$$t = \gamma \left(\frac{V x'}{c^2} + t'\right). \tag{10.35}$$

Соотношения (10.29), (10.32) и (10.35), вместе взятые, составляют *преобразования Лоренца*:

$$x = \gamma (x' + V t'), \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \gamma \left(\frac{V x'}{c^2} + t'\right). \tag{10.36}$$

Обратные преобразования имеют вид

$$x' = \gamma (x - V t), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma \left(-\frac{V x}{c^2} + t\right). \tag{10.37}$$

Для света, испущенного в момент времени $t = 0$ точечным источником, который в этот момент времени находился в точке O, уравнение сферического волнового фронта с точки зрения наблюдателя в системе отсчета K, будет иметь вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \tag{10.38}$$

Так как в момент времени $t' = 0$ по часам наблюдателя в системе отсчета K' точки O и O' совпадали, с точки зрения этого наблюдателя уравнение фронта рассматриваемой световой волны должно иметь такой же вид, т.е.

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 . \tag{10.39}$$

Другими словами, эти уравнения должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца. В справедливости этого утверждения легко убедиться, подставив выражения (10.36) в уравнение (10.38). После простых преобразований придем к уравнению (10.39). По понятной причине выражение

$$x^2 - c^2 t^2$$

называют *инвариантом Лоренца.*

10.10. Интервал

Пусть x_A, y_A, z_A, t_A и x_B, y_B, z_B, t_B есть координаты и моменты времени двух произвольных событий A и B, измеренные относительно некоторой инерциальной системы отсчета K. Величина Δs, определяемая равенством

$$\Delta s^2 = -\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 + c^2 \Delta t^2 , \tag{10.40}$$

где

$$\Delta x = x_B - x_A , \quad \Delta y = y_B - y_A , \quad \Delta z = z_B - z_A , \quad \Delta t = t_B - t_A ,$$

называется *интервалом* между событиями A и B. Выражению (10.40) можно придать более простой вид, если использовать следующие векторные обозначения:

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k} , \qquad \vec{r}_B = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k} ,$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A , \qquad \Delta \vec{r}^{\,2} = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 .$$

В этих обозначениях равенство (10.40) будет выглядеть так:

$$\Delta s^2 = -\Delta \vec{r}^{\,2} + c^2 \Delta t^2 .$$

Если приращения координат и времени бесконечно малы, то равенство (10.40) принимает вид

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2 \equiv -d\vec{r}^{\,2} + c^2 dt^2 , \tag{10.41}$$

где

$$d\vec{r}^{\,2} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \,.$$

Выражения (10.40) и (10.41) обладают замечательным свойством: они инвариантны относительно преобразований Лоренца. Чтобы в этом убедиться, найдем дифференциалы функций (10.36):

$$dx = \gamma\,(dx' + V\,dt')\,, \qquad dy = dy', \qquad dz = dz'\,,$$

$$dt = \gamma\left(\frac{V\,dx'}{c^2} + dt'\right). \tag{10.42}$$

Подстановка этих выражений в правую часть (10.41) после несложных преобразований приводит к равенству

$$ds^2 = -\,d\vec{r}\,'^{\,2} + c^2\,dt'^{\,2}\,.$$

Что и требовалось доказать.

Выясним теперь физический смысл интервала. Как было показано в разделе 10.8, два произвольных события A и B либо причинно связаны друг с другом, либо абсолютно удалены одно от другого. Интервал Δs между событиями A и B, одно из которых (скажем, B) есть следствие другого, называется *времени-подобным*. Для таких событий имеется принципиальная возможность существования тела m, являющегося участником как события A, так и события B. Если с этим телом связана некоторая инерциальная система отсчета, то воображаемый, а может быть реальный, наблюдатель, находящийся в начале координат этой системы, также будет непосредственным участником событий A и B. С его точки зрения события A и B происходят в начале координат и их радиус-векторы $\vec{r}_A = \vec{r}_B = 0$. При этом выражение (10.40) принимает вид

$$\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2\,, \qquad \text{или} \qquad \Delta s = \pm\, c\,\Delta t. \tag{10.43}$$

Но в случае, когда $\vec{r}_A = \vec{r}_B = 0$, т.е. для происходящих в начале координат событий, время t совпадает с собственным временем наблюдателя: $t \equiv \tau$. Поэтому можно записать

$$\Delta s = c\,\Delta\tau = c\,(\tau_B - \tau_A)\,, \tag{10.44}$$

где τ_A и τ_B – моменты собственного времени, отсчитанные по часам непосредственного участника событий A и B, являющегося в то же время наблюдателем в инерциальной системе отсчета; $\tau_B > \tau_A$, если B есть следствие A. Для событий, разделенных бесконечно малым интервалом времени $d\tau$, формула (10.44) переходит в

$$\boxed{ds = c\, d\tau\,.} \tag{10.45}$$

Формулы (10.44) и (10.45) определяют физический смысл времени-подобного интервала, т.е. интервала между событиями, происходящими с одним и тем же телом, или событиями, между которыми может быть установлена причинно-следственная связь.

Для двух событий A и B, лежащих на мировой линии фотона, координаты и время связаны уравнением

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = c^2\,(t_B - t_A)^2\,,$$

или

$$\Delta\vec{r}^{\,2} = c^2\,\Delta t^2\,.$$

При этом, как следует из равенства (10.40), интервал Δs между событиями A и B будет равен нулю.

Для абсолютно удаленных друг от друга событий A и B расстояние $|\Delta\vec{r}\,|$ между точками, где они произошли, так велико, что свет, испущенный в момент, когда совершилось одно из этих событий, за время $|t_B - t_A|$ не успевает достичь места, где совершается другое событие, к моменту его свершения, т.е.

$$|\,\Delta\vec{r}\,| > c\,|\,t_B - t_A\,|\,.$$

При этом

$$\Delta s^2 < 0\,.$$

Интервал Δs между абсолютно удаленными друг от друга событиями называется *пространственно-подобным*. Из последнего неравенства вытекает, что этот интервал является чисто мнимой комплексной величиной.

10.11. Относительность времени

Рассмотрим два события A и B, которые происходят с некоторой частицей m, и по определению лежат на ее мировой линии. Уравнение этой линии, записанное наблюдателем в некоторой инерциальной системе отсчета K, имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\,.$$

Вектор скорости частицы m относительно этой системы отсчета

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,. \tag{10.46}$$

При помощи этой формулы приращение радиус-вектора

$$d\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \equiv \vec{r}(t_B) - \vec{r}(t_A)$$

для двух бесконечно близких точек A и B на мировой линии можно представить в виде

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt\,,$$

где $dt = t_B - t_A$. Подстановка этого выражения в формулу (10.41) дает

$$ds^2 = \left(c^2 - v^2\right) dt^2\,.$$

Используя эту формулу и равенство (10.45), получим соотношение

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt\,, \tag{10.47}$$

связывающее приращение $d\tau = \tau_B - \tau_A$ собственного времени частицы m, соответствующее событиям A и B, с приращением dt времени t, которое приписывается событиям, происходящим с частицей m, наблюдателем в произвольной инерциальной системе отсчета K. Как видно из соотношения (10.47), показания часов, связанных с частицей m, и часов, имеющихся в распоряжении наблюдателя, вообще говоря, не совпадают. А именно,

$$d\tau \leq dt\,.$$

Причем равенство $d\tau = dt$ имеет место только, когда частица m покоится относительно данной системы отсчета.

В силу инвариантности интервала выражение (10.47) будет иметь такой же вид в любой другой инерциальной системе отсчета K' :

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}\, dt'\,, \tag{10.48}$$

где v' – скорость частицы m относительно системы отсчета K', $dt' = t'_B - t'_A$, t'_A и t'_B – моменты времени, приписываемые событиям A и B наблюдателем в K'. Несовпадение значений $d\tau$, dt и dt' вовсе не связано с несовершенством хронометров, используемых для измерения величин τ, t и t' различными наблюдателями. Все используемые часы считаются идеальными и совершенно одинаковыми, т.е. предполагается, что их механизмы не имеют ни каких внутренних изъянов, а их ход не подвержен влиянию внешних воздействий. Причиной расхождений в показаниях часов, по которым различные наблюдатели измеряют время между одними и теми же событиями A и B, является конечность скорости распространения световых сигналов. В самом деле, если бы скорость света была бесконечно большой ($c \to \infty$), то все величины $d\tau$, dt, dt' были бы тождественно равны друг другу и вследствие этого предварительно синхронизированные часы показывали бы одно и то же время: $\tau = t = t'$, т.е. время было бы абсолютным. В справедливости сказанного нетрудно убедиться, совершив предельный переход при $c \to \infty$ в равенствах (10.35), (10.47) и (10.48).

Формула (10.47) находит многочисленные экспериментальные подтверждения. Рассмотрим одно из них. На Землю из космического пространства падают потоки стабильных частиц очень высоких энергий, которые называются *космическими лучами*. Эти потоки состоят в основном из протонов и альфа-частиц (т.е. ядер гелия). При столкновениях быстрых протонов с ядрами атомов в верхних слоях атмосферы рождаются нестабильные элементарные частицы, называемые мезонами. Так называемый μ-мезон самопроизвольно распадается на электрон (или позитрон) и два нейтрино. Этот самопроизвольный распад наблюдался на снимках, полученных посредством камеры Вильсона, а также при помощи счетчиков Гейгера. Использование счетчиков дает возможность измерить среднее время жизни $\Delta\tau$ покоящегося мезона: $\Delta\tau \simeq 2 \cdot 10^{-6}$ *с*.

Рождаясь в верхних слоях атмосферы на высоте $h = 20 \div 30$ *км*, многие μ-мезоны успевают достичь поверхности Земли прежде, чем произойдет их распад. Даже при движении со скоростью света для преодаления расстояния h мезону требуется время

$$\Delta t_{min} = \frac{h}{c} \simeq 10^{-4}\, c\,.$$

Это время в десятки раз превышает среднее время жизни мезона $\Delta\tau$. Это различие объясняется тем, что время Δt измеряется земным наблюдателем, относительно которого мезон движется со скоростью близкой к скорости света, а время $\Delta\tau$ измеряется наблюдателем для покоящегося или движущегося с малой скоростью мезона. Согласно формуле (10.47) время Δt при больших значениях скорости v должно быть существенно больше времени $\Delta\tau$ жизни покоящегося мезона:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \Delta t < \Delta t\,,$$

что и наблюдается в действительности.

Представим себе, что несколько наблюдателей оказались непосредственными участниками двух событий A_1 и A_2, разделенных времениподобным интервалом. Эти события изображаются в пространственно-временном многообразии точками, которые принадлежат мировым линиям всех этих наблюдателей (рис. 10.9). Пусть известны радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ и моменты времени t_1 и t_2 рассматриваемых событий, измеренные относительно некоторой инерциальной системы отсчета K: $A_1(\vec{r}_1, t_1)$, $A_2(\vec{r}_2, t_2)$. Для каждого из наблюдателей есть две возможности, отправляясь в момент времени t_1 из точки $\vec{r}_1$, попасть в точку $\vec{r}_2$ к моменту времени t_2: или двигаясь с постоянной скоростью, или – ускоренно. Причем движение с постоянной скоростью можно осуществить единственным образом. При этом скорость движения будет

$$\vec{v}_o = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – вектор перемещения, $\Delta t = t_2 - t_1$. Такое движение описывается функцией

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + (t - t_1)\,\vec{v}_o,$$

которая представляет прямую линию в 4-мерном пространстве-времени, проходящую через точки A_1 и A_2 (рис. 10.9). Ускоренных движений может быть бесконечно много, так как через две точки можно провести только одну прямую линию, а различных кривых – несчетное множество.

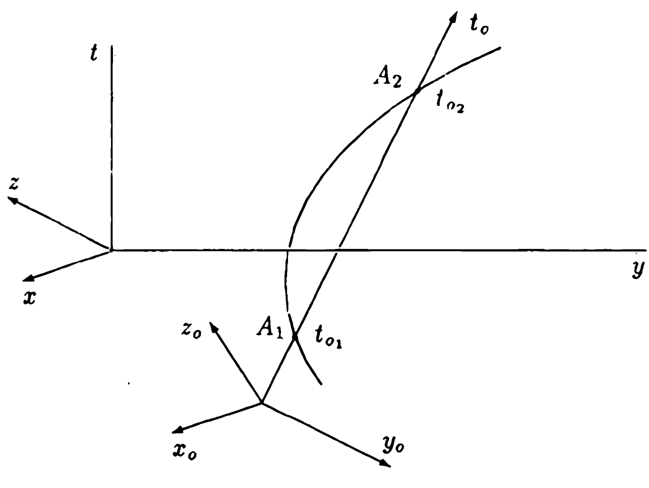

Рис. 10.9. Две системы отсчета

Найдем величину $\Delta\tau$ промежутка собственного времени τ между событиями A_1 и A_2, отсчитываемого по часам одного из наблюдателей. Если известна функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, описывающая движение этого наблюдателя в системе отсчета K, то его скорость будет $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$. Приращение $d\tau$ собственного времени наблюдателя, соответствующее приращению dt времени t, определяется для данной скорости v формулой (10.47). Поэтому по часам этого наблюдателя от события A_1 до события A_2 пройдет время

$$\Delta\tau = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt\,.$$

Для наблюдателя, движущегося с постоянной скоростью v_o, соответствующее приращение собственного времени будет

$$\Delta\tau_o = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}\, dt\,.$$

Как следует из этих формул, времена $\Delta\tau$, измеряемые различными наблюдателями от их расставания A_1 до встречи A_2, вообще говоря, не совпадают. Покажем, что из всех этих времен $\Delta\tau_o$ будет наибольшим.

Система отсчета K_o наблюдателя, движущегося с постоянной скоростью v_o относительно ранее выбранной инерциальной системы отсчета K, также будет инерциальной. Радиус-вектор и время, приписываемые этим наблюдателем произвольному событию, обозначим $\vec{r}_o$ и t_o. Так как скорость этого наблюдателя относительно его системы отсчета K_o равна нулю, будем иметь

$$\Delta\tau_o = \Delta t_o \equiv t_{o_2} - t_{o_1}\,,$$

где t_{o_1} и t_{o_2} – моменты времени t_o, соответствующие событиям A_1 и A_2. В силу инвариантности собственного времени для ускоренно движущегося наблюдателя приращение $\Delta\tau$ будет связано со временем t_o формулой

$$\Delta\tau = \int\limits_{t_{o_1}}^{t_{o_2}} \sqrt{1 - \frac{v^2(t_o)}{c^2}}\, dt_o\,,$$

где $v = v(t_o)$ – функция, описывающая зависимость от времени t_o модуля скорости движения этого наблюдателя относительно системы отсчета K_o, т.е.

$$v(t_o) = \left| \frac{d\vec{r}_o}{dt_o} \right|.$$

Так как

$$\sqrt{1 - \frac{v^2(t_o)}{c^2}} < 1\,,$$

будем иметь

$$\Delta\tau < t_{o_2} - t_{o_1} \qquad \text{или} \qquad \Delta\tau < \Delta\tau_o\,.$$

Таким образом, приходим к следующему заключению. Если два наблюдателя, один из которых движется с постоянной скоростью относительно некоторой инерциальной системы отсчета, а другой – ускоренно, сравнивают показания своих часов при расставании и встрече, то время $\Delta\tau_o$ между этими событиями для первого наблюдателя будет больше аналогичного времени $\Delta\tau$, отсчитанного по часам второго. Можно сказать, что для ускоренно движущегося наблюдателя время течет медленнее.

10.12. Уравнения движения материальной точки

Получим помощи принципа относительности основной закон релятивистской динамики – уравнение движения материальной точки. Согласно принципу относительности релятивистские уравнения должны быть ковариантны относительно преобразований Лоренца. Для этого необходимо, чтобы величины, входящие в эти уравнения, преобразовывались специальным образом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Для того чтобы математические выражения, с которыми придется работать в дальнейшем, имели наиболее простой вид, будем использовать следующие обозначения:

$$x_1 = x\,, \qquad x_2 = y\,, \qquad x_3 = z\,, \qquad x_4 = t\,. \tag{10.49}$$

Используя эти обозначения, преобразования Лоренца (10.36) в общем виде можно записать так:

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} L_{\mu\nu}\, x'_\nu\,, \tag{10.50}$$

где индекс μ принимает значения 1, 2, 3, 4, а коэффициенты преобразования $L_{\mu\nu}$ образуют матрицу

$$\| L_{\mu\nu} \| = \left\| \begin{matrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\gamma V}{c^2} & 0 & 0 & \gamma \end{matrix} \right\|,$$

в которой индекс μ есть номер строки, а индекс ν – номер столбца, $\nu = 1, 2, 3, 4$.

Тензором нулевого ранга, скаляром, или *скалярным инвариантом* называется величина φ, значение которой в произвольной точке 4-мерного пространства-времени не изменяется при преобразованиях координат:

$$\varphi(x_\mu) = \varphi'(x'_\mu)\,.$$

Тензором первого ранга, или *4-мерным вектором* называется совокупность четырех величин a_μ, которые преобразуются при преобразованиях Лоренца так же, как координаты x_μ, т.е. по формулам, подобным (10.50):

$$a_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} L_{\mu\nu}\, a'_\nu\,, \tag{10.51}$$

где величины a_μ и a'_μ соответствуют инерциальным системам отсчета K и K' соответственно.

Скалярными инвариантами являются величины ds и $d\tau$. Примером 4-мерного вектора, как видно из формул (10.42) преобразования дифференциалов координат и времени, могут служить величины dx_μ :

$$dx_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} L_{\mu\nu}\, dx'_\nu\,. \tag{10.52}$$

В качестве параметра на мировой линии некоторой частицы m удобно использовать ее собственное время τ. При этом уравнение мировой линии можно представить в виде зависимости

$$x_\mu = x_\mu(\tau)\,. \tag{10.53}$$

Пусть

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \tag{10.54}$$

есть производные этих функций.

В другой инерциальной системе отсчета K' уравнение мировой линии той же частицы будет представлено другими функциями

$$x'_\mu = x'_\mu(\tau) \tag{10.55}$$

того же аргумента τ. Производные этих функций обозначим так:

$$u'_\mu = \frac{dx'_\mu}{d\tau}\,.$$

Разделив равенство (10.52) на $d\tau$, получим:

$$u_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} L_{\mu\nu}\, u'_\nu\,. \qquad (10.56)$$

Из этого равенства следует, что величины (10.54) образуют 4-мерный вектор, который называют 4-*мерным вектором скорости* частицы, или сокращенно 4-*вектором скорости.*

Так как величины u_μ и u'_μ есть функции собственного времени частицы τ, а коэффициенты $L_{\mu\nu}$ преобразования Лоренца не зависят от τ, продифференцировав обе части равенства (10.56) по τ, получим:

$$\frac{du_\mu}{d\tau} = \sum_{\nu=1}^{4} L_{\mu\nu}\, \frac{du'_\nu}{d\tau}\,. \qquad (10.57)$$

Из этого равенства следует, что величины

$$a_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau} \qquad (10.58)$$

также образуют 4-мерный вектор. Этот вектор называется 4-*мерным ускорением* частицы.

Запишем теперь уравнения движения частицы массы m, т.е. уравнения для функций (10.53) или (10.55). При этом будем руководствоваться следующими соображениями. Во-первых, эти уравнения должны быть ковариантны относительно преобразований Лоренца. Во-вторых, они должны напоминать ньютоновские уравнения движения в общем случае и совпадать с ними в пределе при $c \to \infty$, т.е. в тех случаях, когда скорость частицы v существенно меньше скорости света c. Нетрудно догадаться, что уравнения, удовлетворяющие этим требованиям, должны иметь вид

$$\boxed{m\, a_\mu = f_\mu\,,} \qquad (10.59)$$

где f_μ – 4-мерный вектор силы, действующей на частицу. При этом величины f_μ следует рассматривать как известные функции аргументов x_μ, u_μ и τ. С учетом обозначений (10.54) и (10.58) уравнения (10.59) можно записать так:

$$m\, \frac{du_\mu}{d\tau} = f_\mu \qquad (10.60)$$

или так:

$$\boxed{m\, \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = f_\mu\,.} \qquad (10.61)$$

Как видно, эти уравнения представляют собой систему из четырех дифференциальных уравнений второго порядка для функций $x_\mu = x_\mu(\tau)$.

Преобразования Лоренца (10.50) дают возможность вывести из уравнений (10.61) уравнения для функций $x'_\mu = x'_\mu(\tau)$, которые описывают движение той же частицы относительно другой инерциальной системы отсчета K'. Ковариантность уравнений движения означает, что уравнения для функций $x'_\mu = x'_\mu(\tau)$ должны иметь вид

$$m\, a'_\mu = f'_\mu \,, \tag{10.62}$$

где

$$a'_\mu = \frac{du'_\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x'_\mu}{d\tau^2} \,.$$

Обратное преобразование, разумеется, должно приводить к уравнению (10.59). Чтобы в этом убедиться, заменим в уравнениях (10.62) индекс μ на ν, умножим полученные уравнения на коэффициенты $L_{\mu\nu}$ и просуммируем по индексу ν от 1 до 4 для каждого фиксированного значения индекса μ. Так как левая и правая части уравнений движения есть 4-мерные векторы, т.е. они преобразуются по закону (10.51), придем к уравнению (10.59). Таким образом, доказано, что полученные уравнения движения материальной точки ковариантны, как того требует принцип относительности.

При помощи обозначений (10.49) радиус-вектор частицы можно записать как

$$\vec{r} = x_1\, \vec{i} + x_2\, \vec{j} + x_3\, \vec{k} \,.$$

Имея в виду эту формулу, нетрудно понять, что первые три компоненты 4-вектора скорости (10.54) образуют трехмерный вектор, который в силу соотношения (10.47) равен

$$u_1\, \vec{i} + u_2\, \vec{j} + u_3\, \vec{k} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \,, \tag{10.63}$$

где

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \,.$$

При этом четвертая компонента 4-вектора скорости будет

$$u_4 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \,. \tag{10.64}$$

По аналогии с формулой (10.63) запишем соотношение

$$f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{10.65}$$

связывающее первые три компоненты 4-вектора силы f_μ и трехмерный вектор силы $\vec{F}$. Соотношения (10.63) – (10.65) позволяют записать первые три уравнения движения (10.60) для $\mu = 1, 2, 3$ в виде

$$m \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F}. \tag{10.66}$$

Это векторное уравнение есть искомое релятивистское уравнение движения материальной точки. Оно является обобщением второго закона Ньютона на случай, когда частица движется со скоростью близкой к скорости света. При $c \to \infty$ уравнение (10.66) переходит в уравнение

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

которое описывает движение нерелятивистской частицы.

При помощи формулы (10.45) запишем равенство (10.41) так:

$$- d\vec{r}^{\,2} + c^2\, dt^2 = c^2\, d\tau^2.$$

Разделив это равенство на $d\tau^2$, получим соотношение

$$-\left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right)^2 + c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = c^2, \tag{10.67}$$

которое с учетом определений (10.54) можно записать в виде

$$-\sum_{\mu=1}^{3} u_\mu^2 + c^2\, u_4^2 = c^2. \tag{10.68}$$

Как видим, это соотношение связывает компоненты u_μ 4-вектора скорости. По этой причине четыре уравнения (10.60) не являются независимыми. Найдем соотношение, связывающее компоненты f_μ 4-вектора силы. Для этого продифференцируем по τ обе части равенства (10.68). Получим:

$$-\sum_{\mu=1}^{3} u_\mu \frac{du_\mu}{d\tau} + c^2\, u_4 \frac{du_4}{d\tau} = 0.$$

Используя уравнения движения (10.60), получим искомое соотношение

$$-\sum_{\mu=1}^{3} u_\mu f_\mu + c^2 u_4 f_4 = 0 .$$

Разрешив это равенство относительно f_4 и преобразовав полученное выражение при помощи формул (10.63) – (10.65), придем к

$$f_4 = \frac{P}{c^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} , \qquad (10.69)$$

где

$$P = \vec{F}\,\vec{v}$$

есть мощность силы, действующей на частицу.

Запишем четвертое из уравнений (10.60), положив $\mu = 4$:

$$m\,\frac{du_4}{d\tau} = f_4 .$$

Используя формулы (10.64) и (10.69), этому уравнению можно придать вид

$$m\,c^2\,\frac{d}{dt}\,\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = P . \qquad (10.70)$$

Как уже говорилось, уравнения (10.66) и (10.70) не являются независимыми. Так, уравнение (10.70) можно вывести из уравнения (10.66), если умножить последнее на вектор скорости $\vec{v}$ и применить известные правила дифференцирования.

10.13. Уравнения изменения со временем импульса и энергии релятивистской частицы

Четырехмерным импульсом частицы называется 4-вектор

$$p_\mu = m\,u_\mu . \qquad (10.71)$$

Используя это определение, уравнение (10.60) можно записать так:

$$\boxed{\frac{dp_\mu}{d\tau} = f_\mu ,} \qquad (10.72)$$

т.е. производная от 4-импульса частицы по ее собственному времени равна 4-вектору силы.

Уравнение (10.66) можно записать так:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,.} \tag{10.73}$$

где

$$\vec{p} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{10.74}$$

есть трехмерный вектор импульса релятивистской частицы.

Запишем уравнение (10.70) так:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = P\,,} \tag{10.75}$$

где

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{10.76}$$

есть энергия релятивистской частицы.

Используя формулы (10.63) и (10.64) для компонент 4-вектора скорости, нетрудно установить, что компоненты 4-вектора импульса связаны с релятивистским импульсом $\vec{p}$ и энергией E следующим образом:

$$p_1\,\vec{i} + p_2\,\vec{j} + p_3\,\vec{k} = \vec{p}\,, \qquad p_4 = \frac{E}{c^2}\,. \tag{10.77}$$

При помощи формул (10.71) и (10.77) равенству (10.68) можно придать вид

$$E^2 - p^2\,c^2 = m^2\,c^4\,. \tag{10.78}$$

Согласно определению (10.71) компоненты 4-импульса p_μ при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой преобразуются так же, как координаты:

$$p_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} L_{\mu\nu}\,p'_\nu\,.$$

Отсюда, используя соотношения (10.77), нетрудно установить, как преобразуются релятивистские импульс $\vec{p}$ и энергия E. При этом, как следует из равенства (10.78), выражение

$$E^2 - p^2 c^2$$

является инвариантом преобразования Лоренца.

Для частиц таких, как фотон и нейтрино, масса которых равна нулю ($m = 0$), согласно равенству (10.78) импульс и энергия связаны соотношением

$$E = c\,p\,. \tag{10.79}$$

При этом из формул (10.74) и (10.76) следует, что скорость частиц с нулевой массой в любой системе отсчета равна скорости света. В противном случае их импульс и энергия будут тождественно равны нулю. Что, разумеется, не имеет смысла.

10.14. Ускорение частицы в постоянном силовом поле

Исследуем движение частицы массы m вдоль оси x под действием постоянной силы F. Примем следующие начальные условия для функции $x = x(t)$, описывающей движение частицы. Пусть

$$x(0) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{x}(0) = 0\,, \tag{10.80}$$

т.е. будем считать, что в момент времени $t = 0$ частица покоилась в начале координат.

Уравнение движения (10.73) приводит к уравнению для проекции вектора импульса на ось x

$$\frac{dp}{dt} = F\,.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $p(0) = 0$, имеет вид

$$p = F\,t\,. \tag{10.81}$$

При помощи формулы (10.74) составим уравнение для скорости движения частицы вдоль оси x:

$$\frac{m\,v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = F\,t\,,$$

разрешив которое относительно v, придем к зависимости скорости от времени:

$$v(t) = \frac{c\,\xi(t)}{\sqrt{1 + \xi^2(t)}} \equiv \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{m\,c}{F\,t}\right)^2}}\,, \tag{10.82}$$

где

$$\xi(t) = \frac{F\,t}{m\,c}\,.$$

График зависимости (10.82) приведен на рис. 10.10. Для моментов времени, удовлетворяющих неравенству $0 \le t \ll m\,c/F$, величина ξ такова, что $0 \le \xi \ll 1$. При этом знаменатель первой дроби в формуле (10.82) будет приближенно равен единице, а скорость будет пропорциональна времени: $v(t) \simeq F t/m$. Такая зависимость соответствует равноускоренному движению нерелятивистской частицы. При $t \gg m\,c/F$ скорость частицы асимптотически приближается к скорости света.

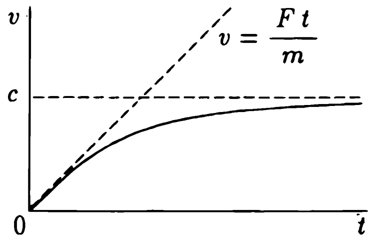

Рис. 10.10. Зависимость скорости частицы от времени при движении под действием постоянной силы

Заменив в равенстве (10.82) скорость v производной от функции $x = x(t)$ по времени t: $v = \dot{x}$, получим дифференциальное уравнение для этой функции

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c\,\xi(t)}{\sqrt{1+\xi^2(t)}}\,.$$

Решением этого уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям (10.80), является функция

$$x(t) = \frac{m\,c^2}{F}\left(\sqrt{1+\xi^2(t)} - 1\right)\,.$$

Если $t \gg m\,c/F$, то $x \simeq c\,t$, т.е. частица движется почти со скоростью света.

Найдем зависимость скорости частицы от пройденного ею пути. Для этого, используя определение мощности, запишем уравнение (10.75) так:

$$dE = F\,dx\,.$$

Согласно этому уравнению приращение энергии частицы равно работе силы на пути dx. Для движения под действием постоянной силы это уравнение легко интегрируется:

$$E = F\,x + C\,,$$

где C – постоянная интегрирования. С учетом начальных условий (10.80) будем иметь

$$m\,c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m\,c^2 + F\,x\,.$$

Это равенство определяет искомую зависимость скорости от пути.

10.15. Столкновения релятивистских частиц

Соударения элементарных частиц и атомных ядер, которые могут двигаться со скоростями, близкими к скорости света, подчиняются законам сохранения импульса и энергии. Получим уравнения, выражающие эти законы, при помощи обобщенного принципа относительности, согласно которому они должны быть ковариантны. Таковыми могут быть только тензорные уравнения. В рассматриваемом случае уравнения, выражающие собой законы сохранения импульса и энергии сталкивающихся частиц, должны иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} p_\mu^{(i)} = \sum_{k=n+1}^{n+n'} p_\mu^{(k)}\,, \tag{10.83}$$

где $p_\mu^{(i)}$ – 4-импульсы соударяющихся частиц, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ – номера этих частиц, n – их число; $p_\mu^{(k)}$ – 4-импульсы частиц после столкновения, $k = n+1,\ \ldots,\ n+n'$ – номера этих частиц, n' – их число; $\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Обе части равенства (10.83) есть 4-векторы. Поэтому преобразования Лоренца не изменяют вид этого равенства, т.е. в любой инерциальной системе отсчета сумма импульсов $p_\mu^{(i)}$ частиц до столкновения равна сумме импульсов $p_\mu^{(k)}$ частиц после их столкновения.

Формулы (10.77) дают возможность записать уравнения (10.83) следующим образом:

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_k \vec{p}_k\,, \tag{10.84}$$

$$\sum_i E_i = \sum_k E_k\,, \tag{10.85}$$

где $\vec{p}_i$, E_i и $\vec{p}_k$, E_k – релятивистские импульсы и энергии частиц до и после столкновения соответственно. Уравнения (10.84) и (10.85) выражают собой *законы сохранения импульса и энергии системы сталкивающихся частиц.*

Согласно формуле (10.20) энергия E частицы массы m равна сумме энергии покоя $m c^2$ и кинетической энергии T :

$$E = m c^2 + T . \tag{10.86}$$

При помощи этого соотношения запишем закон сохранения энергии (10.85) так:

$$\sum_i m_i c^2 + \sum_i T_i = \sum_k m_k c^2 + \sum_k T_k . \tag{10.87}$$

Энергией реакции Q называют разность кинетических энергий частиц-продуктов реакции и исходных частиц:

$$Q = \sum_k T_k - \sum_i T_i . \tag{10.88}$$

Используя это определение, придадим уравнению (10.87) следующий вид:

$$\sum_i T_i + Q = \sum_k T_k , \tag{10.89}$$

где энергия реакции

$$Q = \Delta m c^2 \tag{10.90}$$

определяется разностью

$$\Delta m = \sum_i m_i - \sum_k m_k \tag{10.91}$$

масс частиц до и после реакции.

Анализируя полученные формулы, приходим к выводу, что в том случае, когда суммарная масса частиц, вступающих в реакцию, больше массы ее продуктов ($\Delta m > 0$), энергия реакции Q положительна. При этом, как видно из равенства (10.88), кинетическая энергия продуктов реакции больше, чем кинетическая энергия исходных частиц:

$$\sum_k T_k > \sum_i T_i .$$

В таком случае говорят, что реакция протекает с выделением тепла. При этом часть Q энергии покоя исходных частиц переходит в кинетическую энергию продуктов реакции. На этом факте основан принцип работы реакторов атомных электростанций.

"Горючим" веществом в атомных реакторах является уран $_{92}\mathrm{U}^{235}$ или плутоний. Числа 92 (порядковый номер урана в таблице Менделеева или зарядовое число) и 235 (массовое число) означают, что ядро урана состоит из 92 протонов и $235 - 92 = 143$ нейтронов. При захвате медленного нейтрона n ядро урана-235 превращается в изотоп с массовым числом 236:

$$ {}_{92}\mathrm{U}^{235} + n \to {}_{92}\mathrm{U}^{236} , $$

который нестабилен и распадается различными путями на составные части. Одна из реакций деления урана-236 выглядит так:

$$ {}_{92}\mathrm{U}^{236} \to {}_{55}\mathrm{Cs}^{140} + {}_{37}\mathrm{Rb}^{94} + 2\, n , $$

т.е. ядро урана-236 распадается на ядро цезия Cs, ядро рубидия Rb и два нейтрона. При этом сумма масс ядра урана-235 и нейтрона превосходит суммарную массу частиц-продуктов реакции деления, которые называются осколками деления. Энергия реакции (10.90), соответствующая избытку массы Δm, превращается в кинетическую энергию осколков деления и энергию возникающего в процессе реакции электромагнитного излучения.

Рассмотрим несколько примеров применения законов сохранения импульса (10.84) и энергии (10.85).

Пример 1. *Распад частицы.* Пусть частица массы M самопроизвольно делится на два осколка с массами m_1 и m_2. Такой процесс удобно изучать в системе центра инерции, т.е. в системе, относительно которой частица M до распада покоилась. Уравнения (10.84) и (10.85) в таком случае будут иметь вид

$$ 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 , \tag{10.92} $$

$$ M\, c^2 = E_1 + E_2 . \tag{10.93} $$

Так как энергия релятивистской частицы больше или равна ее энергии покоя, энергии E_1 и E_2 осколков деления таковы, что

$$ E_k \geq m_k\, c^2 , $$

где $k = 1, 2$. В силу этих неравенств уравнение (10.93) имеет смысл только при условии, что масса M больше суммы масс осколков:

$$ M > m_1 + m_2 . $$

Только при этом условии возможен самопроизвольный распад частицы. В противном случае частица будет стабильной, т.е. неподверженной самопроизвольному распаду.

Уравнения (10.92) и (10.93) следует дополнить соотношениями, связывающими импульсы и энергии осколков деления. Согласно (10.78) можно записать

$$ E_1^2 = m_1^2\, c^4 + p_1^2\, c^2 , \qquad E_2^2 = m_2^2\, c^4 + p_2^2\, c^2 . \tag{10.94} $$

Из закона сохранения импульса (10.92) следует, что модули импульсов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ осколков деления одинаковы:

$$p_1 = p_2 \,. \tag{10.95}$$

Вычтем первое уравнение (10.94) из второго. С учетом равенства (10.95) получим:

$$E_2^2 - E_1^2 = \left(m_2^2 - m_1^2\right)\, c^2 \,.$$

Это уравнение вместе с уравнением (10.93) образует систему с двумя неизвестными E_1 и E_2, которая имеет следующее решение:

$$E_1 = \frac{1}{2\,M}\left(M^2 + m_1^2 - m_2^2\right)\, c^2\,, \qquad E_2 = \frac{1}{2\,M}\left(M^2 - m_1^2 + m_2^2\right)\, c^2 \,.$$

Пример 2. *Упругое столкновение двух частиц.* Пусть частица массы m налетает на покоящуюся частицу массы M. Законы сохранения импульса и энергии для упругого столкновения этих частиц выражаются уравнениями

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \,, \tag{10.96}$$

$$E + M\,c^2 = E_1 + E_2 \,, \tag{10.97}$$

где $\vec{p}$, E и $\vec{p}_1$, E_1 – импульсы и энергии налетающей частицы соответственно до и после столкновения, $\vec{p}_2$ и E_2 – импульс и энергия частицы M после столкновения. Причем импульсы и энергии частиц связаны соотношениями

$$E^2 = m^2\,c^4 + p^2\,c^2, \quad E_1^2 = m^2\,c^4 + p_1^2\,c^2, \quad E_2^2 = M^2\,c^4 + p_2^2\,c^2. \tag{10.98}$$

Из уравнения (10.96) найдем, что

$$\vec{p}_2 = \vec{p} - \vec{p}_1 \,.$$

Возведя это равенство в квадрат, получим:

$$p_2^2 = p^2 - 2\,p\,p_1\,\cos\theta + p_1^2 \,, \tag{10.99}$$

где θ – угол рассеяния налетающей частицы, т.е. угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{p}_1$ (рис. 10.11).

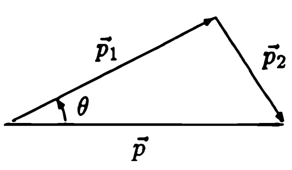

Рис. 10.11. К закону сохранения импульса

Если величины p, E и θ считать заданными, то импульсы p_1, p_2 и энергии E_1, E_2 частиц после столкновения можно найти из уравнений (10.97) – (10.99).

Пример 3. *Неупругое столкновение частиц.* Рассмотрим случай, когда релятивистская частица с массой покоя m при столкновении с покоящейся частицей массы M возбуждает реакцию, в результате которой рождаются новые частицы с массами m_1, m_2, ... такими, что

$$m + M < m_1 + m_2 + ... \equiv m_o ,$$

где m_o – сумма масс рождающихся частиц. При этом сумма энергий покоя сталкивающихся частиц будет меньше суммарной энергии покоя рождающихся частиц, а энергия реакции

$$Q = (m + M - m_o)\, c^2$$

будет отрицательной ($Q < 0$).

Уравнение (10.89) в рассматриваемом случае принимает вид

$$T + Q = \sum_k T_k ,$$

где T – кинетическая энергия налетающей частицы m. Как видно из этого уравнения, если $Q < 0$, то реакция может осуществиться только при условии, что кинетическая энергия T налетающей частицы m превышает некоторое пороговое значение: $T \geq T_{порог}$. В противном случае дело ограничится упругим соударением частиц. Найдем пороговую энергию реакции. Для этого запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$\vec{p} = \sum_k \vec{p}_k , \qquad E + M\, c^2 = \sum_k E_k , \tag{10.100}$$

где $\vec{p}$ и E – импульс и энергия налетающей частицы m, $\vec{p}_k$ и E_k – импульс и энергия одной из родившихся частиц, k =1, 2, ... ;

$$E^2 = m^2\, c^4 + p^2\, c^2 , \tag{10.101}$$

$$E_k^2 = m_k^2\, c^4 + p_k^2\, c^2 .$$

Когда кинетическая энергия T налетающей частицы равна пороговому значению, этой энергии хватает только на то, чтобы реакция произошла, но ее недостаточно для того, чтобы образовавшиеся частицы разлетелись в разные стороны. Иначе говоря, в этом случае все образовавшиеся частицы будут иметь одну и ту же скорость $\vec{v}$. При этом их импульсы и энергии будут

$$\vec{p}_k = \frac{m_k\,\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad E_k = \frac{m_k\,c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Подстановка этих выражений в равенства (10.100) дает

$$\vec{p} = \frac{m_o\,\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad E + M\,c^2 = \frac{m_o\,c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Правые части этих равенств удовлетворяют соотношению типа (10.101). Поэтому их левые части таковы, что

$$\left(E + M\,c^2\right)^2 = m_o^2\,c^4 + p^2\,c^2\,.$$

Это уравнение вместе с уравнением (10.101) образует систему с двумя неизвестными E и p. Исключив импульс p путем вычитания одного уравнения из другого, получим:

$$\left(E + M\,c^2\right)^2 - E^2 = \left(m_o^2 - m^2\right)c^4\,.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$E = \left(m_o^2 - m^2 - M^2\right)\frac{c^2}{2\,M}\,.$$

Теперь найдем пороговое значение кинетической энергии. Согласно определению (10.86)

$$T_{порог} = E - m\,c^2\,.$$

После несложных преобразований будем иметь

$$T_{порог} = \left(m_o^2 - (m+M)^2\right)\frac{c^2}{2\,M} = (m_o + m + M)\,\frac{|\,Q\,|}{2\,M}\,.$$

ГЛАВА 11

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

11.1. Силы инерции

Второй закон Ньютона справедлив только в том случае, когда движение механической системы рассматривается по отношению к некоторой инерциальной системе отсчета K_1. Причем его вид

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} \tag{11.1}$$

не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, так как ускорение $\vec{a}_1$ тела в любой инерциальной системе отсчета одинаково.

Рассмотрим движение тела относительно произвольной системы отсчета K. Пусть $\vec{a}$ есть ускорение тела в этой системе отсчета. Если K является инерциальной системой отсчета, то

$$\vec{a} = \vec{a}_1\,.$$

Если же система K не является инерциальной, то ускорения $\vec{a}$ и $\vec{a}_1$ различны:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_o\,. \tag{11.2}$$

Умножим обе части этого равенства на массу m тела. С учетом уравнения (11.1) получим уравнение движения тела относительно неинерциальной системы отсчета K

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{ин}\,, \tag{11.3}$$

где вектор

$$\vec{F}_{ин} = -\,m\vec{a}_o \tag{11.4}$$

называют *силой инерции*. В отличие от силы $\vec{F}$, которая характеризует взаимодействие реальных тел, сила инерции обусловлена только ускоренным движением тела, выбранного в качестве неинерциальной системы отсчета, и не соответствует какому-либо конкретному типу взаимодействия между телами. Поэтому силу инерции иногда даже называют фиктивной.

Уравнение (11.3) выражает собой второй закон Ньютона, действующий в произвольной системе отсчета K. Это уравнение необходимо использовать в тех случаях, когда по тем или иным причинам движение механической системы приходится исследовать в неинерциальной системе отсчета. Для этого необходимо знать, как действуют силы инерции.

Пусть неинерциальная система отсчета K движется поступательно относительно инерциальной системы отсчета K_1. При этом прямоугольные декартовы системы координат можно построить так, чтобы одноименные координатные оси были параллельны друг другу (рис. 11.1). В таком случае единичные орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, задающие направления координатных осей, для обеих систем будут одинаковы.

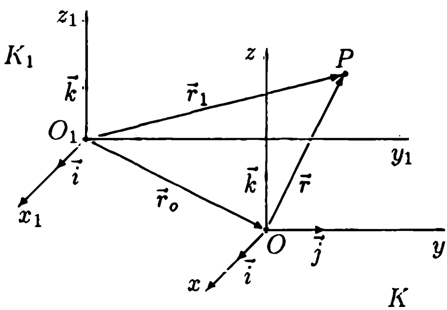

Рис. 11.1. Инерциальная K_1 и неинерциальная K системы отсчета

Обозначим: $\vec{r}_o = \overline{O_1O}$ - вектор, соединяющий начальные точки O_1 и O систем отсчета. Зависимость $\vec{r}_o = \vec{r}_o(t)$ описывает поступательное движение системы отсчета K относительно системы отсчета K_1. Пусть $\vec{r}_1$ и $\vec{r}$ есть радиус-векторы одной и той же точки P в системах отсчета K_1 и K соответственно. Эти векторы связаны соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_o\,, \tag{11.5}$$

Движение материальной точки в системах отсчета K_1 и K можно описать при помощи векторных функций $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$ и $\vec{r} = \vec{r}(t)$ соответственно. Вторые производные от этих функций в силу соотношения (11.5) таковы, что

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_o\,. \tag{11.6}$$

Так как $\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{a}_1$ и $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$, из равенств (11.2) и (11.6) найдем, что

$$\vec{a}_o = \ddot{\vec{r}}_o$$

есть ускорение, с которым система отсчета K движется относительно инерциальной системы отсчета K_1. Таким образом, сила инерции (11.4) будет

$$\vec{F}_{ин} = -m\,\ddot{\vec{r}}_o\,, \tag{11.7}$$

т.е. в самом деле она обусловлена ускоренным движением неинерциальной системы отсчета (в данном случае поступательным).

Если направление вектора $\vec{a}_o$ со временем не изменяется, то координатные оси x и x_1 можно и удобно направить вдоль этого вектора (рис. 11.2). При этом уравнение движения (11.3) материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета K будет эквивалентно следующим трем уравнениям в координатной форме:

$$m\,\ddot{x} = F_x - m\,a_o\,, \qquad m\,\ddot{y} = F_y\,, \qquad m\,\ddot{z} = F_z\,. \tag{11.8}$$

В некоторых случаях функции, являющиеся решениями этих уравнений, могут быть даже проще функций, описывающих то же движение в инерциальной системе отсчета.

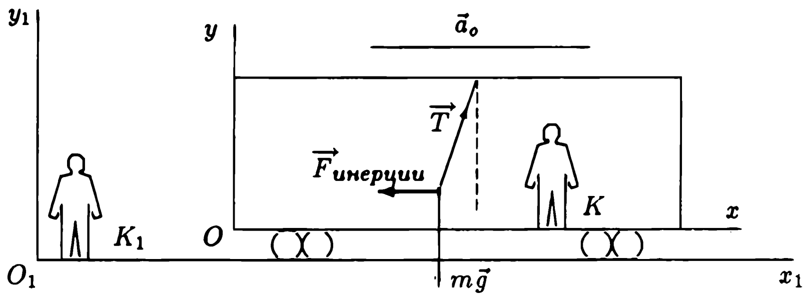

Рис. 11.2. Сила инерции

Рассмотрим следующий пример. В вагоне поезда, который движется горизонтально с постоянным ускорением a_o, к потолку на нити подвешен шарик (рис. 11.2). В равновесном положении нить образует некоторый угол β с вертикалью. Если рассматривать шарик с точки зрения наблюдателя, находящегося в вагоне, то условия его равновесия можно вывести из уравнений движения (11.8), положив в них ускорения равными нулю, так как относительно вагона шарик покоится. С учетом действующих на шарик реальных сил, какими являются сила $\vec{T}$ натяжения нити и сила тяжести $m\,\vec{g}$, получим:

$$T\,\sin\beta - m\,a_o = 0\,, \qquad T\,\cos\beta - m\,g = 0\,. \tag{11.9}$$

На основании этих равенств наблюдатель в вагоне может утверждать, что нить отклонилась от вертикали потому, что на шарик действует сила инерции $\vec{F}_{ин}$, проекция которой на ось x равна

$$F_{инx} = - m a_o .$$

Первое из условий (11.9) можно вывести иначе, приняв позицию наблюдателя, находящегося на земле. С его точки зрения шарик движется вместе с поездом с ускорением a_o относительно инерциальной системы отсчета K_1. При этом согласно второму закону Ньютона будем иметь

$$m a_o = T \sin \beta .$$

Таким образом, получаем тот же результат.

Этот пример показывает, что движение механической системы можно рассматривать с различных точек зрения. Применение неинерциальных систем отсчета и введение сил инерции не вызваны принципиальной необходимостью, а обусловлены только практическими соображениями и используются с целью достижения наибольшей простоты и удобства проведения вычислений.

11.2. Сила Кориолиса. Центробежная сила *

Пусть неинерциальная система отсчета K связана с телом, которое вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ относительно инерциальной системы отсчета K_1. Оси z и z_1 направим так, чтобы они совпали с осью вращения этого тела. В таком случае вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ будет направлен вдоль оси z (рис. 11.3).

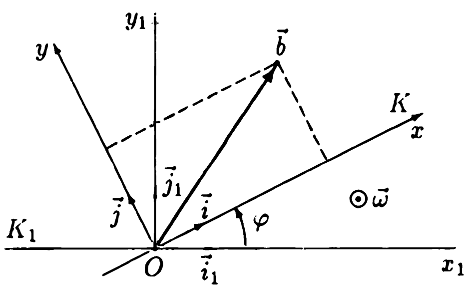

Рис. 11.3. Неинерциальная система отсчета K вращается относительно инерциальной системы отсчета K_1

Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$, определяющие направления координатных осей x и y неинерциальной системы отсчета K, будут вращаться вместе с ней и только иногда будут совпадать с векторами $\vec{i}_1$ и $\vec{j}_1$ инерциальной системы отсчета K_1. Вследствие этого один и тот же вектор в разных системах отсчета будет иметь различные координаты. Например, некоторый вектор $\vec{b}$

можно представить так:

$$\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\,, \quad \text{или} \quad \vec{b} = b_z^{(1)}\,\vec{i}_1 + b_y^{(1)}\,\vec{j}_1 + b_z^{(1)}\,\vec{k}\,, \tag{11.10}$$

где $\{b_x, b_y, b_z\}$ и $\{b_x^{(1)}, b_y^{(1)}, b_z^{(1)}\}$ – координаты этого вектора в системах отсчета K и K_1 соответственно. В частности, радиус-вектор $\vec{r}$ произвольной точки P пространства также можно записать в виде разложений (рис. 11.4)

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \equiv x_1\,\vec{i}_1 + y_1\,\vec{j}_1 + z_1\,\vec{k}\,. \tag{11.11}$$

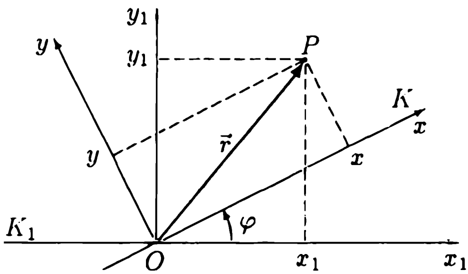

Рис. 11.4. К выводу формул преобразования координат

Нетрудно показать , что проекции x, y, z и x_1, y_1, z_1 вектора $\vec{r}$ связаны соотношениями

$$x_1 = x\,\cos\varphi - y\,\sin\varphi\,, \quad y_1 = x\,\sin\varphi + y\,\cos\varphi\,, \quad z_1 = z\,, \tag{11.12}$$

которые называются *формулами преобразования координат* при повороте координатных осей на угол φ. В этих формулах φ есть угол между координатными осями x и x_1. Если система отсчета K вращается относительно системы K_1 с постоянной угловой скоростью ω, то зависимость угла φ от времени выражается линейной функцией

$$\varphi = \varphi_o + \omega\,t\,. \tag{11.13}$$

Разрешив равенство (11.12) относительно x, y и z, получим *формулы обратного преобразования координат*

$$x = x_1\,\cos\varphi + y_1\,\sin\varphi\,, \quad y = -\,x_1\,\sin\varphi + y_1\,\cos\varphi\,, \quad z = z_1\,. \tag{11.14}$$

Аналогичные соотношения связывают координаты любого вектора. Например, для вектора $\vec{b}$ будем иметь

$$b_x = b_x^{(1)}\,\cos\varphi + b_y^{(1)}\,\sin\varphi\,,$$

$$b_y = -\,b_x^{(1)} \sin\varphi + b_y^{(1)} \cos\varphi\,, \qquad b_z = b_z^{(1)}\,. \tag{11.15}$$

Рассмотрим движение некоторой материальной точки в пространстве. Относительно системы отсчета K это движение описывается функциями

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)\,; \tag{11.16}$$

тогда как в системе отсчета K_1 оно описывается функциями

$$x_1 = x_1(t)\,, \qquad y_1 = y_1(t)\,, \qquad z_1 = z_1(t)\,. \tag{11.17}$$

Эти функции связаны между собой соотношениями (11.12), продифференцировав которые по времени, получим:

$$\dot x_1 = (\dot x - \omega\, y)\,\cos\varphi - (\dot y + \omega\, x)\,\sin\varphi\,,$$

$$\dot y_1 = (\dot x - \omega\, y)\,\sin\varphi + (\dot y + \omega\, x)\,\cos\varphi\,, \qquad \dot z_1 = \dot z\,. \tag{11.18}$$

Дифференцирование по времени обеих частей этих равенств дает

$$\ddot x_1 = (\ddot x - 2\,\omega\,\dot y - \omega^2\,x)\,\cos\varphi - (\ddot y + 2\,\omega\,\dot x - \omega^2\,y)\,\sin\varphi\,,$$

$$\ddot y_1 = (\ddot x - 2\,\omega\,\dot y - \omega^2\,x)\,\sin\varphi + (\ddot y + 2\,\omega\,\dot x - \omega^2\,y)\,\cos\varphi\,,$$

$$\ddot z_1 = \ddot z\,. \tag{11.19}$$

Разрешив равенства (11.19) относительно выражений в круглых скобках, придем к соотношениям

$$\ddot x - 2\,\omega\,\dot y - \omega^2\,x = \ddot x_1\,\cos\varphi + \ddot y_1\,\sin\varphi\,,$$

$$\ddot y + 2\,\omega\,\dot x - \omega^2\,y = -\,\ddot x_1\,\sin\varphi + \ddot y_1\,\cos\varphi\,, \qquad \ddot z = \ddot z_1\,. \tag{11.20}$$

Разложения по единичным ортам вектора ускорения $\vec a_1$ материальной точки относительно инерциальной системы отсчета K_1 имеют вид

$$\vec a_1 = a_{x_1}\,\vec i + a_{y_1}\,\vec j + a_{z_1}\,\vec k = \ddot x_1\,\vec i_1 + \ddot y_1\,\vec j_1 + \ddot z_1\,\vec k\,.$$

С учетом этих равенств формулы (11.15) преобразования координат вектора для вектора $\vec a_1$ можно записать так:

$$a_{x_1} = \ddot x_1\,\cos\varphi + \ddot y_1\,\sin\varphi\,, \qquad a_{y_1} = -\,\ddot x_1\,\sin\varphi + \ddot y_1\,\cos\varphi\,, \qquad a_{z_1} = \ddot z_1\,.$$

Сравнив эти равенства и равенства (11.20), приходим к выводу, что правые части равенств (11.20) представляют собой проекции a_{x_1}, a_{y_1}, a_{z_1} вектора $\vec a_1$ на единичные орты $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ системы отсчета K:

$$a_{x_1} = \ddot x - 2\,\omega\,\dot y - \omega^2\,x\,, \qquad a_{y_1} = \ddot y + 2\,\omega\,\dot x - \omega^2\,y\,, \qquad a_{z_1} = \ddot z\,.$$

Подставим эти выражения в закон Ньютона (11.1), записанный в координатной форме

$$m\, a_{x_1} = F_x\,, \qquad m\, a_{y_1} = F_y\,, \qquad m\, a_{z_1} = F_z\,, \tag{11.21}$$

где F_x, F_y, F_z – проекции вектора силы $\vec{F}$ на орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Получим уравнения, описывающие движение материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета K:

$$m\,\ddot{x} = F_x + 2\,m\,\omega\,\dot{y} + m\,\omega^2\,x\,,$$

$$m\,\ddot{y} = F_y - 2\,m\,\omega\,\dot{x} + m\,\omega^2\,y\,, \qquad m\,\ddot{z} = F_z\,. \tag{11.22}$$

Используя вектор угловой скорости

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}\,,$$

эти уравнения можно записать в векторной форме

$$m\,\vec{a} = \vec{F} - 2\,m\,[\vec{\omega}\,\vec{v}\,] - m\,\big[\,\vec{\omega}\,[\,\vec{\omega}\,\vec{r}\,]\big]\,, \tag{11.23}$$

где

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}\,, \qquad \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

векторы скорости и ускорения материальной точки в системе отсчета K. В справедливости уравнения (11.23) нетрудно убедиться, подставив в него разложения векторов $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ и $\vec{\omega}$ по единичным ортам $\vec{i}$, $\vec{i}$, $\vec{k}$. Вычислив произведения и приравняв коэффициенты при векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ в левой и правой частях полученного равенства, придем к уравнениям (11.22). Преимущество векторной формы записи уравнений движения выражается в частности в том, что уравнение (11.23) сохраняет свой вид в любой системе отсчета, которая неподвижна относительно системы отсчета K и имеет с ней общее начало.

Из уравнений (11.2) и (11.23) следует, что ускорения $\vec{a}$ и $\vec{a}_1$ отличаются друг от друга на вектор

$$\vec{a}_o = 2\,[\,\vec{\omega}\,\vec{v}\,] + \big[\,\vec{\omega}\,[\,\vec{\omega}\,\vec{r}\,]\big]\,.$$

Первое слагаемое в этом выражении называется *ускорением Кориолиса* (Гюстав Кориолис (1792 – 1843) – французский физик), а второе – *центростремительным ускорением.*

Так как уравнения (11.3) и (11.23) эквивалентны, при их сравнении найдем, что сила инерции в рассматриваемом случае равна

$$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_{кор} + \vec{F}_{цб}\,, \tag{11.24}$$

где вектор

$$\vec{F}_{кор} = -2m[\vec{\omega}\,\vec{v}] \tag{11.25}$$

называется *силой Кориолиса*, а вектор

$$\vec{F}_{цб} = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{r}]] \tag{11.26}$$

– *центробежной силой*. Как видно из формулы (11.25), сила Кориолиса действует на частицу, которая движется относительно вращающейся системы отсчета. Из формулы (11.26) следует, что центробежная сила действует на частицу во вращающейся системе отсчета независимо от того, движется она или покоится относительно этой системы отсчета. Из уравнений (11.22) или из формулы (11.26) можно найти, что проекции вектора центробежной силы равны

$$F_{цб_x} = m\omega^2 x\,, \qquad F_{цб_y} = m\omega^2 y\,, \qquad F_{цб_z} = 0\,.$$

Из этих формул следует, что центробежную силу можно описать формулой

$$\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{R}\,, \tag{11.27}$$

где

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

есть вектор, перпендикулярный к оси z, т.е. к оси вращения системы отсчета K. Таким образом, действующая на частицу во вращающейся системе отсчета центробежная сила направлена от оси вращения и перпендикулярна к этой оси (рис. 11.5). Причем модуль центробежной силы равен

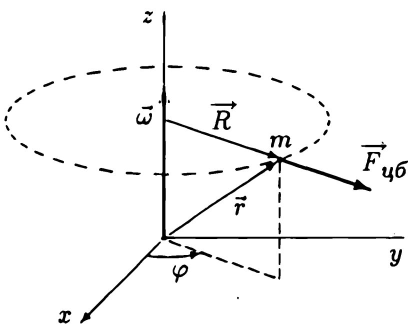

Рис. 11.5. Центробежная сила

$$F_{цб} = m\omega^2 R\,, \tag{11.28}$$

где R – расстояние от частицы до оси вращения. Рассмотрим несколько примеров, которые демонстрируют действие силы Кориолиса и центробежной силы.

Пример 1. Рассмотрим силы, которые действуют на тело, совершающее равномерное движение по окружности. Горизонтальный диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. На диске лежит небольшое тело, которое удерживается на его поверхности силой трения. С точки зрения наблюдателя в неинерциальной системе отсчета, связанной с диском, тело покоится потому, что действующие на него сила трения и центробежная сила инерции уравновешивают друг друга:

$$F_{mp} - m\,\omega^2 R = 0\,. \qquad (11.29)$$

С точки зрения наблюдателя в инерциальной системе отсчета тело движется по окружности. Это движение можно описать при помощи второго закона Ньютона:

$$m\,\frac{v^2}{R} = F_{mp}\,.$$

С учетом того, что линейная и угловая скорости связаны соотношением $v = \omega\,R$, придем к уравнению

$$m\,\omega^2 R = F_{mp}\,,$$

которое, как нетрудно видеть, эквивалентно уравнению (11.29), полученному при рассмотрении тела с точки зрения наблюдателя во вращающейся системе отсчета. Данный пример показывает, что оба эти способа исследования равноценны.

Пример 2. Исследуем влияние центробежной силы на величину ускорения свободного падения тел у поверхности Земли. В тех случаях, когда требуется исследовать движение тел относительно земной поверхности с достаточно высокой точностью, необходимо учитывать действие сил инерции, вызванных вращением Земли вокруг своей оси.

Сила тяжести $\vec{P}$, с которой Земля действует на какое-либо тело, обусловлена не только притяжением тела к Земле, но и действием на это тело центробежной силы:

$$\vec{P} = \vec{F}_{грав} + \vec{F}_{цб}\,. \qquad (11.30)$$

Сила тяготения $\vec{F}_{грав}$ направлена к центру Земли (рис. 11.6), а центробежная сила $\vec{F}_{цб}$ перпендикулярна ее оси. Практически наблюдаемое значение g^* ускорения свободного падения пропорционально силе тяжести:

$$P = m\,g^*\,.$$

Определяемое силой тяготения без учета центробежной силы значение ускорения g удовлетворяет соотношению

$$F_{грав} = m\,g\,.$$

Расстояние R от рассматриваемого тела до оси вращения Земли является функцией географической широты φ точки земной поверхности, в которой находится это тело:

$$R = R_o \cos\varphi ,$$

где R_o – радиус Земли. С учетом этой зависимости модуль (11.28) центробежной силы будет равен

$$F_{цб} = m\,\omega^2 R_o \cos\varphi ,$$

где ω – угловая скорость вращения Земли.

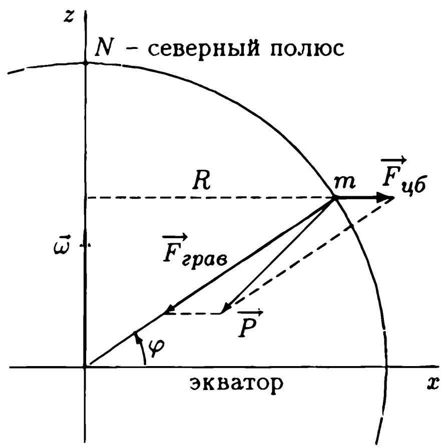

Рис. 11.6. Центробежная сила влияет на величину ускорения свободного падения тел на Землю

Возведем уравнение (11.30) в квадрат. Подставив в полученное таким образом равенство выражения для модулей сил, после несложных преобразований придем к формуле

$$g^* = \left(g^2 - 2\,g\,\omega^2 R_o \cos\varphi + \omega^4 R_o^2 \cos^2\varphi \right)^{1/2} , \qquad (11.31)$$

которая определяет зависимость ускорения g^* свободного падения от широты φ. Согласно этой формуле наибольшее значение

$$g^*_{max} = g$$

ускорение свободного падения принимает на полюсах Земли при $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, а наименьшее

$$g^*_{min} = g - \omega^2 R_o$$

– на экваторе при $\varphi = 0$.

Прямая линия, вдоль которой направлена нить с подвешенным на ней покоящемся телом, называется *вертикалью*, или *линией отвеса*. Направление силы тяжести $\vec{P} = m\,\vec{g}^*$ совпадает с вертикальным направлением. Поэтому прямая, проходящая через центр Земли и какую-либо точку на ее поверхности, вообще говоря, не совпадает с линией отвеса в этой точке. Вертикаль направлена к центру Земли только на полюсах, где центробежная сила равна нулю, и на экваторе, где эта сила коллинеарна силе тяготения.

Пример 3. Одним из наиболее наглядных доказательств суточного вращения Земли вокруг своей оси является опыт с маятником, впервые проведенный Фуко в 1851 году (Жан Фуко (1819 – 1868) – французский физик-экспериментатор). Этот маятник представляет собой массивное тело (обычно это шар), подвешенное на длинном тросе для того, чтобы период колебаний был как можно большим. Крепление верхнего конца троса устроено так, что оно дает возможность маятнику свободно качаться в любом направлении практически без трения. Если заставить маятник совершать колебания в вертикальной плоскости, то ее положение по отношению к инерциальной системе отсчета не должно изменяться с течением времени, так как действующие на маятник силы (сила тяжести, реакция нити и сила сопротивления воздуха) лежат в этой плоскости и не могут заставить его двигаться в перпендикулярном к ней направлении, т.е. не могут изменить ориентацию плоскости качания маятника относительно инерциальной системы отсчета.

При длительном наблюдении за маятником Фуко видно, что плоскость качаний маятника медленно поворачивается вокруг вертикальной прямой, проходящей через точку, в которой закреплен верхний конец троса (рис. 11.7). Причем в северном полушарии плоскость качаний поворачивается по направлению часовой стрелки, если смотреть на маятник сверху, а в южном полушарии – в противоположном направлении. На экваторе плоскость качаний маятника остается неподвижной.

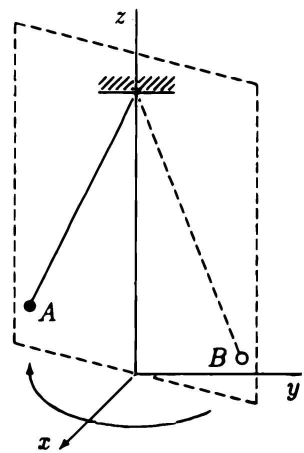

Рис. 11.7. Вращение плоскости качаний маятника Фуко

Поведение маятника Фуко можно объяснить действием силы Кориолиса (11.25). В северном полушарии сила Кориолиса отклоняет маятник вправо по ходу его движения (рис. 11.8). В результате действия этой силы траектория движения маятника в горизонтальной плоскости искривляется так, что маятник, совершив полное колебание, спустя время, равное периоду колебаний, при обратном движении приходит в точку A_2, не совпадающую с точкой A_1, в которой он находился период назад. Таким образом, плоскость качаний маятника поворачивается относительно Земли.

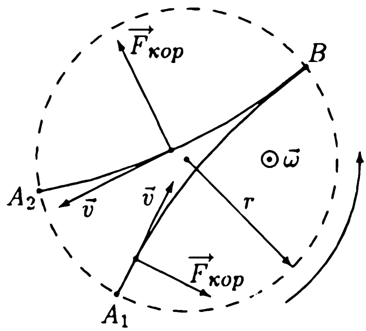

Рис. 11.8. Действие силы Кориолиса на маятник Фуко

С точки зрения наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчета, ориентация плоскости качаний маятника остается неизменной, а Земля поворачивается под маятником. Рассмотрим три точки A, B и C земной поверхности, расположенные на одном и том же меридиане на расстоянии r одна от другой (рис. 11.9). Скорости этих точек в инерциальной системе отсчета равны соответственно

$$v_A = \omega R_A\,, \qquad v_B = \omega R_B\,, \qquad v_C = \omega R_C\,,$$

где R_A, R_B и R_C – расстояния от точек A, B и C до оси вращения Земли. Точки A и B движутся относительно точки C так, что их относительные скорости $\vec{v}_A - \vec{v}_C$ и $\vec{v}_B - \vec{v}_C$ равны по величине и противоположны по направлению, т.е. точки A и B как бы вращаются вокруг точки C по окружности радиуса r со скоростью

$$v = v_C - v_A = v_B - v_C = \omega\,(R_C - R_A) = \omega\, r\, \sin\varphi\,.$$

Время полного оборота плоскости качаний маятника найдем по формуле

$$T_0 = \frac{2\,\pi\, r}{v} = \frac{2\,\pi}{\omega\,\sin\varphi} = \frac{T}{\sin\varphi}\,,$$

где $T = 2\pi/\omega$ – продолжительность суток. Из этих формул следует, что скорость вращения плоскости качаний маятника Фуко вокруг линии отвеса максимальна на полюсах Земли ($T_{o_{max}} = T$) и равна нулю на экваторе.

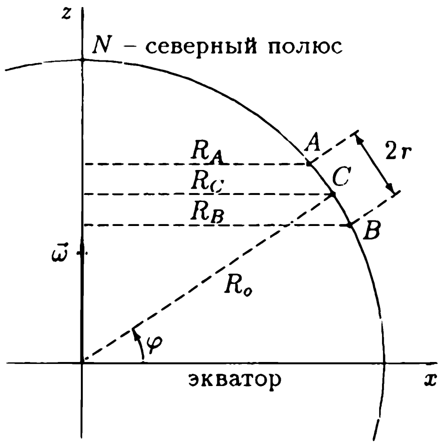

Рис. 11.9. К объяснению вращения плоскости качаний маятника Фуко

Пример 4. Рассмотрим свободное падение тела на Землю. Пусть из точки A, неподвижной относительно Земли и расположенной на высоте h над ее поверхностью, без начальной скорости свободно падает небольшое тело. Опыт показывает, что такое тело касается поверхности Земли не в точке B, которая лежит на проходящей через точку A линии отвеса, а в некоторой точке B' на расстоянии s к востоку от точки B. Земной наблюдатель должен сделать вывод, что падающее тело отклоняется к востоку от линии отвеса под действием силы Кориолиса (рис. 11.10).

Рассмотрим теперь движение свободно падающего без начальной скорости тела с точки зрения наблюдателя в инерциальной системе отсчета. Если смотреть на Землю со стороны северного полюса (рис. 11.11), то видно, что точки A и B вращаются по окружностям, радиусы которых

$$R_A = (R_o + h)\cos\varphi \quad \text{и} \quad R_B = R_o \cos\varphi$$

удовлетворяют неравенству

$$R_A > R_B\,.$$

Вследствие этого скорость v_A точки A будет больше скорости v_B точки B на величину

$$v = v_A - v_B = \omega\, h \cos\varphi\,.$$

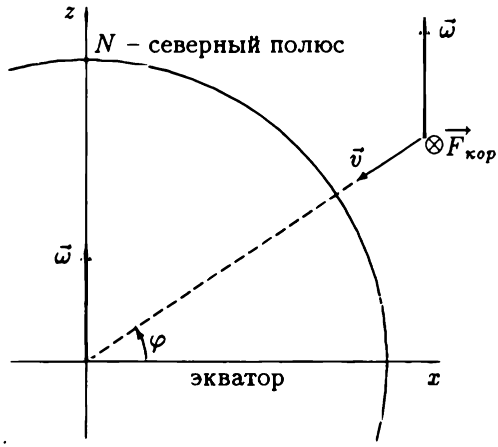

Рис. 11.10. Действие силы Кориолиса на падающее тело

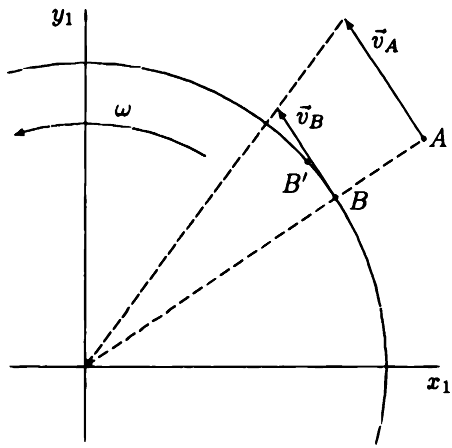

Рис. 11.11. Падающее на Землю тело отклоняется к востоку от линии отвеса

Тело, падающее на Землю из точки A, будет двигаться в начальный момент времени относительно инерциальной системы отсчета со скоростью $\vec{v}_A$. Так как эта скорость больше скорости точки B на земной поверхности, тело, приближаясь к Земле, будет отклоняться к востоку от линии отвеса со скоростью v относительно Земли. Время τ падения тела можно найти из уравнения равноускоренного движения

$$h = \frac{1}{2} g \tau^2 .$$

За это время тело отклонится к востоку на величину

$$s = v\,\tau = \omega\,h\sqrt{\frac{2\,h}{g}}\,\cos\varphi\,. \tag{11.32}$$

Из этой формулы видно, что отклонение от вертикали падающего на Землю без начальной скорости тела равно нулю на полюсах и максимально на экваторе. Если тело падает с высоты h=100 *м*, то согласно формуле (11.32) его отклонение от вертикали на экваторе будет $s \simeq 3$ *см*.

Пример 5. Сила Кориолиса влияет на течение рек и атмосферные вихри. Как показывает пример с маятником Фуко, на тело, движущееся горизонтально у поверхности Земли, действует сила Кориолиса, которая в северном полушарии направлена перпендикулярно вектору его скорости вправо по отношению к направлению движения, а в южном полушарии – влево. Поэтому реки, текущие в северном полушарии, с большей интенсивностью подмывают правый берег. Вследствие чего этот берег всегда круче, чем левый. В южном полушарии, наоборот, реки подмывают свой левый берег.

Неравномерное нагревание различных областей земной атмосферы приводит к возникновению зон повышенного или пониженного давления воздуха. Перепады давления обусловливают движение обширных масс воздуха, который вытекает из зон повышенного давления и втягивается в зоны пониженного давления. В результате этих движений образуются крупномасштабные атмосферные вихри, называемые циклонами и антициклонами. Циклон – это спиральные ветры, дующие в области с низким давлением. Антициклон формируется в области с высоким давлением. На движущиеся над земной поверхностью массы воздуха действует сила Кориолиса, которая в северном полушарии отклоняет воздух вправо по ходу его движения, а в южном полушарии – влево. Поэтому в северном полушарии ветры в циклонах дуют вокруг зоны низкого давления против направления движения часовой стрелки, а в антициклонах – вокруг зоны высокого давления в противоположном направлении. Соответственно в южном полушарии ветры в циклонах дуют по часовой стрелке, а в антициклонах – против.

ГЛАВА 12
МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

12.1. Поле скоростей. Плотность потока массы

При определенных условиях газ или жидкость можно рассматривать не как совокупность отдельных молекул, а как сплошную (непрерывную) среду, не имеющую внутренней структуры. На этой модели основана теория, называемая гидроаэродинамикой, которая очень хорошо описывает движение жидкостей и достаточно плотных газов, но неприменима к разреженным газам.

Одной из основных характеристик сплошной среды является плотность массы ϱ, которая может изменяться от одной точки пространства к другой. Плотность может также изменяться с течением времени, если среда движется. Поэтому в общем случае плотность массы есть функция от времени и координат:

$$\varrho = \varrho(t, \vec{r})\,. \tag{12.1}$$

Зная эту функцию можно найти массу вещества, заполняющего в данный момент времени некоторую область пространства.

Частицей сплошной среды называется вещество, заполняющее физически бесконечно малый объем dV, т.е. объем, размеры которого малы по сравнению с характерными размерами рассматриваемой системы, но в то же время во много раз превышают среднее расстояние между молекулами. Масса dm вещества в объеме dV по определению равна произведению плотности на объем:

$$dm = \varrho(t, \vec{r})\,dV\,. \tag{12.2}$$

Масса m вещества в некоторой области пространства V равна сумме масс малых частиц сплошной среды, т.е. выражается объемным интегралом:

$$m(t) = \int\limits_V \varrho(t, \vec{r})\,dV\,. \tag{12.3}$$

Масса вещества в объеме V может изменяться с течением времени, если вещество протекает через поверхность S, ограничивающую этот объем.

В рамках теории сплошной среды различие между жидкостью и газом заключается только в характере зависимости плотности от давления. Жидкость практически несжимаема, т.е. ее плотность почти не меняется при изменении давления. Плотность газа, напротив, существенно зависит от давления. Поэтому в гидроаэродинамике газ называют *сжимаемой жидкостью*.

Отличительной особенностью жидкостей и газов является их *текучесть*. Течение жидкости описывают при помощи зависимости от времени t скорости $\vec{v}$ произвольной малой частицы жидкости, положение которой задается радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{r})\,. \tag{12.4}$$

Эта функция (векторное поле) для любой точки $\vec{r}$ пространства, заполненного жидкостью, определяет вектор $\vec{v}$ скорости ее малой частицы, которая оказалась в этой точке в момент времени t. Такое векторное поле называется *полем скоростей*.

Для того чтобы составить более ясное представление о характере векторного поля (12.4), ему дают следующую геометрическую интерпретацию. В пространстве, заполненном движущейся жидкостью, строят семейство воображаемых линий таких, что касательная к линии, проходящей через произвольную точку, в любой момент времени совпадает по направлению с вектором скорости жидкости в этой точке. Такие линии называются *линиями тока жидкости* (рис. 12.1).

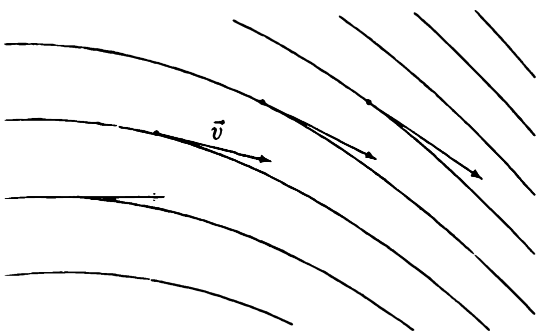

Рис. 12.1. Линии тока жидкости

В общем случае направление вектора скорости в различных точках пространства изменяется со временем и картина линий тока также непрерывно меняется. Если же вектор скорости жидкости в каждой точке пространства со временем не изменяется, то течение жидкости называется *стационарным*, или *установившимся*. В таком случае каждая частица жидкости проходит данную точку пространства с одной и той же соответствующей этой точке скоростью:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})\,.$$

При этом семейство линий тока также не изменяется со временем, а сами линии тока совпадают с траекториями движения частиц жидкости.

При стационарном движении жидкость можно разделить на слои, которые скользят друг относительно друга, не перемешиваясь. Поэтому такое движение называется *ламинарным*, т.е. слоистым. Это название происходит от латинского "*lamina*", что означает пластинка или полоска. Нестационарное течение жидкости, сопровождающееся ее интенсивным перемешиванием, называется *турбулентным*.

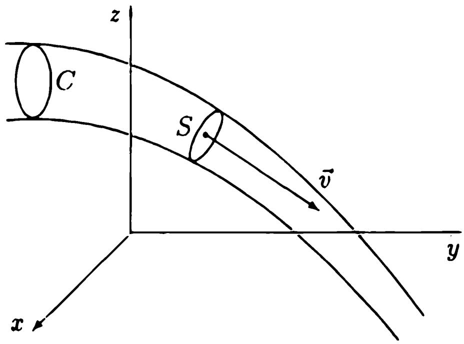

Рис. 12.2. Трубка тока

Построим в среде небольшой воображаемый контур C. Линии тока, проходящие через точки этого контура, образуют поверхность, называемую *трубкой тока* (рис. 12.2). Часть жидкости, ограниченная трубкой тока, называется *струйкой*. Обычно рассматривают только очень узкие трубки тока, такие что в любой точке поперечного сечения струйки скорость течения жидкости $\vec{v}$ можно считать одинаковой.

Рассмотрим часть трубки тока, заключенную между двумя параллельными плоскостями *1* и *2* (рис. 12.3), расстояние между которыми таково, что длина отсекаемых ими отрезков линий тока равна пути $v\,dt$, преодолеваемому частицей жидкости за время dt. Такая часть трубки тока представляет собой цилиндр, объем которого dV равен произведению площади основания dS (т.е. площади сечения трубки тока) на высоту $v\,dt\,|\cos\alpha\,|$, где α – угол между вектором скорости и перпендикуляром к плоскости сечения:

$$dV = v\,dt\,|\cos\alpha\,|\,dS\,,$$

где

$$0 \le \alpha \le \pi\,.$$

Частица жидкости, которая в некоторый момент времени находилась в сечении *1*, за время dt переместится в сечение *2*. Очевидно, что вся жидкость, занимавшая объем dV рассматриваемой части трубки тока, за время dt вытечет из нее через сечение *2*. Масса этой жидкости будет

$$dm = \varrho\, dV = \varrho\, v\, dt\, |\cos\alpha|\, dS\,. \tag{12.5}$$

Другими словами, это есть масса жидкости, протекающей за время dt через плоскую поверхность площадью dS, ориентированную под углом α к скорости $\vec{v}$ течения жидкости.

Вектор

$$\vec{j} = \varrho\, \vec{v} \tag{12.6}$$

называется *плотностью потока массы*. Смысл этого вектора заключается в том, что 1) согласно формуле (12.5) его модуль

$$j = \varrho\, v$$

равен массе жидкости, протекающей за единицу времени ($dt = 1$ *с*) через единицу площади ($dS = 1$ *м*^{2}) поверхности, перпендикулярной к линиям тока ($\cos\alpha = 0$), 2) его направление совпадает с направлением вектора $\vec{v}$ скорости течения жидкости в данной точке пространства. Так как плотность массы (12.1) и вектор скорости жидкости (12.4) в общем случае зависят от времени и координат точки пространства, вектор плотности потока массы также будет зависеть от этих аргументов:

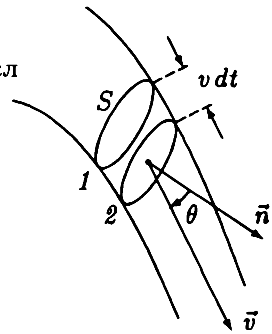

Рис. 12.3. К вычислению расхода массы

$$\vec{j} = \vec{j}(t, \vec{r})\,.$$

Построим в сплошной среде произвольную воображаемую поверхность S. Разобьем ее на бесконечно малые части (элементы поверхности), площадь одной из которых обозначим dS (рис. 12.4). Ввиду того, что размеры элемента поверхности бесконечно малы, сам элемент будет почти плоским. Построим в произвольной точке P элемента поверхности вектор $\vec{n}$, который 1) перпендикулярен к поверхности S в данной точке и 2) имеет модуль, равный единице. Такой вектор $\vec{n}$ называется *единичной нормалью* к поверхности в точке P. Тогда как коллинеарный к нему вектор

$$\overrightarrow{dS} = \vec{n}\, dS \tag{12.7}$$

называется *векторным элементом поверхности* S.

Пусть в точке P вектор плотности потока массы принимает значение $\vec{j}$. Скалярное произведение векторов $\vec{j}$ и $\overrightarrow{dS}$

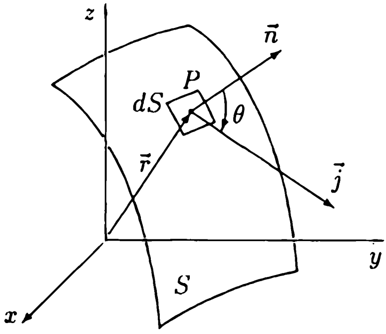

Рис. 12.4. К определению потока вектора $\vec{j}$

$$\vec{j}\,\overrightarrow{dS} \equiv \vec{j}\,\vec{n}\,dS \qquad (12.8)$$

называется *потоком вектора* $\vec{j}$ через элемент поверхности $\overrightarrow{dS}$, или *элементарным потоком вектора* $\vec{j}$. Используя определение скалярного произведения, выражение (12.8) можно записать так:

$$\vec{j}\,\overrightarrow{dS} = j_n\,dS = j\,\cos\alpha\,dS\,, \qquad (12.9)$$

где

$$j_n = j\,\cos\alpha$$

– проекция вектора $\vec{j}$ на вектор $\vec{n}$, α – угол между этими векторами, т.е. угол, который образует вектор $\vec{j}$ плотности потока массы с нормалью $\vec{n}$ к поверхности в точке P. Из этих формул следует, что поток вектора $\vec{j}$ положителен при условии $0 \leq \alpha < \pi/2$, т.е. когда жидкость протекает через элемент поверхности dS в направлении, указываемом нормалью $\vec{n}$, и – отрицателен при $\pi/2 < \alpha \leq \pi$, когда жидкость течет в противоположном направлении.

При сравнении выражений (12.5) и (12.9) видно, что модуль $|\vec{j}\,\overrightarrow{dS}\,|$ потока вектора $\vec{j}$ через элемент поверхности $\overrightarrow{dS}$ есть масса жидкости, протекающей через этот элемент за единицу времени.

Алгебраическая сумма потоков $\vec{j}\,\overrightarrow{dS}$ через все элементы поверхности S, т.е. поверхностный интеграл

$$\mu = \int\limits_S \vec{j}\,\overrightarrow{dS} \qquad (12.10)$$

называется *потоком вектора* $\vec{j}$ через поверхность S, или *расходом массы*. Модуль величины μ есть масса жидкости, протекающей через поверхность S за единицу времени. Если $\mu > 0$, то жидкость протекает через поверхность S преимущественно в направлении вектора $\vec{n}$. Если же $\mu < 0$, то жидкость течет в противоположном направлении. Расход массы текущей через поверхность S жидкости может быть равен нулю. Такое возможно, когда через некоторые части поверхности жидкость течет в направлении вектора $\vec{n}$, а через другие – в противоположном направлении. Если при этом массы жидкости, переносимые в различных направлениях, одинаковы, то суммарный расход массы будет равен нулю.

Заметим, что знак потока (12.8) или расхода массы (12.10) определяется выбором направления вектора нормали $\vec{n}$. Вектор $-\vec{n}$ также является единичной нормалью к поверхности в данной точке. Поэтому замена $\vec{n}$ на $-\vec{n}$ в формулах (12.8) – (12.10) приведет к изменению знака этих выражений при сохранении их абсолютных значений.

12.2. Закон сохранения массы

Рассмотрим произвольную воображаемую замкнутую поверхность S, через которую в охватываемый ею объем V втекает и вытекает некоторая жидкость (рис. 12.5). Вследствие течения жидкости ее масса m в объеме V может изменяться со временем: $m = m(t)$. Расход массы μ через поверхность S есть поток вектора $\vec{j}$:

$$\mu = \oint_S \vec{j}\,\vec{n}\,dS\,. \tag{12.11}$$

Символ $\oint$ означает, что поверхность S является замкнутой. Для замкнутых поверхностей нормаль $\vec{n}$ условились направлять от поверхности S наружу. Такой вектор $\vec{n}$ называется *внешней нормалью* к поверхности.

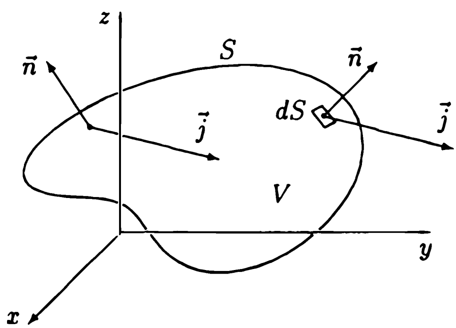

Рис. 12.5. К формулировке закона сохранения массы

Когда жидкость преимущественно вытекает из объема V, расход массы будет положителен. При этом масса m жидкости в объеме V уменьшается и ее приращение dm должно быть отрицательным. По определению за время dt через поверхность S в направлении внешней нормали переносится масса $\mu\,dt$. На эту величину уменьшается масса m жидкости в объеме V, т.е. приращение массы

$$dm = -\,\mu\,dt\,. \tag{12.12}$$

Эта формула учитывает также случай, когда жидкость втекает в рассматриваемый объем V. В этом случае расход массы отрицателен, а ее приращение положительно.

При помощи формул (12.3) и (12.11) равенство (12.12) можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \varrho\, dV = -\oint\limits_S \vec{j}\,\overrightarrow{dS}\,. \tag{12.13}$$

Это интегральное уравнение выражает собой закон сохранения массы жидкости.

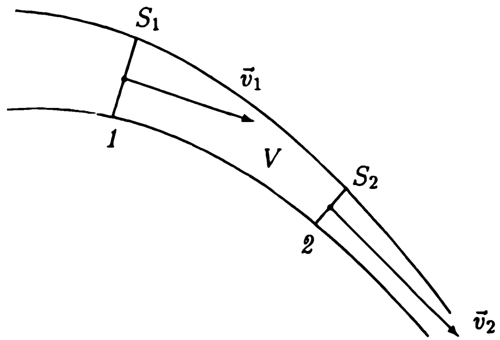

Рис. 12.6. Стационарное течение жидкости. Трубка тока

Рассмотрим стационарное течение жидкости в узкой трубке тока (рис. 12.6). Согласно формуле (12.5) масса жидкости, протекающей через поперечное сечение трубки тока ($\cos\alpha = 1$) за время dt, равна

$$dm = \varrho\, v\, S\, dt\,,$$

где S – площадь поперечного сечения, ϱ и v – значения плотности и скорости жидкости в этом сечении. Для установившегося течения масса жидкости в объеме V трубки тока между поперечными сечениями *1* и *2* со временем не изменяется. Следовательно, масса жидкости, втекающей за время dt в объем V через сечение *1*, равна массе жидкости, вытекающей за это время из объема V через сечение *2*:

$$\varrho_1\, v_1\, S_1 = \varrho_2\, v_2\, S_2\,. \tag{12.14}$$

Или, иначе говоря, расход массы

$$\mu = \varrho\, v\, S \tag{12.15}$$

в любом поперечном сечении трубки тока при стационарном течении жидкости должен быть одинаков:

$$\varrho\, v\, S = \text{const}\,. \tag{12.16}$$

Для несжимаемой жидкости равенства (12.14) и (12.16) принимают вид

$$v_1\,S_1 = v_2\,S_2 \qquad \text{и} \qquad v\,S = \mathrm{const}\ . \tag{12.17}$$

Из этих равенств следует, что скорость течения несжимаемой жидкости обратно пропорциональна площади поперечного сечения трубки тока: $v \sim 1/S$. Вследствие этого в местах сужения трубки тока жидкость течет с большей скоростью.

12.3. Гидростатика

На любую частицу жидкости у поверхности Земли действует сила тяготения. Кроме этого выделенная частица жидкости испытывает на себе воздействие со стороны окружающей ее жидкости, которое характеризуется определенными нормальным и касательным напряжениями. В неподвижной жидкости касательные напряжения отсутствуют, а нормальное напряжение (давление) в каждой точке пространства во всех направлениях одинаково, т.е. не зависит от ориентации поверхности, на которую оно действует.

Давление в жидкости изменяется от одной точки пространства к другой. В неподвижной жидкости у поверхности Земли давление зависит только от высоты z (или глубины): $P = P(z)$. Найдем условие, при котором находящаяся в однородном поле силы тяжести жидкость будет неподвижной. Для этого выделим в жидкости вертикальный цилиндрический объем, основания которого образованы горизонтальными плоскостями, соответствующими значениям аппликаты z и $z + dz$ (рис. 12.7). Давление жидкости у нижнего основания этого цилиндра равно $P(z)$, а у верхнего – $P(z + dz)$. Выделенная часть жидкости будет покоится при условии, что сумма всех действующих на нее сил равна нулю. В частности, должна быть равна нулю сумма проекций всех сил на ось z:

$$P(z)\,S - P(z + dz)\,S - \varrho\,g\,S\,dz = 0\,,$$

где S – площадь основания цилиндра. Так как разность $P(z + dz) - P(z)$ есть дифференциал dP функции $P(z)$, получим искомое условие равновесия жидкости в виде

$$\frac{dP}{dz} = -\,\varrho\,g\,. \tag{12.18}$$

Чтобы решить это уравнение, необходимо знать зависимость плотности от давления: $\varrho = \varrho(P)$.

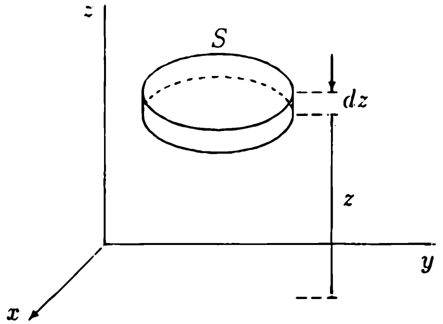

Рис. 12.7. Горизонтальный слой неподвижной жидкости

Для несжимаемой жидкости, когда $\varrho = \text{const}$, уравнение (12.18) имеет следующее решение:

$$P(z) = P(0) - \varrho\, g\, z\,. \qquad (12.19)$$

Как видно из этого соотношения, давление в покоящейся жидкости уменьшается с высотой (или увеличивается с глубиной) линейно.

Плотность газов меньше, чем плотность жидкостей, но является функцией от давления. Поэтому давление в газах не так сильно изменяется с высотой, но эта зависимость является более сложной, чем для жидкостей. Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона

$$P\,V = \frac{m}{M}\,R\,T\,,$$

которое описывает состояние идеального газа. Здесь m – масса газа в объеме V, M – молярная масса, R – универсальная газовая постоянная, T – температура газа. Так как плотность газа $\varrho = m/V$, уравнение состояния идеального газа можно записать так:

$$\varrho = \frac{M\,P}{R\,T}\,.$$

Из этого равенства следует, что при постоянной температуре плотность идеального газа прямо пропорциональна давлению:

$$\varrho = K\,P\,,$$

где $K = M/RT$ – положительная постоянная. Подстановка этой функции в уравнение (12.18) дает

$$\frac{dP}{dz} = -\,\alpha\,P\,,$$

где $\alpha = K\,g$. После разделения переменных это уравнение принимает вид

$$\frac{dP}{P} = -\,\alpha\,dz\,.$$

Интегрирование приводит к решению

$$P(z) = P(0)\,\exp\left(-\,\alpha\,z\right), \qquad (12.20)$$

из которого следует, что давление газа уменьшается с высотой по экспоненциальному закону при условии, что его температура всюду одна и та же.

12.4. Уравнение импульсов

Для описания движения жидкости и ее взаимодействия с окружающими телами можно использовать второй закон Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,. \tag{12.21}$$

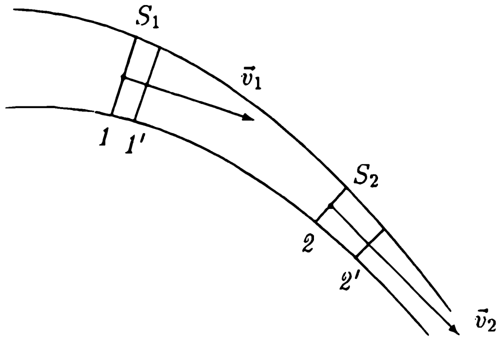

Рис. 12.8. К выводу законов стационарного течения жидкости

Рассмотрим несколько примеров на эту тему. При этом не будем учитывать силы внутреннего трения, т.е. будем считать жидкость идеальной. Выделим внутри стационарно текущей жидкости узкую трубку тока. Пусть $\vec{p}(t)$ есть импульс той части жидкости, которая в момент времени t занимала объем трубки тока между сечениями *1* и *2* (рис. 12.8), а $\vec{p}(t+dt)$ – импульс этой же жидкости в момент времени $t+dt$, когда она, сместившись вдоль трубки тока, стала занимать объем между сечениями *1'* и *2'*. Импульс $\vec{p}(t)$ равен сумме импульсов всех частиц жидкости в трубке тока между сечениями *1* и *2*. Этот импульс может быть представлен в виде суммы импульса $\vec{p}_1$ жидкости между сечениями *1* и *1'* и импульса $\vec{p}_{1'2}$ жидкости между сечениями *1'* и *2*:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_1 + \vec{p}_{1'2}\,.$$

Аналогично, импульс $\vec{p}(t+dt)$ равен сумме импульса $\vec{p}_{1'2}$ и импульса $\vec{p}_2$ жидкости между сечениями *2* и *2'*:

$$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}_{1'2} + \vec{p}_2\,.$$

Используя эти формулы, найдем приращение $d\vec{p}$ импульса выделенной части жидкости за время dt:

$$d\vec{p} = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 .$$

В силу закона сохранения массы при стационарном течении массы dm_1 и dm_2 жидкости между сечениями *1 – 1′* и *2 – 2′* одинаковы и определяются расходом массы μ:

$$dm_1 = dm_2 = \mu\, dt .$$

Поэтому импульсы этих частиц жидкости будут

$$\vec{p}_1 = dm_1\, \vec{v}_1 = \mu\, \vec{v}_1\, dt , \qquad \vec{p}_2 = dm_2\, \vec{v}_2 = \mu\, \vec{v}_2\, dt ,$$

а вектор приращения импульса выделенной части жидкости будет коллинеарен разности скоростей жидкости в сечениях *1* и *2*:

$$d\vec{p} = \mu\, (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\, dt .$$

Подставив это выражение в уравнение (12.21), получим так называемое *уравнение импульсов* для части струйки жидкости между сечениями *1* и *2*:

$$\mu\, (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F} , \qquad (12.22)$$

где $\vec{F}$ – сумма всех внешних сил, действующих на эту часть струйки.

Пример 1. Рассмотрим горизонтальную струйку идеальной жидкости (рис. 12.9). Применим уравнение импульсов для описания движения части жидкости между сечениями *1* и *2*.

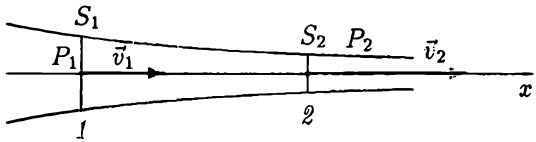

Рис. 12.9. Горизонтальная струйка жидкости

Направим ось x вдоль струйки и запишем уравнение (12.22) в проекциях входящих в него векторов на эту ось. На выделенную часть жидкости действует горизонтальная сила $P_1\, S_1$ давления со стороны жидкости, находящейся слева от сечения *1*, и горизонтальная сила $P_2\, S_2$ давления со стороны жидкости, находящейся справа от сечения *2*. Только эти две внешние силы имеют отличные от нуля проекции на ось x. В этом случае уравнение импульсов приводит к равенству

$$\mu\, (v_2 - v_1) = P_1\, S_1 - P_2\, S_2 .$$

С учетом закона сохранения массы (12.14) это уравнение можно записать так:

$$\left(P_1 + \varrho_1 v_1^2\right) S_1 = \left(P_2 + \varrho_2 v_2^2\right) S_2 . \tag{12.23}$$

Пример 2. Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости в изогнутой трубе (рис. 12.10). Труба имеет постоянное сечение и согнута под прямым углом. Выделим часть жидкости между сечениями *1* и *2*, одно из которых расположено до изгиба трубы, а другое – после. В первом сечении скорость течения жидкости – $\vec{v}_1$, а во втором – $\vec{v}_2$. Так как труба имеет постоянное сечение, а жидкость несжимаема, т.е. $\varrho_1 = \varrho_2$, из уравнения (12.14) следует, что модуль скорости жидкости в любом сечении одинаков:

$$v_1 = v_2 = v .$$

Вследствие этого вектор $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ будет направлен под углом $\pi/4$ к каждому из векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (рис. 12.10). По закону (12.22) сила $\overrightarrow{F}$, действующая на рассматриваемую часть жидкости со стороны стенок трубы, будет направлена так же, как вектор $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Модуль этой силы равен $\sqrt{2}\,\mu\, v$. В силу третьего закона Ньютона жидкость действует на стенки трубы с силой, которая имеет такую же величину, но противоположное направление.

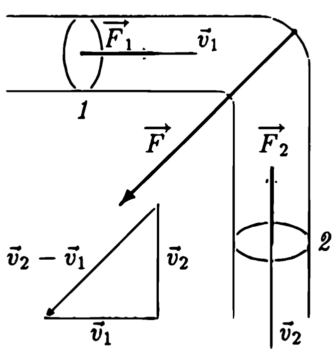

Рис. 12.10. Течение жидкости в изогнутой трубе

12.5. Закон сохранения энергии

Применим закон сохранения энергии для описания стационарного течения идеальной жидкости в однородном поле силы тяжести. Рассмотрим часть струйки жидкости, которая в момент времени t находилась между сечениями *1* и *2* (рис. 12.8). Энергия $E(t)$ этой части жидкости равна сумме энергии E_1 жидкости между сечениями *1* и *1'* и энергии $E_{1'2}$

жидкости между сечениями *1'* и *2*:

$$E(t) = E_1 + E_{1'2} \, .$$

Аналогично, энергия $E(t + dt)$ этой же части жидкости спустя время dt, когда она займет объем между сечениями *1'* и *2'*, будет равна сумме энергии $E_{1'2}$ и энергии E_2 жидкости между сечениями *2* и *2'*:

$$E(t + dt) = E_{1'2} + E_2 \, .$$

Используя эти формулы, найдем приращение dE энергии выделенной части жидкости за время dt:

$$dE = E(t + dt) - E(t) = E_2 - E_1 \, .$$

Каждая частица жидкости обладает кинетической, потенциальной и внутренней энергией. Так же как и другие виды энергии, внутренняя энергия U пропорциональна массе вещества, т.е. ее можно представить в виде произведения $m\,u$, где величина u называется *удельной внутренней энергией*. Это есть энергия, приходящаяся на единицу массы. Внутренняя энергия dU вещества массой dm будет равна $u\,dm$. Таким образом, можно записать следующие выражения для энергий E_1 и E_2:

$$E_i = \left(\frac{1}{2}\, v_i^2 + g\, h_i + u_i \right) dm \, ,$$

где $i = 1,\, 2$; v_i, h_i, u_i – значения скорости жидкости, высоты и удельной внутренней энергии в сечении i, $dm = \mu\, dt$. При этом приращение энергии выделенной части жидкости будет

$$dE = \left(\frac{1}{2}\, (v_2^2 - v_1^2) + g\, (h_2 - h_1) + u_2 - u_1 \right) \mu\, dt \, . \qquad (12.24)$$

Согласно закону сохранения энергии приращение полной энергии тела за некоторое время dt равно совершенной за это время работе действующих на тело неконсервативных сил:

$$dE = dA_{\text{нкс}} \, . \qquad (12.25)$$

В данном случае неконсервативными являются силы давления, с которыми на рассматриваемую часть струйки действует окружающая ее жидкость. Напомним, что жидкость считается идеальной и силы трения не учитываются. Так как силы давления, действующие на боковую поверхность струйки, перпендикулярны к скорости жидкости, их работа равна нулю. По формуле – работа равна произведению силы на перемещение – найдем работу сил давления, действующих в сечениях *1* и *2*:

$$dA_{нкс} = P_1\, S_1\, v_1\, dt - P_2\, S_2\, v_2\, dt\,. \qquad (12.26)$$

Подстановка выражений (12.24) и (12.26) в закон сохранения энергии (12.25) после несложных преобразований приводит к уравнению

$$\frac{1}{2}\, v_1^2 + g\, h_1 + u_1 + \frac{P_1}{\varrho_1} = \frac{1}{2}\, v_2^2 + g\, h_2 + u_2 + \frac{P_2}{\varrho_2}\,, \qquad (12.27)$$

которое было получено Даниилом Бернулли (1700 – 1782). Это уравнение можно записать иначе:

$$\frac{1}{2}\, v^2 + g\, h + u + \frac{P}{\varrho} = \text{const} \qquad (12.28)$$

вдоль линии тока.

Удельная энергия u зависит от температуры T вещества. Во многих случаях (например, для идеального газа) она прямо пропорциональна абсолютной температуре:

$$u = c_V\, T\,,$$

где коэффициент пропорциональности c_V называется *удельной теплоемкостью вещества при постоянном объеме.*

Если температура жидкости при ее движении не изменяется, то $u_1 = u_2$ и уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{1}{2}\, v_1^2 + g\, h_1 + \frac{P_1}{\varrho_1} = \frac{1}{2}\, v_2^2 + g\, h_2 + \frac{P_2}{\varrho_2} \qquad (12.29)$$

или

$$\frac{1}{2}\, v^2 + g\, h + \frac{P}{\varrho} = \text{const}$$

вдоль линии тока.

Для горизонтальной струйки (рис. 12.9) несжимаемой жидкости уравнение Бернулли (12.29) приводит к равенству

$$\frac{1}{2}\, \varrho\, v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\, \varrho\, v_2^2 + P_2\,.$$

На основании этого равенства можно утверждать, что *вследствие увеличения скорости в местах сужения струйки давление жидкости уменьшается.*

ГЛАВА 12*

МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

(продолжение)

12.6. Теорема Остроградского – Гаусса

Пусть в пространстве задано векторное поле, которое представлено зависимостью

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$$

некоторого вектора $\vec{a}$ от радиус-вектора $\vec{r}$. Поток вектора $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S обозначается так:

$$\oint\limits_S \vec{a}\,\overrightarrow{dS} \equiv \oint\limits_S \vec{a}\,\vec{n}\,dS\,, \tag{12.30}$$

где вектор $\vec{n}$ есть внешняя нормаль к поверхности.

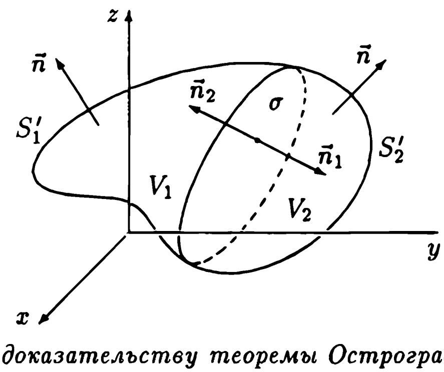

Рис. 12.11. К доказательству теоремы Остроградского – Гаусса

Замкнутая поверхность S всегда ограничивает некоторый объем V. Разделим этот объем на две части V_1 и V_2 поверхностью σ (рис. 12.11), которая делит поверхность S также на две части S_1' и S_2': $S = S_1' + S_2'$. Поверхность S_1, ограничивающая объем V_1, состоит из поверхностей S_1' и σ: $S_1 = S_1' + \sigma$, а поверхность S_2, ограничивающая объем V_2, – из S_2' и σ: $S_2 = S_2' + \sigma$. Поэтому потоки вектора $\vec{a}$ через замкнутые поверхности S_1 и S_2 в направлении внешних нормалей к этим поверхностям можно записать так:

$$\oint\limits_{S_1} \vec{a}\,\vec{n}_1\,dS = \int\limits_{S_1'} \vec{a}\,\vec{n}_1\,dS + \int\limits_{\sigma} \vec{a}\,\vec{n}_1\,dS\,, \tag{12.31}$$

$$\oint\limits_{S_2} \vec{a}\,\vec{n}_2\,dS = \int\limits_{S_2'} \vec{a}\,\vec{n}_2\,dS + \int\limits_{\sigma} \vec{a}\,\vec{n}_2\,dS\,. \tag{12.32}$$

На границе раздела σ внешние нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ к поверхностям S_1 и S_2 соответственно таковы, что

$$\vec{n}_1 + \vec{n}_2 = 0\,.$$

С учетом этого условия сложение равенств (12.31) и (12.32) дает

$$\oint\limits_{S_1} \vec{a}\,\vec{n}_1\,dS + \oint\limits_{S_2} \vec{a}\,\vec{n}_2\,dS = \oint\limits_{S} \vec{a}\,\vec{n}\,dS\,. \tag{12.33}$$

Таким образом, приходим к выводу, что сумма потоков через поверхности, ограничивающие объемы V_1 и V_2, равна потоку через поверхность, ограничивающую объем $V_1 + V_2$. В свою очередь каждый из объемов V_1 и V_2 можно также разделить на две части. Эту операцию можно проделать сколько угодно раз. Применяя при каждом разделении формулу (12.33), докажем в результате следующее утверждение. Сумма потоков некоторого вектора $\vec{a}$ через поверхности S_i, ограничивающие объемы V_i, которые все вместе составляют объем

$$V = \sum_i V_i\,,$$

равна потоку этого вектора через поверхность S, ограничивающую объем V:

$$\sum_i \oint\limits_{S_i} \vec{a}\,\overrightarrow{dS} = \oint\limits_{S} \vec{a}\,\overrightarrow{dS}\,. \tag{12.34}$$

Вычислим поток вектора $\vec{a}$ через поверхность бесконечно малого параллелепипеда, ребра которого параллельны координатным осям x, y, z и равны соответственно dx, dy, dz (рис. 12.12). Параллелепипед имеет шесть граней. Грань S_1 параллельна плоскости x-z, проходит через точку (x, y, z), а ее площадь равна $dx\,dz$. Внешняя нормаль к этой грани $\vec{n} = -\vec{j}$. Поэтому поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S_1 будет

$$\int\limits_{S_1} \vec{a}\,\overrightarrow{dS} = -\int\limits_{S_1} a_{y_1}\,dx\,dz\,,$$

где $a_{y_1} = a_y(P)$ – проекция вектора $\vec{a}$ на ось y как функция точки $P \in S_1$. Так как размеры грани S_1 бесконечно малы, функцию a_{y_1} можно заменить ее значением в любой точке этой грани. Положим $a_{y_1} = a_y(x,\, y,\, z)$. Получим:

$$\int\limits_{S_1} \vec{a}\,\overrightarrow{dS} = -\,a_y(x,\, y,\, z)\,dx\,dz\,.$$

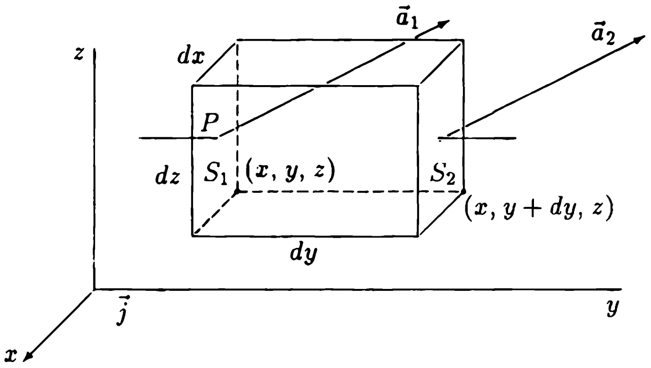

Рис. 12.12. К доказательству теоремы Остроградского – Гаусса

Таким же образом найдем поток вектора $\vec{a}$ через грань S_2, которая также параллельна плоскости x-z, но проходит через точку $(x,\, y{+}dy,\, z)$:

$$\int\limits_{S_2} \vec{a}\,\overrightarrow{dS} = a_y(x,\, y+dy,\, z)\,dx\,dz\,.$$

Согласно определению частного дифференциала функции нескольких переменных

$$a_y(x,\, y+dy,\, z) - a_y(x,\, y,\, z) = \frac{\partial a_y}{\partial y}\,dy\,.$$

С учетом этого равенства сумма потоков вектора $\vec{a}$ через грани S_1 и S_2 будет равна

$$\int\limits_{S_1+S_2} \vec{a}\,\overrightarrow{dS} = \frac{\partial a_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Повторяя эти действия при вычислении потоков вектора $\vec{a}$ через другие пары граней, найдем в результате их сложения полный поток этого вектора через поверхность S параллелепипеда:

$$\oint\limits_{S} \vec{a}\,\overrightarrow{dS} = \operatorname{div}\vec{a}\cdot dV\,, \qquad (12.35)$$

где $dV = dx\,dy\,dz$ – объем параллелепипеда, а выражение

$$\operatorname{div}\vec{a} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{12.36}$$

называется *дивергенцией* вектора $\vec{a}$. В силу свойства (12.33) равенство (12.35) справедливо для бесконечно малого объема любой формы.

Разделим произвольный объем V на множество бесконечно малых объемов dV, для каждого из которых справедливо равенство (12.35). Суммируя левые и правые части этих равенств, с учетом свойства (12.34) получим:

$$\oint_S \vec{a}\,\overrightarrow{dS} = \int_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV\,, \tag{12.37}$$

где S – поверхность, ограничивающая объем V. Равенство (12.37) составляет содержание *теоремы Остроградского – Гаусса* (Михаил Васильевич Остроградский (1801 – 1861) – русский математик, Карл Гаусс (1777 – 1855) – немецкий ученый). Согласно этой теореме ***поток вектора $\vec{a}$ через произвольную воображаемую замкнутую поверхность S в направлении внешней нормали равен объемному интегралу от дивергенции этого вектора по объему V, заключенному внутри поверхности S.***

12.7. Уравнение неразрывности

Построим внутри текущей жидкости произвольную воображаемую замкнутую поверхность S, которая охватывает объем V. Масса m жидкости в объеме V равна интегралу (12.3) от плотности ϱ по этому объему, а расход массы μ через поверхность S есть поток (12.11) вектора $\vec{j}$ через эту поверхность в направлении внешней нормали к поверхности. Масса жидкости в объеме V может изменяться с течением времени: $m = m(t)$. Согласно закону сохранения массы (12.12) скорость $\dot{m}$ изменения массы равна со знаком минус расходу массы. Этот закон можно выразить посредством интегрального уравнения (12.13). При помощи теоремы Остроградского – Гаусса заменим поток вектора $\vec{j}$ в правой части уравнения (12.13) объемным интегралом от дивергенции этого вектора. Получим равенство

$$\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dV = -\int_V \operatorname{div}\vec{j}\,dV\,.$$

Два интеграла по произвольному объему V равны тогда и только тогда, когда равны подинтегральные выражения. Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{j}\,, \tag{12.38}$$

которое называется *уравнением неразрывности*, или *уравнением непрерывности* и которое так же, как и равенства (12.12) и (12.13), выражает собой *закон сохранения массы*.

При стационарном течении жидкости ее плотность не зависит от времени, а для несжимаемой жидкости плотность ϱ вообще постоянна. В этих случаях уравнение неразрывности превращается в

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0\,.$$

При этом, как видно из уравнения (12.13), поток вектора плотности потока массы через произвольную замкнутую поверхность S будет равен нулю:

$$\oint\limits_S \vec{j}\,\overrightarrow{dS} = 0\,.$$

Согласно этому равенству масса жидкости, втекающей через поверхность S в объем V за некоторое время, равна массе жидкости, вытекающей через S из объема V за то же время.

12.8. Внутреннее трение

При течении жидкости между ее слоями, движущимися с различными скоростями, возникают касательные напряжения, или силы внутреннего трения, обусловленные вязкостью жидкости. В существовании таких сил можно убедиться на опыте. Рассмотрим следующую экспериментальную установку (рис. 12.13). В вертикальный цилиндрический сосуд, который может вращаться вокруг своей оси, налита жидкость. В жидкость помещен другой цилиндр меньшего радиуса, подвешенный на тонкой проволоке так, что ось этого цилиндра совпадает с осью внешнего цилиндра. Когда внешний цилиндр приводят во вращение, внутренний цилиндр поворачивается на некоторый угол. Такое поведение внутреннего цилиндра можно объяснить действием на его поверхность касательных сил со стороны вращающейся жидкости, которая вовлекает цилиндр во вращательное движение. Этому движению препятствуют силы упругости закручивающейся проволоки. Когда эти силы уравновесят друг друга, внутренний цилиндр перестанет вращаться.

Ньютон установил закон, согласно которому касательное напряжение τ, характеризующее взаимодействие двух слоев жидкости, разделенных некоторой воображаемой поверхностью, пропорционально производной от скорости в направлении, перпендикулярном поверхности раздела:

$$\tau = \eta \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| , \tag{12.39}$$

где η – *коэффициент внутреннего трения*, или *вязкость* жидкости,

$$\frac{\partial v}{\partial n}$$

– производная по направлению, т.е. производная от скорости по координате, которая изменяется в направлении нормали к поверхности раздела двух слоев жидкости. По определению сила взаимодействия двух слоев жидкости, разделенных некоторой поверхностью, равна произведению касательного напряжения на площадь этой поверхности:

$$F = \tau S .$$

Чтобы яснее понять содержание закона Ньютона, рассмотрим в качестве примера установившееся течение вязкой жидкости, увлекаемой вращающимся цилиндром в описанной выше установке. В силу цилиндрической симметрии этой системы линиями тока будут горизонтальные окружности, центры которых лежат на оси симметрии. Очевидно, что модуль скорости частицы жидкости зависит от расстояния r между этой частицей и осью симметрии:

$$v = v(r) .$$

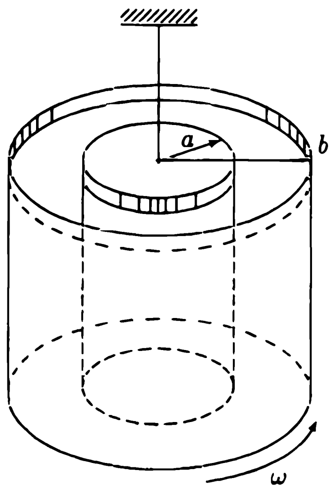

Рис. 12.13.
Установка для измерения вязкости жидкости

Причем эта зависимость такова, что у поверхности внутреннего цилиндра скорость течения жидкости равна нулю, так как этот цилиндр неподвижен; а у поверхности вращающегося с угловой скоростью ω внешнего цилидра скорость течения жидкости равна линейной скорости точек внутренней поверхности этого цилиндра:

$$v(a) = 0 , \qquad v(b) = b\,\omega , \tag{12.40}$$

где a и b – радиусы соприкасающихся с жидкостью поверхностей внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

Выделим в жидкости цилиндрический слой, ограниченный коаксиальными цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r + dr$ (рис. 12.14), которые образованы линиями тока. Касательные напряжения, действующие на внешнюю поверхность этого слоя со стороны прилегающей к нему снаружи жидкости, вынуждают его вращаться в том же направлении, что и внешний вращающийся цилиндр. В то же время касательные напряжения, действующие на внутреннюю поверхность слоя, тормозят его движение, так как скорость жидкости на линиях тока радиуса r меньше, чем на линиях радиуса $r + dr$.

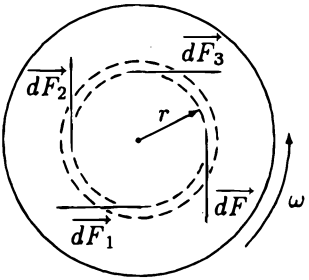

Рис. 12.14. Цилиндрический слой вращающейся вязкой жидкости

Сила вязкого трения, действующая на элемент внутренней поверхности S цилиндрического слоя, по определению равна произведению касательного напряжения τ на площадь dS этого элемента:

$$dF = \tau(r)\, dS\,.$$

Так как вектор силы трения касателен к линии тока и перпендикулярен оси симметрии, вращательный момент силы трения относительно этой оси будет

$$dM = r\, dF\,,$$

здесь r – плечо силы. Вращательный момент $M(r)$ сил трения, приложенных ко всей внутренней поверхности слоя, равен сумме моментов сил, действующих на различные элементы этой поверхности:

$$M(r) = \int_S dM = r \cdot \tau(r) \cdot 2\,\pi\, r\, h\,,$$

где h – высота цилиндрического слоя, $2\pi r h$ – площадь его поверхности S.

Радиальное направление ортогонально к поверхности $r = \mathrm{const}$ цилиндрического слоя. Поэтому производная от скорости в направлении нормали к этой поверхности совпадает с производной от скорости по аргументу r:

$$\frac{\partial v}{\partial n} \equiv \frac{dv}{dr}\,.$$

При этом закон Ньютона (12.39) дает

$$\tau(r) = \eta\,\frac{dv}{dr}\,.$$

В результате получим следующее выражение для вращательного момента сил трения, действующих на внутреннюю поверхность цилиндрического слоя:

$$M(r) = 2\,\pi\,\eta\,h\,r^2\,\frac{dv}{dr}\,. \tag{12.41}$$

Рассматриваемый цилиндрический слой жидкости вращается с постоянной скоростью. Это возможно только при условии, что сумма моментов всех внешних сил, приложенных к этому слою, равна нулю. Следовательно, при установившемся течении жидкости действующие на внешнюю поверхность слоя силы вязкого трения создают вращательный момент, равный по величине моменту (12.41). При этом условии их действие будет уравновешено действием сил трения, приложенных к внутренней поверхности слоя. Таким образом, приходим к заключению, что вращательный момент (12.41) есть независящая от r величина. При $r = a$ вращательный момент M характеризует силы трения, приложенные к поверхности внутреннего цилиндра. Когда этот цилиндр находится в покое вращательный момент M будет равен по величине моменту сил упругости проволоки, на которой подвешен цилиндр. В таком случае вращательный момент M может быть измерен по углу поворота цилиндра. Итак, считая в равенстве (12.41) вращательный момент M известной постоянной величиной, будем иметь дифференциальное уравнение для функции $v = v(r)$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{M}{2\,\pi\,\eta\,h\,r^2}\,,$$

решение которого имеет вид

$$v(r) = -\,\frac{M}{2\,\pi\,\eta\,h\,r} + C\,,$$

где C – постоянная интегрирования. Применяя к найденному решению граничные условия (12.40), придем к уравнениям

$$-\,\frac{M}{2\,\pi\,\eta\,h\,a} + C = 0\,, \qquad -\,\frac{M}{2\,\pi\,\eta\,h\,b} + C = b\,\omega\,,$$

в которых неизвестными можно считать постоянную интегрирования и вязкость η. Решив эту систему уравнений, получим:

$$v(r) = \frac{b^2\,\omega}{b-a}\left(1 - \frac{a}{r}\right), \qquad \eta = \frac{(b-a)\,M}{2\,\pi\,a\,b^2\,h\,\omega}\,. \tag{12.42}$$

Последняя формула может быть использована для экспериментального определения коэффициента η внутреннего трения различных жидкостей и газов, так как все величины в правой части этого равенства могут быть измерены непосредственно.

12.9. Течение вязкой жидкости в круглой трубе

Рассмотрим теперь стационарное течение вязкой жидкости в круглой прямой трубе радиуса R, расположенной горизонтально. Очевидно, что в этом случае линии тока есть горизонтальные прямые. Поэтому площадь поперечного сечения любой струйки жидкости всюду вдоль ее длины одинакова. Если жидкость несжимаема, то согласно уравнению (12.17) скорость жидкости вдоль линии тока должна быть постоянной.

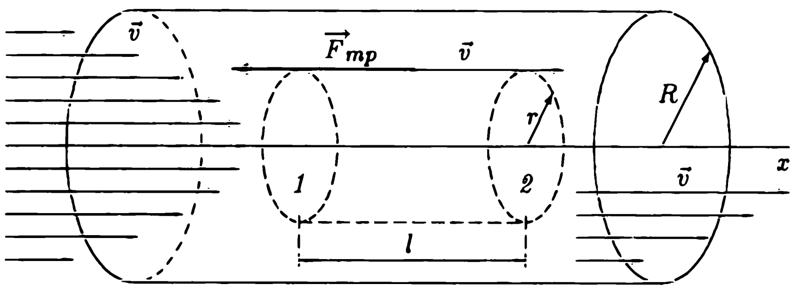

Рис. 12.15. Течение вязкой жидкости в круглой трубе

Вследствие действия сил вязкого трения скорость частицы жидкости изменяется в зависимости от ее расстояния r до оси симметрии трубы:

$$v = v(r)\,.$$

При этом скорость равна нулю у стенок трубы:

$$v(R) = 0\,, \tag{12.43}$$

и принимает наибольшее значение на ее оси. Найдем закон изменения скорости в зависимости от расстояния r. Для этого построим в жидкости воображаемый цилиндр радиуса r и длины l, ось которого совпадает с осью трубы (рис. 12.15). Боковая поверхность этого цилиндра образована линиями тока. Так как скорость жидкости вдоль линии тока в данном случае постоянна, сумма всех внешних сил, действующих на любую струйку жидкости, в силу второго закона Ньютона равна нулю. По этой причине равна нулю сумма всех внешних сил, которые действуют на жидкость, находящуюся внутри построенного цилиндра. Найдем проекции этих сил на ось x. В сечениях *1* и *2* действуют соответственно силы $P_1\,\pi\,r^2$ и $-P_2\,\pi\,r^2$, где P_1 и P_2 – давления в этих сечениях. На боковую поверхность цилиндра действует сила вязкого трения, которая по величине равна произведению касательного напряжения τ на площадь боковой поверхности цилиндра, т.е. $\tau\cdot 2\,\pi\,r\,l$. По закону Ньютона (12.39) касательное напряжение

$$\tau = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| .$$

Так как $v = v(r)$ есть убывающая функция, ее производная отрицательна:

$$\frac{dv}{dr} < 0 .$$

Поэтому

$$\left| \frac{dv}{dr} \right| = - \frac{dv}{dr} .$$

Если скорость $\vec{v}$ жидкости направлена вдоль оси x, то действующая на поверхность рассматриваемого цилиндрического объема жидкости сила трения должна быть направлена в противоположном направлении. С учетом сказанного проекция на ось x силы вязкого трения будет равна

$$2\,\pi\,r\,l\,\eta\,\frac{dv}{dr} .$$

Сложив найденные силы и приравняв полученное выражение нулю, придем к уравнению

$$(P_1 - P_2)\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,r\,l\,\eta\,\frac{dv}{dr} = 0 ,$$

которое преобразуем к виду

$$\frac{dv}{dr} = - \frac{P_1 - P_2}{2\,\eta\,l}\,r ,$$

где $P_1 > P_2$. Интегрирование этого уравнения приводит к зависимости

$$v(r) = - \frac{P_1 - P_2}{4\,\eta\,l}\,r^2 + C ,$$

где C – постоянная интегрирования, которую найдем из граничного условия (12.43):

$$C = \frac{P_1 - P_2}{4\,\eta\,l}\,R^2 .$$

Окончательно будем иметь

$$v(r) = v_o \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) , \qquad (12.44)$$

где

$$v_o = \frac{(P_1 - P_2)\,R^2}{4\,\eta\,l}$$

– значение скорости на оси трубы.

Векторы скорости частиц жидкости, модули которых определяются формулой (12.44), изображены на рис. 12.16.

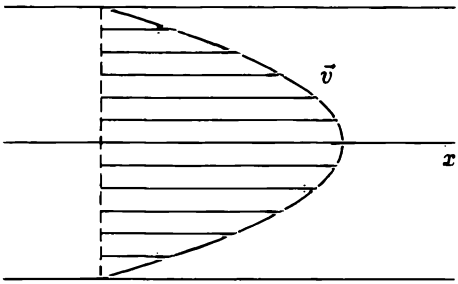

Рис. 12.16. Скорости течения вязкой жидкости в круглой трубе

Вычислим расход массы жидкости через поперечное сечение трубы. Для этого разобьем какое-нибудь поперечное сечение трубы на кольца (рис. 12.17). Расход массы жидкости, протекающей через кольцо радиуса r и ширины dr, согласно формуле (12.15) равен

$$\varrho\, v(r) \cdot 2\,\pi\, r\, dr\,.$$

Полный расход массы равен интегралу от этого выражения. С учетом зависимости (12.44) будем иметь

$$\mu = 2\,\pi\,\varrho\, v_o \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,dr = \frac{1}{2}\,\pi\,\varrho\, v_o\, R^2 = \frac{1}{2}\,\varrho\, v_o\, S\,, \qquad (12.45)$$

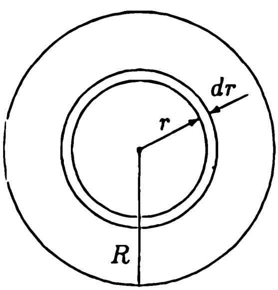

Рис. 12.17. К вычислению расхода массы

где $S = \pi R^2$ – площадь поперечного сечения трубы. Подставив в формулу (12.45) выражение для скорости v_o, получим *формулу Пуазейля* (Жан Пуазейль (1799 – 1869) – французский физик)

$$\mu = \frac{\pi\, R^4\, \varrho\,(P_1 - P_2)}{8\,\eta\, l}\,. \qquad (12.46)$$

Напомним, что полученные в этом разделе формулы справедливы только для стационарного ламинарного течения жидкости.

Английский ученый Осборн Рейнольдс (1842 – 1912) установил, что характер течения жидкости определяется значением безразмерной величины

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho\, v\, R}{\eta}\,, \tag{12.47}$$

где v – средняя по сечению трубы скорость жидкости, R – характерный размер трубы. Для трубы круглого сечения R – ее радиус. Величина (12.47) называется *числом Рейнольдса*. При значениях этого числа $\mathrm{Re} < 1000$ наблюдается ламинарное течение жидкости, а при $\mathrm{Re} > 1000$ – турбулентное, или вихревое.

Формулу Пуазейля можно использовать для экспериментального определения вязкости η жидкостей. Так как формула (12.46) справедлива только для ламинарного течения жидкости, чтобы с ее помощью определить η необходимо пропускать жидкость через трубку по возможности малого радиуса. Такие трубки называются *капиллярами*. Тогда можно быть уверенным, что число Рейнольдса достаточно мало и течение жидкости ламинарно. Измерив расход массы жидкости μ, ее давления P_1 и P_2 на входе в капилляр и выходе из него, его радиус R и длину l, по формуле (12.46) можно вычислить значение вязкости жидкости η.

12.10. Истечение жидкости из отверстия

В цилиндрический сосуд, площадь основания которого равна S, налита жидкость плотностью ϱ. В боковой поверхности цилиндра имеется небольшое отверстие, площадь которого $\sigma \ll S$. Вследствие истечения жидкости из отверстия вся жидкость в сосуде находится в движении. Примерный вид линий тока жидкости изображен на рис. 12.18.

Найдем при помощи уравнений, полученных в предыдущих разделах, скорость v, с которой жидкость вытекает из отверстия. Жидкость в сосуде в произвольный момент времени t ограничена сечениями *1* и *2*, которыми являются с одной стороны открытая поверхность S жидкости, а с другой стороны – воображаемая плоскость, затягивающая отверстие σ. Давления жидкости в этих сечениях равны атмосферному давлению: $P_1 = P_2 = P_a$. Поэтому для несжимаемой жидкости

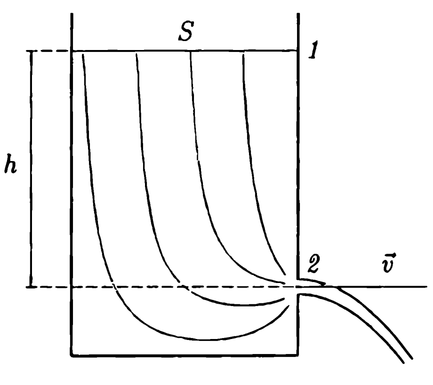

Рис. 12.18. Истечение жидкости из отверстия

($\varrho_1 = \varrho_2$) уравнение (12.17) и уравнение Бернулли (12.29) дают

$$v_1 S = v \sigma , \qquad \frac{1}{2} v_1^2 + g h = \frac{1}{2} v^2 ,$$

где v_1 – скорость жидкости в сечении *1*, т.е. скорость, с которой опускается уровень жидкости в сосуде; h – высота открытой поверхности жидкости над отверстием. Из первого равенства следует, что

$$v_1 = \frac{\sigma}{S} v \ll v .$$

При этом уравнение Бернулли можно записать так:

$$g h \cong \frac{1}{2} v^2 .$$

Разрешив это уравнение относительно скорости v, получим *формулу Торричелли* (Эванжелиста Торричелли (1608 – 1647) – итальянский физик и математик)

$$v = \sqrt{2 g h} . \tag{12.48}$$

Интересно отметить, что скорость истечения из отверстия идеальной несжимаемой жидкости равна скорости, которую приобретает тело, свободно падающее с высоты h.

Найдем теперь, как изменяется со временем уровень жидкости в цилиндрическом сосуде вследствие ее вытекания из отверстия, т.е. найдем функцию $h = h(t)$. Для этого используем закон сохранения массы жидкости в форме (12.12). Так как масса жидкости в сосуде

$$m = \varrho S h ,$$

а расход массы

$$\mu = \varrho v \sigma ,$$

с учетом формулы Торричелли (12.48) получим уравнение

$$S \, dh = - \sigma \sqrt{2 g h} \, dt .$$

Интегрируя это уравнения методом разделения переменных, придем к зависимости

$$h(t) = \left(\sqrt{h_o} - \alpha t \right)^2 ,$$

где $h_o = h(0)$ – значение высоты h, определяющее начальный уровень жидкости в момент времени $t = 0$,

$$\alpha = \frac{\sigma}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} .$$

Положив $h = 0$, найдем момент времени

$$t_1 = \frac{\sqrt{h_o}}{\alpha} = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2\,h_o}{g}}\,,$$

когда жидкость перестанет вытекать из отверстия.

12.11. Движение тел в жидкостях и газах

При движении тела в жидкости или газе на него со стороны окружающей среды действуют силы, сумму которых $\vec{F}$ можно разложить на две составляющие (рис. 12.19):

$$\vec{F} = \vec{F}_{сопр} + \vec{F}_{\perp}\,,$$

где $\vec{F}_{сопр}$ – составляющая, коллинеарная вектору скорости $\vec{v}$ тела и называемая *силой сопротивления среды*, $\vec{F}_{\perp}$ – составляющая, перпендикулярная к вектору скорости. В том случае, когда сила $\vec{F}_{\perp}$ направлена вверх, она называется *подъемной силой*. Сила сопротивления всегда направлена в сторону, противоположную скорости движения тела относительно среды.

Согласно принципу относительности Галилея силы, действующие на тело, не изменятся, если тело будет неподвижным, а среда будет двигаться с той же скоростью v, но в противоположном направлении. Эту идею используют при измерениях сил, действующих на тело, помещенное в аэродинамическую трубу, в которой мощными установками создается высокоскоростной поток воздуха.

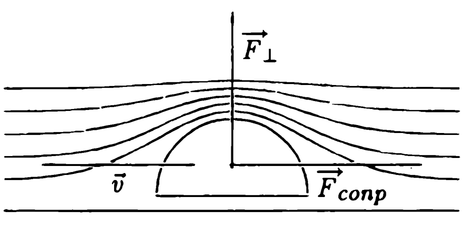

Рис. 12.19. Сила сопротивления и подъемная сила

На рис. 12.19 показаны линии тока жидкости, обтекающей длинный полуцилиндр. Как видно из этого рисунка, линии тока над полуцилиндром сгущаются. Поэтому здесь скорость течения жидкости больше, а давление меньше, чем в области под полуцилиндром. Разность давлений обусловливает подъемную силу.

На рис. 12.20 показаны линии тока жидкости, обтекающей длинный цилиндр. В этом случае расположение линий тока под цилиндром и над ним совершенно симметрично. Так же симметрично распределено давление в жидкости и на поверхности цилиндра. Поэтому при обтекании симметричного тела подъемная сила не возникает.

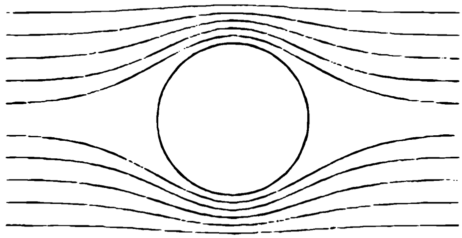

Рис. 12.20. Ламинарное течение

Идеальная жидкость не оказывает сопротивления движению тела любой формы. Сила сопротивления действует на тело только, когда оно движется в вязкой жидкости. Тонкий слой вязкой жидкости, прилегающий к поверхности тела, движется вместе с ним. При удалении от поверхности движущегося тела скорость слоев жидкости уменьшается. Изменение скорости при переходе от одного слоя жидкости к другому обусловливает наличие сил трения, которые препятствуют движению тела.

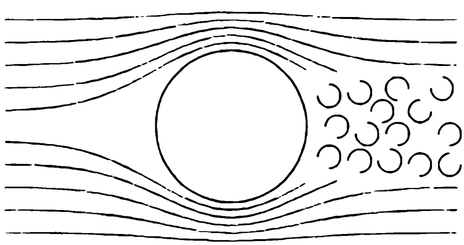

Рис. 12.21. Турбулентное течение

При достаточно больших значениях числа Рейнольдса движение жидкости, обтекающей тело, становится турбулентным (рис. 12.21). Жидкость позади тела как бы пытается от него оторваться. Поэтому здесь возникает область пониженного давления, в которой течение жидкости имеет беспорядочный вихревой характер. Разность давлений теперь обусловливает дополнительную силу, препятствующую движению тела.

ГЛАВА 13
ВОЛНЫ

13.1. Бегущая волна

Пусть некоторая физическая величина ψ зависит от времени t и координаты x следующим образом:

$$\psi(t,\, x) = f(x - v\, t)\,, \tag{13.1}$$

где $f(x)$ – произвольная функция одного переменного x. При $t = 0$ зависимость ψ от x принимает вид

$$\psi(0,\, x) = f(x)\,.$$

На рис. 13.1 показаны графики зависимости величины ψ от x при $t = \text{const}$. Один график соответствует значению времени $t = 0$, а другой – произвольному значению $t > 0$.

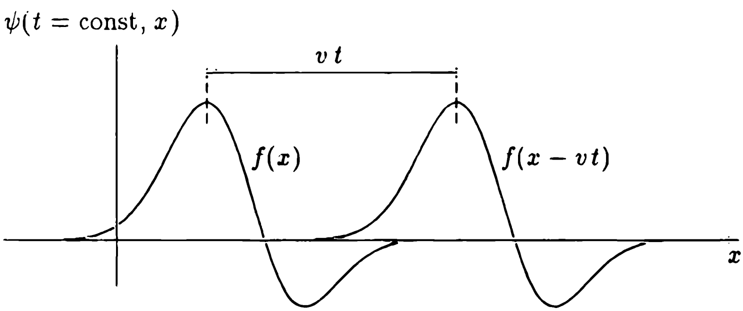

Рис. 13.1. Бегущая волна

Из рис. 13.1 видно, что график зависимости величины ψ от x при увеличении t смещается вправо, не изменяя своего вида. За время от момента $t = 0$ до произвольного момента времени t график этой функции смещается на расстояние $x = v\,t$. При этом скорость смещения равна v. Говорят, что функция (13.1) описывает волну, бегущую вдоль оси x. Величину v называют *скоростью распространения волны.*

Функция

$$\psi(t,\, x) = h(x + v\, t)\,, \tag{13.2}$$

где $h(x)$ – произвольная функция одного переменного x, также описывает бегущую волну. Только эта волна "бежит" в другую сторону, так как график функции (13.2) при увеличении t смещается влево.

13.2. Волновое уравнение и его решение

Пусть некоторая физическая величина ψ, зависящая от времени t и координаты x, удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,,} \tag{13.3}$$

где v – постоянная величина. Это уравнение называют *волновым.*

Покажем, что функция (13.1) является решением уравнения (13.3). Функция (13.1) является сложной и может быть представлена в виде

$$\psi = f(\xi)\,, \qquad \xi = x - v\,t\,.$$

Найдем производные этой функции по t и x. Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{df}{d\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\,v\,\frac{df}{d\xi}\,, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\,v\,\frac{d^2f}{d\xi^2}\,\frac{\partial\xi}{\partial t} = v^2\,\frac{d^2f}{d\xi^2}\,;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}\,, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{d^2f}{d\xi^2}\,\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{d^2f}{d\xi^2}\,.$$

Нетрудно видеть, что подстановка вторых производных в уравнение (13.3) обращает его в тождество. Что и требовалось доказать.

Аналогично можно показать, что функция (13.2) также является решением волнового уравнения (13.3). Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\psi(t,\,x) = f(x - v\,t) + h(x + v\,t)\,,$$

т.е. в общем случае вдоль оси x могут распространяться сразу две волны, одна из которых "бежит" вправо, а другая – влево.

13.3. Гармоническая волна

Волна называется *гармонической*, или *монохроматической*, если она описывается функцией

$$\boxed{\psi(t,\,x) = A\,\cos\left(\omega\,t - k\,x + \alpha\right),} \tag{13.4}$$

где A – амплитуда волны, ω – частота, k – волновое число, функция

$$\varphi(t, x) = \omega t - k x + \alpha \qquad (13.5)$$

называется фазой волны, $\alpha = \varphi(0, 0)$ – начальная фаза. График определяемой формулой (13.4) зависимости величины ψ от x при $t = \text{const}$ показан на рис. 13.2.

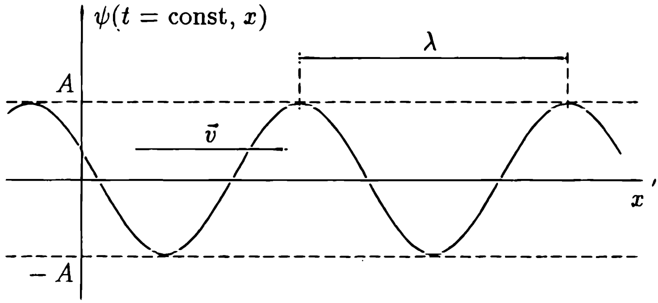

Рис. 13.2. Гармоническая волна

Функцию (13.4) можно привести к виду (13.1):

$$\psi(t, x) = A \cos\left(-k\left(x - \frac{\omega t}{k}\right) + \alpha\right).$$

Отсюда видно, что скорость монохроматической волны связана с частотой и волновым числом соотношением

$$v = \frac{\omega}{k}. \qquad (13.6)$$

Положив в формуле (13.4) $x = \text{const}$, найдем зависимость ψ от времени t, которая описывает изменения этой величины со временем в данной точке пространства. Так как функция (13.4) при $x = \text{const}$ описывает гармонические колебания, говорят, что монохроматическая волна создает в произвольной точке пространства гармонические колебания.

Величина

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (13.7)$$

называется *периодом волны*, а величина

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad (13.8)$$

– *длиной волны*. Если фаза (13.5) волны получит приращение 2π, то значение функции (13.4) останется прежним. Поэтому при $x = \text{const}$

функция (13.4) принимает одно и то же значение для всех моментов времени, которые отличаются одно от другого на nT, где n – целое число; а при $t = \text{const}$ значения функции (13.4) в различных точках пространства совпадают, если координаты этих точек отличаются друг от друга на $n\lambda$.

13.4. Волны в пространстве

Пусть физическая величина ψ распределена в пространстве, и это распределение меняется со временем. Говорят, что функция $\psi = \psi(t, \vec{r})$ описывает волну, распространяющуюся в пространстве, если она удовлетворяет уравнению

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\nabla^2\psi\,,} \tag{13.9}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– оператор Лапласа.

Волна называется *плоской*, если существует такая система декартовых координат, в которой функция ψ зависит только от одной из координат. Если этой координатой является x, то уравнение (13.9) сводится к (13.3).

В произвольной прямоугольной системе декартовых координат *плоская гармоническая волна* описывается функцией

$$\boxed{\psi(t, \vec{r}) = A\,\cos\left(\omega\,t - \vec{k}\,\vec{r} + \alpha\right),} \tag{13.10}$$

где вектор $\vec{k}$ называется *волновым*. В том, что эта функция является решением уравнения (13.9), нетрудно убедиться непосредственной подстановкой.

Функция

$$\varphi(t, \vec{r}) = \omega\,t - \vec{k}\,\vec{r} + \alpha \tag{13.11}$$

называется *фазой* плоской волны. Положим в этом равенстве $\varphi = \text{const}$ и $t = \text{const}$. Получим уравнение поверхности, на которой в данный момент времени t величина φ всюду принимает одно и то же значение:

$$\varphi(t = \text{const}, \vec{r}) = \text{const}\,, \qquad \text{или} \qquad \vec{k}\,\vec{r} = \text{const}\,.$$

Это есть уравнение плоскости, к которой волновой вектор $\vec{k}$ перпендикулярен. Такие поверхности называют *фазовыми*, или *волновыми*, а линии, перпендикулярные к фазовым поверхностям, называют *лучами.* Волну (13.10) называют плоской именно потому, что ее волновые поверхности являются плоскостями. Для плоской волны лучами являются прямые, параллельные волновому вектору. Этот вектор указывает направление распространения волны (рис. 13.3). Модуль волнового вектора k, т.е. волновое число, частота и скорость волны связаны соотношением (13.6). Когда волновой вектор направлен вдоль оси x так, что его проекции

$$k_x = k\,, \qquad k_y = 0\,, \qquad k_z = 0\,,$$

функция (13.10) принимает вид (13.4).

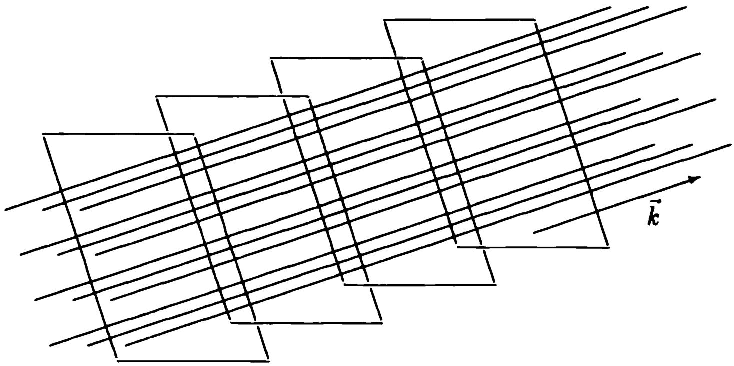

Рис. 13.3. Фазовые поверхности и лучи, вдоль которых распространяется в пространстве плоская волна

Волна, распространяющаяся равномерно во все стороны от точечного источника, который находится в начале координат, описывается функцией

$$\psi = \psi(t,\, r)\,, \tag{13.12}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

– модуль радиус-вектора. Подстановка функции (13.12) в уравнение (11.9) преобразует его к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\, \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \tag{13.13}$$

Одним из решений уравнения (13.13) является функция

$$\psi(t,\, r) = \frac{1}{r}\, f(r - v\, t)\,, \tag{13.14}$$

где r – расстояние от произвольной точки пространства до источника. Эту функцию называют *сферической волной*. Волновыми поверхностями такой волны служат концентрические сферы, центры которых совпадают с источником волны; а лучами являются прямые, идущие от источника во все стороны пространства (рис. 13.4).

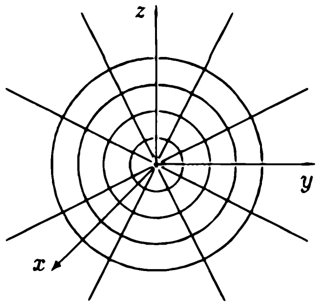

Рис. 13.4. Фазовые поверхности и лучи сферической волны от точечного источника

Задача 1. Подставив функцию (13.12) в уравнение (13.9), получить уравнение (13.13).

Задача 2. Доказать, что функция (13.14) является решением уравнения (13.13).

13.5. Интерференция волн. Стоячая волна

Нетрудно доказать, что функция

$$\psi(t,\, \vec{r}) = \psi_1(t,\, \vec{r}) + \psi_2(t,\, \vec{r}) \tag{13.15}$$

является решением уравнения (13.9), если его решениями являются функции $\psi_1(t,\, \vec{r})$ и $\psi_2(t,\, \vec{r})$. Функцию (13.15) называют суперпозицией, т.е. суммой волн. Сложение волн и появляющаяся в результате этого сложения волна называются *интерференцией* волн.

Рассмотрим функцию

$$\psi(t,\, x) = A\, \cos\left(\omega\, t - k\, x\right) + A\, \cos\left(\omega\, t + k\, x\right), \tag{13.16}$$

представляющую собой сумму двух гармонических волн одной частоты и одинаковых амплитуд, которые распространяются вдоль оси x в противоположных направлениях. При помощи тригонометрического тождества

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\, \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\, \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

преобразуем эту функцию к виду

$$\psi(t,\, x) = 2\,A\,\cos\,k\,x \cdot \cos\,\omega\,t\,. \tag{13.17}$$

Эта зависимость величины ψ от времени t и координаты x описывает так называемую *стоячую волну*. Согласно формуле (13.17) величина ψ в различных точках оси x совершает синхронные гармонические колебания, амплитуда

$$2\,A\,|\cos\,k\,x|$$

которых изменяется от одной точки к другой. В точках, где

$$k\,x = \frac{\pi}{2} + \pi\,n \quad (n - \text{целое число}), \quad \text{т.е. при} \quad x = \frac{\lambda}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

амплитуда колебаний всегда равна нулю. Эти точки называют *узлами* стоячей волны. Точки, в которых амплитуда колебаний величины ψ максимальна, называют *пучностями* стоячей волны. Этим точкам соответствуют значения координаты

$$x = \frac{\lambda}{2}\,n\,.$$

Итак, сумма (13.16) двух бегущих навстречу друг другу гармонических волн есть стоячая волна (13.17). Графики зависимости величины ψ от координаты x для моментов времени $t = 0$ и $t = T/2$ показаны на рис. 13.5.

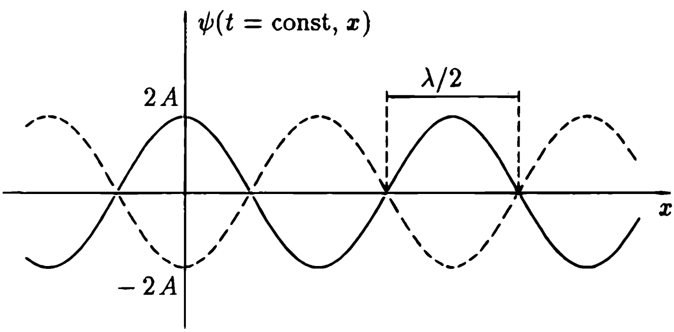

Рис. 13.5. Стоячая волна. Узлы и пучности

ГЛАВА 13*

УПРУГИЕ ВОЛНЫ

(продолжение)

13.6. Волны в упругих средах

Волной называют отклонения среды от равновесного состояния (их называют возмущениями), которые распространяются в этой среде и переносят с собой энергию. В данной главе будем рассматривать только так называемые упругие волны, которые обусловлены упругими силами, возникающими в различных средах при их деформациях (сжатии, сдвиге или изгибе). Звук и сейсмические волны являются примерами упругих волн.

При деформациях среды происходят смещения частиц вещества из равновесных положений. Смещения одних частиц вызывают смещения соседних с ними частиц. Так смещения передвигаются по среде и возникает бегущая волна. Если смещения частиц происходят в том же направлении, в котором распространяется волна, то такую волну называют *продольной*. Если же частицы вещества смещаются в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны, то волну называют *поперечной*.

В газах и жидкостях упругие силы возникают только при сжатии и не возникают при сдвиге. Поэтому смещения частиц газа или жидкости распространяются только в виде продольных волн, или волн сжатия. В твердых телах упругие силы возникают также при сдвиге. Вследствие этого в твердых телах могут одновременно распространяться и продольные волны, и поперечные, т.е. волны сдвига.

13.7. Энергия волны

Волна всегда несет с собой энергию. Энергия упругой волны распределена в среде, по которой распространяется волна. Распределение массы вещества в пространстве характеризуется плотностью $\varrho = \varrho(t, \vec{r})$. Аналогично распределение энергии в пространстве можно описать при помощи функции $\varepsilon = \varepsilon(t, \vec{r})$, которая называется объемной *плотностью энергии* и определяется соотношением

$$d\mathcal{E} = \varepsilon\, dV\,, \tag{13.18}$$

где $d\mathcal{E}$ есть энергия, заключенная в объеме dV. Энергия $\mathcal{E}$, находящаяся в момент времени t в макроскопическом объеме V, равна объемному интегралу от этого выражения:

$$\mathcal{E}(t) = \int\limits_V \varepsilon(t, \vec{r})\, dV\,. \tag{13.19}$$

Перенос энергии в пространстве характеризуется вектором плотности потока энергии $\overrightarrow{I}$. Этот вектор называют вектором Умова в честь русского ученого Николая Алексеевича Умова (1846 – 1914), который первым исследовал процесс переноса энергии в пространстве и ввел понятие поток энергии. Направление вектора $\overrightarrow{I}$ совпадает с направлением переноса энергии волной, а его модуль равен энергии, переносимой за единицу времени через единицу площади поверхности, расположенной перпендикулярно к этому вектору. Согласно этому определению поток

$$\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{dS} \tag{13.20}$$

вектора Умова через элемент $\overrightarrow{dS}$ некоторой поверхности S есть энергия, переносимая волной через этот элемент за единицу времени. Следует заметить, что плотность потока энергии $\overrightarrow{I}$ описывает перенос энергии в пространстве так же, как вектор $\vec{j}$ плотности потока массы описывает перенос в пространстве массы вещества.

Если энергия $\mathcal{E}(t)$ в объеме V не переходит в другие виды энергии, то она может изменяться с течением времени только потому, что она переносится через поверхность S, которая ограничивает объем V. За время dt через поверхность S в направлении внешней нормали $\vec{n}$, т.е. из объема V, уносится энергия

$$dt \oint\limits_S \overrightarrow{I}\,\overrightarrow{dS}\,. \tag{13.21}$$

Именно на эту величину уменьшается энергия $\mathcal{E}(t)$ в объеме V, т.е. приращение $d\mathcal{E}$ равно с обратным знаком выражению (13.21). Таким образом придем к уравнению

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\oint\limits_S \overrightarrow{I}\,\overrightarrow{dS}\,, \tag{13.22}$$

которое выражает закон сохранения энергии, переносимой упругой волной.

13.8. Колебания струны

Натянутая тонкая струна в равновесном состоянии имеет форму прямой линии. Направим ось x вдоль этой прямой (рис. 13.6). В таком случае положение произвольной точки P струны удобно определить при помощи координаты x. Если каким-либо образом вывести струну из состояния покоя, то она начнет совершать довольно сложные движения, называемые колебаниями струны. В процессе колебаний положение точки P будет изменяться с течением времени. Пусть в момент времени t эта точка оказалась в положении P'. Вектор $\vec{\xi} = \overrightarrow{PP'}$, начало которого находится в точке P, а конец – в точке P', характеризует положение рассматриваемой точки струны в произвольный момент времени. Этот вектор называют *смещением*.

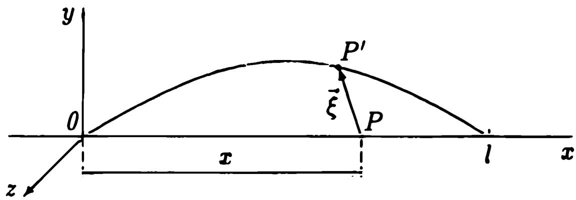

Рис. 13.6. Колебания струны

Процесс колебаний струны удобно описывать посредством зависимости вектора смещения $\vec{\xi}$ от времени t и координаты x произвольной точки струны:

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(t, x). \tag{13.23}$$

Колебания струны называют *поперечными*, или волнами изгиба, если векторы смещения всех точек струны всегда направлены перпендикулярно к равновесному положению струны. Если же векторы смещения всегда направлены вдоль самой струны, то колебания называют *продольными*, или волнами сжатия. В общем случае по струне могут распространяться как волны изгиба, так и волны сжатия.

Исследуем поперечные колебания струны в плоскости xy. В этом случае проекции вектора смещения $\vec{\xi}$ на оси x и z будут равны нулю, и процесс колебаний можно будет описать одной функцией

$$y = y(t, x), \tag{13.24}$$

где y есть проекция вектора смещения на ось y. Составим уравнение для этой функции. Искомое уравнение будет иметь наиболее простой вид, если предположить, что струна совершает малые колебания. Это предположение соответствует неравенству

$$y' \ll 1\,, \tag{13.25}$$

где

$$y' = y'(t, x) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

– частная производная по x от функции (13.24).

Рассмотрим небольшой участок струны, который занимает отрезок $[x_1, x_2]$ оси x, когда струна покоится (рис. 13.7). При этом его длина равна $dx = x_2 - x_1$. В смещенном положении длина этого участка будет

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx\,.$$

В силу условия (13.25) можно пренебречь квадратом производной y' по сравнению с единицей. Таким образом получим

$$ds \cong dx\,, \tag{13.26}$$

т.е. в принятом приближении удлинения участков струны в процессе колебаний не происходит. Вследствие этого сóгласно закону Гука модуль силы натяжения F в каждой точке струны будет всегда один и тот же. Однако направление силы натяжения $\vec{F}$ будет изменятся от точки к точке и с течением времени.

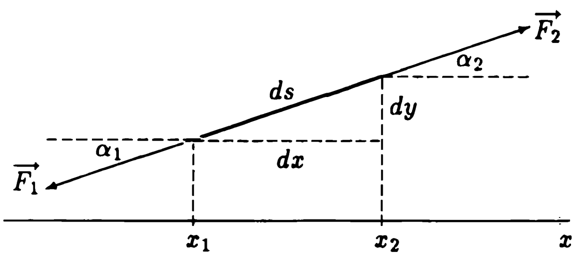

Рис. 13.7. Участок струны и действующие на него силы

На рис. 13.7 показаны силы натяжения, которые действуют на концы выделенного участка струны. Проекция на ось y одной из этих сил равна

$$F_y = \pm\, F\, \sin\alpha\,,$$

где α – угол между вектором силы и осью x. Тангенс угла α равен производной по x от функции $y = y(t, x)$, которая определяет форму струны в произвольный момент времени:

$$\operatorname{tg}\alpha = y'(t, x)\,.$$

Из условия (13.25) следует, что угол α мал и его синус приближенно равен тангенсу этого угла:

$$\sin\alpha \cong y'(t,\,x)\,.$$

При этом проекция F_y силы натяжения струны в точке x будет

$$F_y \cong \pm\, F \cdot y'(t,\,x)\,. \tag{13.27}$$

Применим второй закон Ньютона для рассматриваемого участка струны. В проекциях на ось y этот закон дает уравнение

$$dm \cdot a_y = \sum F_y\,, \tag{13.28}$$

где

$$dm = \varrho\, dx$$

– масса участка струны длиной dx,

$$\varrho = \frac{m}{l}$$

– линейная плотность массы, m – масса струны, l – ее длина. Ускорение a_y есть вторая производная от координаты $y = y(t,\,x)$ по времени:

$$a_y = \ddot{y}(t,\,x) \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,,$$

где $x \in [x_1,\,x_2]$.

Найдем сумму сил в правой части уравнения (13.28) при помощи формулы (13.27). Изображенный на рис. 13.7 участок струны немного искривлен. Вследствие этого векторы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ не параллельны и их проекции на ось y в общем случае не равны по величине. Положим $x_1 = x$. При этом для проекции на ось y силы натяжения $\overrightarrow{F_1}$, которая действует на левый конец выделенного участка струны, можно записать выражение

$$-\,F \cdot y'(t,\,x)\,.$$

Так как $x_2 = x + dx$, проекция на ось y силы натяжения $\overrightarrow{F_2}$, действующей на правый конец участка, будет

$$F \cdot y'(t,\,x + dx)\,.$$

Таким образом, получим

$$\sum F_y = F\Big(y'(t,\,x + dx) - y'(t,\,x)\Big)\,.$$

Выражение в круглых скобках есть приращение функции $y'(t, x)$, которое равно произведению ее производной на дифференциал аргумента:

$$y'(t, x + dx) - y'(t, x) = y''(t, x)\, dx\,,$$

где

$$y''(t, x) \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,.$$

Подстановка полученных выражений в равенство (13.28) приводит к уравнению

$$\varrho\, \ddot{y} = F\, y''\,,$$

которому можно придать вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,, \tag{13.29}$$

где

$$v = \sqrt{\frac{F}{\varrho}}\,. \tag{13.30}$$

Сравним уравнения (13.3) и (13.29). Нетрудно видеть, что это есть уравнения одного типа. Так доказано, что малые поперечные колебания струны есть изгибные волны, которые распространяются по струне со скоростью (13.30). Для волн сжатия можно получить аналогичное уравнение.

Если концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$, то решения волнового уравнения (13.29) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$y(t, 0) = 0\,, \qquad y(t, l) = 0\,. \tag{13.31}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$y(t, x) = A\, \sin\, k\,x \cdot \cos\,(\omega\, t + \varphi_o)\,, \tag{13.32}$$

где A и φ_o – произвольные постоянные, является решением уравнения (13.29) и удовлетворяет первому из условий (13.31). Она будет удовлетворять также и второму условию, если волновое число принимает значения

$$k = \frac{\pi\, n}{l}\,, \tag{13.33}$$

где $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Функция (13.32) описывает стоячие волны. Так как волновое число и длина волны связаны соотношением $k = 2\pi/\lambda$, из формулы (13.33) найдем, что в натянутой струне с закрепленными концами могут существовать только такие стоячие волны, для которых на длине l струны укладывается целое число полуволн:

$$l = \frac{\lambda}{2} n \, . \tag{13.34}$$

Стоячие волны, описываемые функцией (13.32), показаны на рис. 13.8 для $n = 1$, 2 и 3.

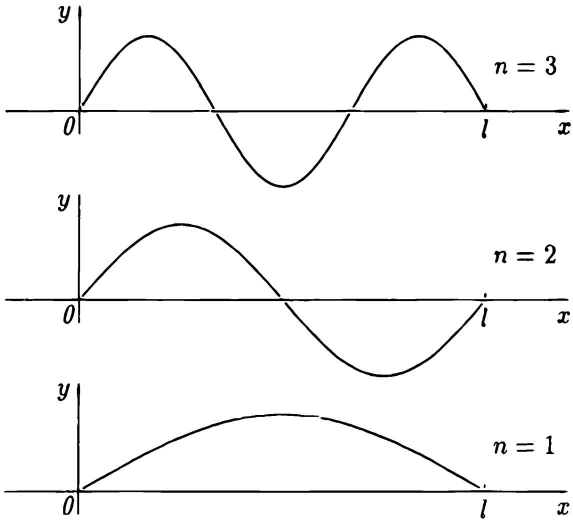

Рис. 13.8. Стоячие изгибные волны в струне с закрепленными концами

Зная волновое число и скорость волны, найдем частоту по формуле (13.6):

$$\omega_n = \pi n \sqrt{\frac{F}{l\,m}} \, . \tag{13.35}$$

Согласно этой формуле частота колебаний струны тем выше, чем сильнее она натянута. Чем больше длина струны и ее масса, тем меньше частота.

Колебания струны, описываемые функциями (13.32), называют *гармониками*, а частоты ω_n, определяемые формулой (13.35), – собственными частотами колебаний струны. Колеблющаяся струна издает звук, т.е. создает распространяющиеся в воздухе упругие волны. Звук, издаваемый струной, когда в ней возбуждена только одна гармоника, называется простым тоном. Простой тон самой низкой частоты ω_1 называют основным, а все другие – обертонами. Общее решение уравнения (13.29) колебаний струны с закрепленными концами представляет собой линейную комбинацию функций (13.32). Из этого следует, что колеблющаяся струна может одновременно издавать звуки разных частот. При этом тембр звука зависит от распределения энергии по гармоникам и определяется способом возбуждения колебаний струны.

В струне могут распространяться продольные волны, или волны сжатия. Если представить себе струну как цепочку атомов, то при распространении по этой цепочке продольной волны расположение атомов в некоторый момент времени будет примерно таким, как показано на рис. 13.9.

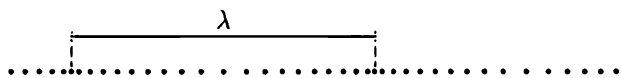

Рис. 13.9. Продольные волны в цепочке атомов

13.9. Энергия колебаний струны

Колеблющаяся струна обладает кинетической и потенциальной энергиями, которые обозначим T и W соответственно. Полная механическая энергия струны $\mathcal{E}$ равна сумме этих энергий:

$$\mathcal{E} = T + W\,.$$

Кинетическая энергия участка струны от x до $x + dx$ равна

$$\frac{1}{2}\,dm\cdot\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\,\varrho\,\dot{y}^2\,dx\,.$$

Кинетическая энергия всей струны равна сумме кинетических энергий отдельных ее участков:

$$T = \int\limits_0^l \frac{1}{2}\,\varrho\,\dot{y}^2\,dx\,. \tag{13.36}$$

Работа $A_{кс}$ консервативной силы равна разности потенциальных энергий тела до перемещения и после. Так работа $A_{кс}$ сил натяжения струны при ее перемещении из одного положения в другое будет

$$A_{кс} = W_1 - W_2\,, \tag{13.37}$$

где W_1 и W_2 – потенциальные энергии струны в положении 1 и в положении 2 соответственно. Пусть в положении 1 струна была в момент времени t_1, в положении 2 – в момент времени t_2. Тогда первое положение струны будет описываться функцией $y(t_1, x)$, а второе – функцией $y(t_2, x)$. Следовательно, энергия W_1 должна зависеть некоторым образом от функции $y(t_1, x)$, а энергия W_2 – таким же образом от $y(t_2, x)$.

Найдем работу A сил натяжения струны при ее перемещении из положения 1 в положение 2. На участок струны от x до $x + dx$ действуют силы натяжения, сумма проекций которых на ось y равна

$$\sum F_y = F\, y''(t, x)\, dx\,.$$

Мощность есть произведение силы на скорость:

$$\delta P = \sum F_y \cdot \dot{y}(t, x) = F\, y''(t, x)\, \dot{y}(t, x)\, dx\,.$$

Мощность сил натяжения для всей струны равна интегралу от этого выражения:

$$P = F \int_0^l y''(t, x)\, \dot{y}(t, x)\, dx\,.$$

Преобразуем этот интеграл методом интегрирования по частям. Пусть

$$U = \dot{y}\,, \qquad dV = y''\, dx\,.$$

Тогда

$$dU = \dot{y}'\, dx\,, \qquad V = y'\,,$$

где

$$\dot{y}' = \frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial t}\,.$$

Получим

$$P = F\, y'\, \dot{y}\,\Big|_0^l - F \int_0^l y'\, \dot{y}'\, dx = F\, y'\, \dot{y}\,\Big|_0^l - \frac{1}{2}\, F\, \frac{d}{dt} \int_0^l {y'}^2\, dx\,.$$

Первое слагаемое в этой формуле более подробно можно записать так:

$$F\, y'\, \dot{y}\,\Big|_0^l = F\, y'(t, l)\, \dot{y}(t, l) - F\, y'(t, 0)\, \dot{y}(t, 0)\,.$$

Здесь $F\, y'(t, l)$ есть проекция на ось y силы натяжения, которая приложена к концу струны, где $x = l$. Величина $\dot{y}(t, l)$ есть скорость этого конца струны. Следовательно, выражение $F\, y'(t, l)\, \dot{y}(t, l)$ есть мощность силы натяжения, приложенной к концу струны. Аналогично, выражение $-F\,y'(t,0)\,\dot{y}(t,0)$ есть мощность силы натяжения, приложенной к другому концу струны.

Работа равна интегралу от мощности по времени:

$$A = \int\limits_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = F\int\limits_0^t y'\,\dot{y}\Big|_0^l\,dt - \frac{1}{2}\,F\int\limits_0^l \Big({y'}^2(t_2,x) - {y'}^2(t_1,x)\Big)\,dx\,.$$

Первое слагаемое в этом выражении есть интеграл по времени. Оно содержит в себе функцию $y(t,x)$ при всех $t \in [t_1,t_2]$. Другими словами, это слагаемое есть работа неконсервативных сил, которая зависит от пути, по которому струна переходит из положения 1 и положеие 2. Второе слагаемое зависит только от функций $y(t_1,x)$ и $y(t_2,x)$, которые определяют положения 1 и 2 струны до и после перемещения. Следовательно, это есть работа консервативных сил, а выражение

$$W = \frac{1}{2}\,F\int\limits_0^l {y'}^2(t,x)\,dx \tag{13.38}$$

– потенциальная энергия струны в момент времени t, когда ее форма определяется функцией $y(t,x)$.

Итак, полная механическая энергия струны в момент времени t будет

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \Big(\varrho\,\dot{y}^2 + F\,{y'}^2\Big)\,dx\,. \tag{13.39}$$

13.10. Звуковые волны в газах

Подобно тому, как от камня, брошенного в воду, по ее поверхности разбегаются круговые волны, так от тела, движущегося в газе или жидкости, распространяются звуковые волны. Вследствие взаимодействия между частицами среды любое возмущение (например, локальное изменение ее плотности) со временем начинает распространяться в пространстве, заполненном этой средой. Это и есть упругая, или звуковая волна.

В этом разделе будем изучать звуковые волны в газе. Волна – это совокупность согласованных колебаний, происходящих в различных точках пространства. Звуковая волна в газе – это согласованные продольные колебания молекул газа, т.е. упорядоченные колебательные движения молекул газа в направлении распространения волны.

Звук возникает только при достаточно быстром движении тела в газе. Если тело движется медленно, то газ обтекает это тело так, что давление газа P_o у поверхности тела практически не изменяется. При быстром движении тела газ не успевает его обтекать. Перед быстро движущимся телом возникает область повышенного давления, а за ним давление будет меньше, чем давление P_o в невозмущенном газе. В область пониженного давления устремляется газ из окружающих эту область слоев. А газ в зоне повышенного давления расширяется и сжимает прилегающие к нему слои. Так возмущение распространяется в пространстве, заполненном газом. Таким образом, давление газа не только у поверхности тела, но и во всем пространстве будет отличаться от начального давления P_o на некоторую величину

$$\delta P = P - P_o\,,$$

которая представляет собой некоторую функцию от времени t и радиус-вектора $\vec{r}$:

$$\delta P = \delta P(t, \vec{r})\,.$$

Для количественного описания звуковых волн в газе его рассматривают как сплошную среду. Напомним, что частицей сплошной среды называют совокупность большого числа молекул, которые заполняют физически бесконечно малый объем пространства такой, что температура и давление в этом объеме всюду одинаковы. В невозмущенной сплошной среде ее частицы покоятся. При распространении в среде звуковой волны частицы среды смещаются из положений равновесия.

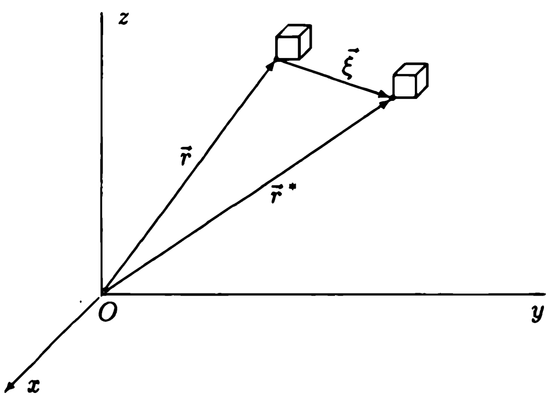

Рис. 13.10. Смещение частицы сплошной среды из положения равновесия

Пусть $\vec{r}$ есть радиус-вектор частицы среды, характеризующий ее положение, когда среда находится в невозмущенном состоянии (13.10). Когда в среде распространяется волна, эта частица периодически смещается из положения равновесия, т.е. совершает колебания. Пусть

$$\vec{r}^{\,*} = \vec{r}^{\,*}(t,\, \vec{r})$$

есть радиус-вектор, который определяет в момент времени t положение той частицы среды, равновесное положение которой характеризуется вектором $\vec{r}$. Вектор

$$\vec{\xi} = \vec{r}^{\,*}(t,\, \vec{r}) - \vec{r} \tag{13.40}$$

перемещения частицы из равновесного положения $\vec{r}$ в некоторое положение $\vec{r}^{\,*}(t,\, \vec{r})$ называют смещением. Колебания частиц среды около положений равновесия удобно описывать посредством зависимости вектора смещения от времени t радиус-вектора $\vec{r}$:

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(t,\, \vec{r}) \, .$$

При смещении частицы среды из положения равновесия ее размеры и объем могут изменяться, но ее масса все время остается одной и той же:

$$dm = dm^* \, . \tag{13.41}$$

Из этого следует, что плотность вещества, по которому распространяется упругая волна, изменяется со временем и от точки к точке в пространстве:

$$\varrho = \varrho(t,\, \vec{r}) \, .$$

Рассмотрим звуковую волну, распространяющуюся вдоль оси x. Звуковые волны в газе являются продольными, т.е. частицы газа в данном случае будут смещаться также вдоль оси x. Выделим мысленно в газе частицу, которая занимает объем в форме тонкого плоского слоя площадью S, перпендикулярного к оси x. Эта частица газа изображена на рис. 13.11 в двух положениях: равновесном и смещенном из равновесия. Если газ находится в невозмущенном состоянии, выделенная частица газа ограничена плоскостями S_1 и S_2, положения которых определяются значениями координат x и $x + dx$ соответственно. Когда по газу распространяется звуковая волна, эта частица газа смещается и деформируется (сжимается или расширяется). В произвольный момент времени t ограничивающие частицу газа плоскости S_1 и S_2 занимают положения, соответствующие значениям координат x^* и $x^* + dx^*$. Причем координату x^* следует рассматривать как функцию от времени t и координаты x:

$$x^* = x^*(t,\, x) \, .$$

В рассматриваемом случае вектор смещения $\vec{\xi}$ будет всегда направлен по оси x. Пусть ξ есть проекция этого вектора на ось x. В силу определения (13.40) будем иметь соотношение

$$\xi = x^*(t, x) - x \,. \tag{13.42}$$

Таким образом, звуковую волну, распространяющуюся вдоль оси x, можно описать при помощи функции

$$\xi = \xi(t, x) \,. \tag{13.43}$$

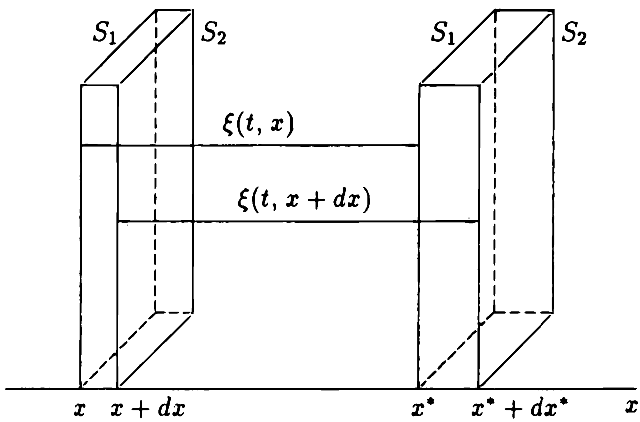

Рис. 13.11. Смещение частицы сплошной среды из положения равновесия при распространении в среде плоской звуковой волны, бегущей вдоль оси x

Из рис. 13.11 видно, что в момент времени t толщина dx^* слоя S_1S_2 будет

$$dx^* = dx + \xi(t, x + dx) - \xi(t, x) \,.$$

Так как частное приращение функции равно произведению ее частной производной

$$\xi'(t, x) = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

на приращение аргумента, т.е.

$$\xi(t, x + dx) - \xi(t, x) = \xi'(t, x)\, dx \,,$$

получим равенство

$$dx^* = \left(1 + \xi'\right) dx \,. \tag{13.44}$$

Согласно этой формуле толщина dx^* выделенного слоя газа в некоторый момент времени t может быть как меньше, так и больше его толщины dx в равновесном положении. Если производная $\xi' > 0$, то $dx^* > dx$, т.е. объем выделенной частицы газа увеличился. Если же производная $\xi' < 0$, то $dx^* < dx$.

Из равенства (13.44) найдем относительное изменение толщины слоя

$$\frac{dx^* - dx}{dx} = \xi'(t, x)\,. \tag{13.45}$$

Следует заметить, что для звуковых волн в газах это отношение мало по сравнению с единицей:

$$\xi' \ll 1\,. \tag{13.46}$$

Получим уравнение для функции $\xi = \xi(t, x)$, которая описывает плоскую звуковую волну в газе. При этом будем исходить из таких фундаментальных законов физики как: 1) закон сохранения массы вещества, 2) второй закон Ньютона и 3) законы идеального газа.

1. Равенство (13.41), выражающее закон сохранения массы вещества, теперь можно записать так:

$$\varrho_o\, S\, dx = \varrho(t, x)\, S\, dx^*\,, \tag{13.47}$$

где ϱ_o – плотность невозмущенного газа, $\varrho = \varrho(t, x)$ – зависимость плотности возмущенного газа от времени t и координаты x.

При небольших изменениях объема рассматриваемого слоя газа его плотность также меняется незначительно. Поэтому зависимость плотности от времени и координаты x можно представить в виде суммы

$$\varrho(t, x) = \varrho_o + \delta\varrho(t, x)\,, \tag{13.48}$$

где функция $\delta\varrho(t, x)$ такова, что

$$\big|\delta\varrho(t, x)\big| \ll \varrho_o\,. \tag{13.49}$$

Подставим выражения (13.44) и (13.48) в равенство (13.47). Получим

$$\varrho_o = \big(\varrho_o + \delta\varrho\big)\big(1 + \xi'\big)\,.$$

Раскрыв скобки, придем к равенству

$$\varrho_o = \varrho_o + \delta\varrho + \varrho_o\,\xi' + \delta\varrho\cdot\xi'\,.$$

В силу неравенств (13.46) и (13.49) последнее слагаемое в правой части этого равенства представляет собой произведение двух малых величин и им можно пренебречь. Таким образом, придем к формуле

$$\delta\varrho = -\,\varrho_o\,\xi'(t, x)\,. \tag{13.50}$$

2. Движение выделенного слоя газа вдоль оси x описывается функцией

$$x^*(t, x) = x + \xi(t, x), \tag{13.51}$$

где $x = \text{const}$. Уравнение для этой функции можно получить из второго закона Ньютона:

$$dm \cdot a_x = \sum F_x, \tag{13.52}$$

где $dm = \varrho_0 S\, dx$ – масса слоя, а правая часть есть сумма проекций на ось x сил, действующих на этот слой. Ускорение слоя есть вторая производная от функции (13.51) по времени t при $x = \text{const}$:

$$a_x = \frac{d^2 x^*}{dt^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{13.53}$$

Найдем теперь силы, действующие на слой газа.

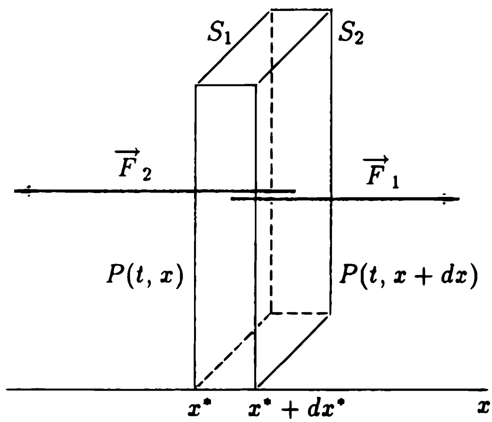

Рис. 13.12. Силы, действующие на выделенный слой газа

На рис 13.12 изображен рассматриваемый слой газа в смещенном из равновесия положении и показаны силы, с которыми на этот слой действует окружающий его газ. На поверхность S_1 действует сила $\vec{F}_1$, которая направлена вдоль оси x. Так как давление на поверхность S_1 равно $P(t, x^*) \simeq P(t, x)$, проекция этой силы на ось x будет

$$P(t, x)\, S.$$

Давление на поверхность S_2 равно $P(t, x^* + dx^*) \simeq P(t, x + dx)$. При этом проекция на ось x силы $\vec{F}_2$, которая направлена в сторону противоположную направлению оси x, будет

$$- P(t, x + dx)\, S\,.$$

Таким образом, будем иметь

$$\sum F_x = P(t, x)\, S - P(t, x + dx)\, S\,.$$

При помощи формулы

$$P(t, x + dx) - P(t, x) = \frac{\partial P}{\partial x}\, dx$$

преобразуем это выражение к виду

$$\sum F_x = -\frac{\partial P}{\partial x}\, dx\,. \tag{13.54}$$

3. Зависимость давления от времени t и координаты x имеет вид

$$P(t, x) = P_o + \delta P(t, x)\,. \tag{13.55}$$

Чтобы установить связь этой зависимости с функцией $\xi(t, x)$, необходимо знать, какой термодинамический процесс протекает в газе при его сжатии и расширении под действием возмущений, вызванных звуковой волной. Лаплас предположил, что в газе возмущенном звуковой волной, пртекает адиабатический процесс. Это предположение справедливо в случае, когда размеры областей газа, в которых происходят изменения температуры, достаточно велики по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. При этом условии перепады температуры в пространстве незначительны и обусловленными ими потоками тепла можно пренебречь, т.е. можно считать процесс адиабатическим. Этот процесс описывается уравнением Пуассона

$$P\, V^{\gamma} = \mathrm{const}\,, \tag{13.56}$$

где γ – показатель адиабаты. Объем V рассматриваемого слоя газа изменяется обратно пропорционально его плотности:

$$V = \frac{dm}{\varrho}\,,$$

где $dm = \mathrm{const}$. Таким образом, приходим к следующей зависимости давления газа от плотности:

$$P = \mathrm{const} \cdot \varrho^{\gamma}\,. \tag{13.57}$$

Теперь можно найти как связаны между собой функции $\delta\varrho = \delta\varrho(t, x)$ и $\delta P = \delta P(t, x)$. Величину δP можно считать дифференциалом функции (13.57), а величину $\delta\varrho$ – приращением аргумента этой функции. Следовательно,

$$\delta P = \frac{dP(\varrho_o)}{d\varrho}\,\delta\varrho\,.$$

Производная от давления (13.57) по плотности

$$\frac{dP}{d\varrho} = \mathrm{const}\cdot\gamma\,\varrho^{\gamma-1} = \gamma\,\frac{P}{\varrho}\,.$$

Итак, будем иметь соотношение

$$\delta P = v^2\,\delta\varrho\,, \tag{13.58}$$

где

$$v^2 = \frac{dP(\varrho_o)}{d\varrho} = \gamma\,\frac{P_o}{\varrho_o}\,. \tag{13.59}$$

Формулы (13.50), (13.55) и (13.58) дают возможность преобразовать выражение (13.54) к виду

$$\sum F_x = \varrho_o\,v^2\,\xi''\,dx\,, \tag{13.60}$$

где

$$\xi'' = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,.$$

Подстановка выражений (13.53) и (13.60) в (13.52) приводит к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,, \tag{13.61}$$

где постоянная v, определенная формулой (13.59), есть скорость звука в газе.

Уравнение состояния идеального газа можно записать так:

$$\frac{P}{\varrho} = \frac{RT}{\mu}\,,$$

где R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура, μ – молярная масса газа. Используя это уравнение, выражению (13.59) для скорости звука в газе можно придать вид

$$v = \sqrt{\frac{\gamma\,RT}{\mu}}\,.$$

13.11. Упругие волны в твердом теле

В качестве примера волны, которая может распространяться в твердом теле, рассмотрим продольную волну, распространяющуюся в стержне, изображенном на рис. 13.13. Такие волны образуются благодаря упругим силам, возникающим при сжатии и растяжении отдельных участков стержня.

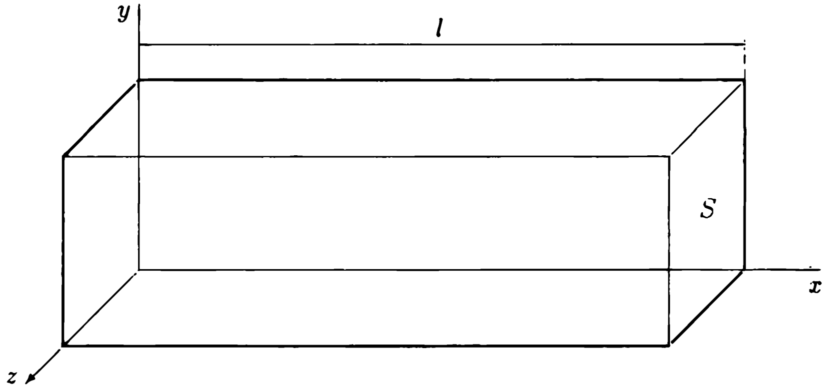

Рис. 13.13. К описанию продольной волны в твердом теле

Если один конец стержня закрепить, а к другому приложить постоянную силу F, то длина стержня изменится на некоторую величину

$$\Delta l = l - l_o ,$$

где l_o – длина недеформированного стержня, l – его длина после приложения силы. Когда удлинение Δl стержня не очень велико, сила F будет пропорциональна удлинению:

$$F = k\,\Delta l , \tag{13.62}$$

где k – коэффициент пропорциональности, называемый жесткостью. Это равенство выражает собой закон Гука. В таком случае сила F называется упругой. Более точно закон Гука описывается следующей формулой:

$$F = E\,S\,\frac{\Delta l}{l_o} , \tag{13.63}$$

где S – площадь поперечного сечения стержня, E – коэффициент пропорциональности, называемый модулем Юнга, или модулем продольной упругости. Модуль Юнга не зависит от размеров стержня и определяется только свойствами материала, из которого он изготовлен. Отношение

$$\frac{\Delta l}{l_o}$$

называют относительным удлинением стержня.

Сила упругости является косервативной. Это означает, что деформированный стержень обладает потенциальной энергией. В соответствии с законом Гука энергия упругих деформаций определяется формулой

$$W = \frac{1}{2}\, k\, \Delta l^2\,. \qquad (13.64)$$

Так как коэффициент жесткости

$$k = \frac{E\, S}{l_o}\,,$$

формулу (13.64) можно записать так:

$$W = \frac{E\, S\, \Delta l^2}{2\, l_o}\,. \qquad (13.65)$$

Энергия упругих деформаций распределена равномерно по объему стержня. Отношение энергии к объему есть объемная плотность энергии:

$$w = \frac{W}{V}\,. \qquad (13.66)$$

Так как объем стержня $V = S\, l_o$, придем к формуле

$$w = \frac{1}{2}\, E \left(\frac{\Delta l}{l_o}\right)^2\,. \qquad (13.67)$$

Формулы (13.63) и (13.67) справедливы в том случае, когда стержень однородно деформирован постоянной силой и находится в покое. Обобщим эти формулы на случай, когда по стержню распространяется волна сжатия. При этом стержень будет деформирован необнородно, т.е. в одних местах он будет сжат, а в других растянут. Продольные деформации стержня описываются функцией

$$\xi = \xi(t,\, x)\,,$$

т.е. зависимостью от времени t и координаты x смещения $\xi = x^* - x$ произвольной частицы стержня из положения равновесия (рис. 13.11).

Участок стержня, который при его равновесии находился на отрезке $[x, x + dx]$, к моменту времени t сместится на отрезок $[x^*, x^* + dx^*]$. При этом его длина изменится на величину

$$dx^* - dx = d\xi(t = \text{const}, x)\,.$$

Таким образом, относительное удлинение рассматриваемого участка стержня будет

$$\frac{dx^* - dx}{dx} = \frac{d\xi(t = \text{const}, x)}{dx} = \xi'(t, x) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\,.$$

Согласно формулам (13.63) и (13.67) на этом участке стержня будет действовать упругая сила

$$F = E\,S\,\xi'(t, x)\,, \tag{13.68}$$

а плотность потенциальной энергии здесь будет

$$w = \frac{1}{2}\,E\,\xi'^2(t, x)\,. \tag{13.69}$$

По определению произведение $w\,dV$ плотности энергии на объем есть энергия, заключенная в этом объеме. Объем dV участка деформированного стержня между сечениями S_1 и S_2 равен произведению площади S его поперечного сечения на толщину dx^*. С учетом формулы (13.44) можно записать

$$dV = S\,dx^* = S\left(1 + \xi'\right)dx\,.$$

В силу неравенства (13.46) будем иметь

$$dV \cong S\,dx\,.$$

Таким образом, можно записать следующие выражения для потенциальной энергии упругих деформаций стержня:

$$W = \int\limits_V w\,dV = \frac{1}{2}\,E\,S\int\limits_0^l \xi'^2(t, x)\,dx\,. \tag{13.70}$$

Составим уравнение для функции $\xi = \xi(t, x)$, которая описывает волну сжатия, растространяющуюся в твердом теле. Так же, как и для волн в газе, уравнение, которому должна удовлетворять эта функция, можно найти из второго закона Ньютона. Для участка стержня между сечениями S_1 и S_2 можно записать уравнение

$$dm \cdot a_x = \sum F_x\,, \tag{13.71}$$

где $dm = \varrho_o S\,dx$ – масса этого участка стержня, ϱ_o – плотность материала, из которого изготовлен стержень,

$$a_x = \ddot{\xi} \equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

– ускорение, а правая часть есть сумма проекций на ось x сил, действующих на этот участок стержня.

Найдем силы, действующие на выделенный участок стержня между сечениями S_1 и S_2. Этот участок в деформированном состоянии сжат или растянут неоднородно. Поэтому силы $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$, действующие в сечениях S_1 и S_2, не равны по величине. Используя формулу (13.68), найдем

$$\sum F_x = F(t, x + dx) - F(t, x) = E\,S\left(\xi'(t, x + dx) - \xi'(t, x)\right). \quad (13.72)$$

Разность в круглых скобках есть приращение функции $\xi'(t, x)$, которое можно представить как

$$\xi'(t, x + dx) - \xi'(t, x) = \xi''(t, x)\,dx\,,$$

где

$$\xi''(t, x) \equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,.$$

Подстановка выражения (13.72) в уравнение Ньютона (13.71) приводит к равенству

$$\varrho_o\,\ddot{\xi} = E\,\xi''\,,$$

из которого нетрудно вывести волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,, \quad (13.73)$$

где

$$v = \sqrt{\frac{E}{\varrho_o}} \quad (13.74)$$

– скорость волны сжатия в твердом теле.

Не всегда веществ́о можно рассматривать как сплошную среду. Следует помнить, что вещество состоит из атомов и молекул. Атомы в твердом теле расположены регулярным образом и образуют так называемую *кристаллическую решетку*. Узлы решетки – это равновесные положения атомов. На рис. 13.14 изображена кубическая решетка хлористого натрия NaCl. Это та самая поваренная соль, которую употребляют в пищу. Существуют вещества с еще более сложной кристаллической структурой.

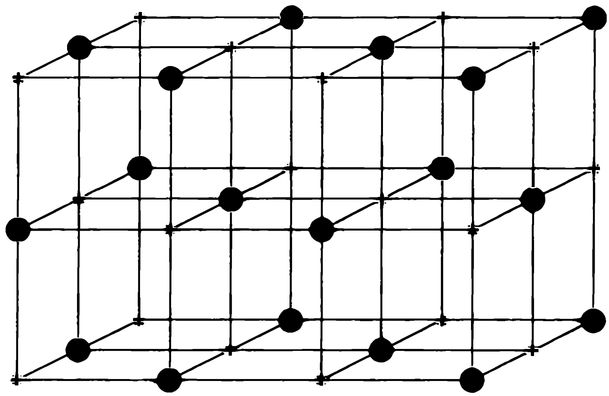

Рис. 13.14. Кристалл хлористого натрия NaCl. *Ионы натрия* Na^+ *имеют меньшие размеры, чем ионы хлора* Cl^-

Когда по твердому телу распространяется упругая волна, атомы совершают колебания около положений равновесия. Причем два соседних атома движутся согласованно. Самая короткая длина будет у такой волны, при распространении которой по твердому телу соседний атом всегда движется в противоположную сторону. На рис. 13.15 изображены расположения атомов в некоторый момент времени при распространении в твердом теле самой короткой поперечной волны. Видно, что длина λ_{min} такой волны равна удвоенному межатомному расстоянию d:

$$\lambda_{min} = 2\,d.$$

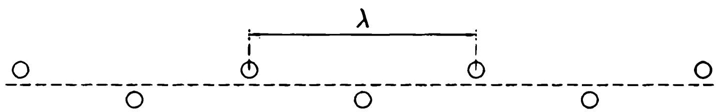

Рис. 13.15. Самая короткая упругая волна в твердом теле

Когда длина упругой волны существенно больше расстояния между атомами:

$$\lambda \gg d,$$

вещество, по которому распространяется волна, можно рассматривать как сплошную среду. В противном случае необходимо использовать более сложные физические модели вещества, учитывающие его атомарное строение.

13.12. Энергия волны сжатия

Найдем теперь энергию, которую несет с собой упругая продольная волна в твердом теле. Кинетическая энергия участка $S_1 S_2$ стержня равна

$$\frac{1}{2}\, dm\, \dot{\xi}^2 = \frac{1}{2}\, \varrho_o\, S\, dx\, \dot{\xi}^2 .$$

Следовательно, кинетическая энергия стержня, совершающего продольные колебания будет

$$T = \frac{1}{2}\, \varrho_o\, S \int\limits_0^l \dot{\xi}^2\, dx .$$

Это выражение можно представить в виде интеграла по объему:

$$T = \frac{1}{2}\, \varrho_o \int\limits_V \dot{\xi}^2\, dV , \tag{13.75}$$

где

$$\frac{1}{2}\, \varrho_o\, \dot{\xi}^2$$

есть объемная плотность кинетической энергии.

Потенциальная энергия волны сжатия в твердом теле определяется выражением (13.70). Таким образом, при помощи формулы

$$\mathcal{E} = T + W$$

получим следующее выражение для полной механической энергии стержня, по которому распространяется упругая продольная волна:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int\limits_V \left(\varrho_o\, \dot{\xi}^2 + E\, {\xi'}^2 \right) dV . \tag{13.76}$$

Запишем закон, по которому полная механическая энергия $\mathcal{E}$ некоторой системы изменяется с течением времени:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = P_{\text{нкс}} , \tag{13.77}$$

где $P_{\text{нкс}}$ – мощность неконсервативных сил. Применим этот закон к участку стержня между его поперечными сечениями с координатами x_1 и x_2. Неконсервативными в данном случае являются упругие силы $-F(t, x_1)$ и $F(t, x_2)$, действующие на этот участок извне. Мощность силы равна произведению силы на скорость. Мощность силы в сечении $x = x_1$ будет

$$- E\,S\,\xi'(t,\,x_1)\cdot\dot{\xi}(t,\,x_1)\,,$$

а мощность силы в сечении $x = x_2$ –

$$E\,S\,\xi'(t,\,x_2)\cdot\dot{\xi}(t,\,x_2)\,.$$

Теперь закон (13.77) можно записать так:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\,E\,S\,\Big(\xi'(t,\,x_1)\,\dot{\xi}(t,\,x_1) + \xi'(t,\,x_2)\,\dot{\xi}(t,\,x_2)\Big)\,. \tag{13.78}$$

Согласно этому равенству полная механическая энергия рассматриваемого участка стержня изменяется с течением времени. Причиной изменения энергии является втекание энергии на этот участок или вытекание из него через ограничивающие его сечения. При этом выражение в правой части будет представлять собой сумму потоков энергии через сечения $x = x_2$ и $x = x_1$ соответственно. Теперь равенству (13.78) можно придать вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I(t,\,x_1)\,S - I(t,\,x_2)\,S\,, \tag{13.79}$$

где

$$I(t,\,x) = -\,E\,\xi'(t,\,x)\,\dot{\xi}(t,\,x) \tag{13.80}$$

плотность потока энергии вдоль оси x, т.е. проекция вектора Умова на эту ось. Выражение $I(t,\,x_1)\,S$ есть энергия, втекающая за единицу времени на выделенный участок стержня через сечение $x = x_1$, в выражение $I(t,\,x_2)\,S$ – энергия, вытекающая за единицу времени из этого участка через сечение $x = x_2$.

По формуле (13.80) нетрудно найти плотность потока энергии, которую переносит гармоническая волна сжатия в твердом теле. Для гармонической волны

$$\xi(t,\,x) = A\,\cos(\omega\,t - k\,x)\,, \tag{13.81}$$

распространяющейся вдоль оси x в сторону возрастания x, получим выражение

$$I(t,\,x) = E\,\omega\,k\,A^2\,\sin^2(\omega\,t - k\,x)\,. \tag{13.82}$$

Из этой формулы видно, что плотность потока энергии, т.е. проекция вектора Умова на ось x, в данном случае есть неотрицательная величина. Следовательно, энергия переносится волной в том же направлении, в котором она распространяется. Следует отметить также, что плотность потока энергии гармонической волны всегда пропорциональна квадрату ее амплитуды.

13.13. Эффект Доплера

В 1842 г. австрийский физик Христиан Доплер теоретически доказал, что частота ω волны, воспринимаемой наблюдателем, в общем случае отличается от частоты ω_o волны, испускаемой движущимся источником, и зависит от скоростей движения источника и наблюдателя. В 1845 г. эффект Доплера нашел свое экспериментальное подтверждение в звуковых явлениях.

Пусть источник звука S и наблюдатель P движутся равномерно по одной прямой (рис. 13.16). Направим ось x вдоль этой прямой. Без ограничения общности можно считать, что в момент времени $t = 0$ источник находился в точке $x = 0$. При этом функция, описывающая движение источника, будет иметь вид

$$x_S(t) = v_S t,$$

где v_S – скорость источника. Движение наблюдателя будет описываться функцией

$$x_P(t) = x_o + v_P t,$$

где v_P – скорость наблюдателя.

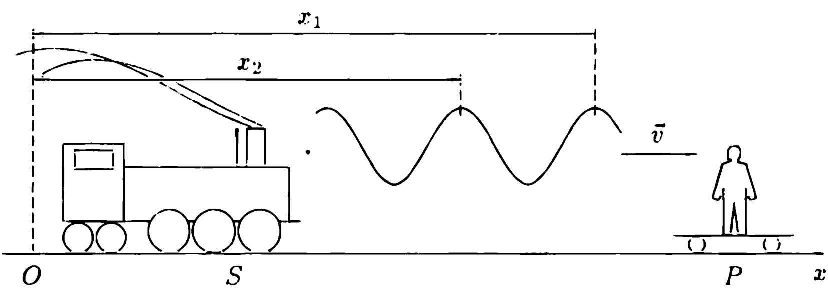

Рис. 13.16. К теории эффекта Доплера

Пусть в момент времени $t = 0$ давление в звуковой волне, испускаемой источником, приняло наибольшее значение. При $t > 0$ этот максимум давления будет перемещаться от источника со скоростью звука v. Если воздух (среда, в которой распространяется звук) неподвижен, то координата x_1, определяющая положение максимума давления на оси x, будет изменяться с течением времени по закону

$$x_1(t) = v\,t.$$

Спустя период T_o, т.е. в момент времени $t = T_o$, давление воздуха в точке

$$x_S(T_o) = v_S T_o,$$

где оказался источник, снова примет максимальное значение. Положение этого максимума на оси x при распространении волны будет изменяться так, что зависимость его координаты x_2 от времени будет

$$x_2(t) = v_S T_o + v\,(t - T_o)\,.$$

В некоторый момент времени t_1 первый максимум достигнет наблюдателя. При этом

$$x_1(t_1) = x_P(t_1)\,, \qquad \text{или} \qquad v\,t_1 = x_o + v_P t_1\,. \tag{13.83}$$

Второй максимум окажется в точке P в момент времени $t_2 > t_1$:

$$x_2(t_2) = x_P(t_2)\,, \qquad \text{или} \qquad v_S T_o + v\,(t_2 - T_o) = x_o + v_P t_2\,. \tag{13.84}$$

Таким образом, по часам наблюдателя, принимающего звуковую волну, ее максимумы будут следовать один за другим с периодом

$$T = t_2 - t_1\,.$$

Вычтем из уравнения (13.84) уравнение (13.83). Получим равенство, разрешив которое относительно T, придем к формуле

$$T = \frac{v - v_S}{v - v_P}\,T_o\,.$$

Так как частота звука обратно пропорциональна периоду, частота ω звука, воспринимаемого наблюдателем, будет связана с частотой ω_o звука, издаваемого источником, следующим соотношением:

$$\omega = \frac{v - v_P}{v - v_S}\,\omega_o\,. \tag{13.85}$$

Это соотношение дает количественное описание эффекта Доплера.

Частота ω звука, воспринимаемого наблюдателем, будет больше частоты ω_o источника звука, когда источник и наблюдатель движутся навстречу друг другу. При этом $v_S > 0$, $v_P < 0$ и

$$\omega = \frac{v + |v_P|}{v - v_S}\,\omega_o > \omega_o\,.$$

Когда источник и наблюдатель удаляются друг от друга, частота ω будет меньше ω_o. В этом случае $v_S < 0$, $v_P > 0$ и

$$\omega = \frac{v - v_P}{v + |v_S|}\,\omega_o < \omega_o\,.$$

ГЛАВА 14*

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

14.1. Функционал. Уравнение Эйлера

Фундаментальные законы физики (их именуют принципами) могут быть сформулированы при помощи переменных величин, называемых *функционалами*. Эти величины определяются следующим образом. Если каждой функции из некоторого класса по определенному правилу поставлено в соответствие число, то такое соответствие называется функционалом; или говорят, что задан функционал. Другими словами, можно сказать, что функционал есть функция от функции.

Рассмотрим наиболее часто используемое в физике определение функционала. Пусть $F(x, y, y')$ – некоторая непрерывная функция трех переменных, а $y = y(x)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, определенная на отрезке $[a, b]$ оси x. Каждой такой функции $y(x)$ можно поставить в соответствие число J по следующему правилу:

$$J\{y(x)\} = \int_a^b F\big(x,\, y(x),\, y'(x)\big)\, dx\,, \tag{14.1}$$

где $y'(x)$ есть производная от функции $y(x)$ по x. В данном случае функционал представлен в виде определенного интеграла. Только такого типа функционалы обычно применяются в физике.

Подставим в формулу (14.1) вместо функции $y(x)$ другую функцию $y(x) + \delta(x)$, где функция $\delta(x)$ называется *вариацией функции* $y(x)$. Такая подстановка дает другое значение функционала, которое обозначим $J\{y(x) + \delta(x)\}$. Разность

$$\Delta J = J\{y(x) + \delta(x)\} - J\{y(x)\} \tag{14.2}$$

называется *приращением функционала*. Используя определение (14.1), приращению (14.2) функционала можно придать вид

$$\Delta J = \int_a^b \Big(F\big(x,\, y + \delta,\, y' + \delta'\big) - F\big(x,\, y,\, y'\big) \Big)\, dx\,. \tag{14.3}$$

Выражение под знаком интеграла есть приращение ΔF **функции** $F(x,\, y,\, y')$, которое для малых вариаций $\delta(x)$ приближенно равно **дифференциалу** dF этой функции:

$$\Delta F = dF + \ldots\,, \tag{14.4}$$

где дифференциал dF согласно формуле (1.32) равен

$$dF = \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta'\,.$$

Подстановка (14.4) в (14.3) дает

$$\Delta J = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta'\right) dx + \ldots\,, \tag{14.5}$$

где многоточие обозначает слагаемые, содержащие вторые и более высокие степени δ и δ'. Главная линейная относительно δ и δ' часть приращения ΔJ функционала J называется его *первой вариацией*, или *дифференциалом* и обозначается символом δJ. В силу (14.5)

$$\delta J = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta'\right) dx\,. \tag{14.6}$$

Как видно из этой формулы, дифференциал функционала также является функционалом, зависящим от двух функций $y(x)$ и $\delta(x)$:

$$\delta J = \delta J\,\{y(x),\, \delta(x)\}\,.$$

Подобно тому, как в разделе 1.1 было дано определение экстремума функции, можно определить экстремум функционала. Функционал $J\{y(x)\}$ достигает экстремума при $y = y_o(x)$, если приращение $\Delta J = J\{y(x)\} - J\{y_o(x)\}$ сохраняет знак при любых функциях $y(x)$, не очень сильно отличающихся от функции $y_o(x)$.

Теорема. Для того чтобы функционал $J\{y\}$ при $y = y_o(x)$ достигал экстремума, необходимо, чтобы его дифференциал (если он существует) обращался в ноль при $y = y_o(x)$, т.е.

$$\delta J\{y_o(x),\, \delta(x)\} = 0 \tag{14.7}$$

при любых достаточно малых вариациях $\delta(x)$ функции.

Доказательство. Согласно определению (14.5) при малых вариациях $\delta(x)$ функции $y(x)$ приращение ΔJ функционала очень мало отличается от его дифференциала δJ, если он не равен нулю:

$$\Delta J = \delta J + \ldots$$

Поэтому знак приращания будет определяться знаком дифференциала. Но из формулы (14.6) следует, что δJ есть функционал линейный относительно вариации $\delta(x)$ и ее производной $\delta'(x)$. Так что

$$\delta J\{y, -\delta\} = -\,\delta J\{y, \delta\}\,,$$

т.е. дифференциал δJ при сколь угодно малых вариациях $\delta(x)$ может быть как положительным, так и отрицательным. Таким образом, для функции $y(x)$ экстремум невозможен, если

$$\delta J\{y(x), \delta(x)\} \neq 0\,.$$

Следовательно, для того чтобы функционал J достигал экстремума на функции $y = y_o(x)$, необходимо выполнение условия (14.7) при любых вариациях $\delta(x)$.

Функция $y = y_o(x)$, для которой функционал достигает экстремума, называется *экстремалью.*

Т е о р е м а. Для того чтобы функционал (14.1), определенный на множестве функций $y = y(x)$, удовлетворяющих условиям

$$y(a) = y_1 = \text{const}\,, \qquad y(b) = y_2 = \text{const}\,, \tag{14.8}$$

достигал экстремума на одной из этих функций, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0\,. \tag{14.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем определенный интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,\delta'(x)\,dx\,, \tag{14.10}$$

применяя формулу интегрирования по частям (1.26), в которой положим

$$u = f, \qquad\qquad dv = \delta'\,dx\,.$$

Отсюда следует, что

$$du = f'\,dx, \qquad\qquad v = \delta\,.$$

Согласно формуле (1.26) будем иметь

$$I = f(x)\,\delta(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\,\delta(x)\,dx\,. \tag{14.11}$$

Условия (14.8) приводят к равенствам

$$\delta(a) = \delta(b) = 0\,, \tag{14.12}$$

с учетом которых формулу (14.11) можно преобразовать к виду

$$\int\limits_a^b f(x)\,\delta'(x)\,dx = -\int\limits_a^b f'(x)\,\delta(x)\,dx\,. \tag{14.13}$$

Положив в этой формуле

$$f(x) = \frac{\partial F}{\partial y'}\,,$$

используем ее для преобразования выражения (14.6). Получим:

$$\delta J = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta(x)\,dx\,. \tag{14.14}$$

В силу необходимого условия (14.7) экстремума функционала $J\{y(x)\}$ для экстремали будем иметь равенство

$$\delta J = 0\,, \quad \text{или} \quad \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta(x)\,dx = 0\,,$$

которое должно выполняться при любых вариациях $\delta(x)$. Это возможно только в том случае, если выражение в круглых скобках тождественно равно нулю, т.е. экстремаль должна быть решением уравнения Эйлера. Что и требовалось доказать.

Эту теорему нетрудно обобщить на случай, когда функционал J зависит не от одной, а от нескольких функций $x_\alpha = x_\alpha(t)$, где $\alpha = 1, 2, \ldots, s$. При этом функционал можно определить так:

$$J = \int\limits_{t_1}^{t_2} F(t,\, x_1, \ldots, x_s;\, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_s)\,dt\,, \tag{14.15}$$

где точка обозначает производную по аргументу t. Необходимое условие экстремума такого функционала ($\delta J = 0$) приводит к системе из s уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha} = 0\,. \tag{14.16}$$

Если функционал J зависит от одной функции нескольких переменных $u = u(x_1, ..., x_\beta, ..., x_n)$: $J = J\{u\}$, то он может достигать экстремума только для такой функции u, которая удовлетворяет уравнению Эйлера вида

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial F}{\partial u'_\beta} = 0\,, \tag{14.17}$$

где

$$u'_\beta \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\beta}$$

– частная производная от функции u по переменной x_β.

Физический закон выглядит более "понятным", когда его удается вывести из какого-либо не вызывающего сомнения общего принципа. Подобный вывод "убеждает" в том, что данный закон должен быть именно таким, каков он есть. Такой убедительностью обладают формулировки законов, полученные из вариационных принципов.

Основой любого вариационного принципа служит какой-либо функционал, зависящий от функций, которые описывают состояние или движение исследуемой системы. Содержание принципа составляет утверждение, что только те функции описывают реальное поведение системы, для которых данный функционал принимает экстремальное (наименьшее или наибольшее) значение.

14.2. Принцип Ферма

Многие законы физики могут быть выведены из того или иного вариационного принципа. В частности это относится к законам геометрической оптики. Все эти законы могут быть получены из одного общего принципа, который называется *принципом наименьшего времени*, или *принципом Ферма* (Пьер Ферма (1601 – 1665) – французский ученый). Этот принцип утверждает, что среди всех возможных линий, соединяющих две точки A и B пространства, действительный путь распространения света будет представлен той из них, для прохождения которой свету требуется наименьшее время τ. Рассмотрим некоторые следствия этого принципа. Но сначала необходимо записать математическое равенство, выражающее собой принцип Ферма.

Пусть пространство заполнено прозрачной средой, скорость распространения света в которой из-за ее неоднородности может изменяться от точки к точке: $v = v(\vec{r})$. Выберем в пространстве две произвольные точки A и B и соединим их непрерывной линией (рис. 14.1). Пусть dl есть длина бесконечно малого участка этой линии. Время, за которое свет проходит путь dl, равно dl/v, а время, необходимое свету для распространения вдоль линии AB, будет выражаться криволинейным интегралом

$$\tau = \int_A^B \frac{dl}{v}. \tag{14.18}$$

Таким образом, время распространения света от точки A до точки B является функционалом, определенным для произвольной кривой, соединяющей эти точки. Согласно принципу Ферма на действительной траектории движения света функционал (14.18) принимает наименьшее значение. Необходимое условие экстремума функционала

$$\delta\tau = 0$$

дает возможность установить путь, по которому свет распространяется от точки A к точке B.

Если свет распространяется в однородной среде, то его скорость во всех точках пространства одна и та же. При этом время распространения (14.18) света будет

$$\tau = \frac{1}{v}\int_A^B dl = \frac{l}{v},$$

где l – длина линии, соединяющей точки A и B. Так как среди всех возможных линий, соединяющих две точки, только прямая имеет наименьшую длину, из принципа Ферма вытекает *закон прямолинейного распространения света* в оптически однородной среде.

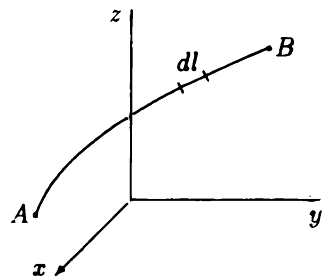

Рис. 14.1. К формулировке принципа Ферма

Покажем, что из принципа Ферма вытекают также *законы отражения и преломления света* на границе раздела двух сред с различными показателями преломления. Пусть луч света проходит из точки A в точку B, отражаясь от плоской границы раздела двух сред в некоторой точке C (рис. 14.2). Так как в однородной среде свет распространяется прямолинейно, из точки A в точку C и из точки C в точку B свет движется по прямым линиям, общая длина которых равна

$$l(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}.$$

Положение точки C найдем из условия минимальности длины пути:

$$\frac{dl}{dx} = 0.$$

Это условие приводит к равенству

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = 0\,,$$

которое можно записать в виде

$$\sin\alpha = \sin\beta \qquad \text{или} \qquad \alpha = \beta\,.$$

Таким образом, получили известный *закон отражения света: угол падения α равен углу отражения β.*

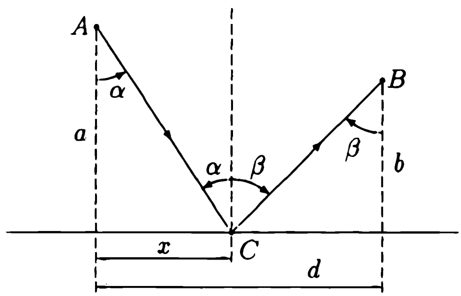

Рис. 14.2. К выводу закона отражения луча света

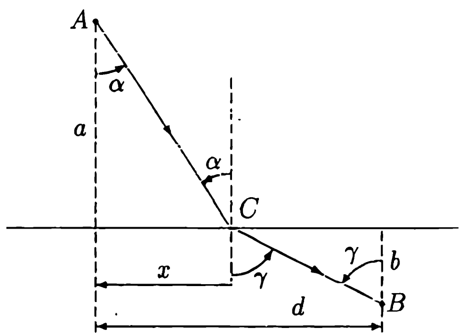

Рис. 14.3. К выводу закона преломления луча света

Выведем теперь из принципа Ферма закон преломления света. Пусть луч света из точки A проходит в точку B через плоскую границу раздела двух прозрачных сред, пересекая ее в некоторой точке C (рис. 14.3). *Показатель преломления* среды n определяется как отношение скорости света в вакууме к скорости света в этой среде:

$$n = \frac{c}{v}\,.$$

Используя это определение, функционал (14.18) можно записать в виде

$$\tau = \frac{1}{c}\int\limits_A^B n\,dl\,.$$

В рассматриваемом случае время распространения света от A к B будет равно

$$\tau(x) = \frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{a^2+x^2} + n_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}\right)\,,$$

где n_1 и n_2 – показатели преломления первой и второй сред соответственно.

Из условия

$$\frac{d\tau}{dx} = 0$$

найдем, что

$$\frac{n_1\,x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{n_2\,(d-x)}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = 0\,,$$

или

$$n_1\,\sin\alpha = n_2\,\sin\gamma\,.$$

Это есть *закон преломления света*, или *закон Снеллиуса* (Виллеброд Снеллиус (1580 – 1626) – голландский математик).

14.3. Механическая система со связями. Обобщенные координаты

Наиболее интересными как с практической, так и с теоретической точек зрения являются механические системы, движения которых ограничены так называемыми связями. Чтобы было понятно о чем идет речь, рассмотрим несколько примеров систем со связями.

Пример 1. Материальная точка движется по поверхности, уравнение которой в общем случае может быть записано в виде

$$f(x,\,y,\,z,\,t) = 0\,. \tag{14.19}$$

Присутствие времени t в левой части этого уравнения означает, что поверхность изменяется со временем, т.е. движется или деформируется. Разрешив это уравнение относительно z, получим зависимость

$$z = z(x,\,y,\,t)\,. \tag{14.20}$$

Существование такой зависимости приводит к тому, что положение точки в пространстве можно однозначно определить в любой момент времени t заданием только двух ее координат: x и y, а ее движение можно описать посредством функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Уравнения типа (14.19) и (14.20) называются уравнениями связи. В частном случае движение частицы может быть ограничено плоскостью $z = 0$.

Пример 2. Частица движется в плоскости x-y по окружности

$$x^2 + y^2 = R^2 .$$

Для определения положения частицы в таком случае удобно использовать угол φ (рис. 2.5):

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi,$$

а ее движение – описывать зависимостью $\varphi = \varphi(t)$.

Пример 3. Две частицы соединены жестким стержнем длины l. В этом случае уравнение связи имеет вид

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = l ,$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиус-векторы частиц, или

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2 .$$

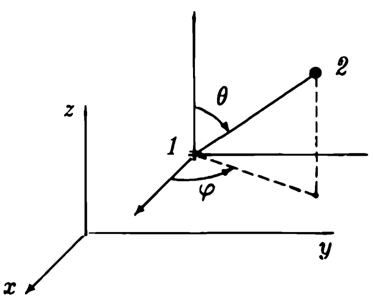

Рис. 14.4. Две частицы, соединенные жестким стержнем, – пример механической системы со связями

Для того чтобы однозначно определить положение частиц в пространстве, теперь необходимо задать пять величин. Для этого, например, можно использовать координаты x_1, y_1, z_1 одной из частиц и углы φ и θ (рис. 14.4), определяющие ориентацию стержня в пространстве. Тогда координаты второй частицы могут быть установлены по формулам

$$x_2 = x_1 + l\cos\varphi\sin\theta , \quad y_2 = y_1 + l\sin\varphi\sin\theta , \quad z_2 = z_1 + l\cos\varphi .$$

Пример 4. Два тела связаны нерастяжимой нитью, перекинутой через блок (рис. 14.5). Если определить координаты x_1 и x_2 этих тел так, как показано на рис. 14.5, то уравнение связи можно записать в виде

$$x_1(t) + x_2(t) + \pi R = l = \text{const}\,,$$

где R – радиус блока, l – длина нити. С учетом этого уравнения независимой можно считать только одну из функций $x_1(t)$ или $x_2(t)$.

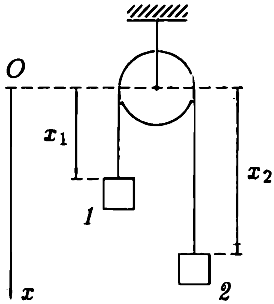

Рис. 14.5. Два тела, нить и блок – система со связями

Пример 5. Абсолютно твердое тело представляет собой еще один пример механической системы со связями. По определению эти связи таковы, что расстояние между любыми двумя точками твердого тела со временем не изменяется. Положение твердого тела однозначно определяется шестью величинами: декартовыми координатами центра масс тела x_C, y_C, z_C и эйлеровыми углами φ, θ, ψ.

Рассмотрим теперь произвольную механическую систему. Если для однозначного определения положения системы в пространстве необходимо задать значения s независимых величин $q_1, q_2, \dots, q_s$, то говорят, что система имеет s степеней свободы. Величины q_α (где $\alpha = 1, 2, \dots, s$) называются *обобщенными координатами* системы, а целое число s – *числом ее степеней свободы*.

Согласно приведенному определению задание значений обобщенных координат позволяет однозначно установить положение каждой материальной точки, входящей в состав рассматриваемой системы; т.е. радиус-вектор $\vec{r}_i$ каждой частицы системы следует считать функцией обобщенных координат и может быть времени t:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)\,. \tag{14.21}$$

Дифференциал этой функции

$$d\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt$$

называется *возможным перемещением* i-й частицы. Тогда как выражение

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \tag{14.22}$$

называется *виртуальным перемещением*. Если в уравнение связи время t явно не входит, то связь называется *стационарной*. Когда все связи в системе стационарные, функции (14.21) не зависят явно от времени. В таком случае виртуальные перемещения совпадают с возможными.

Результирующая всех сил, действующих на i-ю частицу системы, может быть представлена в виде суммы

$$\vec{F}_i = \vec{R}_i + \vec{F}_i^{(a)},$$

где $\vec{R}_i$ – равнодействующая сил, обусловленных наличием связей. Сила $\vec{R}_i$ называется *реакцией связей*. Все другие силы, действующие на i-ю частицу, называются *активными*. Их равнодействующая обозначается $\vec{F}_i^{(a)}$.

Связи называются *идеальными*, если сумма работ реакций этих связей при любых виртуальных перемещениях равна нулю, т.е. если

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \, \delta \vec{r}_i \equiv 0 .$$

Рассмотрим тело, которое скользит без трения по поверхности подвижного клина (рис. 14.6). При этом возможное перемещение $d\vec{r}$ тела не совпадает с его виртуальным перемещением $\delta \vec{r}$, которое характеризует перемещение тела по поверхности неподвижного клина. Поскольку в данном случае реакция связи есть сила нормального давления, которая перпендикулярна поверхности клина, будем иметь

$$\vec{N} \, \delta \vec{r} = 0 ,$$

т.е. работа реакции связи при виртуальном перемещении тела равна нулю. Таким образом, подвижная или неподвижная гладкая поверхность осуществляет идеальную связь.

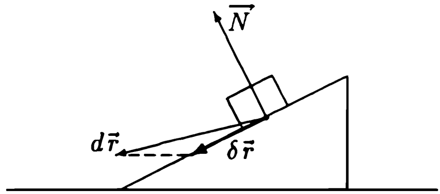

Рис. 14.6. Работа силы нормального давления при виртуальном перемещении равна нулю

При качении без скольжения одного тела по поверхности другого работа сил трения и нормального давления равна нулю. Поэтому такая связь тоже будет идеальной. Нетрудно показать, что связи, осуществляемые посредством шарниров и нерастяжимых нитей, также являются идеальными.

14.4. Принцип наименьшего действия. Уравнения Лагранжа

Движение системы, имеющей s степеней свободы, можно описать посредством функций $q_1 = q_1(t), ..., q_S = q_S(t)$, определяющих зависимость обобщенных координат от времени t. Для краткости всю совокупность этих функций обозначим так:

$$q = q(t) \equiv \{q_1(t), ..., q_S(t)\} \,. \tag{14.23}$$

Производные $\dot{q}_\alpha$ от обобщенных координат $q_\alpha = q_\alpha(t)$ по времени t называются *обобщенными скоростями*:

$$\dot{q} = \dot{q}(t) \equiv \{\dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_S(t)\} \,.$$

Используя функции (14.21), кинетическую

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

и потенциальную $U = U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t)$ энергии системы можно выразить через обобщенные координаты и скорости и время t, т.е. представить их в виде

$$T = T(q, \dot{q}, t) \quad \text{и} \quad U = U(q, t) \,. \tag{14.24}$$

Функцией Лагранжа (Жозеф Лагранж (1736 – 1813) – французский математик) называется функция

$$L = L(q, \dot{q}, t) \tag{14.25}$$

от обобщенных координат и скоростей механической системы и времени t, равная разности кинетической и потенциальной энергий:

$$L = T - U\,. \tag{14.26}$$

Уравнениями движения механической системы называются дифференциальные уравнения, решениями которых являются функции (14.23), описывающие движение этой системы. Для системы с идеальными связями, в которой действуют только потенциальные активные силы, уравнения движения могут быть получены из *принципа наименьшего действия* или *принципа Гамильтона* (Уильям Гамильтон (1805 – 1865) – ирландский математик и физик).

Пусть $q = q(t)$ есть произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$q(t_1) = q^{(1)}, \quad q(t_2) = q^{(2)}\,, \tag{14.27}$$

где $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ – значения обобщенных координат, характеризующие какие-то два положения 1 и 2 системы в пространстве. Функционал S от функции $q(t)$, определенный при помощи функции Лагранжа (14.25) как

$$S = S\{q(t)\} = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,(q(t),\,\dot{q}(t),\,t)\;dt\,, \tag{14.28}$$

называется *действием*. Согласно принципу Гамильтона *среди всех возможных функций $q = q(t)$, удовлетворяющих условиям* (14.27), *только та описывает действительное движение механической системы из положения* 1 *в положение* 2, *для которой действие* (14.28) *принимает наименьшее значение*. В силу теорем, доказанных в разделе 14.1, из принципа Гамильтона вытекает, что действительное движение системы описывается функцией $q = q(t)$, которая является экстремалью функционала (14.28), т.е. для этой функции выполняется необходимое условие экстремума функционала (14.28):

$$\delta S = 0 \tag{14.29}$$

для действительной траектории $q = q(t)$ движения системы. Из условия (14.29) в свою очередь следует, что экстремаль $q = q(t)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\,. \tag{14.30}$$

С учетом того, что q есть многомерная величина (14.23), символическое уравнение (14.30) нужно рассматривать как систему из s уравнений для функций $q_\alpha = q_\alpha(t)$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0\,, \tag{14.31}$$

где $\alpha = 1, 2, ..., s$. В аналитической механике уравнения (14.31) называются уравнениями Лагранжа.

Приведем несколько примеров, демонстрирующих получение уравнений Лагранжа для некоторых механических систем.

Пример 1. Тело массы m движется вдоль оси x в потенциальном поле $U = U(x, t)$. Это движение удобно описать посредством зависимости координаты тела от времени, т.е. функции $x = x(t)$. В этом случае функция Лагранжа (14.26) будет иметь вид

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 - U(x, t)\,.$$

Как видно, здесь роль обобщенной координаты играет декартова координата x. Зная функцию Лагранжа, составим уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0\,.$$

Так как

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\, \dot{x}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -\,\frac{\partial U}{\partial x}\,;$$

придем к уравнению

$$m\, \ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0\,,$$

которое можно записать в виде

$$m\, \ddot{x} = F\,,$$

где

$$F = -\,\frac{\partial U}{\partial x}\,.$$

Таким образом, уравнение Лагранжа для прямолинейного движения эквивалентно второму закону Ньютона.

Пример 2. Пусть в пространстве имеется N материальных точек. Положение каждой из этих точек можно задать при помощи радиус-вектора $\vec{r}_i$ $(i = 1, 2, ..., N)$. Так как радиус-вектор $\vec{r}_i$ имеет три координаты x_i, y_i, z_i, такая система будет иметь $3N$ степеней свободы. Возьмем в качестве обобщенных координат этой системы декартовы координаты материальных точек и запишем функцию Лагранжа:

$$L(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N;\, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N,\, t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i\, \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N,\, t)\,, \qquad (14.32)$$

где m_i – масса i-й частицы, U – потенциальная энергия системы. Теперь можно составить уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0\,, \qquad (14.33)$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\,\vec{i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\,\vec{j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\,\vec{k}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \equiv \mathrm{grad}_i\, L\,.$$

Так как

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i\, \dot{\vec{r}}_i\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = -\ \mathrm{grad}_i\, U$$

уравнение Лагранжа (14.33) принимает вид

$$m_i\, \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i\,, \qquad (14.34)$$

где

$$\vec{F}_i = -\ \mathrm{grad}_i\, U$$

– сила, действующая на i-ю частицу. Таким образом, из принципа Гамильтона вытекают ньютоновские уравнения движения.

Пример 3. Однородный цилиндр массы m и радиуса r катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиуса $R > r$ (рис. 14.7). Такая система имеет только одну степень свободы. Будем описывать ее движение при помощи функции $\varphi = \varphi(t)$. Составим функцию Лагранжа. Для этого сначала найдем кинетическую энергию тела. Так как цилиндр катится без скольжения, прямая A соприкосновения цилиндрических поверхностей является мгновенной осью вращения цилиндра. Поэтому его кинетическую энергию можно найти по формуле (6.27)

$$T = \frac{1}{2}\, I_A\, \omega^2\,, \qquad (14.35)$$

где I_A – момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси вращения, ω – его угловая скорость. Момент инерции однородного цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс, согласно формуле (6.30) равен

$$I_C = \frac{1}{2}\, m\, r^2\,.$$

В силу теоремы Штейнера (6.34) будем иметь

$$I_A = I_C + m\,r^2 = \frac{3}{2}\,m\,r^2\,. \qquad (14.36)$$

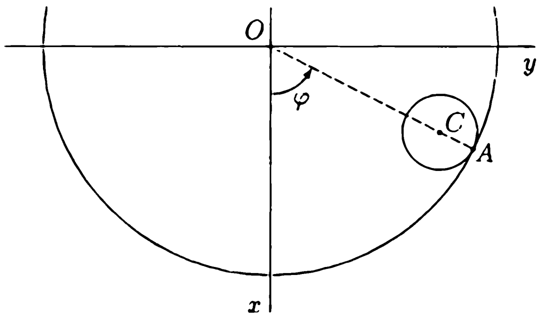

Рис. 14.7. Для этой системы угол φ есть обобщенная координата

С учетом того, что расстояние от центра масс до мгновенной оси вращения равно r, угловую скорость цилиндра найдем по формуле Эйлера (2.47):

$$\omega = \frac{v_C}{r}\,, \qquad (14.37)$$

где v_C – скорость центра масс катящегося цилиндра. Координаты центра масс связаны с углом φ соотношениями

$$x_C = (R - r)\,\cos\varphi\,, \qquad y_C = (R - r)\,\sin\varphi\,;$$

Продифференцировав эти функции по времени t, получим следующие выражения для координат вектора скорости центра масс

$$\dot{x}_C = -\,(R - r)\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\,, \quad \dot{y}_C = (R - r)\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi$$

и его модуля

$$v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = (R - r)\,|\,\dot{\varphi}\,|\,. \qquad (14.38)$$

Используя формулы (14.35) – (14.38), найдем зависимость кинетической энергии от обобщенной скорости $\dot{\varphi}$:

$$T = \frac{3}{4}\,m\,(R - r)^2\,\dot{\varphi}^2\,.$$

Потенциальная энергия цилиндра в однородном поле силы тяжести равна

$$U = -\,m\,g\,x_C = -\,m\,g\,(R - r)\,\cos\varphi\,.$$

При этом функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = T - U = \frac{3}{4}\,m\,(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + m\,g\,(R-r)\,\cos\varphi\,.$$

Подстановка этой функции в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$$

после несложных преобразований приводит к уравнению движения цилиндра

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\,g}{3\,(R-r)}\,\sin\varphi = 0 \qquad (14.39)$$

Когда цилиндр движется так, что угол φ все время остается малым, можно положить $\sin\varphi \simeq \varphi$. При этом условии уравнение (14.39) будет описывать гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,g}{3\,(R-r)}}\,.$$

14.5. Обобщенные силы

Каждой обобщенной координате q_α соответствует некоторая обобщенная сила Q_α, которая определяется следующим образом. Элементарная работа всех сил, действующих в системе, при произвольных виртуальных перемещениях

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i$$

при помощи формулы (14.22) может быть преобразована к виду

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\,dq_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha\,dq_\alpha\,,$$

где величина

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

называется *обобщенной силой*, сопряженной с координатой q_α.

На практике для определения обобщенной силы Q_α системе дают такое бесконечно малое виртуальное перемещение, при котором изменяется только одна координата q_α. При этом $\delta A = Q_\alpha \, dq_\alpha$. Затем вычисляют работу δA и по формуле

$$Q_\alpha = \frac{\delta A}{dq_\alpha}$$

находят обобщенную силу.

Если активные силы являются потенциальными, а связи – идеальными, то обобщенная сила

$$Q_\alpha = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} .$$

В таком случае уравнения движения имеют вид (14.31). В общем случае, когда связи не являются идеальными и не все активные силы являются потенциальными, обобщенная сила

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \widetilde{Q}_\alpha ,$$

где $\widetilde{Q}_\alpha$ – непотенциальная обобщенная сила. При этом уравнения движения принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \widetilde{Q}_\alpha . \qquad (14.40)$$

14.6. Интегралы движения. Законы сохранения

Уравнения движения (14.31) и (14.40) механической системы, имеющей s степеней свободы, представляют собой систему из s дифференциальных уравнений второго порядка. Поэтому общее решение этих уравнений должно содержать $2s$ произвольных постоянных $c_1, c_2, ..., c_{2s}$:

$$q_\alpha = q_\alpha(t;\ c_1,\ c_2, ..., c_{2s}) , \qquad (14.41)$$

где $\alpha = 1, 2, ..., s$. Продифференцировав эти функции по времени, получим обобщенные скорости

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(t,\ c_1,\ c_2, ..., c_{2s}) . \qquad (14.42)$$

Равенства (14.41) и (14.42) можно рассматривать как систему, состоящую из $2s$ алгебраических уравнений с неизвестными $c_1, c_2, ..., c_{2s}$. Разрешив эти уравнения относительно величин $c_1, c_2, ..., c_{2s}$, получим равенства

$$c_k = f_k(q_1, ..., q_s;\ \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s,\ t) \equiv f_k(q,\ \dot{q},\ t) , \qquad (14.43)$$

где $k = 1, 2, ..., 2s$.

Функция $f(q,\, \dot q,\, t)$ называется *интегралом уравнений движения*, если для любой функции $q = q(t)$, описывающей действительное движение системы, выражение $f\,(q(t),\, \dot q(t),\, t)$ не зависит от времени, т.е. при движении системы сохраняет постоянное значение:

$$f\,(q(t),\, \dot q(t),\, t) = c\,. \tag{14.44}$$

Однако постоянная c может изменяться при переходе от одной функции $q = q(t)$ к другой, т.е. различным движениям системы соответствуют, вообще говоря, различные значения величины c. Согласно этому определению функции $f_k(q,\, \dot q,\, t)$, стоящие в правых частях равенств (14.43), есть интегралы уравнений движения.

Очевидно, что произвольная функция $\Phi(f_1,\, f_2, \ldots,\, f_{2s})$ от интегралов движения также будет интегралом. Поэтому интерес представляют только независимые интегралы, т.е. такие функции $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_{2s}$, каждая из которых не может быть выражена через другие. Если найдены все $2s$ независимых интегралов, то движение систеы можно считать известным, так как, разрешив уравнения (14.43) относительно обобщенных координат и скоростей, получим конечные уравнения движения (14.41). Чем большее число интегралов движения установлено, тем более полное представление может быть составлено о движении исследуемой механической системы.

Рассмотрим случай, когда функция Лагранжа не зависит явно от времени:

$$L = L(q,\, \dot q)\,.$$

Вычислим производную по времени от этой функции. Согласно правилу дифференцирования сложной функции будем иметь

$$\frac{dL}{dt} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\, \dot q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\, \ddot q_\alpha \right)\,. \tag{14.45}$$

Из уравнения (14.40) найдем, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} - \tilde Q_\alpha\,. \tag{14.46}$$

Подстановка этого выражения в правую часть равенства (14.45) дает

$$\frac{dL}{dt} = \sum_\alpha \left(-\tilde Q_\alpha\, \dot q_\alpha + \dot q_\alpha\, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} + \ddot q_\alpha\, \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} \right) = -\sum_\alpha \tilde Q_\alpha\, \dot q_\alpha + \frac{d}{dt} \sum_\alpha \dot q_\alpha\, \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\,.$$

Преобразуем это равенство так:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_\alpha \dot q_\alpha\, \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} - L \right) = \sum_\alpha \tilde Q_\alpha\, \dot q_\alpha\,. \tag{14.47}$$

Для системы со стационарными связями равенства (14.21) и (14.22) приводят к формуле

$$\vec{v}_i = \sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \,.$$

Используя эту формулу, кинетическую энергию системы можно выразить через обобщенные скорости:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \,, \tag{14.48}$$

где

$$\mu_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \,.$$

Коэффициенты $\mu_{\alpha\beta}$ зависят только от обобщенных координат и не зависят явно от времени. Кроме этого они обладают свойством симметрии:

$$\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha} \,.$$

Выражение (14.48) называется однородной функцией второй степени от обобщенных скоростей. С учетом симметричности коэффициентов $\mu_{\alpha\beta}$ найдем, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \,. \tag{14.49}$$

При этом справедливо соотношение

$$\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_\alpha \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = 2T \,, \tag{14.50}$$

называемое *формулой Эйлера для однородной функции.*

Так как

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \,, \tag{14.51}$$

будем иметь

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \,. \tag{14.52}$$

Используя равенства (14.50) – (14.52), нетрудно доказать тождество

$$\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = T + U \,. \tag{14.53}$$

При помощи этого тождества равенство (14.47) можно преобразовать к виду

$$\dot{E} = \sum_{\alpha} \widetilde{Q}_{\alpha}\, \dot{q}_{\alpha}\,, \tag{14.54}$$

где $E = T + U$ – полная механическая энергия системы. Стоящее в правой части равенства (14.54) выражение есть мощность неконсервативных сил, а само это равенство эквивалентно равенству (5.50).

Непотенциальные силы называются *гироскопическими*, если их мощность равна нулю:

$$\sum_{\alpha} \widetilde{Q}_{\alpha}\, \dot{q}_{\alpha} = 0\,.$$

При этом равенство (14.54) принимает вид

$$\dot{E} = 0\,.$$

Таким образом, *для системы со стационарными связями, в которой действуют консервативные и гироскопические силы, полная механическая энергия является интегралом движения*:

$$E(q,\, \dot{q}) = \text{const}\,.$$

Непотенциальные силы называются *диссипативными*, если их мощность отрицательна или равна нулю:

$$\sum_{\alpha} \widetilde{Q}_{\alpha}\, \dot{q}_{\alpha} \leq 0\,.$$

При этом сама система также называется диссипативной. В таком случае из (14.54) следует, что

$$\dot{E} \leq 0\,,$$

т.е. полная механическая энергия диссипативной системы убывает с течением времени.

Если функция Лагранжа не зависит явно от какой-либо обобщенной координаты q_{α}, то эта координата называется *циклической*. При этом

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0$$

и из уравнения Лагранжа (14.31) при $\widetilde{Q}_{\alpha} = 0$ следует, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = 0\,,$$

т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \text{const} .$$

Таким способом может быть установлен еще один интеграл движения.

14.7. Канонические уравнения Гамильтона

Величины p_α, определяемые равенствами

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} , \tag{14.55}$$

называются *обобщенными импульсами.* Правые части этих равенств являются функциями от обобщенных координат, скоростей и может быть времени t. Разрешив равенства (14.55) относительно обобщенных скоростей, получим зависимости

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(p, q, t) , \tag{14.56}$$

где

$$p \equiv \{p_1, p_2, ..., p_s\} ,$$

т.е. обобщенные скорости можно рассматривать как функции от обобщенных импульсов, координат и времени.

Функция

$$H = H(p, q, t) , \tag{14.57}$$

зависящая от обобщенных импульсов, координат и времени и определяемая соотношением

$$H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L , \tag{14.58}$$

называется *функцией Гамильтона*, или *гамильтонианом.* Более подробно соотношение (14.58) следует записать так:

$$H(p, q, t) = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha(p, q, t) - L\big(q, \dot{q}(p, q, t), t\big) . \tag{14.59}$$

В этом соотношении независимыми переменными являются p, q и t, а обобщенные скорости есть функции (14.56), определяемые равенствами (14.55).

Для механической системы со стационарными связями справедливо тождество (14.51). Используя это тождество и определение (14.55) обобщенных импульсов, соотношение (14.58) можно преобразовать к виду

$$H = T + U . \tag{14.60}$$

Таким образом, *для системы со стационарными связями функция Гамильтона представляет собой полную энергию, выраженную через обобщенные импульсы и координаты.*

Вычислим производную от функции Гамильтона (14.59) по обобщенному импульсу p_α:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\sum_\beta p_\beta\,\dot q_\beta - L\right) = \dot q_\alpha + \sum_\beta p_\beta\,\frac{\partial \dot q_\beta}{\partial p_\alpha} - \sum_\beta \frac{\partial L}{\partial \dot q_\beta}\,\frac{\partial \dot q_\beta}{\partial p_\alpha}\,.$$

Так как по определению

$$p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\beta}\,, \tag{14.61}$$

будем иметь

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot q_\alpha\,. \tag{14.62}$$

Найдем теперь производную от функции Гамильтона (14.59) по обобщенной координате q_α :

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_\beta p_\beta\,\dot q_\beta - L\right) = \sum_\beta p_\beta\,\frac{\partial \dot q_\beta}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \sum_\beta \frac{\partial L}{\partial \dot q_\beta}\,\frac{\partial \dot q_\beta}{\partial q_\alpha}\,.$$

Подстановка в это выражение обобщенного импульса (14.61) дает

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\,\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\,.$$

При помощи определения (14.55) уравнению Лагранжа (14.46) можно придать вид

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \dot p_\alpha - \widetilde Q_\alpha\,.$$

Используя это уравнение, найдем, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\,\dot p_\alpha + \widetilde Q_\alpha\,. \tag{14.63}$$

Если известны гамильтониан (14.57) и обобщенные непотенциальные силы $\widetilde Q_\alpha$ как функции обобщенных импульсов и координат, то равенства (14.62) и (14.63) следует рассматривать как систему из $2s$ уравнений для функций $p_\alpha = p_\alpha(t)$ и $q_\alpha = q_\alpha(t)$, описывающих движение системы:

$$\dot p_\alpha = -\,\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \widetilde Q_\alpha, \qquad \dot q_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,. \tag{14.64}$$

Уравнения движения (14.64) называются *каноническими уравнениями Гамильтона.*