



Б.В. Бондарев  
Н.П. Калашников  
Г.Г. Спирин

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Книга 2



*Издание второе, стереотипное*

Рекомендовано  
Министерством образования  
Российской Федерации  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших технических  
учебных заведений



Москва  
"Высшая школа"  
2005

УДК 53  
ББК 22.3  
Б81

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *А.Д. Гладун* (зав. кафедрой общей физики МФТИ); д-р физ.-мат. наук, проф. *А.Н. Морозов* (зав. кафедрой физики МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**Бондарев, Б.В.**

**Б81** Курс общей физики. В 3 кн. Кн. 2. Электромагнетизм. Волновая оптика. Квантовая физика: Учеб. пособие/ Б.В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г.Г. Спирин. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2005. — 438 с.: ил.

ISBN 5-06-004604-4

Книга представляет собой конспект лекций по электромагнетизму, оптике и квантовой физике в рамках курса общей физики для студентов технических вузов.

При помощи математического аппарата, доступного пониманию студентов первого курса технического вуза, дано изложение основных понятий и законов электромагнетизма, волновой оптики и квантовой физики. Приведено достаточное количество примеров и задач, разбор которых помогает усвоению теоретического материала и прививает навыки самостоятельного решения задач по общей физике.

По способу представления изучаемого материала предлагаемый курс физики можно назвать двухуровневым. Каждая достаточно сложная тема изложена здесь дважды: сначала самым простым образом, а затем более строго и широко. Студент, имеющий желание получить хорошую оценку на экзамене, должен освоить материал как первого, так и второго уровня изложения. Студент, которого устраивает оценка «удовлетворительно», может не обращать внимание на отмеченные символом «звездочка» главы, содержащие материал второго уровня.

*Для студентов технических вузов.*

УДК 53  
ББК 22.3

ISBN 5-06-004604-4 (кн. 2)

ISBN 5-06-004606-0

© ФГУП «Издательство «Высшая школа», 2005

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещено.

# О Г Л А В Л Е Н И Е

---

<b>Краткая история электромагнетизма</b> . . . . .	11
<b>ЧАСТЬ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО</b> . . . . .	26
<b>Глава 1. Постоянное электрическое поле в вакууме</b> . . . . .	26
1.1. Закон сохранения заряда . . . . .	26
1.2. Взаимодействие двух точечных зарядов . . . . .	28
1.3. Закон Кулона и принцип суперпозиции . . . . .	30
1.4. Напряженность электрического поля . . . . .	31
1.5. Потенциал электрического поля . . . . .	33
1.6. Работа при перемещении заряда в постоянном электрическом поле . . . . .	36
1.7. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности . . . . .	38
1.8. Плотности заряда . . . . .	39
1.9. Энергия системы зарядов . . . . .	40
1.10. Электрическое поле точечного заряда . . . . .	42
1.11. Поток вектора . . . . .	43
1.12. Поток вектора напряженности поля точечного заряда . . . . .	44
1.13. Теорема Гаусса . . . . .	45
1.14. Электрическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости . . . . .	46
1.15. Электрическое поле заряженной сферы . . . . .	48
1.16. Основные уравнения электростатики . . . . .	51
<b>Глава 1*. Постоянное электрическое поле в вакууме</b> <b>(продолжение)</b> . . . . .	54
1.17. Электрический диполь . . . . .	54
1.18. Электрическое поле системы зарядов на больших расстояниях . . . . .	56
1.19. Электрическое поле сферически симметрично распределенного заряда . . . . .	57
1.20. Теорема Остроградского – Гаусса . . . . .	59
1.21. Вывод уравнений электростатики в дифференциальной форме . . . . .	60
1.22. Энергия электрического поля . . . . .	61



<b>Глава 2. Электрическое поле в диэлектриках</b>	64
2.1. Полярные и неполярные молекулы	64
2.2. Диполь во внешнем электрическом поле	66
2.3. Поляризация диэлектриков	68
2.4. Теорема Гаусса для поляризованности *	69
2.5. Электрическая индукция	72
2.6. Диэлектрическая восприимчивость и проницаемость	74
2.7. Уравнения электростатики для диэлектриков	75
2.8. Электрическое поле заряженного шара *	75
2.9. Условия на границе раздела двух диэлектриков	78
<b>Глава 3. Проводники в постоянном электрическом поле</b>	80
3.1. Распределение зарядов в проводниках	80
3.2. Электрическая емкость заряженного проводника	83
3.3. Емкость шара	84
3.4. Конденсаторы	85
3.5. Плоский конденсатор	87
3.6. Энергия заряженного проводника	90
3.7. Энергия заряженного конденсатора	90
3.8. Энергия электрического поля	91
3.9. Соединения конденсаторов	92
<b>Глава 3*. Проводники в постоянном электрическом поле</b> (продолжение)	95
3.10. Плоский конденсатор, заполненный неоднородным диэлектриком	95
3.11. Цилиндрический конденсатор	98
3.12. Основная задача электростатики. Теорема единственности	100
3.13. Электрическое поле точечного заряда, расположенного около заземленной плоскости	101
<b>Глава 4. Электрический ток</b>	104
4.1. Плотность тока. Сила тока	104
4.2. Закон Ома для участка цепи	106
4.3. Соединения проводников	108
4.4. Электродвижущая сила	110
4.5. Закон Ома для полной цепи	112
4.6. Правила Кирхгофа	113
4.7. Закон Джоуля – Ленца	114

Глава 4*. Электрический ток (продолжение)	116
4.8. Сила тока – поток плотности тока	116
4.9. Уравнение непрерывности	119
4.10. Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме	120
4.11. Задача о токе утечки конденсатора	121
<b>ЧАСТЬ 2. МАГНЕТИЗМ</b>	<b>123</b>
Глава 5. Действие магнитного поля на заряды и токи	123
5.1. Сила Лоренца	123
5.2. Движение заряженной частицы в однородном и постоянном магнитном поле	124
5.3. Действие магнитного поля на проводник с током. Сила Ампера	127
Глава 5*. Действие магнитного поля на заряды и токи (продолжение)	129
5.4. Контур с током в магнитном поле	129
5.5. Определение отношения заряда электрона к его массе	132
5.6. Эффект Холла	139
Глава 6. Постоянное магнитное поле в вакууме	143
6.1. Закон Био – Савара – Лапласа	143
6.2. Магнитное поле кругового тока	144
6.3. Основные уравнения теории постоянного магнитного поля	146
6.4. Магнитное поле бесконечно длинного соленоида	148
6.5. Магнитное поле прямого тока	150
6.6. Взаимодействие токов	151
Глава 6*. Постоянное магнитное поле в вакууме (продолжение)	154
6.7. Расчет индукции магнитного поля кругового тока	154
6.8. Расчет индукции магнитного поля на оси соленоида	156
6.9. Магнитное поле прямого отрезка с током	159
6.10. Теорема Стокса	160
6.11. Вывод дифференциальных уравнений теории постоянного магнитного поля	164
Глава 7. Постоянное магнитное поле в веществе	166
7.1. Электрические токи в атомах и молекулах	166
7.2. Намагниченность вещества. Напряженность магнитного поля	168

7.3. Циркуляция вектора намагниченности *	169
7.4. Напряженность магнитного поля	170
7.5. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость	171
7.6. Основные уравнения теории постоянного магнитного поля в веществе	172
7.7. Магнитное поле заполненного веществом соленоида	173
7.8. Условия на границе раздела двух магнетиков	174
<b>ЧАСТЬ 3. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ</b>	<b>179</b>
<b>Глава 8. Электромагнитная индукция</b>	<b>179</b>
8.1. Закон Фарадея и правило Ленца	179
8.2. Электродвижущая сила индукции. Уравнение Максвелла	181
8.3. Самоиндукция	185
8.4. Индуктивность соленоида	185
8.5. Энергия магнитного поля	186
<b>Глава 8*. Электромагнитная индукция (продолжение)</b>	<b>189</b>
8.6. Вихревое электрическое поле в соленоиде	189
8.7. Токи Фуко	190
8.8. Индуктивность коаксиального кабеля	191
8.9. Взаимная индукция	193
8.10. Один из способов измерения магнитной индукции	196
<b>Глава 9. Электромагнитные колебания</b>	<b>198</b>
9.1. Колебательный контур. Гармонические колебания	198
9.2. Затухающие электромагнитные колебания	200
9.3. Вынужденные электромагнитные колебания	204
<b>Глава 9*. Электромагнитные колебания (продолжение)</b>	<b>206</b>
9.4. Дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний	206
9.5. Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний. Резонанс напряжения и резонанс тока	208
9.6. Метод комплексных амплитуд	213
9.7. Мощность переменного тока	223
<b>Глава 10. Электромагнитное поле</b>	<b>225</b>
10.1. Уравнения Максвелла	225
10.2. Плотность и поток энергии электромагнитного поля	227

Глава 10*. Электромагнитное поле (продолжение)	229
10.3. Вывод уравнения непрерывности из уравнений Максвелла	229
10.4. Вывод соотношения, связывающего плотность энергии электромагнитного поля и вектор Умова – Пойнтинга	230
10.5. Ковариантность уравнений Максвелла	232
Глава 11. Электромагнитные волны	235
11.1. Волновое уравнение и его решение	235
11.2. Гармоническая волна	236
11.3. Волны в пространстве	238
11.4. Плоские электромагнитные волны *	239
11.5. Плоская гармоническая электромагнитная волна	242
11.6. Интенсивность волны	244
11.7. Отражение электромагнитной волны от границы раздела двух сред	246
ЧАСТЬ 4. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА	248
Глава 12. Интерференция	248
12.1. Сложение волн	248
12.2. Когерентность	250
12.3. Интерференция света от двух точечных источников	253
12.4. Интерференция света в тонких пленках	255
Глава 13*. Дифракция	257
13.1. Принцип Гюйгенса – Френеля	257
13.2. Графический метод сложения гармонических колебаний	259
13.3. Дифракция света на круглом отверстии	260
13.4. Дифракция света на щели	267
13.5. Дифракционная решетка	272
Глава 14. Поляризация света	275
14.1. Поляризация электромагнитной волны	275
14.2. Естественный и поляризованный свет	277
14.3. Поляризация света при отражении и преломлении	278
14.4. Поляризация света при двойном лучепреломлении	281
14.5. Интерференция поляризованных лучей	284

<b>Глава 15*. Взаимодействие света с веществом</b> . . . . .	286
15.1. Дисперсия света . . . . .	286
15.2. Электронная теория дисперсии . . . . .	286
15.3. Групповая скорость волны . . . . .	292
15.4. Поглощение света . . . . .	295
 <b>ЧАСТЬ 5. КВАНТОВАЯ ОПТИКА</b> . . . . .	 297
<b>Глава 16. Тепловое излучение</b> . . . . .	297
16.1. Взаимодействие излучения с веществом и его характеристики . . . . .	297
16.2. Законы равновесного теплового излучения . . . . .	300
16.3. Формула Планка . . . . .	303
<b>Глава 16*. Тепловое излучение (продолжение)</b> . . . . .	304
16.4. Освещенность поверхности изотропным излучением . . . . .	304
16.5. Электромагнитное излучение в полости твердого тела . . . . .	308
16.6. Формула Релея – Джинса . . . . .	311
16.7. Вероятность . . . . .	312
16.8. Вывод формулы Планка . . . . .	313
16.9. Закон Стефана – Больцмана . . . . .	316
16.10. Закон смещения Вина . . . . .	316
<b>Глава 17. Фотоны</b> . . . . .	318
17.1. Фотоны . . . . .	318
17.2. Фотоэффект . . . . .	319
17.3. Тормозное рентгеновское излучение . . . . .	323
17.4. Эффект Комптона . . . . .	326
<b>Глава 17*. Фотоны (продолжение)</b> . . . . .	330
17.5. Давление света. Опыты Лебедева . . . . .	330
17.6. Давление пучка света . . . . .	331
17.7. Давление изотропного излучения . . . . .	335
 <b>ЧАСТЬ 6. АТОМНАЯ ФИЗИКА</b> . . . . .	 337
<b>Глава 18. Боровская теория атома</b> . . . . .	337
18.1. Спектр излучения атома водорода . . . . .	337
18.2. Планетарная модель атома . . . . .	340
18.3. Опыты Франка и Герца . . . . .	342
18.4. Теория Бора . . . . .	346



<b>Глава 19. Основы квантовой механики</b>	351
19.1. Корпускулярно-волновой дуализм. Волны де Бройля	351
19.2. Волновая функция и ее смысл	352
19.3. Операторы в квантовой механике	356
19.4. Уравнение Шредингера	358
19.5. Соотношение неопределенностей	360
19.6. Собственные функции и собственные значения операторов *	362
19.7. Стационарные состояния	363
<b>Глава 20. Простые задачи квантовой механики</b>	365
20.1. Свободная частица	365
20.2. Движение частицы в поле консервативной силы	367
20.3. Стационарное движение частицы вдоль прямой в поле консервативной силы	370
20.4. Частица в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками	372
20.5. Гармонический осциллятор	376
<b>Глава 20*. Простые задачи квантовой механики (продолжение)</b>	378
20.6. Падение частицы на потенциальный барьер	378
20.7. Частица в ящике с непроницаемыми стенками	387
<b>Глава 21. Строение атома</b>	390
21.1. Атом водорода в квантовой механике	390
21.2. Пространственное квантование	394
21.3. Гиромагнитное отношение	395
21.4. Спин электрона	396
21.5. Многоэлектронные атомы	399
21.6. Векторная модель атома *	402
21.7. Опыт Штерна и Герлаха	406
21.8. Эффект Зеемана *	408
21.9. Рентгеновские спектры атомов	409
<b>Глава 22. Молекулы</b>	412
22.1. Химическая связь	412
22.2. Ион молекулы водорода *	413
22.3. Энергия двухатомной молекулы	419
22.4. Комбинационное рассеяние света	422

**Ч А С Т Ь 7.    Ф И З И К А А Т О М Н О Г О Я Д Р А . . . . . 425**

**Г л а в а 23. Атомное ядро . . . . . 425**

23.1. Состав и характеристики атомных ядер . . . . . 425

23.2. Самопроизвольный распад частицы . . . . . 426

23.3. Энергия связи . . . . . 427

23.4. Радиоактивность . . . . . 428

23.5. Закон радиоактивного распада . . . . . 431

23.6. Ядерные реакции . . . . . 432

23.7. Капельная модель ядра \* . . . . . 433

23.8. Деление тяжелых ядер . . . . . 435

23.9. Реакции термоядерного синтеза . . . . . 436

# КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

---

## Янтарь и магнит

Электрические и магнитные явления люди наблюдают очень и очень давно, даже не зная, что эти явления следует так называть.

Янтарь – окаменевшая смола деревьев, росших на Земле много много лет назад. Люди находили янтарь и использовали его в качестве украшения. Если этот камень потереть, то он приобретает свойство притягивать к себе пылинки, нить, кусочки бумаги. Сейчас это явление называют электризацией посредством трения. Древние греки называли янтарь *электроном*, т.е. притягивающим к себе.

Очень давно известно, что магнит притягивает к себе железные предметы. Природные магниты люди находили еще в древние времена. Чаще всего им попадались кусочки железной руды, т.е. магнитного железняка или магнетита, состоящего из железа (31%) и кислорода (69%). Залежи этой руды были обнаружены в древней Греции недалеко от города Магнесии. Поэтому куски руды стали называть магнитами.

Существует мнение, что в Китае 2000 или 3000 лет назад магниты использовались в качестве основной детали компаса. Такой компас представлял собой магнит, прикрепленный к плавающему в воде кусочку коры пробкового дерева. Первое упоминание об использовании магнитной стрелки в мореплавании относится к 1180 г.

В 1269 г. появилось сочинение француза Пьетро Перегрино из Мариккура "Письма о магните", в котором были описаны известные в то время магнитные явления: полюса магнита, взаимодействие между магнитами, намагничивание железа и др.

С развитием мореплавания возрастает интерес к магнитным явлениям. Начинается изучение земного магнетизма. Составляются карты магнитных склонений, т.е. направлений на поверхности Земли, вдоль которых устанавливается стрелка компаса.

Другое электрическое явление – грозовая молния – по неволе заставляло людей обращать на себя внимание. На Земле каждую секунду где-то сверкает молния. До сих пор молния доставляет людям очень много беспокойства и вызывает большой интерес. Молния – это гигантский электрический разряд между облаками или между облаками и поверхностью Земли. Изредка наблюдается так называемая шаровая молния.

## Первая научная работа по электричеству и магнетизму

Средние века. Англия. У королевы Елизаветы, которую прозвали "непорочной", служит лейб-медиком некий Вильям Гильберт. Он на двадцать лет старше другого, более известного теперь Вильяма по фамилии Шекспир.

Жить опасно всегда. И те времена – не исключение. По Англии из дома в дом бродит чума. Каждый может быть выбран ею. Миллионы англичан станут ее жертвами. И люди спешат жить. Питейные заведения и театры не испытывают недостатка в посетителях. Веселится королевский двор. Поводом для торжеств служит разгром испанской "непобедимой армады" в битве, которая произошла в 1588 г. в проливе Ла-Манш.

В такое время Вильям Гильберт посвящает свою жизнь научным исследованиям. Он изучает свойства янтаря и других веществ. На собственные средства он в течение почти двадцати лет проводит многочисленные опыты. Всего им проведено около 600 различных опытов. Гильберт пишет *первую* научную книгу по электричеству и магнетизму. Эта книга под названием "О магните, магнитных телах и большом магните – Земле. Новая физиология, доказанная множеством аргументов и опытов", была опубликована в 1600 г. В книге описаны проведенные самим Гильбертом опыты и выводы, которые, по его мнению, следуют из этих опытов. Все положения и утверждения, приведенные в книге, сформулированы на основе результатов опытов. Поэтому книгу Гильберта считают первой по-настоящему научной книгой, в которой опыт принят за критерий истины.

Кругосветное плавание экспедиции Магеллана было завершено в 1521 г. И во времена Гильберта уже было известно, что Земля имеет форму шара. Гильберт изготовил из магнитного железняка шар – первую модель Земли, которую он назвал "террелой", т.е. маленькой Землей. Магнитное поле, создаваемое "террелой", оказалось почти таким же, как магнитное поле большой "терры", т.е. Земли.

Разрезав длинный магнит на две части, Гильберт получил два коротких магнита, которые обладали теми же свойствами, что и исходный магнит. Так Гильберт установил, что полюса магнита неразделимы.

Гильберт открыл, что при нагревании магнита, когда температура становится выше некоторого значения, его магнитные свойства исчезают. В настоящее время это значение температуры называют точкой Кюри.

Гильберт первым ввел в употребление термин "электрический". В своей книге он пишет: "Электрические тела – те, которые притягиваются таким же образом, как янтарь". На основании множества опытов

Гильберт делает несколько очень важных для науки выводов. Один из его выводов заключается в том, что притяжения тел янтарем и магнитом имеют различную физическую природу. С тех пор электрические и магнитные явления стали изучать отдельно.

Через три года после выхода в свет его книги Гильберт умер от чумы. Пренебрегая удовольствиями и развлечениями, Гильберт много лет трудился, проводя свои опыты. Что же заставляло его заниматься наукой? Какие чувства он испытывал? Чего он хотел? Богатства? Власти? Славы? Нет. Нет. Нет. Просто ему это было интересно. Если сказать более возвышенно, он испытывал благородную жажду знаний.

## Первая электрическая машина

Отто фон Герике – бургомистр немецкого города Магдебурга – прославился тем, что в 1641 г. изобрел воздушный насос, при помощи которого он осуществил известный опыт с так называемыми ”магдебургскими полусферами”. Спустя примерно лет двадцать Герике построил одну из первых электрических машин, т.е. устройство для разделения электрических зарядов посредством трения тел. В 1672 г. он опубликовал работу, в которой была описана построенная им электрическая машина. Эта машина представляла собой шар, изготовленный из серы и укрепленный на железной оси. При вращении шара вокруг оси его можно было электризовать, натирая ладонью руки. Экспериментируя со своей машиной Герике открыл несколько новых электрических явлений, одно из которых – электризация тел через влияние, т.е. под действием расположенных поблизости других, заряженных тел. Он обнаружил, что наэлектризованное тело может не только притягивать, но и отталкивать другие тела. Позднее были построены более совершенные электрические машины.

## Проводники и непроводники

В 1729 г. английский физик Стефен Грей установил, что при соединении заряженных тел металлической проволокой электричество может передаваться по ней от одного тела к другому. Так было открыто явление электропроводности. Исследуя различные тела, Грей разделил их на проводники и непроводники электричества.

## Два рода электричества

В 1734 г. французский ученый Шарль Франсуа Дюфе написал сочинение, в котором утверждал, что существуют два рода электричества. Одно электричество он назвал *стеклянным*, а другое – *смоляным*. Такое



открытие он сделал, изучая взаимодействие наэлектризованных трением тел. Он разделил тела, способные электризоваться при трении, на два класса. Среди тел одного класса присутствует стекло. Поэтому Дюфе назвал электричество, содержащееся в таких телах, стеклянным. Янтарь относится к другому классу электризующихся трением тел. Поэтому электричество, появляющееся в таких телах, было названо смоляным. Дюфе установил, что наэлектризованные тела из одного класса всегда отталкиваются друг от друга, а тела из разных классов притягиваются.

## Лейденская банка

Шар Герике стал популярным физическим прибором. С ним производят опыты и наблюдают иногда новые явления, открывающие неизвестные ранее свойства электричества. Интересный случай произошел в 1745 г. в голландском городе Лейдене. Профессор лейденского университета Питер Мушенбрук пытался зарядить электричеством воду в колбе, которую он держал в одной руке. В воду была опущена медная проволока, соединенная со стеклянным шаром, который электризовался при вращении прикосновениями руки. Когда вода достаточно "наэлектризовалась", Мушенбрук свободной рукой попытался вытащить проволоку из колбы. Прикоснувшись к проволоке, он почувствовал "удар молнии". Так было установлено, что в сосуде с водой, названном *лейденской банкой*, электричество может накапливаться в значительных количествах. Лейденская банка – это первый рукотворный конденсатор, т.е. устройство, способное накапливать и сохранять электрические заряды. Стекло колбы является изолятором, а вода и рука, держащая колбу, есть обкладки конденсатора.

Лейденская банка так же, как электрическая машина Герике, скоро стала таким же популярным физическим прибором. Мушенбрук получил громкую известность. С ним знакомится Петр Великий во время пребывания в Голландии. Позже именно Мушенбруку Петр поручил изготовить приборы для Академии наук.

Медики пробуют использовать электричество из лейденской банки для лечения своих пациентов. Один английский врач пытается посредством электричества оживить труп повешенного.

## Искра и молния

Люди любят развлечения. И лейденская банка продолжительное время после ее изобретения служила предметом для развлечений. Опыты с ней проводились не только в лабораториях, но и в аристократических

салонах, и на ярмарках. Многие хотели увидеть действие электрического удара или даже испытать его на себе. Там, где многие видят только забавные фокусы, избранным открываются тайны природы.

Когда новость о лейденской банке, а за ней и сама банка достигли берегов Америки, ею заинтересовался американский ученый Бенджамин Франклин. Он начинает экспериментировать с электричеством. Франклин объяснил действие лейденской банки и построил первый плоский конденсатор. Этот конденсатор представлял собой две металлические пластины, разделенные слоем стекла. В 1750 г. Франклин изобрел громоотвод, который правильнее было бы называть молниеотводом. Спустя три года Франклин экспериментально доказал, что молния есть электрическое явление, а электрическая искра, возникающая при замыкании пластин конденсатора есть маленькая молния.

Франклин создал качественную теорию статического электричества. Это он ввел в употребление такие термины, как "положительный и отрицательный электрические заряды", "конденсатор", "разряд"... В теории Франклина содержался один из основных законов электромагнетизма – закон сохранения электрического заряда.

## Электричество в Санкт-Петербурге. Первый электрометр

Великий русский ученый Михаил Васильевич Ломоносов внес заметный вклад во многие области науки. Электричество также было одним из предметов его интересов. Этой теме была посвящена диссертация Михаила Васильевича под названием "Теория электричества, математически выведенная автором М. Ломоносовым". Им была создана теория атмосферного электричества, согласно которой электрические заряды возникают в атмосфере при трении восходящих и нисходящих потоков воздуха. Этой теории придерживаются и современные ученые.

Во времена Ломоносова кабинетом физики в Санкт-Петербургской академии наук заведовал его друг Георг Вильгельм Рихман. Он был эстляндский немец, один из тех, кого "выписали" из-за границы для работы в академии. В кабинете физики было много электрических приборов, некоторые из которых были изготовлены создателем лейденской банки Мушенбруком. Рихман и Ломоносов проводили различные опыты с этими приборами. Благодаря Рихману электрические опыты превратились в точную науку. В 1752 г. он изобрел электрометр, названный им "электрическим указателем". Правда, неизвестно было, какую именно величину измеряет этот указатель. Прибор представлял собой расположенную вертикально железную линейку, к верхнему концу которой была привязана шелковая нить. Когда к линейке прикасались заряженным

телом, нить отклонялась от линейки на некоторый угол. По значению этого угла можно было судить о приобретаемом линейкой потенциале, который тогда называли "электрической силой". Погиб Рихман во время грозы, когда он проводил опыты с атмосферным электричеством. Вероятно, причиной смерти явился разряд шаровой молнии.

В 1756 г. немецкий физик Франц Эпинус, также служивший в Санкт-Петербургской академии наук, построил воздушный конденсатор и доказал, что стекло в лейденской банке или в плоском конденсаторе Франклина не обладает свойством накапливать электричество, а просто является изолятором. Он показал, что в качестве изолятора в конденсаторе можно использовать и другие вещества.

В 1759 г. Эпинус опубликовал работу, в которой описал следующий опыт. Если к одному из концов бронзовой линейки приблизить наэлектризованную стеклянную палочку или серный цилиндр, то на этом конце линейки возникает электрический заряд, знак которого противоположен знаку заряда на подносимом теле, а на другом конце возникнет заряд того же знака.

## Почему напряжение измеряют в вольтах?

В 1775 г. итальянский физик Алессандро Вольта построил прибор, названный им электрофором. Это была электрическая машина, в которой создавались посредством трения и накапливались электрические заряды. Главными деталями в этом приборе были две плиты. Одна из сургуча, а другая из металла. При трении сургуча кошачьей шкурой происходила их электризация. Иногда для этого использовали живую кошку. Затем заряженный сургуч подносили к металлической плите, на которой при этом индуцировались электрические заряды. Прикосновением пальца экспериментатор снимал с плиты заряды одного знака. Таким образом, плита оказывалась заряженной. Повторяя эту процедуру несколько раз, можно было накопить на плите значительный по величине электрический заряд. Электрофор сделал Вольту известным.

При помощи электрофора и усовершенствованного им электрометра Вольта исследовал емкости конденсаторов. В 1778 г. он нашел соотношение, связывающее емкость, заряд и потенциал изолированного проводника. Это Вольта ввел в употребление термин "напряжение" и предложил единицу измерения этой величины. В настоящее время используют другую единицу напряжения – *вольт*, которая названа так в честь Вольты.

## Закон Кулона

Со временем изменяется отношение исследователей к электрическим опытам. Они уже не рассматриваются только как забавные явления природы. Электрические приборы становятся более точными и разнообразными. Появляется необходимость от качественных исследований переходить к количественным измерениям электрических величин и установлению связывающих их математических соотношений. Возникают качественные теории электрических явлений. В настоящее время эти теории потеряли всякую ценность. Однако в свое время многие из них имели определенное значение, так как указывали нужное направление исследований.

В 1761 г. в Санкт-Петербурге была опубликована работа Эпинуса "Теория электричества и магнетизма", в которой он высказал предположение, что сила взаимодействия двух небольших заряженных тел пропорциональна произведению их зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

В 1784 г. французский военный инженер Шарль Огюст Кулон завершил свои исследования сил, возникающих при закручивании нити. Он установил, что сила  $F$  закручивания нити зависит от вещества, из которого изготовлена нить, что она прямо пропорциональна углу  $\varphi$  закручивания нити и четвертой степени ее диаметра и обратно пропорциональна длине  $l$  нити:

$$F \sim \frac{d^4}{l} \varphi.$$

Это открытие привело Кулона к новому очень точному методу измерения сил посредством сравнения их с силой, которая возникает при закручивании нити. Кулон построил прибор для измерения сил, названный им крутильными весами. Сначала он использовал этот прибор для измерения сил трения между твердыми телами и жидкостями.

В 1785 г. при помощи крутильных весов Кулон открыл основной закон электростатики, согласно которому сила взаимодействия двух небольших зарядов пропорциональна их величинам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Теперь каждому прилежному школьнику знакома формула

$$F = k \frac{|Q_1| |Q_2|}{R^2}.$$

По-видимому, это была первая формула, записанная в теорию электромагнетизма.

## Первый источник электрического тока

В 1780 г. итальянский профессор анатомии Луиджи Гальвани, изучая строение нервной системы препарированной лягушки, случайно заметил, что под действием разряда электрической машины происходят судорожные сокращения лапок бедной лягушки. Позднее также случайно Гальвани обнаружил, что сокращения мышц лягушки происходят, когда к нервным окончаниям прикасаются двумя разнородными металлами, соединенными друг с другом. Так как ранее сокращения мышц наблюдались им при электрическом разряде, Гальвани пришел к выводу, что в этих опытах он также имеет дело с электричеством. И он не ошибся. Однако он ошибочно полагал, что источником электричества является организм животного. Появилось даже такое название "животное электричество". По результатам своих опытов Гальвани написал трактат "Об электрических силах в мускулах".

Алессандро Вольта, прочитав трактат Гальвани, решил повторить его опыты. Вольта обратил внимание на упомянутый в трактате факт, что подергивание лапок лягушки происходило только тогда, когда к ним прикасались двумя различными металлами. Это навело его на мысль, что причина возникновения электричества заключена вовсе не в мускулах лягушки, а в разнородности металлов. По его мнению, лягушка служила лишь индикатором электричества.

Вольта приступает к задуманным опытам с очень малой надеждой на успех: таким невероятным казался ему ожидаемый результат. Он берет две монеты из разных металлов и кладет их себе в рот – одну под язык, а другую – на язык, соединяет монеты провололочкой и ощущает во рту знакомый вкус электричества – тот самый вкус, который он много раз ощущал, работая с машиной Герике или со своим электрофором. Этот вкус можно почувствовать, прикоснувшись языком к двум контактам батарейки. Существенными в опытах Вольта было то, что вкус электричества ощущался все время, пока соединенные провололочкой монеты лежали во рту, а не кратковременно, как в опытах с машиной Герике и электрофором.

Вдохновленный успешными результатами своих опытов, Вольта изобретает первый источник электрического тока, который стали называть "вольтов столб". Вольта сложил в столбик более ста цинковых и серебряных кружочков (сначала это были монеты), проложив между ними бумагу, смоченную подсоленной водой. Если присоединить к концам столба проволоочки и взять их в рот, то можно ощутить вкус электричества, который не исчезает долгое время. Об этом своем изобретении Вольта сообщил в 1800 г.



Экспериментируя с пластинами, изготовленными из различных металлов, Вольта сконструировал еще один источник постоянного электрического тока – электрическую батарею. Она состояла из большого числа пар цинковых и медных пластин, соединенных последовательно проводочками и опущенных в сосуды с разбавленной кислотой. Причиной возникновения электричества в вольтовом столбе и электрической батарее являются протекающие в них химические реакции. Надо сказать, что Вольта и современные ему ученые даже и не предполагали, каким образом в замкнутой цепи возникает электрический ток. Электрическая батарея представляла собой уже довольно мощный источник электрической энергии. С этого времени исследователи электричества получили в свое распоряжение источники постоянного тока, который тогда называли гальваническим электричеством. Изобретения Вольта были по достоинству очень высоко оценены его современниками. С ними много экспериментировали. Спустя некоторое время были открыты химическое, тепловое и магнитное действия электрического тока.

## Электричество и Наполеон

В послереволюционной Франции впервые в мире появились ученые-профессионалы, главным занятием которых была научная деятельность, а не преподавание в школах и университетах. Наполеон Бонапарт – император Франции – был покровителем ученых. Во времена его правления научные достижения поощрялись, талантливые ученые чествовались, осыпались благами и наградами. За выдающиеся научные работы ученым даже присваивались дворянские звания.

Как правило, умный, деятельный и справедливый человек, приобретает верховную власть в стране, окружает себя такими же, как он, людьми, которые способны содействовать ему привести страну к славе и процветанию. Дурак и подлец также окружает себя подобными себе. Искусства и науки приходят в упадок, когда к власти в стране приходят ничтожества и предатели.

В Военной школе, где учился Наполеон, в то время преподавал знаменитый французский астроном, математик и физик Пьер Симон Лаплас. Этот великий ученый произвел на будущего императора такое сильное впечатление, что сразу после прихода к власти он в знак особого уважения назначает Лапласа министром внутренних дел Франции.

В 1801 г. в Париж приезжает Вольта. Наполеон посещает его лекции, выступает на них с приветственной речью и награждает Вольта золотой медалью. После лекций Вольта Наполеон приходит к убеждению, что в области электричества в скором времени будут сделаны великие открытия. По предложению Наполеона во Франции учреждаются ежегодная

медаль и крупная денежная премия за лучшие работы по "вольтаическому электричеству".

## Электричество и магнетизм снова неразлучны

Идея о том, что электричество и магнетизм как-то связаны друг с другом, как говорится, витала в воздухе. Многие ученые отмечали сходство этих явлений и догадывались об их связи. Так, например, были известны случаи перемагничивания стрелки компаса при ударе молнии.

После изобретения вольтова столба и электрической батареи эти приборы появляются в каждой физической лаборатории. Многие ученые экспериментировали с ними. Но только через 20 лет после изобретения вольтова столба было обнаружено действие гальванического электричества на стрелку компаса. Это случилось в Копенгагене в 1819 г. Вот как было дело. Датский профессор Ганс Христиан Эрстед во время чтения студентам лекции по физике демонстрировал им свойство электричества нагревать проволоку, замыкающую концы вольтова столба. При этом на лабораторном столе, как потом говорили завистники, совершенно случайно оказался компас. И вот один из студентов заметил, что при замыкании вольтова столба проволокой стрелка компаса слегка поворачивалась. Потом Эрстед много раз повторял этот опыт с более мощными источниками тока. И каждый раз стрелка компаса приходила в движение при замыкании вольтова столба проволокой. Так, казалось бы случайно, было сделано открытие, определяющее связь электричества и магнетизма. За это открытие Эрстеду была присуждена премия, назначенная еще Наполеоном авторам крупных открытий в области электричества. Эрстед не только установил магнитное действие электрического тока. Он также заметил новый вид взаимодействия, который он назвал "вихреобразным", так как стрелка компаса устанавливалась не вдоль провода, а перпендикулярно к нему. До этого физикам были известны только силы притяжения и отталкивания.

Опыт Эрстеда очень быстро становится известным в научных центрах Европы того времени. Этот опыт воспроизводят. Им восхищаются. Эрстед становится национальным героем Дании.

## Электричество рождает магнетизм

Когда великий Вольта читал во Франции лекции о своих изобретениях, на одной из этих лекций присутствовал молодой человек по имени Андре-Мари Ампер. Тогда ему было 26 лет. В 39 лет он стал "бессмертным". Так во Франции называют академиков. Ампер был избран академиком за успешные исследования по математике и химии.

В сентябре 1820 г. на заседании французской академии был повторен опыт Эрстеда. После этого заседания в течение двух недель Ампер создает и обосновывает экспериментально новую теорию, которую он назвал электродинамикой. Согласно этой теории все магнитные явления обусловлены гальваническим электричеством. Ампер экспериментально исследовал взаимодействие проводников с током. Он установил, что параллельные друг другу прямые проводники притягиваются, когда токи текут по ним в одном направлении, и отталкиваются, если токи противоположны по направлению. Перпендикулярные друг к другу проводники не взаимодействуют. Он предсказал и доказал на опыте, что провололочные спирали и витки с электрическим током взаимодействуют как магниты. Из этого Ампер пришел к заключению, что свойства магнитных тел определяются циркулирующими внутри них электрическими токами. По теории Ампера молекулы вещества похожи на маленькие витки с током. Если эти круговые токи ориентированы хаотично в пространстве, то вещество не проявляет магнитных свойств. В магнитах же молекулярные токи ориентированы одинаково. Поэтому их действия преумножаются. Теория Ампера очень просто объяснила неразделимость полюсов магнита.

В 1826 г. Ампер опубликовал свой основной труд "Теория электродинамических явлений, выведенная исключительно из опыта". В этой книге он описал свои исследования по электродинамике и вывел формулу, выражающую закон взаимодействия проводников с током. Ампер – первый ученый, который использовал термин "сила тока".

## Магнетизм дает электричество

В августе 1820 г. Эрстед рассылал европейским ученым свой быстро ставший знаменитым мемуар "О воздействии электрического конфликта на магнитную стрелку". Вскоре появились многочисленные работы Ампера о том, как электричество создает магнетизм. Под влиянием этих работ рождаются новые физические идеи и проводятся новые эксперименты.

В 1821 г. английский ученый Майкл Фарадей сконструировал первый электродвигатель. В этом устройстве постоянный магнит вращался вокруг проводника с током. В другом устройстве, построенном Фарадеем, проводник с током вращался вокруг магнита. После этого Фарадей поставил себе цель "превратить магнетизм в электричество".

В то время было известно два сорта электричества. Первое – это электричество, которое получали посредством трения, а другое – гальваническое электричество, которое получали при помощи вольтовых столбов. Когда вольтов столб не замкнут, на его пластинах обнаруживается ста-

тическое электричество. При замыкании столба проводником возникает гальваническое электричество, т.е. электрический ток. Тогда еще не было вполне ясно, что электричество, полученное посредством трения, есть то же самое электричество, которое течет по проводам при замыкании вольтова столба. В многочисленных опытах Фарадей сравнил действия, оказываемые различными электричествами, и доказал, что электричества, полученные различными способами, проявляют одни и те же свойства.

По теории Ампера магнетизм обусловлен гальваническим электричеством. Фарадей пытается решить обратную задачу – "получить электричество из магнетизма". Поставленной цели Фарадей достиг в 1831 г., открыв явление электромагнитной индукции. Он детально изучает это явление и устанавливает закон, которому оно подчиняется. Согласно этому закону электрический ток в замкнутом проводящем контуре возникает при изменении магнитного потока через поверхность, затягивающую этот контур.

## Электромагнитное поле

Если продолговатые кристаллики поляризованного диэлектрика насыпать в вязкую жидкость и перемешать так, чтобы они равномерно распределились по ее объему, а затем поднести к ним заряженное тело, то кристаллики, до этого ориентированные хаотически, под действием создаваемого заряженным телом электрического поля развернутся и выстроятся вдоль силовых линий поля, образуя хорошо видимые цепочки. Так можно наблюдать силовые линии электрического поля.

Силовые линии магнитного поля, создаваемого постоянным магнитом или проводником с током, можно наблюдать при помощи мелких железных опилок, которые под действием поля разворачиваются как маленькие стрелки компаса.

Такие опыты проводились очень давно, но Фарадей первый увидел в этих опытах проявления реально существующих полей. Согласно представлениям Фарадея электрические заряды действуют друг на друга посредством электромагнитного поля. Каждый заряд создает в окружающем его пространстве электромагнитное поле. Поля, создаваемые отдельными зарядами, складываются и образуют единое поле, которое действует на каждый находящийся в нем электрический заряд.

## Великие уравнения

Представления Фарадея об электромагнитном поле и открытые им законы описал при помощи математических уравнений другой английский

ученый – Джеймс Максвелл. Теория электромагнитного поля, представленная уравнениями Максвелла, является по общему признанию одной из самых красивых и совершенных физических теорий.

Все началось с того, что в руки двадцатилетнего Максвелла попала книга Фарадея "Экспериментальные исследования по электричеству". Так как Фарадей совершенно не знал математики, в этой книге не было ни одной математической формулы. И Максвелл решил поискать математические соотношения, которыми можно было бы выразить то, что было написано в книге Фарадея. Максвелл изложил свою теорию электромагнитного поля в книге под названием "Трактат по электричеству и магнетизму". Исследователи творчества Максвелла отмечают некоторую "сумбурность изложения" научного материала в его книге. Так, теория электромагнитного поля в изложении Максвелла содержала 12 уравнений. В современных учебниках теория Максвелла содержит всего 4 уравнения, которые выражают основные законы электромагнетизма. Такой вид она приобрела благодаря трудам немецкого физика Генриха Герца и англичанина Оливера Хевисайда. Уравнения Максвелла – это математическое воплощение идей Фарадея.

Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле не стоит на месте, а распространяется в пространстве со скоростью света в виде поперечных волн. На том основании, что скорость электромагнитных волн равна скорости света, Максвелл предположил, что свет также есть электромагнитные волны.

## Открытие электромагнитных волн

В то время, когда Максвелл создавал свою теорию электромагнитного поля, существовали и другие теории электромагнетизма, авторами которых были немецкие ученые – приверженцы идеи дальнего действия, т.е. мгновенного взаимодействия зарядов и токов на расстоянии без посредника. В этих теориях не было места электромагнитному полю, посредством которого взаимодействуют заряды и токи согласно представлениям Фарадея.

Молодой немецкий ученый Генрих Герц был учеником Германа Гельмгольца – автора одной из теорий электромагнетизма, соперничавших с теорией Максвелла. Основные работы Герца относятся к теории электромагнетизма и к экспериментам в этой области. Разумеется, его симпатии были на стороне теорий электромагнетизма, развитых его соотечественниками. Своими экспериментами он пытался доказать справедливость одной из них. Но получилось так, что его эксперименты доказали как раз несостоятельность этих теорий и справедливость теории Максвелла. В 1888 г. Герц экспериментально доказал, что предсказанные Максвеллом



электромагнитные волны существуют в действительности. Установка, при помощи которой Герц обнаружил электромагнитные волны, состояла из генератора волн (вibrator Герца) и их приемника (резонатор Герца). В вибраторе между двумя шариками создавалась электрическая искра. Искра – это кратковременный переменный электрический ток, генерирующий электромагнитные волны. Резонатор представлял собой проволочный контур, в котором был небольшой промежуток с двумя шариками на концах проволоки. Резонатор располагался недалеко от вибратора. Когда между шариками вибратора создавалась искра, сразу же между шариками резонатора замечались слабые искорки. Это электромагнитные волны переносили электрический импульс через пространство от вибратора к резонатору. Герц провел много экспериментов с электромагнитными волнами. Он наблюдал отражение волн, их преломление, интерференцию и поляризацию. Измерил скорость электромагнитных волн и доказал, что она равна скорости света. Эксперименты Герца убедительно свидетельствовали в пользу теории Максвелла и опровергали другие теории электромагнетизма. Интересно заметить, что Герц – человек, открывший электромагнитные волны, – был уверен в их практической непригодности. Он даже написал письмо в дрезденскую палату коммерции о необходимости запретить исследования электромагнитных волн из-за их бесполезности.

### Поле и частицы. Частица или волна

Основным понятием классической механики является материальная точка. Это есть тело, которое имеет массу, но не имеет размеров. Протяженные тела в механике рассматривают как системы, состоящие из большого числа материальных точек. Элементарные частицы, из которых состоит вещество (например, протоны и электроны), считают материальными точками.

Каждая частица вещества имеет массу и создает в пространстве вокруг себя гравитационное поле. Системы частиц создают гравитационное поле, которое является суперпозицией полей, создаваемых отдельными частицами. Некоторые частицы вещества имеют электрический заряд. Электромагнитное поле создается системой заряженных частиц. посредством полей частицы взаимодействуют друг с другом. Такие представления о природе материи господствовали продолжительное время. На основе этих представлений были созданы теории, при помощи которых были получены замечательные результаты в различных областях физики. Появилась возможность объяснять и предсказывать различные физические явления и предопределять разнообразные свойства вещества.

К началу XX в. физика достигла таких успехов, что в умах некоторых самоуверенных или доверчивых представителей цивилизованного общества возникла иллюзия чрезмерного могущества человеческого разума. На торжественных собраниях звучали такие слова: на чистом небе совершенной теоретической физики можно увидеть только два или три небольших облачка. Казалось, что в физике не осталось нерешенных проблем, а имеется только несколько частных вопросов, которые вот вот найдут свое решение. Но оказалось, что легкие облачка на чистом небе принесли бурю, которая сильно изменила представления о строении материи. Оказалось, что электромагнитное излучение иногда следует рассматривать не как совокупность волн, а как совокупность частиц. Эти частицы называли фотонами, или квантами излучения. Оказалось, что электрон иногда ведет себя так, как будто он не частица, а волна. Эти представления о свойствах полей и частиц легли в основу новой науки, которую называли квантовой физикой.

### **Удача сопутствует трудолюбию, но не это – главное**

Кто делает открытия? Кто – те "счастливики", которым достается радость совершить открытие? Все они – великие труженники. Часто бывало так, что многолетние труды и мысли ученого приводили его на порог открытия. Но это открытие совершалось чуть раньше другим, более удачливым ученым. Случалось так, что какое-либо изобретение или открытие делалось в разное время различными учеными. Причем приписывалось это деяние часто совсем не тому открывателю, который был первым или затратил на его свершение больше труда, средств, душевных сил и ума.

Посредством человеческого разума Природа познает самое себя. С этой точки зрения не так уж важно, чье имя носит тот или иной закон Природы. Важно, что этот закон открыт. Правда, есть мнение, что законы природы не открываются, а даются в дар. Наука и произведения искусства – основные составляющие культуры – это единственные ценности, созданные человечеством за все века его существования. Есть еще духовные ценности. Но о них люди так часто забывают.

В этой книге отмечены только основные вехи развития науки об электричестве и магнетизме. Упомянуты только самые известные имена и самые значительные открытия. Но величественное и прекрасное здание, называемое электромагнетизм, построено не только трудами великих и удачливых ученых. Многие и многие труженники науки, имена которых малоизвестны или совсем не известны, вложили часть своего труда и таланта в строительство этого здания.

# ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

## Г Л А В А 1

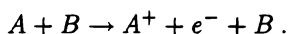
### ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

#### 1.1. Закон сохранения заряда

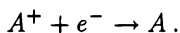
Одной из характеристик элементарных частиц служит электрический заряд. Существуют два вида электрических зарядов. Принято одни заряды называть положительными, а другие – отрицательными. Заряд элементарной частицы может быть равен 0,  $+e$  или  $-e$ . Величина  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл есть так называемый *элементарный электрический заряд*. Если заряд частицы равен нулю, то ее называют нейтральной. В противном случае частицу называют заряженной. Например, электрон  $e^-$  считается отрицательно заряженной элементарной частицей: его заряд равен  $-e$ . В состав атомного ядра входят элементарные частицы, называемые нуклонами. К нуклонам относятся протоны и нейтроны. Протон  $p$  имеет заряд  $+e$ . Нейтрон  $n$  является нейтральной частицей. Таким образом, ядро атома имеет положительный заряд  $+Ze$ , где  $Z$  – число содержащихся в нем протонов.

Атом состоит из одного ядра и нескольких вращающихся вокруг него электронов. Число электронов в атоме равно числу  $Z$  протонов в ядре. По определению *заряд системы частиц равен алгебраической сумме электрических зарядов этих частиц*. Поэтому атом в целом является нейтральным.

В некоторых случаях при столкновении атома  $A$  с какой-либо другой частицей  $B$  (это может быть, например, электрон, фотон или другой атом) от атома могут отделиться один или несколько ( $n$ ) электронов. Этот процесс называется *ионизацией* атома. Образовавшуюся при этом частицу называют *положительным ионом*, или  $n$ -кратно ионизованным атомом. Заряд положительного иона равен  $+ne$ . Например, при отрыве от атома  $A$  одного электрона  $e^-$  образуется ион  $A^+$  с зарядом  $+e$ :

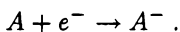


При столкновении иона  $A^+$  с электроном  $e^-$  может вновь образоваться нейтральный атом:



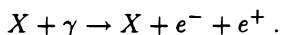
Этот процесс называется *рекомбинацией*.

Иногда нейтральный атом может захватить электрон. При этом образуется частица  $A^-$ , называемая отрицательным ионом:

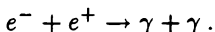


Любое тело (система частиц вещества) состоит в основном из атомов, ионов и отдельных электронов. Поэтому электрический заряд тела равен сумме зарядов ионов и электронов. Если в этой сумме будет преобладать заряд положительных ионов, то заряд тела будет положительным. Если же суммарный заряд отрицательных ионов и отдельных электронов будет по величине больше заряда положительных ионов, то тело будет заряжено отрицательно.

Входящие в состав рассматриваемой системы частицы могут активно взаимодействовать между собой. Следствием этих взаимодействий могут быть химические реакции, ионизация, рекомбинация и другие процессы, в результате которых изменяется состав частиц. Элементарные частицы участвуют в процессах взаимного превращения одних частиц в другие. Например, фотон высокой энергии ( $\gamma$ -квант) в электрическом поле атомного ядра или электрона может превратиться сразу в две заряженные частицы: электрон  $e^-$  и позитрон  $e^+$  (заряд позитрона равен  $+e$ ). Этот процесс называют рождением электронно-позитронной пары и условно записывают так:



При столкновении электрона и позитрона происходит их взаимное уничтожение (аннигиляция) и образование двух  $\gamma$ -квантов:



При ионизации, рекомбинации, рождении и аннигиляции электронно-позитронной пары, а также, как показывает опыт, и в любых других элементарных процессах выполняется *закон сохранения электрического заряда*, согласно которому полный (суммарный) заряд частиц, вступающих во взаимодействие, равен заряду частиц, образовавшихся в результате этого взаимодействия.

Система называется *электрически изолированной*, если через поверхность, которая ее ограничивает, не переносятся заряженные частицы.

Следствием закона сохранения заряда в элементарных процессах является *закон сохранения заряда* электрически изолированной системы: полный заряд  $Q$  электрически изолированной системы со временем не изменяется. В системе могут протекать различные процессы с участием заряженных частиц. Эти частицы могут перемещаться в пространстве под действием различных сил. Но, если система является электрически изолированной, то ее заряд со временем не изменяется:

$$\sum_i Q_i = \sum_j Q'_j, \quad (1.1)$$

где  $Q_i$  и  $Q'_j$  – заряды частиц, входящих в состав системы в различные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

Единицей заряда в СИ служит *кулон* ( $Кл$ ). Эта единица выражается через единицу силы тока *ампер* и секунду, которые являются основными в СИ:  $[Q] = Кл = А \cdot с$ .

Заряженные частицы создают в пространстве вокруг себя особый вид материи – электрическое поле. Посредством этого поля заряды взаимодействуют друг с другом. Электрическое поле, создаваемое одним зарядом или системой зарядов, можно обнаружить по его действию на другой заряд, который называют *пробным*.

Раздел физики, в котором предметом изучения является создаваемое неподвижными зарядами постоянное электрическое поле, называется *электростатикой*.

## 1.2. Взаимодействие двух точечных зарядов

Тот факт, что тело несет в себе электрический заряд, может быть обнаружен, если к этому телу поднести другое заряженное тело. Опыт показывает, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются друг к другу. Наиболее просто описывается взаимодействие между двумя точечными зарядами. *Точечным зарядом* называют заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до других заряженных тел.

Рассмотрим два точечных заряда  $Q_1$  и  $Q_2$ , положения которых в пространстве характеризуются векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  (рис. 1.1). Пусть  $\vec{F}_{12}$  есть сила, с которой заряд  $Q_2$  действует на заряд  $Q_1$ , а  $\vec{F}_{21}$  – сила, действующая на заряд  $Q_2$  со стороны заряда  $Q_1$ . Тщательные измерения, проведенные Кулоном, Ампером и другими исследователями, показали, что сила взаимодействия зарядов пропорциональна величине этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Этот закон носит название *закона Кулона*. Математическим выражением это-

го закона являются формулы

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Q_1 Q_2 \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad \vec{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2 \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad (1.2)$$

где

$$\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

$R$  – модуль вектора  $\vec{R}$ , т.е. расстояние между зарядами;

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$$

– так называемая *электрическая постоянная*, или *диэлектрическая проницаемость вакуума*.

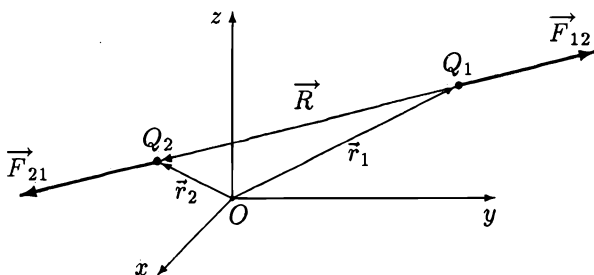


Рис. 1.1. К формулировке закона Кулона

Из экспериментальных данных в полном соответствии с формулой (1.1) следует, что: 1) силы взаимодействия зарядов удовлетворяют третьему закону Ньютона; 2) векторы этих сил коллинеарны вектору  $\vec{R}$ , т.е. направлены вдоль линии, соединяющей заряды; 3) модули сил обратно пропорциональны квадрату расстояния  $R$  между зарядами:

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = \frac{|Q_1 Q_2|}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (1.3)$$

Можно показать, что кулоновские силы (1.1) являются консервативными, а соответствующая им потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов

$$W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (1.4)$$

### 1.3. Закон Кулона и принцип суперпозиции

Рассмотрим теперь систему из  $N$  точечных зарядов  $Q_i$ , где номер заряда  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Найдем силу, с которой эта система действует на пробный точечный заряд  $q$ , помещенный в произвольную точку  $P$  пространства.

Пусть  $\vec{r}_i$  и  $\vec{r}$  – радиус-векторы зарядов  $Q_i$  и  $q$  соответственно (рис. 1.2). По закону Кулона на заряд  $q$  со стороны заряда  $Q_i$  действует сила

$$\vec{F}_i = \frac{q Q_i \vec{R}_i}{4 \pi \epsilon_0 R_i^3}, \quad (1.5)$$

где

$$\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$$

– вектор, соединяющий заряды  $Q_i$  и  $q$ ;  $R_i$  – модуль вектора  $\vec{R}_i$ , т.е. расстояние между этими зарядами;

$$R_i = |\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}. \quad (1.6)$$

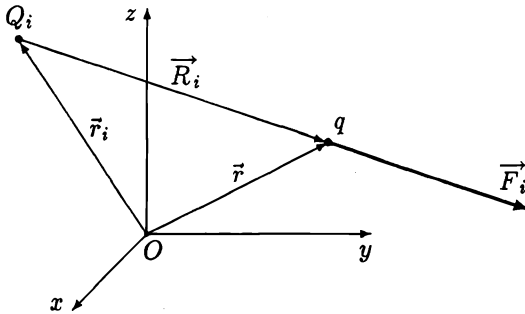


Рис. 1.2. Сила, с которой заряд  $Q_i$  действует на пробный заряд  $q$

Каждый заряд системы действует на пробный заряд с некоторой силой (рис. 1.3). Вектор силы  $\vec{F}$ , с которой вся система зарядов действует на заряд  $q$ , равен векторной сумме кулоновских сил, действующих на этот заряд со стороны каждого из зарядов  $Q_i$  системы:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (1.7)$$

Это утверждение носит название *принципа суперпозиции*.

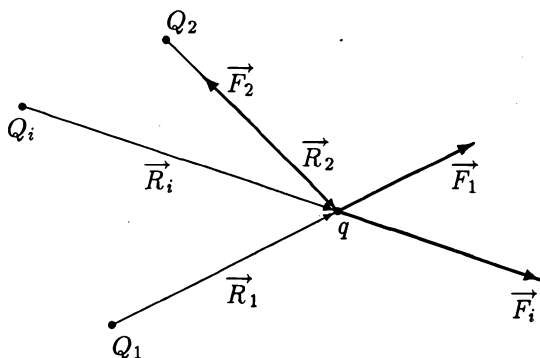


Рис. 1.3. К формулировке принципа суперпозиции

#### 1.4. Напряженность электрического поля

При изучении взаимодействия электрических зарядов возникает вопрос, каким образом это взаимодействие осуществляется, как один заряд может действовать на другой, когда между ними нет ничего, кроме "пустого" пространства.

Опыт показывает, что при изменении положения одного из зарядов другой "почувствует" это изменение не мгновенно, а лишь спустя некоторое время. Этот факт наводит на мысль, что существует "нечто", посредством чего заряды взаимодействуют, и это "нечто" распространяется в пространстве с некоторой скоростью. Это "нечто" называют *электрическим полем*. Электрическое поле есть особый вид материи, передающий через пространство воздействие одного заряда на другой. Электрическое поле является неизменным спутником каждого электрического заряда. Пространство вокруг заряженной частицы "заполнено" электрическим полем, которое окружает ее, как ореол. Другими словами, заряженные частицы создают вокруг себя электрическое поле. Судить о наличии электрического поля в данной точке пространства можно только по той силе, с которой поле действует на помещенный в эту точку пробный заряд  $q$ .

Перейдем теперь к математическому описанию электрического поля. Для этого сначала дадим два определения из математической теории поля. Пусть в каждой точке пространства задана скалярная величина  $f$ . В этом случае говорят, что задано скалярное поле. Иными словами, скалярное поле есть скалярная функция  $f = f(\vec{r})$  радиус-вектора  $\vec{r}$  произвольной точки  $P$  пространства. Аналогично векторное поле  $\vec{a}$



есть векторная функция  $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$  радиус-вектора  $\vec{r}$ , т.е. векторное поле считается заданным, если в каждой точке пространства задан вектор  $\vec{a}$ . Поля  $f = f(\vec{r})$  и  $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$  называются *постоянными*, если величины  $f$  и  $\vec{a}$  не зависят от времени.

Подставив выражение для силы (1.5) в формулу (1.7), найдем, что сила, с которой произвольная система зарядов  $Q_i$  действует на пробный заряд  $q$ , помещенный в точку пространства  $P(\vec{r})$ ,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q Q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4 \pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (1.8)$$

Вектор

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \quad (1.9)$$

называется *напряженностью* электрического поля в точке  $P(\vec{r})$ . Согласно этому определению вектор  $\vec{E}$  есть сила, с которой электрическое поле действует на единичный положительный заряд, помещенный в точку  $P(\vec{r})$ . Векторное поле

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$$

осуществляет математическое описание электрического поля.

Из определения (1.9) и закона Кулона (1.5) следует, что напряженность электрического поля точечного заряда  $Q_i$

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{Q_i \vec{R}_i}{4 \pi \epsilon_0 R_i^3}. \quad (1.10)$$

Разделив силу (1.8) на заряд  $q$ , получим равенство

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i, \quad (1.11)$$

которое выражает собой *принцип суперпозиции* (сложения) электрических полей: напряженность электрического поля системы зарядов в произвольной точке  $P$  пространства равна векторной сумме напряженностей электрических полей, создаваемых каждым зарядом системы в отдельности.

## 1.5. Потенциал электрического поля

Пусть задано скалярное поле  $f = f(\vec{r})$ . Вектор, декартовы координаты которого равны производным

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

называют *градиентом* функции  $f = f(\vec{r})$  и обозначают  $\text{grad } f$ , или  $\nabla f$ :

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}, \quad (1.12)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – единичные орты, определяющие направление координатных осей в выбранной декартовой системе координат, символ  $\nabla$  (*набла*) обозначает линейный оператор, определяемый формулой

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Векторное поле силы  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ , действующей на некоторую частицу, называют *консервативным*, если существует скалярная функция  $U = U(\vec{r})$  такая, что

$$\vec{F} = - \text{grad } U. \quad (1.13)$$

При этом функцию  $U = U(\vec{r})$  называют *потенциальной энергией* частицы.

Покажем, что сила (1.5), с которой точечный заряд  $Q_i$  действует на пробный заряд  $q$ , является консервативной. Для этого предположим, что потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов  $Q_i$  и  $q$  определяется формулой

$$U_i(\vec{r}) = \frac{q Q_i}{4 \pi \epsilon_0 R_i}. \quad (1.14)$$

Вычислим градиент этой функции. Имея в виду зависимость (1.6), трудно проверить, что частная производная

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R_i} \right) = - \frac{x - x_i}{R_i^3}.$$

Аналогично вычисляются частные производные по  $y$  и  $z$ . С учетом этих формул получим равенство

$$- \text{grad } U_i = \frac{q Q_i \vec{R}_i}{4 \pi \epsilon_0 R_i^3} = \vec{F}_i. \quad (1.15)$$

Таким образом, доказано, что кулоновское силовое поле является консервативным, а потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов определяется формулой (1.14).

Преобразуем правую часть равенства (1.7), которое выражает собой принцип суперпозиции, при помощи формулы (1.15):

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = - \sum_i \text{grad } U_i = - \text{grad} \sum_i U_i. \quad (1.16)$$

Величина

$$U(\vec{r}) = \sum_i U_i(\vec{r}) \quad (1.17)$$

есть *потенциальная энергия взаимодействия* точечного заряда  $q$  с системой зарядов  $Q_i$ . Теперь равенство (1.16) принимает вид (1.13). Из этого можно заключить, что сила  $\vec{F}(\vec{r})$ , с которой произвольная система неподвижных зарядов действует на пробный заряд  $q$ , помещенный в точку  $P(\vec{r})$ , является консервативной.

Скалярная функция

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q} \quad (1.18)$$

называется *потенциалом* электрического поля. Потенциал не зависит от величины пробного заряда  $q$ . Физический смысл потенциала:  $\varphi(\vec{r})$  – энергия взаимодействия единичного положительного заряда, находящегося в точке  $P(\vec{r})$ , с системой зарядов, создающих электрическое поле.

Заметим, что согласно формулам (1.14) и (1.17) потенциальная энергия определена так, что при стремлении расстояний  $R_i$  между зарядом  $q$  и зарядами  $Q_i$  к бесконечности потенциальная энергия стремится к нулю. Поэтому потенциал  $\varphi$  на больших расстояниях от системы зарядов должен, вообще говоря, обращаться в нуль.

Единицей потенциала в СИ является вольт ( $B$ ):  $[\varphi] = B = \text{Дж}/\text{Кл}$ .

По определению (1.18) потенциал поля, создаваемого точечным зарядом  $Q_i$ , будет

$$\varphi_i(\vec{r}) = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}. \quad (1.19)$$

Подставив сумму (1.17) в формулу (1.18), с учетом (1.19) получим равенство

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}), \quad (1.20)$$

которое также выражает принцип суперпозиции электрических полей.

Из определений (1.9) и (1.18) следует, что

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad \text{и} \quad U = q \varphi. \quad (1.21)$$

Подставив эти выражения в равенство (1.13), приходим к соотношению

$$\boxed{\vec{E} = - \text{grad } \varphi,} \quad (1.22)$$

которое устанавливает связь между двумя характеристиками электрического поля – потенциалом и напряженностью поля. Векторное равенство (1.22) эквивалентно системе трех скалярных равенств

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (1.23)$$

где  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$  – координаты вектора  $\vec{E}$  напряженности электрического поля.

Согласно формулам (1.23) единица измерения напряженности в СИ  $[E] = \text{В/м}$ .

Пусть задано векторное поле  $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ . Вектор, обозначаемый  $\text{rot } \vec{a}$ , который в декартовой системе координат определяется формулой

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &\equiv [\nabla \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

называется *ротором* вектора  $\vec{a}$ .

Нетрудно доказать тождество

$$\text{rot grad } f \equiv 0, \quad (1.25)$$

где  $f = f(\vec{r})$  – произвольное скалярное поле.

Будем считать в тождестве (1.25) скалярное поле потенциалом электрического поля:  $f \equiv \varphi$ . Тогда, учитывая соотношение (1.22), приходим к уравнению

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = 0.} \quad (1.26)$$

Векторное поле, ротор которого равен нулю, называют *безвихревым*. Таким образом, постоянное электрическое поле, т.е. поле, создаваемое неподвижными зарядами, является безвихревым.

## 1.6. Работа при перемещении заряда в постоянном электрическом поле

По определению работа при бесконечно малом перемещении  $d\vec{r}$  частицы под действием силы  $\vec{F}$

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.27)$$

На точечный заряд  $q$ , движущийся в постоянном электрическом поле, действует сила

$$\vec{F} = q \vec{E} = -q \text{grad } \varphi. \quad (1.28)$$

При этом формула (1.27) преобразуется к виду

$$\delta A = q \vec{E} \cdot d\vec{r} = -q \text{grad } \varphi \cdot d\vec{r}. \quad (1.29)$$

Бесконечно малое приращение  $d\varphi$  потенциала, равное разности его значений в двух близких точках, определяется известной формулой для дифференциала функции нескольких переменных:

$$d\varphi = \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz, \quad (1.30)$$

если  $\varphi$  не зависит от времени.

Учитывая, что вектор бесконечно малого перемещения

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k},$$

а координаты вектора  $\text{grad } \varphi$  определяются формулой (1.12), найдем скалярное произведение этих векторов

$$\text{grad } \varphi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \quad (1.31)$$

Из сравнения выражений (1.30) и (1.31) видно, что

$$d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot d\vec{r}. \quad (1.32)$$

При этом формулу (1.29) можно записать так:

$$\delta A = -q d\varphi. \quad (1.33)$$

Пусть заряд  $q$  перемещается из точки  $P_1$  в точку  $P_2$  вдоль некоторой кривой  $L$  (рис. 1.4). Совершаемая при этом электрической силой  $\vec{F}$  работа будет выражаться криволинейным интегралом

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \delta A. \quad (1.34)$$

Подставив выражение (1.33) в эту формулу, получим

$$A = -q \int_{P_1}^{P_2} d\varphi = q (\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)) \equiv -q \Delta\varphi, \quad (1.35)$$

где

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \equiv \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)$$

– разность потенциалов.

Из формулы (1.35) следует, что при перемещении заряда по произвольно-му замкнутому контуру  $C$  работа равна нулю, так как в этом случае точки начала и конца пути совпадают:

$$\oint_C \delta A = 0. \quad (1.36)$$

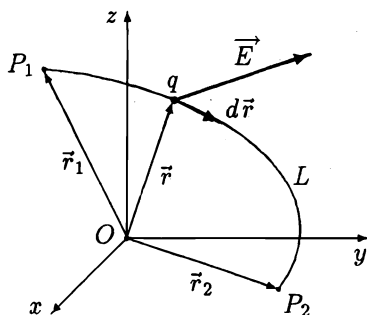


Рис. 1.4.  
К определению работы

Элементарная работа  $\delta A = q \vec{E} d\vec{r}$ . Поэтому равенство (1.36) можно записать так:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0. \quad (1.37)$$

Криволинейный интеграл, стоящий в левой части этого равенства, называется *циркуляцией* вектора  $\vec{E}$ , а само равенство выражает собой теорему о циркуляции вектора напряженности постоянного электрического поля, которая утверждает, что циркуляция вектора  $\vec{E}$  по произвольно-му замкнутому контуру равна нулю, если электрическое поле создается неподвижными зарядами.

## 1.7. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Линия в пространстве, в каждой точке которой вектор напряженности поля является к ней касательным, называется *силовой линией* электрического поля (рис. 1.5). Согласно этому определению бесконечно малый элемент  $d\vec{r}$  силовой линии коллинеарен вектору напряженности  $\vec{E}$  в каждой точке  $P$  этой линии:

$$d\vec{r} \parallel \vec{E}.$$

Записав условие коллинеарности векторов  $d\vec{r}$  и  $\vec{E}$ , получим уравнение силовой линии:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (1.38)$$

Силовые линии постоянного электрического поля никогда не бывают замкнутыми. Они начинаются на зарядах одного знака и заканчиваются на зарядах противоположного знака или "уходят" на бесконечность.

Поверхность, в каждой точке которой потенциал принимает одно и то же значение, называется *эквипотенциальной* поверхностью. Ее уравнение:  $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$ .

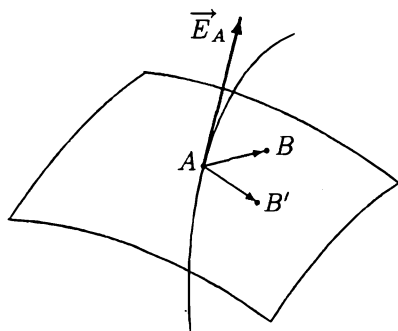


Рис. 1.6. Эквипотенциальная поверхность и силовая линия

Рассмотрим две бесконечно близкие точки  $A$  и  $B$  эквипотенциальной поверхности (рис. 1.6). Бесконечно малый вектор  $\vec{AB}$  можно отождествить с вектором  $d\vec{r} \{dx, dy, dz\}$ . По определению значения потенциала в точках  $A$  и  $B$  будут  $\varphi_A = \varphi_B$ . Значит, бесконечно малое приращение потенциала, соответствующее приращению  $d\vec{r}$  радиус-вектора, равно нулю:  $d\varphi = 0$ . Используя выражение (1.32) для дифференциала  $d\varphi$ , получаем уравнение

$$\text{grad } \varphi \cdot d\vec{r} = 0, \quad \text{или} \quad \vec{E}_A \cdot d\vec{r} = 0.$$

Из последнего равенства вытекает, что векторы  $\vec{E}_A$  и  $d\vec{r}$  ортогональны. Изменим положение точки  $B$  на эквипотенциальной поверхности.

Повторив эти же рассуждения для точки  $B'$ , вновь приходим к тому же равенству. Это означает, что вектор  $\vec{E}_A$  ортогонален эквипотенциальной поверхности в точке  $A$ , так как он ортогонален любому вектору  $d\vec{r}$ , начинающемуся в точке  $A$  и лежащему на этой поверхности. Таким образом, приходим к выводу, что силовые линии постоянного электрического поля ортогональны эквипотенциальным поверхностям.

## 1.8. Плотности заряда

Во многих случаях точечные заряды так "густо" расположены в пространстве, а их число так велико, что можно считать распределение электрического заряда практически непрерывным. Такое распределение заряда описывается скалярной функцией  $\rho(\vec{r})$ , которая называется *объемной плотностью* заряда.

Пусть  $dQ$  – электрический заряд, заключенный в малом объеме  $dV$ , который является окрестностью точки  $P(\vec{r})$  (рис. 1.7). Объемная плотность заряда в точке  $P$  есть отношение заряда  $dQ$  к объему  $dV$ . По определению

$$dQ = \rho(\vec{r}) dV. \quad (1.39)$$

Рассматривая это выражение, можно понять физический смысл объемной плотности заряда:  $\rho$  есть заряд в единичном объеме.

Полный заряд  $Q$  в некотором объеме  $V$  равен сумме элементарных зарядов  $dQ$  и выражается интегралом по этому объему:

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV. \quad (1.40)$$

Напряженность  $\vec{dE}$  поля и потенциал  $d\varphi$ , создаваемые зарядом  $dQ$  в точке  $P'(\vec{r}')$ , определяются по формулам (1.10) и (1.19), так как объем  $dV$  мал и заряд  $dQ$  с большой точностью можно считать точечным:

$$\vec{dE} = \frac{\vec{R} dQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (1.41)$$

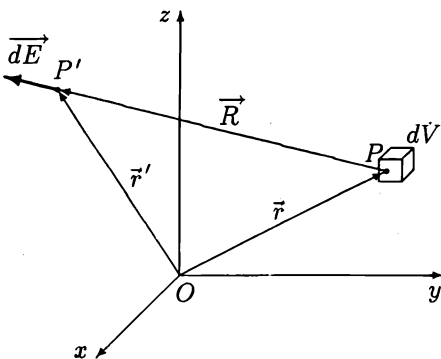


Рис. 1.7. К определению объемной плотности заряда



где

$$\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}, \quad R = |\vec{r}' - \vec{r}|.$$

Согласно принципу суперпозиции напряженность поля и потенциал в точке  $P'(\vec{r}')$ , создаваемые всеми зарядами рассматриваемой системы, равны объемным интегралам от полученных выражений:

$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \rho(\vec{r}) dV}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}, \quad \varphi(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}) dV}{|\vec{r}' - \vec{r}|}.$$

Заряды могут быть распределены некоторым образом на какой-либо поверхности. Такое распределение описывают посредством *поверхностной плотности* заряда  $\sigma$ . Эта величина есть отношение заряда  $dQ$ , распределенного на небольшом элементе поверхности, к площади  $dS$  этого элемента. По определению

$$dQ = \sigma dS. \quad (1.42)$$

Распределение зарядов на некоторой линии описывают при помощи *линейной плотности* заряда  $\lambda$ . Эта величина есть отношение заряда  $dQ$  на небольшом отрезке линии к длине  $dl$  этого отрезка. По определению

$$dQ = \lambda dl. \quad (1.43)$$

Напряженность и потенциал поля, создаваемого зарядами на поверхности или на линии, можно найти при помощи формул (1.41). Для этого в них следует подставить заряды (1.42) или (1.43) и проинтегрировать полученные выражения по поверхности или по линии.

## 1.9. Энергия системы зарядов

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  точечных зарядов  $Q_i$ . Согласно формуле (1.4) энергия взаимодействия двух из этих зарядов с номерами  $i$  и  $j$  будет

$$W_{ij} = \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}, \quad (1.44)$$

где  $R_{ij}$  – расстояние между этими зарядами;  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ;  $i \neq j$ . Очевидно, что

$$W_{ij} = W_{ji}. \quad (1.45)$$

Полная энергия системы равна сумме энергий  $W_{ij}$  различных пар зарядов. При суммировании выражений (1.44) необходимо номерам  $i$  и  $j$  придавать только такие значения, при которых энергия взаимодействия,

соответствующая одной и той же паре зарядов, будет входить в полученную сумму только один раз. Этого можно достичь, положив, к примеру, первый индекс  $i$  меньше второго  $j$ . При этом полная энергия системы будет

$$W = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N W_{ij} = W_{12} + W_{13} + \dots + W_{1N} + \\ + W_{23} + W_{24} + \dots + W_{2N} + \dots + W_{N-1 N}.$$

Иногда удобно суммировать энергии  $W_{ij}$  по всем возможным значениям индексов. Тогда в полученную сумму энергия одной и той же пары зарядов войдет дважды. Поэтому полная энергия будет равна половине этой суммы:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N W_{ij} = \quad (1.46) \\ = \frac{1}{2} (W_{12} + W_{13} + \dots + W_{1N} + W_{21} + W_{23} + \dots + W_{2N} + \\ + \dots + W_{N-1 1} + W_{N-1 2} + \dots + W_{N-1 N}).$$

Подставим величины (1.44) в сумму (1.46) и преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Q_i Q_j}{4 \pi \epsilon_0 R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \sum_{j \neq i} \frac{Q_j}{4 \pi \epsilon_0 R_{ij}}. \quad (1.47)$$

Сумма

$$\sum_{j \neq i} \frac{Q_j}{4 \pi \epsilon_0 R_{ij}} \equiv \varphi_i$$

есть потенциал  $\varphi_i$ , создаваемый всеми зарядами  $Q_j$  системы, кроме заряда  $Q_i$ , в точке, где находится последний. Теперь формулу (1.47) можно записать так:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i. \quad (1.48)$$

Если заряд распределен непрерывно по пространству с объемной плотностью  $\rho(\vec{r})$ , то сумму (1.48) следует заменить объемным интегралом:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi(\vec{r}) dQ = \frac{1}{2} \int_V \varphi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV. \quad (1.49)$$

## 1.10. Электрическое поле точечного заряда

Для математического описания электрического поля, создаваемого одним точечным зарядом  $Q$ , удобно построить прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало оказалось в точке, где находится этот заряд (рис. 1.8). В таком случае формула (1.10) дает следующее выражение для вектора напряженности электрического поля в произвольной точке пространства  $P$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (1.50)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки  $P$ ;  $r$  – его модуль, т.е. расстояние от заряда  $Q$  до точки  $P$ .

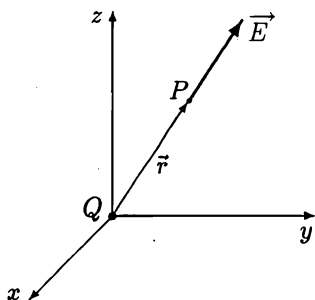


Рис. 1.8. Напряженность поля точечного заряда

Вектор  $\vec{E}$  в любой точке пространства направлен вдоль прямой, которая соединяет эту точку с зарядом  $Q$ . Поэтому силовыми линиями электрического поля точечного заряда  $Q$  являются прямые, проходящие через точку, где расположен этот заряд (рис. 1.9).

Модуль  $E$  вектора  $\vec{E}$  в точке  $P$  обратно пропорционален квадрату расстояния  $r$  от заряда  $Q$  до этой точки:

$$E(r) = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.51)$$

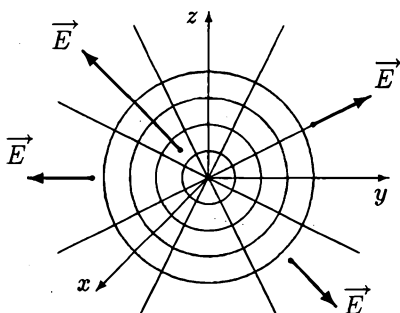


Рис. 1.9. Поле точечного заряда

Потенциал  $\varphi(P)$  электрического поля в точке  $P$ , обратно пропорционален расстоянию  $r$  от заряда  $Q$  до этой точки:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.52)$$

Так как потенциал в данном случае зависит только от расстояния  $r$ , он будет принимать одно и то же значение во всех точках, равноудаленных от заряда  $Q$ . Другими словами, эквипотенциальными поверхностями будут сферы различных радиусов  $r$  с центрами в точке  $O$ , где находится заряд  $Q$  (рис. 1.9).

### 1.11. Поток вектора

Пусть в пространстве имеются векторное поле  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ . Построим некоторую поверхность  $S$  (рис. 1.10). Отметим на ней произвольную точку  $P$  и "вырежем" вокруг нее бесконечно малый элемент этой поверхности, площадь которого равна  $dS$ . Построим единичный вектор  $\vec{n}$ , перпендикулярный к рассматриваемому элементу поверхности, и введем вектор

$$\vec{dS} = \vec{n} dS. \quad (1.53)$$

Вектор  $\vec{n}$  называется *единичной нормалью* к поверхности в точке  $P$ , а вектор  $\vec{dS}$  — *векторным элементом* поверхности.

Скалярное произведение вектора  $\vec{E}$ , определенного в точке  $P$  элемента поверхности  $dS$ , на вектор  $\vec{dS}$  называется *поток*ом вектора  $\vec{E}$  через этот элемент поверхности и обозначается так:

$$d\Phi_E = \vec{E} \vec{dS} = E dS \cos \theta, \quad (1.54)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$ . Из этого определения следует, что поток  $d\Phi_E$  зависит от ориентации элемента поверхности в векторном поле  $\vec{E}$ . Рассмотрим частные случаи, когда векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{dS}$ : 1) параллельны, 2) ортогональны и 3) антипараллельны (рис. 1.11). В первом случае поток  $d\Phi_{E_1} = E_1 dS_1$ , во втором  $d\Phi_{E_2} = 0$  и в третьем  $d\Phi_{E_3} = -E_3 dS_3$ .

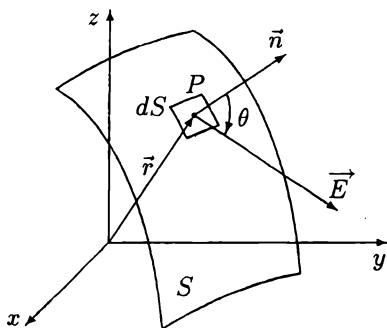


Рис. 1.10. К определению потока вектора  $\vec{E}$

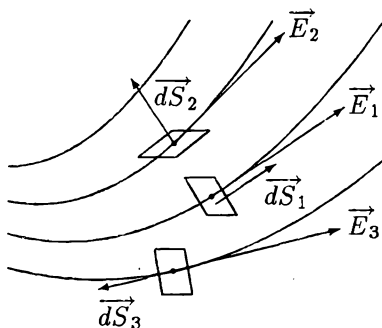


Рис. 1.11. Поток вектора  $\vec{E}$  зависит от ориентации элемента поверхности

Разделим поверхность  $S$  на бесконечно малые части. Суммируя потоки вектора  $\vec{E}$  через эти элементарные части, придем к поверхностному интегралу

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS, \quad (1.55)$$

который называется *поток* вектора  $\vec{E}$  через поверхность  $S$ . Поток — алгебраическая величина, знак которой зависит от выбора направления вектора нормали  $\vec{n}$ .

Если поверхность интегрирования замкнута и ограничивает некоторый объем, то поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность обозначается так:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (1.56)$$

При этом всегда предполагается, что вектор  $\vec{n}$  направлен наружу. Такой вектор  $\vec{n}$  называется *внешней нормалью* к поверхности  $S$ .

### 1.12. Поток вектора напряженности поля точечного заряда

Напряженность электрического поля точечного заряда  $Q$ , находящегося в начале декартовой системы координат, описывается формулой (1.50):

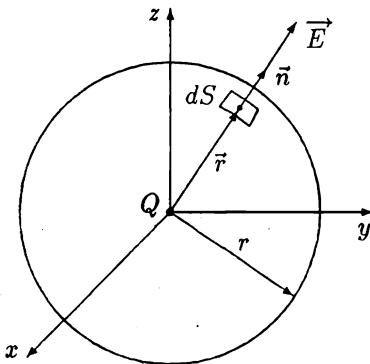


Рис. 1.12. К вычислению потока напряженности поля точечного заряда через сферу

$$\vec{E} = \frac{Q \vec{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3}. \quad (1.57)$$

Вычислим поток этого вектора через поверхность сферы радиуса  $r$  с центром в начале координат (рис. 1.12). Единичный вектор

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

перпендикулярен к поверхности сферы в точке  $P(\vec{r})$  и направлен наружу. При этом векторный элемент поверхности (1.53) принимает вид

$$d\vec{S} = \frac{\vec{r}}{r} dS. \quad (1.58)$$

Подставим выражения (1.57) и (1.58) в формулу (1.56). После несложных преобразований получим

$$\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.59)$$

Можно доказать, что поток вектора напряженности электрического поля точечного заряда  $Q$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$ , охватывающую заряд, также равен  $Q/\epsilon_0$ . Если же заряд  $Q$  находится вне поверхности  $S$ , то поток вектора  $\vec{E}$  через такую поверхность равен нулю. Таким образом, приходим к формуле

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0}, & \text{если заряд находится внутри } S; \\ 0, & \text{если заряд находится вне } S. \end{cases} \quad (1.60)$$

### 1.13. Теорема Гаусса

Рассмотрим произвольную систему зарядов  $Q_i$  и произвольную воображаемую замкнутую поверхность  $S$ . Часть зарядов может оказаться вне этой поверхности, а другая часть – внутри. Вычислим поток вектора  $\vec{E}$  напряженности поля, создаваемого всеми зарядами системы, через поверхность  $S$  в направлении внешней нормали. Согласно принципу суперпозиции полей вектор  $\vec{E}$  равен сумме напряженностей  $\vec{E}_i$  полей точечных зарядов  $Q_i$ . Поэтому поток вектора  $\vec{E}$  можно представить в виде суммы:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left( \sum_i \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}.$$

На основании формулы (1.60) можно утверждать, что из всех интегралов, стоящих под знаком суммы в этом выражении, не равны нулю только те, для которых соответствующий заряд  $Q_i$  расположен внутри  $S$ . Каждый из этих интегралов равен  $Q_i/\epsilon_0$ . Заменяя не равные нулю интегралы на  $Q_i/\epsilon_0$ , приходим к *теореме Гаусса*

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i. \quad (1.61)$$

Согласно этой теореме поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность  $S$  в направлении внешней нормали равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ .

В случае, когда заряд распределен в пространстве непрерывно с объемной плотностью  $\rho = \rho(\vec{r})$ , сумма в правой части равенства (1.61) должна быть заменена интегралом (1.40). При этом теорема Гаусса будет иметь вид

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (1.62)$$

где  $V$  – часть пространства, заключенная внутри поверхности  $S$ .

Теорему Гаусса целесообразно применять только тогда, когда известны направления векторов напряженности электрического поля в исследуемой области пространства.

### 1.14. Электрическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

Пусть электрический заряд распределен равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$  по бесконечной плоскости. Так как рассматриваемая система обладает зеркальной симметрией, силовые линии электрического поля должны быть прямыми, перпендикулярными к этой плоскости, а модули векторов  $\vec{E}$  в точках  $P$  и  $P'$ , расположенных на равных расстояниях от плоскости, должны быть равны (рис. 1.13).

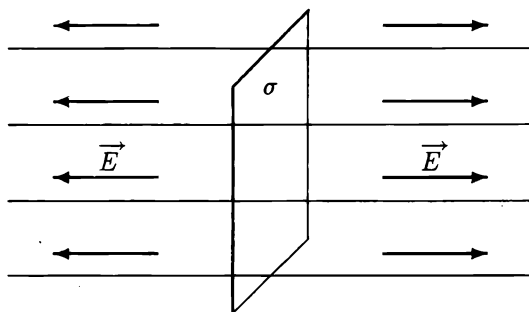


Рис. 1.13. Поле заряженной плоскости

Теперь необходимо найти модуль вектора напряженности электрического поля. Это можно сделать, используя теорему Гаусса. Построим

декартову систему координат так, чтобы начало координат находилось на заряженной плоскости, а ось  $x$  была ей перпендикулярна (рис. 1.14).

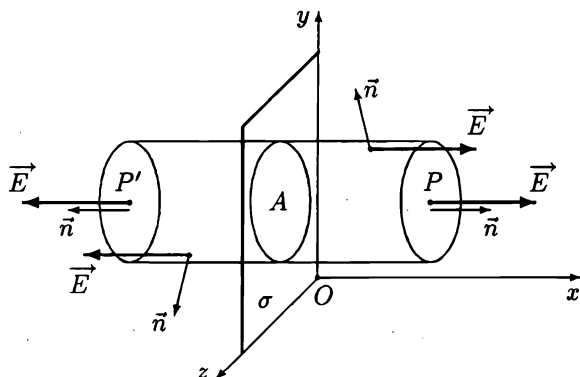


Рис. 1.14. К вычислению напряженности поля, создаваемого заряженной плоскостью

Построим мысленно прямой цилиндр, образующая которого перпендикулярна рассматриваемой заряженной плоскости, а основания расположены симметрично этой плоскости, и вычислим поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность этого цилиндра в направлении внешней нормали. Поток вектора  $\vec{E}$  через боковую поверхность цилиндра равен нулю, так как векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  на ней ортогональны. Потоки через основания равны друг другу в силу зеркальной симметрии системы. Так как заряженная плоскость бесконечна, все точки любой плоскости  $x = \text{const}$  равноправны и векторы  $\vec{E}$  в этих точках одинаковы. Кроме того, нетрудно видеть, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  на основаниях цилиндра коллинеарны. Поэтому поток вектора  $\vec{E}$  через одно из оснований  $S_1$  будет

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv \int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1} E_n dS = E_n \int_{S_1} dS = E_n A,$$

где  $E_n$  – проекция вектора напряженности на вектор  $\vec{n}$  внешней нормали к основаниям цилиндра;  $A$  – площадь оснований. При этом полный поток по всей поверхности цилиндра

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 E_n A.$$



По теореме Гаусса этот поток должен быть равен заряду внутри цилиндра, деленному на  $\epsilon_0$ . Этот заряд находится на части плоскости площадью  $A$ , вырезаемой цилиндром, и равен  $\sigma A$ . Применяя теорему Гаусса, получаем равенство

$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.63)$$

Вектор напряженности  $\vec{E}$  электрического поля имеет вид

$$\vec{E} = E_x \vec{i},$$

а его первая компонента

$$E_x = \begin{cases} E_n & \text{при } x > 0, \\ -E_n & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

При этом

$$E_y = E_z = 0.$$

В силу соотношений (1.23) будем иметь уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

из которых следует, что

$$\varphi = -E_x x + \text{const}.$$

Как видно из этой формулы, потенциал электрического поля в данном случае зависит только от  $x$ . Поэтому эквипотенциальными поверхностями поля, создаваемого заряженной плоскостью, являются плоскости, параллельные этой плоскости, т.е. плоскости, к которым координатная ось  $x$  перпендикулярна.

### 1.15. Электрическое поле заряженной сферы

Найдем напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого зарядом  $Q$ , равномерно распределенным по поверхности сферы. Так как заряд распределен сферически симметрично, создаваемое им поле также будет сферически симметричным. Построим декартову систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром  $O$  сферы (рис. 1.15).

В такой системе координат сферически симметричное векторное поле  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$  описывается формулой

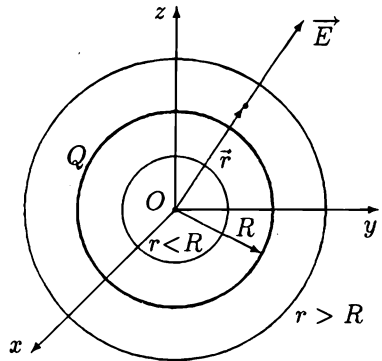
$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.64)$$

где  $E(r)$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на радиус-вектор  $\vec{r}$ . Согласно этой формуле вектор напряженности электрического поля в любой точке  $P(\vec{r})$  коллинеарен радиус-вектору  $\vec{r}$ , а его модуль зависит только от расстояния  $r$  до центра  $O$ . Из формулы (1.64) следует также, что силовые линии поля есть прямые, проходящие через начало координат. При этом эквипотенциальные поверхности являются сферами с центром в начале координат, а зависимость потенциала от координат точки  $P$  будет сферически симметричной функцией вида

$$\varphi = \varphi(r),$$

т.е. потенциал будет зависеть только от модуля  $r$  радиус-вектора. Подстановка этой функции в формулу (1.22) приводит к выражению (1.64), в котором

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (1.65)$$



*Рис. 1.15. К вычислению напряженности поля заряженной сферы*

Формула (1.64) определяет направление вектора  $\vec{E}$ . Проекцию  $E(r)$  этого вектора на радиальное направление можно найти при помощи теоремы Гаусса. Для этого следует вычислить поток  $\Phi_E$  вектора  $\vec{E}$  через поверхность  $S$  сферы произвольного радиуса  $r$ , центр которой совпадает с центром  $O$  заряженной сферы. При этом радиус  $r$  может как меньше радиуса  $R$  заряженной сферы, так и больше его (рис. 1.15).

Векторный элемент поверхности сферы описывается выражением (1.58) Подстановка этого выражения и выражения (1.64) в формулу (1.56) приводит к следующему результату:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E(r) dS = E(r) \oint_S dS = E(r) 4\pi r^2.$$

Применим теорему Гаусса. Если радиус  $r$  сферы  $S$  меньше радиуса  $R$  заряженной сферы, то заряд внутри сферы  $S$  будет равен нулю. Если же радиус  $r$  сферы  $S$  больше радиуса  $R$ , то вся заряженная сфера окажется внутри сферы  $S$ . Таким образом, теорема Гаусса (1.61) приводит к равенству

$$E(r) 4 \pi r^2 = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R, \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Из этого равенства вытекает зависимость

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R, \\ \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (1.66)$$

График этой зависимости для случая, когда  $Q > 0$ , показан на рис. 1.16.

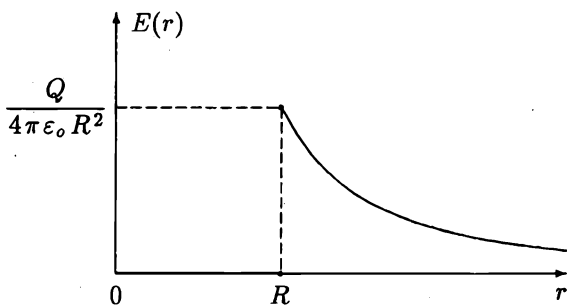


Рис. 1.16. Зависимость напряженности поля от расстояния  $r$

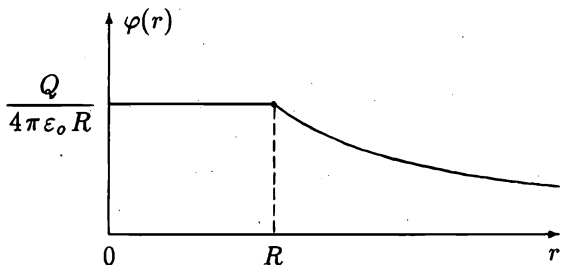


Рис. 1.17. Зависимость потенциала от расстояния  $r$

Нетрудно проверить, что непрерывная функция  $\varphi = \varphi(r)$ , подстановка которой в формулу (1.65) приводит к найденной зависимости  $E = E(r)$ , такова

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{при } r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (1.67)$$

График функции (1.67) изображен на рис. 1.17.

Полученные зависимости позволяют утверждать, что электрическое поле внутри равномерно по поверхности заряженной сферы отсутствует, а вне этой сферы электрическое поле такое же, как поле точечного заряда.

## 1.16. Основные уравнения электростатики

Постоянное электрическое поле может быть описано посредством векторного поля  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$  или скалярного поля  $\varphi = \varphi(\vec{r})$ . Эти функции можно найти при помощи двух основных законов электростатики – закона Кулона и принципа суперпозиции. Так, например, напряженность электрического поля  $\vec{E}$  в произвольной точке пространства можно вычислить по формулам (1.10) и (1.11):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}), \quad \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{Q_i \vec{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3}, \quad (1.68)$$

которые выражают собой эти законы.

Закон Кулона и принцип суперпозиции приводят к уравнениям (1.19) и (1.20) для потенциала  $\varphi$  электрического поля

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}), \quad \varphi_i(\vec{r}) = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}, \quad (1.69)$$

которые позволяют найти потенциал поля в произвольной точке пространства. В тех случаях, когда электрические заряды распределены непрерывно в пространстве, на поверхности или вдоль линии, вместо суммирования в принципе суперпозиции следует производить интегрирование.

Из закона Кулона и принципа суперпозиции вытекают интегральные уравнения (1.37) и (1.62), т.е. теорема о циркуляции вектора напряженности электрического поля и теорема Гаусса:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0, \quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (1.70)$$

которым должно удовлетворять векторное поле  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ , описывающее постоянное электрическое поле.

Интегральным уравнениям (1.70) соответствуют два дифференциальных уравнения для постоянного электрического поля  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.71)$$

где символ  $\text{div } \vec{E}$  обозначает сумму производных от проекций  $E_x, E_y, E_z$  вектора напряженности по координатам:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.72)$$

Это выражение называют *дивергенцией* вектора  $\vec{E}$ .

Уравнения (1.71) образуют систему, которая полностью определяет постоянное электрическое поле в вакууме. Это означает, что для заданной функции  $\rho = \rho(\vec{r})$ , описывающей распределение зарядов в пространстве, из уравнений (1.71) можно найти напряженность  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$  электрического поля, создаваемого этими зарядами. Это можно сделать следующим образом. В силу тождества (1.25) векторная функция (1.22)

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r})$$

является решением первого из уравнений (1.71). Подставив это выражение во второе уравнение, приходим к уравнению для потенциала  $\varphi = \varphi(\vec{r})$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.73)$$

где символическое выражение

$$\nabla^2 \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называют *оператором Лапласа*, а уравнение (1.73) – *уравнением Пуассона*. Если некоторая часть пространства свободна от зарядов ( $\rho = 0$ ), то уравнение (1.73) переходит в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Нахождение из уравнений Пуассона или Лапласа функции  $\varphi = \varphi(\vec{r})$ , которая описывает распределение потенциала в пространстве, является одной из основных задач электростатики.

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ  
(продолжение)

1.17. Электрический диполь

Два равных по величине и противоположных по знаку заряда  $+Q$  и  $-Q$  образуют электрический диполь (рис. 1.18). Построим прямоугольную декартову систему координат таким образом, чтобы заряд  $-Q$  находился в начале координат, а заряд  $Q$  — на оси  $z$ . Пусть  $\vec{l}$  есть вектор, соединяющий заряды  $-Q$  и  $Q$ .

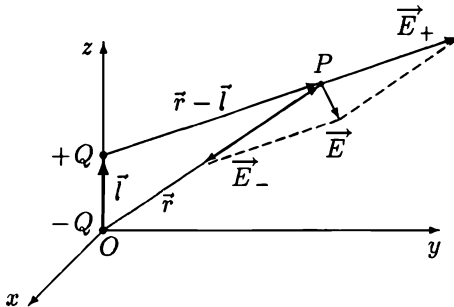


Рис. 1.18. Электрический диполь

По закону Кулона потенциал  $\varphi_-$  и напряженность  $\vec{E}_-$  поля, создаваемого зарядом  $-Q$ , в произвольной точке пространства  $P(\vec{r})$  будут

$$\varphi_-(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \vec{E}_-(\vec{r}) = -\frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Аналогично потенциал  $\varphi_+$  и напряженность  $\vec{E}_+$  поля, создаваемого зарядом  $Q$ , в точке  $P(\vec{r})$  будут

$$\varphi_+(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{l}|}, \quad \vec{E}_+(\vec{r}) = \frac{Q(\vec{r} - \vec{l})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{l}|^3}.$$

Согласно принципу суперпозиции потенциал  $\varphi$  и напряженность  $\vec{E}$  поля, создаваемого двумя зарядами, будут

$$\varphi = \varphi_- + \varphi_+, \quad \vec{E} = \vec{E}_- + \vec{E}_+.$$

Таким образом, получим следующие выражения для потенциала и напряженности поля, создаваемого диполем, в точке  $P(\vec{r})$ :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{l}|} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.74)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q(\vec{r}-\vec{l})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{l}|^3} - \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.75)$$

Силовые линии электрического поля, создаваемого зарядами  $-Q$  и  $+Q$ , показаны на рис. 1.19. Уравнения этих линий были получены в результате решения системы дифференциальных уравнения (1.38).

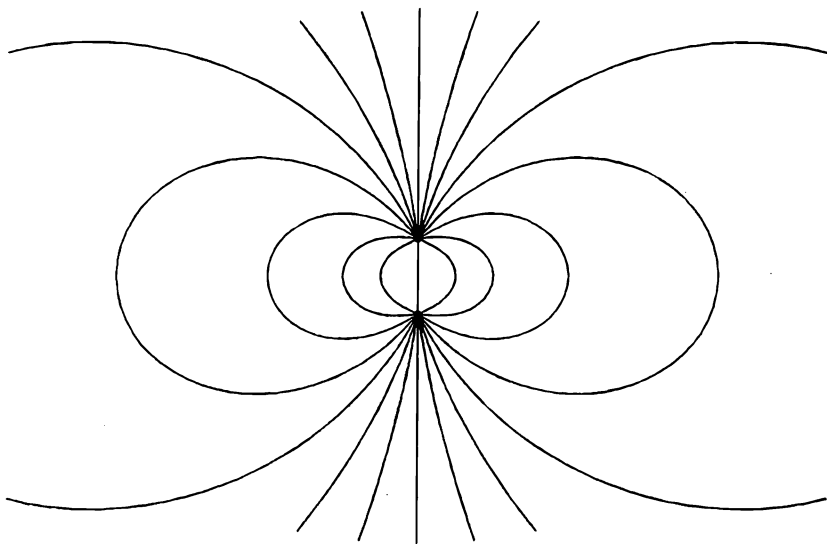


Рис. 1.19. Силовые линии электрического поля, создаваемого двумя точечными зарядами  $Q$  и  $-Q$

Формулы (1.74) и (1.75) принимают более простой вид, когда расстояние  $l$  между зарядами  $-Q$  и  $+Q$  много меньше расстояния  $r$  от диполя до точки  $P$ , в которой исследуется создаваемое им поле ( $l \ll r$ ). При этом условии диполь называется *точечным*. В этом случае можно положить

$$(\vec{r}-\vec{l})^2 = r^2 - 2\vec{r}\vec{l} + l^2 \simeq r^2 - 2\vec{r}\vec{l},$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{l}|} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\vec{r}\vec{l}}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}\vec{l}}{r^2}\right). \quad (1.76)$$



После подстановки последнего выражения в формулу (1.68) она принимает вид

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \vec{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3}, \quad (1.77)$$

где вектор

$$\vec{p} = Q \vec{l} \quad (1.78)$$

– *электрический момент* диполя.

**З а д а ч а 1.** Используя формулы (1.22) и (1.77), доказать, что напряженность поля точечного диполя

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \left( \frac{3 \vec{r} (\vec{p} \vec{r})}{r^2} - \vec{p} \right). \quad (1.79)$$

**З а д а ч а 2.** Найти проекции  $E_x$  и  $E_y$  вектора (1.79) на координатные оси  $x$  и  $y$ . Подставить найденные выражения в уравнения (1.38) и решить их. Доказать, что уравнения силовых линий электрического поля, создаваемого точечным диполем, в полярных координатах  $r$  и  $\theta$  имеют вид

$$r = A \cos^2 \theta,$$

где  $A$  – положительная постоянная.

## 1.18. Электрическое поле системы зарядов на больших расстояниях

Потенциал электрического поля, создаваемого системой зарядов  $Q_i$  в точке  $P(\vec{r})$ , согласно закону Кулона и принципу суперпозиции будет

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4 \pi \epsilon_0 R_i}, \quad (1.80)$$

где  $R_i = |\vec{r} - \vec{r}_i|$ ,  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор заряда  $Q_i$ .

Для точек пространства, удаленных на большие расстояния от системы, выполняется условие  $r_i \ll r$ . При этом условии по аналогии с формулой (1.76) можно записать приближенное равенство

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r} \vec{r}_i}{r^2} \right).$$

Преобразуем при помощи этой формулы выражение (1.80). Найдем, что потенциал электрического поля произвольной системы зарядов на больших расстояниях от этой системы имеет вид

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \vec{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3}, \quad (1.81)$$

где

$$Q = \sum_i Q_i$$

– полный заряд системы, а вектор

$$\vec{p} = \sum_i Q_i \vec{r}_i \quad (1.82)$$

есть *электрический дипольный момент* системы зарядов.

Если полный заряд  $Q$  системы не равен нулю, то первое слагаемое в формуле (1.81) будет больше второго. Это означает, что на больших расстояниях электрическое поле любого заряженного тела подобно полю точечного заряда. Если же полный заряд системы равен нулю, а электрический дипольный момент  $\vec{p}$  не равен нулю, то из формулы (1.81) следует, что в этом случае поле на больших расстояниях от системы зарядов подобно электрическому полю точечного диполя.

### 1.19. Электрическое поле сферически симметрично распределенного заряда

Пусть объемная плотность заряда  $\rho$  в произвольной точке пространства  $P(\vec{r})$  является функцией расстояния  $r$  от этой точки до точки  $O$ , называемой центром:

$$\rho = \rho(r). \quad (1.83)$$

Это означает, что заряд распределен в пространстве сферически симметрично относительно центра  $O$ .

Построим декартову систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром  $O$  распределения заряда. Тогда расстояние  $r$  будет связано с декартовыми координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  точки  $P$  соотношением

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Вследствие сферической симметрии распределения заряда вектор  $\vec{E}$  напряженности электрического поля в любой точке  $P(\vec{r})$  будет коллинеарен радиус-вектору  $\vec{r}$ , а его модуль будет зависеть только от расстояния

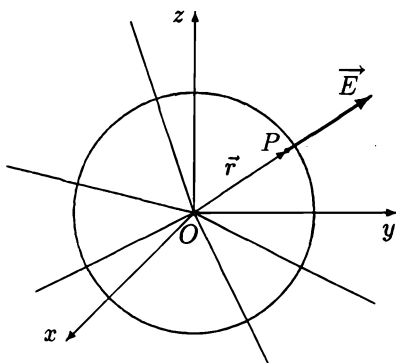


Рис. 1.20. Электрическое поле сферически симметрично распределенного заряда

$r$  до центра  $O$  (рис. 1.20). Вектор с указанными свойствами описывается формулой

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.84)$$

где  $E(r)$  есть проекция вектора  $\vec{E}$  на вектор  $\vec{r}$ . Из формулы (1.84) следует, что силовые линии есть прямые, проходящие через начало координат, а эквипотенциальные поверхности являются сферами с центром в начале координат. На рис. 1.20 показаны несколько силовых линий и одна из эквипотенциальных поверхностей. При этом потенциал должен зависеть только от расстояния  $r$  от центра  $O$  до точки  $P$ :

$$\varphi = \varphi(r). \quad (1.85)$$

Формула (1.84) определяет направление вектора  $\vec{E}$ . Проекцию  $E(r)$  этого вектора на радиальное направление можно найти при помощи теоремы Гаусса. Для этого следует вычислить поток  $\Phi_E$  вектора  $\vec{E}$  через поверхность  $S$  сферы произвольного радиуса  $r$ , центр которой совпадает с центром симметрии  $O$ , и заряд  $Q$ , находящийся внутри этой сферы. Поток вектора (1.84) найдем при помощи выражения (1.58) для векторного элемента поверхности сферы:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oint_S E(r) dS = E(r) \oint_S dS = E(r) 4\pi r^2.$$

Чтобы найти заряд внутри сферы  $S$ , выделим внутри нее тонкий сферический слой, внутренний радиус которого равен  $r_1$ , а внешний —  $r_1 + dr_1$ . Объем  $dV$  сферического слоя равен произведению площади его поверхности на толщину:  $dV = 4\pi r_1^2 dr_1$ . Поэтому заряд внутри слоя будет  $dQ = \rho(r_1) 4\pi r_1^2 dr_1$ . Заряд  $Q$  внутри сферы радиуса  $r$  равен сумме зарядов  $dQ$  слоев, из которых она состоит, т.е.

$$Q = \int_V \rho dV = \int_0^r \rho(r_1) 4\pi r_1^2 dr_1.$$

Применяя теорему Гаусса  $\Phi_E = Q/\epsilon_0$ , приходим к формуле

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r_1) r_1^2 dr_1 \quad (1.86)$$

для напряженности  $E(r)$  электрического поля сферически симметрично распределенного заряда.

**Задача 1.** Используя равенство (1.22), доказать, что потенциал электрического поля, создаваемого сферически симметрично распределенным зарядом, связан с проекцией вектора напряженности на радиальное направление соотношениями

$$E(r) = - \frac{d\varphi(r)}{dr} \quad (1.87)$$

и

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} E(r_1) dr_1. \quad (1.88)$$

**Задача 2.** При помощи формул (1.86) и (1.88) найти напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого зарядом  $Q$ , равномерно распределенным внутри сферы радиуса  $R$ . Найти энергию заряженного шара по формуле (1.49).

**Задача 3.** Найти напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого зарядом, равномерно распределенным с плотностью  $\sigma$  по поверхности бесконечного цилиндра радиуса  $R$ .

## 1.20. Теорема Остроградского – Гаусса

Пусть задано векторное поле  $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ . Соответствующая этому полю скалярная величина, обозначаемая  $\operatorname{div} \vec{a}$  и определяемая в декартовых прямоугольных координатах выражением

$$\operatorname{div} \vec{a} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (1.89)$$

называется *дивергенцией* вектора  $\vec{a}$ .

*Теорема Остроградского – Гаусса.* Поток вектора  $\vec{a}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  в направлении внешней нормали равен интегралу по объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью, от дивергенции данного вектора:

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV. \quad (1.90)$$

## 1.21. Вывод уравнений электростатики в дифференциальной форме

Из закона Кулона и принципа суперпозиции вытекают два закона электростатики, которым должен удовлетворять вектор  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$  напряженности постоянного электрического поля: *теорема о циркуляции* (1.37) и *теорема Гаусса* (1.62). Этим интегральным уравнениям соответствуют два дифференциальных уравнения. Первым из этих уравнений является уравнение (1.26)

$$\text{rot } \vec{E} = 0,$$

которое эквивалентно теореме о циркуляции напряженности постоянно-го электрического поля (1.37). Общим решением этого уравнения будет консервативное векторное поле

$$\vec{E}(\vec{r}) = - \text{grad } \varphi(\vec{r})$$

при условии, что справедливо тождество (1.25)

$$\text{rot grad } f \equiv 0,$$

где  $f = f(\vec{r})$  есть произвольное скалярное поле. Докажем это тождество. По определению (1.12) градиент функции  $f = f(\vec{r})$  есть вектор

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

Ротор этого вектора найдем по формуле (1.24), заменив вектор  $\vec{a}$  на вектор  $\text{grad } f$ , а координаты вектора  $\vec{a}$  на соответствующие координаты вектора  $\text{grad } f$ . Получим

$$\begin{aligned} \text{rot grad } f \equiv [\nabla \text{grad } f] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что это выражение тождественно равно нулю.

Теперь преобразует левую часть равенства (1.62), которое выражает собой теорему Гаусса, при помощи теоремы Остроградского – Гаусса,

т.е. заменим поток вектора  $\vec{E}$  в левой части уравнения (1.62) объемным интегралом от дивергенции этого вектора:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho dV.$$

Два интеграла по произвольному объему  $V$  равны только в том случае, когда равны подынтегральные выражения:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}.$$

Таким образом придем к дифференциальным уравнениям (1.71).

**З а д а ч а.** Найти решение  $\varphi = \varphi(x)$  уравнения Пуассона (1.73) для случая, когда распределение заряда в пространстве описывается функцией

$$\varrho(x) = \frac{\varrho_0 a^3 x}{(a^2 + x^2)^2}.$$

## 1.22. Энергия электрического поля

Энергия взаимодействия зарядов, заключенных в объеме  $V$ , определяется формулой (1.49)

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \varrho dV.$$

Из уравнения Пуассона (1.73) следует, что объемная плотность заряда выражается через потенциал так:

$$\varrho = -\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi. \quad (1.91)$$

С учетом этого выражения можно записать

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varphi \nabla^2 \varphi dV. \quad (1.92)$$

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\varphi \nabla^2 \varphi = \varphi \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \quad (1.93)$$

используя правило дифференцирования произведения функций

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Следуя этому правилу, получаем формулу

$$\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2,$$

которая позволяет привести выражение (1.93) к виду

$$\begin{aligned} \varphi \nabla^2 \varphi &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \\ &= \operatorname{div} (\varphi \operatorname{grad} \varphi) - (\operatorname{grad} \varphi)^2 = - \operatorname{div} (\varphi \vec{E}) - E^2. \end{aligned}$$

Таким образом, получили тождество

$$\varphi \nabla^2 \varphi = - \operatorname{div} (\varphi \vec{E}) - E^2.$$

Преобразуем при помощи этого тождества интеграл (1.92) следующим образом:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \operatorname{div} (\varphi \vec{E}) dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2 dV. \quad (1.94)$$

По теореме Остроградского – Гаусса интеграл от дивергенции преобразуем в интеграл по поверхности  $S$ , которая ограничивает объем  $V$ . Получим

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_S \varphi \vec{E} d\vec{S} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2 dV. \quad (1.95)$$

Пусть поверхность  $S$  является сферой достаточно большого радиуса  $r$  и все заряды рассматриваемой системы находятся внутри этой сферы. Согласно формуле (1.81) потенциал любой системы зарядов на больших расстояниях от нее убывает как  $1/r$  или еще быстрее, если полный заряд системы  $Q$  равен нулю. Пусть  $Q \neq 0$ , тогда

$$\varphi(r) \simeq \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r}.$$

При этом величина вектора напряженности электрического поля

$$E(r) \simeq \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2}.$$

Эти равенства тем точнее, чем больше расстояние  $r$ . Вычислим предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S \varphi \vec{E} \cdot d\vec{S} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = 0.$$

Совершая такой предельный переход в равенстве (1.95), приходим к формуле

$$W = \int w(\vec{r}) dV, \quad (1.96)$$

где интегрирование производится по всему пространству. Согласно этой формуле энергия системы зарядов равна объемному интегралу от функции

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (1.97)$$

Очевидно, что величина

$$dW = w(\vec{r}) dV \quad (1.98)$$

есть энергия, содержащаяся в малом объеме  $dV$ . Возникает вопрос: какой вид материи является носителем этой энергии? Функция (1.97) определяется только напряженностью  $E$  электрического поля. Поэтому логично предположить, что именно электрическое поле, заполняющее объем  $dV$ , обладает энергией (1.98). В этом случае функция  $w(\vec{r})$  есть объемная плотность энергии электрического поля, т.е. энергия поля, заключенная в единичном объеме.

**З а д а ч а.** По формуле (1.96) вычислить энергию электрического поля, создаваемого точечным зарядом  $Q$ . Объяснить полученный результат.



ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

2.1. Полярные и неполярные молекулы

Каждая молекула или атом состоит из положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов, которые движутся в пространстве вокруг ядер. Размеры ядер малы по сравнению с диаметрами электронных орбит. Поэтому их можно считать так же, как и электроны, точечными зарядами. Итак, будем рассматривать молекулу как систему точечных зарядов. Как и любая система зарядов, молекула обладает электрическим дипольным моментом

$$\vec{p} = \sum_i Q_i \vec{r}_i, \quad (2.1)$$

где  $Q_i$  и  $\vec{r}_i$  – заряд и радиус-вектор одной из частиц, входящих в состав молекулы;  $i$  – номер этой частицы. Слагаемые в сумме (2.1) удобно сгруппировать в соответствии со знаками заряженных частиц:

$$\vec{p} = \sum_j Q_j \vec{r}_j - e \sum_k \vec{r}_k, \quad (2.2)$$

где  $Q_j$  и  $\vec{r}_j$  – заряд и радиус-вектор ядра с номером  $j$ ;  $\vec{r}_k$  – радиус-вектор электрона под номером  $k$ .

Если молекула не "потеряла" ни одного из своих электронов и не присоединила к себе электроны от других молекул, то ее полный заряд будет равен нулю, т.е. положительный заряд

$$Q = \sum_j Q_j \quad (2.3)$$

всех ядер в молекуле будет равен абсолютной величине заряда всех электронов. Представим теперь электрический дипольный момент (2.2) молекулы в виде

$$\vec{p} = Q \vec{l}, \quad (2.4)$$

где

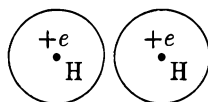
$$\vec{l} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-, \quad (2.5)$$

$$\vec{r}_+ = \frac{1}{Q} \sum_j Q_j \vec{r}_j, \quad \vec{r}_- = \frac{e}{Q} \sum_k \vec{r}_k.$$

Точка, радиус-вектор которой равен  $\vec{r}_+$ , называется центром "тяжести" положительного заряда ядер, а точка, радиус-вектор которой равен  $\vec{r}_-$ , – центром "тяжести" отрицательного заряда электронов. Формула (2.4) совпадает по виду с формулой для электрического момента диполя, т.е. системы из двух зарядов  $Q$  и  $-Q$ . Заметим, что согласно (2.5) вектор  $\vec{l}$  начинается в центре тяжести отрицательного заряда и заканчивается в центре тяжести заряда положительного. Если центры тяжести зарядов разных знаков совпадают, то электрический дипольный момент молекулы равен нулю.

Электрическое поле, создаваемое зарядами, которые не входят в состав рассматриваемой системы, называется *внешним* по отношению к этой системе. Молекула называется *неполярной*, если ее электрический момент в отсутствие внешнего поля равен нулю (рис. 2.1).

Рис. 2.1. Электрический момент молекулы водорода равен нулю, так как эта молекула симметрична



Если неполярную молекулу поместить во внешнее электрическое поле, то под действием этого поля произойдет смещение зарядов. Положительно заряженные ядра атомов сместятся по направлению поля (т.е. по направлению вектора  $\vec{E}$  напряженности этого поля), а отрицательно заряженные электроны – против поля. В результате центры тяжести зарядов разделятся и электрический момент молекулы станет отличным от нуля. Этот процесс называется *поляризацией* молекулы, а молекула, приобретающая электрический момент под действием внешнего поля, называется *поляризованной*.

Существуют молекулы, в которых центры тяжести положительного и отрицательного зарядов не совпадают, даже когда нет внешнего поля. Такие молекулы называются *полярными* (рис. 2.2). Полярная молекула во внешнем поле ведет себя как электрический диполь.



Рис. 2.2. Две модели молекулы соляной кислоты. Отрицательный заряд всех 18 электронов распределен в основном около атома хлора. Молекула  $\text{HCl}$  является полярной

## 2.2. Диполь во внешнем электрическом поле

Рассмотрим, как влияет внешнее электрическое поле на диполь, состоящий из двух зарядов  $+Q$  и  $-Q$ , разделенных расстоянием  $l$  (рис. 2.3). Заряд  $-Q$  находится в произвольной точке пространства, радиус-вектор которой  $\vec{r}$ , а заряд  $+Q$  - в точке, радиус-вектор которой  $\vec{r} + \vec{l}$ . Внешнее поле описывается заданными напряженностью  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$  и потенциалом  $\varphi = \varphi(\vec{r})$ .

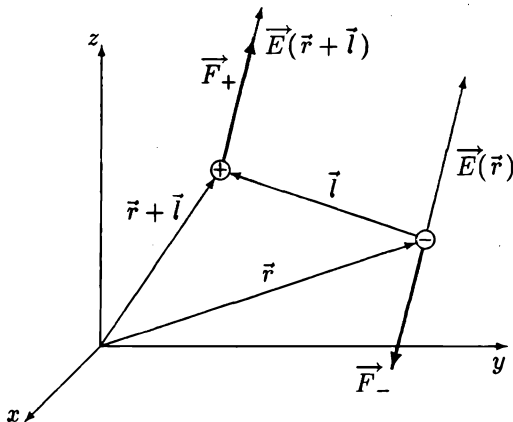


Рис. 2.3. Диполь во внешнем поле

Найдем энергию, которую приобретает диполь, помещенный во внешнее электрическое поле. По определению потенциала энергия заряженной частицы во внешнем поле равна произведению ее заряда на значение потенциала в точке, где эта частица находится. Таким образом, потенциальные энергии зарядов  $+Q$  и  $-Q$  будут

$$U_+ = Q \varphi(\vec{r} + \vec{l}), \quad U_- = -Q \varphi(\vec{r}),$$

а энергия диполя

$$U = U_+ + U_- = Q \left( \varphi(\vec{r} + \vec{l}) - \varphi(\vec{r}) \right). \quad (2.6)$$

Разность потенциалов в этой формуле приближенно равна дифференциалу

$$\varphi(\vec{r} + \vec{l}) - \varphi(\vec{r}) \simeq d\varphi = \text{grad } \varphi(\vec{r}) \vec{l} = -\vec{E}(\vec{r}) \vec{l}. \quad (2.7)$$

Это равенство строго выполняется для однородного поля, а в случае неоднородного поля оно тем точнее, чем меньше длина  $l$ . Подстановка выражения (2.7) в (2.6) приводит к формуле для энергии диполя во

внешнем поле

$$U = -\vec{p} \vec{E}. \quad (2.8)$$

На заряды  $+Q$  и  $-Q$  в электрическом поле действуют силы соответственно

$$\vec{F}_+ = Q \vec{E}(\vec{r} + \vec{l}), \quad \vec{F}_- = -Q \vec{E}(\vec{r}).$$

Поэтому сила, с которой внешнее поле действует на диполь, будет

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = Q \left( \vec{E}(\vec{r} + \vec{l}) - \vec{E}(\vec{r}) \right). \quad (2.9)$$

Из этой формулы следует, что в случае однородного электрического поля сила  $\vec{F}$  равна нулю.

Найдем момент  $\vec{M}$  сил, действующих на диполь в электрическом поле. По определению

$$\begin{aligned} \vec{M} &= [\vec{r} + \vec{l}, \vec{F}_+] + [\vec{r}, \vec{F}_-] = Q [\vec{r} + \vec{l}, \vec{E}(\vec{r} + \vec{l})] - Q [\vec{r}, \vec{E}(\vec{r})] = \\ &= Q [\vec{r}, \vec{E}(\vec{r} + \vec{l})] + Q [\vec{l}, \vec{E}(\vec{r} + \vec{l})] - Q [\vec{r}, \vec{E}(\vec{r})]. \end{aligned}$$

Если внешнее электрическое поле однородно, то первое и третье слагаемые в этой сумме сокращаются и

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]. \quad (2.10)$$

В неоднородном поле это равенство выполняется приближенно, но, тем точнее, чем меньше  $l$ .

Из формулы (2.10) следует, что момент сил, с которыми внешнее поле действует на диполь, равен нулю, когда векторы  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$  коллинеарны, т.е. когда диполь располагается вдоль силовой линии электрического поля. Энергия (2.8) диполя принимает наименьшее значение  $-pE$ , когда его электрический момент  $\vec{p}$  направлен в ту же сторону, что и вектор  $\vec{E}$  напряженности внешнего поля, т.е. такая ориентация диполя во внешнем поле соответствует устойчивому положению равновесия. При любой другой ориентации диполя действующие на него силы  $\vec{F}_+$  и  $\vec{F}_-$  стремятся повернуть его в положение устойчивого равновесия.

### 2.3. Поляризация диэлектриков

Направленное (упорядоченное) движение заряженных частиц называют *электрическим током*. Вещества, в которых присутствуют заряженные частицы, способные перемещаться на значительные расстояния и создавать электрический ток, называют проводниками электрического тока, или просто *проводниками*, а существующие в них подвижные частицы – *носителями тока*, или *свободными зарядами*. Диэлектриками, или изоляторами называют вещества, в которых отсутствуют подвижные заряженные частицы, способные создавать электрический ток. Заряды, входящие в состав нейтральных молекул, из которых состоит диэлектрики, называют *молекулярными*, или *связанными*.

В отсутствие внешнего электрического поля полярные молекулы, составляющие какой-либо диэлектрик, вследствие теплового движения ориентированы беспорядочно, а неполярные молекулы вообще не обладают электрическим моментом. Поэтому сумма электрических дипольных моментов молекул в некотором физически бесконечно малом объеме  $dV$  диэлектрика будет равна нулю:

$$\sum_{dV} \vec{p}_i = 0.$$

Под действием внешнего электрического поля полярные молекулы разворачиваются так, что их дипольные моменты  $\vec{p}_i$  ориентированы преимущественно по полю, несмотря на то, что тепловое движение стремится разупорядочить их ориентацию (рис. 2.4). Неполярные молекулы во внешнем поле поляризуются, т.е. приобретают дипольный момент (рис. 2.5). Таким образом, из каких бы молекул не состоял диэлектрик, если его поместить в электрическое поле, суммарный электрический момент всех молекул в любом малом объеме  $dV$  уже не будет равен нулю. В таком случае диэлектрик называют *поляризованным*.

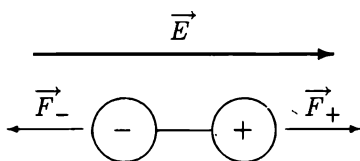


Рис. 2.4. Полярная молекула ориентируется по полю

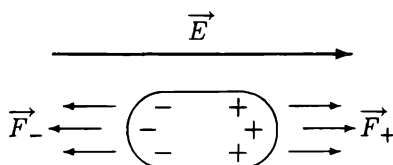


Рис. 2.5. Электрическое поле деформирует молекулу неполярного диэлектрика

Состояние поляризованного диэлектрика характеризуется вектором

$$\vec{P} = \frac{1}{dV} \sum_{dV} \vec{p}_i, \quad (2.11)$$

который называется *поляризованностью*. Физический смысл этого вектора:  $\vec{P}$  – дипольный момент единицы объема поляризованного диэлектрика. Поляризованность различных областей диэлектрика может быть не одинаковой, т.е.  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$ . Поляризация диэлектрика называется *однородной*, если вектор  $\vec{P}$  во всех точках диэлектрика один и тот же. Поляризацию достаточно малого объема диэлектрика всегда можно считать однородной.

## 2.4. Теорема Гаусса для поляризованности \*

Выделим внутри поляризованного диэлектрика физически бесконечно малый цилиндрический объем, образующая которого параллельна вектору поляризованности  $\vec{P}$  (рис. 2.6, а). Основаниями цилиндра являются две параллельные плоскости. Площади оснований цилиндра равны  $dS$ , а его длина –  $\delta$ . Рассмотрим молекулы, находящиеся в этом объеме. На рис. 2.6, а условно изображены семь таких молекул. В действительности физически бесконечно малый объем может содержать в себе очень большое число молекул. Вычислим их суммарный электрический момент.

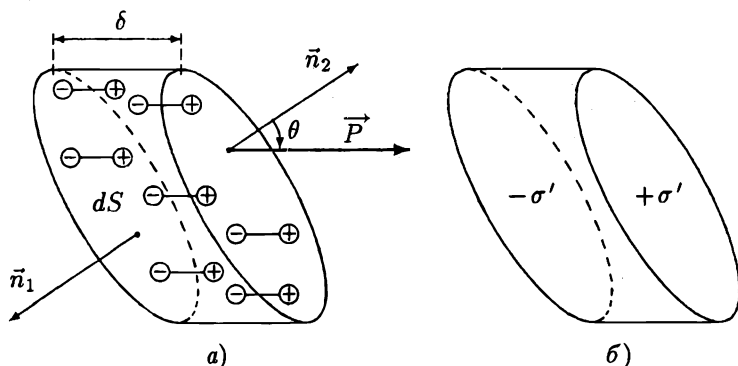


Рис. 2.6. Вырезанный из поляризованного диэлектрика цилиндр подобен двум заряженным плоскостям

Внутри цилиндра положительные и отрицательные молекулярные заряды нейтрализуют друг друга. Поэтому объемная плотность связанных зарядов в однородно поляризованном диэлектрике в среднем равна нулю.

Нескомпенсированными остаются только связанные заряды на основаниях цилиндра (рис. 2.6, б). Их *поверхностные плотности* обозначим  $-\sigma'$  и  $+\sigma'$ . Центры тяжести этих зарядов находятся на соответствующих основаниях и разделены расстоянием  $\delta$ . Таким образом, суммарный электрический момент цилиндра равен произведению заряда  $\sigma' dS$  на расстояние  $\delta$ :

$$\left| \sum_{dV} \vec{p}_i \right| = \sigma' dS \delta.$$

Объем цилиндра равен произведению площади основания  $dS$  на высоту  $\delta \cos \theta$ :  $dV = dS \delta \cos \theta$ , где  $\theta$  – угол между нормалью  $\vec{n}$  к одному из оснований и вектором  $\vec{P}$ . Согласно определению (2.11) суммарный электрический момент молекул, заключенных в некотором объеме, равен произведению поляризованности диэлектрика на величину этого объема:

$$\sigma' dS \delta = P dS \delta \cos \theta.$$

Это равенство удобно записать в виде

$$\sigma' = \vec{P} \vec{n}. \quad (2.12)$$

Полученная формула устанавливает связь между вектором поляризованности диэлектрика и поверхностной плотностью связанных зарядов, находящихся на одной из сторон небольшой воображаемой поверхности  $dS$ , а именно на той ее стороне, по отношению к которой нормаль  $\vec{n}$  является внешней.

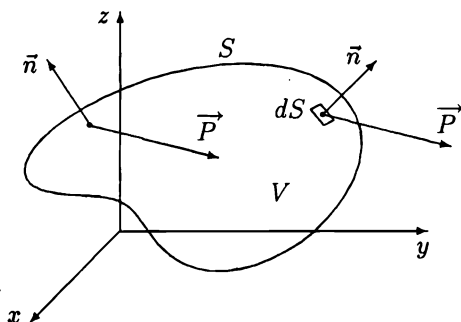


Рис. 2.7. К выводу теоремы Гаусса для поляризованности

Построим внутри диэлектрика произвольную замкнутую поверхность  $S$ , которая ограничивает некоторый объем  $V$  (рис. 2.7). Поверхностный связанный заряд на элементе поверхности площадью  $dS$  равен  $\sigma' dS$ .

Согласно формуле (2.12) полный связанный заряд, распределенный на поверхности  $S$  и принадлежащий молекулам, которые находятся у ее внутренней стороны, выражается интегралом

$$Q'_S = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}, \quad (2.13)$$

т.е. равен потоку вектора поляризованности через поверхность  $S$  в направлении внешней нормали.

Поверхностный связанный заряд  $Q'_S$  и суммарный заряд  $Q'_V$  молекул в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ , равны нулю при однородной поляризации диэлектрика. Если же диэлектрик поляризован неоднородно, объемный связанный заряд  $Q'_V$  будет отличен от нуля, а его распределение в пространстве будет описываться функцией  $\rho' = \rho'(\vec{r})$ , которая называется *объемной плотностью связанных зарядов*. При этом объемный связанный заряд будет

$$Q'_V = \int_V \rho' dV. \quad (2.14)$$

Любая часть диэлектрика в целом нейтральна. Поэтому поверхностный связанный заряд  $Q'_S$  должен быть равен по величине и противоположен по знаку объемному связанному заряду  $Q'_V$ :

$$Q'_S = -Q'_V. \quad (2.15)$$

Подставим в это равенство интегралы (2.13) и (2.14). Получим:

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \int_V \rho' dV. \quad (2.16)$$

Это уравнение можно назвать теоремой Гаусса для вектора поляризованности. Согласно (2.16) поток вектора  $\vec{P}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  в направлении внешней нормали равен с обратным знаком объемному связанному заряду внутри этой поверхности.

Преобразуем по теореме Остроградского – Гаусса поверхностный интеграл в равенстве (2.16) в интеграл по объему от дивергенции вектора  $\vec{P}$  поляризованности:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{P} dV = - \int_V \rho' dV.$$



Два интеграла по произвольному объему равны друг другу тогда и только тогда, когда равны подынтегральные выражения:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'}. \quad (2.17)$$

Из этого уравнения следует, что если диэлектрик поляризован однородно, т.е.  $\vec{P} = \text{const}$ , то объемная плотность связанных зарядов равна нулю.

## 2.5. Электрическая индукция

Напомним, что связанными называют заряды, входящие в состав нейтральных молекул. Все остальные заряды следует называть свободными. Рассмотрим несколько примеров. Пусть от одной из нейтральных молекул отделились один или несколько электронов и молекула превратилась в положительно заряженный ион. В этом случае избыточный положительный заряд иона следует назвать свободным. В металле много "свободных" электронов. Так называют электроны, оторвавшиеся от атомов металла и почти беспрепятственно движущиеся в пространстве между положительными ионами. Эти электроны называют свободными еще и потому, что они не входят в состав нейтральных атомов или молекул. Положительные ионы в металле также являются носителями свободных зарядов. То же самое можно сказать об отрицательных ионах: избыточный электронный заряд иона является свободным. Какой смысл имеет разделение зарядов на свободные и связанные? Поляризация диэлектрика обусловлена действием на его молекулы внешнего электрического поля. Но поляризованный диэлектрик сам создает электрическое поле, которое так же, как и внешнее поле, действует на его молекулы. Внешнее поле создается свободными зарядами, а собственное поле диэлектрика – связанными.

Объемную плотность свободных зарядов будем обозначать  $\rho^*$ . В результате разделения зарядов на свободные и связанные объемную плотность заряда  $\rho$  следует считать равной сумме плотностей этих зарядов:

$$\rho = \rho^* + \rho'. \quad (2.18)$$

При этом теорему Гаусса (1.62) можно записать так:

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho^* dV + \int_V \rho' dV.$$

При помощи теоремы (2.16) преобразуем это равенство к виду

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \, d\vec{S} + \oint_S \vec{P} \, d\vec{S} = \int_V \varrho^* \, dV. \quad (2.19)$$

Вектор

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.20)$$

называют *электрической индукцией*, или *электрическим смещением*. Используя это определение, равенство (2.19) можно записать так:

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \, d\vec{S} = \int_V \varrho^* \, dV.} \quad (2.21)$$

Полученное равенство называют теоремой Гаусса для вектора электрической индукции. Согласно этому равенству поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность  $S$  в направлении внешней нормали равен свободному заряду, заключенному внутри этой поверхности. Если свободные заряды принадлежат небольшому числу материальных точек, то вместо интеграла в правой части равенства (2.21) следует писать алгебраическую сумму свободных зарядов, заключенных внутри поверхности  $S$ :

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \, d\vec{S} = \sum_i Q_i^*.} \quad (2.22)$$

В силу теоремы Остроградского – Гаусса поток вектора электрической индукции через поверхность  $S$  равен интегралу от дивергенции вектора  $\vec{D}$  по объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью. Поэтому равенство (2.21) можно записать так:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} \, dV = \int_V \varrho^* \, dV.$$

Из этого равенства нетрудно получить дифференциальное уравнение для вектора электрической индукции

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \varrho^*.} \quad (2.23)$$

Во многих задачах электростатики распределение свободных зарядов считается известным. При этом в уравнениях (2.21) – (2.23) неизвестной является векторная функция  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{r})$ . Уравнения (2.21) – (2.23) есть скалярные уравнения. Поэтому в общем случае с их помощью невозможно найти векторное поле  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{r})$ , так как вектор характеризуется тремя величинами, например, тремя проекциями на оси координат. Однако в тех случаях, когда распределение зарядов обладает какой-либо симметрией и можно заранее определить семейство силовых линий электрического поля, т.е. направление вектора  $\vec{D}$ , его модуль может быть найден при помощи одного из этих уравнений.

## 2.6. Диэлектрическая восприимчивость и проницаемость

Напряженность  $\vec{E}$  определяет силы, деформирующие молекулы в электрическом поле. Чем больше напряженность электрического поля, тем сильнее поляризуется диэлектрик и тем больше его поляризованность  $\vec{P}$ . Для многих (но далеко не для всех) диэлектриков вектор поляризованности коллинеарен вектору напряженности электрического поля в диэлектрике:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}), \quad (2.24)$$

где скалярная величина  $\chi_e$  называется *диэлектрической восприимчивостью* вещества. Диэлектрик называют однородным, если диэлектрическая восприимчивость во всех его точках одинакова.

Подставив выражение (2.24) в соотношение (2.20), получим равенство

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (2.25)$$

где величина

$$\epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \quad (2.26)$$

называется *диэлектрической проницаемостью* вещества. Величина

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e \quad (2.27)$$

называется *относительной диэлектрической проницаемостью*.

Величины  $\chi_e$ ,  $\epsilon$  и  $\epsilon_r$  являются характеристиками вещества, а уравнения (2.24) и (2.25) описывают влияние электрического поля на поляризацию диэлектрика. Эти уравнения иногда называют *материальными*.

## 2.7. Уравнения электростатики для диэлектриков

Запишем систему уравнений, описывающих электрическое поле в диэлектрике. Эта система составляется из уравнений (1.37) и (2.21):

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0, \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho^* dV. \quad (2.28)$$

Этим интегральным уравнениям соответствуют дифференциальные уравнения

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{D} = \rho^*. \quad (2.29)$$

Уравнения, выражающие собой законы электростатики, следует дополнить материальным уравнением

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

Первое из уравнений (2.29) имеет решение  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ . Исключив вектор  $\vec{D}$  из второго уравнения, приходим к уравнению для потенциала

$$\text{div}(\epsilon \text{grad } \varphi) = -\rho^*. \quad (2.30)$$

Решив это уравнение, по его решению  $\varphi = \varphi(\vec{r})$  нетрудно найти векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ .

В тех случаях, когда заряды распределены в пространстве симметрично, можно заранее предугадать, какими должны быть семейства силовых линий электрического поля. В таких случаях, зная направление вектора  $\vec{D}$  электрической индукции, его модуль  $D$  можно найти по теореме Гаусса (2.21) или из уравнения (2.23). Затем следует найти вектор  $\vec{E}$  и потенциал  $\varphi$ . После этого можно найти вектор поляризованности и плотности связанных зарядов.

## 2.8. Электрическое поле заряженного шара \*

Решим в качестве примера следующую задачу. Шар радиуса  $R$ , изготовленный из диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$ , заряжен равномерно по объему. При этом объемная плотность свободных зарядов равна  $\rho^*$ . Требуется найти: электрическую индукцию  $\vec{D}$ , напряженность поля

$\vec{E}$ , потенциал  $\varphi$ , поляризованность  $\vec{P}$ , объемную  $\rho'$  и поверхностную  $\sigma'$  плотности связанных зарядов.

В данном случае распределение зарядов является сферически симметричным. Следовательно, силовыми линиями электрического поля могут быть только прямые, проходящие через центр шара. Построим прямоугольную декартову систему координат, начало которой совместим с центром шара. При этом вектор электрической индукции в произвольной точке пространства должен иметь вид

$$\vec{D}(\vec{r}) = D(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.31)$$

где  $D = D(r)$  – проекция вектора  $\vec{D}$  на радиус-вектор  $\vec{r}$ . Будем считать для определенности плотность  $\rho^*$  свободных зарядов положительной величиной. Тогда вектор  $\vec{D}$  будет направлен от центра шара, а его проекция  $D$  будет равна его модулю.

Итак, в силу сферической симметрии распределения заряда вектор  $\vec{D}$  в любой точке пространства направлен так же, как ее радиус-вектор  $\vec{r}$ , а его модуль  $D$  зависит только от расстояния  $r$  до центра шара. Поэтому в любой точке сферы  $S$  радиуса  $r$  с центром в начале координат вектор  $\vec{D}$  будет к ней ортогонален, а его модуль будет принимать одно и то же значение  $D(r)$ . При этом поток вектора  $\vec{D}$  через поверхность такой сферы в направлении внешней нормали будет

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = \oint_S D(r) dS = D(r) \oint_S dS = D(r) 4\pi r^2.$$

Вычислим теперь свободный заряд  $Q^*(r)$  внутри сферы  $S$ . Если радиус  $r$  сферы  $S$  меньше радиуса  $R$  шара, то весь ее объем будет равномерно заполнен свободными зарядами. В таком случае

$$Q^*(r) = \rho^* \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{при} \quad r \leq R.$$

Если же радиус сферы  $S$  больше радиуса шара, то он весь окажется внутри этой сферы. Теперь

$$Q^*(r) = \rho^* \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{при} \quad r \geq R.$$

В силу теоремы Гаусса (2.21)

$$\Phi_D = Q^*(r), \quad \text{или} \quad D(r) 4\pi r^2 = Q^*(r).$$

Отсюда найдем, что

$$D(r) = \begin{cases} \frac{\varrho^* r}{3} & \text{при } r \leq R, \\ \frac{\varrho^* R^3}{3 r^2} & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (2.32)$$

По формулам (2.25) и (2.31) найдем вектор напряженности электрического поля:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.33)$$

где

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\varrho^* r}{3 \varepsilon} & \text{при } r < R, \\ \frac{\varrho^* R^3}{3 \varepsilon_0 r^2} & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (2.34)$$

Потенциал  $\varphi = \varphi(r)$  электрического поля, создаваемого сферически симметрично распределенным зарядом, можно найти по формуле (1.65)

$$\frac{d\varphi}{dr} = -E(r).$$

Интегрирование выражений (2.34) приводит к функции

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\frac{\varrho^* r^2}{6 \varepsilon} + C_1 & \text{при } r \leq R, \\ \frac{\varrho^* R^3}{3 \varepsilon_0 r} + C_2 & \text{при } r \geq R, \end{cases} \quad (2.35)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования. Положим  $C_2 = 0$ . При этом потенциал на бесконечности будет равен нулю:  $\varphi(\infty) = 0$ . Постоянную  $C_1$  найдем из условия

$$\varphi(R-0) = \varphi(R+0)$$

непрерывности потенциала при  $r = R$ . Это условие приводит к уравнению

$$-\frac{\varrho^* R^2}{6 \varepsilon} + C_1 = \frac{\varrho^* R^2}{3 \varepsilon_0},$$

из которого найдем, что

$$C_1 = \frac{\varrho^* R^2}{6 \varepsilon_0} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} + 2 \right).$$

По формуле (2.24) с учетом (2.27) найдем вектор поляризованности:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{(\epsilon_r - 1) \rho^* \vec{r}}{3 \epsilon_r \epsilon_0} & \text{при } r \leq R, \\ 0 & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (2.36)$$

Формула (2.17) дает возможность найти объемную плотность связанных зарядов:

$$\rho' = -\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z}.$$

Так как

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3,$$

будем иметь

$$\rho' = -\frac{(\epsilon_r - 1) \rho^*}{\epsilon_r \epsilon_0}. \quad (2.37)$$

Поверхностную плотность связанных зарядов на поверхности шара найдем по формуле (2.12):

$$\sigma' = \frac{(\epsilon_r - 1) \rho^* R}{3 \epsilon_r \epsilon_0}. \quad (2.38)$$

## 2.9. Условия на границе раздела двух диэлектриков

Пусть некоторая поверхность  $S$  является границей раздела двух диэлектриков (рис. 2.8). Будем считать, что на этой поверхности нет свободных зарядов. Построим небольшой цилиндр высотой  $2\delta$ , одна половина которого находится в первом диэлектрике, а вторая – во втором. Площадь основания цилиндра равна  $dS$ . Применим теорему Гаусса (2.22). Поток вектора  $\vec{D}$  через всю поверхность цилиндра равен сумме потоков через его основания и боковую поверхность. Поэтому равенство (2.22) примет вид

$$\vec{D}_1 \vec{n}_1 dS + \vec{D}_2 \vec{n}_2 dS + \Phi_{\text{бок.поверхн.}} = Q^*, \quad (2.39)$$

где  $\Phi_{\text{бок.поверхн.}}$  – поток вектора  $\vec{D}$  через боковую поверхность цилиндра. Устремим  $\delta$  к нулю. При этом поток через боковую поверхность цилиндра и свободный заряд  $Q^*$  внутри него обратятся в нуль. Учитывая, что

вектор  $\vec{n}_2$  единичной нормали к одной из сторон поверхности  $S$  противоположен по направлению вектору  $\vec{n}_1$  нормали к другой ее стороне в той же точке ( $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$ ), придем к уравнению

$$\vec{D}_1 \vec{n}_1 = \vec{D}_2 \vec{n}_1, \quad \text{или} \quad D_{n_1} = D_{n_2}, \quad (2.40)$$

согласно которому нормальная составляющая вектора электрической индукции при переходе через границу раздела двух диэлектриков не изменяется.

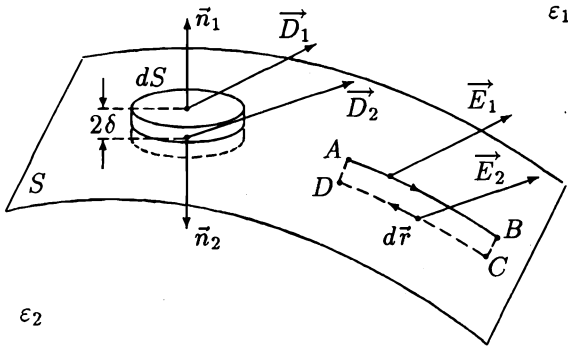


Рис. 2.8. К выводу граничных условий

Вычислим теперь циркуляцию вектора напряженности электрического поля по небольшому прямоугольному контуру  $ABCD$  (рис. 2.8), две стороны  $AB$  и  $CD$  которого параллельны поверхности  $S$ , но лежат в разных диэлектриках, а длина двух других сторон  $AD$  и  $BC$  стремится к нулю. По теореме о циркуляции (1.37) полученное выражение должно быть равно нулю. Следовательно,

$$\vec{E}_1 \overrightarrow{AB} + \vec{E}_2 \overrightarrow{CD} = 0. \quad (2.41)$$

Введем единичный вектор  $\vec{\tau}$ , касательный к поверхности:  $\vec{\tau} = \overrightarrow{AB}/AB$ . Учитывая, что  $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ , преобразуем уравнение (2.41) к виду

$$\vec{E}_1 \vec{\tau} = \vec{E}_2 \vec{\tau}, \quad \text{или} \quad E_{\tau_1} = E_{\tau_2}. \quad (2.42)$$

Это равенство утверждает, что тангенциальные (касательные) составляющие вектора  $\vec{E}$  напряженности электрического поля с той и другой стороны поверхности раздела двух диэлектриков одинаковы.



## ПРОВОДНИКИ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### 3.1. Распределение зарядов в проводниках

В проводниках есть очень много заряженных частиц (носителей тока), имеющих возможность "свободно" перемещаться по объему проводника и по его поверхности. В металлах носителями тока являются "свободные" электроны, т.е. электроны, оторвавшиеся от атомов. При этом атомы превратились в положительно заряженные ионы, которые образуют кристаллическую решетку. Таким образом, можно сказать, что металл состоит из малоподвижных положительных ионов и движущихся в пространстве между ними отрицательно заряженных электронов. Если электроны в металле распределены в среднем равномерно, то электрический заряд любой его части будет равен нулю, так как отрицательный заряд электронов будет уравновешен положительным зарядом ионов. Если же под действием каких-либо сил электроны переместятся из одной области металла в другую, то область, из которой произошел отток электронов, станет положительно заряженной вследствие того, что здесь будет преобладать заряд положительных ионов; а область, в которую переместились электроны, приобретет отрицательный заряд.

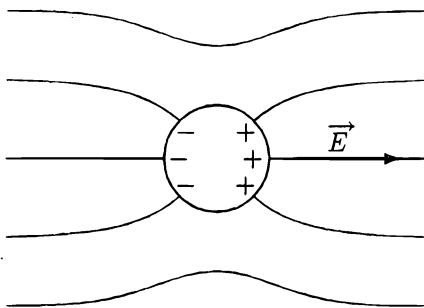


Рис. 3.1. Проводник в электрическом поле

Если проводник поместить в электрическое поле, то на каждый из имеющихся в нем носителей тока сразу же начинает действовать сила  $\vec{F} = q\vec{E}$ , где  $q$  – заряд носителя тока,  $\vec{E}$  – напряженность поля в точ-

ке, в которой находится рассматриваемая заряженная частица. Под действием этих сил носители тока начинают двигаться вдоль силовых линий электрического поля. Если проводник изолирован, то носители тока не смогут уйти дальше поверхности проводника и будут накапливаться на ней. На одной стороне проводника появляются положительные заряды, а на противоположной – отрицательные (рис. 3.1). Это явление называют *электростатической индукцией*, или электризацией через влияние, а заряды, скапливающиеся на поверхности проводника в электрическом поле, – *индуцированными*, или *наведенными*.

Индукцированные внешним электрическим полем заряды создают свое электрическое поле, напряженность которого  $\vec{E}_{\text{инд}}$  в силу принципа суперпозиции складывается с напряженностью внешнего поля  $\vec{E}_{\text{внеш}}$ . Таким образом, напряженность электрического поля будет

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{инд}} + \vec{E}_{\text{внеш}}.$$

Движение носителей тока в проводнике будет происходить до тех пор, пока в нем существует электрическое поле. Когда индуцированные заряды на поверхности изолированного проводника распределятся так, что создаваемое ими поле полностью скомпенсирует внешнее поле, электрический ток в проводнике прекратится. Иначе говоря, распределение свободных зарядов на поверхности изолированного проводника в постоянном электрическом поле таково, что сумма напряженностей поля, создаваемого этими зарядами, и внешнего электрического поля внутри проводника равна нулю:  $\vec{E} = 0$ . В силу соотношения (1.22) градиент потенциала также равен нулю. Значит, внутри проводника и на его поверхности потенциал принимает одно и то же значение. Следовательно, поверхность изолированного проводника в постоянном электрическом поле является эквипотенциальной и вектор  $\vec{E}$  напряженности поля всюду к ней ортогонален. Итак,

$$\vec{E} = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \text{const} \quad \text{внутри проводника.}$$

На рис. 3.1 изображен проводящий шар, помещенный в однородное электрическое поле  $\vec{E}_{\text{внеш}}$ . Показаны силовые линии поля, которое является суперпозицией внешнего поля и поля, создаваемого индуцированными зарядами.

Пусть проводник соприкасается с диэлектриком, проницаемость которого равна  $\epsilon$ . На поверхности проводника имеются свободные заряды, плотность которых обозначим  $\sigma^*$ . Найдем вектор  $\vec{D}$  электрической ин-

дукции и вектор  $\vec{E}$  напряженности электрического поля в точке внутри диэлектрика, которая находится в непосредственной близости к поверхности проводника. Для этого построим небольшой воображаемый цилиндр, одно основание которого лежит внутри проводника, другое —

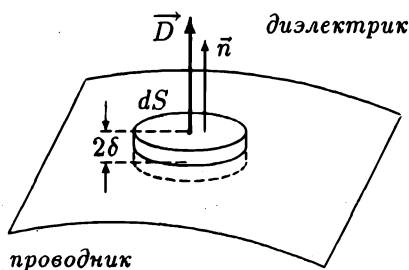


Рис. 3.2. К вычислению электрической индукции у поверхности проводника

вне, а высота  $2\delta$  стремится к нулю (рис. 3.2). Вычислим поток вектора  $\vec{D}$  через поверхность этого цилиндра в направлении внешней нормали. Поток через основание цилиндра, лежащее в проводнике, равен нулю, так как поле в проводнике отсутствует. Поток через боковую поверхность стремится к нулю, а поток через другое основание с учетом того, что вектор  $\vec{D}$  так же, как и вектор  $\vec{E}$ , ортогонален к поверхности проводника, равен

$$\vec{D} \vec{n} dS = D dS,$$

где  $dS$  — площадь основания цилиндра. Свободный заряд внутри цилиндра распределен по той части поверхности проводника, которая оказалась внутри цилиндра. Его величина равна

$$dQ^* = \sigma^* dS.$$

По теореме Гаусса (2.22) поток электрической индукции через замкнутую поверхность равен заключенному внутри нее свободному заряду. Таким образом, придем к равенству

$$D = \sigma^*,$$

согласно которому электрическая индукция у поверхности проводника равна поверхностной плотности свободных зарядов. По формуле (2.25) найдем, что напряженность электрического поля у поверхности проводника

$$E = \frac{\sigma^*}{\epsilon}.$$

Потенциал на поверхности заземленных, т.е. соединенных проводами с землей, проводников равен нулю.

### 3.2. Электрическая емкость заряженного проводника

Рассмотрим изолированный проводник, которому сообщен заряд  $Q$ . В общем случае проводник может быть окружен неоднородным диэлектриком. Заряд  $Q$  проводника, распределенный некоторым образом по его поверхности, и связанные заряды поляризованного диэлектрика создают в пространстве электрическое поле, которое можно описать посредством зависимости  $\varphi = \varphi(\vec{r})$  потенциала от радиус-вектора. Эта функция связана с точечными зарядами  $Q_i$ , создающими электрическое поле, соотношением

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (3.3)$$

где  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор заряда  $Q_i$ . В этой формуле  $Q_i$  обозначает систему зарядов, которая включает в себя и свободные заряды на поверхности проводника, и связанные заряды поляризованного диэлектрика. Заряды  $Q_i$  распределены по поверхности проводника и по объему диэлектрика таким образом, что функция (3.3) принимает постоянное значение  $\varphi_0$  в любой точке проводника и на его поверхности, в частности.

Увеличим заряд на проводнике в  $n$  раз:

$$\tilde{Q} = nQ.$$

Это приведет к усилению поля, т.е. к увеличению его потенциала и напряженности. Что в свою очередь приведет к большей поляризации диэлектрика и увеличению плотностей связанных зарядов. Для того чтобы напряженность поля внутри проводника была, как и прежде, равна нулю, новое распределение зарядов должно быть подобно первоначальному:

$$\tilde{Q}_i = nQ_i.$$

Подставив в формулу (3.3) заряды  $\tilde{Q}_i$  вместо  $Q_i$ , найдем новое распределение  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\vec{r})$  потенциала в пространстве. Нетрудно заметить, что увеличение в  $n$  раз заряда на проводнике приводит к увеличению во столько же раз значения потенциала в каждой точке пространства:

$$\tilde{\varphi}(\vec{r}) = n\varphi(\vec{r}).$$

В частности, потенциал на поверхности проводника тоже увеличится в  $n$  раз:

$$\tilde{\varphi}_S = n\varphi_S.$$

Следовательно, заряд  $Q$  проводника прямо пропорционален значению  $\varphi_S$

потенциала на его поверхности:

$$Q = C \varphi_S. \quad (3.4)$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  в этой формуле называется *емкостью*, или просто *емкостью* изолированного проводника. Емкость проводника определяется его размерами и формой, а также диэлектрическими свойствами вещества, которое окружает этот проводник. Единицей электрической емкости в СИ является *фарада* ( $\Phi$ ):  $[C] = \Phi = \text{Кл}/\text{В}$ .

Из формулы (3.3) следует, что потенциал любой системы зарядов, которая имеет конечные размеры, обращается в ноль на бесконечности:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(\vec{r}) = 0. \quad (3.5)$$

Это условие следует иметь в виду при вычислении емкости изолированного проводника.

### 3.3. Емкость шара

Вычислим емкость проводящего шара радиуса  $R$ , окруженного диэлектриком. Эта задача имеет сравнительно простое решение даже в том случае, когда диэлектрик не является однородным, если рассматриваемая система обладает сферической симметрией. Для этого необходимо, чтобы диэлектрическая проницаемость диэлектрика была функцией расстояния  $r$  до центра шара:  $\epsilon = \epsilon(r)$ . Пусть шар обладает электрическим зарядом  $Q$ . Микроскопические заряженные частицы, несущие этот заряд, отталкиваются друг от друга. Поэтому заряд  $Q$  будет равномерно распределен на поверхности шара. При этом создаваемое им и связанными зарядами поляризованного диэлектрика электрическое поле будет сферически симметричным. В таком случае вектор электрической индукции будет иметь вид

$$\vec{D}(\vec{r}) = D(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (3.6)$$

Проекцию  $D(r)$  вектора электрической индукции на радиус-вектор  $\vec{r}$  можно найти при помощи теоремы Гаусса (2.22). Для этого в качестве поверхности  $S$ , через которую будем вычислять поток вектора  $\vec{D}$ , следует выбрать сферу произвольного радиуса  $r$  с центром, совпадающим с центром шара. В любой точке такой сферы вектор электрической индукции к ней ортогонален, а его проекция  $D(r)$  принимает одно и то же

значение. Поэтому поток вектора  $\vec{D}$  через эту сферу равен

$$D(r) 4 \pi r^2,$$

где  $r \geq R$ . По теореме Гаусса поток равен свободному заряду  $Q$  шара, который находится внутри сферы  $S$ . Таким образом, получим

$$D(r) = \frac{Q}{4 \pi r^2}.$$

По формуле (2.25) найдем вектор напряженности электрического поля:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (3.7)$$

где

$$E(r) = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon(r) r^2}. \quad (3.8)$$

Подставив это выражение в формулу (1.65), найдем распределение потенциала

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \pi} \int_r^{\infty} \frac{dr}{\varepsilon(r) r^2}. \quad (3.9)$$

Если заряженный шар окружен однородным диэлектриком ( $\varepsilon = \text{const}$ ), то формула (3.9) дает

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon r}. \quad (3.10)$$

При этом значение потенциала на поверхности шара

$$\varphi_S = \varphi(R) = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon R},$$

а его емкость будет

$$C = \frac{Q}{\varphi_S} = 4 \pi \varepsilon R. \quad (3.11)$$

### 3.4. Конденсаторы

*Конденсатором* называют систему из двух проводников, расположенных на небольшом расстоянии друг от друга и обладающих равными по величине, но противоположными по знаку зарядами. Проводники, составляющие конденсатор, называются его *обкладками*. Пространство между обкладками конденсатора обычно заполняется диэлектриком. На схемах

конденсатор условно изображают в виде двух параллельных пластин с подсоединенными к ним проводами, по которым на обкладки конденсатора натекают или стекают электрические заряды (рис. 3.3).

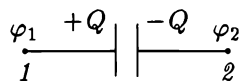


Рис. 3.3. Условное изображение конденсатора

Поверхность каждой из обкладок является эквипотенциальной. Пусть  $\varphi_1$  есть значение потенциала на той обкладке, которая имеет заряд  $+Q$ , а  $\varphi_2$  – значение потенциала на другой обкладке. Напряжением  $U$  на конденсаторе называют разность потенциалов между его обкладками

$$U = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.12)$$

Заряд  $Q$  конденсатора прямо пропорционален напряжению на его обкладках:

$$Q = C U. \quad (3.13)$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  называется емкостью конденсатора. Он определяется геометрией конденсатора и свойствами диэлектрика между его обкладками.

Рассмотрим конденсатор, заполненный однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon_1$ . Поместим на его обкладки заряды  $+Q$  и  $-Q$ . Если напряжение на конденсаторе окажется равным  $U_1$ , то его емкость будет

$$C_1 = \frac{Q}{U_1}. \quad (3.14)$$

Не меняя заряда на обкладках конденсатора, заполним пространство между ними другим однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon_2$ . Напряжение на конденсаторе изменится и примет значение  $U_2$ , а его емкость станет

$$C_2 = \frac{Q}{U_2}. \quad (3.15)$$

Так как оба диэлектрика однородные, силовые линии в обоих случаях будут одинаковыми. При известных направлениях вектора  $\vec{D}$  его модуль можно найти по теореме Гаусса (2.22), в правую часть которой входят только свободные заряды. После замены одного диэлектрика другим распределение свободных зарядов на обкладках конденсатора не изменится. Поэтому векторное поле  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{r})$  электрической индукции останется тем же самым. С учетом соотношения (2.25) получаем

равенства

$$\vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \varepsilon_2 \vec{E}_2.$$

В силу соотношения (1.18) будем иметь аналогичное равенство для потенциалов

$$\varepsilon_1 \varphi_1(\vec{r}) = \varepsilon_2 \varphi_2(\vec{r}),$$

из которого следует, что

$$\varepsilon_1 U_1 = \varepsilon_2 U_2. \quad (3.16)$$

Разделим равенство (3.14) на (3.15). Используя формулу (3.16), приходим к выводу, что отношение емкостей равно отношению проницаемостей диэлектриков, заполняющих пространство между обкладками конденсатора:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (3.17)$$

Емкость конденсатора может быть измерена различными радиотехническими методами. При этом соотношение (3.17) удобно использовать для определения проницаемостей диэлектриков. Так, если  $C_0$  и  $C$  есть емкости пустого конденсатора и того же конденсатора, заполненного диэлектриком, то проницаемость  $\varepsilon$  этого диэлектрика можно вычислить по формуле

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0} \varepsilon_0.$$

При этом относительная проницаемость  $\varepsilon_r$  будет равна отношению емкостей:

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0}.$$

### 3.5. Плоский конденсатор

Если обкладки конденсатора представляют собой две параллельные проводящие пластины, расстояние  $d$  между которыми существенно меньше их размеров, то такой конденсатор называют *плоским* (рис. 3.4).

Рассмотрим плоский пустой конденсатор, расстояние между пластинами которого равно  $d$ , а площадь каждой из них —  $S$ . Предположим, что конденсатор заряжен, т.е. на его пластинах имеются равные по величине, но противоположные по знаку заряды  $Q$  и  $-Q$ . Эти заряды распределены равномерно по внутренним поверхностям пластин с поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{Q}{S}. \quad (3.18)$$



Заряды  $Q$  и  $-Q$  создают в пространстве электрические поля, напряженности которых обозначим  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  соответственно. Напряженность  $\vec{E}$  поля, создаваемого этой системой зарядов, согласно принципу суперпозиции равна сумме напряженностей полей, создаваемых каждой из пластин в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (3.19)$$

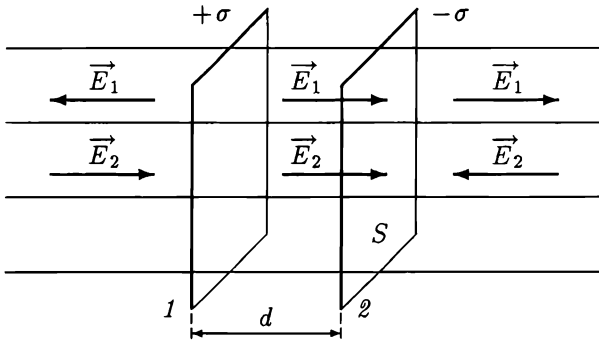


Рис. 3.4. Электрическое поле плоского конденсатора

Модули  $E_1$  и  $E_2$  векторов  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  определяются формулой (1.63) для напряженности поля, создаваемого заряженной плоскостью:

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3.20)$$

Пластины конденсатора разделяют пространство на три части. Как видно из рис. 3.4 вне конденсатора векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  направлены в противоположные стороны. Так как модули этих векторов одинаковы, их сумма равна нулю:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \quad \text{вне конденсатора.}$$

Таким образом, электрическое поле вне конденсатора отсутствует.

Внутри конденсатора, т.е. в пространстве между его пластинами, векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  направлены в одну сторону. Поэтому вектор напряженности поля

$$\vec{E} = 2\vec{E}_1,$$

а его модуль

$$E = 2E_1.$$

Таким образом, приходим к следующей формуле для напряженности электрического поля в плоском конденсаторе:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.21)$$

Вычислим работу  $A$ , которую совершает электрическое поле при переносе заряда  $q$  с положительно заряженной пластины 1 на отрицательно заряженную пластину 2. Согласно определению работы, которое выражается формулами (1.27) и (1.34), будем иметь

$$A = q E d.$$

Так как постоянное электрическое поле является консервативным, работу можно найти по формуле (1.35)

$$A = q (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Приравняем эти два выражения для работы. С учетом определения (3.12) придем к соотношению

$$U = E d, \quad (3.22)$$

которое связывает напряжение на плоском конденсаторе, т.е. разность потенциалов между его пластинами и напряженность электрического поля в нем.

По определению (3.13) емкость конденсатора  $C$  есть отношение заряда  $Q$  на его обкладках к напряжению между ними:

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (3.23)$$

При помощи равенств (3.18), (3.21) и (3.22) нетрудно получить следующее выражение для емкости пустого плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (3.24)$$

Если плоский конденсатор заполнить диэлектриком с относительной проницаемостью  $\epsilon_r$ , то его емкость увеличится в  $\epsilon_r$  раз:

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon S}{d}. \quad (3.25)$$

### 3.6. Энергия заряженного проводника

Пусть некоторый изолированный проводник заряжен так, что потенциал принимает на его поверхности значение  $\varphi_S$ . Если емкость проводника равна  $C$ , то его заряд

$$Q = C \varphi_S. \quad (3.26)$$

Перенесем из бесконечности на поверхность проводника дополнительный заряд  $dQ$ . При этом согласно (1.33) необходимо совершить работу

$$dA = \varphi_S dQ.$$

Совершенная работа приводит к увеличению энергии заряженного проводника:

$$dA = dW = \frac{1}{C} Q dQ.$$

При изменении заряда на проводнике от нуля до значения  $Q$  проводник приобретает энергию

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q Q dQ.$$

Интегрирование дает формулу

$$W = \frac{Q^2}{2C}. \quad (3.27)$$

Эту формулу можно получить другим способом из формулы (1.48) для энергии системы зарядов. Потенциал во всех точках, где находятся заряды, т.е. на поверхности проводника принимает одно и то же значение  $\varphi_S$ . Поэтому

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i = \frac{1}{2} \varphi_S \sum_i Q_i = \frac{1}{2} \varphi_S Q.$$

Используя (3.26), вновь приходим к формуле (3.27).

### 3.7. Энергия заряженного конденсатора

Найдем по формуле (1.48) энергию заряженного конденсатора. Заряд  $+Q$  распределен по поверхности первой обкладки, на которой потенциал всюду принимает значение  $\varphi_1$ , а заряд  $-Q$  — по поверхности второй

обкладки, где потенциал всюду равен  $\varphi_2$ . Поэтому

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i = \frac{1}{2} (\varphi_1 Q - \varphi_2 Q).$$

Так как по определению напряжение  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , приведем к формуле для энергии заряженного конденсатора

$$W = \frac{1}{2} Q U. \quad (3.28)$$

### 3.8. Энергия электрического поля

Рассмотрим плоский конденсатор, заполненный однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ . Используя формулу (3.13) преобразуем выражение (3.28) для энергии конденсатора так:

$$W = \frac{1}{2} C U^2. \quad (3.29)$$

Выразим напряжение  $U$  на конденсаторе через напряженность  $E$  поля при помощи формулы (3.22) и используем формулу (3.25) для емкости плоского конденсатора. Получим следующее выражение для энергии конденсатора:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V, \quad (3.30)$$

где  $V = S d$  — объем пространства между пластинами конденсатора. Возникает вопрос: какой вид материи является носителем этой энергии?

Энергия (3.30) плоского конденсатора зависит от напряженности электрического поля и прямо пропорциональна объему пространства между пластинами. Поэтому логично предположить, что именно электрическое поле, которое существует в пространстве между пластинами заряженного конденсатора, обладает этой энергией. Однако в пространстве между пластинами имеются еще молекулы диэлектрика. Под действием электрического поля каждая молекула поляризуется, т.е. входящие в ее состав заряженные частицы изменяют свое расположение. При этом энергия молекулы увеличивается. Таким образом, энергия (3.30) есть сумма энергий электрического поля и поляризованных им молекул диэлектрика.

В рассматриваемом случае энергия (3.30) распределена в пространстве равномерно. Отношение

$$w = \frac{W}{V}$$

называется *объемной плотностью* энергии. Разделив энергию (3.30) на объем  $V$ , получим выражение для плотности энергии

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2. \quad (3.31)$$

В общем случае электрическое поле может быть неоднородным, т.е. напряженность поля может зависеть от координат точки пространства:  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ . В таком случае плотность энергии также будет различна в разных точках пространства:  $w = w(\vec{r})$ . Однако соотношение (3.31), определяющее связь плотности энергии и напряженности электрического поля, справедливо в любом случае. Зная плотность энергии, можно найти энергию  $dW$  в малом объеме  $dV$  по формуле

$$dW = w(\vec{r}) dV. \quad (3.32)$$

Энергия в объеме  $V$  будет равна объемному интегралу от этого выражения:

$$W = \int_V w(\vec{r}) dV. \quad (3.33)$$

### 3.9. Соединения конденсаторов

На рис. 3.5 изображена схема параллельного соединения двух конденсаторов, емкости которых равны  $C_1$  и  $C_2$ . Найдем емкость этой системы. Для этого подадим на клеммы  $A$  и  $B$  напряжение  $U$ . При этом на обкладках конденсаторов появятся заряды. Такая система по существу представляет собой один конденсатор, заряд на обкладках которого

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad (3.34)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  - заряды на обкладках каждого конденсатора в отдельности. Соединенные вместе обкладки конденсаторов имеют один и тот же потенциал. Поэтому напряжения на обкладках конденсаторов будут одинаковы:

$$U_1 = U_2 = U. \quad (3.35)$$

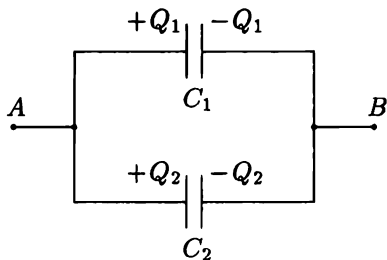


Рис. 3.5.

Параллельное соединение  
двух конденсаторов

Заряд на каждом из конденсаторов пропорционален напряжению между его обкладками:

$$Q_1 = C_1 U_1, \quad Q_2 = C_2 U_2.$$

Подставим эти выражения в формулу (3.34). С учетом равенств (3.35) получим

$$Q = (C_1 + C_2) U.$$

По определению емкость конденсатора или системы конденсаторов

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Из этого определения следует, что емкость системы параллельно соединенных конденсаторов равна сумме их емкостей:

$$C = C_1 + C_2. \quad (3.36)$$

Конденсаторы на рис. 3.6 соединены последовательно. Если на клеммы 1 и 3 подать напряжение  $U$ , то на обкладках конденсаторов появятся заряды. Соединенные проводом две обкладки конденсаторов образуют изолированный проводник, заряд которого до того, как конденсаторы зарядили, был равен нулю. Поэтому, когда на одной из соединенных вместе обкладок появляется заряд  $Q$ , на обкладке другого конденсатора заряд будет равен  $-Q$ . Таким образом, заряды на всех обкладках последовательно соединенных конденсаторов равны по величине друг другу:

$$Q_1 = Q_2 = Q. \quad (3.37)$$

Напряжения на конденсаторах суть разности потенциалов на их обкладках:

$$U_1 = \varphi_1 - \varphi_2, \quad U_2 = \varphi_2 - \varphi_3.$$

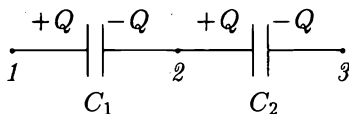


Рис. 3.6.  
Последовательное соединение  
двух конденсаторов

Напряжение  $U$  на клеммах 1 и 3 есть разность соответствующих значений потенциала:

$$U = \varphi_1 - \varphi_3.$$

Нетрудно проверить, что напряжение  $U$  на системе последовательно соединенных конденсаторов равно сумме напряжений на каждом из них в отдельности:

$$U = U_1 + U_2. \quad (3.38)$$

Напряжения на конденсаторах пропорциональны их зарядам:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q_2}{C_2}.$$

Подставим эти выражения в формулу (3.38). С учетом равенств (3.37) получим

$$U = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$$

Используя определение емкости (3.23), найдем, что емкость  $C$  системы последовательно соединенных конденсаторов удовлетворяет соотношению

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}. \quad (3.38)$$

## ПРОВОДНИКИ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

(продолжение)

### 3.10. Плоский конденсатор, заполненный неоднородным диэлектриком

Рассмотрим конструкцию из двух параллельных проводящих пластин, на одной из которых имеется заряд  $-Q$ , а на другой — заряд  $+Q$ . Эти заряды притягиваются друг к другу. Поэтому они будут распределены некоторым образом на обращенных одна к другой внутренних сторонах пластин. На рис. 3.7 показаны силовые линии электрического поля, создаваемого этими зарядами. Если размеры пластин достаточно велики по сравнению с расстоянием  $d$  между ними, то заряды будут распределены по их внутренним поверхностям почти равномерно. При этом электрическое поле в пространстве между пластинами будет почти однородным, а его силовые линии будут прямыми, перпендикулярными пластинам. Только у краев пластин силовые линии будут искривлены.

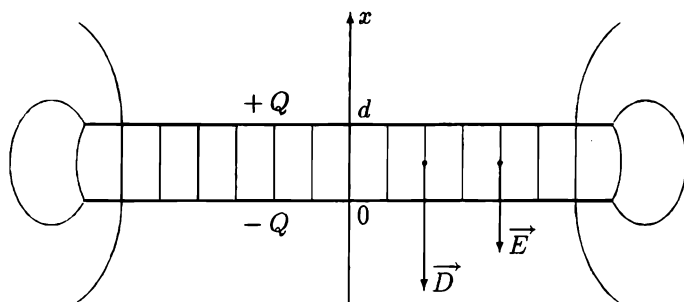


Рис. 3.7. Электрическое поле плоского конденсатора

Когда расстояние  $d$  между пластинами существенно меньше их размеров, рассматриваемая конструкция называется плоским конденсатором. В таком случае распределения зарядов на пластинах можно считать равномерными, а поле между ними — однородным. Распределения зарядов на пластинах и картина силовых линий не изменятся, если пространство



между пластинами заполнить "слоистым" диэлектриком, проницаемость которого является функцией расстояния от одной из пластин. Вычислим емкость такого конденсатора.

Проведем ось  $x$  перпендикулярно пластинам, а начало отсчета выберем на одной из них. Пусть на плоскости  $x = 0$  равномерно распределен заряд  $-Q$ , а на плоскости  $x = d$  - заряд  $+Q$ . Пусть диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  среды, заполняющей пространство между пластинами, зависит только от  $x$ :  $\epsilon = \epsilon(x)$ . При этом силовые линии электрического поля внутри конденсатора (на достаточном удалении от краев пластин) будут прямыми, параллельными оси  $x$ , а вектор электрической индукции будет иметь вид

$$\vec{D} = \{ D_x, 0, 0 \}, \quad (3.39)$$

где проекция  $D_x = D_x(x)$  является функцией  $x$ . Из рис. 3.7 видно, что  $D_x$  - отрицательная величина. Найдем функцию  $D_x = D_x(x)$  из уравнения (2.22). Так как свободные заряды в диэлектрике отсутствуют, их объемная плотность  $\rho^*$  равна нулю. В таком случае подстановка вектора (3.39) в (2.23) приводит к уравнению

$$\frac{dD_x}{dx} = 0, \quad (3.40)$$

из которого вытекает, что электрическая индукция в пространстве, где нет свободных зарядов, в частности между пластинами плоского конденсатора постоянна:

$$D_x = \text{const}.$$

Согласно формуле (3.1) электрическая индукция у поверхности проводника равна поверхностной плотности  $\sigma^*$  свободных зарядов. Если пренебречь неравномерностями распределения заряда у краев пластин, то поверхностная плотность заряда на них будет

$$\sigma^* = \frac{Q}{S}, \quad (3.41)$$

где  $S$  - площадь пластин. Заряд  $-Q$  распределен на внутренней стороне пластины  $x = 0$ . Поэтому

$$D_x = -\sigma^* \quad \text{при} \quad 0 < x < d. \quad (3.42)$$

На внешней стороне пластины  $x = 0$  плотность заряда равна нулю и

$$D_x = 0 \quad \text{при} \quad x < 0.$$

Аналогично можно доказать, что

$$D_x = 0 \quad \text{при} \quad x > d.$$

Таким образом, поле вне плоского конденсатора отсутствует.

При помощи формулы (2.25) находим проекции вектора напряженности электрического поля на оси координат:

$$E_x(x) = -\frac{\sigma^*}{\varepsilon(x)}, \quad E_y = E_z = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < d. \quad (3.43)$$

Теперь найдем зависимость потенциала электрического поля от координаты  $x$ . Первое из равенств (1.23) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{d\varphi}{dx} = -E_x(x). \quad (3.44)$$

Решением этого уравнения является функция

$$\varphi(x) = -\sigma^* \int \frac{dx}{\varepsilon(x)} + \text{const}. \quad (3.45)$$

Эта функция позволяет найти напряжение на конденсаторе

$$U = \varphi(d) - \varphi(0) = \sigma^* \int_0^d \frac{dx}{\varepsilon(x)}. \quad (3.46)$$

Используя соотношения (3.41) и (3.46), по определению (3.23) найдем емкость плоского конденсатора, заполненного неоднородным диэлектриком:

$$C = \frac{Q}{U} = S \left( \int_0^d \frac{dx}{\varepsilon(x)} \right)^{-1}. \quad (3.47)$$

По формулам (2.24) и (2.27) найдем проекции вектора поляризованности:

$$P_x(x) = \chi_e \varepsilon_0 E_x = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_x = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) \sigma^*}{\varepsilon}, \quad (3.48)$$

$$P_y = P_z = 0.$$

Зная поляризованность диэлектрика, можно из уравнения (2.17) найти объемную плотность связанных зарядов:

$$\rho' = -\text{div } \vec{P} = -\frac{dP_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\varepsilon_0 \sigma^*}{\varepsilon} \right) = -\frac{\varepsilon_0 \sigma^*}{\varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{dx}. \quad (3.49)$$

Согласно этой формуле поляризация неоднородного диэлектрика сопровождается появлением внутри него связанных зарядов.

Напряженность (3.43) электрического поля в плоском конденсаторе, заполненном однородным диэлектриком ( $\epsilon = \text{const}$ ), всюду одинакова:

$$E_x = -\frac{\sigma^*}{\epsilon} = \text{const} . \quad (3.50)$$

При этом согласно формуле (3.48) диэлектрик будет поляризован равномерно, т.е. его поляризованность будет всюду принимать одно и то же значение:  $P_x = \text{const}$ . Как следует из формулы (3.49), объемная плотность связанных зарядов равна нулю:  $\rho' = 0$ . Интегрирование в формуле (3.45) приводит к линейной зависимости потенциала от координаты:

$$\varphi(x) = -E_x x + \text{const} . \quad (3.51)$$

При этом напряжение на конденсаторе

$$U = \varphi(d) - \varphi(0) = |E_x| d , \quad (3.52)$$

а его емкость

$$C = \frac{\epsilon S}{d} . \quad (3.53)$$

Из формул (3.47) и (3.53) следует, что емкость плоского конденсатора тем больше, чем больше площадь пластин и проницаемость заполняющего его диэлектрика и чем меньше расстояние между пластинами.

### 3.11. Цилиндрический конденсатор

Два соосных (коаксиальных) проводящих цилиндра, длина  $l$  которых много больше радиуса внешнего цилиндра, образуют *цилиндрический* конденсатор (рис. 3.8). Пусть радиус внутреннего цилиндра равен  $a$ , а внешнего —  $b$ , и пространство между цилиндрами заполнено однородным диэлектриком проницаемостью  $\epsilon$ . Найдём емкость такого конденсатора.

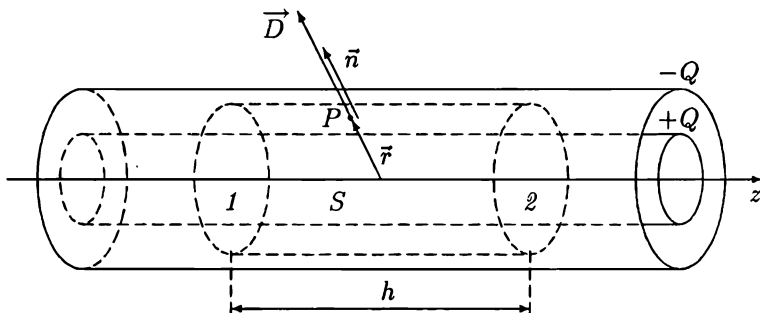


Рис. 3.8. Цилиндрический конденсатор

Поместим на внутренний цилиндр заряд  $+Q$ , а на внешний – заряд  $-Q$ . Эти заряды практически равномерно распределятся по поверхностям цилиндров. Так как цилиндры очень длинные, неравномерностями распределения зарядов на их концах и связанными с этими неравномерностями искажениями поля можно пренебречь. При этом в силу осевой симметрии системы силовые линии электрического поля будут прямыми, перпендикулярными главной оси симметрии конденсатора, а вектор электрической индукции будет иметь вид

$$\vec{D} = D(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (3.54)$$

где  $\vec{r}$  есть вектор, начинающийся на оси конденсатора, перпендикулярный ей и заканчивающийся в произвольной точке пространства  $P$  между обкладками конденсатора;  $r$  – расстояние от точки  $P$  до этой оси. Если направить ось  $z$  вдоль оси симметрии цилиндров, то проекция вектора  $\vec{r}$  на эту ось будет равна нулю:

$$\vec{r} = \{x, y, 0\}, \quad (3.55)$$

а его модуль

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Проекцию  $D(r)$  вектора  $\vec{D}$  на вектор  $\vec{r}$  найдем при помощи теоремы Гаусса (2.22). Для этого вычислим поток электрической индукции через поверхность  $S$  воображаемого цилиндра радиуса  $r$  и высоты  $h$  (рис. 3.8). Основания 1 и 2 этого цилиндра образованы силовыми линиями. Поэтому потоки через них равны нулю. Поток через боковую поверхность, которая является эквипотенциальной,

$$\Phi_D = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S D dS = D \int_S dS = D \cdot 2\pi r h.$$

Свободный заряд внутри рассматриваемого цилиндра равен нулю, если его радиус  $r$  меньше  $a$  или больше  $b$ . Поэтому поле существует только в пространстве между цилиндрическими обкладками конденсатора. При  $a < r < b$  заряд внутри поверхности  $S$  равен заряду  $Qh/l$ , который распределен на части поверхности малого цилиндра, заключенной между сечениями 1 и 2. По теореме Гаусса найдем, что

$$D(r) = \frac{Q}{2\pi l r}. \quad (3.56)$$

Радиальная составляющая вектора напряженности

$$E(r) = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{2\pi \epsilon l r}. \quad (3.57)$$

Распределение потенциала найдем, проинтегрировав это выражение:

$$\varphi(r) = - \int E(r) dr = - \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln r + \text{const} . \quad (3.58)$$

При этом напряжение на конденсаторе будет

$$U = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln \frac{b}{a} . \quad (3.59)$$

Отсюда следует, что емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi \epsilon l \left( \ln \frac{b}{a} \right)^{-1} . \quad (3.60)$$

### 3.12. Основная задача электростатики. Теорема единственности

Если заданы значения электрических зарядов и их расположение в пространстве, то при помощи закона Кулона и принципа суперпозиции можно вычислить для любой точки пространства потенциал и напряженность поля, создаваемого этими зарядами. Причем как потенциал, так и напряженность поля в каждой точке пространства принимают только одно значение. Как говорят в математике, задача имеет единственное решение. Если же значение или расположение хотя бы одного из зарядов, создающих искомое электрическое поле, неизвестны, то такая задача может иметь много различных решений.

При расчетах электрических полей часто удобно исходить из уравнений для потенциала. Это может быть уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

или уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0 ,$$

когда в области, где существует искомое электрическое поле, нет зарядов. Решение этих уравнений является основной задачей электростатики. В математической физике доказана так называемая *теорема единственности*, согласно которой эта задача имеет единственное решение, т.е. только одно распределение потенциала в некоторой области пространства  $G$  существует и может быть найдено, когда известны электрические заряды и их расположение в этой области, а также известны значения потенциала в каждой точке поверхности  $S$ , ограничивающей

область  $G$ . Если поверхность  $S$  уходит в бесконечность, то там потенциал должен быть равен нулю. В математике задача, в которой искомая функция подчиняется определенным граничным условиям, т.е. принимает заданные значения на границе некоторой области, называется краевой, или граничной задачей. Итак, краевая задача для уравнений Пуассона и Лапласа имеет единственное решение.

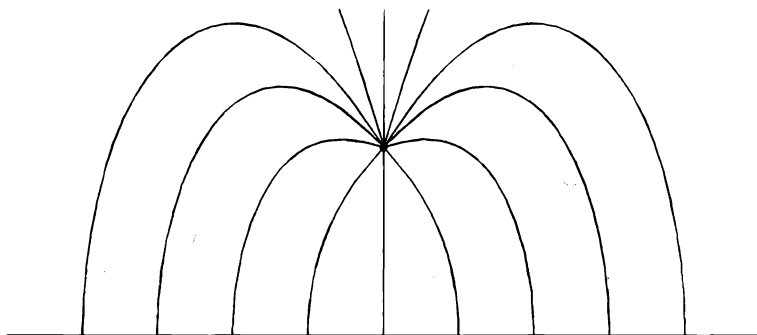
Рассмотрим изолированный проводник в постоянном электрическом поле. Как было показано в разделе 3.1, в этом случае напряженность поля в проводнике будет равна нулю, а потенциал будет в любой точке проводника принимать одно и то же значение. Пусть внутри проводника имеется полость произвольной формы. Если в полости и на ее стенках нет свободных электрических зарядов, то потенциал в любой точке на стенках полости будет принимать одно и то же значение. Распределение потенциала поля в полости можно найти из уравнения Лапласа. Предположим, что потенциал всюду в полости принимает то же самое значение, что и на ее стенках:  $\varphi = \text{const}$ . Очевидно, что функция  $\varphi = \text{const}$  является решением уравнения Лапласа. В силу теоремы единственности именно это решение описывает реально существующее электрическое поле в полости проводника. Точнее будет сказать несуществующее поле, так как при  $\varphi = \text{const}$  напряженности электрического поля равна нулю. Итак, при внесении проводника с полостью в постоянное электрическое поле происходит удивительное явление. Поле не может проникнуть в полость. Наведенные полем электрические заряды всегда так распределяются по внешней поверхности проводника, что создаваемое ими электрическое поле в полости и в самом проводнике "компенсирует" внешнее поле.

### **3.13. Электрическое поле точечного заряда, расположенного около заземленной плоскости**

Рассмотрим пример, когда применение теоремы единственности дает возможность найти простое решение одной сложной задачи электростатики. Точечный заряд  $Q$  находится на некотором расстоянии  $h$  от бесконечной проводящей плоскости (рис. 3.9). Пусть этот заряд будет положительным. Тогда на поверхности плоскости будет некоторым образом распределен индуцированный отрицательный заряд, возникающий из-за присутствия у поверхности заряда  $Q$ . Требуется найти электрическое поле, создаваемое этими зарядами.

Пусть потенциал  $\varphi$  на плоскости всюду равен нулю. В реальных опытах этого можно достиг, заземлив проводник, т.е. соединив его с землей. Потенциал в пространстве над плоскостью можно найти из уравнений Пуассона и Лапласа. Таким образом, пришли к граничной задаче, ре-

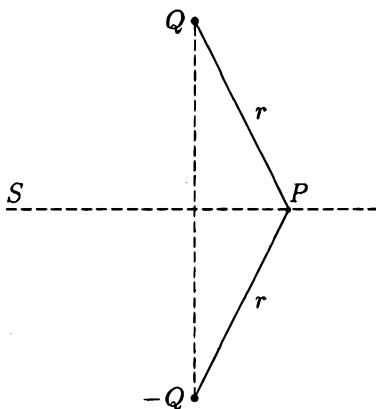
шение которой нельзя назвать очень простым. Однако существует очень простой метод решения подобных задач.



*Рис. 3.9. Силовые линии электрического поля точечного заряда, расположенного над заземленной проводящей плоскостью*

Рассмотрим два заряда  $Q$  и  $-Q$ , расположенные на расстоянии  $2h$  один от другого (рис. 3.10). Пусть  $S$  – плоскость, которая проходит через середину отрезка, соединяющего заряды так, что он перпендикулярен к ней. Произвольная точка  $P$  плоскости  $S$  находится на равных расстояниях от зарядов. Поэтому потенциал в любой точке этой плоскости равен нулю:

$$\varphi_S = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r} = 0.$$



*Рис. 3.10. Два заряда*

Таким образом, потенциал в полупространстве над плоскостью  $S$  удовлетворяет тем же граничным условиям, что в краевой задаче о поле, создаваемом зарядом  $Q$ , который расположен над заземленной проводящей плоскостью. В силу теоремы единственности электрическое поле, создаваемое двумя зарядами  $Q$  и  $-Q$  в полупространстве над плоскостью  $S$  совпадает с полем, которое создает один заряд  $Q$ , расположенный над заземленной проводящей плоскостью.

Существуют системы зарядов, электрические поля которых очень просто рассчитать. К таким системам относятся системы, состоящие из небольшого числа точечных зарядов, и системы зарядов, которые распределены в пространстве непрерывно и симметрично. Пусть для одной из таких систем найдено распределение потенциала в пространстве. Выделим одну из эквипотенциальных поверхностей  $S$ . Пусть на этой поверхности потенциал равен  $\varphi_S$ . Заполним проводящей средой часть пространства, ограниченную поверхностью  $S$ . Поверхность проводника является также эквипотенциальной. Если значение потенциала проводника равно  $\varphi_S$ , то электрическое поле в свободном от проводника пространстве будет таким же, каким оно было до его внесения.

**З а д а ч а 1.** Пространство между плоскостями  $x = -a$  и  $x = a$  заполнено однородным диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого равна  $\epsilon$ . В пространстве между плоскостями  $x = -a$  и  $x = 0$  равномерно с плотностью  $\rho^*$  распределен свободный заряд. Найти электрическую индукцию  $\vec{D}$ , напряженность электрического поля  $\vec{E}$ , потенциал  $\varphi$ , поляризованность  $\vec{P}$ , объемную  $\rho'$  и поверхностную  $\sigma'$  плотности связанных зарядов.

**З а д а ч а 2.** Бесконечный цилиндр радиуса  $R$ , изготовленный из диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$ , заряжен равномерно по объему. При этом объемная плотность свободных зарядов равна  $\rho^*$ . Найти электрическую индукцию  $\vec{D}$ , напряженность электрического поля  $\vec{E}$ , потенциал  $\varphi$ , поляризованность  $\vec{P}$ , объемную  $\rho'$  и поверхностную  $\sigma'$  плотности связанных зарядов.

**З а д а ч а 3.** Шар радиуса  $R$ , изготовленный из диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$ , заряжен равномерно по объему. Заряд шара равен  $Q$ . Найти энергию шара.

**З а д а ч а 4.** Цилиндрический конденсатор длиной  $l$ , радиусы обкладок которого равны  $a$  и  $b$ , заряжен до разности потенциалов  $U$ . Конденсатор заполнен веществом с проницаемостью  $\epsilon$ . Найти энергию, запасенную в конденсаторе.



## Г Л А В А 4

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 4.1. Плотность тока. Сила тока

Упорядоченное (направленное) движение заряженных частиц называется *электрическим током*. При таком движении происходит перенос электрических зарядов из одной области пространства в другую. Упорядоченное движение заряженных частиц в какой-либо среде называется *током проводимости*. Электрический ток, обусловленный перемещением заряженного тела, называется *конвекционным*. Вещество, в котором имеются заряженные частицы, способные перемещаться на значительные расстояния в пространстве, называется *проводником* электрического тока, а частицы, переносящие электрический заряд, – *носителями тока*. Например, носителями тока в металлах являются отрицательно заряженные электроны. Кроме подвижных электронов в металлах имеются малоподвижные положительно заряженные ионы, образующие кристаллическую решетку.

Упорядоченное движение заряженных частиц может быть очень сложным. В самом простом случае электрический ток идет по проводнику цилиндрической формы вдоль его оси. В этом случае носители тока равномерно распределены по объему проводника и движутся прямолинейно с некоторой средней скоростью  $\vec{u}$  (рис. 4.1).

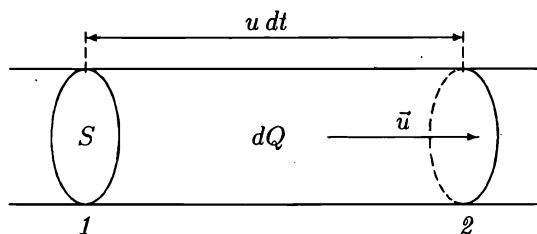


Рис. 4.1. Проводник с током

Пусть за время  $dt$  через произвольное сечение проводника протекает заряд  $dQ$ . Отношение

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (4.1)$$

называют *силой электрического тока*. Отношение

$$j = \frac{I}{S} \quad (4.2)$$

силы тока  $I$  к площади  $S$  поперечного сечения проводника называют *плотностью электрического тока*.

Найдем соотношение, связывающее плотность тока  $j$  и среднюю скорость  $u$  движения зарядов. Для этого рассмотрим участок проводника между двумя его поперечными сечениями 1 и 2 (рис. 4.1). Длина этого участка равна среднему пути  $u dt$ , который проходит носитель тока за время  $dt$ . Заряд  $dQ$  всех носителей тока, которые оказались между сечениями 1 и 2 в некоторый момент времени  $t$ , равен произведению объемной плотности заряда  $\rho$  на объем этого участка проводника:

$$dQ = \rho S u dt. \quad (4.3)$$

За время  $dt$  носитель тока, находившийся в сечении 1, пройдет путь  $u dt$  и окажется в сечении 2. За это время все носители тока, которые находились в момент времени  $t$  между сечениями 1 и 2, протекут через сечение 2 и перенесут с собой заряд  $dQ$ . Согласно формулам (4.1) и (4.2)

$$dQ = j S dt.$$

Подстановка этого выражения в формулу (4.3) приводит к искомому соотношению

$$j = \rho u. \quad (4.4)$$

В векторной форме это соотношение можно записать так:

$$\vec{j} = \rho \vec{u}. \quad (4.5)$$

Вектор  $\vec{j}$  определяет направление электрического тока. Когда ток представляет собой направленное движение положительно заряженных частиц ( $\rho > 0$ ), согласно формуле (4.5) направление вектора  $\vec{j}$  совпадает с направлением вектора  $\vec{u}$  средней скорости, т.е. направление электрического тока совпадает с направлением движения носителей тока. Если же электрический ток создается движением отрицательно заряженных частиц, то направление тока будет противоположно направлению движения таких частиц.

## 4.2. Закон Ома для участка цепи

Различные устройства, потребляющие электрическую энергию, измерительные приборы (амперметры и вольтметры) и выключатели подключаются к источникам электрической энергии при помощи соединительных проводов. Все эти элементы вместе образуют *электрическую цепь*. Рассмотрим один из участков некоторой электрической цепи, который представляет собой проводник с током. Участок цепи называют *однородным*, если направленное движение носителей тока на этом участке обусловлено действием на них одних только электростатических сил, т.е. сил, с которыми постоянное или очень медленно изменяющееся электрическое поле действует на заряженные частицы. Если заряд носителя тока равен  $q$ , то электрическое поле действует на него с силой

$$\vec{F}_{\text{электр}} = q \vec{E}, \quad (4.6)$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля. Кроме электростатических сил, вынуждающих носители тока совершать направленное движение, на них действуют силы, препятствующие такому движению. Это – силы сопротивления среды, в которой движутся носители тока. Сталкиваясь с частицами среды, носители тока замедляют свое движение. Например, в металлах подвижные электроны сталкиваются с малоподвижными ионами, расположенными в узлах кристаллической решетки. Сила сопротивления среды тем больше, чем быстрее движется в ней частица:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -\alpha \vec{u}, \quad (4.7)$$

где  $\alpha$  – коэффициент сопротивления.

Запишем второй закон Ньютона для одного из носителей тока в проводнике:

$$m \vec{a} = \vec{F}_{\text{электр}} + \vec{F}_{\text{сопр}}.$$

В постоянном электрическом поле движение носителей тока имеет стационарный характер, т.е. средняя скорость носителя тока не изменяется со временем, а его ускорение равно нулю. При этом сумма действующих на него сил также равна нулю:

$$\vec{F}_{\text{электр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} = 0.$$

При помощи формул (4.6) и (4.7) получим равенство

$$q \vec{E} - \alpha \vec{u} = 0,$$

из которого найдем, что вектор средней скорости коллинеарен вектору напряженности электрического поля

$$\vec{u} = \frac{q}{\alpha} \vec{E}.$$

Подставив это выражение в формулу (4.5), придем к соотношению, связывающему вектор плотности тока  $\vec{j}$  и вектор напряженности электрического поля в проводнике

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (4.8)$$

где коэффициент

$$\sigma = \frac{q^2 n}{\alpha}$$

называется *удельной проводимостью* вещества, или его электропроводностью. Соотношение (4.8) выражает собой *закон Ома в дифференциальной форме*.

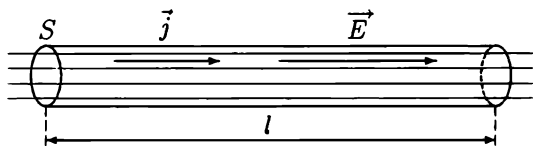


Рис. 4.2. Электрический ток в цилиндрическом проводнике

Пусть в проводнике, который имеет форму цилиндра, вдоль его оси идет электрический ток (рис. 4.2). Если электрическое поле в проводнике однородно, то напряжение на его концах будет

$$U = E l,$$

где  $l$  – длина проводника. В силу закона Ома (4.8) векторное поле  $\vec{j}$  также будет однородным. При этом сила тока в проводнике будет равна произведению плотности тока на площадь его поперечного сечения:

$$I = j S = \sigma E S.$$

Эти формулы приводят к закону Ома в интегральной форме:

$$U = R I, \quad (4.9)$$

где коэффициент пропорциональности

$$R = \frac{\rho l}{S}, \quad (4.10)$$

называется *электрическим сопротивлением* проводника, или просто его сопротивлением, а величина

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

– *удельным сопротивлением* вещества, из которого изготовлен проводник. Единица сопротивления в СИ – ом ( Ом ):  $[R] = \text{Ом} = \text{В}/\text{А}$ .

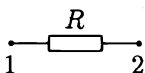


Рис. 4.3. Однородный участок цепи

На электрических схемах однородный участок цепи изображают условно в виде прямоугольника (рис. 4.3). Электрический ток притекает к этому участку и вытекает из него по двум идеальным проводникам, сопротивления которых равны нулю.

### 4.3. Соединения проводников

Проводники и различные электрические приборы могут быть включены в электрическую цепь или последовательно, или параллельно друг другу. При последовательном соединении проводников конец одного проводника соединяется с началом другого, конец второго с началом третьего и т.д. На рис. 4.4 изображены три последовательно соединенных проводника, сопротивления которых равны  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ .

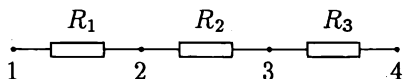


Рис. 4.4. Последовательное соединение проводников

При последовательном соединении проводников через любое сечение данного участка за одно и то же время переносится один и тот же заряд. Поэтому сила тока во всех проводниках одинакова:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I. \quad (4.11)$$

По определению напряжение на каком-либо участке проводника равно разности потенциалов на концах этого участка. Таким образом, напряжения на трех последовательно соединенных проводниках будут

$$U_1 = \varphi_1 - \varphi_2, \quad U_2 = \varphi_2 - \varphi_3, \quad U_3 = \varphi_3 - \varphi_4,$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\varphi_4$  – значения потенциала в точках соединения проводников. Нетрудно видеть, что сумма этих напряжений равна напряжению

$$U = \varphi_1 - \varphi_4$$

на концах рассматриваемого участка цепи:

$$U = U_1 + U_2 + U_3. \quad (4.12)$$

Запишем закон Ома для каждого из трех проводников:

$$U_1 = R_1 I_1, \quad U_2 = R_2 I_2, \quad U_3 = R_3 I_3.$$

Подставив эти выражения в формулу (4.12), с учетом соотношений (4.11) получим равенство

$$U = R I,$$

где

$$R = R_1 + R_2 + R_3. \quad (4.13)$$

Таким образом, приходим к выводу, что электрическое сопротивление участка цепи из последовательно соединенных проводников равно сумме сопротивлений каждого из этих проводников в отдельности.

На рис. 4.5 изображена схема параллельного соединения трех проводников. При таком соединении поток носителей тока, втекающий в эту цепь в точке  $A$ , разделяется на три потока, каждый из которых течет в точку  $B$  по одному из проводников. Поэтому сила тока  $I$ , втекающего в точку  $A$ , равна сумме сил токов  $I_1, I_2$  и  $I_3$  в каждом проводнике:

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \quad (4.14)$$

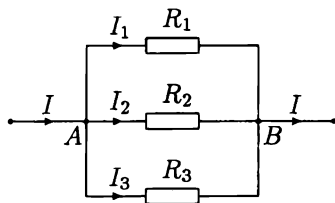


Рис. 4.5. Параллельное соединение проводников

Так как концы проводников соединены в точках  $A$  и  $B$ , напряжения на всех параллельно соединенных проводниках равны друг другу:

$$U_1 = U_2 = U_3 = U = \varphi_A - \varphi_B, \quad (4.15)$$

где  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  – значения потенциала в точках  $A$  и  $B$ . Закон Ома для каждого из проводников дает соотношения

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U_3}{R_3}.$$

Подставив эти выражения в равенство (4.14), с учетом соотношений (4.15) получим формулу

$$I = \frac{U}{R},$$

где сопротивление  $R$  между точками  $A$  и  $B$  таково, что

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (4.16)$$

#### 4.4. Электродвижущая сила

Из закона Ома следует, что сила электрического тока в проводнике прямо пропорциональна разности потенциалов на его концах. Иначе говоря, когда разность потенциалов на концах проводника не равна нулю, по нему течет электрический ток. Если соединить концы проводника, то разность потенциалов на его концах станет равна нулю. Поэтому в замкнутой цепи при помощи одного только электрического поля невозможно создать текущий длительное время электрический ток. Для того чтобы обеспечить существование электрического тока в замкнутой цепи в течение длительного времени, необходимо включить в эту цепь специальное устройство, производящее разделение положительных и отрицательных зарядов. Такие устройства называются *источниками*, или *генераторами* электрического тока. При подключении к зажимам генератора концов проводника заряды начинают перетекать по нему, т.е. в цепи возникает электрический ток, который идет до тех пор, пока работает генератор. Таким образом, назначение источника тока – создавать и поддерживать разность потенциалов на присоединенных к нему проводниках. Примером источника тока может служить элемент питания (батарея), в котором разделение зарядов происходит в результате химических реакций.

Во всех без исключения источниках тока разделение зарядов обусловлено действием на подвижные заряды различных по своей природе сил, которые принято называть *сторонними*. К ним относятся все действующие на носители тока силы, кроме электростатических. Таким образом, силу  $\vec{F}$ , которая действует на один из подвижных зарядов в проводнике, можно представить в виде суммы

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{электр}} + \vec{F}_{\text{стор}},$$

где второе слагаемое есть результирующая всех сторонних сил, действующих на этот заряд. По аналогии с формулой (4.6) стороннюю силу можно записать как

$$\vec{F}_{стор} = q \vec{E}_{стор},$$

где вектор  $\vec{E}_{стор}$  называют *напряженностью поля сторонних сил*.

Работа  $A$  силы  $\vec{F}$  при переносе заряда  $q$  из точки 1 в точку 2 равна сумме работы  $A_{электр}$  электростатической силы и работы  $A_{стор}$  сторонних сил:

$$A = A_{электр} + A_{стор}. \quad (4.17)$$

Работа электростатической силы равна произведению заряда частицы на разность потенциалов между точками 1 и 2 начала и конца пути:

$$A_{электр} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4.18)$$

Работа сторонних сил при перемещении заряда также пропорциональна его величине:

$$A_{стор} = q\varepsilon. \quad (4.19)$$

Величину  $\varepsilon$  называют *электродвижущей силой* (сокращенно ЭДС), которая действует на участке проводника между точками 1 и 2. Это есть работа сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2. Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, называют *неоднородным*. На таком участке цепи происходит в зависимости от природы сторонних сил преобразование различных видов энергии (химической, магнитной и др.) в энергию электрического поля. Энергетической характеристикой источника тока является электродвижущая сила.

*Напряжением*, или *падением напряжения* на участке цепи, где действуют сторонние силы, называют величину

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon. \quad (4.20)$$

По определению в общем случае напряжение есть сумма разности потенциалов и электродвижущей силы. Теперь с учетом формул (4.18) – (4.20) выражение для работы (4.17) можно записать так:

$$A = qU. \quad (4.21)$$

Так как при перемещении носителя тока по проводнику работа  $A$  всех сил равна сумме работ, совершаемых этими силами на отдельных участках пути:  $A = A_1 + A_2 + \dots$ , напряжение  $U$  на концах проводника равно сумме напряжений на его последовательных участках:

$$U = U_1 + U_2 + \dots$$



Закон Ома в дифференциальной форме (4.8) справедлив как для однородного участка цепи, так и для участка цепи, на котором действуют сторонние силы. Только теперь его следует записать так:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{стор}) . \quad (4.22)$$

Закон Ома

$$U = RI$$

в этом виде справедлив и для неоднородного участка цепи, если напряжение  $U$  определить формулой (4.20).

#### 4.5. Закон Ома для полной цепи

Замкнутая электрическая цепь называется *полной*, если она содержит источник тока. Схема простейшей полной цепи показана на рис. 4.6. Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, т.е. источник тока, на этой схеме обведен пунктирной линией. Этот участок цепи обладает сопротивлением  $r$ , которое называют *внутренним* сопротивлением источника тока. Источник тока называют идеальным, если его внутреннее сопротивление равно нулю. На схеме идеальный источник тока изображают условно двумя параллельными линиями различной длины. Короткая линия обозначает электрод, на котором собираются отрицательные заряды, а длинная – электрод с положительными зарядами. К источнику тока подключен проводник, который называют *нагрузкой*. Сопротивление  $R$  этого проводника называют *внешним*, или сопротивлением нагрузки. При подключении к источнику тока нагрузки электрический ток в цепи будет идти от положительного электрода источника тока к отрицательному.

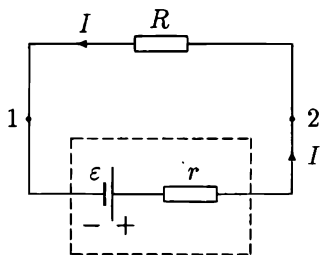


Рис. 4.6. Полная цепь. Источник тока и нагрузка

По определению падение напряжения на источнике тока

$$U_{ист} = \varphi_2 - \varphi_1 + \varepsilon ,$$

а на подключенном к нему проводнике напряжение будет

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

Сложив эти равенства, придем к уравнению

$$U + U_{уст} = \varepsilon, \quad (4.23)$$

согласно которому сумма падений напряжения в замкнутой электрической цепи (*контуре*) равна электродвижущей силе, действующей в этом контуре. По закону Ома

$$U = R I, \quad U_{уст} = r I.$$

Исключив при помощи этих формул напряжения  $U$  и  $U_{уст}$  из уравнения (4.23), получим закон Ома для полной цепи

$$(R + r) I = \varepsilon. \quad (4.24)$$

## 4.6. Правила Кирхгофа

Точки электрической цепи, в которых сходятся три и более провода, называют точками разветвления цепи, или *узлами*. Электрическая цепь, содержащая узлы, называется сложной, или *разветвленной*. В такой цепи можно выделить несколько замкнутых контуров. Примером разветвленной цепи может служить электрическая цепь, схема которой изображена на рис. 4.7.

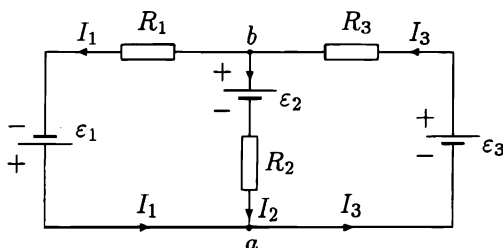


Рис. 4.7. Разветвленная электрическая цепь

Токи, текущие на различных участках разветвленной цепи, можно найти при помощи правил Кирхгофа. Прежде чем применять эти правила, следует стрелками указать на схеме предполагаемые направления токов на всех участках рассматриваемой цепи. При этом не следует опасаться выбрать неправильное направление тока. Если после проведения расчетов окажется, что сила тока на каком-то участке имеет отрицательное значение, то это будет означать, что в действительности ток здесь идет в направлении, противоположном выбранному.

*Первое правило Кирхгофа.* Алгебраическая сумма сил токов в проводниках, сходящихся в одном узле, равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (4.25)$$

В этой сумме сила тока, втекающего в узел, имеет знак, противоположный знаку силы тока, вытекающего из узла. Это правило можно сформулировать иначе. Сумма сил токов, втекающих в узел, равна сумме сил токов, вытекающих из этого узла.

*Второе правило Кирхгофа.* Алгебраическая сумма падений напряжения в контуре равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_i U_i = \sum_i \varepsilon_i. \quad (4.26)$$

Для определения знаков различных слагаемых в этом равенстве необходимо выбрать положительное направление обхода контура. Например, можно считать положительным направление обхода контура по часовой стрелке. В таком случае напряжение, создаваемое в проводнике током, текущим по часовой стрелке, следует считать положительным. В противном случае напряжение будет отрицательным. Электродвижущая сила считается положительной, если создаваемый ею ток течет в положительном направлении.

Для схемы на рис. 4.7 правила Кирхгофа приводят к уравнениям

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ -R_1 I_1 + R_2 I_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ -R_2 I_2 - R_3 I_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3. \end{cases}$$

Полученные уравнения образуют систему с неизвестными  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ .

## 4.7. Закон Джоуля – Ленца

Электрический ток, как об этом свидетельствует закон Ома, существует в проводнике благодаря действию на носители тока электростатических и сторонних сил. Под действием этих сил подвижные заряженные частицы в проводнике ускоряются. Однако, сталкиваясь с малоподвижными частицами среды, они отдают им часть своей кинетической энергии. Так, энергия носителей тока переходит во внутреннюю энергию проводника. При этом проводник нагревается и отдает тепло в окружающую среду.

Если ток, текущий в проводнике, не очень быстро изменяется с течением времени, то через любое сечение этого проводника за время  $dt$  будет перенесен один и тот же заряд

$$dQ = I dt .$$

Работа при переносе заряда  $dQ$  на некотором участке проводника равна произведению этого заряда на падение напряжения на данном участке:

$$dA = dQ U = I U dt .$$

Согласно закону сохранения энергии работа  $dA$  сил, действующих на носители тока, равна приращению  $dW$  их кинетической энергии, которое затем в виде тепла передается веществу проводника:

$$dW = dA .$$

Таким образом, в проводнике с током за время  $dt$  выделяется тепловая энергия

$$dW = I U dt . \quad (4.27)$$

Скорость преобразования энергии из одного вида в другой или скорость передачи энергии от одного тела к другому называют *мощностью*  $P$ . По определению

$$P = \frac{dW}{dt} .$$

В рассматриваемом случае мощность  $P$  есть количество тепла, которое выделяется за единицу времени в проводнике при прохождении по нему электрического тока, и называется *мощностью тока*. Теперь формулу (4.27) можно записать так:

$$dW = P(t) dt , \quad (4.28)$$

где

$$P = I U . \quad (4.29)$$

Тепло  $W$ , которое выделяется в проводнике с током за время от момента времени  $t_1$  до момента  $t_2$ , равно интегралу от выражения (4.28):

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt . \quad (4.30)$$

Формулы (4.27) – (4.30) выражают собой закон *Джозуля – Ленца*. Единица мощности в СИ – *ватт* ( $Вт$ ):  $[P] = Вт = А \cdot В$ .

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

(продолжение)

### 4.8. Сила тока – поток плотности тока

Рассмотрим теперь общий случай упорядоченного движения заряженных частиц в проводящей среде. Носители тока являются микроскопическими частицами, совершающими беспорядочное тепловое движение. При этом каждая частица в данное мгновение имеет свою скорость. Пусть в некотором физически бесконечно малом объеме  $dV$  проводника содержится  $dN$  носителей тока. *Средней скоростью* упорядоченного движения этих частиц называется вектор  $\vec{u}$ , определяемый формулой

$$\vec{u} = \frac{1}{dN} \sum_{dV} \vec{v}_i, \quad (4.31)$$

где  $\vec{v}_i$  – скорость одной из частиц, содержащихся в объеме  $dV$ ,  $i$  – номер частицы. Вектор  $\vec{u}$  можно определить таким образом для любой точки пространства внутри проводника, т.е. объем  $dV$  можно расположить в любом месте проводника. Иначе говоря, вектор средней скорости есть функция точки пространства. Кроме этого, средняя скорость может изменяться со временем:  $\vec{u} = \vec{u}(t, \vec{r})$ . Когда частицы движутся совершенно беспорядочно, их средняя скорость равна нулю. Если же заряженные частицы движутся преимущественно в одном направлении, то  $\vec{u} \neq 0$ , т.е. по проводнику идет электрический ток.

*Плотностью электрического тока* называют вектор

$$\vec{j} = \frac{1}{dV} \sum_{dV} q_i \vec{v}_i, \quad (4.32)$$

где  $q_i$  – заряд частицы под номером  $i$ , заключенной в объеме  $dV$ . Плотность тока в различных малых объемах  $dV$  проводника может принимать различные значения и может изменяться с течением времени:

$$\vec{j} = \vec{j}(t, \vec{r}). \quad (4.33)$$

В том случае, когда все носители тока имеют одинаковые заряды:  $q_i = q$ , формула (4.32) принимает вид

$$\vec{j} = \frac{q}{dV} \sum_{dV} \vec{v}_i = \frac{q n}{dN} \sum_{dV} \vec{v}_i = q n \vec{u}, \quad (4.34)$$

где

$$n = \frac{dN}{dV}$$

– концентрация носителей тока. Объемная плотность  $\rho$  свободных зарядов связана с концентрацией носителей тока соотношением

$$\rho = qn.$$

Поэтому формулу (4.34) можно записать так:

$$\vec{j} = \rho \vec{u}. \quad (4.35)$$

Пусть в пространстве, заполненном проводящей средой, по которой течет электрический ток, задано векторное поле  $\vec{j} = \vec{j}(t, \vec{r})$ , описывающее этот ток. *Линиями тока* называются линии, касательные к которым в каждой точке пространства совпадают по направлению с вектором плотности тока. Построим внутри проводника с током произвольный замкнутый контур  $C$ . Проведем через каждую точку этого контура линию тока. Образованная этими линиями поверхность называется *трубкой линий тока*, а объем внутри этой поверхности – *трубкой тока* (рис. 4.8).

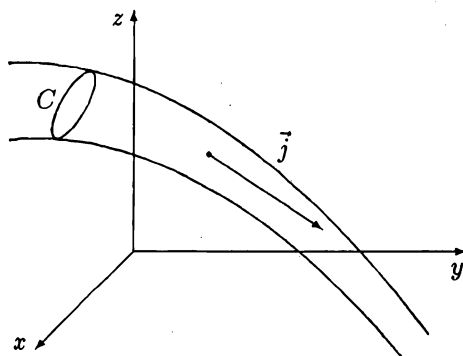


Рис. 4.8. Линии тока и трубка тока

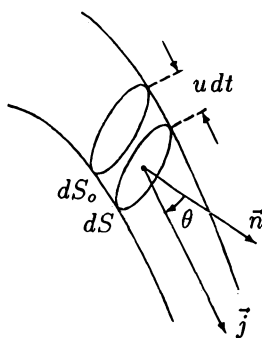


Рис. 4.9.  
К определению силы тока

Произведем сечение "узкой" трубки тока некоторой поверхностью  $S$  (рис. 4.9). Пусть  $dS$  есть площадь сечения, а  $\vec{n}$  – единичный вектор, перпендикулярный к поверхности  $S$ . Выясним физический смысл потока вектора плотности тока через элемент поверхности

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (4.36)$$

где  $\vec{dS} = \vec{n} dS$  – векторный элемент поверхности  $S$ . При помощи формулы (4.35) это равенство можно записать так:

$$dI dt = |q| u \cos \theta dS dt, \quad (4.37)$$

где  $\theta$  – угол между вектором плотности тока и нормалью к поверхности,  $dt$  – произвольный интервал времени. Построим еще одно сечение  $dS_0$  трубки тока, которое находится на расстоянии  $u dt$  от сечения  $dS$ . Объем части трубки тока между этими сечениями, т.е. объем цилиндра, равен  $u dt \cos \theta dS$ . Предположим, что электрический ток создается движением положительных зарядов. Эти заряды сначала протекают через сечение  $dS_0$ , а затем – через  $dS$ . Произведение  $u dt$  есть среднее расстояние, которое преодолевает носитель тока за время  $dt$ , двигаясь вдоль линии тока. Поэтому все носители тока, которые имелись внутри трубки тока между сечениями  $dS_0$  и  $dS$  в некоторый момент времени, спустя время  $dt$  окажутся за сечением  $dS$ . При этом они перенесут через сечение  $dS$  свой электрический заряд, который равен произведению плотности заряда  $\rho$  на объем той части трубки тока, где находились эти частицы. Таким образом, выражение (4.37) есть электрический заряд  $dQ$ , протекающий за время  $dt$  через элемент поверхности площадью  $dS$ :

$$dQ = dI dt.$$

Отношение заряда, протекающего через некоторую поверхность, ко времени протекания есть *сила тока*. Согласно этому определению величина  $dI$  в формулах (4.36) и (4.37) есть сила тока, протекающего через элемент поверхности  $dS$ :

$$dI = \frac{dQ}{dt}.$$

Заряд, протекающий за некоторое время через поверхность  $S$ , равен сумме зарядов, протекающих за это время через различные элементы поверхности. Поэтому сила тока  $I$ , протекающего через поверхность  $S$ , будет равна сумме сил токов  $dI$  через элементы этой поверхности, т.е. будет равна потоку вектора плотности тока:

$$I = \int_S \vec{j} \vec{dS}. \quad (4.38)$$

По определению заряд  $dQ$ , протекающий через поверхность  $S$  за время  $dt$  равен произведению силы тока на это время:

$$dQ = I dt. \quad (4.39)$$

Следует заметить, что величина (4.38) является алгебраической. Знак силы тока  $I$  зависит от выбора направления вектора  $\vec{n}$  нормали к поверхности. Если  $I < 0$ , то это означает, что в направлении нормали переносится отрицательный заряд  $dQ$  или положительный заряд  $|dQ|$  переносится в противоположном направлении.

**З а д а ч а.** Цилиндр радиуса  $a$  вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Цилиндр заряжен равномерно по объему. Плотность заряда равна  $\rho$ . Найти вектор плотности конвекционного тока.

## 4.9. Уравнение непрерывности

Когда заряженные частицы совершают направленное движение, их распределение в пространстве может изменяться с течением времени, т.е. объемная плотность зарядов в общем случае зависит не только от координат точки пространства, но и от времени:

$$\rho = \rho(t, \vec{r}). \quad (4.40)$$

Выведем соотношение, связывающее функции (4.33) и (4.40). Для этого рассмотрим произвольный объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ . Согласно определению объемной плотности заряда интеграл

$$Q(t) = \int_V \rho(t, \vec{r}) dV \quad (4.41)$$

есть электрический заряд, распределенный по объему  $V$ , в момент времени  $t$ . Этот заряд может изменяться с течением времени, если через поверхность  $S$  протекает электрический ток. Сила тока  $I$ , протекающего через поверхность  $S$  в направлении внешней нормали, есть поток вектора плотности тока:

$$I(t) = \oint_S \vec{j}(t, \vec{r}) \cdot \vec{dS}. \quad (4.42)$$

Пусть за время  $dt$  заряд в объеме  $V$  изменился на величину  $dQ$ . Этот заряд принадлежит тем носителям тока, которые пересекли поверхность  $S$  за это время. По определению сила тока  $I$  есть отношение заряда, протекающего через поверхность  $S$ , ко времени  $dt$ . Предположим, что сила тока  $I$  есть положительная величина. Это означает, что положительный заряд вытекает из объема  $V$  или отрицательный заряд втекает в этот объем. В таком случае заряд  $Q$  в объеме  $V$  уменьшается, а его приращение  $dQ$  будет отрицательным. Поэтому справедливо равенство

$$\frac{dQ}{dt} = -I, \quad (4.43)$$



которое выражает собой закон сохранения заряда.

Подставим интегралы (4.41) и (4.42) в равенство (4.43):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \vec{r}) dV = - \oint_S \vec{j}(t, \vec{r}) \vec{dS}.$$

При помощи теоремы Остроградского – Гаусса заменим поверхностный интеграл в правой части этого равенства объемным интегралом от дивергенции вектора  $\vec{j}$  плотности тока. После несложных преобразований придем к уравнению

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,} \quad (4.44)$$

которое называют *уравнением непрерывности*, или уравнением неразрывности.

Рассмотрим два частных случая. Для системы неподвижных зарядов объемная плотность не зависит от времени:  $\rho = \rho(\vec{r})$ , а плотность тока равна нулю:  $\vec{j} = 0$ . В этом случае уравнение непрерывности обращается в тождество. Постоянный электрический ток характеризуется не зависящими от времени плотностью заряда  $\rho = \rho(\vec{r})$  и вектором плотности тока  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ . При этом уравнение непрерывности принимает вид

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

#### 4.10. Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме

По определению работа при перемещении частицы равна скалярному произведению силы на вектор перемещения:  $\delta A = \vec{F} d\vec{r}$ . Поэтому работа действующих на один из носителей тока сил при его перемещении  $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$  будет

$$\delta A_i = \vec{F}_i \vec{v}_i dt,$$

где

$$\vec{F}_i = q_i \left( \vec{E}_i + \vec{E}_{\text{стоп}i} \right).$$

Работа  $\delta A_i$  идет на увеличение кинетической энергии носителя тока. При столкновениях с частицами среды он отдает им приобретенную кинетическую энергию. Таким образом, работа сил, действующих на носители

тока в проводнике, переходит во внутреннюю энергию проводника. Вычислим количество тепла  $dW^*$ , которое выделяется в объеме  $dV$  за время  $dt$ :

$$dW^* = \sum_{dV} \delta A_i = \sum_{dV} q_i \left( \vec{E}_i + \vec{E}_{cmop_i} \right) \vec{v}_i dt .$$

Поле внутри физически бесконечно малого объема  $dV$  можно считать однородным, поэтому

$$dW^* = \left( \vec{E} + \vec{E}_{cmop} \right) \sum_{dV} q_i \vec{v}_i dt .$$

При помощи определения (4.32) плотности тока этому выражению можно придать вид

$$dW^* = w(t, \vec{r}) dV dt , \quad (4.45)$$

где величина

$$w = \vec{j} \left( \vec{E} + \vec{E}_{cmop} \right) \quad (4.46)$$

называется *удельной мощностью тока*, или удельной мощностью джоулева энерговыделения. Величина  $w$  есть количество тепла, выделяющегося в единице объема за единицу времени. Равенства (4.45) и (4.46) выражают закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме.

Проинтегрировав равенство (4.45) по некоторому объему  $V$  придем к соотношению  $dW = P dt$ , где  $dW$  есть количество тепла, которое выделяется в объеме  $V$  за время  $dt$ , а мощность

$$P(t) = \int_V w(t, \vec{r}) dV . \quad (4.47)$$

Можно доказать, что в том случае, когда объем  $V$  ограничен линиями тока и эквипотенциальными поверхностями, подстановка выражения (4.46) под знак интеграла в (4.47) приводит к формуле  $P = IU$ .

#### 4.11. Задача о токе утечки конденсатора

В любом веществе всегда имеются (пусть в очень незначительных количествах) носители тока. Другими словами, любое вещество обладает способностью проводить электрический ток.

Одним из назначений конденсатора является сохранение зарядов, помещенных на его обкладках. Поэтому вещество, заполняющее пространство между обкладками конденсатора, должно иметь по возможности

наименьшую электропроводность. В противном случае электрический ток, обусловленный присутствием в веществе подвижных заряженных частиц, приведет к быстрому уменьшению зарядов на обкладках конденсатора. Такой ток называют *током утечки*.

Рассмотрим конденсатор с обкладками произвольной формы, который заполнен однородной и изотропной средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и удельным сопротивлением  $\rho$ . Найдем силу тока  $I$  утечки при условии, что на конденсатор подано напряжение  $U$ , а его емкость равна  $C$ .

Окружим одну из обкладок конденсатора воображаемой поверхностью  $S$ . По определению сила тока

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (4.48)$$

В силу закона Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}.$$

Так как среда однородна и ее удельное сопротивление всюду одинаково, после подстановки этого выражения в интеграл (4.48), получим

$$I = \frac{1}{\rho} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Теперь применим теорему Гаусса

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q,$$

где  $Q$  – заряд внутри поверхности  $S$ , т.е. на одной из обкладок конденсатора. Так как

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D},$$

сила тока

$$I = \frac{1}{\rho \epsilon} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\rho \epsilon}.$$

Заряд  $Q$  конденсатора пропорционален напряжению  $U$  на его обкладках:

$$Q = C U.$$

При помощи этой формулы найдем, что сила тока утечки

$$I = \frac{C U}{\rho \epsilon}.$$

# ЧАСТЬ 2

## МАГНЕТИЗМ

### ГЛАВА 5

#### ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЗАРЯДЫ И ТОКИ

---

##### 5.1. Сила Лоренца

Магнитное поле – это особый вид материи. Подобно тому, как электрическое поле проявляет себя действием на заряды, магнитное поле проявляется в том, что на движущиеся заряды и электрические токи в этом поле действуют силы. Количественной характеристикой магнитного поля служит вектор *магнитной индукции*  $\vec{B}$ . Если в пространстве существует магнитное поле, то в каждой его точке  $P(\vec{r})$  имеется вектор  $\vec{B}$ , который может изменяться с течением времени:

$$\vec{B} = \vec{B}(t, \vec{r}). \quad (5.1)$$

Магнитное поле называется постоянным, когда магнитная индукция  $\vec{B}$  от времени не зависит. Если вектор  $\vec{B}$  не зависит от радиус-вектора  $\vec{r}$ , то магнитное поле называется *однородным* (рис. 5.1).

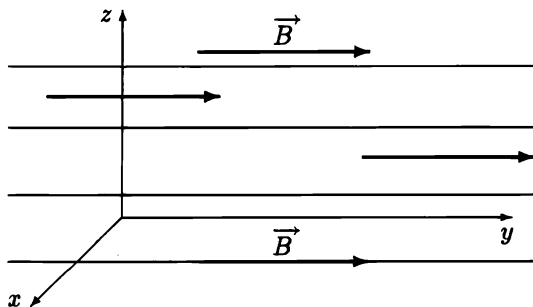


Рис. 5.1. Однородное магнитное поле

Опытным путем была установлена формула, которая описывает действие магнитного поля на движущийся со скоростью  $\vec{v}$  электрический заряд  $q$ . Сила, с которой магнитное поле действует на движущийся заряд, называется *силой Лоренца*. Эта сила коллинеарна векторному произведению вектора скорости на вектор магнитной индукции:

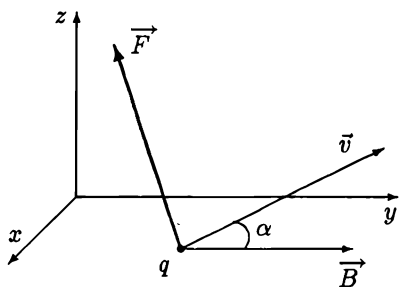


Рис. 5.2. Сила Лоренца

$$\vec{F} = q [\vec{v} \vec{B}]. \quad (5.2)$$

По определению векторного произведения модуль силы Лоренца

$$F = |q| v B \sin \alpha, \quad (5.3)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Формулу (5.2) можно рассматривать как определение вектора магнитной индукции. Единицей измерения магнитной индукции в СИ служит *тесла* (Т):  $[B] = T = H \cdot c / (Кл \cdot м) = кг / (с^2 \cdot А)$ .

Согласно формуле (5.2) сила Лоренца, действующая на заряд в магнитном поле, перпендикулярна и вектору скорости  $\vec{v}$  заряда, и вектору  $\vec{B}$  индукций магнитного поля (рис. 5.2). При этом скалярное произведение вектора скорости на вектор силы Лоренца

$$\vec{v} \vec{F} = 0,$$

т.е. мощность силы Лоренца равна нулю. Отсюда следует, что сила Лоренца работу не совершает и кинетическая энергия частицы при ее движении в магнитном поле со временем не изменяется.

## 5.2. Движение заряженной частицы в однородном и постоянном магнитном поле

Пусть в пространстве существует однородное и постоянное магнитное поле. Такое поле характеризуется в любой точке пространства одним и тем же вектором  $\vec{B}$ . Построим систему координат так, чтобы ось  $y$  совпадала по направлению с вектором  $\vec{B}$  магнитной индукции. При этом две проекции  $B_x$  и  $B_z$  вектора  $\vec{B}$  будут равны нулю:  $\vec{B} \{0, B, 0\}$ . Исследуем движение заряженной частицы в таком поле.

Запишем второй закон Ньютона:

$$m \dot{\vec{v}} = q [\vec{v} \vec{B}], \quad (5.4)$$

где  $m$  и  $q$  – масса и заряд частицы.

Проекция вектора  $[\vec{v} \vec{B}]$  на оси координат можно найти по известному правилу из векторной алгебры:

$$[\vec{v} \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = -B v_z \vec{i} + B v_x \vec{k}.$$

При помощи этого выражения запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$m \dot{v}_x = -q B v_z, \quad m \dot{v}_y = 0, \quad m \dot{v}_z = q B v_x. \quad (5.5)$$

Решив эту систему уравнений, можно найти при заданных начальных условиях зависимость от времени вектора скорости частицы:  $\vec{v} = \vec{v}(t)$ , а затем из уравнения  $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$  – зависимость  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , описывающую движение частицы.

**З а д а ч а.** Решить систему уравнений (5.5). Найти зависимость  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  при произвольных начальных условиях. Показать, что траекторией движения заряда в магнитном поле является винтовая линия.

Согласно формуле (5.2) сила Лоренца равна нулю, когда вектор скорости коллинеарен вектору магнитной индукции. Поэтому вдоль силовой линии однородного магнитного поля заряженная частица движется равномерно и прямолинейно:

$$\vec{F} = 0, \quad v = \text{const}.$$

Направим ось  $y$  вдоль силовых линий магнитного поля (рис. 5.3). В таком случае координата  $y$  заряженной частицы будет изменяться со временем по закону

$$y(t) = y_0 + v t.$$

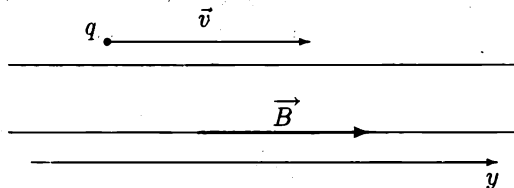


Рис. 5.3. Вдоль силовой линии однородного магнитного поля заряженная частица движется равномерно и прямолинейно

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  скорость заряда была перпендикулярна вектору  $\vec{B}$ :  $v_y(0) = 0$ . При этом из второго уравнения системы (5.5) следует, что  $v_y(t) = 0$ , т.е. частица все время будет двигаться в плоскости перпендикулярной вектору  $\vec{B}$ :  $\vec{v} \perp \vec{B}$ . Так как сила Лоренца работу не совершает и кинетическая энергия частицы со временем не изменяется, модуль вектора скорости постоянен. В этом случае тангенциальное ускорение  $a_\tau = \dot{v}$  будет равно нулю, а нормальное ускорение в силу второго закона Ньютона будет

$$a_n = \frac{|q|vB}{m}. \quad (5.6)$$

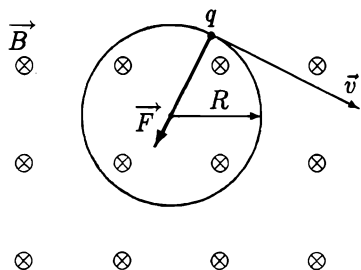


Рис. 5.4. Когда скорость заряженной частицы перпендикулярна силовым линиям однородного магнитного поля, она движется по окружности

Видно, что в постоянном и однородном магнитном поле нормальное ускорение заряженной частицы со временем не изменяется. Это означает, что частица будет двигаться по окружности (рис. 5.4). Радиус  $R$  этой окружности найдем при помощи формулы для центростремительного ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (5.7)$$

Приравняем правые части равенств (5.6) и (5.7). Получим:

$$R = \frac{mv}{|q|B}.$$

В общем случае заряженная частица в однородном магнитном поле может совершать два вида движений. Во-первых, частица может двигаться равномерно с некоторой скоростью  $v_{||}$  вдоль прямой, которая является силовой линией магнитного поля. Во-вторых, частица может двигаться с постоянной скоростью  $v_{\perp}$  по окружности, которая расположена в плоскости, к которой силовые линии магнитного поля перпендикулярны. Эти два движения частица может совершать одновременно. В таком случае траекторией движения частицы будет винтовая линия (рис. 5.5). Эта линия характеризуется такими параметрами, как радиус  $R$  и шаг  $h$ , т.е. наименьшее расстояние между двумя точками на этой линии, отсчитанное вдоль ее оси. При этом проекции  $v_{||}$  и  $v_{\perp}$  вектора скорости  $\vec{v}$  будут связаны с его модулем и углом  $\alpha$  между ним и вектором  $\vec{B}$  соотношениями

$$v_{||} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha.$$

Время  $T$ , за которое частица совершает один оборот по винтовой линии, называется периодом обращения. За это время, двигаясь по окружности со скоростью  $v_{\perp}$ , она пройдет путь  $2\pi R$ , а при движении вдоль силовой линии со скоростью  $v_{\parallel}$  — путь  $h$ :

$$2\pi R = v_{\perp} T, \quad h = v_{\parallel} T.$$

Радиус  $R$  винтовой линии связан со скоростью  $v_{\perp}$  соотношением

$$R = \frac{m v_{\perp}}{|q| B}.$$

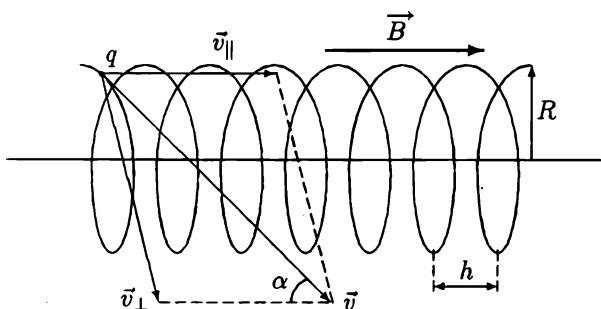


Рис. 5.5. Траектория движения заряженной частицы в однородном и постоянном магнитном поле — винтовая линия

### 5.3. Действие магнитного поля на проводник с током. Сила Ампера

Рассмотрим прямолинейный участок проводника с током, помещенного в пространстве, где имеется однородное магнитное поле. Электрический ток есть направленное движение заряженных частиц, называемых носителями тока. На движущийся в магнитном поле заряд действует сила Лоренца. Сумма всех сил Лоренца, которые действуют на носители тока в проводнике, может быть преобразована к виду

$$\vec{F} = I [\vec{l} \vec{B}], \quad (5.8)$$

где  $I$  — сила тока, текущего в проводнике;  $\vec{l}$  — вектор, направление которого совпадает с направлением тока, а модуль равен длине  $l$  рассматриваемого участка проводника (рис. 5.6). Сила  $\vec{F}$ , определяемая формулой



(5.8), называется *силой Ампера*. Согласно определению векторного произведения сила Ампера перпендикулярна векторам  $\vec{l}$  и  $\vec{B}$ , а ее модуль

$$F = I l B \sin \alpha, \quad (5.9)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{l}$  и  $\vec{B}$ . Сила Ампера не приложена к какой-либо точке проводника, а распределена по его объему.

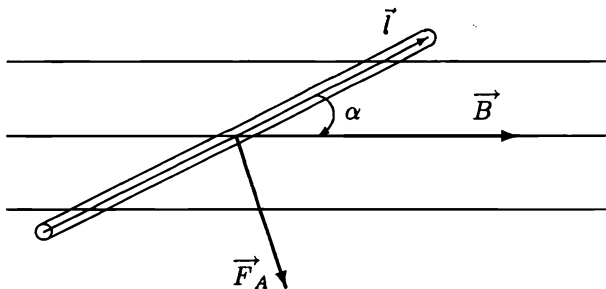


Рис. 5.6. Сила Ампера

Формулы (5.8) и (5.9) справедливы только в том случае, когда прямой проводник находится в однородном магнитном поле. Чтобы найти в общем случае силу, которая действует на тонкий провод с током в магнитном поле, разделим его на небольшие участки. Каждый такой участок можно считать прямолинейным, а магнитное поле в нем – однородным. По формуле (5.8) найдем силу Ампера  $\vec{dF}$ , которая действует на один из участков провода:

$$\vec{dF} = I [\vec{dl} \vec{B}], \quad (5.10)$$

где  $\vec{dl}$  – векторный элемент участка провода. Сила, с которой магнитное поле действует на тонкий провод с током, равна криволинейному интегралу

$$\vec{F} = \int_L \vec{dF}. \quad (5.11)$$

## ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЗАРЯДЫ И ТОКИ

(продолжение)

### 5.4. Контур с током в магнитном поле

Пусть прямоугольная плоская проволочная рамка (контур) с током находится в однородном магнитном поле  $\vec{B} \{0, B, 0\}$  (рис. 5.7, а). Вертикальная сторона рамки равна  $a$ , горизонтальная –  $b$ . Силы Ампера, действующие на вертикальные стороны рамки, равны по величине  $IaB$ , где  $I$  – сила тока. Эти силы образуют пару, момент которой равен

$$M = F b \sin \alpha = I a b B \sin \alpha, \quad (5.12)$$

где  $\alpha$  – угол между единичным вектором  $\vec{n}$ , перпендикулярным плоскости контура, и вектором  $\vec{B}$  индукции магнитного поля. Примем следующее условие. Пусть направление вектора  $\vec{n}$  будет связано с направлением тока в рамке правилом правого винта. Введем вектор

$$\vec{p}_m = I S \vec{n}, \quad (5.13)$$

где  $S$  – площадь рамки. В данном случае  $S = ab$ . Вектор  $\vec{p}_m$  называется магнитным моментом рамки с током.

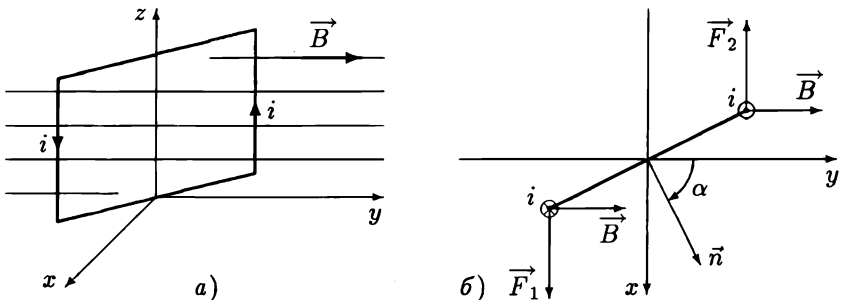


Рис. 5.7. Рамка с током в магнитном поле

Используя формулы (5.12), (5.13) и определение вектора момента силы, запишем для этого вектора выражения:

$$\vec{M} = [ \vec{p}_m \vec{B} ] \quad (5.14)$$

и

$$M = p_m B \sin \alpha . \quad (5.15)$$

Из этих формул следует, что магнитное поле стремится повернуть рамку с током в такое положение, в котором векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  направлены в одну сторону и угол  $\alpha = 0$  (рис. 5.7, б).

Пусть момент инерции рамки равен  $J$ . Запишем основное уравнение вращательного движения рамки

$$J \frac{d\omega}{dt} = - p_m B \sin \alpha , \quad (5.16)$$

где  $\omega = \dot{\alpha}$  – угловая скорость рамки. Знак "минус" в правой части этого уравнения означает, что силы Ампера стремятся повернуть рамку в положение устойчивого равновесия, когда  $\alpha = 0$ . Умножим левую часть уравнения (5.16) на  $\omega$ , а правую – на

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$$

и перенесем полученное справа выражение в левую часть

$$J \omega \frac{d\omega}{dt} + p_m B \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = 0 .$$

Это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \omega^2 - p_m B \cos \alpha \right) = 0 .$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{2} J \omega^2 - p_m B \cos \alpha = \text{const} .$$

Это равенство выражает собой закон сохранения энергии. Первое слагаемое есть кинетическая энергия вращения рамки, а второе

$$E_p = - p_m B \cos \alpha \quad (5.17)$$

– потенциальная энергия контура с током в магнитном поле. Формулу (5.17) можно записать так:

$$E_p = - \vec{p}_m \vec{B} . \quad (5.18)$$

Как следует из формул (5.17) и (5.18), когда рамка находится в положении, в котором векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  сонаправлены и угол  $\alpha = 0$ , ее потенциальная энергия принимает наименьшее значение  $-p_m B$ . Следовательно, это есть положение устойчивого равновесия.

Рассмотрим контур с током, который имеет возможность перемещаться в пространстве. Пусть каким-либо образом удастся сохранять ориентацию контура такой, что вектор  $\vec{p}_m$  всегда направлен так же, как и вектор  $\vec{B}$ . Из формулы (5.17) следует, что при этом энергия контура

$$E_p = -p_m B. \quad (5.19)$$

Если магнитное поле неоднородно, т.е. магнитная индукция различна в разных точках пространства, то на контур будет действовать сила, стремящаяся переместить его в те области пространства, где энергия контура меньше. Согласно (5.19) энергия контура меньше там, где больше магнитная индукция. Поэтому контур будет втягиваться в область более сильного поля (рис. 5.8).

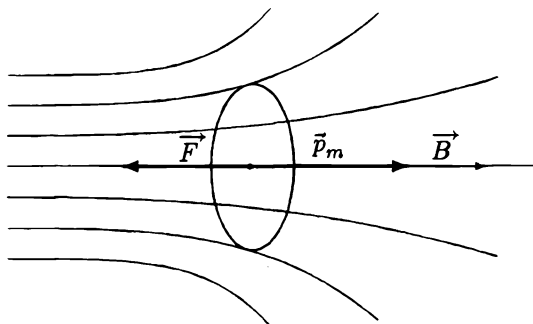


Рис. 5.8. Если векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  сонаправлены, то контур с током втягивается в область сильного магнитного поля

Когда магнитный момент  $\vec{p}_m$  направлен против поля, энергия контура

$$E_p = p_m B.$$

В этом случае контур будет выталкиваться из магнитного поля, т.е. на него будет действовать сила, которая стремится переместить контур в те области пространства, где поле слабее и поэтому энергия контура меньше (рис. 5.9).

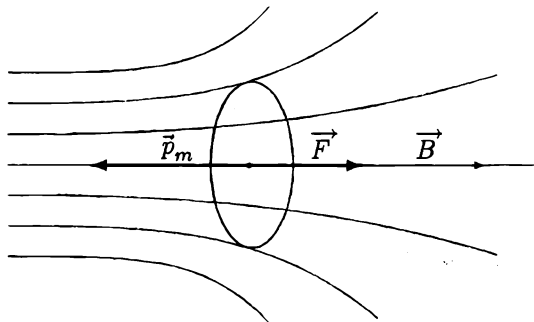


Рис. 5.9. Если векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  направлены противоположно, то контур с током выталкивается из магнитного поля

### 5.5. Определение отношения заряда электрона к его массе

Существуют различные методы определения отношения  $e/m$  заряда электрона к его массе, в основе которых лежат результаты исследования движения электрона в электрическом и магнитном полях. Один из них – метод магнетрона. Основным элементом экспериментальной установки, которая используется в этом методе, является специальная двух-электродная электронная лампа, электроды которой представляют собой коаксиальные (соосные) проводящие цилиндры. Воздух из лампы откачивают. Таким образом в ней создается достаточно глубокий вакуум, т.е. безвоздушное пространство. Лампу помещают внутри соленоида, который представляет собой цилиндрическую проволочную катушку. Когда по проволоке идет электрический ток, он создает внутри соленоида однородное магнитное поле, силовые линии которого направлены вдоль оси соленоида. Лампа располагается внутри соленоида так, что ее ось совпадает с осью соленоида. Внутренний цилиндр служит катодом, с поверхности которого в результате термоэлектронной эмиссии вылетают электроны, а внешний – анодом.

Когда между катодом и анодом приложено напряжение, в пространстве между ними создается электрическое поле, силовые линии которого суть радиальные прямые, перпендикулярные поверхности электродов. Электрон имеет электрический заряд  $-e$ . Поэтому на каждый электрон, вылетающий из катода лампы, действует со стороны электрического поля сила

$$\vec{F}_э = -e\vec{E}, \quad (5.20)$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля. Так как воздух из лампы откачан и электроны беспрепятственно движутся под действием электрического поля вдоль его силовых линий от катода к аноду.

Когда в соленоиде идет ток, создающий внутри него магнитное поле, на электрон действует сила Лоренца

$$\vec{F}_m = -e [\vec{v} \vec{B}], \quad (5.21)$$

которая называется *магнитной* в отличие от силы (5.20), называемой *электрической*. Индукция  $\vec{B}$  магнитного поля направлена вдоль оси соленоида. Магнитная сила перпендикулярна и вектору индукции  $\vec{B}$ , и вектору скорости электрона  $\vec{v}$ . Поэтому в магнитном поле траектория электрона искривляется. Чем сильнее магнитное поле, тем больше кривизна траектории электрона. При значениях магнитной индукции больших некоторого значения  $B_{кр}$ , которое называют *критическим*, траектории электронов искривляются так сильно, что электроны не достигают анода и ток в лампе прекращается. Измерив критическое значение  $B_{кр}$  магнитной индукции, можно по нему определить отношение  $e/m$ . Теперь выведем формулу, связывающую эти величины.

Исследуем движение одного электрона в пространстве между электродами под действием электрического и магнитного полей. Для этого запишем второй закон Ньютона

$$m \dot{\vec{v}} = -e \left( \vec{E} + [\vec{v} \vec{B}] \right), \quad (5.22)$$

где  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  – скорость электрона в момент времени  $t$ ,  $m$  – его масса. Построим прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось  $z$  совпала с осью цилиндрических электродов. При этом вектор  $\vec{E}$  напряженности электрического поля будет перпендикулярен к оси  $z$ :

$$E_z = 0. \quad (5.23)$$

Так как вектор  $\vec{B}$  магнитной индукции направлен вдоль оси  $z$ , его координаты

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = B. \quad (5.24)$$

Согласно определению векторного произведения, магнитная сила (5.21) перпендикулярна вектору  $\vec{B}$  и, следовательно, она также перпендикулярна к оси  $z$ . Таким образом, приходим к выводу, что проекция на

ось  $z$  приложенной к электрону силы равна нулю. Поэтому по закону Ньютона равно нулю ускорение электрона вдоль оси  $z$ :

$$\dot{v}_z = 0.$$

Отсюда следует, что

$$v_z = \text{const}.$$

Начальная скорость электрона, вылетающего с поверхности катода, определяется температурой катода и существенно меньше значений скорости, которую он приобретает при ускорении в электрическом поле. Поэтому можно положить

$$v_z = 0. \quad (5.25)$$

Это означает, что каждый электрон движется в пространстве между электродами так, что его скорость всегда перпендикулярна к оси  $z$ , т.е. его траектория лежит в плоскости  $z = \text{const}$ . Без ограничения общности можно считать, что электрон, движение которого будем исследовать, перемещается в плоскости

$$z = 0. \quad (5.26)$$

Для исследования движения электрона применим следующие два закона динамики материальной точки.

1. Производная по времени  $t$  от момента импульса

$$\vec{L} = m [\vec{r} \vec{v}] \quad (5.27)$$

частицы равна сумме моментов действующих на нее сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i, \quad (5.28)$$

где

$$\vec{M}_i = [\vec{r} \vec{F}_i], \quad (5.29)$$

— момент силы  $\vec{F}_i$ .

2. Приращение полной энергии  $\varepsilon$  частицы в течение некоторого времени равно работе  $A_{\text{нкс}}$ , произведенной за это время неконсервативными силами:

$$\Delta\varepsilon = A_{\text{нкс}}. \quad (5.30)$$

Наиболее просто движение электрона в рассматриваемом случае описывается при помощи полярных координат  $r$  и  $\alpha$  (рис. 5.10), которые связаны с декартовыми координатами  $x$  и  $y$  соотношениями

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha. \quad (5.31)$$

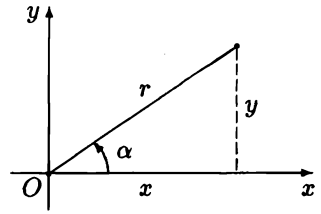


Рис. 5.10.  
Полярные координаты

Продифференцировав по времени эти соотношения, получим следующие выражения для декартовых координат вектора скорости:

$$v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos \alpha - r \dot{\alpha} \sin \alpha, \quad v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin \alpha + r \dot{\alpha} \cos \alpha. \quad (5.32)$$

При этом модуль скорости будет

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2}. \quad (5.33)$$

Найдем декартовы координаты вектора  $\vec{L}$  момента импульса электрона. По определению

$$\vec{L} = m [\vec{r} \vec{v}] = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = L_z \vec{k},$$

где

$$L_z = m(x v_y - y v_x)$$

- проекция вектора  $\vec{L}$  на ось  $z$ . Подстановка выражений (5.31) и (5.32) дает

$$L_z = m r^2 \dot{\alpha}. \quad (5.34)$$

Найдем теперь проекции на ось  $z$  моментов электрической и магнитной сил. Момент электрической силы

$$\vec{M}_s = [\vec{r} \vec{F}_s] = -e [\vec{r} \vec{E}]$$

равен нулю, так как вектор  $\vec{E}$  коллинеарен радиус-вектору  $\vec{r} = \{x, y, 0\}$  электрона. Проекция вектора магнитной силы найдем по формуле

$$\vec{F}_m = -e [\vec{v} \vec{B}] = -e \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = -e (v_y \vec{i} - v_x \vec{j}) B.$$



Теперь найдем проекции момента этой силы:

$$\vec{M}_M = [\vec{r} \vec{F}_M] = e B \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ -v_y & v_x & 0 \end{vmatrix} = M_z \vec{k},$$

где

$$M_z = e B (x v_x + y v_y)$$

– проекция на ось  $z$  вектора момента магнитной силы. Подстановка сюда выражений (5.31) и (5.32) приводит к формуле

$$M_z = e B r \dot{r}. \quad (5.35)$$

Из уравнения (5.28) вытекает уравнение для проекции  $L_z$  вектора  $\vec{L}$  на ось  $z$ :

$$\dot{L}_z = M_z. \quad (5.36)$$

Подстановка в это уравнение выражений (5.34) и (5.35) дает

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\alpha}) = e B r \dot{r}.$$

Это уравнение можно записать так:

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} e B \frac{d}{dt} (r^2).$$

Производные двух функций тождественно равны только тогда, когда сами функции отличаются друг от друга на постоянную величину  $C$ :

$$m r^2 \dot{\alpha} = \frac{1}{2} e B r^2 + C. \quad (5.37)$$

Постоянную  $C$  найдем из начальных условий. При вылете электрона с поверхности катода в момент времени  $t = 0$  его скорость можно считать равной нулю. Как следует из формулы (5.33), при этом

$$\dot{r}(0) = 0, \quad \dot{\alpha}(0) = 0. \quad (5.38)$$

Так как в момент времени  $t = 0$  электрон только вылетел с поверхности катода,

$$r(0) = r_\kappa, \quad (5.39)$$

где  $r_\kappa$  – радиус катода. При помощи этих условий из равенства (5.37) найдем, что

$$C = -\frac{1}{2} e B r_\kappa^2,$$

а само равенство (5.37) принимает вид

$$m r^2 \dot{\alpha} = \frac{1}{2} e B (r^2 - r_{\kappa}^2) . \quad (5.40)$$

На электрон действуют две силы. Электрическая сила является консервативной, т.е. может быть представлена в виде

$$\vec{F}_e = - \text{grad } U , \quad (5.41)$$

где

$$U = - e \varphi(r) \quad (5.42)$$

- потенциальная энергия электрона, а  $\varphi(r)$  - потенциал электрического поля на расстоянии  $r$  от оси симметрии рассматриваемого устройства. Так как магнитная сила перпендикулярна вектору скорости, ее работа равна нулю:  $A_{\text{мкс}} = 0$ . Таким образом, на основании равенства (5.30) приходим к выводу, что полная энергия электрона

$$\varepsilon = \frac{m v^2}{2} + U \quad (5.43)$$

при его движении не изменяется:

$$\varepsilon = \text{const} .$$

Используя формулы (5.33) и (5.42), это равенство можно записать так:

$$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2) - e \varphi(r) = \text{const} . \quad (5.44)$$

При  $t = 0$ , когда электрон только оторвался от поверхности катода, равенство (5.44) имеет вид

$$- e \varphi(r_{\kappa}) = \text{const} .$$

Теперь равенство (5.44) можно записать так:

$$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2) = e \Delta \varphi(r) , \quad (5.45)$$

где

$$\Delta \varphi(r) = \varphi(r) - \varphi(r_{\kappa})$$

- разность потенциалов между точкой, в которой находится электрон в данный момент времени  $t$  и поверхностью катода.

Исключив производную  $\dot{\alpha}$  из системы уравнений (5.40) и (5.45), придем к уравнению

$$\frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + \left( \frac{e B}{2 m r} \right)^2 (r^2 - r_{\kappa}^2)^2 \right) = e \Delta \varphi, \quad (5.46)$$

которое содержит в себе две переменные величины  $r$  и  $\dot{r}$ , характеризующие движение электрона.

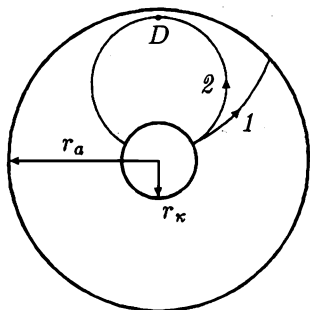


Рис. 5.11.  
Траектории движения  
электрона в магнетроне

Когда магнитная индукция  $B < B_{\kappa p}$ , кривизна траектории электрона не велика. При этом все электроны достигают анода (кривая 1 на рис. 5.11) и амперметр регистрирует ток в цепи. В сильных магнитных полях при  $B > B_{\kappa p}$  траектория электрона искривлена так, что он, не достигнув анода, возвращается на катод (кривая 2 на рис. 5.11). В этом случае сила анодного тока будет равна нулю. В точке  $D$  наибольшего удаления электрона от катода производная  $\dot{r}$  равна нулю. Кривизна траектории и расположение точки  $D$  определяется значением магнитной индукции. Когда  $B = B_{\kappa p}$ , траектория электрона касается поверхности анода, т.е. точка  $D$  находится от оси на расстоянии, равном радиусу анода:  $r = r_a$ . В этом случае уравнение (5.46) принимает вид

$$\frac{e B_{\kappa p}^2}{8 m r_a^2} (r_a^2 - r_{\kappa}^2)^2 = U_a,$$

где

$$U_a = \varphi(r_a) - \varphi(r_{\kappa})$$

— анодное напряжение, т.е. разность потенциалов между анодом и катодом. Из этого равенства найдем выражение для удельного заряда электрона:

$$\frac{e}{m} = \frac{8 U_a r_a^2}{B_{\kappa p}^2 (r_a^2 - r_{\kappa}^2)^2}. \quad (5.47)$$

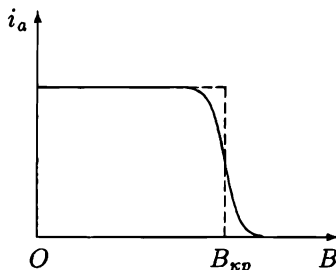
Для определения по этой формуле отношения заряда электрона к его массе необходимо знать радиусы  $r_{\kappa}$  и  $r_a$  катода и анода, и измерить напряжение  $U_a$  и критическое значение  $B_{\kappa p}$  магнитной индукции.

Рассмотрим способ измерения значения  $B_{кр}$ . Измерив силу тока  $i_c$  в соленоиде, индукцию магнитного поля внутри соленоида можно вычислить по формуле

$$B = \frac{\mu_0 N i_c}{\sqrt{l^2 + d^2}}, \quad (5.48)$$

где  $N$  – число витков в соленоиде,  $l$  и  $d$  – его длина и диаметр. Для нахождения значения  $B_{кр}$  в лампе устанавливают некоторую разность потенциалов  $U_a$  между анодом и катодом. Включают ток в соленоиде и постепенно увеличивают его силу  $i_c$ . При этом увеличивается индукция  $B$  магнитного поля в лампе. Если бы все электроны покидали катод со скоростью равной нулю, то зависимость величины анодного тока  $i_a$  от величины  $B$  индукции магнитного поля имела бы вид, показанный на рис. 5.12 (пунктирная линия). В таком случае при  $B < B_{кр}$  все электроны, испускаемые катодом, достигали бы анода ( $i_a \neq 0$ ), а при  $B > B_{кр}$  ни один электрон не попадал бы на анод ( $i_a = 0$ ).

Рис. 5.12. Зависимость силы тока  $i_a$  между катодом и анодом от магнитной индукции  $B$  поля в соленоиде



Однако некоторая некоаксиальность катода и анода, наличие остаточного газа в лампе, падение напряжения вдоль катода, неоднородность поля соленоида по высоте анода и т.д. приводят к тому, что критические условия достигаются для разных электронов при разных значениях  $B$ . Все же перелом кривой останется достаточно резким и может быть использован для определения  $B_{кр}$ . Измеряют значение тока  $i_c$  в соленоиде, при котором исчезает анодный ток. По формуле (5.48) вычисляют критическое значение  $B_{кр}$  магнитной индукции.

## 5.6. Эффект Холла

Когда заряженная частица движется в магнитном поле, на нее действует сила Лоренца

$$\vec{F}_m = q [\vec{v} \vec{B}], \quad (5.49)$$

где  $q$  и  $\vec{v}$  – заряд и скорость частицы.

Электрический ток в металле есть направленное движение электронов, заряд каждого из которых равен  $q = -e$ . Посмотрим, что происходит в металлической пластине, вдоль которой течет электрический ток (рис. 5.13), когда ее помещают в магнитное поле. Электрический ток обусловлен действием на электроны электрического поля. На рис. 5.13 вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси  $y$  и описывается формулой

$$\vec{E} = \{0, -E, 0\}.$$

Электрическая сила

$$\vec{F}_s = -e \vec{E},$$

действующая на каждый электрон, заставляет свободные (т.е. способные перемещаться по объему проводника) электроны двигаться вдоль оси  $y$  со средней скоростью  $\vec{v}$ . Это движение и есть электрический ток.

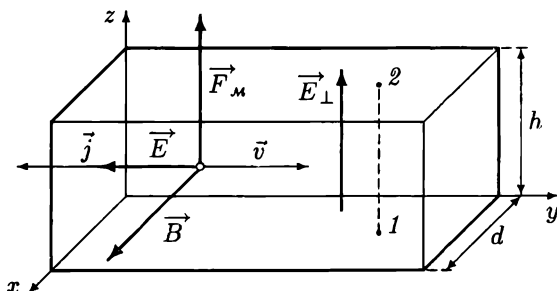


Рис. 5.13. К теории эффекта Холла

Найдем силу  $i$  и плотность  $j$  тока. Для этого рассмотрим свободные электроны, которые в некоторый момент времени  $t$  находились в объеме проводника между двумя поперечными сечениями, расположенными на расстоянии  $v dt$  одно от другого (рис. 5.14). Выражение  $v dt$  есть

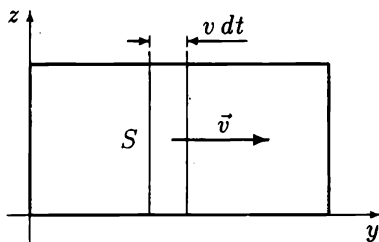


Рис. 5.14. К выводу формулы для силы тока в пластинке

путь, который проходит электрон за время  $dt$ . Поэтому все электроны, находящиеся в выделенном объеме, за время  $dt$  покинут его, переместившись через поперечное сечение. Число этих электронов равно произведению их концентрации  $n$  на объем  $S v dt$ . При этом через сечение проводника будет перенесен заряд

$$dQ = e n S v dt.$$

Разделив этот заряд на время  $dt$ , получим выражение для силы тока в проводнике:

$$i = e n S v. \quad (5.50)$$

Плотность тока

$$j = \frac{i}{S} = e n v.$$

Пусть вектор  $\vec{B}$  индукции внешнего поля направлен перпендикулярно линиям тока. Например, пусть он будет направлен вдоль оси  $x$ :

$$\vec{B} = \{B, 0, 0\}.$$

В таком случае на электрон, движущийся вдоль оси  $y$  со скоростью  $\vec{v}$ , будет действовать магнитная сила  $\vec{F}_m$ , отклоняющая его вверх. По этой причине на верхней грани пластины образуется скопление электронов, распределенных почти равномерно по поверхности, а на нижней грани возникнет тонкий слой положительных ионов, обнажившихся в результате ухода от них свободных электронов. Такое распределение зарядов напоминает распределение зарядов на обкладках плоского конденсатора и создает электрическое поле, вектор  $\vec{E}_\perp$  напряженности которого направлен вдоль оси  $z$ . Движение электронов к верхней грани пластины прекратится, когда сумма сил, действующих на электрон вдоль оси  $z$ , станет равной нулю:

$$\vec{F}_m - e \vec{E}_\perp = 0.$$

Из этого равенства при помощи формулы (5.49) найдем модуль вектора  $\vec{E}_\perp$  напряженности поперечного электрического поля:

$$E_\perp = v B. \quad (5.51)$$

Существование поперечного электрического поля может быть обнаружено экспериментально. К точкам 1 и 2 на верхней и нижней гранях пластины подключают вольтметр. Эти точки выбирают так, чтобы потенциалы в них были одинаковы, когда магнитное поле отсутствует. После включения магнитного поля вольтметр покажет некоторое значение разности потенциалов (электродвижущая сила Холла). Это значение связано с напряженностью поперечного электрического поля соотношением

$$\Delta\varphi = E_\perp h,$$

где  $h$  – расстояние между верхней и нижней гранями пластины. Эту формулу при помощи равенств (5.50) и (5.51) нетрудно преобразовать к

виду

$$\Delta\varphi = \frac{h i B}{e n S}.$$

Так как площадь поперечного сечения пластины  $S = h d$ , где  $d$  – толщина пластины в направлении магнитного поля, это выражение можно записать так:

$$\Delta\varphi = R \frac{i B}{d}, \quad (5.52)$$

где величина

$$R = \frac{1}{e n} \quad (5.53)$$

называется *постоянной Холла*. Эта величина является характеристикой исследуемого проводника. Измерив разность потенциалов  $\Delta\varphi$ , силу тока  $i$ , магнитную индукцию  $B$  и толщину пластины  $d$ , можно вычислить значение постоянной Холла для этого проводника. По этому значению можно определить концентрацию  $n$  носителей тока в проводнике.

Существуют вещества, в которых носители тока имеют положительный заряд. Для таких веществ векторы  $\vec{F}_m$  и  $\vec{E}_\perp$  на рис. 5.13 изменяют направление на противоположное. При этом изменится знак холловской разности потенциалов  $\Delta\varphi$ . Таким образом, измерения этой величины дают возможность не только найти значение концентрации носителей тока в проводнике, но определить знак заряда частиц, движение которых создает электрический ток в этом веществе.

Если известно значение постоянной Холла  $R$  для какого-либо вещества, то формулу (5.53) можно использовать для расчета магнитной индукции по измеренным значениям силы тока  $i$  и разности потенциалов  $\Delta\varphi$ :

$$B = \frac{d \Delta\varphi}{R i}. \quad (5.54)$$

Для этой цели часто используют полупроводниковый датчик Холла, так как постоянная Холла для полупроводников значительно больше, чем для проводников.

ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

6.1. Закон Био – Савара – Лапласа

Подобно тому, как электрическое поле создается электрическими зарядами, магнитное поле создается электрическими токами. Пусть по тонкому неподвижному проводу  $C$  течет электрический ток силой  $I$ . Рассмотрим малую часть провода, которую будем характеризовать вектором  $\vec{dl}$ . Этот вектор начинается в произвольной точке на проводе, его модуль равен длине  $dl$  рассматриваемой части провода, а направление совпадает с направлением тока (рис. 6.1).

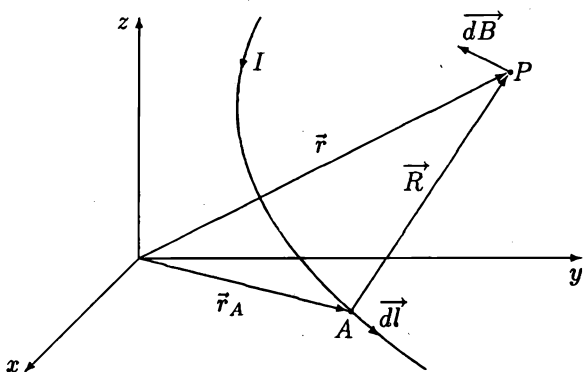


Рис. 6.1. К формулировке закона Био – Савара – Лапласа

Участок тока  $\vec{dl}$  создает в пространстве магнитное поле, индукция  $\vec{dB}$  которого в произвольной точке  $P(\vec{r})$  пространства определяется формулой

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4 \pi R^3} [d\vec{l} \vec{R} ], \quad (6.1)$$

где

$$\vec{R} = \vec{AP} = \vec{r} - \vec{r}_A \quad (6.2)$$

– вектор, соединяющий малый отрезок провода  $\vec{dl}$  с точкой  $P$ ,  $R = |\vec{AP}|$   
 – расстояние от точки  $A$  до точки  $P$ ,  $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ Т} \cdot \text{м}/\text{А}$  – так называемая магнитная постоянная, или магнитная проницаемость вакуума



ума. Формула (6.1) была установлена Лапласом при изучении результатов экспериментальных исследований магнитных полей токов в проводах различной формы, которые были проведены Био и Саваром.

Согласно формуле (6.1) модуль вектора  $\overrightarrow{dB}$  будет

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2} \sin \alpha, \quad (6.3)$$

где  $dl$  – длина вектора  $\overrightarrow{dl}$ ,  $\alpha$  – угол между векторами  $\overrightarrow{dl}$  и  $\overrightarrow{R}$ .

Магнитная индукция, создаваемая всем проводом с током, равна сумме векторов магнитной индукции от каждого малого участка тока. Это утверждение носит название *принципа суперпозиции полей*. Согласно этому принципу вектор магнитной индукции в точке  $P(\vec{r})$  выражается интегралом

$$\vec{B} = \int_C \overrightarrow{dB}, \quad (6.4)$$

где интегрирование производится по приращению  $\overrightarrow{dl}$  вектора  $\vec{r}_A$  вдоль кривой  $C$ .

## 6.2. Магнитное поле кругового тока

Рассмотрим магнитное поле постоянного тока  $I$ , текущего по проводу в форме окружности  $C$  радиуса  $a$ . Применим закон Био – Савара – Лапласа для определения магнитной индукции в центре кругового тока.

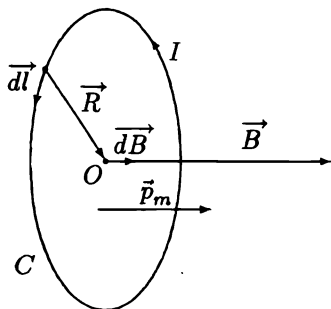


Рис. 6.2.

К расчету магнитного поля  
кругового тока

На рис. 6.2 изображены вектор  $\overrightarrow{dl}$ , характеризующий произвольный малый участок проводника с током, и вектор  $\overrightarrow{R}$ , соединяющий этот участок с точкой  $O$ , в которой требуется определить магнитную индукцию  $\vec{B}$ . По определению векторного произведения из формулы (6.1) следует, что вектор  $\overrightarrow{dB}$  магнитной индукции поля, создаваемого рассматриваемым участком тока, перпендикулярен и вектору  $\overrightarrow{dl}$ , и вектору  $\overrightarrow{R}$ . Таким образом, начало вектора  $\overrightarrow{dB}$  находится в точке  $O$ , а сам вектор перпендикулярен плоскости контура  $C$ .

Так как векторы  $\vec{dl}$  и  $\vec{R}$  образуют прямой угол, модуль вектора  $\vec{dB}$  согласно формуле (6.3) будет

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4 \pi a^2}.$$

Векторы  $\vec{dB}$  магнитной индукции полей, создаваемых различными участками контура в точке  $O$ , совпадают по направлению. В таком случае их векторная сумма будет представлять собой вектор  $\vec{B}$ , который имеет то же направление. При этом модуль этого вектора будет равен сумме модулей векторов  $\vec{dB}$ :

$$B = \oint_C dB = \frac{\mu_0 I}{4 \pi a^2} \oint_C dl.$$

Интеграл от  $dl$  равен длине окружности:

$$\oint_C dl = 2 \pi a^2.$$

Таким образом, приходим к следующей формуле для магнитной индукции поля, создаваемого круговым током в центре окружности:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 a}. \quad (6.5)$$

Модуль  $p_m$  вектора магнитного момента кругового тока равен произведению силы тока на площадь круга:

$$p_m = I \pi a^2.$$

Используя это соотношение, выражение (6.5) можно записать так:

$$B = \frac{\mu_0 p_m}{2 \pi a^3}. \quad (6.6)$$

В центре кругового витка с током вектор магнитной индукции направлен так же, как вектор магнитного момента  $\vec{p}_m$ . При этом справедливо соотношение

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2 \pi a^3}. \quad (6.7)$$

Отметим, что направление вектора магнитной индукции в центре кругового тока связано с направлением электрического тока правилом правого винта.

Линии в пространстве, к которым вектор  $\vec{B}$  в любой точке является касательным, называются силовыми линиями магнитного поля. На рис. 6.3 изображены силовые линии магнитного поля кругового тока.

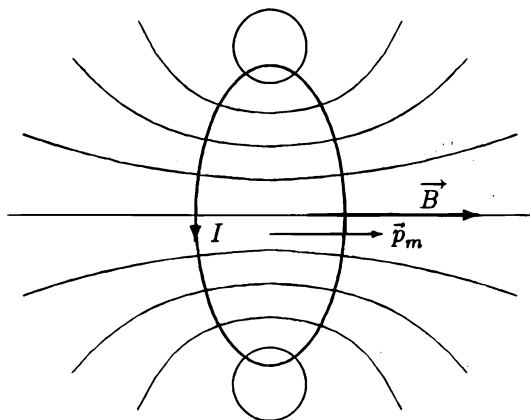


Рис. 6.3. Силовые линии магнитного поля кругового тока

### 6.3. Основные уравнения теории постоянного магнитного поля

Так же как из закона Кулона и принципа суперпозиции можно получить уравнения, описывающие постоянное электрическое поле, из закона Био – Савара – Лапласа (6.1) и принципа суперпозиции (6.4) можно получить уравнения для векторной функции

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}),$$

описывающей постоянное магнитное поле. Эти уравнения имеют вид:

$$\oint_C \vec{B} \, d\vec{l} = \mu_0 \sum I, \quad (6.8)$$

$$\oint_S \vec{B} \, d\vec{S} = 0. \quad (6.9)$$

Левая часть уравнения (6.8) есть циркуляция вектора  $\vec{B}$  магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру  $C$ , а правая часть пропорциональна алгебраической сумме  $\sum I$  токов, охватываемых этим контуром (рис. 6.4). Направление обхода контура  $C$  (т.е. направление вектора  $d\vec{l}$ ) может быть выбрано произвольно. При этом ток, охватываемый контуром, считается положительным, т.е. входит в сумму  $\sum I$  со знаком "плюс", если его направление связано с обходом контура правилом правого винта. В противном случае ток считается отрицательным. На рис. 6.4 токи  $I_1$  и  $I_2$  охватываются контуром  $C$ , а ток  $I_3$  - нет. При этом сумма токов  $\sum I = I_1 - I_2$ , так как ток  $I_1$  - положителен, а ток  $I_2$  - отрицателен.

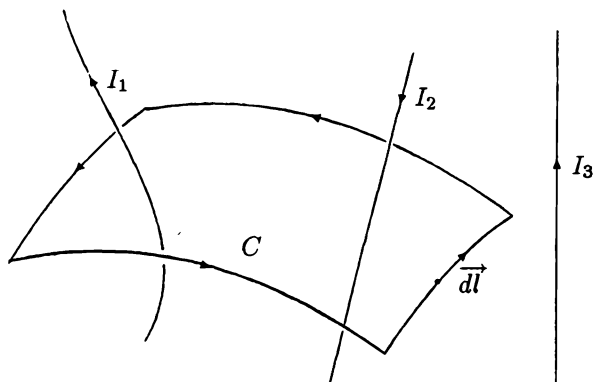


Рис. 6.4. К формулировке теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$

Если ток течет не по проводам, а в сплошной среде, то он описывается векторным полем  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$  плотности тока. В этом случае сила тока  $I$ , охватываемого контуром  $C$ , равна потоку вектора  $\vec{j}$  плотности тока через произвольную поверхность  $S$ , натянутую на этот контур (рис. 6.5):

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (6.10)$$

где направление нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  связано с обходом контура правилом правого винта. При этом вместо уравнения (6.8) следует записать

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (6.11)$$

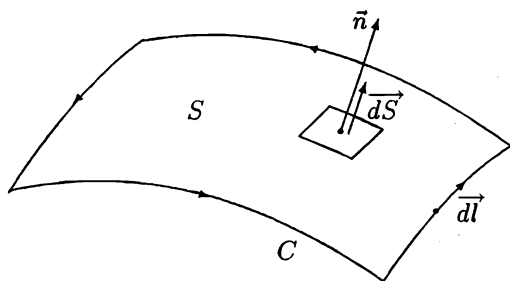


Рис. 6.5. Поверхность  $S$ , натянутая на контур  $C$

Уравнение (6.9) утверждает, что поток вектора индукции  $\vec{B}$  постоянного магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен нулю. Отсюда следует, что силовые линии постоянного магнитного поля всегда замкнуты в отличие от силовых линий постоянного электрического поля, которые начинаются и заканчиваются на зарядах.

Интегральным уравнениям (6.9) и (6.11) соответствуют дифференциальные уравнения

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (6.12)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (6.13)$$

Векторное поле, удовлетворяющее условиям (6.9) или (6.12), называют *вихревым*, или *соленоидальным*. Таковым является постоянное магнитное поле.

#### 6.4. Магнитное поле бесконечно длинного соленоида

Соленоид – это проволочная катушка цилиндрической формы. Его можно представить себе как множество сложенных в стопку круговых витков с током. Силовые линии магнитного поля, создаваемого электрическим током в соленоиде, показаны на рис. 6.6. Как видно из этого рисунка, внутри соленоида силовые линии почти прямые. Чем длиннее соленоид, т.е. чем больше его длина по сравнению с его радиусом, тем меньше кривизна силовых линий внутри соленоида. В таком случае

вектор  $\vec{B}$  магнитной индукции поля внутри соленоида будет направлен параллельно его оси. Причем так, что его направление будет связано с направлением тока в соленоиде правилом правого винта. Направим ось  $x$  вдоль оси соленоида. При этом проекция вектора магнитной индукции на ось  $x$  будет равна его модулю, а все другие его проекции будут равны нулю:

$$B_x = B, \quad B_y = B_z = 0.$$

Подставим эти проекции вектора  $\vec{B}$  в уравнение (6.12). Получим

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

Из этого равенства вытекает, что внутри соленоида вектор магнитной индукции не только сохраняет свое направление, но его модуль здесь всюду одинаков. Таким образом, приходим к выводу, что внутри длинного соленоида магнитное поле является однородным.

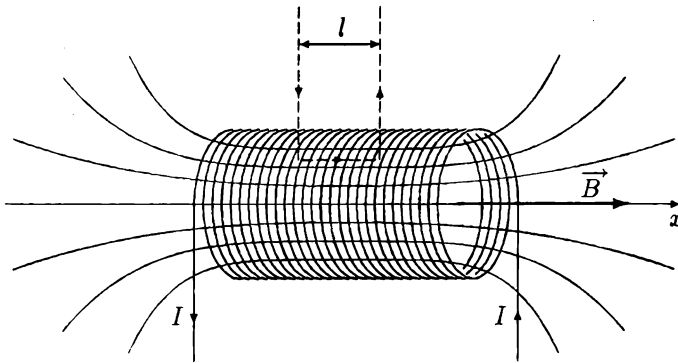


Рис. 6.6. Магнитное поле соленоида

Найдем модуль вектора магнитной индукции поля внутри соленоида при помощи теоремы (6.8) о циркуляции этого вектора. В качестве контура  $C$ , по которому будем вычислять циркуляцию вектора магнитной индукции, выберем ломанную линию, изображенную пунктиром на рис. 6.6. Отрезок этой линии длиной  $l$  находится внутри соленоида и совпадает с одной из силовых линий магнитного поля. Две перпендикулярные этому отрезку прямые начинаются на его концах и уходят в бесконечность. Во всех точках этих прямых вектор магнитной индукции или перпендикулярен им (внутри соленоида), или равен нулю (вне соленоида). Поэтому скалярное произведение  $\vec{B} d\vec{l}$  в этих точках равно нулю. Таким образом, циркуляция магнитной индукции по рассматриваемому

контуру  $C$  будет равна интегралу по отрезку силовой линии длиной  $l$ . С учетом того, что модуль вектора магнитной индукции есть постоянная величина будем иметь

$$\oint_C \vec{B} \, d\vec{l} = \int_l \vec{B} \, d\vec{l} = B \int_l dl = B l.$$

Пусть число витков соленоида, охватываемых контуром  $C$ , равно  $N$ . При этом сумма токов, охватываемых контуром, будет равна  $NI$ , где  $I$  – сила тока в одном витке соленоида. Теорема (6.8) приводит к равенству

$$B l = \mu_0 N I,$$

из которого найдем магнитную индукцию поля в соленоиде:

$$B = \mu_0 n I, \quad (6.14)$$

где

$$n = \frac{N}{l}$$

– число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

## 6.5. Магнитное поле прямого тока

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое электрическим током, текущим по тонкому бесконечно длинному проводу. Такая система обладает цилиндрической симметрией. Вследствие этого магнитное поле должно обладать следующими свойствами: 1) на любой прямой, параллельной проводу с током, вектор магнитной индукции должен быть всюду одинаков; 2) при повороте всего магнитного поля целиком вокруг провода оно не изменяется. В таком случае силовыми линиями магнитного поля должны быть окружности, центры которых лежат на оси провода с током (рис. 6.7), а вектор  $\vec{B}$  на любой из этих окружностей всюду имеет один и тот же модуль.

При помощи теоремы (6.8) о циркуляции вектора магнитной индукции найдем модуль этого вектора. С этой целью вычислим циркуляцию магнитной индукции по одной из силовых линий  $C$ , радиус которой равен  $a$ . Так как вектор  $\vec{B}$  является касательным к силовой линии, он коллинеарен векторному элементу  $d\vec{l}$  этой линии. Поэтому

$$\oint_C \vec{B} \, d\vec{l} = \oint_C B \, dl,$$

где  $B$  – модуль вектора магнитной индукции, который, как было сказано, всюду на окружности  $C$  один и тот же. Вынесем  $B$  за знак интеграла. После интегрирования будем иметь

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi a.$$

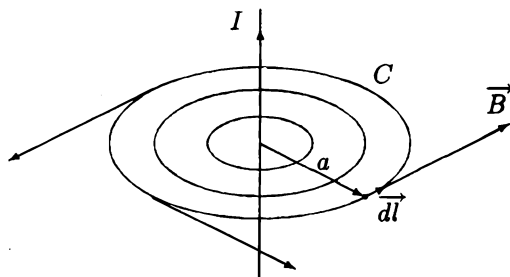


Рис. 6.7. Силовые линии магнитного поля прямого тока

Так как контур  $C$  охватывает всего один провод с током  $I$ , теорема (6.8) приводит к равенству

$$2\pi a B = \mu_0 I.$$

Отсюда найдем, что на расстоянии  $a$  от бесконечного прямого провода с током  $I$  индукция создаваемого им магнитного поля будет

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (6.15)$$

Как видно из рис. 6.7, направление вектора  $\vec{B}$  и направление тока  $I$  связаны правилом правого винта. В том, что это действительно так, нетрудно убедиться при помощи закона Био – Савара – Лапласа.

## 6.6. Взаимодействие токов

Рассмотрим два тонких параллельных друг другу прямых провода с токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 6.8.). Если расстояние  $R$  между проводами много меньше их длины, то магнитную индукцию поля, создаваемого первым проводом на этом расстоянии, можно найти по формуле (6.15):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}. \quad (6.16)$$



Направление вектора  $\vec{B}_1$  связано с направлением тока  $I_1$  правилом правого винта. Этот вектор изображен на рис. 6.8.

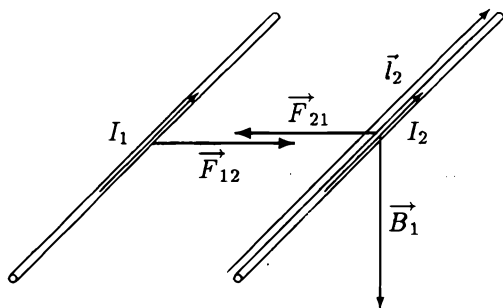


Рис. 6.8. Взаимодействие токов

Магнитное поле, создаваемое первым током, будет действовать на второй провод с силой Ампера  $\vec{F}_{21}$ , которая определяется формулой (5.8):

$$\vec{F}_{21} = I_2 [\vec{l}_2 \vec{B}_1], \quad (6.17)$$

где  $\vec{l}_2$  – вектор, длина которого равна длине  $l$  рассматриваемого участка второго провода. Этот вектор направлен вдоль провода по направлению тока. Модуль силы (6.17) будет

$$F_{21} = I_2 l B_1. \quad (6.18)$$

Подставив выражение (6.16) в формулу (6.18), получим следующее выражение для силы, с которой первый провод действует на участок второго провода длины  $l$ :

$$F_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2 \pi R}. \quad (6.19)$$

Направление силы  $\vec{F}_{21}$  найдем по формуле (6.17). Когда токи  $I_1$  и  $I_2$  текут в одном направлении эта сила будет направлена в сторону первого провода.

Сила  $\vec{F}_{12}$ , с которой второй провод действует на участок первого провода длины  $l$ , равна по модулю и противоположна по направлению силе  $\vec{F}_{21}$ .

Итак, установлено, что параллельные провода с токами, текущими в одном направлении, притягиваются. Нетрудно доказать, что провода с токами, текущими в противоположных направлениях, отталкиваются друг от друга.

При помощи формулы (6.19) определена единица силы тока в СИ. Как известно, эта единица называется *ампер*. По определению два длинных тонких провода с токами силой в один *ампер*, расположенные параллельно на расстоянии 1 м один от другого, взаимодействуют с силой  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на 1 м длины. Подставив эти значения в формулу (6.19), найдем, что магнитная постоянная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2.$$

Единица заряда в СИ – *кулон* – выражается через единицу силы тока:  $\text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}$ . Измерения силы взаимодействия двух точечных зарядов в 1 Кл привели к значению  $F = 9 \cdot 10^9$  Н при расстоянии между зарядами  $R = 1$  м. Используя эти значения, найдем электрическую постоянную  $\epsilon_0$  из закона Кулона

$$F = \frac{|Q_1 Q_2|}{4\pi \epsilon_0 R^2}.$$

Вычисления приводят к значению

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2).$$

Интересно отметить, что величина

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

численно равна скорости света в пустоте.

ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ  
(продолжение)

6.7. Расчет индукции магнитного поля кругового тока

Рассмотрим магнитное поле постоянного тока  $I$ , текущего по проводу в форме окружности  $C$  радиуса  $a$ . Применим закон Био - Савара - Лапласа (6.1)

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} [d\vec{l} \vec{R}]$$

и принцип суперпозиции (6.4)

$$\vec{B} = \int_C \vec{dB}$$

для определения магнитной индукции на оси симметрии этого кругового тока (рис. 6.9).

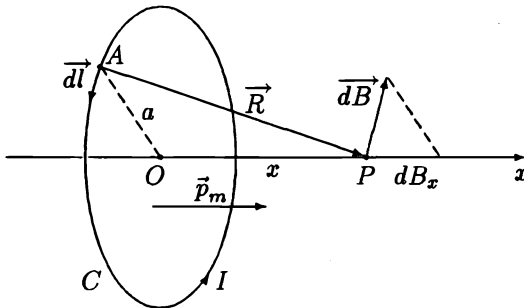


Рис. 6.9. К расчету магнитного поля кругового тока

Для расчета магнитной индукции  $\vec{B}$  выделим на контуре  $C$  векторный элемент  $d\vec{l}$ , начало которого находится в некоторой точке  $A$  этого контура. Построим вектор  $\vec{R}$ , который соединяет точку  $A$  с произвольной точкой  $P$  на оси симметрии контура:

$$\vec{R} = \overrightarrow{AP}.$$

Для определения положения точки  $P$  проведем координатную ось  $x$  вдоль оси симметрии, а начало отсчета поместим в центр контура. При этом расстояние  $R$  от точки  $A$  до точки  $P$  будет связано с координатой  $x$  последней соотношением

$$R = \sqrt{a^2 + x^2}. \quad (6.20)$$

Найдем вектор  $\vec{dB}$  магнитной индукции поля, создаваемого выделенным элементом тока  $\vec{dl}$  в точке  $P$ . По определению векторного произведения из закона Био - Савара - Лапласа следует, что вектор  $\vec{dB}$  перпендикулярен и вектору  $\vec{dl}$ , и вектору  $\vec{R}$ . При этом с учетом того, что векторы  $\vec{dl}$  и  $\vec{R}$  образуют прямой угол, модуль вектора  $\vec{dB}$  будет равен

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4 \pi R^2}. \quad (6.21)$$

Так как рассматриваемая система обладает осевой симметрией, вектор  $\vec{B}$  магнитной индукции поля, создаваемого всем контуром, на оси симметрии будет направлен вдоль этой оси. Следовательно, только проекция на ось  $x$  этого вектора будет отлична от нуля во всех точках этой оси:

$$B_x = B, \quad B_y = B_z = 0,$$

где  $B$  - модуль вектора магнитной индукции.

В силу принципа суперпозиции проекция на ось  $x$  вектора  $\vec{B}$  будет

$$B_x = \oint_C dB_x, \quad (6.22)$$

где  $dB_x$  - проекция на ось  $x$  вектора  $\vec{dB}$ . Используя подобие прямоугольных треугольников на рис. 6.9, находим, что

$$dB_x = \frac{a}{R} dB. \quad (6.23)$$

Подставив выражение (6.23) в формулу (6.22), с учетом (6.21) получим

$$B_x = \oint_C \frac{\mu_0 I a dl}{4 \pi R^3}.$$

Все величины под знаком интеграла не зависят от того, где на контуре  $C$  расположен векторный элемент  $\vec{dl}$ , и могут быть вынесены за интеграл.

Так как интеграл от  $dl$  равен длине  $2\pi a$  окружности, придем к формуле

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2 R^3}. \quad (6.24)$$

Подставив в эту формулу выражение (6.20), получим следующую зависимость магнитной индукции от координаты  $x$  точки  $P$ :

$$B_x(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (6.25)$$

### 6.8. Расчет индукции магнитного поля на оси соленоида

Получим формулу для индукции магнитного поля на оси соленоида длины  $l$  и радиуса  $a$ , на единицу длины которого приходится  $n$  витков (рис. 6.6). Пусть в соленоиде идет ток, сила которого равна  $I$ .

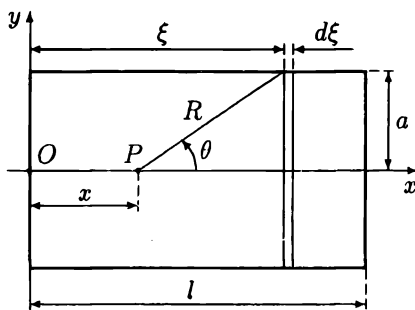


Рис. 6.10. К расчету индукции магнитного поля на оси соленоида

Будем рассматривать соленоид как совокупность узких колец с током. Одно из таких колец показано на рис. 6.10. Положение этого кольца определяется координатой  $\xi$ , которая изменяется в пределах от 0 до  $l$ , а его ширина равна  $d\xi$ . Так как рассматриваемое кольцо содержит  $n d\xi$  витков, круговой ток, текущий по кольцу, имеет силу

$$di = I n d\xi. \quad (6.26)$$

Этот ток создает магнитное поле, индукцию  $dB$  которого в произвольной точке  $P$  на оси соленоида можно найти по формуле (6.24):

$$dB = \frac{\mu_0 a^2 di}{2 R^3}, \quad (6.27)$$

где расстояние от точки  $P$  до кольца с током

$$R = \sqrt{a^2 + (\xi - x)^2},$$

$x$  – координата точки  $P$ .

Индукция  $B$  магнитного поля, создаваемого в точке  $P$  всеми витками соленоида, в силу принципа суперпозиции равна интегралу от выражения (6.27):

$$B = \frac{1}{2} \mu_o I n a^2 \int_0^l \frac{d\xi}{R^3}. \quad (6.28)$$

Для вычисления этого интеграла удобно ввести новую переменную интегрирования – угол  $\theta$ . Как видно из рис. 6.10, угол  $\theta$  таков, что

$$R = \frac{a}{\sin \theta} \quad (6.29)$$

и

$$\xi - x = a \operatorname{ctg} \theta. \quad (6.30)$$

Продифференцировав равенство (6.30) при  $x = \text{const}$ , получим

$$d\xi = \frac{a d\theta}{\sin^2 \theta}. \quad (6.31)$$

Подстановка выражений (6.29) и (6.31) под знак интеграла в формуле (6.28) дает

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_o I n \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta,$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – наибольшее и наименьшее значения угла  $\theta$ , зависящие от положения точки  $P$  на оси соленоида. Интегрирование по формуле Ньютона – Лейбница приводит к выражению

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_o I n (\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \quad (6.32)$$

Выразим  $\cos \theta_1$  и  $\cos \theta_2$  через  $x$  для значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству

$$0 \leq x \leq l,$$

т.е. для точек, лежащих на оси  $x$  внутри соленоида. Из построений на рис. 6.11 найдем, что

$$\cos \theta_1 = \frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + a^2}}, \quad \cos \theta_2 = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Подставив эти выражения в формулу (6.32), будем иметь зависимость

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 I n \left( \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + a^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right). \quad (6.33)$$

Эта формула дает следующие значения магнитной индукции на торцах соленоида и в его середине:

$$B(0) = B(l) = \frac{\mu_0 I n l}{2\sqrt{l^2 + a^2}}, \quad B\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\mu_0 I n l}{\sqrt{l^2 + D^2}},$$

где  $D = 2a$  – диаметр соленоида.

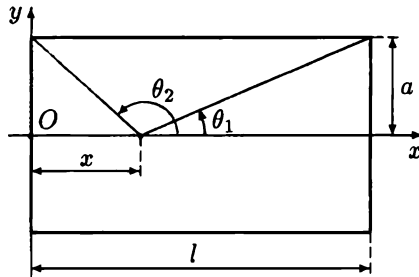


Рис. 6.11. К вычислению магнитной индукции поля в соленоиде

Нетрудно убедиться в том, что формула (6.33) справедлива для всех точек на оси соленоида. Согласно этой формуле магнитная индукция монотонно убывает до нуля при  $|x| \rightarrow \infty$ . График зависимости  $B = B(x)$ , определяемый формулой (6.33), изображен на рис. 6.12. Интересно отметить, что при  $l \rightarrow \infty$  формула для магнитной  $B(l/2)$  индукции в середине соленоида переходит в полученное ранее выражение  $B = \mu_0 I n$  для магнитной индукции внутри бесконечного соленоида.

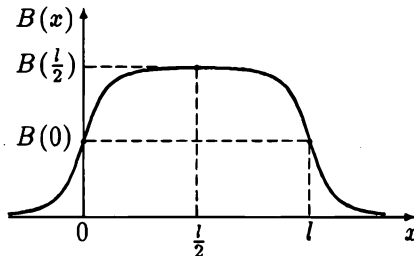


Рис. 6.12. Магнитная индукция на оси соленоида

## 6.9. Магнитное поле прямого отрезка с током

Магнитное поле, создаваемое отрезком прямого провода, обладает осевой симметрией. При этом его силовыми линиями будут окружности, центры которых лежат на оси симметрии. Одна из силовых линий показана на рис. 6.13. Найдем магнитную индукцию поля, создаваемого отрезком прямого провода. Для этого применим закон Био – Савара – Лапласа (6.1).

Векторные элементы  $\vec{dl}$  различных участков провода и соответствующие им векторы  $\vec{R}$ , заканчивающиеся в произвольной точке  $P$  пространства, лежат в плоскости, которая содержит в себе эту точку и провод. Поэтому согласно определению векторного произведения все векторы  $d\vec{B}$  магнитной индукции полей, создаваемых в точке  $P$  различными элементами  $\vec{dl}$  провода, коллинеарны. Вследствие этого модуль  $B$  вектора  $\vec{B}$  равен сумме модулей векторов  $d\vec{B}$ :

$$B = \int dB, \quad (6.34)$$

где

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4 \pi R^2}, \quad (6.35)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{dl}$  и  $\vec{R}$ ;  $dl$  – модуль вектора  $\vec{dl}$ .

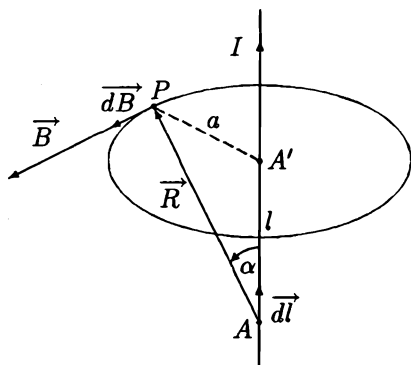


Рис. 6.13. К расчету индукции магнитного поля отрезка тока

Из треугольника  $AA'P$  на рис. 6.13 найдем, что расстояние  $R$  от точки  $A$  до точки  $P$  и расстояние  $l$  от точки  $A$  до точки  $A'$  таковы, что

$$R = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad l = a \operatorname{ctg} \alpha.$$



При этом

$$dl = \frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подстановка этих выражений в формулу (6.35) преобразует ее к виду

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha.$$

Найдем модуль  $B$  вектора  $\vec{B}$  по формуле (6.34):

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha,$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – значения угла  $\alpha$ , соответствующие концам рассматриваемого отрезка провода. Интегрирование по формуле Ньютона – Лейбница приводит к выражению

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (6.36)$$

Для бесконечного провода  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 = \pi$ . В этом случае формула (6.36) принимает вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

## 6.10. Теорема Стокса

Пусть в пространстве задано векторное поле  $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ . Построим некоторую поверхность и вырежем из нее посредством контура  $C$  часть  $S$  (рис. 6.5). Про эту часть поверхности говорят, что она натянута на контур  $C$ . Про контур  $C$  можно сказать, что он ограничивает поверхность  $S$ . Вырежем из поверхности  $S$  бесконечно малый прямоугольник площадью  $dS$ . Построим декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало  $O$  совпало с одной из вершин прямоугольника, а координатные оси  $x$  и  $y$  проходили через его стороны (рис. 6.14). Другие вершины прямоугольника обозначим  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Пусть стороны  $OA$  и  $BC$  этого прямоугольника, параллельные оси  $x$ , равны  $dx$ , а стороны  $AC$  и  $CO$ , параллельные оси  $y$ , –  $dy$ . При этом вершины прямоугольника будут иметь следующие координаты:

$$A(dx, 0, 0), \quad B(dx, dy, 0), \quad C(0, dy, 0).$$

Вычислим циркуляцию

$$\oint_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

вектора  $\vec{a}$  по контуру  $C_1 = OABCO$ . Направим нормаль  $\vec{n}$  к плоскости прямоугольника  $C_1$  вдоль оси  $z$ :

$$\vec{n} = \vec{k},$$

где  $\vec{k}$  – единичный орт, направленный вдоль оси  $z$ . При этом векторный элемент поверхности будет

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{k}, \quad (6.37)$$

где  $dS = dx \, dy$  – площадь прямоугольника.

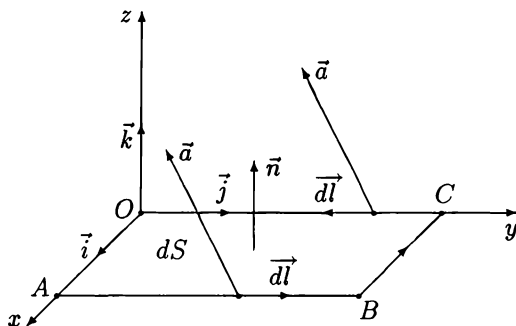


Рис. 6.14. К выводу теоремы Стокса

Будем обходить контур  $C_1$  так, чтобы направление обхода, т.е. направление векторов  $d\vec{l}$ , было связано с направлением нормали  $\vec{n}$  правилом правого винта. В таком случае векторный элемент контура будет

$$d\vec{l} = \begin{cases} dx \cdot \vec{i} & \text{на } OA, \\ dy \cdot \vec{j} & \text{на } AB, \\ -dx \cdot \vec{i} & \text{на } BC, \\ -dy \cdot \vec{j} & \text{на } CO. \end{cases}$$

Циркуляция вектора  $\vec{a}$  по прямоугольнику  $C_1$  равна сумме криволинейных интегралов по его сторонам:

$$\oint_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{OA} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{CO} \vec{a} \cdot d\vec{l}. \quad (6.38)$$

Так как стороны прямоугольника  $C_1$  бесконечно малы, эти интегралы с большой точностью будут равны следующим произведениям:

$$\int_{OA} \vec{a} d\vec{l} = a_x(0, 0, 0) dx, \quad \int_{AB} \vec{a} d\vec{l} = a_y(dx, 0, 0) dx,$$

$$\int_{BC} \vec{a} d\vec{l} = -a_x(0, dy, 0) dx, \quad \int_{CO} \vec{a} d\vec{l} = -a_y(0, 0, 0) dx.$$

Подстановка этих произведений в формулу (6.38) дает

$$\oint_{C_1} \vec{a} d\vec{l} = -(a_x(0, dy, 0) - a_x(0, 0, 0)) dx + (a_y(dx, 0, 0) - a_y(0, 0, 0)) dy.$$

Так как

$$a_x(0, dy, 0) - a_x(0, 0, 0) = \frac{\partial a_x}{\partial y} dy,$$

$$a_y(dx, 0, 0) - a_y(0, 0, 0) = \frac{\partial a_y}{\partial x} dx,$$

получим

$$\oint_{C_1} \vec{a} d\vec{l} = \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6.39)$$

Ротор вектора  $\vec{a}$  есть вектор, декартовы координаты которого определены следующей формулой:

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Согласно этой формуле проекция вектора  $\text{rot } \vec{a}$  на ось  $z$  будет

$$(\text{rot } \vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Теперь с учетом формулы (6.37) выражение (6.39) можно записать так:

$$\oint_{C_1} \vec{a} d\vec{l} = \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{dS}. \quad (6.40)$$

Таким образом, циркуляция вектора  $\vec{a}$  по бесконечно малому прямоугольному контуру  $C_1$  равна потоку ротора  $\text{rot } \vec{a}$  вектора  $\vec{a}$  через плоскость, ограниченную этим прямоугольником.

Произвольную поверхность  $S$  можно разрезать на множество бесконечно малых прямоугольников  $C_i$ . Докажем, что сумма циркуляций вектора  $\vec{a}$  по этим прямоугольникам равна циркуляции вектора  $\vec{a}$  по контуру  $C$ , который ограничивает поверхность  $S$  (рис. 6.5):

$$\sum_i \oint_{C_i} \vec{a} d\vec{l} = \oint_C \vec{a} d\vec{l}. \quad (6.41)$$

Рассмотрим два соприкасающихся прямоугольника  $C_1$  и  $C_2$  (рис. 6.15, а). Криволинейные интегралы

$$\int_{AB} \vec{a} d\vec{l} \quad \text{и} \quad \int_{BA} \vec{a} d\vec{l}$$

по совпадающим участкам контуров равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Поэтому их сумма равна нулю. Следовательно, справедливо равенство

$$\int_{C_1} \vec{a} d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{a} d\vec{l} = \int_{C'} \vec{a} d\vec{l},$$

где  $C'$  – контур, огибающий оба прямоугольника  $C_1$  и  $C_2$  (рис. 6.15, б).

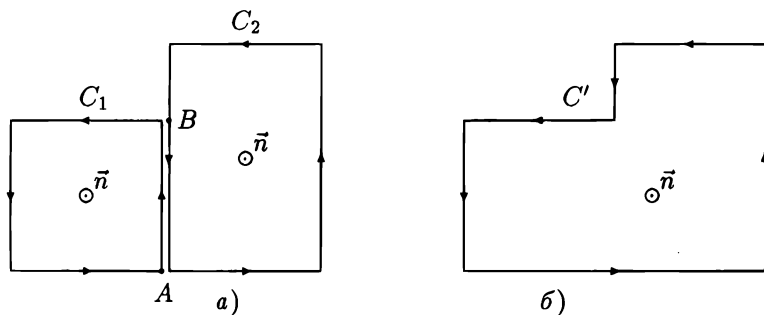


Рис. 6.15. К выводу теоремы Стокса

Аналогично, в левой части равенства (6.41) взаимно уничтожаются криволинейные интегралы по совпадающим участкам прямоугольников и остается только интеграл по кривой  $C$ , окаймляющей поверхность  $S$ . Согласно соотношению (6.40) каждое слагаемое в левой части равенства (6.41) равно элементарному потоку вектора  $\text{rot } \vec{a}$  через поверхность  $dS_i$ , ограниченную прямоугольником  $C_i$ . Так как поверхность  $dS_i$  есть элемент поверхности  $S$ , левая часть равенства (6.41) будет равна полному

потоку вектора  $\text{rot } \vec{a}$  через поверхность  $S$ . Таким образом, доказана *теорема Стокса*:

$$\oint_C \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{a} d\vec{S}. \quad (6.42)$$

Согласно этой теореме циркуляция вектора  $\vec{a}$  по произвольному замкнутому контуру  $C$  равна потоку ротора этого вектора через произвольную поверхность  $S$ , натянутую на этот контур (рис. 6.5), при условии, что направление обхода контура (т.е. направление вектора  $d\vec{l}$ ) связано с направлением нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  правилом правого винта.

### 6.11. Вывод дифференциальных уравнений теории постоянного магнитного поля

Векторная функция

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}),$$

описывающая постоянное магнитное поле, удовлетворяет интегральным уравнениям (6.9) и (6.11):

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad \oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Получим из этих уравнений дифференциальные уравнения (6.12) и (6.13).

При помощи теоремы Остроградского – Гаусса преобразуем в уравнении (6.9) поток вектора  $\vec{B}$  через замкнутую поверхность  $S$  в интеграл по объему, заключенному внутри этой поверхности, от дивергенции магнитной индукции. Будем иметь

$$\int_V \text{div } \vec{B} dV = 0.$$

Интеграл по произвольному объему  $V$  всегда равен нулю только в том случае, когда равно нулю подынтегральное выражение. Таким образом, приходим к уравнению (6.12)

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

Преобразуем циркуляцию вектора  $\vec{B}$  в уравнении (6.11) при помощи теоремы Стокса в поверхностный интеграл от ротора магнитной индукции

ции по той же натянутой на контур  $C$  поверхности  $S$ , по которой интегрируется плотность тока в правой части этого уравнения:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{B} \, d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} \, d\vec{S}.$$

Два интеграла по произвольной поверхности  $S$  равны друг другу тогда и только тогда, когда равны подынтегральные выражения. Таким образом, получим уравнение (6.13)

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

**Задача 1.** По объему бесконечно длинного цилиндра радиуса  $R$  вдоль его оси идет электрический ток постоянной плотности  $\vec{j}$ . Найти индукцию магнитного поля, создаваемого этим током.

**Задача 2.** Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  заряжен равномерно по объему с плотностью заряда  $\rho$ . Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Найти вектор магнитной индукции  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ .

### 7.1. Электрические токи в атомах и молекулах

Согласно современным представлениям о строении атомов и молекул они состоят из положительно заряженных ядер и вращающихся вокруг них отрицательно заряженных электронов. Самой простой моделью атома является так называемая *планетарная модель*, в которой электроны рассматриваются как материальные точки, вращающиеся по круговым орбитам вокруг ядра. Эта модель позволяет в первом приближении объяснить магнитные свойства различных веществ (магнетиков).

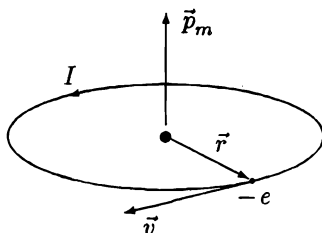


Рис. 7.1. К вычислению магнитного момента электрона в атоме

Итак, пусть электрон в атоме движется вокруг ядра по окружности (рис. 7.1). В таком случае электрон подобен круговому контуру с током и также характеризуется магнитным моментом  $\vec{p}_m$ . Направление тока, создаваемого вращающимся электроном, противоположно направлению его скорости, так как электрон несет отрицательный заряд  $-e$ . По определению вектор  $\vec{p}_m$  перпендикулярен плоскости орбиты электрона, а его направление связано с направлением тока в контуре правилом правого винта. По определению модуль вектора  $\vec{p}_m$  равен произведению силы тока на площадь контура:

$$p_m = I S.$$

Сила тока, создаваемого вращающимся по орбите электроном, равна отношению его заряда к периоду  $T$  обращения электрона вокруг ядра:

$$I = \frac{e}{T}.$$

Период  $T$  связан со скоростью  $v$  и длиной орбиты  $2\pi r$  соотношением

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Площадь круговой орбиты

$$S = \pi r^2.$$

При помощи этих соотношений найдем, что

$$p_m = \frac{1}{2} e v r.$$

Рассмотренный магнитный момент  $\vec{p}_m$  электрона обусловлен его движением вокруг ядра и называется орбитальным магнитным моментом. В некотором смысле электрон подобен вращающемуся заряженному шару. Поэтому электрона имеет еще так называемый собственный магнитный момент.

В атомах и молекулах имеется несколько электронов. *Магнитным моментом*  $\vec{p}_m$  молекулы (или атома) называется векторная сумма магнитных моментов входящих в ее состав электронов:

$$\vec{p}_m = \sum_i \vec{p}_{m_i}, \quad (7.1)$$

где  $\vec{p}_{m_i}$  – магнитный момент  $i$ -го электрона, который равен сумме его орбитального и собственного магнитных моментов.

Магнитное поле, создаваемое токами, которые не входят в состав рассматриваемой системы, называется внешним по отношению к этой системе.

Молекула называется *диамагнитной*, если ее магнитный момент в отсутствие внешнего поля равен нулю. Под действием внешнего магнитного поля диамагнитная молекула приобретает магнитный момент. Это явление называется *намагничиванием*. Молекула, магнитный момент которой не равен нулю, даже когда внешнего поля нет, называется *парамагнитной*. Такая молекула ведет себя в магнитном поле, как рамка с током. Силы Ампера, с которыми магнитное поле действует на парамагнитную молекулу, стремятся развернуть молекулу так, чтобы ее магнитный момент был направлен по полю, т.е. в ту же сторону, что и вектор магнитной индукции. Этому препятствует тепловое движение молекул.

В атомах и молекулах электроны, движущиеся по одной орбите, образуют пары. Собственные магнитные моменты электронов в этих парах всегда направлены в противоположные стороны так, что их сумма равна



нулю. Если число электронов в атоме или молекуле четное, то ее полный магнитный момент может оказаться равным нулю. Любой атом и молекула с нечетным числом электронов всегда парамагнитны.

## 7.2. Намагниченность вещества. Напряженность магнитного поля

В отсутствие внешнего магнитного поля парамагнитные молекулы, составляющие какое-либо вещество, вследствие теплового движения ориентированы совершенно беспорядочно, а диамагнитные молекулы вообще не обладают магнитным моментом. Поэтому сумма магнитных моментов молекул, заключенных в некотором физически бесконечно малом объеме  $dV$ , будет равна нулю:

$$\sum_{dV} \vec{p}_{m_i} = 0.$$

Под действием внешнего магнитного поля парамагнитные молекулы ориентируются преимущественно по полю, несмотря на то, что тепловое движение стремится разупорядочить их ориентацию. Диамагнитные молекулы во внешнем поле намагничиваются. Таким образом, какие бы молекулы ни входили в состав вещества, если его поместить в магнитное поле, сумма магнитных моментов всех молекул в любом физически бесконечно малом объеме  $dV$  уже не будет равна нулю. Вещество в таком состоянии называется *намагниченным*. Состояние намагниченного вещества характеризуется вектором

$$\vec{J} = \frac{1}{dV} \sum_{dV} \vec{p}_{m_i}, \quad (7.2)$$

который называется *намагниченностью*. По определению вектор  $\vec{J}$  есть магнитный момент единицы объема намагниченного вещества. В этом заключается физический смысл этого вектора.

Намагниченность различных областей вещества может быть неодинаковой. В таком случае вектор намагниченности будет зависеть от координат точки пространства:

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}).$$

Намагниченность вещества называется *однородной*, если вектор  $\vec{J}$  во всех его точках один и тот же. Намагниченность физически бесконечно малого объема вещества всегда можно считать однородной.

Токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах, называют *молекулярными*, или *связанными* токами. Токи проводимости

и конвекционные токи называют *свободными*. Силы молекулярных токов будем обозначать  $I'$ , а свободных —  $I^*$ .

### 7.3. Циркуляция вектора намагниченности \*

Будем упрощенно рассматривать каждую молекулу как круговой контур с током  $I'$ , площадь которого обозначим  $S_m$ . Все молекулы будем считать одинаковыми и в среднем одинаково ориентированными в пространстве. В этом случае из определения (7.2) следует, что

$$\vec{J} = n \vec{p}_m, \quad (7.3)$$

где  $n$  — концентрация молекул;  $\vec{p}_m$  — магнитный момент одной молекулы,

$$p_m = I' S_m. \quad (7.4)$$

Построим в пространстве, где имеются молекулы некоторого вещества, произвольный контур  $C$  (рис. 7.2). Вычислим сумму молекулярных токов

$$\sum I',$$

охватываемых этим контуром.

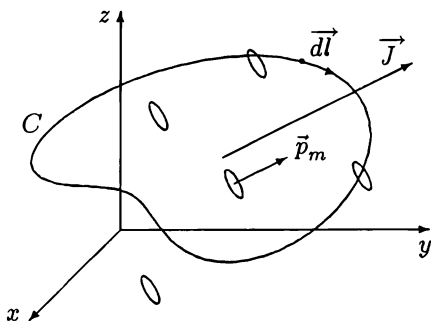


Рис. 7.2. К вычислению суммы молекулярных токов, охватываемых контуром  $C$

Контур  $C$  охватывает только те молекулярные круговые токи, которые "наизаны" на него (рис. 7.2). Найдем сначала сумму молекулярных токов, "наизанных" на векторный элемент  $\vec{dl}$  контура  $C$ . На вектор  $\vec{dl}$  "наизаны" молекулярные токи, центры которых находятся внутри косоугольного цилиндра (рис. 7.3). Их число равно произведению концентрации  $n$  молекул на объем  $S_m \cos \alpha dl$  цилиндра. Если все молекулярные токи одинаковы, то сумма токов, "наизанных" на вектор  $\vec{dl}$ ,

будет  $I' n S_m \cos \alpha dl$ . Произведение  $n I' S_m$  есть модуль вектора  $\vec{J}$ . Поэтому сумму молекулярных токов, "нанизанных" на вектор  $\vec{dl}$ , можно записать как скалярное произведение  $\vec{J} \vec{dl}$ , а сумму всех молекулярных токов, "нанизанных" на контур  $C$ , представить как циркуляцию вектора  $\vec{J}$  по этому контуру:

$$\sum I' = \oint_C \vec{J} \vec{dl}. \quad (7.5)$$

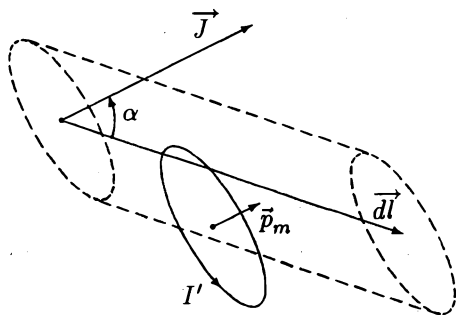


Рис. 7.3. Молекулярный ток, "нанизанный" на вектор  $\vec{dl}$

#### 7.4. Напряженность магнитного поля

В сумму, стоящую в правой части уравнения (6.8), входят все токи, охватываемые контуром  $C$ : и свободные, и молекулярные. С учетом разделения токов на эти две категории запишем уравнение (6.8) так:

$$\oint_C \vec{B} \vec{dl} = \mu_0 \left( \sum I^* + \sum I' \right). \quad (7.6)$$

Исключив при помощи равенства (7.5) сумму молекулярных токов из этого уравнения, преобразуем его к виду

$$\oint_C \vec{H} \vec{dl} = \sum I^*. \quad (7.7)$$

Вектор

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (7.8)$$

называют *напряженностью* магнитного поля. Согласно равенству (7.7) циркуляция вектора напряженности по произвольному контуру равна алгебраической сумме свободных токов, охватываемых этим контуром.

Когда свободные токи текут в сплошной среде, сумму в правой части уравнения (7.7) следует заменить интегралом

$$\int_S \vec{j}^* d\vec{S},$$

где  $\vec{j}^*$  – плотность свободных токов;  $S$  – поверхность, натянутая на контур  $C$ . При этом уравнение (7.7) примет вид

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}^* d\vec{S}, \quad (7.9)$$

где направления векторов  $d\vec{l}$  и  $d\vec{S}$  связаны правилом правого винта.

Преобразовав криволинейный интеграл в левой части уравнения (7.9) по теореме Стокса (6.42) в поверхностный интеграл от ротора напряженности магнитного поля, приходим к дифференциальному уравнению

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}^*. \quad (7.10)$$

В большинстве задач теории постоянного магнитного поля свободные токи считаются известными. Преимущество уравнений (7.7), (7.9) и (7.10) для вектора  $\vec{H}$  перед уравнениями (6.8), (6.11) и (6.13) для вектора  $\vec{B}$  заключается в том, что они не содержат величин, характеризующих молекулярные токи, которые чаще всего бывают неизвестны.

## 7.5. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость

Индукция  $\vec{B}$  магнитного поля определяет силы Ампера, действующие на молекулы в магнитном поле. Чем больше магнитная индукция, тем сильнее намагничивается вещество и тем больше его намагниченность  $J$ . Для многих (но не для всех) веществ вектор намагниченности коллинеарен вектору напряженности магнитного поля:

$$\vec{J}(\vec{r}) = \chi_m(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}). \quad (7.11)$$

Безразмерная скалярная величина  $\chi_m$  называется *магнитной восприимчивостью* вещества. Магнетик называется однородным, если магнитная восприимчивость во всех его точках одинакова.

Подставив выражение (7.11) в соотношение (7.8), получим равенство

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (7.12)$$

где величина

$$\mu = (1 + \chi_m) \mu_0 \quad (7.13)$$

называется *магнитной проницаемостью* вещества.

Величина

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (7.14)$$

называется *относительной магнитной проницаемостью*. Величины  $\chi_m$ ,  $\mu$  и  $\mu_r$  служат характеристиками магнитных свойств вещества, а уравнения (7.11) и (7.12) описывают влияние магнитного поля на намагниченность магнетика.

## 7.6. Основные уравнения теории постоянного магнитного поля в веществе

Интегральные уравнения (6.9) и (7.9) выражают основные законы постоянного магнитного поля в веществе. Запишем систему этих уравнений:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}^* \cdot d\vec{S}. \quad (7.15)$$

Этим интегральным уравнениям соответствуют дифференциальные уравнения

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}^*. \quad (7.16)$$

Уравнения, выражающие собой законы постоянного магнитного поля, следует дополнить материальным уравнением

$$\vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Функции  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$  и  $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r})$ , являющиеся решением этой системы, описывают постоянное магнитное поле в веществе, создаваемое свободными токами заданной плотности.

В тех случаях, когда линии электрического тока расположены в пространстве симметрично, можно заранее предугадать, какими должны быть семейства силовых линий магнитного поля. В таких случаях, зная направление вектора  $\vec{H}$  напряженности магнитного поля, его модуль  $H$  можно найти по теореме (7.9) о циркуляции этого вектора или из уравнения (7.10). Затем следует найти вектор  $\vec{B}$ . После этого можно найти вектор намагниченности.

**З а д а ч а 1.** Пространство между плоскостями  $x = -a$  и  $x = a$  заполнено однородным веществом, магнитная проницаемость которого равна  $\mu$ . В веществе протекает свободный электрический ток плотности  $\vec{j}\{0, 0, j\}$ , где  $j$  – постоянная. Найти напряженность  $\vec{H}$  и магнитную индукцию  $\vec{B}$  поля, создаваемого этим током.

**З а д а ч а 2.** Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  изготовлен из однородного вещества, магнитная проницаемость которого равна  $\mu$ . По объему цилиндра вдоль его оси идет свободный электрический ток постоянной плотности  $\vec{j}$ . Найти выражения для векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$ .

**З а д а ч а 3.** Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  заряжен равномерно по объему с плотностью заряда  $\rho$ . Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Найти вектор магнитного момента части цилиндра длиной  $l$  и векторы напряженности и магнитной индукции. Магнитная проницаемость вещества, из которого изготовлен цилиндр, равна  $\mu$ .

## 7.7. Магнитное поле заполненного веществом соленоида

Пусть пространство внутри соленоида заполнено веществом, магнитная проницаемость которого равна  $\mu$ . Ток проводимости, текущий в соленоиде, относится к категории свободных токов. Его сила  $I$  считается заданной величиной. В веществе циркулируют молекулярные токи, плотность которых неизвестна.

Силовые линии магнитного поля, создаваемого электрическим током в соленоиде, показаны на рис. 6.6. Для нахождения модуля вектора  $\vec{H}$  воспользуемся теоремой о циркуляции (7.7). В качестве контура интегрирования  $C$  выберем прямоугольный контур, изображенный пунктирной линией на рис. 6.6. Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по этому контуру будет равна криволинейному интегралу по отрезку силовой линии, который является частью контура  $C$ :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H l.$$

Сумма сил токов проводимости, охватываемых контуром  $C$ , равна силе тока  $I$  в одном витке, умноженной на число витков на отрезке  $l$ :

$$\sum I^* = I n l.$$

В силу теоремы (7.7) о циркуляции вектора напряженности магнитного поля будем иметь

$$H = n I. \quad (7.17)$$

Из этой формулы видно, что модуль вектора  $\vec{H}$  внутри длинного соленоида всюду одинаков. Учитывая также неизменность его направлений, можно утверждать, что магнитное поле внутри соленоида однородно. Причем направление вектора  $\vec{H}$  внутри соленоида связано с направлением тока в соленоиде правилом правого винта.

Если контур  $C$  располагается вне соленоида, то он не охватывает ни одного витка с током. При этом

$$\sum I^* = 0.$$

В этом случае теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$  дает следующий результат:

$$\vec{H} = 0,$$

т.е. магнитное поле вне бесконечно длинного соленоида отсутствует.

Магнитную индукцию внутри соленоида можно найти по формуле (7.12), если известна магнитная проницаемость  $\mu$  среды, которая заполняет его внутренность:

$$B = \mu n I. \quad (7.18)$$

## 7.8. Условия на границе раздела двух магнетиков

Пусть поверхность  $S$  является границей раздела двух магнетиков. Будем считать, что на этой поверхности нет свободных токов. Построим небольшой воображаемый цилиндр высотой  $2\delta$ , одна половина которого находится в первом магнетике, а другая – во втором (рис. 7.4). Площадь основания цилиндра равна  $dS$ . Применим теорему (6.9) о потоке вектора магнитной индукции:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (7.19)$$

где в качестве поверхности  $S$  возьмем поверхность построенного цилиндра. Поток вектора  $\vec{B}$  через поверхность этого цилиндра равен сумме

потоков через его основания и боковую поверхность. При этом равенство (7.19) примет вид

$$\vec{B}_1 \vec{n}_1 dS + \vec{B}_2 \vec{n}_2 dS + \Phi = 0,$$

где  $\Phi$  – поток магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра. Устремим  $\delta$  к нулю. При этом поток  $\Phi$  обратится в ноль. Учитывая, что вектор  $\vec{n}_2$  единичной нормали к одной из сторон поверхности противоположен по направлению вектору  $\vec{n}_1$  нормали к другой ее стороне в той же точке ( $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$ ), придем к уравнению

$$\vec{B}_1 \vec{n}_1 = \vec{B}_2 \vec{n}_1, \quad \text{или} \quad B_{n_1} = B_{n_2}, \quad (7.20)$$

из которого следует, что нормальная составляющая вектора магнитной индукции при переходе через границу раздела двух веществ не изменяется.

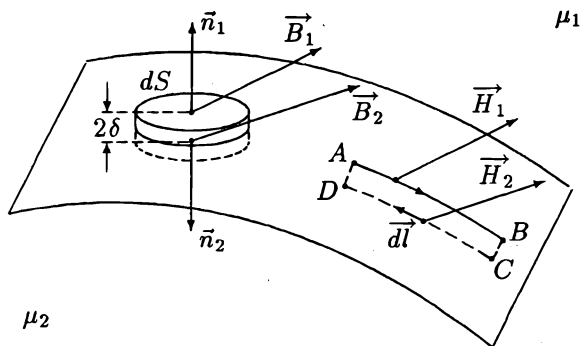


Рис. 7.4. К выводу граничных условий

Вычислим теперь циркуляцию вектора напряженности магнитного поля по небольшому прямоугольному контуру  $ABCD$  (рис. 7.4), две стороны которого параллельны поверхности  $S$ , но лежат в разных магнетиках, а длина двух других сторон стремится к нулю. По теореме о циркуляции (7.9) вектора напряженности магнитного поля будем иметь

$$\vec{H}_1 \overline{AB} + \vec{H}_2 \overline{CD} = 0, \quad (7.21)$$

так как на поверхности  $S$  нет свободных токов. Введем единичный вектор  $\vec{\tau}$ , касательный к поверхности:

$$\vec{\tau} = \frac{\overline{AB}}{AB}.$$



Учитывая, что  $\vec{CD} = -\vec{AB}$ , преобразуем равенство (7.21) к виду

$$\vec{H}_1 \vec{\tau} = \vec{H}_2 \vec{\tau}, \quad \text{или} \quad H_{\tau_1} = H_{\tau_2}. \quad (7.22)$$

Согласно этому равенству тангенциальные составляющие вектора напряженности с той и другой стороны поверхности раздела двух магнетиков одинаковы.

Условия (7.20) и (7.22) позволяют исследовать поведение силовых линий магнитного поля у границы раздела двух магнетиков. Если справедливо соотношение (7.12), то условие (7.22) можно записать так:

$$\frac{\vec{B}_1 \vec{\tau}}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_2 \vec{\tau}}{\mu_2}, \quad \text{или} \quad \frac{B_{\tau_1}}{\mu_1} = \frac{B_{\tau_2}}{\mu_2}, \quad (7.23)$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — магнитные проницаемости магнетиков по разные стороны границы раздела.

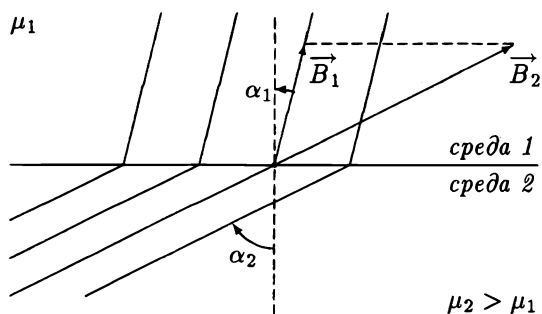


Рис. 7.5. Преломление силовых линий на границе раздела двух магнетиков

На рис. 7.5 изображены силовые линии магнитного поля для случая, когда  $\mu_1 < \mu_2$ . Обозначим углы между силовыми линиями и нормалью к поверхности  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Из геометрических построений на рис. 7.5 нетрудно получить соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{\tau_1}}{B_{n_1}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_{\tau_2}}{B_{n_2}}.$$

При помощи граничных условий (7.20) и (7.23) найдем, что

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (7.24)$$

Из равенства (7.24) следует, что при  $\mu_1 < \mu_2$  имеет место неравенство  $\alpha_1 < \alpha_2$  (рис. 7.5). Если  $\alpha_1 = 0$ , то и  $\alpha_2 = 0$ . В этом случае тангенциальные составляющие вектора  $\vec{B}$  равны нулю, а его модуль не изменяется при переходе через границу раздела в силу условия (7.20). Если  $\alpha_1 = \pi/2$ , то и  $\alpha_2 = \pi/2$ . При этом нормальные составляющие вектора  $\vec{B}$  равны нулю, а модуль магнитной индукции в среде 1 будем в  $\mu_1/\mu_2$  раз меньше, чем в среде 2 согласно (7.23).

На рис. 6.3 показаны силовые линии магнитного поля кругового тока. Вставим внутрь витка с током цилиндр, изготовленный из магнетика с большой магнитной проницаемостью ( $\mu_r \gg 1$ ). Такие вещества называются ферромагнетиками. Магнитная индукция в центре витка станет больше в  $\mu_r$  раз. Увеличится также энергия магнитного поля. В таких случаях говорят, что поле стало сильнее. Почему это происходит? Под действием магнитного поля витка с током ферромагнитный цилиндр намагничивается и создает свое магнитное поле, которое может быть даже сильнее поля витка. Силовые линии магнитного поля проходят главным образом внутри цилиндра параллельно его оси (рис. 7.6). Они как бы собрались в параллельный пучок. Магнитное поле вне цилиндра у его боковой поверхности слабее в  $\mu_r$  раз. Наибольшая магнитная индукция внутри цилиндра и у его торцов. Это свойство используется для создания сильных магнитных полей.

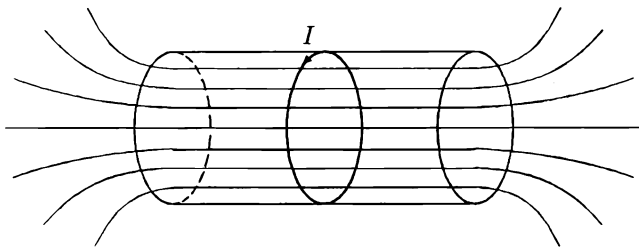


Рис. 7.6. Силовые линии магнитного поля витка с током концентрируются в ферромагнитном сердечнике

Ферромагнетики произвольной формы, внутри которых преимущественно проходят силовые линии магнитного поля, называются *магнитными цепями*. Простейшая магнитная цепь показана на рис. 7.7. Она представляет собой ферромагнитное ярмо с воздушным зазором. На ярме имеется токнесущая обмотка.

Рассмотрим некоторую среднюю силовую линию магнитного поля, проходящую внутри ферромагнетика и пересекающую воздушный зазор. Пусть ее длина равна  $l$ , а ширина зазора –  $d$ . Применим теорему (7.7)

о циркуляции вектора напряженности магнитного поля. Пусть  $H_1$  есть напряженность магнитного поля в зазоре, а  $H_2$  – напряженность поля в ярме. Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по рассматриваемой силовой линии равна сумме токов, охватываемых этой линией:

$$H_1 d + H_2 (l - d) = N I, \quad (7.25)$$

где  $N$  – число витков;  $I$  – сила тока в обмотке.

Относительную магнитную проницаемость воздуха можно считать равной единице. В рассматриваемом случае соотношение (7.12) приводит к равенствам

$$B_1 = \mu_0 H_1, \quad B_2 = \mu_r \mu_0 H_2. \quad (7.26)$$

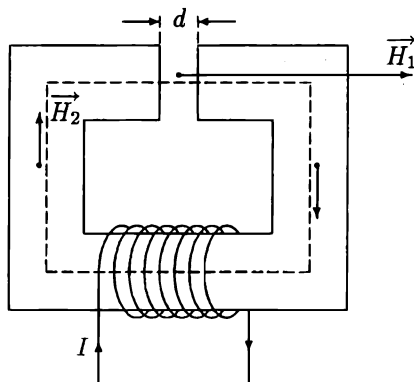


Рис. 7.7. Простейшая магнитная цепь

Силовые линии в зазоре почти перпендикулярны поверхности магнетика. Поэтому в силу (7.20) магнитные индукции в воздушном зазоре и веществе равны:

$$B_1 = B_2 = B. \quad (7.27)$$

Разрешив систему (7.25) – (7.27) относительно  $B$ , найдем индукцию магнитного поля:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{d + \frac{l - d}{\mu_r}}. \quad (7.28)$$

Из этой формулы видно, что при одном и том же токе в обмотке магнитная индукция тем больше, чем меньше ширина зазора  $d$  и чем больше магнитная проницаемость  $\mu_r$ . Существуют ферромагнетики, для которых  $\mu_r \simeq 10^6$ . Применение таких ферромагнетиков дает возможность получать достаточно сильные магнитные поля.

# ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

## ГЛАВА 8

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

#### 8.1. Закон Фарадея и правило Ленца

Магнитное поле создается электрическими токами. Существует в некотором смысле обратное явление, когда магнитное поле вызывает (индуцирует) появление электрических токов в замкнутых проводящих контурах. Это явление, открытое Фарадеем, называется *электромагнитной индукцией*. Фарадей установил, что индукционный ток возникает в замкнутом проводящем контуре только в том случае, когда изменяется со временем *магнитный поток* (поток вектора магнитной индукции)

$$\Phi = \int_S \vec{B} \, d\vec{S} \quad (8.1)$$

через поверхность  $S$ , натянутую на этот контур. Поток (8.1) изменяется с течением времени, если изменяется магнитная индукция  $\vec{B}$ , т.е. магнитное поле не постоянно, или если изменяется форма контура и его положение в пространстве.

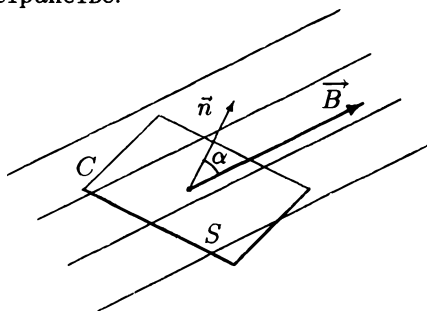


Рис. 8.1. К определению магнитного потока

Для плоского контура в однородном магнитном поле поток

$$\Phi = B S \cos \alpha, \quad (8.2)$$

где  $B$  – модуль вектора магнитной индукции,  $S$  – площадь контура,  $\alpha$  – угол между вектором  $\vec{B}$  и нормалью  $\vec{n}$  к плоскости контура (рис. 8.1).

Русский физик Э.Х.Ленц сформулировал правило, позволяющее определить направление индукционного тока. Согласно этому правилу индукционный ток всегда направлен так, что его магнитное поле противодействует тем процессам, которые приводят к возникновению этого тока.

Рассмотрим неподвижный проводящий контур  $C$  во внешнем магнитном поле (рис 8.2, а), индукция  $\vec{B}(t)$  которого увеличивается со временем. Индукционный ток  $I$  в контуре сам создает магнитное поле  $\vec{B}_I$ . По правилу Ленца индукционный ток направлен так, что его магнитное поле  $\vec{B}_I$  "препятствует" увеличению внешнего поля  $\vec{B}$ , т.е. вектор  $\vec{B}_I$  противоположен по направлению вектору  $\vec{B}$ . Теперь можно найти направление индукционного тока  $I$ , учитывая, что оно связано правилом правого винта с направлением вектора  $\vec{B}_I$ .

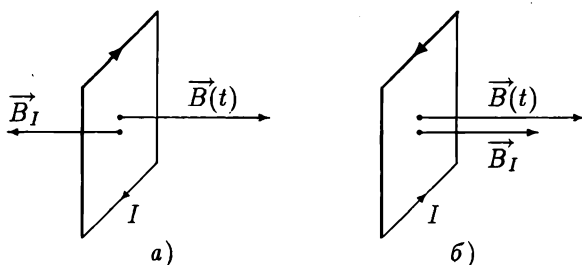


Рис. 8.2. К формулировке правила Ленца. При изменении индукции  $\vec{B}(t)$  внешнего магнитного поля в проводящем контуре возникает индукционный ток, направление которого зависит от того, как изменяется индукция: а) индукция внешнего поля увеличивается, б) индукция внешнего поля уменьшается

Если магнитная индукция  $\vec{B}(t)$  внешнего поля уменьшается, то индукционный ток направлен так, что его поле  $\vec{B}_I$  "противодействует" ослаблению внешнего поля, т.е. векторы  $\vec{B}_I$  и  $\vec{B}$  в этом случае сонаправлены. Определив направление вектора  $\vec{B}_I$ , по правилу правого винта найдем направление индукционного тока (рис. 8.2, б).

## 8.2. Электродвижущая сила индукции. Уравнение Максвелла

Непосредственной причиной появления тока в контуре являются силы, заставляющие заряды-носители тока перемещаться по проводнику. Действие этих сил, приводящее к упорядоченному движению зарядов, характеризуется электродвижущей силой (ЭДС). По определению ЭДС есть циркуляция вектора  $\vec{E}$  напряженности поля сторонних сил:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (8.3)$$

Напомним, что сторонней называется любая сила, действующая на подвижный электрический заряд, кроме силы, обусловленной действием постоянного электрического поля.

Проанализировав результаты опытов Фарадея, Максвелл установил, что причиной появления индукционного тока является электродвижущая сила индукции, которая равна с обратным знаком производной по времени от магнитного потока (8.1):

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (8.4)$$

Запишем уравнение (8.4) подробнее, подставив в него интегралы (8.1) и (8.3):

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (8.5)$$

Предложенное Максвеллом уравнение (8.5) описывает открытый Фарадеем закон электромагнитной индукции. Условились, что направление обхода контура  $C$ , задаваемое вектором  $d\vec{l}$ , связано с направлением нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$ , натянутой на этот контур, правилом правого винта. Имея в виду это условие, из уравнения (8.5) можно найти направление вектора напряженности  $\vec{E}$ , который согласно закону Ома

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (8.6)$$

определяет направление тока в контуре  $C$ . Таким образом, в уравнении (8.5) правило Ленца учитывается автоматически.

Убедимся в справедливости уравнения (8.4) на следующем примере. Рассмотрим прямоугольный плоский проводящий контур (рис. 8.3, а), одна из сторон  $MN$  которого перемещается со скоростью  $v$  параллельно самой себе без нарушения контакта между проводами. Внешнее магнитное поле однородно, а его индукция  $\vec{B}$  направлена перпендикулярно плоскости контура. В качестве поверхности  $S$ , по которой будем вычислять поток вектора  $\vec{B}$ , удобно выбрать плоскость, натянутую на рассматриваемый контур. Вектор нормали  $\vec{n}$  направим по полю:  $\vec{n} \uparrow \vec{B}$ . Так как поле однородно и модуль вектора  $\vec{B}$  постоянен, магнитный поток будет равен произведению модуля магнитной индукции на площадь контура:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \vec{n} dS = \int_S B dS = B \int_S dS = B S.$$

Площадь контура  $S = l x(t)$ . Таким образом, приходим к формуле

$$\Phi = B a x(t). \quad (8.7)$$

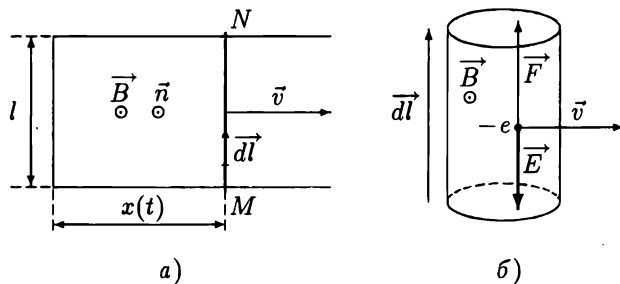


Рис. 8.3. К вычислению электродвижущей силы индукции

Теперь найдем электродвижущую силу, действующую в контуре. Для этого нужно установить природу сторонних сил и найти эти силы. Пусть стержень  $MN$ , образующий подвижную сторону контура, изготовлен из металла и носителями тока в нем являются электроны. Движение электронов вместе со стержнем со скоростью  $\vec{v}$  приводит к появлению силы Лоренца

$$\vec{F} = -e [\vec{v} \vec{B}],$$

которая действует на электрон вдоль стержня (рис. 8.3, б) и создает индукционный ток в контуре. Это и есть в данном случае сторонняя сила. Ее напряженность

$$\vec{E} = [\vec{v} \vec{B}]. \quad (8.8)$$

Если магнитное поле постоянно, то сторонние силы возникают только в подвижных частях контура. В этом случае электродвижущая сила

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \, d\vec{l} = \int_{MN} \vec{E} \, d\vec{l}.$$

Направление вектора  $d\vec{l}$  определяется выбором направления вектора нормали  $\vec{n}$  и связано с ним правилом правого винта (рис. 8.3, а). Нетрудно видеть, что векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{E}$  коллинеарны и направлены в разные стороны. При этом их скалярное произведение будет

$$\vec{E} \, d\vec{l} = -E \, dl. \quad (8.9)$$

С учетом (8.8) и (8.9) найдем, что

$$\varepsilon = - \int_{MN} E \, dl = -v B \int_{MN} dl = -v B a. \quad (8.10)$$

Из формулы (8.7) получим

$$\frac{d\Phi}{dt} = B a v. \quad (8.11)$$

Сравнивая выражения (8.10) и (8.11), приходим к равенству (8.4).

Согласно правилу Ленца индукционный ток препятствует причине, его вызывающей. Каким образом это происходит в рассматриваемом примере? Так как по проводнику  $MN$  течет электрический ток, на него действует силу Ампера

$$\vec{F} = I [\vec{l} \vec{B}], \quad (8.12)$$

где вектор  $\vec{l}$  направлен по току. По закону Ома (8.6) направление тока совпадает с направлением вектора напряженности  $\vec{E}$ . Поэтому согласно формуле (8.12) силу Ампера будет направлена противоположно вектору скорости  $\vec{v}$ . Движение проводника  $MN$  является причиной возникновения в контуре индукционного тока. Этот ток направлен так, что сила Ампера препятствует движению проводника.

Рассмотрим теперь случай, когда проводящий контур  $C$  неподвижен, а магнитное поле изменяется со временем. Из уравнения Максвелла (8.5) следует, что при этом в контуре также действует электродвижущая сила. Какова в этом случае природа сторонних сил? Так как контур неподвижен, силы Лоренца не могут в таком случае играть роль сторонних сил.



Максвелл предположил, что меняющееся со временем магнитное поле создает в пространстве электрическое поле, которое и заставляет носители тока перемещаться в проводнике. Причем это поле создается вне зависимости от того, присутствуют ли в пространстве подвижные заряды или проводники. Из уравнения (8.5) видно, что циркуляция вектора  $\vec{E}$  напряженности этого поля не равна нулю, т.е. в отличие от постоянного электрического поля это поле не является потенциальным. Силовые линии электрического поля, которое создается изменяющимся магнитным полем, всегда замкнуты и поэтому такое поле называют *вихревым*.

При помощи теоремы Стокса уравнение (8.5) можно преобразовать к виду:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (8.13)$$

Это уравнение также носит имя Максвелла и выражает открытый им закон, согласно которому изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Если магнитное поле постоянно, получим известное уравнение электростатики

$$\text{rot } \vec{E} = 0.$$

Рассмотрим проволочную катушку, состоящую из  $N$  витков. Когда катушка находится в изменяющемся магнитном поле, в каждом витке возникает ЭДС. Так как витки соединены последовательно, электродвижущая сила в катушке будет равна сумме электродвижущих сил, действующих в каждом витке:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = - \sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_i}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \Phi_i,$$

где  $\Phi_i$  – магнитный поток через виток под номером  $i$ ;  $\varepsilon_i$  – возникающая в этом витке ЭДС индукции. Величину

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i \quad (8.14)$$

называют *потокосцеплением*, или *полным магнитным потоком*. Если магнитные потоки через все витки одинаковы, то потокосцепление

$\Psi = N \Phi$ . Используя определение (8.14), электродвижущую силу, возникающую в катушке, можно записать так:

$$\varepsilon = - \frac{d\Psi}{dt} . \quad (8.15)$$

### 8.3. Самоиндукция

Пусть в произвольном замкнутом контуре протекает электрический ток силой  $I$ . Этот ток создает в пространстве магнитное поле, индукция которого в силу закона Био – Савара – Лапласа пропорциональна силе тока  $I$ . Согласно определениям (8.1) и (8.14), полный магнитный поток также будет пропорционален силе тока

$$\Psi = L I . \quad (8.16)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  называют *индуктивностью* контура. Индуктивность зависит от формы и размеров контура и от магнитных свойств среды, окружающей контур. Если сила тока изменяется со временем или изменяется индуктивность контура, потокосцепление будет иметь отличную от нуля производную по времени ( $\dot{\Psi} \neq 0$ ). При этом в контуре будет действовать электродвижущая сила, которая обусловлена изменением тока в этом же контуре. Это явление называют *самоиндукцией*. В том случае, когда индуктивность контура не изменяется со временем, формулы (8.15) и (8.16) приводят к следующему выражению для электродвижущей силы самоиндукции:

$$\varepsilon = - L \frac{dI}{dt} . \quad (8.17)$$

Единица измерения индуктивности в СИ называется *генри* ( $\Gamma$ ):  
 $[L] = \Gamma = T \cdot m^2 / A = Ом \cdot с$ .

### 8.4. Индуктивность соленоида

Вычислим индуктивность соленоида из  $N$  витков, длина которого равна  $l$ . При условии, что радиус соленоида много меньше его длины, искажениями поля на его концах можно пренебречь и считать магнитное поле внутри соленоида однородным, как если бы он был бесконечно длинным. От искажений можно избавиться полностью, если соленоид согнуть

в "баранку". Такая конструкция называется тороидальной катушкой. Магнитная индукция поля в соленоиде определяется формулой (7.18), в которой число  $n$  витков проволоки на единицу длины соленоида равно  $N/l$ :

$$B = \frac{\mu N I}{l}, \quad (8.18)$$

где  $\mu$  – абсолютная магнитная проницаемость вещества, заполняющего пространство внутри соленоида.

Магнитный поток (8.1) удобно вычислять через плоскость  $S$ , натянутую на один из витков. В этом случае векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{n}$  коллинеарны. Так как магнитное поле в соленоиде однородно, магнитный поток

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS = B \int_S dS = B S, \quad (8.19)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения соленоида, т.е. площадь одного из его витков. В силу однородности поля потоки через все витки одинаковы. Поэтому

$$\Psi = N \Phi. \quad (8.20)$$

Формулы (8.18) – (8.20) приводят к выражению

$$\Psi = \frac{\mu N^2 S I}{l}.$$

Согласно определению (8.16) индуктивность соленоида будет

$$L = \frac{\mu N^2 S}{l} = \mu n^2 S l = \mu n^2 V, \quad (8.21)$$

где  $V = S l$  – объем соленоида, а  $n = N/l$  – число витков на единицу длины соленоида.

## 8.5. Энергия магнитного поля

Рассмотрим цепь, состоящую из проводника сопротивлением  $R$  и катушки с постоянной индуктивностью  $L$  (рис. 8.4). Пусть в момент времени  $t = 0$  в этой цепи протекает электрический ток силой  $I_0$ . Найдем, как ток будет меняться при  $t > 0$ . Для этого запишем второе правило Кирхгофа, согласно которому сумма падений напряжений в контуре равна сумме ЭДС. В рассматриваемом контуре напряжение падает на проводнике, а в катушке возникает электродвижущая сила самоиндукции. Таким образом,

$$R I = -L \frac{dI}{dt}. \quad (8.22)$$

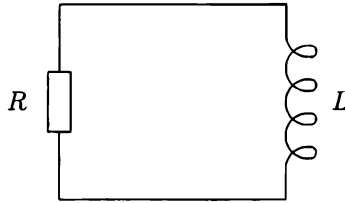
Это есть уравнение с разделяющимися переменными, т.е. его можно записать так:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt.$$

После интегрирования получим

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L}. \quad (8.23)$$

Из этой формулы следует, что ток в цепи, содержащей катушку индуктивности, не может прекратиться мгновенно. Уменьшение силы тока приводит к возникновению электродвижущей силы самоиндукции в катушке, которая согласно правилу Ленца препятствует исчезновению тока.



*Рис. 8.4. Электрический ток в этом контуре поддерживается благодаря ЭДС самоиндукции*

Умножим уравнение (8.22) на  $I$ . После простого преобразования правой части будем иметь

$$R I^2 = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L I^2 \right). \quad (8.24)$$

Левая часть этого равенства есть мощность джоулева энерговыделения, т.е. количество тепла, которое выделяется на сопротивление за единицу времени при прохождении по нему электрического тока. Что является источником энергии, которая расходуется на нагревание проводника? В рассматриваемом контуре нет других элементов, кроме сопротивления и катушки. Поэтому приходим к выводу, что в катушке, а также в любом проводящем контуре с током запасается энергия, которая, как следует из равенства (8.24), определяется соотношением

$$W = \frac{1}{2} L I^2. \quad (8.25)$$

Равенство (8.24) выражает собой закон сохранения энергии. Производная  $-\dot{W}$  есть количество энергии, которое теряется катушкой за единицу времени. Согласно равенству (8.24) эта энергия равна количеству тепла, выделяющемуся в сопротивлении за это время.

Пусть катушка является соленоидом, индуктивность которого определяется формулой (8.21):

$$L = \mu n^2 V. \quad (8.26)$$

Согласно (8.25) и (8.26) в соленоиде с током  $I$  запасена энергия

$$W = \frac{1}{2} \mu n^2 I^2 V.$$

В силу (7.17) произведение  $nI$  равно напряженности  $H$  магнитного поля внутри соленоида, поэтому

$$W = \frac{1}{2} \mu H^2 V. \quad (8.27)$$

Энергия (8.27) зависит от напряженности  $H$  магнитного поля внутри соленоида, от магнитной проницаемости среды, заполняющей пространство внутри соленоида, и пропорциональна его объему. Отсюда можно заключить, что носителями этой энергии являются магнитное поле и намагниченное вещество. Так как поле внутри длинного соленоида, заполненного однородным веществом, также однородно, энергия  $W$  равномерно распределена в пространстве соленоида и пропорциональна его объему  $V$ . В этом случае *объемная плотность энергии*  $w$  равна отношению энергии  $W$  к объему  $V$ :

$$w = \frac{1}{2} \mu H^2. \quad (8.28)$$

Эта формула справедлива также в общем случае, т.е. и тогда, когда магнитное поле неоднородно. При этом энергия поля в малом объеме равна произведению плотности энергии (8.28) на величину  $dV$  этого объема:

$$dW = w(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \mu H^2 dV. \quad (8.29)$$

Энергия поля в объеме  $V$  выражается интегралом

$$W = \int_V w(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dV. \quad (8.30)$$

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

(продолжение)

### 8.6. Вихревое электрическое поле в соленоиде

Рассмотрим, что происходит внутри длинного соленоида на рис. 6.6, когда по нему протекает переменный ток  $I = I(t)$ . Этот ток создает в соленоиде однородное магнитное поле. Направим ось  $z$  вдоль оси соленоида. Теперь соотношение (6.14), связывающее магнитную индукцию с силой тока, можно записать так:

$$B_z(t) = \mu_0 n I(t), \quad (8.31)$$

где  $B_z$  – проекция вектора  $\vec{B}$  магнитной индукции на ось  $z$ . Таким образом, в соленоиде будет существовать однородное и изменяющееся со временем магнитное поле. Это поле согласно закону электромагнитной индукции (8.5) создает вихревое электрическое поле. Так как рассматриваемая система обладает осевой симметрией, замкнутые силовые линии вихревого электрического поля будут представлять собой окружности, центры которых лежат на оси соленоида (рис. 8.5).

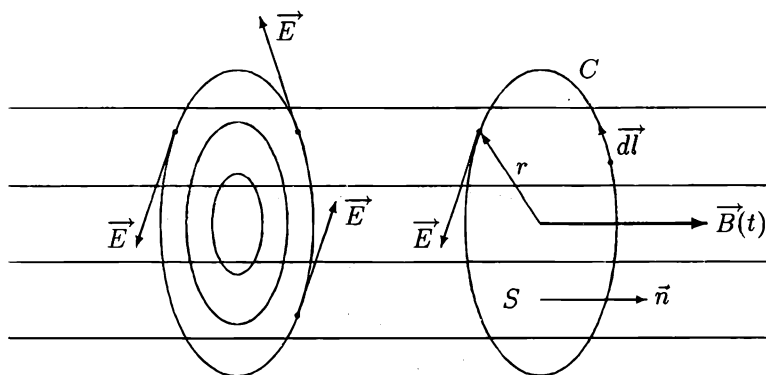


Рис. 8.5. Вихревое электрическое поле в соленоиде

Рассмотрим одну из силовых линий вихревого электрического поля, радиус которой равен  $r$ . Найдём при помощи уравнения (8.5) напряжен-

ность электрического поля на этой линии. Роль контура  $C$  будет исполнять сама силовая линия, а в качестве натянутой на нее поверхности  $S$  будем использовать плоскость. Нормаль  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  и векторный элемент  $\vec{dl}$  контура  $C$  показаны на рис. 8.5. Так как магнитное поле в соленоиде однородно, поток вектора  $\vec{B}$  через поверхность  $S$  будет

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = B_z \pi r^2.$$

На силовой линии  $C$  модуль вектора  $\vec{E}$  напряженности вихревого электрического поля всюду один и тот же. Поэтому циркуляция этого вектора по контуру  $C$  будет

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = E_l 2 \pi r,$$

где  $E_l$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на вектор  $\vec{dl}$ . Подставив полученные выражения в уравнение (8.5), приходим к равенству

$$E_l 2 \pi r = - \pi r^2 \frac{dB_z}{dt},$$

из которого найдем напряженность вихревого электрического поля

$$E_l = - \frac{r}{2} \frac{dB_z}{dt}. \quad (8.32)$$

## 8.7. Токи Фуко

В массивных проводниках, помещенных в изменяющееся магнитное поле, создаваемое им вихревое электрическое поле приводит в движение носители тока. Это движение происходит вдоль замкнутых силовых линий вихревого электрического поля. Так в объеме проводника возникают вихревые токи, называемые *токами Фуко*.

При движении массивного проводника в неоднородном магнитном поле в нем также возникают токи Фуко. При этом на проводник действуют силы Ампера, которые тормозят его движение, так как согласно правилу Ленца индукционные токи направлены так, чтобы препятствовать причине их вызывающей. Этот эффект используют в технике для успокоения (демпфирования) подвижных частей измерительных приборов.

Тепловое действие токов Фуко используют для нагревания проводящих веществ в так называемых индукционных печах. Основным элементом такой печи является проволочная катушка, через которую пропускают переменный электрический ток высокой частоты  $\omega$ . Сила тока изменяется со временем по закону

$$I = I_m \cos(\omega t + \alpha).$$

Этот ток создает внутри катушки переменное магнитное поле, которое в свою очередь создает вихревое электрическое поле. В силу закона электромагнитной индукции (8.32) напряженность  $\vec{E}$  вихревого электрического поля будет изменяться со временем следующим образом:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Причем амплитуда колебаний напряженности будет пропорциональна частоте  $\omega$ . Если поместить в вихревое электрическое поле проводящее тело, то в нем возникают токи Фуко, способные нагреть тело до высоких температур. Согласно закону Ома амплитуда силы токов Фуко пропорциональна амплитуде колебаний напряженности электрического поля и, также как она, пропорциональна частоте  $\omega$ . По закону Джоуля – Ленца количество тепла

$$\frac{1}{2} R I^2,$$

которое выделяется в проводнике за единицу времени вследствие протекания по нему токов Фуко, будет пропорционально квадрату частоты  $\omega$  тока в катушке. Наиболее эффективно индукционная печь работает, когда по катушке протекает ток сверхвысокой частоты (СВЧ).

Во многих случаях нагревание проводников токами Фуко оказывается нежелательным явлением. Например, токи Фуко возникают в сердечниках трансформаторов. Для уменьшения нагревания сердечники собирают из тонких пластин, разделенных слоями изолятора. Причем пластины располагают параллельно силовым линиям магнитного поля. При этом силовые линии вихревого электрического поля будут пересекать пластины сердечника под некоторыми углами. В таком случае замкнутые линии токов Фуко будут иметь размеры не более толщины пластин.

## 8.8. Индуктивность коаксиального кабеля

Коаксиальный кабель представляет собой два длинных соосных проводящих цилиндра, пространство между которыми заполнено каким-либо изолирующим материалом с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Пусть  $a$  – радиус внутреннего цилиндра, а  $b$  – внешнего. Длина кабеля обычно



во много раз превышает его радиус. Поэтому магнитное поле, создаваемое электрическим током в кабеле, будет таким же как у бесконечно длинного кабеля, если не учитывать искажения поля у его концов.

Найдем индуктивность участка кабеля длиной  $l$ . Для этого создадим замкнутую электрическую цепь из внутреннего и внешнего цилиндров кабеля и подключим к этой цепи источник постоянной ЭДС (рис. 8.6, а). Токи, создаваемые этой ЭДС, потекут по поверхностям цилиндров вдоль их оси в противоположных направлениях.

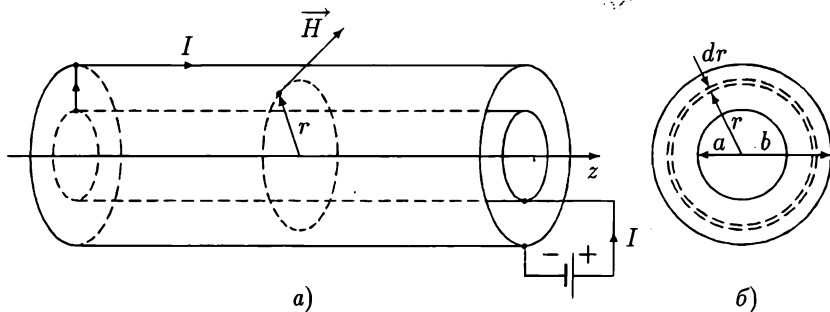


Рис. 8.6. Коаксиальный кабель

В силу цилиндрической симметрии системы силовые линии магнитного поля суть семейство окружностей, центры которых лежат на оси симметрии. На рис. 8.6, а изображена одна из силовых линий. Для определения напряженности магнитного поля применим теорему (7.7) о циркуляции вектора  $\vec{H}$ . В качестве контура интегрирования  $C$  выберем силовую линию произвольного радиуса  $r$ . Циркуляция вектора напряженности по такому контуру будет

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_C H dl = H \oint_C dl = H \cdot 2\pi r. \quad (8.33)$$

Если радиус контура  $C$  меньше радиуса внутреннего цилиндра ( $r < a$ ), то внутри контура  $C$  ток не протекает. В случае, когда контур  $C$  охватывает оба цилиндра ( $r > b$ ), сумма токов равна нулю, так как токи в цилиндрах имеют противоположные направления. Поэтому напряженность магнитного поля  $H = 0$  при  $r < a$  и  $r > b$ , т.е. магнитное поле внутри малого цилиндра и вне большого отсутствует. Если радиус контура  $C$  таков, что  $a < r < b$ , то такой контур охватывает только ток во внутреннем цилиндре. При этом по теореме (7.7) циркуляция (8.32) будет равна силе тока  $I$  в рассматриваемой цепи:

$$2\pi r H = I.$$

Таким образом, напряженность магнитного поля внутри коаксиального кабеля

$$H = \frac{I}{2\pi r}. \quad (8.34)$$

Плотность энергии магнитного поля в пространстве, где  $a < r < b$ , найдем по формуле (8.28):

$$w = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}. \quad (8.35)$$

Найдем энергию магнитного поля внутри кабеля. Для этого рассмотрим цилиндрический слой, образованный двумя воображаемыми цилиндрами радиусов  $r$  и  $r + dr$  (рис. 8.6, б). Если длина слоя равна  $l$ , то его объем  $dV = 2\pi r l dr$ . Так как плотность энергии (8.35) зависит только от  $r$ , внутри тонкого цилиндрического слоя она будет всюду одна и та же. Поэтому энергия магнитного поля в слое

$$dW = w(r) dV = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} \cdot 2\pi r l dr.$$

Проинтегрировав это выражение по  $r$  в пределах от  $a$  до  $b$ , найдем энергию магнитного поля на участке кабеля длиной  $l$ :

$$W = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (8.36)$$

С другой стороны, энергию магнитного поля можно определить по формуле (8.26). Приравняем эти выражения и найдем индуктивность участка коаксиального кабеля длиной  $l$ :

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (8.37)$$

## 8.9. Взаимная индукция

Рассмотрим два контура с токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 8.7), расположенные на некотором расстоянии друг от друга. Ток в первом контуре создает магнитное поле, поток  $\Psi_2$  которого через второй контур, очевидно, пропорционален силе тока  $I_1$ :

$$\Psi_2 = L_{21} I_1. \quad (8.38)$$

Аналогично, магнитный поток  $\Psi_1$  через первый контур поля, создаваемого током во втором контуре, пропорционален силе тока  $I_2$ :

$$\Psi_1 = L_{12} I_2. \quad (8.39)$$

Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются *взаимной индуктивностью*, или *коэффициентами взаимной индукции*. Они зависят от формы, размеров, взаимного расположения контуров и от магнитной проницаемости среды, в которой находятся контуры.

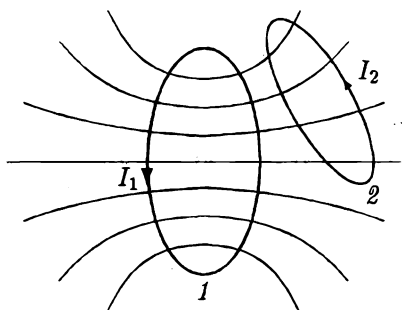


Рис. 8.7. Взаимная индукция

Рассмотрим простой пример. Пусть на одном цилиндрическом каркасе имеется две обмотки, образующие два соленоида одинаковой длины  $l$  (рис. 8.8). Число витков одного соленоида равно  $N_1$ , а второго —  $N_2$ . Найдем коэффициенты  $L_{12}$  и  $L_{21}$  для этой системы.

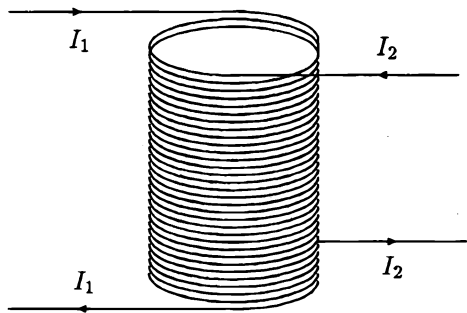


Рис. 8.8. К вычислению коэффициента взаимной индукции

Предположим, что в первом соленоиде течет ток  $I_1$ , а во втором —  $I_2$ . В силу (7.17) напряженность магнитного поля тока  $I_1$  внутри соленоида

$$H_1 = \frac{N_1 I_1}{l}.$$

Поток магнитной индукции этого поля через один из витков второго со-

леноида

$$\Phi_2 = B_1 S = \frac{\mu N_1 I_1 S}{l}.$$

Так как поле внутри соленоида однородно, потоки через все витки одинаковы. Поэтому потокосцепление

$$\Psi_2 = N_2 \Phi_2 = \frac{\mu N_1 N_2 I_1 S}{l}.$$

Отсюда согласно определению (8.38) получим

$$L_{21} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{l}. \quad (8.40)$$

Аналогично, напряженность поля, создаваемого током  $I_2$ , будет

$$H_2 = \frac{N_2 I_2}{l}.$$

Поток магнитной индукции этого поля через один из витков первого соленоида

$$\Phi_1 = B_2 S = \frac{\mu N_2 I_2 S}{l}.$$

Поэтому потокосцепление

$$\Psi_1 = N_1 \Phi_1 = \frac{\mu N_1 N_2 I_2 S}{l}.$$

Отсюда найдем, что

$$L_{21} = L_{12}. \quad (8.41)$$

Это равенство справедливо для двух любых контуров и составляет содержание *теоремы взаимности*.

Вычислим энергию магнитного поля двух соосных соленоидов. Векторы напряженности полей, создаваемых токами  $I_1$  и  $I_2$ , внутри соленоидов коллинеарны. Если токи  $I_1$  и  $I_2$  текут в одном направлении, то векторы  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$  сонаправлены. В этом случае суммарное магнитное поле характеризуется напряженностью:

$$H = H_1 + H_2 = \frac{1}{l} (N_1 I_1 + N_2 I_2).$$

Если же токи  $I_1$  и  $I_2$  текут в разных направлениях, то векторы  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$  направлены противоположно друг другу. При этом модуль напряженности магнитного поля

$$H = |\vec{H}_1 + \vec{H}_2| = |H_1 - H_2| = \frac{1}{l} |N_1 I_1 - N_2 I_2|.$$

Энергию однородного магнитного поля найдем по формуле (8.28):

$$W = \frac{1}{2} \mu H^2 V = \frac{\mu}{2l^2} (N_1 I_1 \pm N_2 I_2)^2 V = \\ = \frac{\mu S}{2l} \left( (N_1 I_1)^2 + (N_2 I_2)^2 \pm 2 N_1 N_2 I_1 I_2 \right).$$

При помощи формул (8.22) и (8.40), запишем это выражение так:

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm L_{12} I_1 I_2, \quad (8.42)$$

где первое слагаемое есть энергия тока в первом соленоиде, второе – энергия тока во втором, а третье слагаемое называется *взаимной энергией*. Формула (8.42) справедлива в общем случае для двух произвольных контуров.

**З а д а ч а.** Найти взаимную индуктивность тороидальной катушки и проходящего по ее оси бесконечного прямого провода. Катушка имеет прямоугольное сечение. Внутренний радиус тороида равен  $a$ , внешний –  $b$ , а его высота –  $h$ . Число витков в катушке –  $N$ . Магнитная проницаемость окружающей среды –  $\mu$ .

### 8.10. Один из способов измерения магнитной индукции

Для измерения индукции магнитного поля в некоторой точке пространства поместим в ее окрестности небольшую проволочную рамку, соединенную с баллистическим гальванометром. Если размеры рамки невелики, то магнитное поле, силовые линии которого пронизывают рамку, всегда можно считать однородным. При этом полный магнитный поток

$$\Psi = N B S \cos \alpha,$$

где  $N$  – число витков в рамке;  $S$  – ее площадь;  $B$  – магнитная индукция;  $\alpha$  – угол между нормалью к плоскости рамки и вектором  $\vec{B}$ .

При повороте рамки в ней появляется индукционный ток, силу которого можно найти по закону Фарадея:

$$I = \frac{\epsilon}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}, \quad (8.43)$$

где  $R$  – сопротивление цепи. По определению сила тока

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (8.44)$$

где  $Q = Q(t)$  – заряд, протекающий через рамку. Подставив (8.44) в (8.43), получим

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}.$$

Проинтегрировав это равенство, найдем, что заряд, протекающий по рамке за время от  $t_1$  до  $t_2$ ,

$$\Delta Q = \frac{1}{R} \left( \Psi(t_1) - \Psi(t_2) \right). \quad (8.45)$$

Пусть в момент времени  $t_1$  рамка ориентирована так, что вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен к плоскости рамки и угол  $\alpha = 0$ . Тогда

$$\Psi(t_1) = N B S.$$

После поворота рамки на  $180^\circ$  потокосцепление

$$\Psi(t_2) = - N B S.$$

При этом через рамку протекает заряд

$$\Delta Q = \frac{2 N B S}{R}. \quad (8.46)$$

Зная значения величин  $N$ ,  $S$  и  $R$  и измерив заряд  $\Delta Q$  баллистическим гальванометром, из равенства (8.46) можно найти магнитную индукцию:

$$B = \frac{R \Delta Q}{2 N S}. \quad (8.47)$$

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

9.1. Колебательный контур.  
Гармонические колебания

Электромагнитные возмущения распространяются в пространстве и в различных радиотехнических устройствах со скоростью света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Расстояние  $l = 3$  м электромагнитное возмущение пробегает за время  $\tau = l/c = 10^{-8}$  с. Поэтому мгновенные значения силы тока во всех точках однородного участка цепи практически одинаковы. Такие токи называют *квазистационарными*. Мгновенные значения квазистационарных токов подчиняются закону Ома и правилам Кирхгофа. Одно из правил Кирхгофа утверждает, что алгебраическая сумма падений напряжения в замкнутой электрической цепи (контуре) равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этой цепи:

$$\sum U = \sum \varepsilon . \tag{9.1}$$

Электрическая цепь, состоящая из конденсатора и катушки индуктивности, называется *колебательным контуром* (рис. 9.1). Сила тока  $I$ , текущего в контуре, а также заряд  $Q$  и напряжение  $U$  на конденсаторе изменяются с течением времени:  $I = I(t)$ ,  $Q = Q(t)$  и  $U = U(t)$ . Найдем эти функции. Согласно правилу Кирхгофа (9.1) падение напряжения на конденсаторе  $U$  равно ЭДС в катушке индуктивности:

$$U = \varepsilon_L . \tag{9.2}$$

Напряжение на конденсаторе пропорционально заряду на его обкладках:

$$U = \frac{Q}{C} , \tag{9.3}$$

а ЭДС самоиндукции в катушке определяется формулой

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt} . \tag{9.4}$$

Подставив (9.3) и (9.4) в равенство (9.2), получим уравнение

$$\frac{Q}{C} = -L \frac{dI}{dt} . \tag{9.5}$$

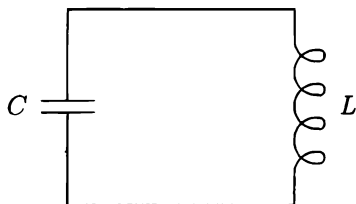


Рис. 9.1.

Колебательный контур

Сила тока и заряд на конденсаторе связаны соотношением

$$I = \frac{dQ}{dt} . \quad (9.6)$$

Выразим из соотношений (9.3) и (9.6) заряд на конденсаторе и силу тока в контуре через напряжение между обкладками конденсатора:

$$Q = C U , \quad (9.7)$$

$$I = C \frac{dU}{dt} . \quad (9.8)$$

Подстановка этих выражений в равенство (9.5) после элементарных преобразований приводит к уравнению

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \omega_o^2 U = 0 , \quad (9.9)$$

где

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (9.10)$$

Уравнение (9.9) есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Нетрудно доказать, что общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$U(t) = U_m \cos(\omega_o t + \alpha) , \quad (9.11)$$

где  $U_m$  – амплитуда напряжения,  $\alpha$  – начальная фаза. Величина (9.10) называется *собственной частотой электромагнитных колебаний* в контуре. Функция (9.11) описывает гармонические колебания напряжения на обкладках конденсатора. Амплитуда  $U_m$  и начальная фаза  $\alpha$  этих колебаний могут быть найдены из начальных условий. Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{LC} . \quad (9.12)$$

Это соотношение называется формулой Томсона.

Зная зависимость (9.11) напряжения на конденсаторе от времени  $t$ , по формулам (9.7) и (9.8) можно установить, как изменяются со временем заряд на обкладках конденсатора и сила тока в контуре:

$$Q(t) = Q_m \cos(\omega_o t + \alpha) , \quad (9.13)$$

$$I(t) = -I_m \sin(\omega_o t + \alpha) , \quad (9.14)$$



где

$$Q_m = C U_m \quad \text{и} \quad I_m = \omega_o Q_m \quad (9.15)$$

– амплитуды заряда и тока соответственно.

Имея в виду формулу (9.6), умножим левую часть равенства (9.5) на производную  $Q$ , а правую – на  $I$ . Полученное уравнение

$$\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = -L I \frac{dI}{dt}$$

можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2}{2C} + \frac{L I^2}{2} \right) = 0. \quad (9.16)$$

Из этого равенства следует, что выражение в круглых скобках не изменяется с течением времени:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{L I^2}{2} = \text{const}. \quad (9.17)$$

Первое слагаемое в левой части этого равенства есть энергия электрического поля в заряженном конденсаторе

$$W_e = \frac{Q^2}{2C}, \quad (9.18)$$

а второе

$$W_m = \frac{L I^2}{2}, \quad (9.19)$$

– энергия магнитного поля в катушке. Равенство (9.17) выражает собой закон сохранения энергии, согласно которому полная энергия в контуре, равная сумме энергий электрического поля в конденсаторе и магнитного поля в катушке, со временем не изменяется.

**З а д а ч а 1.** Доказать, что функция (9.11) является решением уравнения (9.9).

**З а д а ч а 2.** Найти зависимости от времени энергий электрического поля в конденсаторе и магнитного поля в катушке. Доказать, что их сумма со временем не изменяется.

## 9.2. Затухающие электромагнитные колебания

Соединительные провода и проволока, из которой изготовлена катушка индуктивности, обладают некоторым сопротивлением  $R$ . Схема реального колебательного контура, учитывающая это сопротивление, показана на рис. 9.2. Правило Кирхгофа в этом случае приводит к равенству

$$U + U_R = \varepsilon_L, \quad (9.20)$$

где по закону Ома падение напряжения на сопротивлении

$$U_R = R I . \quad (9.21)$$

При помощи формул (9.3), (9.4) и (9.21) преобразуем равенство (9.20) к виду

$$\frac{Q}{C} + R I = -L \frac{dI}{dt} . \quad (9.22)$$

Подстановка в это равенство выражений (9.7) и (9.8) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2\beta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0 , \quad (9.23)$$

где

$$\beta = \frac{R}{2L} , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (9.24)$$

Нетрудно доказать, что функция

$$U(t) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \quad (9.25)$$

при произвольных значениях  $U_0$  и  $\alpha$  является решением уравнения (9.23), если частота

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} , \quad (9.26)$$

где  $\omega_0 > \beta$ . Эта функция описывает так называемые *затухающие колебания* напряжения на конденсаторе. Ее график изображен на рис. 9.3.

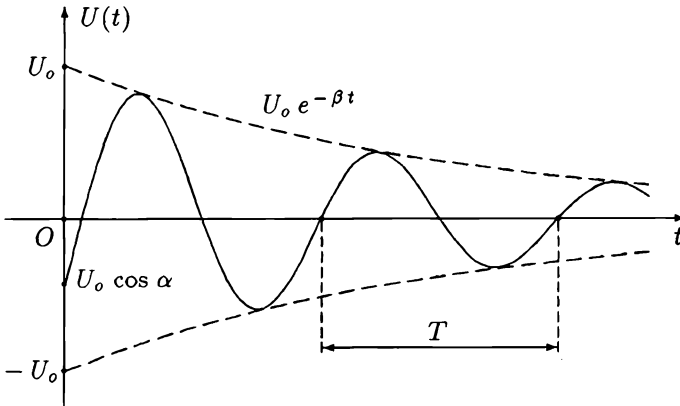


Рис. 9.3. Затухающие колебания напряжения на конденсаторе

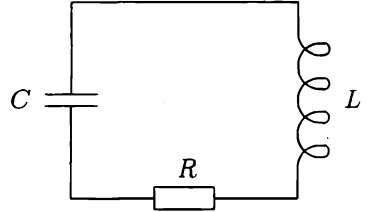


Рис. 9.2.  
Колебательный контур

## Функция

$$U_m(t) = U_0 e^{-\beta t} \quad (9.27)$$

называется *амплитудой затухающих колебаний*. При  $U_0 > 0$  это есть монотонно убывающая функция, которая при  $t \rightarrow \infty$  обращается в ноль. Поэтому величину  $\beta$  называют *коэффициентом затухания*. Уменьшение амплитуды  $U_m(t)$  с течением времени принято характеризовать еще одной величиной

$$\lambda = \ln \frac{U_m(t)}{U_m(t+T)}, \quad (9.28)$$

которую называют *логарифмическим декрементом затухания*. В этой формуле под знаком логарифма стоит отношение амплитуды колебаний в момент времени  $t$  к амплитуде колебаний в момент времени  $t+T$ , где

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

– период колебаний. Подставив функцию (9.27) в формулу (9.28), получим

$$\lambda = \beta T. \quad (9.29)$$

Величина

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

имеет размерность времени. Найдем отношение двух значений функции (9.27), одно из которых соответствует произвольному моменту времени  $t$ , а другое – моменту времени  $t+\tau$ :

$$\frac{U_m(t)}{U_m(t+\tau)} = \frac{1}{e}.$$

Таким образом, за время  $\tau$  амплитуда напряжения на конденсаторе уменьшается в  $e$  раз. Величина

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{\lambda}$$

– число колебаний, совершаемых за время  $\tau$ . Это соотношение раскрывает физический смысл логарифмического декремента затухания.

В качестве характеристики колебательного контура используют также величину

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}, \quad (9.30)$$

которую называют *добротностью* контура. Используя полученные ранее формулы, можно записать следующие выражения для добротности:

$$Q = \frac{\pi \tau}{T} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}{2\beta}.$$

Если коэффициент затухания мал ( $\beta \ll \omega_o$ ), то

$$Q \cong \frac{\omega_o}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (9.31)$$

Формула (9.26) имеет смысл только в том случае, когда коэффициент затухания  $\beta$  меньше собственной частоты  $\omega_o$  колебаний:

$$\beta < \omega_o. \quad (9.32)$$

Только при этом условии в контуре возможны колебания. Преобразуем неравенство (9.32) при помощи формул (9.24). После элементарных операций придем к неравенству

$$R < R_{кр}, \quad (9.33)$$

где величина

$$R_{кр} = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9.34)$$

называется *критическим сопротивлением*. Таким образом, приходим к заключению, что колебания в контуре возможны, когда его сопротивление  $R$  меньше критического.

Умножим уравнение (9.22) на  $I$  и преобразуем полученное равенство так:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2}{2C} + \frac{L I^2}{2} \right) = -R I^2. \quad (9.35)$$

Это уравнение можно записать следующим образом:

$$dW = -P dt,$$

где

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{L I^2}{2} \quad (9.36)$$

– полная энергия контура,

$$P = R I^2 \quad (9.37)$$

– мощность джоулева энерговыделения, т.е. количество тепла, которое выделяется за единицу времени в проводах и катушке при прохождении

по ним электрического тока. Таким образом, приходим к заключению, что энергия контура уменьшается со временем ( $dW < 0$ ). За время  $dt$  энергия  $W$  электрического и магнитного полей уменьшается на величину  $|dW|$ , которая равна теплу  $P dt$ , выделяющемуся за это время в сопротивлении.

**Задача 1.** Найти зависимость силы тока  $I$  в контуре от времени.

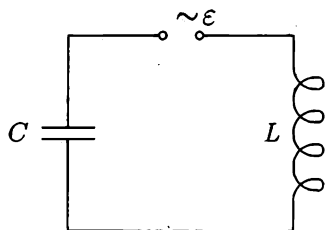
**Задача 2.** Установить, как изменяется с течением времени полная энергия  $W$ , запасенная в контуре.

### 9.3. Вынужденные электромагнитные колебания

Подключим колебательный контур к генератору переменной электродвижущей силы

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \Omega t, \quad (9.38)$$

где  $\varepsilon_m$  и  $\Omega$  – амплитуда и частота напряжения (ЭДС), вырабатываемого генератором (рис. 9.4). В этом случае правило Кирхгофа дает уравнение



$$U = -L \frac{dI}{dt} + \varepsilon_m \cos \Omega t,$$

которое преобразуем при помощи формул (9.7) и (9.8) к виду

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \omega_0^2 U = \omega_0^2 \varepsilon_m \cos \Omega t, \quad (9.39)$$

Рис. 9.4.  
Колебательный контур

где  $U = U(t)$  – функция, описывающая колебания напряжения на обкладках конденсатора.

Нетрудно проверить, что функция

$$U_s(t) = U_m \cos \Omega t \quad (9.40)$$

есть частное решение уравнения (9.39). Она описывает *вынужденные колебания*, обусловленные действием подключенного к контуру генератора. Как видно, частота этих колебаний равна частоте напряжения, вырабатываемого генератором. Чтобы убедиться в том, что функция (9.40) есть решение уравнения (9.39), необходимо подставить эту функцию в уравнение. В самом деле такая подстановка обращает это уравнение в тождество, но при условии, что амплитуда  $U_m$  вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе связана с амплитудой  $\varepsilon_m$  напряжения генератора соотношением

$$U_m = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_m}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (9.41)$$

Как видно из этой формулы, амплитуда вынужденных колебаний напряжения зависит от частоты генератора электродвижущей силы. График зависимости  $U_m = U_m(\Omega)$  показан на рис. 9.5. Такого вида кривые называются *резонансными*.

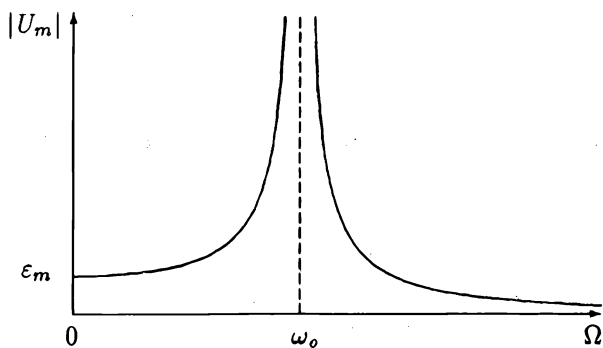


Рис. 9.5. Резонансная кривая

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

(продолжение)

## 9.4. Дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний

Как было показано в разделе 9.2, напряжение  $U$  на обкладках конденсатора, который вместе с катушкой индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$  образует колебательный контур, изменяется со временем так, что функция  $U = U(t)$  является решением дифференциального уравнения (9.23)

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\beta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0.$$

Рассмотрим один из способов отыскания решений этого уравнения. Будем искать решение этого уравнения в виде произведения

$$U(t) = e^{-\beta t} \cdot f(t). \quad (9.42)$$

Производные этой функции

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= e^{-\beta t} \left( \frac{df}{dt} - \beta f \right), \\ \frac{d^2U}{dt^2} &= e^{-\beta t} \left( \frac{d^2f}{dt^2} - 2\beta \frac{df}{dt} + \beta^2 f \right). \end{aligned}$$

Подстановка функции (9.42) и ее производных в уравнение (9.23) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2f}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2) f = 0. \quad (9.43)$$

При условии, что

$$\omega_0 > \beta, \quad (9.44)$$

уравнение (9.43) представляет собой дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{f} + \omega^2 f = 0, \quad (9.45)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (9.46)$$

Общее решение уравнения (9.45) имеет вид

$$f(t) = U_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

где  $U_0$  и  $\alpha$  – постоянные величины. Подстановка этого выражения в формулу (9.42) приводит к функции

$$U(t) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (9.47)$$

которая описывает затухающие колебания напряжения на конденсаторе.

В том случае, когда сопротивление контура больше критического, т.е.

$$R > R_{кр}, \quad (9.48)$$

неравенство (9.44) нарушается. Теперь уравнение (9.43) следует записать так:

$$\ddot{f} - \gamma^2 f = 0, \quad (9.49)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (9.50)$$

при условии, что  $\beta > \omega_0$ . Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться в том, что общим решением уравнения (9.49) является сумма

$$f(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 e^{\gamma t},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные. При этом функция (9.42) будет иметь вид

$$U(t) = C_1 e^{-(\beta+\gamma)t} + C_2 e^{-(\beta-\gamma)t}. \quad (9.51)$$

Такая функция описывает аperiодические изменения напряжения на конденсаторе, с которого стекают накопленные на его обкладках заряды. Возможные графики этой функции изображены на рис. 9.6.

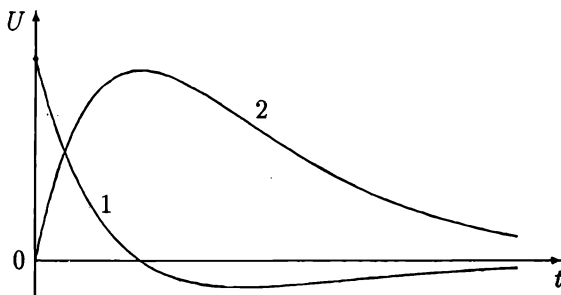


Рис. 9.6. Зависимость напряжения на конденсаторе от времени



Кривая 1 на рис. 9.6 соответствует случаю, когда в момент времени  $t = 0$  конденсатор был заряжен, а ток в контуре был равен нулю. Затем конденсатор стал разряжаться и в контуре появился ток. В некоторый момент времени напряжение на конденсаторе станет равным нулю, но при этом в контуре еще будет идти ток. Поэтому конденсатор снова начнет заряжаться, но в обратной полярности. После того как напряжение на конденсаторе достигнет наибольшего значения, он будет разряжаться. Кривая 2 соответствует случаю, когда в момент времени  $t = 0$  конденсатор не был заряжен, но по контуру шел ток и в катушке было магнитное поле. Затем заряды стали натекают на обкладки конденсатора, т.е. он стал заряжаться. Напряжение на конденсаторе растёт до максимума и после этого снижается до нуля.

## 9.5. Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний. Резонанс напряжения и резонанс тока

Подключим колебательный контур, сопротивление которого равно  $R$ , к генератору переменной электродвижущей силы

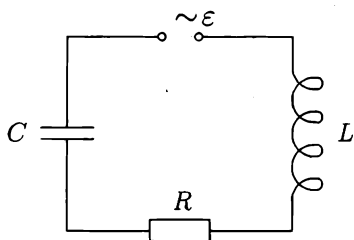


Рис. 9.7.  
Колебательный контур  
с генератором ЭДС

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \Omega t,$$

где  $\varepsilon_m$  и  $\Omega$  – амплитуда и частота напряжения (ЭДС), вырабатываемого генератором (рис. 9.7). В этом случае правило Кирхгофа даёт уравнение

$$\frac{Q}{C} + RI = -L \frac{dI}{dt} + \varepsilon_m \cos \Omega t,$$

которое преобразуем при помощи формул (9.6) и (9.7) к виду

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2\beta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = \omega_0^2 \varepsilon_m \cos \Omega t, \quad (9.52)$$

где функция  $U = U(t)$  описывает колебания напряжения на конденсаторе. Общее решение этого уравнения представляет собой сумму двух функций:

$$U(t) = U_{cs}(t) + U_a(t), \quad (9.53)$$

где функция  $U_{cs}(t)$  является общим решением (9.25) уравнения (9.23). Эта функция описывает так называемые *свободные колебания*. Функция

$U_0(t)$  есть частное решение уравнения (9.52). Она описывает *вынужденные колебания*, обусловленные действием подключенного к контуру генератора. Свободные колебания затухают с течением времени. Вынужденные колебания совершаются до тех пор, пока не перестанет действовать генератор. После того как прекратятся свободные затухающие колебания (т.е. обратится в ноль первое слагаемое в формуле (9.53), описывающее эти колебания), в контуре будут происходить только вынужденные колебания, которые в таком случае называются *установившимися*.

Будем искать частное решение уравнения (9.52), которое описывает установившиеся колебания, в виде

$$U = U_0(t) \equiv U_m \cos(\Omega t + \psi), \quad (9.54)$$

где  $U_m$  — амплитуда вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе,  $\psi$  — начальная фаза этих колебаний. Найдем производные этой функции

$$\frac{dU}{dt} = -\Omega U_m \sin(\Omega t + \psi), \quad \frac{d^2U}{dt^2} = -\Omega^2 U_m \cos(\Omega t + \psi).$$

Подстановка функции (9.54) и ее производных в уравнение (9.52) приводит к равенству

$$U_m \left( (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \psi) - 2\beta\Omega \sin(\Omega t + \psi) \right) = \omega_0^2 \varepsilon_m \cos \Omega t.$$

Преобразуем это равенство при помощи тригонометрических формул

$$\cos(\Omega t + \psi) = \cos \Omega t \cos \psi - \sin \Omega t \sin \psi,$$

$$\sin(\Omega t + \psi) = \sin \Omega t \cos \psi + \cos \Omega t \sin \psi.$$

Сгруппировав слагаемые, содержащие  $\cos \Omega t$  и  $\sin \Omega t$ , получим равенство

$$U_m \left( (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \psi - 2\beta\Omega \sin \psi \right) \cos \Omega t + U_m \left( -(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \psi - 2\beta\Omega \cos \psi \right) \sin \Omega t = \omega_0^2 \varepsilon_m \cos \Omega t.$$

Это равенство будет выполняться при любых значениях времени  $t$ , если равны коэффициенты при  $\cos \Omega t$  и  $\sin \Omega t$  в левой и правой частях равенства:

$$U_m \left( (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \psi - 2\beta\Omega \sin \psi \right) = \omega_0^2 \varepsilon_m, \quad (9.55)$$

$$U_m \left( -(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \psi - 2\beta\Omega \cos \psi \right) = 0. \quad (9.56)$$

Возведем уравнения (9.55) и (9.56) в квадрат и сложим полученные таким образом уравнения. Придем к уравнению

$$U_m^2 \left( (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right) = \omega_0^4 \varepsilon_m^2,$$

из которого найдем, что амплитуда вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе

$$U_m = U_m(\Omega) = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (9.57)$$

Из уравнения (9.56) найдем начальную фазу  $\psi$  вынужденных колебаний

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (9.58)$$

Как видно из формулы (9.57), амплитуда вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе зависит от частоты генератора электродвижущей силы. При  $\Omega = 0$  генератор вырабатывает постоянное напряжение  $\varepsilon_m$ . В этом случае ток в контуре отсутствует и напряжение на конденсаторе равно напряжению на клеммах генератора  $U_m = \varepsilon_m$ . При увеличении частоты генератора амплитуда  $U_m$  вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе увеличивается, достигая наибольшего значения, когда частота генератора принимает значение  $\Omega_p$ , называемое *резонансной частотой*; а затем при дальнейшем увеличении  $\Omega$  уменьшается до нуля. График зависимости  $U_m = U_m(\Omega)$ , определяемой формулой (9.57), представлен на рис. 9.8. Такого вида кривые называются *резонансными*, а само явление увеличения амплитуды вынужденных колебаний, когда их частота приближается к резонансному значению, — *резонансом*.

Резонансную частоту  $\Omega_p$  можно найти из условия максимума функции  $U_m = U_m(\Omega)$

$$\frac{dU_m}{d\Omega} = 0.$$

Подставив в это условие производную функции (9.57), получим уравнение

$$-\omega_0^2 + \Omega^2 + 2\beta^2 = 0,$$

из которого найдем, что

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (9.59)$$

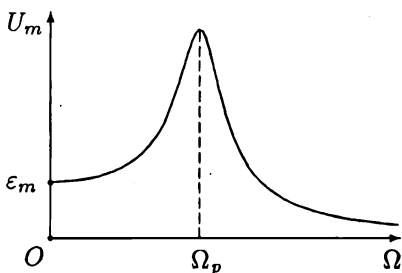


Рис. 9.8. Резонанс напряжения на конденсаторе

Этому значению частоты соответствует наибольшее (резонансное) значение амплитуды напряжения

$$U_{m_p} = \frac{\omega_o^2 \varepsilon_m}{2\beta \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}. \quad (9.60)$$

Анализируя формулу (9.59), приходим к выводу, что функция  $U_m = U_m(\Omega)$  имеет максимум при условии, что

$$\beta < \frac{\omega_o}{\sqrt{2}},$$

т.е. когда коэффициент затухания  $\beta$  принимает достаточно низкие значения. Если свободные колебания в контуре затухают очень быстро ( $\beta > \omega_o/\sqrt{2}$ ), то резонанс невозможен. Чем меньше коэффициент затухания  $\beta$ , тем ближе значение  $\Omega_p$  резонансной частоты к собственной частоте  $\omega_o$  контура и тем больше резонансное значение  $U_{m_p}$  амплитуды напряжения, как это видно из формулы (9.60).

Подставив функцию (9.54) в формулу (9.8), найдем зависимость силы тока от времени

$$I = I_o(t) = -C \Omega U_m \sin(\Omega t + \psi) = I_m \cos\left(\Omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (9.61)$$

которое описывает установившиеся вынужденные колебания силы тока в контуре. Амплитуда этих колебаний, как следует из формул (9.57) и (9.61), будет

$$I_m = I_m(\Omega) = C \Omega U_m = \frac{C \varepsilon_m \omega_o^2 \Omega}{\sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (9.62)$$

Нетрудно видеть, что это выражение при любых значениях частоты  $\Omega$  неотрицательно. При  $\Omega = 0$  и  $\Omega \rightarrow \infty$  амплитуда силы тока обращается в ноль. Найдем наибольшее значение амплитуды  $I_m$  силы тока из условия

$$\frac{dI_m}{d\Omega} = 0.$$

Подставив функцию (9.62) в это условие, после ее дифференцирования и элементарных преобразований полученного уравнения найдем, что амплитуда  $I_m$  силы тока достигает наибольшего значения при

$$\Omega = \omega_o,$$

т.е. резонансная частота для силы тока равна собственной частоте контура. График функции  $I_m = I_m(\Omega)$  представлен на рис. 9.9.

Резонансное значение силы тока

$$I_{m_p} = I_m(\omega_o) = \frac{C \varepsilon_m \omega_o^2}{2\beta} = \frac{\varepsilon_m}{R}. \quad (9.63)$$

Интересно отметить, что это значение совпадает со значением силы постоянного тока, который протекает по проводнику сопротивления  $R$ , когда к нему приложено постоянное напряжение  $\varepsilon_m$ .

Найдем значения частот  $\Omega$ , которым соответствует значение амплитуды силы тока в  $\sqrt{2}$  раз меньшее резонансного значения:

$$I_m(\Omega) = \frac{I_{m_p}}{\sqrt{2}}. \quad (9.64)$$

При помощи формул (9.62) и (9.63) это уравнение можно записать так:

$$2\sqrt{2}\beta\Omega = \sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}.$$

После возведения этого уравнения в квадрат и простых преобразований придем к уравнению

$$(\Omega + \omega_o) \cdot |\Omega - \omega_o| = 2\beta\Omega.$$

Из этого уравнения найдем, что ширина  $\Delta\Omega$  (рис. 9.9) резонансной кривой на уровне  $I_{m_p}/\sqrt{2}$

$$\Delta\Omega = 2|\Omega - \omega_o| = \frac{4\beta\Omega}{\Omega + \omega_o}.$$

Так как для частот

$$\Omega \in \left( \omega_o - \frac{\Delta\Omega}{2}, \omega_o + \frac{\Delta\Omega}{2} \right)$$

справедливо приближенное равенство

$$\Omega \simeq \omega_o,$$

будем иметь

$$\Delta\Omega \simeq 2\beta. \quad (9.65)$$

При помощи соотношения (9.31), которое справедливо при  $\beta \ll \omega_o$ , этой формуле можно придать вид

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega_o} = \frac{1}{Q}. \quad (9.66)$$

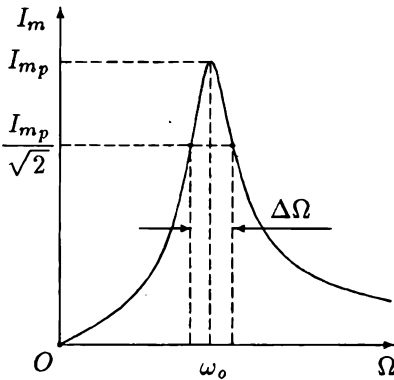


Рис. 9.9. Резонанс силы тока в колебательном контуре

Таким образом, приходим к заключению, что относительная ширина  $\Delta\Omega/\omega_0$  резонансной кривой обратно пропорциональна добротности контура  $Q$ . Отсюда следует, что чем выше добротность контура, тем "острее" резонансная кривая.

## 9.6. Метод комплексных амплитуд

В практической электротехнике приходится иметь дело с электрическими цепями, состоящими из проводников, конденсаторов и катушек индуктивности, по которым текут переменные токи, обусловленные включенными в эти цепи генераторами переменных напряжений одной и той же частоты. Для расчета таких цепей, т.е. для определения переменных токов на различных участках цепи, в электротехнике применяют метод комплексных амплитуд.

В электротехнике мнимую единицу, т.е.  $\sqrt{-1}$ , принято обозначать символом  $j$ :

$$j^2 = -1. \quad (9.67)$$

Комплексное число  $z$  есть сумма вида

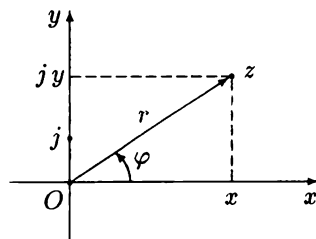
$$z = x + jy, \quad (9.68)$$

в которой действительное число  $x$  называют реальной, или вещественной частью комплексного числа  $z$ , а действительное число  $y$  – мнимой частью числа  $z$ :

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Комплексному числу  $z$  можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Числа  $x$  и  $y$  рассматривают как декартовы координаты точки на плоскости  $xy$  (рис. 9.10). При этом комплексное число (9.68) соответствует точке, имеющей координаты  $x$  и  $y$ . Поэтому говорят, что точка на плоскости изображает некоторое комплексное число. Например, мнимая единица изображается точкой с координатами  $x = 0$  и  $y = 1$ , которая лежит на оси  $y$ . При  $x = 0$  комплексное число  $z = jy$  называют *чисто мнимым*.

Рис. 9.10.  
Геометрическая интерпретация  
комплексного числа



Комплексное число  $z = x + j y$  можно также представить вектором на плоскости, который соединяет начало координат с точкой  $(x, y)$ . Длину  $r$  этого вектора называют *модулем* комплексного числа  $z$  и обозначают  $|z|$ . Угол  $\varphi$ , который вектор  $z$  образует с осью  $x$ , называют *аргументом* комплексного числа. Декартовы координаты точки на плоскости связаны с  $r$  и  $\varphi$  соотношениями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (9.69)$$

при помощи которых формулу (9.68) можно записать в виде

$$z = r (\cos \varphi + j \sin \varphi). \quad (9.70)$$

Это выражение называют тригонометрической формой комплексного числа. Очевидно, что

$$|z| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (9.71)$$

Показательная функция  $e^{j\varphi}$  мнимого аргумента  $j\varphi$  определяется *формулой Эйлера*:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi. \quad (9.72)$$

Это определение позволяет записать комплексное число (9.70) в так называемой *показательной форме*:

$$z = r e^{j\varphi}. \quad (9.73)$$

Мнимая единица на плоскости  $xy$  изображается вектором, длина которого равна единице:  $|j| = 1$ , а аргумент  $\varphi = \pi/2$ . Согласно формуле (9.73) мнимая единица

$$j = e^{j\pi/2}. \quad (9.74)$$

Комплексное число

$$z^* = x - j y \quad (9.75)$$

называется комплексно сопряженным числу  $z = x + j y$ . Нетрудно доказать, что

$$z^* z = |z|^2. \quad (9.76)$$

Квазистационарные токи в электрических цепях можно найти при помощи правил Кирхгофа (4.25) и (4.26):

$$\sum I_k = 0, \quad \sum U_k = \sum \varepsilon_k. \quad (9.77)$$

Когда цепь состоит из проводников, конденсаторов и катушек индуктивности, уравнения (9.77) будут представлять собой линейные дифференциальные уравнения, в которых неизвестными функциями являются токи, заряды на конденсаторах и напряжения. Примером дифференциального уравнения, которое может быть получено из правил Кирхгофа, является уравнение (9.52). Общее решение системы линейных уравнений (9.77) равно сумме двух функций. Первая функция является общим решением однородных уравнений. Эта функция описывает собственные колебания, которые в реальных случаях всегда затухают с течением времени. Вторая функция является частным решением неоднородных уравнений (9.77), которые содержат в своих правых частях ЭДС генераторов, включенных в рассматриваемую электрическую цепь. Именно это частное решение уравнений Кирхгофа представляет практический интерес в электротехнике. Так как на практике важно знать переменные токи, которые протекают в электрических цепях, подключенных к продолжительное время работающим генераторам переменного напряжения.

Для решения этой задачи в электротехнике реальные зависимости токов и напряжений от времени заменяют комплексными величинами. Пусть, например, на некотором участке цепи протекает переменный ток, т.е. ток, сила которого изменяется со временем по закону

$$I(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I), \quad (9.78)$$

где  $I_m$  – амплитуда тока;  $\omega$  – частота;  $\varphi_I$  – начальная фаза колебаний тока. Рассмотрим комплексную функцию

$$\hat{I}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_I)}. \quad (9.79)$$

Очевидно, что функция  $I(t)$  является реальной частью функции  $\hat{I}(t)$ :

$$I(t) = \operatorname{Re} \hat{I}(t). \quad (9.80)$$

Пусть на рассматриваемом участке цепи имеется переменное напряжение

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U), \quad (9.81)$$

где  $U_m$  – амплитуда напряжения;  $\varphi_U$  – начальная фаза колебаний напряжения. Комплексная функция

$$\hat{U}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_U)} \quad (9.82)$$

связана с напряжением (8.81) соотношением

$$U(t) = \operatorname{Re} \hat{U}(t). \quad (9.83)$$



Аналогично вырабатываемую генератором переменную ЭДС

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon), \quad (9.84)$$

где  $\varepsilon_m$  – амплитуда ЭДС;  $\varphi_\varepsilon$  – начальная фаза, можно представить как реальную часть комплексной функции

$$\hat{\varepsilon}(t) = \varepsilon_m e^{j(\omega t + \varphi_\varepsilon)}, \quad (9.85)$$

т.е.

$$\varepsilon(t) = \operatorname{Re} \hat{\varepsilon}(t). \quad (9.86)$$

Функции  $\hat{I}(t)$ ,  $\hat{U}(t)$  и  $\hat{\varepsilon}(t)$  содержат в себе множитель  $e^{j\omega t}$ . Значения  $\hat{I}(0)$ ,  $\hat{U}(0)$  и  $\hat{\varepsilon}(0)$  этих функций называют комплексными амплитудами.

Ввиду линейности уравнений (8.77) для комплексных функций  $\hat{I}_k(t)$ ,  $\hat{U}_k(t)$  и  $\hat{\varepsilon}_k(t)$  справедливы такие же уравнения

$$\sum \hat{I}_k = 0, \quad \sum \hat{U}_k = \sum \hat{\varepsilon}_k. \quad (9.87)$$

Нетрудно видеть, что применение к этим уравнениям операции  $\operatorname{Re}$  преобразует их в уравнения. Преимущество уравнений (9.87) заключается в простоте их решения.

Пусть участок цепи представляет собой проводник с сопротивлением  $R$ . Сила тока

$$I_R(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I)$$

и напряжение

$$U_R(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$$

на этом участке подчиняются закону Ома:

$$U_R = R I_R, \quad (9.88)$$

т.е.

$$U_m \cos(\omega t + \varphi_U) = R I_m \cos(\omega t + \varphi_I).$$

Из этого равенства следует, что амплитуды напряжения и тока связаны соотношением

$$U_m = R I_m,$$

а начальные фазы этих функций равны:

$$\varphi_U = \varphi_I.$$

В таком случае говорят, что колебания напряжения и силы тока совпадают по фазе. Соотношению (9.88) соответствует соотношение

$$\hat{U}_R = R \hat{I}_R, \quad (9.89)$$

связывающее комплексные амплитуды.

Пусть

$$I_L(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I)$$

есть сила тока, протекающего по катушке индуктивности  $L$ , а

$$U_L(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$$

– напряжение на концах этой катушки. Сопротивление катушки будем считать равным нулю. Напряжение  $U_L$  на катушке равно с обратным знаком ЭДС индукции  $\varepsilon_L$ , которая возникает при изменении силы тока в ней:

$$U_L = -\varepsilon_L.$$

По закону Фарадея

$$U_L = L \frac{dI_L}{dt}.$$

Этому равенству можно придать вид

$$U_m \cos(\omega t + \varphi_U) = -\omega L I_m \sin(\omega t + \varphi_I),$$

или

$$U_m \cos(\omega t + \varphi_U) = \omega L I_m \cos\left(\omega t + \varphi_I + \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.90)$$

Из этого равенства следует, что амплитуды напряжения на катушке индуктивности и силы тока в ней связаны соотношением

$$U_m = \omega L I_m,$$

а начальные фазы этих функций таковы, что

$$\varphi_U = \varphi_I + \frac{\pi}{2}.$$

С учетом формулы (9.74) соотношению (9.90) можно придать вид

$$\hat{U}_L = j\omega L \hat{I}_L. \quad (9.91)$$

Смысл этого равенства заключается в том, что операция  $\text{Re}$  преобразует его в равенство (9.90). Равенство (9.91) по виду напоминает закон Ома и его принято записывать следующим образом:

$$\hat{U}_L = Z_L \hat{I}_L, \quad (9.92)$$

где чисто мнимая величина

$$Z_L = j\omega L \quad (9.93)$$

называется комплексным сопротивлением катушки индуктивности, а величина

$$X_L = \omega L$$

– индуктивным сопротивлением.

Пусть

$$I_C(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I)$$

есть сила тока, притекающего к обкладкам конденсатора, а

$$U_C(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$$

– напряжение на них. Сила тока равна производной по времени от заряда  $Q$  на конденсаторе:

$$I_C(t) = \frac{dQ}{dt},$$

а напряжение  $U_C$  прямо пропорционально заряду  $Q$ :

$$U_C = \frac{Q}{C}.$$

Исключив из этих равенств заряд, придем к равенству

$$U_C = \frac{1}{C} \int I_C dt.$$

Для переменных напряжения и тока это равенство можно записать так:

$$U_m \cos(\omega t + \varphi_U) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi_I),$$

или

$$U_m \cos(\omega t + \varphi_U) = \frac{I_m}{\omega C} \cos\left(\omega t + \varphi_I - \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.94)$$

Из этого равенства следует, что амплитуды напряжения на конденсаторе и силы тока связаны соотношением

$$U_m = \frac{I_m}{\omega C},$$

а начальные фазы этих функций таковы, что

$$\varphi_U = \varphi_I - \frac{\pi}{2}.$$

С учетом формулы (9.74) соотношению (9.94) можно придать вид

$$\hat{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \hat{I}_C. \quad (9.95)$$

Смысл этого равенства заключается в том, что операция  $\text{Re}$  преобразует его в равенство (9.94). Равенство (9.95) принято записывать так:

$$\hat{U}_C = Z_C \hat{I}_C, \quad (9.96)$$

где чисто мнимая величина

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (9.97)$$

называется комплексным сопротивлением конденсатора, а величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

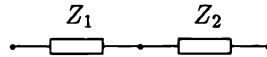
– емкостным сопротивлением.

Согласно формулам (9.89), (9.92) и (9.96) комплексные амплитуды напряжений и токов на проводнике, катушке индуктивности и конденсаторе подчиняются закону Ома, который теперь принимает вид

$$\hat{U} = Z \hat{I}, \quad (9.98)$$

где  $Z$  – комплексное сопротивление участка цепи, или его *импеданс*.

Рис. 9.11. Последовательное соединение элементов цепи



Рассмотрим участок цепи, состоящий из двух соединенных последовательно элементов, комплексные сопротивления которых равны  $Z_1$  и  $Z_2$  (рис. 9.11). В силу (9.98)

$$\hat{U}_1 = Z_1 \hat{I}_1, \quad \hat{U}_2 = Z_2 \hat{I}_2.$$

Напряжение на этом участке цепи равно сумме напряжений на его элементах:

$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2,$$

и через эти элементы протекает один и тот же ток:

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \hat{I}.$$

Полученные равенства приводят к формуле (9.98), в которой

$$Z = Z_1 + Z_2. \quad (9.99)$$

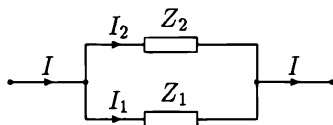


Рис. 9.12. Параллельное соединение элементов цепи

Рассмотрим участок цепи, состоящий из двух параллельно соединенных элементов, комплексные сопротивления которых равны  $Z_1$  и  $Z_2$  (рис. 9.12). В силу (9.98) можно записать

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{Z_1}, \quad \hat{I}_2 = \frac{\hat{U}_2}{Z_2}.$$

Ток, втекающий на этот участок, разветвляется и равен сумме токов в его элементах:

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2,$$

а напряжение на каждом из этих элементов равно напряжению на всем участке:

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 = \hat{U}.$$

Полученные равенства приводят к формуле

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{Z},$$

где

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \quad (9.100)$$

Формулы (9.99) и (9.100) дают возможность находить комплексные сопротивления участков цепи, состоящих из нескольких элементов.

В общем случае комплексное сопротивление участка цепи имеет вид

$$Z = R + jX, \quad (9.101)$$

где действительная часть  $R$  называется активным сопротивлением участка, а мнимая часть  $X$  – его реактивным сопротивлением. Комплексное число  $Z$  удобно представить в показательной форме

$$Z = |Z| e^{j\psi}, \quad (9.102)$$

где модуль этого числа

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (9.103)$$

а его аргумент  $\psi$  таков, что

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{X}{R}. \quad (9.104)$$

Предположим, что для некоторого участка цепи известно его комплексное сопротивление. В таком случае из соотношения (9.98) можно установить как связаны амплитуды напряжения и тока на этом участке и их начальные фазы. Для этого подставим в соотношение (9.98) выражения (9.79), (9.62) и (9.102). Получим

$$U_m e^{j(\omega t + \varphi_U)} = |Z| e^{j\psi} I_m e^{j(\omega t + \varphi_I)}.$$

Из этого равенства следует, что амплитуды напряжения и силы тока связаны соотношением

$$U_m = |Z| I_m, \quad (9.105)$$

а начальные фазы таковы, что

$$\varphi_U = \varphi_I + \psi. \quad (9.106)$$

В качестве примера расчета цепи методом комплексных амплитуд найдем комплексное сопротивление участка цепи в схеме, изображенной на рис. 9.13.

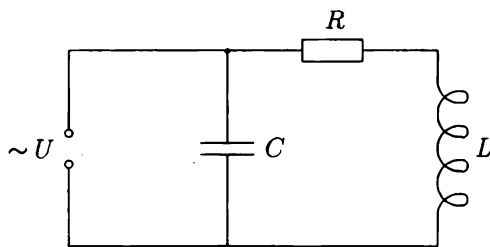


Рис. 9.13. Электрическая цепь переменного тока

На этой схеме проводник сопротивлением  $R$  и катушка индуктивности  $L$  соединены последовательно. Параллельно этому участку присоединен конденсатор емкости  $C$ , на который подается переменное напряжение. По формулам (9.99) и (9.100) найдем комплексное сопротивление цепи  $Z$ :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{R + Z_L}.$$

С учетом формул (9.93) и (9.97) будем иметь

$$\frac{1}{Z} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}.$$

После несложных преобразований получим формулу

$$Z = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}.$$

Умножим и разделим эту дробь на комплексно сопряженное знаменателю выражение

$$1 - \omega^2 LC - j\omega RC.$$

Придем к формуле

$$Z = \frac{R + j\omega(L(1 - \omega^2 LC) - R^2 C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}.$$

Из полученных формул найдем модуль и аргумент комплексного сопротивления:

$$|Z| = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R^2 C}{R}.$$

Теперь при помощи равенств (9.105) и (9.106) можно найти соотношения, связывающие амплитуды и начальные фазы колебаний напряжения и тока.

В схеме на рис. 9.7 проводник сопротивлением  $R$ , конденсатор  $C$  и катушка индуктивности  $L$  соединены последовательно. Поэтому комплексное сопротивление этой цепи равно

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L.$$

Модуль этого комплексного числа будет

$$|Z| = \frac{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}{\omega C}.$$

Пусть ЭДС генератора, подключенного к этой цепи, зависит от времени как

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos \omega t.$$

Тогда согласно формуле (9.105) амплитуда силы тока будет

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{|Z|} = \frac{\omega C \varepsilon_m}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}.$$

Нетрудно убедиться в том, что эта формула совпадает с формулой (9.62) с тем только отличием, что частота колебаний ЭДС здесь обозначена как  $\omega$ .

## 9.7. Мощность переменного тока

Согласно закону Джоуля – Ленца мгновенное значение мощности  $P$ , которая выделяется на некотором участке цепи, равно произведению силы тока  $I$  на напряжение  $U$  на этом участке:

$$P(t) = I(t) U(t). \quad (9.107)$$

Для переменного тока зависимости силы тока и напряжения от времени определяются формулами (9.78) и (9.81). При этом мощность

$$P(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I) U_m \cos(\omega t + \varphi_U).$$

Преобразуем это выражение при помощи тригонометрического тождества

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$$

Получим

$$P(t) = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \Delta\varphi + \frac{1}{2} I_m U_m \cos(2\omega t + \varphi_I + \varphi_U),$$

где

$$\Delta\varphi = \varphi_U - \varphi_I$$

– разность фаз напряжения и силы тока. Согласно полученной зависимости  $P = P(t)$  мощность переменного тока совершает гармонические колебания с частотой  $2\omega$  около среднего значения

$$\overline{P} = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \Delta\varphi. \quad (9.108)$$

Энергия  $W$ , потребляемая рассматриваемым участком цепи за промежуток времени  $\tau$ , равна интегралу от мощности:

$$W = \int_t^{t+\tau} P(t) dt.$$

Если длительность  $\tau$  существенно больше периода  $T$  колебаний тока в цепи, то энергия  $W$  будет с высокой точностью равна произведению среднего значения мощности на время  $\tau$ :

$$W = \overline{P} \tau. \quad (9.109)$$



Эту формулу используют для вычисления энергии, потребляемой каким-либо устройством, питающимся от сети переменного тока. Таким образом, с практической точки зрения интерес представляет именно среднее значение мощности переменного тока. Как видно из формулы (9.108) энергия  $W$ , потребляемая каким-либо устройством, будет тем больше, чем большим значением  $\cos \Delta\varphi$  характеризуется это устройство.

Разность фаз напряжения и силы тока, как следует из равенства (9.106), равна аргументу  $\psi$  комплексного сопротивления  $Z$ :

$$\Delta\varphi = \psi.$$

При этом из соотношения (9.104) следует, что

$$\cos \Delta\varphi = \cos \psi = \frac{R}{|Z|}.$$

Амплитуда напряжения связана с амплитудой силы тока соотношением (9.105). Эти соотношения позволяют преобразовать выражение (9.108) к виду

$$\overline{P} = \frac{1}{2} R I_m^2. \quad (9.110)$$

Эту формулу можно записать так:

$$\overline{P} = R I^2, \quad (9.111)$$

где

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

– так называемое действующее, или эффективное значение силы тока. Действующим значением напряжения называют величину

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Используя действующие значения силы тока и напряжения, формуле (9.108) можно придать вид

$$\overline{P} = I U \cos \Delta\varphi. \quad (9.112)$$

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

## 10.1. Уравнения Максвелла

Проанализировав результаты экспериментов Фарадея, Максвелл пришел к выводу, что изменяющееся магнитное поле создает *вихревое* электрическое поле. Затем Максвелл предположил, что изменяющееся электрическое поле в свою очередь должно создавать *вихревое* магнитное поле. Так как магнитное поле создается электрическими токами, Максвелл ввел в рассмотрение так называемые *токи смещения*, которые определяются изменяющимся со временем электрическим полем. Таким образом, согласно теории Максвелла переменные электрическое и магнитное поля взаимосвязаны и одновременно существуют в пространстве. Там, где есть одно из этих полей, непременно есть и другое поле. Существующие вместе переменные электрическое и магнитное поля образуют так называемое *электромагнитное поле*. Максвелл предложил уравнения, описывающие это поле.

Запишем систему *уравнений Максвелла* для изменяющихся со временем электрического и магнитного полей:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (10.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (10.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (10.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (10.4)$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля;  $\vec{D}$  – вектор электрической индукции;  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля;  $\vec{B}$  – магнитная индукция;  $\rho$  – объемная плотность свободных зарядов;  $\vec{j}$  – вектор плотности тока. Второе слагаемое в правой части уравнения (10.3)

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (10.5)$$

Максвелл назвал *плотностью тока смещения*.

Уравнение (10.1) выражает собой закон Фарадея. Уравнение (10.2) соответствует теореме Гаусса, которая доказывается в электростатике и переносится без изменения в теорию переменных электрических и магнитных полей (электродинамику). Уравнение (10.3) отличается от аналогичного уравнения из теории постоянного магнитного поля тем, что в его правой части присутствует дополнительное слагаемое  $\vec{j}_{см}$  – плотность тока смещения. Уравнение (10.4) взято без изменения из магнито-статике.

При помощи теорем Стокса и Остроградского – Гаусса уравнения Максвелла можно записать в интегральной форме так:

$$\oint_C \vec{E} \, d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \, d\vec{S}, \quad (10.6)$$

$$\oint_S \vec{D} \, d\vec{S} = \int_V \rho \, dV, \quad (10.7)$$

$$\oint_C \vec{H} \, d\vec{l} = \int_S \vec{j} \, d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \, d\vec{S}, \quad (10.8)$$

$$\oint_S \vec{B} \, d\vec{S} = 0. \quad (10.9)$$

В уравнениях (10.6) и (10.8) символ  $C$  обозначает произвольный контур, а символ  $S$  – произвольную поверхность, натянутую на этот контур. В уравнениях (10.7) и (10.9) символ  $S$  обозначает произвольную замкнутую поверхность, а символ  $V$  – объем внутри этой поверхности.

Уравнение (10.6) выражает собой закон электромагнитной индукции Фарадея. Уравнение (10.7) есть теорема Гаусса для вектора электрической индукции. Уравнение (10.8) называется теоремой о циркуляции вектора напряженности магнитного поля, или законом полного тока. Правая часть этого уравнения есть сила тока, протекающего через произвольную поверхность  $S$ , натянутую на контур  $C$ . Первое слагаемое здесь есть сила тока проводимости, а второе – сила тока смещения. Уравнение (10.9) есть теорема Гаусса для вектора магнитной индукции.

Уравнения Максвелла следует дополнить уравнениями, определяющими связь между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  и векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ , а также уравнениями движения носителей тока. Такими уравнениями в большинстве случаев являются

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (10.10)$$

где  $\epsilon$  и  $\mu$  – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей пространство, в котором существует исследуемое электромагнитное поле,  $\sigma$  – электропроводность вещества. Последнее из этих уравнений выражает закон Ома в дифференциальной форме.

## 10.2. Плотность и поток энергии электромагнитного поля

Уравнения Максвелла выражают основные законы электродинамики. Из этих уравнений можно вывести уравнения, которые описывают другие два фундаментальных закона физики – закон сохранения заряда и закон сохранения энергии.

Закон сохранения заряда выражается уравнением непрерывности (4.44) Это уравнение содержит две функции  $\rho = \rho(t, \vec{r})$   $\vec{j} = \vec{j}(t, \vec{r})$ , первая из которых – объемная плотность заряда описывает распределение электрических зарядов в пространстве, а вторая – плотность тока – направленное движение зарядов, т.е. электрический ток. Аналогичное уравнение выражает закон сохранения энергии электромагнитного поля. Это уравнение также содержит две функции, одна из которых – объемная плотность энергии описывает распределение энергии поля в пространстве, а вторая – плотность потока энергии – движение энергии.

Плотность энергии электромагнитного поля равна сумме плотностей электрического и магнитного полей:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2. \quad (10.11)$$

Перенос энергии электромагнитного поля в пространстве описывается посредством вектора *Умова – Пойнтинга*

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]. \quad (10.12)$$

Эти величины связаны уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j} \vec{E} - \text{div} \vec{S}, \quad (10.13)$$

которое выражает собой закон сохранения энергии электромагнитного поля.

Дифференциальному уравнению (10.13) соответствует интегральное уравнение

$$\frac{dW}{dt} = -P - \oint_S \vec{S} \vec{n} dS, \quad (10.14)$$

где

$$W = \int_V w dV \quad (10.15)$$

– энергия электромагнитного поля в объеме  $V$ . Величина  $\vec{j} \vec{E}$  – *удельная мощность джоулева энерговыделения*, т.е. количество тепла, которое выделяется в единице объема проводника с током за единицу времени. Следовательно, интеграл

$$P = \int_V \vec{j} \vec{E} dV \quad (10.16)$$

есть мощность, выделяющаяся в виде тепла в объеме  $V$ . Анализируя уравнение (10.14), можно заключить, что поток вектора  $\vec{S}$  через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ ,

$$\oint_S \vec{S} \vec{n} dS \quad (10.17)$$

есть энергия электромагнитного поля, вытекающая из этого объема за единицу времени. Таким образом, модуль вектора Умова – Пойнтинга равен энергии, которая падает за единицу времени на единицу площади поверхности, перпендикулярной этому вектору. Вектор  $\vec{S}$ , как следует из формулы (10.12), перпендикулярен векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Он определяет направление, в котором перемещается энергия электромагнитного поля. Этот вектор иначе называют *плотностью потока энергии* электромагнитного поля. Согласно его физическому смыслу поток

$$\int_S \vec{S} \vec{n} dS$$

есть энергия электромагнитного поля, падающая на некоторую поверхность  $S$  за единицу времени.

Вернемся к уравнению (10.14). Оно утверждает, что энергия  $W$  в объеме  $V$  изменяется вследствие того, что часть ее переходит в тепло, а часть вытекает через поверхность  $S$ .

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

(продолжение)

### 10.3. Вывод уравнения непрерывности из уравнений Максвелла

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (10.18)$$

выражающее закон сохранения заряда, связывает объемную плотность заряда  $\rho = \rho(t, \vec{r})$  и плотность тока  $\vec{j} = \vec{j}(t, \vec{r})$ . Покажем, что это уравнение можно получить из уравнений Максвелла.

Докажем следующее тождество:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0, \quad (10.19)$$

где  $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$  – произвольное векторное поле. Ротор вектора  $\vec{a}$  можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &\equiv [\nabla \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Дивергенция некоторого векторного поля  $\vec{b} = \vec{b}(\vec{r})$  есть скалярная величина, определяемая формулой

$$\operatorname{div} \vec{b} = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}. \quad (10.21)$$

Подставив в эту формулу вместо координат вектора  $\vec{b}$  координаты вектора  $\operatorname{rot} \vec{a}$ , получим выражение

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

Нетрудно видеть, что это выражение тождественно равно нулю. Таким образом, тождество (10.19) доказано.

Вычислим дивергенцию левой и правой частей уравнения (10.3). С учетом тождества (10.19) придем к равенству

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Это равенство можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Согласно уравнению (10.2) дивергенция электрической индукции равна объемной плотности заряда. С учетом этого придем к уравнению непрерывности (10.18).

**З а д а ч а.** Используя теоремы Стокса и Остроградского – Гаусса вывести уравнения Максвелла в интегральной форме из уравнений (10.1) – (10.4).

#### 10.4. Вывод соотношения, связывающего плотность энергии электромагнитного поля и вектор Умова – Пойнтинга

Докажем тождество

$$\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}. \quad (10.22)$$

Вычислим векторное произведение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  по формуле

$$[\vec{E} \vec{H}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}.$$

Вычислив определитель, получим

$$[\vec{E} \vec{H}] = (E_y H_z - E_z H_y) \vec{i} + (E_z H_x - E_x H_z) \vec{j} + (E_x H_y - E_y H_x) \vec{k}.$$

Теперь найдем дивергенцию этого выражения:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (E_y H_z - E_z H_y) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z H_x - E_x H_z) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x H_y - E_y H_x). \end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем полученные слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}[\vec{E} \vec{H}] = \\ & = H_x \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + H_y \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + H_z \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - \\ & = -E_x \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - E_y \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - E_z \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Как следует из формулы (10.20), первые три выражения в круглых скобках, следующие за координатами вектора  $\vec{B}$ , есть координаты вектора  $\operatorname{rot} \vec{E}$ , выражения в круглых скобках, следующие за координатами вектора  $\vec{E}$ , есть координаты вектора  $\operatorname{rot} \vec{H}$ . Таким образом, тождество (10.22) доказано.

Вычислим производную от плотности энергии  $w$  по времени  $t$ . Согласно формуле (10.11) с учетом формул (10.10) будем иметь

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Преобразуем это выражение при помощи уравнений (10.1) и (10.3), записав их в виде

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{j} + \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}.$$

Получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j} \vec{E} + \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

С учетом тождества (10.22) приходим к уравнению

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j} \vec{E} - \operatorname{div} \vec{S}}, \quad (10.23)$$

где

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]$$

– вектор Умова – Пойнтинга.

Дифференциальному уравнению (10.23) соответствует интегральное уравнение (10.14)

$$\frac{dW}{dt} = -P - \oint_S \vec{S} \vec{n} dS.$$



Чтобы доказать это, проинтегрируем обе части уравнения (10.23) по некоторому объему  $V$ . Получим

$$\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = - \int_V \vec{j} \vec{E} dV - \int_V \operatorname{div} \vec{S} dV.$$

Левую часть этого равенства можно записать так:

$$\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \frac{dW}{dt},$$

где

$$W(t) = \int_V w dV$$

– энергия электромагнитного поля, заполняющая объем  $V$  в момент времени  $t$ . Первый интеграл в правой части

$$P = \int_V \vec{j} \vec{E} dV$$

есть мощность джоулева энерговыделения, т.е. тепло, которое выделяется в объеме  $V$  за единицу времени вследствие прохождения электрического тока по веществу в этом объеме. Интеграл от дивергенции по объему  $V$ , используя теорему Остроградского – Гаусса, можно преобразовать в интеграл по поверхности  $S$ , ограничивающей этот объем:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{S} dV = \oint_S \vec{S} \vec{n} dS.$$

Таким образом, приходим к уравнению (10.14).

## 10.5. Ковариантность уравнений Максвелла

Можно показать, что уравнения Максвелла, описывающие электромагнитное поле в вакууме, ковариантны относительно преобразований Лоренца. Это означает, что вид уравнений Максвелла не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета  $K$  к другой  $K'$ . Преобразованиям Лоренца соответствуют определенные преобразования величин, характеризующих электромагнитное поле. Пусть некоторое электромагнитное поле в системе отсчета  $K$ , характеризуется векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  напряженностей электрического и магнитного полей. В системе

отсчета  $K'$  то же электромагнитное поле будет характеризоваться другими векторами  $\vec{E}'$  и  $\vec{B}'$ . При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой эти векторы преобразуются так, что

$$\vec{E}' = \vec{E}'(\vec{E}, \vec{B}), \quad \vec{B}' = \vec{B}'(\vec{E}, \vec{B}).$$

В результате оказывается, что электромагнитное поле, создаваемое одной и той же системой зарядов, описывается различными функциями

$$\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{r}) \quad \text{и} \quad \vec{H} = \vec{H}(t, \vec{r}) \quad (10.24)$$

в разных инерциальных системах отсчета.

Рассмотрим два тела  $K$  и  $K'$ . Пусть второе тело движется относительно первого прямолинейно и поступательно с постоянной скоростью  $V$ . Построим две прямоугольные декартовы системы координат  $K$  и  $K'$ , связанные с этими телами (рис. 10.1). Событие  $A$ , произошедшее в некоторой точке пространства  $P$ , характеризуется наблюдателем в системе отсчета  $K$  координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  этой точки и моментом времени  $t$ . Это же событие  $A$  характеризуется наблюдателем в системе отсчета  $K'$  координатами  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  точки  $P$  и моментом времени  $t'$ . Связь между величинами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  и  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $t'$  осуществляется посредством преобразований Лоренца

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(-\frac{Vx}{c^2} + t\right), \quad (10.25)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Эти формулы описывают переход от одной инерциальной системы отсчета к другой.

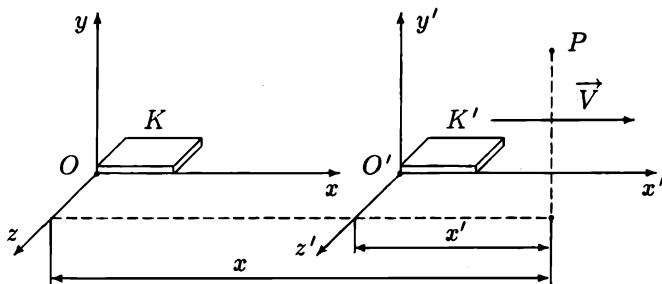


Рис. 10.1. Две инерциальные системы отсчета

Преобразованиям Лоренца (10.25) отвечают следующие соотношения, связывающие координаты векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}'$ , которые описывают электромагнитное поле в системах отсчета  $K$  и  $K'$  соответственно:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma (E_y - V B_z), \quad E'_z = \gamma (E_z + V B_y), \quad (10.26)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma \left( B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right), \quad B'_z = \gamma \left( B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right).$$

Трудолюбивый студент может проверить, что преобразования Лоренца (10.25) и соответствующие им преобразования (10.26) оставляют уравнения Максвелла неизменными, т.е. ковариантными.

Итак, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой изменяются функции (10.24), описывающие электромагнитное поле, создаваемое одной и той же системой зарядов. Рассмотрим следующий пример. Пусть заряд  $Q$  покоится в некоторой инерциальной системе отсчета  $K$ . Относительно инерциальной системы отсчета  $K'$ , которая движется с постоянной скоростью относительно системы отсчета  $K$ , заряд  $Q$  будет двигаться с той же скоростью. Наблюдатель в системе отсчета  $K$  обнаружит, что неподвижный заряд  $Q$  создает постоянное электрическое поле, которое описывается законом Кулона. С точки зрения наблюдателя в системе отсчета  $K'$  движение заряда  $Q$  представляет собой электрический ток, который создает в пространстве магнитное поле. Таким образом, движущийся заряд создает вокруг себя не только электрическое, но и магнитное поле.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

## 11.1. Волновое уравнение и его решение

Пусть некоторая физическая величина  $\psi$ , зависящая от времени  $t$  и координаты  $x$ , удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (11.1)$$

где  $v$  – постоянная величина. Это уравнение называют *волновым*.

Пусть  $f = f(\xi)$  – произвольная функция аргумента  $\xi$ . Покажем, что функция

$$\psi(t, x) = f(x - vt) \quad (11.2)$$

является решением уравнения (11.1). Функция (11.2) является сложной и может быть представлена в виде

$$\psi = f(\xi), \quad \xi = x - vt.$$

Найдем производные этой функции по  $t$  и  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{df}{d\xi}, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -v \frac{d^2 f}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{d^2 f}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что подстановка вторых производных в уравнение (11.1) обращает его в тождество. Что и требовалось доказать. Аналогично можно показать, что функция

$$\psi(t, x) = h(x + vt), \quad (11.3)$$

где  $h$  – произвольная функция одного переменного, также является решением уравнения (11.1).

Как известно из школьного курса математики, график зависимости функции (11.2) от  $x$  при  $t = \text{const}$  при увеличении  $t$  смещается вправо, не изменяя своего вида (рис. 11.1). За время от  $t = 0$  до произвольного

момента времени  $t$  график функции смещается на расстояние  $x = vt$ . При этом скорость смещения равна  $v$ . Говорят, что функция (11.2) описывает волну, бегущую вдоль оси  $x$ . Функция (11.3) также описывает бегущую волну. Только эта волна "бежит" в другую сторону, так как график функции (11.3) при увеличении  $t$  смещается влево. Величину  $v$  называют *скоростью распространения волны*.

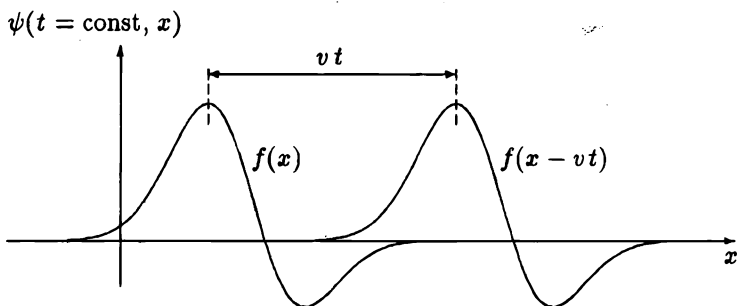


Рис. 11.1. Бегущая волна

Общее решение уравнения (11.1) имеет вид

$$\psi(t, x) = f(x - vt) + h(x + vt),$$

т.е. в общем случае вдоль оси  $x$  могут распространяться сразу две волны, одна из которых "бежит" вправо, а другая - влево.

## 11.2. Гармоническая волна

Волна называется *гармонической*, если она описывается функцией

$$\psi(t, x) = A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (11.4)$$

где  $A$  - амплитуда волны;  $\omega$  - частота;  $k$  - волновое число;  $\alpha$  - начальная фаза;

$$\varphi(t, x) = \omega t - kx + \alpha \quad (11.5)$$

- фаза волны. Функцию (11.4) можно привести к виду (11.2):

$$\psi(t, x) = A \cos\left(-k\left(x - \frac{\omega t}{k}\right) + \alpha\right).$$

Отсюда видно, что скорость гармонической волны связана с частотой и волновым числом соотношением

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (11.6)$$

Для того чтобы получить зависимость величины  $\psi$  от времени  $t$ , которая описывает ее изменения со временем в данной точке пространства, следует положить в формуле (11.4)  $x = \text{const}$ . Так как функция (11.4) при  $x = \text{const}$  описывает гармонические колебания, говорят, что гармоническая волна создает в произвольной точке пространства гармонические колебания.

Величина

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (11.7)$$

называется *периодом волны*, а величина

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (11.8)$$

– *длиной волны*. Если фаза (11.5) волны получит приращение  $2\pi$ , то значение функции (11.4) останется прежним. Поэтому при  $x = \text{const}$  функция (11.4) принимает одно и то же значение для всех моментов времени, которые отличаются одно от другого на  $nT$ , где  $n$  – целое число; а при  $t = \text{const}$  значения функции (11.4) в различных точках пространства совпадают, если координаты этих точек отличаются друг от друга на  $n\lambda$ .

График зависимости величины  $\psi$  от координаты  $x$  при  $t = \text{const}$  для случая, когда вдоль оси  $x$  распространяется гармоническая волна, показан на рис. 11.2.

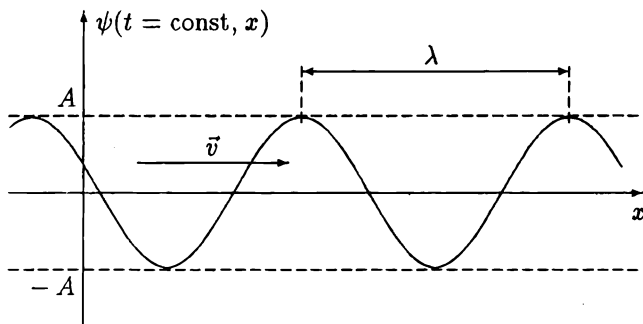


Рис. 11.2. Гармоническая волна

### 11.3. Волны в пространстве

Пусть физическая величина  $\psi$  распределена в пространстве, и это распределение меняется со временем. Говорят, что функция  $\psi = \psi(t, \vec{r})$  описывает волну, распространяющуюся в пространстве, если она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \psi, \quad (11.9)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– оператор Лапласа.

Волна называется *плоской*, если существует такая система декартовых координат, в которой функция  $\psi$  зависит только от одной из координат. Если этой координатой является  $x$ , то уравнение (11.9) сводится к (11.1). В произвольной прямоугольной системе декартовых координат *плоская гармоническая волна* описывается функцией

$$\psi(t, \vec{r}) = A \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha), \quad (11.10)$$

где вектор  $\vec{k}$  называется *волновым*. В том, что эта функция является решением уравнения (11.9), нетрудно убедиться непосредственной подстановкой.

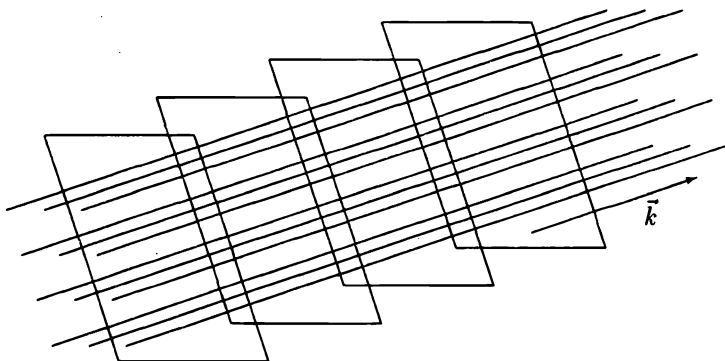


Рис. 11.9. Фазовые поверхности и лучи, вдоль которых распространяется в пространстве плоская волна

$$\varphi(t, \vec{r}) = \omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha \quad (11.11)$$

называется *фазой* плоской волны. Поверхность

$$\varphi(t = \text{const}, \vec{r}) = \text{const}, \quad \text{или} \quad \vec{k} \vec{r} = \text{const}$$

постоянной фазы (11.11) является плоскостью, к которой вектор  $\vec{k}$  перпендикулярен. Такие поверхности называют *фазовыми*, или *волновыми*, а линии, перпендикулярные к фазовым поверхностям, называют *лучами*. Для плоской волны лучами являются прямые, параллельные волновому вектору. Этот вектор указывает направление распространения волны, а его модуль (волновое число), частота и скорость волны связаны соотношением (11.6). На рис. 11.3 изображены фазовые поверхности и лучи плоской волны.

#### 11.4. Плоские электромагнитные волны \*

Рассмотрим электромагнитное поле в пространстве, заполненном однородным диэлектриком, в котором отсутствуют свободные заряды и электрические токи, т.е. объемная плотность связанных зарядов и плотность тока равны нулю:

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = 0.$$

В таком случае уравнения Максвелла (10.1) – (10.4) принимают вид

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{D} = 0, \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad (11.12)$$

где

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (11.13)$$

Для однородной среды абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости вещества постоянны:  $\varepsilon = \text{const}$  и  $\mu = \text{const}$ . При помощи соотношений (11.13) векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  удобно исключить из системы уравнений (11.12):

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{rot } \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{H} = 0. \quad (11.14)$$

Пусть векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  зависят только от  $t$  и  $y$ :

$$\vec{E} = \vec{E}(t, y), \quad \vec{H} = \vec{H}(t, y). \quad (11.15)$$



Покажем, что эти функции могут быть решениями уравнений (11.14), а также, что среди решений уравнений (11.14) такого вида есть функции, описывающие плоские электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль оси  $y$ .

Вычислим ротор и дивергенцию вектора  $\vec{E}(t, y)$ :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{k},$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial y}.$$

С учетом этих формул подстановка векторов (11.15) в равенства (11.14) приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (11.16)$$

$$0 = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (11.17)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (11.18)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad (11.19)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (11.20)$$

$$0 = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (11.21)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (11.22)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} = 0. \quad (11.23)$$

Из уравнений (11.19) и (11.21) следует, что  $E_y = \text{const}$ . Очевидно, что постоянное электрическое поле в электромагнитной волне отсутствует. Поэтому положим

$$E_y = 0. \quad (11.24)$$

Аналогично, уравнения (11.17) и (11.23) приводят к равенству

$$H_y = 0. \quad (11.25)$$

Оставшиеся неиспользованными уравнения можно разделить на две независимые системы. Первая состоит из уравнений (11.16) и (11.22) для функций  $E_z$  и  $H_x$ , а вторая – из уравнений (11.18) и (11.20) для функций  $E_x$  и  $H_z$ . Выпишем уравнения первой системы:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t},$$

Исключим  $H_x$  из этой системы. Для этого продифференцируем уравнение (11.16) по  $y$ , а уравнение (11.22) – по  $t$ . После несложных преобразований придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}, \quad (11.26)$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (11.27)$$

Уравнение (11.26) есть волновое уравнение. Одно из его решений, описывающих гармоническую волну, имеет вид

$$E_z(t, y) = E_m \cos(\omega t - k y + \alpha), \quad (11.28)$$

где  $E_m$  – амплитуда волны. Эта волна распространяется вдоль оси  $y$  в сторону возрастания  $y$ .

Функция

$$E_z(t, y) = E_m \cos(\omega t + k y + \alpha)$$

также является решением волнового уравнения (11.26). Эта функция есть плоская гармоническая волна, распространяющаяся вдоль оси  $y$  в сторону убывания  $y$ .

Найдем функцию  $H_x(t, y)$ , соответствующую функции (11.28). Для этого подставим выражение (11.28) в уравнения (11.16) и (11.22). Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\frac{k E_m}{\mu} \sin(\omega t - k y + \alpha), \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \omega \varepsilon E_m \sin(\omega t - k y + \alpha). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом соотношений (11.6) и (11.27) найдем, что

$$H_x(t, y) = H_m \cos(\omega t - k y + \alpha), \quad (11.29)$$

где

$$H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m. \quad (11.30)$$

В частном случае система уравнений (11.18) и (11.20) имеют нулевое решение:

$$E_x = 0, \quad H_z = 0. \quad (11.31)$$

Нетрудно проверить, что функции

$$E_x(t, y) = E_m \cos(\omega t - k y + \alpha), \quad H_z(t, y) = H_m \cos(\omega t - k y + \alpha)$$

при условии (11.30) также являются решениями системы уравнений (11.18) и (11.20).

Итак, найдены решения уравнений Максвелла в виде плоских гармонических волн, распространяющихся вдоль оси  $y$ . Решениями уравнений Максвелла могут быть не только плоские гармонические волны. Вдоль оси  $y$  могут распространяться электромагнитные волны более сложной формы. Например, это может быть произвольная суперпозиция плоских гармонических волн. Для всех этих волн справедливы равенства (11.24) и (11.25). Вообще все электромагнитные волны обладают таким свойством. Проекции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на направление, вдоль которого распространяется электромагнитная волна всегда равны нулю. Это свойство называют *поперечностью* электромагнитных волн.

## 11.5. Плоская гармоническая электромагнитная волна

Рассмотрим плоскую гармоническую электромагнитную волну, которая описывается функциями (11.24), (11.25), (11.28), (11.29) и (11.31). Согласно этим формулам векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  имеют следующие проекции на координатные оси:

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z(t, y) = E_m \cos(\omega t - k y + \alpha), \quad (11.32)$$

$$H_x(t, y) = H_m \cos(\omega t - k y + \alpha), \quad H_y = 0, \quad H_z = 0. \quad (11.33)$$

Эти функции описывают распространяющуюся вдоль оси  $y$  плоскую гармоническую электромагнитную волну, в которой вектор  $\vec{E}$  всегда направлен вдоль оси  $z$ , а вектор  $\vec{H}$  — вдоль оси  $x$  (рис. 11.4). Такая волна называется плоско, или линейно поляризованной. На рис. 11.4 показан один из лучей. Фазовые плоскости в данном случае параллельны плоскости  $xy$ . На фазовой плоскости векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  всюду одинаковы. Они изменяются только вдоль луча. Как видно в этом примере, векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и волновой вектор  $\vec{k}$  в любой точке пространства взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку. Это общее свойство

электромагнитных волн. Как уже говорилось, электромагнитные волны являются поперечными, т.е. векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  ортогональны к лучу, вдоль которого распространяется волна. Соотношение (11.30), связывающее модули этих векторов, также выполняется для электромагнитных волн любой формы.

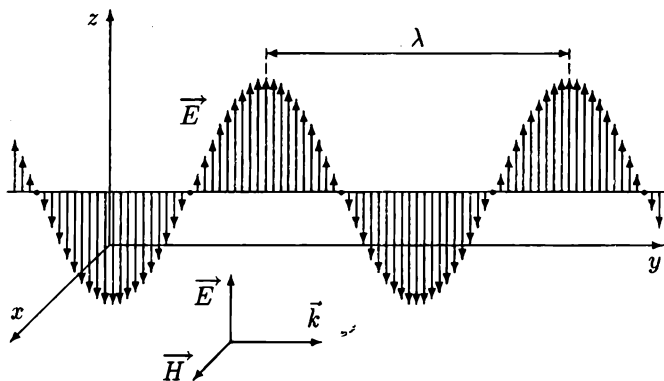


Рис. 11.4. Плоская гармоническая электромагнитная волна

Запишем функции, определяющие зависимость от времени и координат компонент вектора  $\vec{E}$  напряженности электрического поля для плоской гармонической электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$  в сторону убывания координаты  $x$ . Эти функции имеют вид

$$E_x = 0,$$

$$E_y(t, x) = E_{m_1} \cos(\omega t + kx + \alpha_1),$$

$$E_z(t, x) = E_{m_2} \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Первое равенство означает, что электромагнитная волна является поперечной. Как видно, в данном случае проекции вектора  $\vec{E}$  на оси  $y$  и  $z$  не всегда равны нулю. В этом случае направление вектора напряженности электрического поля может изменяться вдоль луча и с течением времени. Нетрудно показать, что в любой точке пространства конец вектора  $\vec{E}$  будет с течением времени описывать эллипс. Поэтому такая волна называется эллиптически поляризованной.

## 11.6. Интенсивность волны

Рассмотрим распространяющуюся вдоль оси  $y$  плоскую гармоническую электромагнитную волну, которая описывается функциями (11.32) и (11.33). По формулам (10.11) и (10.12) найдем плотность энергии электромагнитного поля и вектор Умова – Пойнтинга:

$$w = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{2} (\varepsilon E_m^2 + \mu H_m^2) \cos^2(\omega t - k y + \alpha),$$

$$\vec{S} = E_m H_m \vec{j} \cos^2(\omega t - k y + \alpha).$$

Используя соотношение (11.30), получаем:

$$w = \varepsilon E_m^2 \cos^2(\omega t - k y + \alpha), \quad (11.34)$$

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m^2 \vec{j} \cos^2(\omega t - k y + \alpha), \quad (11.35)$$

где  $\vec{j}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $y$ .

Отметим, что в силу соотношения (11.30) плотности энергии электрического и магнитного полей равны друг другу. Направление вектора  $\vec{S}$  плотности потока энергии, как видно из формулы (11.35), совпадает с направлением волнового вектора  $\vec{k}$ , т.е. направление, в котором распространяется энергия электромагнитного поля, совпадает с направлением распространения волны. Плотность энергии  $w$  и вектор  $\vec{S}$  зависят от времени и координат. Амплитуды колебаний этих величин

$$w_m = \varepsilon E_m^2 \quad \text{и} \quad S_m = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m^2$$

связаны друг с другом простым соотношением

$$S_m = v w_m. \quad (11.36)$$

Формулу (11.27), которая определяет скорость  $v$  распространения электромагнитной волны, можно записать так:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}},$$

или

$$v = \frac{c}{n}. \quad (11.37)$$

Здесь  $\epsilon_r$  и  $\mu_r$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, в которой движется электромагнитная волна,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

– скорость электромагнитных волн в пустоте, а величина

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

называется *показателем преломления среды*. Относительная магнитная проницаемость всех прозрачных для электромагнитных волн веществ практически равна единице:  $\mu_r \simeq 1$ . Поэтому

$$n = \sqrt{\epsilon_r}. \quad (11.38)$$

Из формулы (11.37) следует, что скорость электромагнитных волн в среде в  $n$  раз меньше их скорости в пустоте.

Среднее по времени значение абсолютной величины вектора плотности потока энергии называется *интенсивностью волны*:

$$I = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} S(t) dt, \quad (11.39)$$

где  $T$  – период волны. Согласно этому определению, размерность и физический смысл интенсивности те же, что и величины  $S$ . Подставим в формулу (11.39) выражение (11.35) для модуля вектора Умова – Пойнтинга. После интегрирования получим

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_m^2.$$

С учетом соотношения (11.37) будем иметь

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n E_m^2.$$

Из этой формулы видно, что интенсивность электромагнитной волны пропорциональна квадрату амплитуды  $E_m$  вектора напряженности электрического поля и показателю преломления среды:

$$\boxed{I \sim n E_m^2}. \quad (11.40)$$

## 11.7. Отражение электромагнитной волны от границы раздела двух сред

Пусть плоская электромагнитная волна падает перпендикулярно на плоскость, разделяющую две среды с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  (рис. 11.5). На границе раздела сред волна делится на две волны. Одна волна проходит через границу раздела из первой среды во вторую, а другая отражается и движется в первой среде навстречу падающей волне. Напряженности электрического поля и волновые векторы в падающей, отраженной и прошедшей во вторую среду волн обозначим соответственно  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{E}'_1$ ,  $\vec{k}'_1$  и  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{k}_2$ .

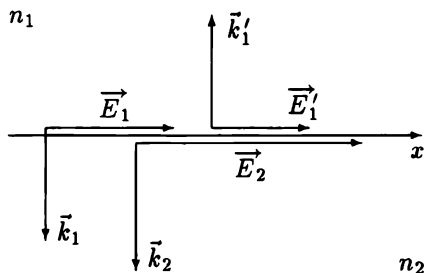


Рис. 11.5. Падение волны на границу раздела двух сред

Из уравнений Максвелла следует, что тангенциальные составляющие вектора  $\vec{E}$  напряженности электрического поля не изменяются при переходе через границу раздела двух сред:

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2} . \quad (11.41)$$

Направим ось  $x$  вдоль вектора  $\vec{E}_1$ . В таком случае это граничное условие принимает вид

$$E_{x_1} + E'_{x_1} = E_{x_2} , \quad (11.42)$$

где  $E_{x_1}$ ,  $E'_{x_1}$  и  $E_{x_2}$  – проекции на ось  $x$  векторов  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}'_1$ , и  $\vec{E}_2$  соответственно. Сумма в левой части равенства (11.42) – напряженность электрического поля в первой среде. По принципу суперпозиции она равна сумме напряженностей полей падающей и отраженной волн.

В силу формулы (11.35) энергия, падающая за единицу времени на единицу площади, пропорциональна показателю преломления и квадра-

ту напряженности электрического поля волны:

$$S \sim n E^2.$$

Учитывая это соотношение, запишем равенство

$$n_1 E_{x_1}^2 = n_1 E_{x_1}'^2 + n_2 E_{x_2}^2, \quad (11.43)$$

которое означает, что плотность потока энергии падающей волны равна сумме плотностей потоков энергии отраженной и прошедшей во вторую среду волн. Из уравнения (11.42) найдем, что

$$E_{x_1}' = E_{x_2} - E_{x_1}. \quad (11.44)$$

Исключив величину  $E_{x_1}'$  из (11.43) при помощи этой формулы, придем к равенству

$$n_1 E_{x_1}^2 = n_1 (E_{x_2} - E_{x_1})^2 + n_2 E_{x_2}^2.$$

Отсюда следует, что напряженность  $E_{x_2}$  электрического поля в волне, прошедшей во вторую среду, связана напряженностью  $E_{x_1}$  поля в падающей волне соотношением

$$E_{x_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_{x_1}. \quad (11.45)$$

Подставив (11.45) в (11.44), получим

$$E_{x_1}' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_{x_1}. \quad (11.46)$$

Формулы (11.45) и (11.46) определяют связь между напряженностями электрического поля падающей, отраженной и прошедшей волн.

Если первая среда является оптически менее плотной, т.е.  $n_1 < n_2$ , то из формулы (11.46) следует, что проекции  $E_{x_1}'$  и  $E_{x_1}$  имеют разные знаки. Это означает, что при отражении волны вектор напряженности электрического поля меняет направление на противоположное, т.е. векторы  $\vec{E}_1'$  и  $\vec{E}_1$  на границе раздела направлены в разные стороны. Так как  $\cos(\varphi + \pi) = -\cos \varphi$ , изменение направления вектора  $\vec{E}$  можно интерпретировать как результат изменения фазы на  $\pi$ , что эквивалентно уменьшению (или увеличению) длины светового луча на величину  $\lambda/2$ . Поэтому это явление носит название "потеря" полволны. При  $n_1 > n_2$  векторы  $\vec{E}_1'$  и  $\vec{E}_1$  совпадают по направлению.



# ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

## ГЛАВА 12

### ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

#### 12.1. Сложение волн

Теоретически и экспериментально установлено, что электромагнитные волны распространяются в пространстве со скоростью света. На основании этого и многих других фактов пришли к заключению, что видимый свет есть электромагнитные волны. В этом и следующих разделах будут рассмотрены такие оптические явления, как интерференция, дифракция и поляризация, в которых свет проявляет свои волновые свойства.

Если две или несколько волн накладываются друг на друга в какой-то области пространства, то при определенных условиях возникает явление интерференции. В одних точках пространства наблюдается усиление колебаний, в других точках – их ослабление. В случае интерференции световых волн на экране, помещенном в области их наложения, возникает так называемая интерференционная картина, т.е. на экране наблюдается чередование темных и светлых пятен или полос.

Электромагнитную волну можно рассматривать как совокупность согласованных колебаний векторов напряженности электрического и магнитного полей в различных точках пространства. Пусть в некоторой области пространства распространяются две гармонические электромагнитные волны одной и той же частоты  $\omega$ . Эти волны можно описать посредством зависимостей напряженностей электрических полей этих волн от времени и координат:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1(t, \vec{r}), \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_2(t, \vec{r}). \quad (12.1)$$

Согласно принципу суперпозиции напряженность электрического поля в произвольной точке  $P$  пространства равна сумме напряженностей полей,

создаваемых различными источниками электромагнитного излучения:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (12.2)$$

Предположим, что векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  в точке  $P$  направлены вдоль одной прямой. Тогда их проекции на эту прямую можно записать так:

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad E_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (12.3)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды гармонических колебаний, создаваемых рассматриваемыми гармоническими волнами в точке  $P$ ;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – начальные фазы этих колебаний.

Как известно из теории гармонических колебаний, сумма

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) \quad (12.4)$$

двух гармонических колебаний также будет гармоническим колебанием

$$E = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (12.5)$$

той же частоты  $\omega$ , амплитуда  $A$  которого связана с амплитудами  $A_1$  и  $A_2$  суммируемых колебаний соотношением

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (12.6)$$

Так как интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды, соотношение (12.6) можно переписать в виде

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (12.7)$$

где  $I$  – интенсивность света в точке  $P$ ,  $I_1$  и  $I_2$  интенсивности каждой из волн в отдельности.

Как следует из формулы (12.7), результирующая интенсивность  $I$  в общем случае не равна сумме  $I_1 + I_2$  интенсивностей складываемых волн. Она может быть как больше, так и меньше ее в зависимости от последнего слагаемого в выражении (12.7), называемого *интерференционным членом*. Интерференционный член зависит от разности фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$ . В тех точках пространства, для которых

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2 \pi m, \quad (12.8)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; колебания будут усиливать друг друга. В этих точках

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$$

и, как следует из формул (12.6) и (12.7), амплитуда  $A$  и интенсивность  $I$  принимают наибольшие значения:

$$A_{max} = A_1 + A_2, \quad I_{max} = \left( \sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} \right)^2. \quad (12.9)$$

В точках, для которых

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2m + 1)\pi, \quad (12.10)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1.$$

При этом формулы (12.6) и (12.7) дают наименьшие значения амплитуды и интенсивности:

$$A_{min} = |A_1 - A_2|, \quad I_{min} = \left( \sqrt{I_1} - \sqrt{I_2} \right)^2. \quad (12.11)$$

## 12.2. Когерентность

Амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\alpha$  гармонической волны

$$E = A \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (12.12)$$

не зависят от времени. Так как амплитуда суммы двух гармонических колебаний, создаваемых гармоническими волнами в некоторой точке пространства, определяется разностью  $\alpha_2 - \alpha_1$  начальных фаз этих колебаний, она также не будет зависеть от времени.

В действительности идеальных гармонических волн не существует. Каждая реальная световая волна представляет собой совокупность волн, испущенных различными атомами. Поэтому амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\alpha$  являются беспорядочно изменяющимися функциями от времени и координат точки пространства. Характерное время изменения фазы  $\tau \sim 10^{-8}$  с.

Глаза человека и различные оптические приборы регистрируют всегда усредненную по некоторому интервалу времени  $T$  интенсивность падающего на них света. Величина  $T$ , называемая временем экспозиции, для разных оптических приборов может принимать различные значения, но для всех приборов это время существенно больше времени  $\tau$ . Два независимых источника света испускают волны, в которых хаотичные изменения фаз  $\alpha_1(t, \vec{r})$  и  $\alpha_2(t, \vec{r})$  происходят независимо друг от друга. Вследствие этого разность фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$  в формуле (12.7) также будет случайной функцией от времени. Поэтому при усреднении интерференционный член в формуле (12.7) обращается в ноль. В результате

интенсивность света в каждой точке пространства будет равна сумме интенсивностей отдельных волн, т.е. интерференция наблюдаться не будет. О таких волнах говорят, что они *некогерентны*.

Для наблюдения интерференции света от двух реальных источников необходимо, чтобы разность фаз  $\varphi_2(t) - \varphi_1(t)$  в формулах (12.6) и (12.7) оставалась постоянной. Такие две волны называют *когерентными*. Для когерентных волн фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  меняются не независимо друг от друга, а согласованно. С целью получения когерентных световых волн применяют различные способы разделения волны от одного источника на две части. Пройдя разные пути, эти две волны накладываются одна на другую в некоторой области пространства, которая называется *полем интерференции*.

На рис. 12.1 от источника  $S$  в точку  $P$  приходят две волны, одна из которых распространяется по "ломаному" лучу  $SABCP$ , а другая – по лучу  $SADCP$ . Пусть

$$E_A = A_0 \cos(\omega t + \alpha_0) \quad (12.13)$$

есть колебание, создаваемое электромагнитной волной в точке  $A$ . Найдем колебания  $E_1$  и  $E_2$ , которые вызваны в точке  $P$  волнами, пришедшими из точки  $A$  по различным путям.

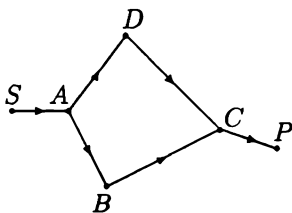


Рис. 12.1. Схема образования когерентных волн

Скорость электромагнитной волны в среде меньше ее скорости в пустоте:

$$v = \frac{c}{n}, \quad (12.14)$$

здесь  $n$  – показатель преломления среды. Волновое число  $k$  связано с частотой  $\omega$  и скоростью  $v$  соотношением

$$k = \frac{\omega}{v},$$

которое при помощи формулы (12.14) можно преобразовать к виду

$$k = n k_0, \quad (12.15)$$

где

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$k_0$  и  $\lambda$  – волновое число и длина волны, распространяющейся в пустоте. Из формул (12.14) и (12.15) следует, что, когда электромагнитная волна пересекает границу раздела двух прозрачных сред с различными показателями преломления, изменяется не только ее скорость, но и волновое число  $k$ .

Пусть свет проходит расстояние  $AB$ ,  $BC$  и  $CP$  на рис. 12.1 в различных средах, показатели преломления которых равны соответственно  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$ . В таком случае колебание, вызванное в точке  $P$  волной, пришедшей из точки  $A$  вдоль луча  $ABCP$ , будет иметь вид

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t - k_0(n_1 AB + n_2 BC + n_3 CP) + \alpha_0). \quad (12.16)$$

Аналогично можно записать формулу для колебания, вызванного в точке  $P$  волной, пришедшей из точки  $A$  вдоль луча  $ADCP$ :

$$E_2 = A_2 \cos(\omega t - k_0(n_4 AD + n_5 DC + n_3 CP) + \alpha_0), \quad (12.17)$$

где  $n_4$  и  $n_5$  – показатели преломления сред, в которых лежат лучи  $AD$  и  $DC$ . Разность фаз колебаний  $E_1$  и  $E_2$  будет

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{\lambda} \Delta, \quad (12.18)$$

где величина

$$\Delta = n_1 AB + n_2 BC - n_4 AD - n_5 DC \quad (12.19)$$

называется *оптической разностью хода* лучей. Как видно, эта величина имеет размерность длины и отличается от геометрической разности хода  $AB + BC - AD - DC$  тем, что длина каждого отрезка луча умножается на показатель  $n$  преломления среды, в которой распространяется свет.

Используя формулу (12.18), условия максимума (12.8) и минимума (12.10) можно записать следующим образом:

$$\Delta = \begin{cases} m\lambda & \text{для максимума,} \\ (2m + 1)\frac{\lambda}{2} & \text{для минимума.} \end{cases} \quad (12.20)$$

Согласно этим условиям при интерференции двух волн в некоторой точке  $P$  по схеме на рис. 12.1 в этой точке будет наблюдаться максимум интенсивности света, когда оптическая разность хода двух лучей равна

целому числу длин волн. Если же оптическая разность хода лучей равна нечетному числу полуволен, то в точке  $P$  будет наблюдаться минимум интенсивности света.

Устройства, в которых осуществляется разделение волны для получения интерференции, называются интерференционными схемами. К ним относятся схема Юнга, бипризма Френеля, зеркало Ллойда и др. При использовании в интерференционных схемах обычного (не лазерного) источника света интерференция наблюдается только при сравнительно малой оптической разности хода двух частей волны. Если разность времен, затрачиваемая двумя половинами волны на распространение от источника до места встречи, превышает характерное время  $\tau$  изменения фазы источника, две половины волны становятся некогерентными между собой, и интерференция не наблюдается.

Подводя итоги, отметим, что для наблюдения интерференционной картины необходимо выполнение следующих условий: складывающиеся волны должны иметь одинаковую частоту и одинаковое направление колебаний, амплитуды их не должны сильно отличаться одна от другой, волны должны быть когерентными.

### 12.3. Интерференция света от двух точечных источников

Рассмотрим интерференцию гармонических волн, испускаемых двумя точечными источниками. Уравнение гармонической световой волны, распространяющейся от точечного источника в однородной изотропной среде, имеет вид

$$E(t, r) = A(r) \cos(\omega t - k r + \alpha), \quad (12.21)$$

где  $E(t, r)$  – одна из составляющих вектора напряженности электрического поля;  $r$  – расстояние от источника до рассматриваемой точки  $P$  пространства;  $A(r)$  – амплитуда волны в данной точке.

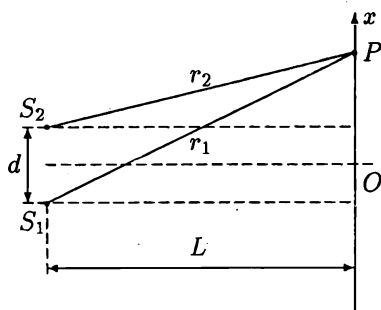


Рис. 12.2.  
Интерференция света  
от двух точечных источников

Пусть две гармонические волны с одинаковыми частотами и коллинеарными векторами  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  от источников  $S_1$  и  $S_2$  приходят в некоторую точку пространства  $P$  (рис. 12.2). Эти волны создают в точке  $P$  гармонические колебания

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t - k r_1 + \alpha_1), \quad E_2 = A_2 \cos(\omega t - k r_2 + \alpha_2), \quad (12.22)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – расстояние от источников света до точки  $P$ . Разность фаз этих колебаний будет

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) + \alpha_2 - \alpha_1. \quad (12.23)$$

Пусть на расстоянии  $L$  от источников света расположен экран, на котором наблюдается интерференционная картина (рис. 12.2). Найдем распределение интенсивности света на оси  $x$ , параллельной отрезку, который соединяет источники  $S_1$  и  $S_2$ . Обозначим длину этого отрезка  $d$ . Начало отсчета координаты  $x$  поместим в точку  $O$ , равноудаленную от обоих источников. Из прямоугольных треугольников на рис. 12.2 найдем, что

$$r_1^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad r_2^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2.$$

При этом

$$r_1^2 - r_2^2 \equiv (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 2 x d. \quad (12.24)$$

Обычно в интерференционных опытах  $d \ll L$  и  $x \ll L$ . В таких случаях  $r_1 \simeq r_2 \simeq L$  и равенство (12.24) приводит к формуле

$$r_1 - r_2 \simeq \frac{x d}{L}. \quad (12.25)$$

Используя формулы (12.23) и (12.25), выражению (12.7) можно придать вид

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \left( \frac{2\pi x d}{\lambda L} + \alpha_2 - \alpha_1 \right). \quad (12.26)$$

Это и есть искомая зависимость  $I = I(x)$  интенсивности света на экране от координаты  $x$ . Найденная зависимость представляет собой периодическую функцию, расстояние между максимумами (или минимумами) которой равно

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d}. \quad (12.27)$$

Величина  $\Delta x$  называется *шириной интерференционной полосы*.

Интересно отметить, что впервые длины волн для различных участков видимой области спектра были вычислены по формуле (12.27) после того, как в опытах по интерференции света были измерены расстояния  $\Delta x$  между полосами.

## 12.4. Интерференция света в тонких пленках

Рассмотрим интерференцию, возникающую при отражении света от двух поверхностей тонкого прозрачного слоя – интерференцию в тонких пленках. Пусть на пленку с показателем преломления  $n$ , находящуюся в вакууме, падает гармоническая световая волна. В результате отражения этой волны от верхней и нижней поверхностей пленки возникают две когерентные волны 1 и 2 (рис. 12.3).

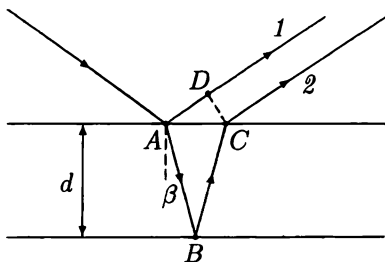


Рис. 12.3. Образование когерентных волн при отражении лучей от поверхности тонкой пленки

Согласно формулам (12.6) и (12.7) амплитуда и интенсивность световых колебаний в некоторой точке  $P$  поля интерференции зависят от разности  $\varphi_2 - \varphi_1$  фаз этих волн, которая в свою очередь, как это следует из формулы (12.18), определяется оптической разностью хода лучей  $\Delta$ .

При расчете разности хода отраженных волн 1 и 2 необходимо учитывать следующее обстоятельство. Волна 1 образуется при отражении от среды с большим показателем преломления (оптически более плотной среды), тогда как волна 2 возникает при отражении от оптически менее плотной среды. Как показано в разделе 11.7, при отражении от оптически более плотной среды фаза колебаний светового вектора  $\vec{E}$  изменяется на  $\pi$ . При отражении от оптически менее плотной среды фаза светового вектора не изменяется. Таким образом возникает дополнительная разность фаз отраженных волн, равная  $\pi$ . Это равносильно уменьшению (или увеличению) разности хода на величину  $\lambda/2$ . Поэтому



в рассматриваемом случае разность хода

$$\Delta = n(AB + BC) - AD + \frac{\lambda}{2}.$$

Используя законы отражения и преломления света, нетрудно получить формулу

$$\Delta = 2 n d \cos \beta + \frac{\lambda}{2}, \quad (12.28)$$

где  $d$  – толщина пленки,  $\beta$  – угол преломления. Подстановка этого выражения в равенства (12.20) приводит к условиям максимумов и минимумов при интерференции в тонкой пленке

$$2 n d \cos \beta = \begin{cases} (2 m - 1) \frac{\lambda}{2} & \text{для максимума,} \\ m \lambda & \text{для минимума,} \end{cases} \quad (12.29)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$

Пусть пленка представляет собой плоскопараллельный слой, а наблюдение ведется на экране, помещенном в фокальной плоскости линзы, или глазом, аккомодированным на бесконечность, что соответствует положению точки наблюдения на бесконечности. При этом в каждую точку экрана сходятся лучи с одинаковым углом падения на пленку, а значит  $\cos \beta$  для всех этих лучей одинаков. Согласно формуле (12.28) все пары таких лучей будут иметь одинаковую разность хода, независимо от того, в какой точке они отразились от пленки. Наблюдаемая таким образом картина носит название *полос равного наклона*.

В случае пленки переменной толщины контрастную интерференционную картину можно наблюдать с помощью линзы, проектирующей на экран поверхность пленки, или глазом, аккомодированным на пленку. Чтобы картина на экране была контрастной, необходимо, чтобы разность хода лучей, пришедших в одну точку экрана от разных точек протяженного источника, была почти одинаковой. Этого можно достичь, используя падение лучей на пленку, близкое к нормальному, и устанавливая перед линзой диафрагму. Тогда интервал изменения  $\cos \beta$  для лучей, интерферирующих в данном месте экрана, будет небольшим, и разность хода лучей будет почти одинаковой. На некотором небольшом участке пленки  $\cos \beta$  также будет мало меняться, и результат интерференции будет определяться только толщиной пленки в месте падения на нее луча. Каждая интерференционная полоса на экране будет соответствовать местам пленки с одинаковой толщиной. Такие полосы называются *полосами равной толщины*.

З а д а ч а. Используя законы отражения и преломления света, вывести формулу (12.28).

ДИ Ф Р А К Ц И Я

13.1. Принцип Гюйгенса – Френеля

Совокупность явлений, наблюдаемых при распространении волн вблизи непрозрачных тел и в средах с неоднородной плотностью, называется *дифракцией*. В частности, к этим явлениям относится огибание волнами препятствий и их проникновение в область геометрической тени.

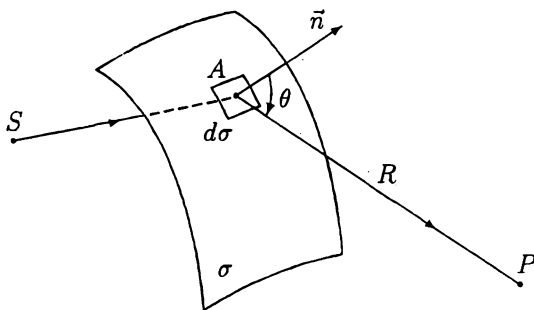


Рис. 13.1. К формулировке принципа Гюйгенса – Френеля

Теория дифракции основана на *принципе Гюйгенса – Френеля*. Согласно этому принципу, каждый элемент  $d\sigma$  поверхности  $\sigma$ , до которой дошла электромагнитная волна от некоторого источника  $S$ , можно рассматривать как источник вторичной электромагнитной волны (рис. 13.1). Колебания  $dE$  напряженности электрического поля, возбуждаемые вторичной волной от элемента  $d\sigma$  в произвольной точке  $P$  за поверхностью  $\sigma$ , определяются формулой

$$dE = K(\theta) \frac{E_A d\sigma}{R} \cos(\omega t - k R + \alpha_A), \quad (13.1)$$

где  $dE$  – одна из компонент вектора  $\vec{dE}$  напряженности электрического поля во вторичной волне;  $\omega$  и  $k$  – частота и волновое число;  $E_A$  и  $\alpha_A$  – амплитуда и начальная фаза колебаний в некоторой точке  $A$  элемента поверхности  $d\sigma$ , которые вызваны волной, пришедшей от источника  $S$ ;

$R = AP$  – расстояние от элемента  $d\sigma$  поверхности  $\sigma$  до точки  $P$ ;  $d\sigma$  – площадь элемента поверхности. Выражение (13.1) отличается от сферической волны только множителем  $K(\theta)$ , зависящим от угла  $\theta$  между отрезком  $AP$  и нормалью к поверхности  $\sigma$  в точке  $A$ .

Множитель  $K(\theta)$  принимает наибольшее значение при  $\theta = 0$ , т.е. среди вторичных волн, испускаемых элементом  $d\sigma$ , наибольшую амплитуду имеет волна, распространяющаяся в направлении нормали. При увеличении угла  $\theta$  множитель  $K(\theta)$  убывает и обращается в ноль для  $\theta = \pi/2$ .

Вторичные волны, испускаемые разными элементами  $d\sigma$  поверхности  $\sigma$ , когерентны. Колебание в точке  $P$  согласно принципу суперпозиции есть результат интерференции вторичных волн:

$$E = \int_{\sigma} dE. \quad (13.2)$$

В качестве поверхности  $\sigma$ , элементы которой рассматриваются как источники вторичных волн, удобно выбрать волновую поверхность, так как в этом случае начальная фаза  $a_A$  для всех вторичных волн будет иметь одно и то же значение.

Если в пространстве между источником  $S$  и точкой наблюдения  $P$  имеются непрозрачные экраны, то поверхность  $\sigma$  следует выбрать таким образом, чтобы она совпадала с поверхностью экранов, а в отверстиях экранов имела форму волнового фронта первичной волны. При этом на поверхности непрозрачных экранов амплитуда колебаний источников вторичных волн принимается равной нулю, а на поверхности волнового фронта такой, какой она была бы при отсутствии экранов.

Решить при помощи формул (13.1) и (13.2) задачу о дифракции в общем случае очень трудно. Однако когда волна и преграда, на которую она падает, обладают каким-либо типом симметрии, найти распределение интенсивности волн за преградой, хотя бы в некоторых точках пространства, можно сравнительно легко.

В зависимости от условий наблюдения различают дифракцию Френеля и дифракцию Фраунгофера. Если источник света и точка наблюдения расположены от непрозрачной преграды настолько далеко, что волну, падающую на преграду, можно считать плоской, а лучи, идущие в точку  $P$ , образуют практически параллельный пучок, то такой вид дифракции называют дифракцией Фраунгофера, или дифракцией в параллельных лучах. Дифракцию Фраунгофера можно наблюдать также в фокальной плоскости линзы. Если на экран с отверстием размера  $r$  падает плоская

волна с длиной волны  $\lambda$ , то характер дифракции определяется величиной

$$\xi = \frac{r^2}{\lambda l},$$

где  $l$  – расстояние от отверстия до точки наблюдения. При  $\xi \ll 1$  имеет место дифракция Фраунгофера. При  $\xi \gg 1$ , т.е. для волн с достаточно короткой длиной волны, дифракция практически не наблюдается. Распространение таких волн происходит по законам геометрической оптики. Дифракция волн, характеризуемая значениями параметра  $\xi \simeq 1$ , называется дифракцией Френеля.

### 13.2. Графический метод сложения гармонических колебаний

Величине  $x$ , которая изменяется со временем по закону

$$x = A \cos \varphi(t), \quad (13.3)$$

т.е. совершает колебания с амплитудой  $A$ , можно дать геометрическую интерпретацию.  $A$  именно, эту величину можно рассматривать как проекцию на ось  $x$  вектора  $\vec{A}$ , модуль которого равен амплитуде  $A$ , а угол между ним и осью  $x$  – фазе  $\varphi$  (рис. 13.2).

Согласно известной теореме из векторной алгебры, проекция суммы векторов на какое-либо направление равна сумме проекций на это направление слагаемых векторов:

$$\left( \sum_i \vec{A}_i \right)_x = \sum_i A_{x_i}.$$

Поэтому для отыскания суммы функций

$$x = \sum_i x_i = \sum_i A_i \cos \varphi_i(t) \quad (13.4)$$

можно поступить следующим образом. Каждое слагаемое в сумме (13.4) следует представить вектором  $\vec{A}_i$  на плоскости, т.е. рассматривать  $i$ -е колебание как проекцию этого вектора на ось  $x$ :

$$A_i \cos \varphi_i = \left( \vec{A}_i \right)_x.$$

Затем графически, например по правилу треугольника, следует найти сумму

$$\sum_i \vec{A}_i = \vec{A}$$

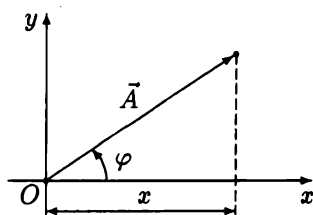


Рис. 13.2. Вектор, представляющий гармоническое колебание

этих векторов (рис. 13.3). Вектор  $\vec{A}$  будет представлять суммарное колебание (13.3). Амплитуда этого колебания равна модулю вектора  $\vec{A}$ , а фаза  $\varphi$  – углу между вектором  $\vec{A}$  и осью  $x$ .

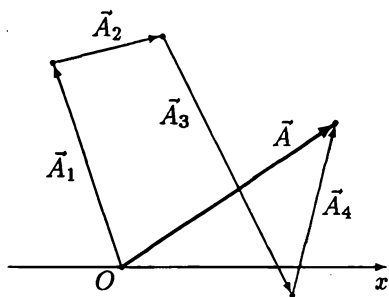


Рис. 13.3. Векторная диаграмма

Фаза гармонического колебания  $\varphi = \omega t + \alpha$ . Поэтому вектор, изображающий такое колебание, будет вращаться с угловой скоростью  $\omega$ . При сложении нескольких колебаний одной и той же частоты все векторы  $\vec{A}_i$ , представляющие эти колебания, и вектор суммы  $\vec{A}$  будут вращаться с одной скоростью. Так как при этом взаимное расположение векторов со временем не изменяется и модуль суммарного вектора не зависит от времени,

векторную диаграмму удобно строить для какого-либо произвольного момента времени, например, для момента  $t = 0$ . В этом случае углы, образуемые векторами  $\vec{A}_i$  и  $\vec{A}$  с осью  $x$ , будут равны начальным фазам  $\alpha_i$  и  $\alpha$ .

### 13.3. Дифракция света на круглом отверстии

Монохроматический свет от точечного источника  $S$  падает на непрозрачный экран с круглым отверстием. Источник расположен на оси симметрии отверстия на расстоянии  $a$  от экрана (рис. 13.4). При помощи принципа Гюйгенса – Френеля найдем амплитуду световых колебаний в точке  $P$  на оси симметрии за экраном по другую сторону от источника света. Расстояние от экрана до точки  $P$  равно  $b$ . В качестве поверхности, элементы которой будем рассматривать как источники вторичных волн, возьмем фазовую поверхность, "затягивающую" отверстие в экране. Для точечного источника такой поверхностью является сфера  $\sigma$  радиуса  $r$ , опирающаяся на края отверстия. Центр этой сферы находится там же, где источник. Сфера  $\sigma$  пересекается с осью  $SP$  в точке  $O$  на расстоянии  $R_0$  от точки  $P$ . Очевидно, что

$$r + R_0 = a + b. \quad (13.5)$$

Колебание  $dE$ , вызванное в точке  $P$  вторичной волной от элемента  $d\sigma$  поверхности  $\sigma$ , расположенного около произвольной точки  $A$ , найдем по формуле (13.1). Вследствие осевой симметрии выражение (13.1) не изменится, если элемент поверхности  $d\sigma$  перенести в другую точку  $A'$  поверхности  $\sigma$ , которая находится на том же расстоянии  $R$  от точки

$P$ , что и точка  $A$ . Поэтому вместо малого элемента поверхности можно взять узкое кольцо. При этом поверхностный интеграл (13.2) можно свести к определенному интегралу. Выберем в качестве переменной интегрирования расстояние  $R$  и найдем выражение для площади  $d\sigma$  кольца, расстояние от внутреннего края которого до точки  $P$  равно  $R$ , а расстояние до его внешнего края равно  $R + dR$ , где  $dR$  – произвольное малое приращение расстояния  $R$ .

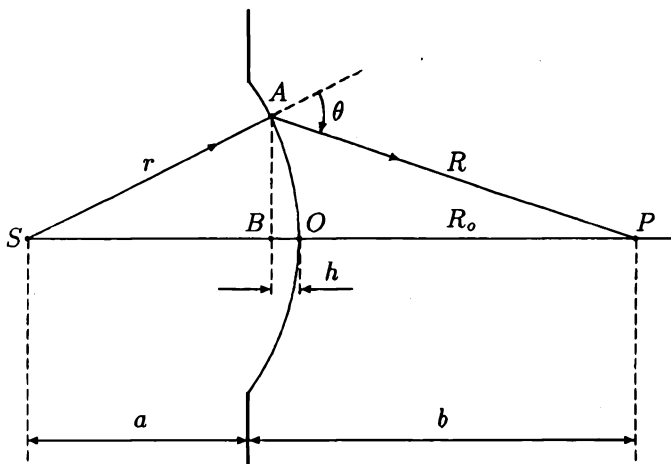


Рис. 13.4. Дифракция света на круглом отверстии

Из элементарной геометрии известна формула для площади сферического сегмента  $\sigma = 2\pi r h$ , где  $h$  – высота сегмента, т.е. расстояние между точками  $B$  и  $O$  на рис. 13.4. При этом площадь узкого кольца будет

$$d\sigma = 2\pi r dh. \quad (13.6)$$

Для того чтобы найти зависимость  $h$  от  $R$ , запишем теорему Пифагора для треугольников  $ABP$  и  $SAB$ :

$$R^2 = AB^2 + (R_o + h)^2, \quad r^2 = AB^2 + (r - h)^2.$$

Вычтем из первого равенства второе. После несложных вычислений с учетом (13.5) придем к зависимости

$$h = \frac{R^2 - R_o^2}{2(a + b)}.$$

Дифференциал этой функции

$$dh = \frac{R dR}{a + b}.$$

При этом формула (13.6) принимает вид

$$d\sigma = \frac{2 \pi r R dR}{a + b}.$$

Подставив это выражение в формулу (13.1), получим следующее выражение для колебания  $dE$  в точке  $P$ , вызванного вторичной волной, прошедшей в эту точку от узкого кольца:

$$dE = K(\theta) \frac{2 \pi r E_A}{a + b} \cos(\omega t - k R + \alpha_A) dR. \quad (13.7)$$

Для колец не очень большого радиуса угол  $\theta$  мало отличается от нуля и множитель  $K(\theta)$  почти постоянная величина. Поэтому в формуле (13.7) выражение перед косинусом можно также считать величиной, которая не зависит от переменной  $R$ :

$$dE = C \cos(\omega t - k R + \alpha_A) dR, \quad (13.8)$$

где  $C = \text{const}$ . Согласно принципу суперпозиции (13.2) колебание в точке  $P$  будет выражаться определенным интегралом

$$E(t) = C \int_{R_0}^{R_N} \cos(\omega t - k R + \alpha_A) dR, \quad (13.9)$$

где  $R_N$  – расстояние от точки  $P$  до края отверстия. Интегрирование по формуле Ньютона–Лейбница приводит к следующему результату:

$$E = -\frac{C}{k} \sin(\omega t - k R + \alpha_A) \Big|_{R_0}^{R_N}.$$

Преобразуем это выражение при помощи тригонометрической формулы

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (13.10)$$

Получим

$$E(t) = E_m \cos \left( \omega t - \frac{1}{2} k (R_0 + R_N) + \alpha_A \right), \quad (13.11)$$

где амплитуда колебания в точке  $P$

$$E_m = 2 E_{m_0} \left| \sin \frac{\pi (R_N - R_0)}{\lambda} \right|, \quad (13.12)$$

$E_{m_0} = C/k$ . Анализируя зависимость амплитуды колебания  $E_m$  от расстояния  $R_N - R_0$ , приходим к выводу, что в том случае, когда разность  $R_N - R_0$  равна нечетному числу полуволен:

$$R_N - R_0 = \frac{\lambda}{2} (2n + 1), \quad (13.13)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  - натуральное число; амплитуда колебания  $E_m = 2 E_{m_0}$ , т.е. принимает наибольшее значение. Если же разность  $R_N - R_0$  равна целому числу длин волн:

$$R_N - R_0 = \lambda n, \quad (13.14)$$

то амплитуда колебаний в точке  $P$  равна нулю.

Разделим волновую поверхность  $\sigma$ , которая затягивает отверстие в экране, на зоны. Первая зона представляет собой сферический сегмент, расстояния до краев которого от точки  $P$  равны

$$R^{(1)} = R_0 + \frac{\lambda}{2}.$$

Вторая зона прилегает к первой и представляет собой кольцо, расстояние до внутреннего края которого от точки  $P$  равно  $R^{(1)}$ , а до внешнего -

$$R^{(2)} = R_0 + \lambda.$$

Следующая зона есть кольцо, расстояния до краев которого от точки  $P$  равны  $R^{(2)}$  и

$$R^{(3)} = R_0 + \frac{3\lambda}{2},$$

и т.д. Эти зоны называют *зонами Френеля*. Если размеры отверстия в экране таковы, что волновая поверхность  $\sigma$  по отношению к заданной точке  $P$  состоит из нечетного числа зон Френеля, то выполняется условие (13.13) и амплитуда световых колебаний в этой точке будет наибольшей. Если же волновая поверхность  $\sigma$  состоит из четного числа зон Френеля, то выполняется условие (13.14) и амплитуда колебаний в точке  $P$  принимает наименьшее значение.



Применим теперь для определения амплитуды световых колебаний в точке  $P$  графический метод сложения колебаний, описанный в разделе 13.2. Для этого мысленно разделим волновую поверхность  $\sigma$ , затягивающую отверстие в экране, на узкие кольца. При помощи формулы (13.7) запишем следующее выражение для колебания  $dE_i$ , возбуждаемого в точке  $P$  вторичной световой волной, пришедшей в эту точку от кольца под номером  $i$ :

$$dE_i = dE_{m_i} \cos(\omega t - k R_i + \alpha_A), \quad (13.15)$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ;  $N$  – число колец,

$$dE_{m_i} = K(\theta_i) \frac{2\pi r E_A}{a+b} dR_i \quad (13.16)$$

– амплитуда колебания;  $R_i$  – расстояние от внутреннего края  $i$ -го кольца до точки  $P$ .

Пусть расстояния  $R_i$  от краев колец до точки  $P$  таковы, что их разность для любых двух соседних колец принимает одно и то же значение, т.е. не зависит от номера кольца:

$$R_i - R_{i-1} = dR = \text{const} . \quad (13.17)$$

Отсюда следует, что

$$R_i = R_o + i \cdot dR . \quad (13.18)$$

Из рис. 13.4 видно, что при увеличении радиуса кольца угол  $\theta$  увеличивается. При этом коэффициент  $K(\theta)$  уменьшается. Поэтому, как следует из формул (13.16) и (13.17), амплитуда  $dE_{m_i}$  колебания в точке  $P$ , вызванного вторичной световой волной, пришедшей от узкого кольца, также уменьшается при увеличении его радиуса. Иначе говоря, амплитуда  $dE_{m_i}$  колебания, возбуждаемого вторичной волной от  $i$ -го кольца, уменьшается при увеличении его номера  $i$ .

Представим каждое гармоническое колебание  $dE_i$  вектором  $\overrightarrow{dA}_i$ . Длина этого вектора равна амплитуде  $dE_{m_i}$  колебания, а угол между ним и осью абсцисс – разности фаз  $\Delta\varphi_{i,0}$  колебаний  $dE_i$  и  $dE_o$ , возбуждаемых волнами от  $i$ -го кольца и маленького сегмента в центре  $O$  волновой поверхности  $\sigma$ . Из формул (13.15) и (13.18) следует, что

$$\Delta\varphi_{i,0} = k(R_i - R_o) = k i \cdot dR . \quad (13.19)$$

Амплитуда  $A$  суммарного колебания

$$E = \sum_{i=1}^N dE_i \quad (13.20)$$

равна длине вектора  $\vec{A}$  суммы векторов  $\vec{dA}_i$ :

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^N \vec{dA}_i. \quad (13.21)$$

Для того чтобы найти сумму векторов  $\vec{dA}_i$ , следует расположить эти векторы следующим образом. Вектор  $\vec{dA}_0$  можно расположить произвольно. Пусть он будет направлен вдоль оси абсцисс. Вектор  $\vec{dA}_1$  расположим так, чтобы его начало совпало с концом вектора  $\vec{dA}_0$ . Начало вектора  $\vec{dA}_2$  совместим с концом вектора  $\vec{dA}_1$  и т.д. После того как будут построены таким образом все векторы  $\vec{dA}_i$ , построим вектор суммы  $\vec{A}$ , начало которого совпадает с началом вектора  $\vec{dA}_0$ , а конец — с концом вектора  $\vec{dA}_N$ . Угол между векторами  $\vec{dA}_i$  и  $\vec{dA}_{i+1}$  равен разности фаз  $\delta\varphi$  колебаний с номерами  $i$  и  $i+1$ . Из (13.19) следует, что  $\delta\varphi = k dR$ , т.е. каждый вектор повернут относительно предыдущего вектора на один и тот же угол. В таком случае, если бы все векторы  $\vec{dA}_i$  имели одинаковую длину, они при их последовательном соединении образовали бы правильный многоугольник, который в пределе при  $dR \rightarrow 0$  и  $N \rightarrow \infty$  переходит в окружность. Однако вследствие того, что длина  $dE_m$  вектора  $\vec{dA}_i$  уменьшается при увеличении номера  $i$ , эти векторы при сложении образуют ломаную линию, изображенную на рис. 13.5. В пределе при  $dR \rightarrow 0$  и  $N \rightarrow \infty$  эта линия превращается в спираль, которая "заканчивается" в точке  $C$  на рис. 13.6.

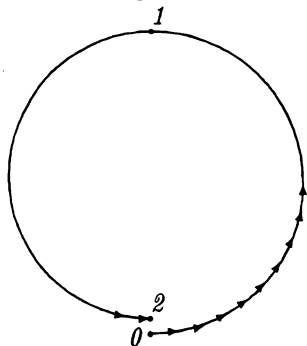


Рис. 13.5. Векторы, представляющие колебания, пришедшие от первых двух зон Френеля

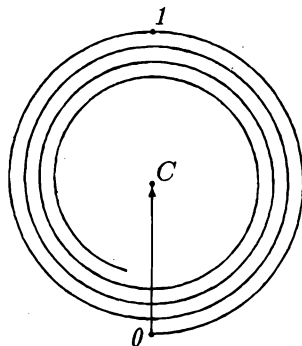


Рис. 13.6. Векторы, представляющие колебания, пришедшие от многих зон Френеля

Векторы  $\vec{dA}_i$ , которые расположены на рис. 13.6 в точках  $0, 1, 2, \dots$ , образуют с осью абсцисс углы  $0, \pi, 2\pi, \dots$ . Эти векторы представляют колебания, возбуждаемые вторичными волнами, которые приходят в точку  $P$  от границ зон Френеля. Таким образом, векторы  $\vec{dA}_i$ , образующие дугу между точками  $0$  и  $1$ , соответствуют колебаниям, возбуждаемым вторичными волнами от колец, лежащих внутри первой зоны Френеля; векторы  $\vec{dA}_i$ , образующие дугу между точками  $1$  и  $2$ , соответствуют колебаниям, возбуждаемым волнами от колец, лежащих внутри второй зоны Френеля, и т.д.

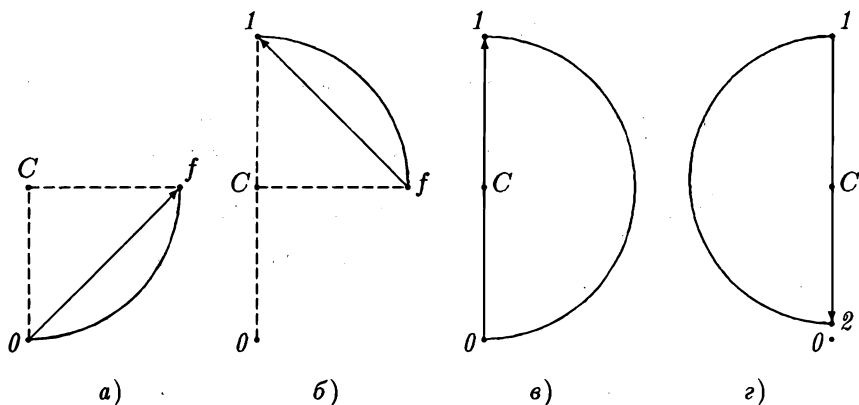


Рис. 13.7. Векторы, представляющие колебания, пришедшие: а) от первой половины первой зоны Френеля, б) от второй половины первой зоны Френеля, в) от первой зоны Френеля, г) от второй зоны Френеля

Колебание, возбуждаемое в точке  $P$  вторичными волнами от первой половины первой зоны Френеля, представлено на рис. 13.7, а вектором, который начинается в точке  $0$  и заканчивается в точке  $f$ . Колебание, возбуждаемое в точке  $P$  волнами от второй половины первой зоны Френеля, представлено на рис. 13.7, б вектором, который начинается в точке  $f$  и заканчивается в точке  $1$ . Колебание, возбуждаемое в точке  $P$  волнами от всей первой зоны Френеля, представлено на рис. 13.7, в вектором, для которого точка  $0$  служит началом, а точка  $1$  – концом. На рис. 13.7, г изображен вектор, который начинается в точке  $1$  и заканчивается в точке  $2$ . Этот вектор представляет колебание, возбуждаемое в точке  $P$  волнами от второй зоны Френеля. Колебание, возбуждаемое в точке  $P$  вторичными волнами от всей волновой поверхности  $\sigma$  представлено на рис. 13.6 вектором, который начинается в точке  $0$  и заканчивается в

точке  $C$ . Обозначим длину этого вектора  $E_{m_0}$ . Величина  $E_{m_0}$  есть амплитуда колебания, возбуждаемого в точке  $P$  волнами от всей волновой поверхности. Иначе говоря, такой будет амплитуда колебаний в точке  $P$ , когда экран с отверстием просто отсутствует. Из рис. 13.7, в видно, что амплитуда  $E_{m_1}$  колебания, возбуждаемого в точке  $P$  волнами от первой зоны Френеля, равна  $2E_{m_0}$ .

Положение на векторной диаграмме вектора  $\vec{dA}_N$  можно найти по значению угла, который он образует с осью абсцисс. Этот угол равен разности фаз  $\Delta\varphi_{N,0}$  между колебаниями, возбуждаемыми в точке  $P$  волнами, приходящими из точки  $O$  и от краев отверстия. Согласно формуле (13.19)

$$\Delta\varphi_{N,0} = k(R_N - R_0).$$

Соединив точку  $O$  на векторной диаграмме с концом вектора  $\vec{dA}_N$ , получим вектор суммы (13.21). Длина этого вектора, выраженная в долях от величины  $E_{m_0}$ , есть искомая амплитуда  $E_m$  колебания в точке  $P$ .

### 13.4. Дифракция света на щели

Пусть на непрозрачный плоский экран, в котором вырезана длинная узкая щель, падает нормально плоская гармоническая волна

$$E = E_0 \cos(\omega t + k z + \alpha_0). \quad (13.22)$$

За экраном помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой расположен экран для наблюдения дифракционной картины (рис. 13.8). В каждой точке  $P$  на экране собираются вместе и интерferируют идущие от щели параллельные лучи вторичных волн. На рис. 13.8 показаны такие лучи, образующие угол  $\theta$  с нормалью к плоскости щели. Для определения амплитуды суммарного колебания в точке  $P$  применим принцип Гюйгенса – Френеля и принцип суперпозиции. С этой целью затянем щель плоской поверхностью  $\sigma$ . Эта плоскость удобна тем, что она совпадает с фазовой плоскостью падающей волны. В качестве элементов  $d\sigma$  поверхности, являющихся источниками вторичных волн, выберем узкие полоски, "вырезанные" из поверхности  $\sigma$  вдоль щели. Одна из таких полосок показана на рис. 13.8. Расстояние до края  $O_1$  щели до этой полоски обозначим  $x$ . При этом ее ширина будет равна  $dx$ . Колебание, возбуждаемое в точке  $P$  вторичной волной, пришедшей от этой полоски, имеет вид:

$$dE = dE_m \cos(\omega t - k \cdot AP + \alpha_0), \quad (13.23)$$

где амплитуда  $dE_m$  согласно принципу Гюйгенса – Френеля пропорциональна ширине полоски:

$$dE_m = C dx, \quad (13.24)$$

здесь  $C$  – коэффициент пропорциональности.

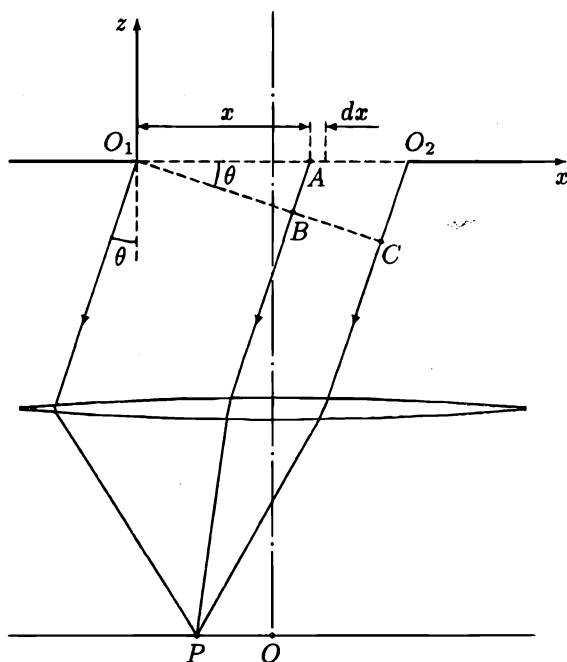


Рис. 13.8. К описанию дифракции Фраунгофера на щели

Линза обладает свойством таухронизма, которое выражается в том, что оптические длины  $O_1P$  и  $BP$  двух лучей равны. Такие лучи называются таухронными. Это название означает, что свет преодолевает расстояния  $O_1P$  и  $BP$  за одинаковое время. С учетом этого свойства для оптической длины луча  $AP$ , идущего от полоски  $d\sigma$ , можно записать следующее выражение

$$AP = O_1P + x \sin \theta. \quad (13.25)$$

Подставим выражения (13.24) и (13.25) в формулу (13.23). Следуя принципу суперпозиции, найдем колебание в точке  $P$ , возбуждаемое вторичными волнами, идущими от всех элементов поверхности  $\sigma$ :

$$E = C \int_0^a \cos(\omega t - kx \sin \theta + \alpha) dx,$$

где  $\alpha = \alpha_0 - k \cdot O_1P$ ,  $a$  – ширина щели. Вычислим этот интеграл по

формуле Ньютона - Лейбница:

$$E = \frac{C}{k \sin \theta} \left( \sin(\omega t + \alpha) - \sin(\omega t - k a \sin \theta + \alpha) \right).$$

Преобразуем это выражение при помощи тригонометрической формулы (13.10). Получим:

$$E = E_m \cos \left( \omega t - \frac{1}{2} k a \sin \theta + \alpha \right), \quad (13.26)$$

где амплитуда колебаний

$$E_m = E_{m_0} \left| \frac{\sin \left( \frac{1}{2} k a \sin \theta \right)}{\frac{1}{2} k a \sin \theta} \right|, \quad (13.27)$$

$E_{m_0} = C a$ . Согласно этим формулам, в точке  $O$ , лежащей против середины щели и соответствующей  $\theta = 0$ , колебания вектора  $\vec{E}$  происходят по закону

$$E = E_{m_0} \cos(\omega t + \alpha). \quad (13.28)$$

При выводе этой формулы учтено, что при малых значениях аргумента  $x$  можно положить  $\sin x \simeq x$ . График зависимости амплитуды  $E_m$  от  $\sin \theta$  представлен на рис. 13.9.

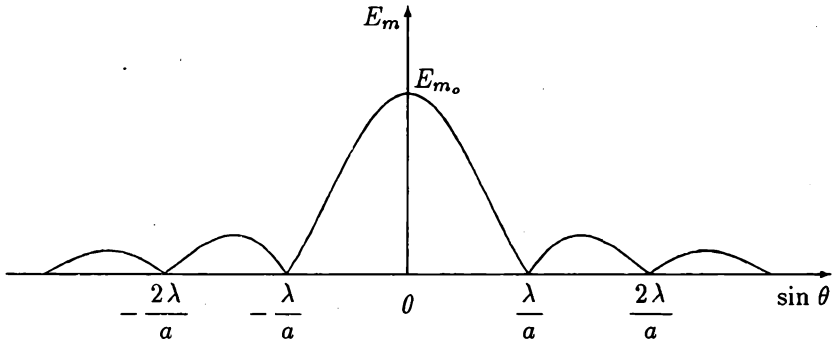


Рис. 13.9. Дифракция Фраунгофера на щели.  
График зависимости амплитуды  $E_m$  от  $\sin \theta$

Амплитуда (13.27) обращается в ноль при  $\theta \neq 0$ , если

$$\sin \left( \frac{1}{2} k a \sin \theta \right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sin \theta = \frac{2 \pi m}{k a} = \frac{\lambda m}{a}, \quad (13.29)$$

где  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

Формулу (13.27) для амплитуды светового колебания в произвольной точке  $P$  на дифракционной картине можно получить посредством описанного в разделе 13.2 графического метода. Для этого фазовую плоскость, затягивающую щель, разобьем на узкие полоски одинаковой ширины  $dx$ . Пусть  $i = 1, 2, \dots, N$  – номер полоски. Колебание в точке  $P$ , возбуждаемое волной, пришедшей от произвольной полоски, будет описываться формулой (13.23). Каждое колебание следует представить вектором  $\vec{dA}_i$ , длина которого равна амплитуде  $dE_m$  колебания, а угол между этим вектором и некоторым произвольным направлением (осью  $x$ ) – начальной фазе колебания. Так как все полоски имеют одну и ту же ширину  $dx$ , амплитуды колебаний в точке  $P$ , создаваемых вторичными волнами от различных полосок, будут одинаковы. Разность фаз между колебаниями от соседних полосок равна

$$\delta\varphi = k dx \sin \theta$$

и не зависит от номера  $i$  полоски. Таким образом, векторы  $\vec{dA}_i$ , представляющие колебания от различных полосок, будут иметь одну и ту же длину  $dE_m$ , и каждый вектор будет повернут относительно предыдущего на один и тот же угол  $\delta\varphi$ . При этом, если начало каждого вектора  $\vec{dA}_i$  поместить в конец предыдущего вектора  $\vec{dA}_{i-1}$ , то они образуют ломаную линию, которая в пределе при  $dx \rightarrow 0$  переходит в дугу окружности (рис. 13.10). Сумма векторов  $\vec{dA}_i$  есть вектор  $\vec{A}$ , начало которого совпадает с началом первого вектора  $\vec{dA}_1$ , а конец – с концом последнего  $\vec{dA}_N$ . Как видно из рис. 13.10, длина вектора  $\vec{A}$  равна длине хорды, стягивающей дугу окружности из слагаемых векторов  $\vec{dA}_i$ .

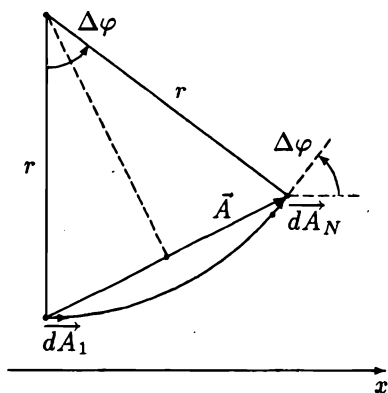


Рис. 13.10. Векторная диаграмма

Разность фаз  $\Delta\varphi$  между колебаниями в точке  $P$  от вторичных волн, приходящих от краев щели  $O_1$  и  $O_2$ , определяется разностью длин лучей

$O_1P$  и  $O_2P$  (рис. 13.8):

$$\Delta\varphi = k a \sin \theta. \quad (13.30)$$

При этом угол между векторами  $\vec{dA}_1$  и  $\vec{dA}_N$ , представляющими эти колебания, будет равен  $\Delta\varphi$ .

В точке  $O$  на экране собираются лучи, идущие под углом  $\theta = 0$ . Все колебания в этой точке имеют одну и ту же фазу ( $\Delta\varphi = 0$ ). Поэтому все векторы  $\vec{dA}_i$  имеют одно и то же направление, а модуль их суммы будет равен сумме модулей этих векторов (рис. 13.11):

$$\left| \sum_{i=1}^N \vec{dA}_i \right| = \sum_{i=1}^N \left| \vec{dA}_i \right| = N dE_m \equiv E_{m_0}.$$

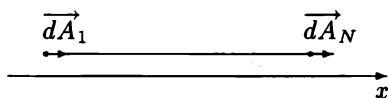


Рис. 13.11. Векторная диаграмма при  $\theta = 0$

Так как амплитуды  $dE_m$  колебаний практически не зависят от угла  $\theta$ , длина дуги окружности на рис. 13.10, т.е. сумма

$$\sum_{i=1}^N \left| \vec{dA}_i \right|,$$

для всех точек  $P$  равна  $E_{m_0}$ . Используя геометрические построения на рис. 13.10, найдем длину хорды:

$$\left| \vec{A} \right| \equiv E_m = 2r \left| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right|,$$

где  $r$  – радиус окружности, который связан с длиной дуги  $E_{m_0}$  соотношением

$$E_{m_0} = r \Delta\varphi.$$

Исключив из этих соотношений величину  $r$ , придем к формуле

$$E_m = E_{m_0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right|, \quad (13.31)$$

которая после подстановки в нее выражения (13.30) принимает вид (13.27). Учитывая, что интенсивность  $I \sim E_m^2$ , нетрудно найти ее зависимость от угла  $\theta$ .



### 13.5. Дифракционная решетка

Пусть в непрозрачной плоскости вырезаны  $N$  параллельных друг другу узких щелей. Такая конструкция называется *дифракционной решеткой*. Если ширина каждой щели равна  $a$ , а расстояние между соседними щелями —  $b$  (рис. 13.12), то величину  $d = a + b$  называют *постоянной решетки*, или ее *периодом*.

Пусть на дифракционную решетку падает нормально плоская гармоническая электромагнитная волна (13.22). Чтобы найти распределение амплитуды световых колебаний на экране для наблюдения дифракционной картины, затащим щель воображаемой плоскостью, элементы которой, следуя принципу Гюйгенса, будем рассматривать в качестве источников вторичных волн.

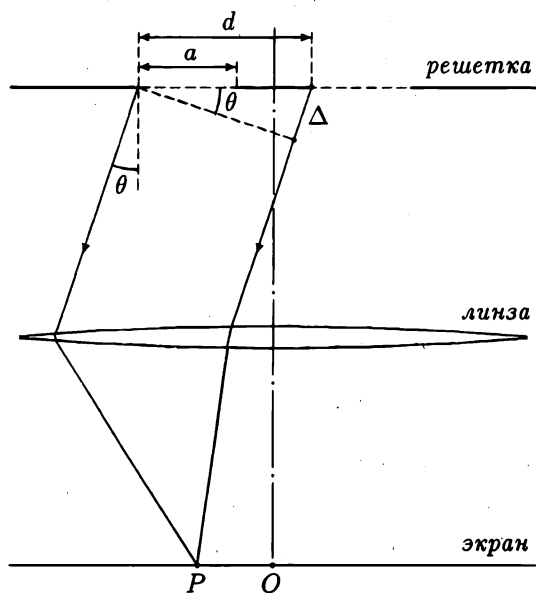


Рис. 13.12. Дифракционная решетка

В предыдущем разделе была получена формула для амплитуды колебания, создаваемого в произвольной точке  $P$  вторичными волнами, идущими от одной щели. От каждой из  $N$  щелей дифракционной решетки в точку  $P$  приходят вторичные волны. Создаваемые ими колебания имеют вид

$$E_j = E_{m_1} \cos(\omega t - (j - 1) k d \sin \theta + \alpha_1), \quad (13.32)$$

где  $j = 1, 2, \dots, N$  — номер щели. Так как площади поверхностей, которые

затягивают каждую из щелей, одинаковы, амплитуды этих колебаний равны одной и той же величине  $E_{m_1}$ .

Разность фаз колебаний (13.32) от двух соседних щелей, как видно из рис. 13.12, определяется разностью хода  $\Delta = d \sin \theta$  и равна

$$\Delta\varphi = k d \sin \theta. \quad (13.33)$$

В таком случае векторы  $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_N$ , представляющие колебания от различных щелей дифракционной решетки, при условии, что начало каждого вектора совмещено с концом предыдущего, образует ломаную линию, точки излома которой лежат на окружности.

Сумма векторов равна нулю, когда конец последнего вектора  $\vec{A}_N$  совпадает с началом первого вектора  $\vec{A}_1$ . При этом амплитуда  $E_m$  суммарного колебания также будет равна нулю. Такое возможно, если

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi m_0}{N}, \quad (13.34)$$

где  $m_0$  – любое целое число, кроме 0,  $\pm N, \pm 2N, \dots$ . Подставив выражение (13.33) в условие минимумов (13.34), запишем это условие так:

$$\sin \theta = \frac{\lambda m_0}{d N} \quad \text{при} \quad m_0 \neq m N, \quad (13.35)$$

где  $m$  – целое число.

Если разность фаз колебаний от соседних щелей равна

$$\Delta\varphi = 2\pi m, \quad (13.36)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то все векторы  $\vec{A}_i$  имеют одно направление. При этом модуль их суммы будет максимален и равен

$$E_m = N E_{m_1}. \quad (13.37)$$

В тех точках дифракционной картины, где выполняется условие (13.36) будет наблюдаться максимум интенсивности света. При помощи формулы (13.33) условию максимумов можно придать вид

$$\sin \theta = \frac{\lambda m}{d}, \quad (13.38)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Эта формула определяет направления распространения вторичных волн, при интерференции которых на экране образуются светлые полосы. Максимумы интенсивности света, положения которых определяются условием (13.38), называют *главными*, а число  $m$  называют *порядком главного максимума*.

Таким образом, амплитуда  $E_m$  светового колебания в какой-либо точке  $P$  дифракционной картины зависит от угла  $\theta$ , под которым идут от дифракционной решетки вторичные волны, собираемые линзой в этой точке графика. Зависимость амплитуды  $E_m$  от  $\sin \theta$  представлена на рис. 13.13 для  $N = 4$  и  $d/a = 3$ . Из этого рисунка видно, что ширина главного максимума равна  $2\lambda/dN$ .

Если на решетку падает свет, содержащий волны различной длины, то главные максимумы порядка  $m \neq 0$ , соответствующие различным длинам волн, будут смещены друг относительно друга, т.е. решетка, как призма, разлагает свет в спектр. Одной из характеристик решетки как спектрального прибора служит *разрешающая способность*

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \quad (13.39)$$

где  $\Delta\lambda$  – минимальный интервал длин волн, такой, что две спектральные линии, которые соответствуют длинам волн  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ , еще могут быть разрешимы, т.е. видны раздельно. Согласно критерию Релея, две близкие спектральные линии считаются разрешенными, когда максимум одной из них совпадает с ближайшим минимумом другой.

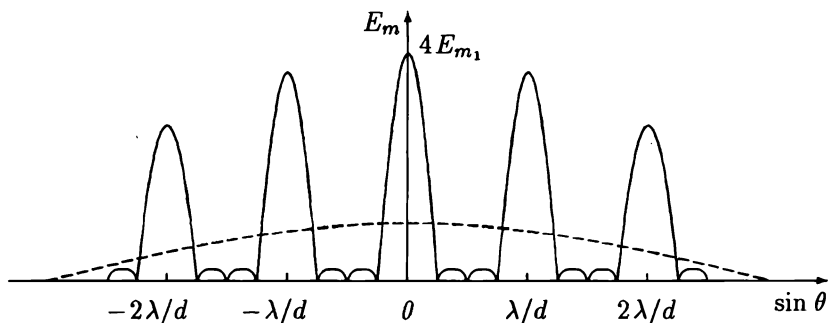


Рис. 13.13. Дифракция Фраунгофера на решетке

Положение главного максимума в спектре  $m$ -го порядка для света с длиной волны  $\lambda$  определяется из условия (13.38). Ближайший к этому максимуму минимум интенсивности для света длины волны  $\lambda + \Delta\lambda$  с учетом условия (13.35) определяется выражением

$$\sin \theta = \frac{(\lambda + \Delta\lambda)m}{d} - \frac{\lambda + \Delta\lambda}{Nd}. \quad (13.40)$$

В силу критерия Релея выражения (13.38) и (13.40) равны. Из этого равенства найдем, что разрешающая способность дифракционной решетки равна произведению порядка спектра на число щелей:

$$R = mN. \quad (13.41)$$

## ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

## 14.1. Поляризация электромагнитной волны

В общем случае решение системы уравнений Максвелла, описывающее гармоническую волну, которая распространяется вдоль оси  $y$ , имеет вид

$$\begin{cases} E_x = E_{m_x} \cos(\omega t \pm k y + \alpha_x), \\ E_y = 0, \\ E_z = E_{m_z} \cos(\omega t \pm k y + \alpha_z). \end{cases} \quad (14.1)$$

Причем нет необходимости выписывать компоненты вектора  $\vec{H}$ , так как при известных  $\vec{E}$  и  $\vec{k}$  направление и модуль  $\vec{H}$  определяются однозначно по формулам, приведенным в разделе 11.4.

Электромагнитная волна называется полностью *поляризованной*, если разность фаз  $\alpha_x$  и  $\alpha_z$  двух взаимно перпендикулярных составляющих вектора  $\vec{E}$  не изменяется со временем:

$$\alpha_z - \alpha_x = \text{const}. \quad (14.2)$$

Зафиксируем в формулах (14.1) значение координаты  $y$ , т.е. рассмотрим колебание вектора  $\vec{E}$ , которое вызывается электромагнитной волной в произвольной точке пространства. Из формул (14.1)

следует, что в каждой точке пространства вектор  $\vec{E}$  изменяется со временем так, что его конец описывает эллипс (рис. 14.1). Такая волна называется *поляризованной по эллипсу*. В зависимости от направления вращения вектора  $\vec{E}$  различают правую и левую эллиптические поляризации электромагнитной волны.

В частном случае, когда разность фаз

$$\alpha_z - \alpha_x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad (14.3)$$

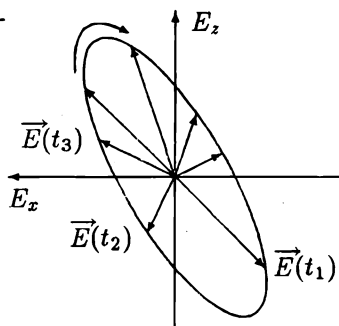


Рис. 14.1. Эллиптическая поляризация волны

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; функции (14.1) принимают вид

$$\begin{cases} E_x = E_{m_x} \cos(\omega t \pm k y + \alpha_x), \\ E_y = 0, \\ E_z = \pm E_{m_z} \sin(\omega t \pm k y + \alpha_x). \end{cases} \quad (14.4)$$

Разделим первое уравнение системы (14.4) на  $E_{m_x}$ , а второе – на  $E_{m_z}$ . Возведем полученные уравнения в квадрат и сложим их. Приходим к уравнению эллипса (рис. 14.2)

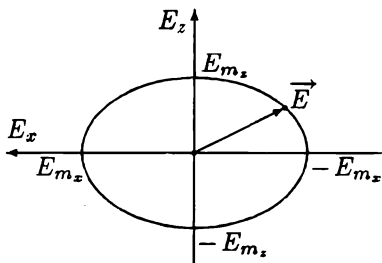


Рис. 14.2. Эллиптическая поляризация волны

$$\left(\frac{E_x}{E_{m_x}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{m_z}}\right)^2 = 1. \quad (14.5)$$

Если амплитуды  $E_{m_x}$  и  $E_{m_z}$  равны:

$$E_{m_x} = E_{m_z} = E_m, \quad (14.6)$$

то уравнение (14.5) превращается в уравнение окружности. Это означает, что конец вектора  $\vec{E}$  с течением времени описывает окружность. Такая волна называется *поляризованной по кругу*. На рис.

14.3. изображены векторы напряженности электрического поля поляризованной по кругу волны в различных точках луча. Линия, проходящая через концы этих векторов, представляет собой винтовую линию.

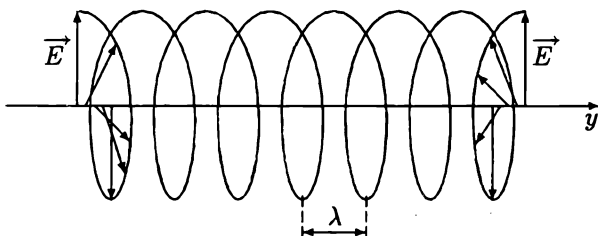


Рис. 14.3. Волна, поляризованная по кругу

Волна называется *плоско-* (или *линейно*) *поляризованной*, когда вектор  $\vec{E}$  не изменяет вдоль луча своего направления. Примером плоскополяризованной волны служит волна на рис. 14.4. Проходящая через луч плоскость, в которой лежат векторы  $\vec{E}$ , определенные в различных точках луча, и вектор  $\vec{k}$ , называется *плоскостью колебаний*, а плоскость, в которой лежат векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{k}$ , – *плоскостью поляризации*. Напомним, что векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{k}$  образуют правую тройку.

Функции (14.1) описывают плоскополяризованную волну при условии, что

$$\alpha_z = \alpha_x + \pi n, \quad (14.7)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  При этом условии

$$\cos(\omega t - ky + \alpha_z) = \pm \cos(\omega t - ky + \alpha_x).$$

Используя это равенство, из (14.1) найдем, что

$$\frac{E_x}{E_z} = \pm \frac{E_{m_x}}{E_{m_z}}, \quad (14.8)$$

т.е. отношение компонент вектора  $\vec{E}$  в любой точке луча одно и то же. Это значит, что векторы, определенные в различных точках луча, коллинеарны.

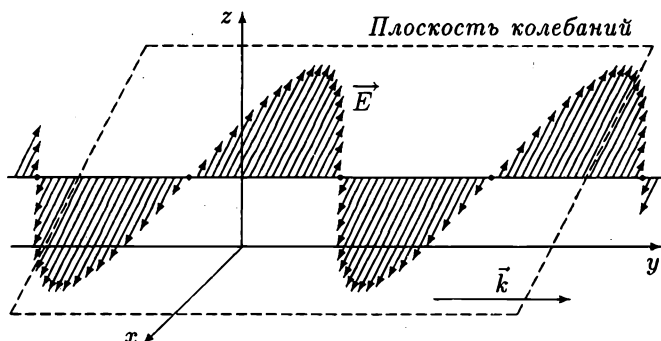


Рис. 14.4. Плоскополяризованная электромагнитная волна

Волну, которая описывается функциями (14.1), можно рассматривать как суперпозицию двух линейно поляризованных волн. В одной из этих волн вектор напряженности электрического поля колеблется в плоскости  $xy$ , а в другой – в плоскости  $yz$ . Если разность фаз этих волн не изменяется со временем, то такие волны называются *когерентными*.

## 14.2. Естественный и поляризованный свет

Большинство источников света (солнце, лампы накаливания, газоразрядные лампы) испускают так называемый *естественный свет*. Этот свет представляет собой совокупность электромагнитных волн, испущенных отдельными атомами и молекулами. Каждый атом (или молекула) испускает электромагнитные волны чаще всего самопроизвольно и независимо от других атомов и молекул. Поэтому такие волны не являются когерентными.

Формулы (14.1) можно использовать для описания одной из электромагнитных волн частоты  $\omega$ , входящих в состав *естественного света*. В этом случае фазы  $\alpha_x$  и  $\alpha_z$  являются случайными функциями времени  $t$ . Поэтому направление вектора  $\vec{E}$  в произвольной точке пространства будет быстро и хаотично изменяться с течением времени. При этом вектор  $\vec{E}$  будет всегда перпендикулярен вектору скорости  $\vec{v}$ , а его модуль может изменяться, но не так быстро, как его направление.

Свет, описываемый формулами (14.1), можно рассматривать как суперпозицию двух плоскополяризованных волн, векторы напряженности электрического поля которых колеблются во взаимно перпендикулярных направлениях. Если каким-либо способом уменьшить амплитуду колебаний одной из компонент вектора  $\vec{E}$ , то получим так называемый *частично поляризованный свет*. Пусть, например, в формулах (14.1) амплитуда  $E_{m_x}$  больше, чем амплитуда  $E_{m_z}$ . Тогда свет, плоскость колебаний которого проходит через ось  $x$ , будет обладать наибольшей интенсивностью  $I_{max}$ ; а свет, плоскость колебаний которого проходит через ось  $z$ , — наименьшей интенсивностью  $I_{min}$ . Отношение

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (14.9)$$

называют *степенью поляризации* частично поляризованного света. Для естественного света  $I_{min} = I_{max}$  и  $P = 0$ . Для плоскополяризованного света  $I_{min} = 0$  и  $P = 1$ .

Устройства, с помощью которых можно получить поляризованный свет из естественного, называются *поляризаторами*. Действие поляризаторов основано на явлении поляризации света при отражении и преломлении на границе раздела диэлектриков и на явлении поляризации света при двойном лучепреломлении в кристаллах.

### 14.3. Поляризация света при отражении и преломлении

Пусть на границу раздела двух диэлектриков с различными показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  падает луч естественного света. Обозначим компоненту вектора напряженности  $\vec{E}$  электрического поля, перпендикулярную плоскости падения, как  $\vec{E}_\perp$ , а лежащую в плоскости падения —  $\vec{E}_\parallel$ . В естественном свете амплитуды компонент  $\vec{E}_\perp$  и  $\vec{E}_\parallel$  равны между собой.

При отражении и преломлении естественного света на границе раздела двух диэлектриков свет частично поляризуется, т.е. в отраженном

луче преобладают колебания вектора  $\vec{E}_\perp$ , перпендикулярные плоскости падения, а в преломленном луче – колебания вектора  $\vec{E}_\parallel$  в плоскости падения (рис. 14.5). Теория Максвелла позволяет найти связь амплитуд колебаний векторов  $\vec{E}_\perp$  и  $\vec{E}_\parallel$  в отраженном и преломленном лучах с амплитудами колебаний напряженности в падающем луче (формулы Френеля), а также соответствующие коэффициенты отражения

$$\varrho_\perp = \frac{I_{\perp \text{отр}}}{I_{\perp \text{пад}}} \quad \text{и} \quad \varrho_\parallel = \frac{I_{\parallel \text{отр}}}{I_{\parallel \text{пад}}}$$

Здесь  $I_{\perp \text{пад}}$  и  $I_{\parallel \text{пад}}$  – интенсивности  $\perp$ - и  $\parallel$ -компонент в падающем луче,  $I_{\perp \text{отр}}$  и  $I_{\parallel \text{отр}}$  – интенсивности компонент в отраженном луче.

На рис. 14.6 представлена зависимость коэффициентов отражения  $\varrho_s$  и  $\varrho_p$  от угла падения  $\alpha$  при падении света на стекло, для которого показатель преломления имеет значение  $n = 1,52$ . Из рисунка видно, что при всех углах  $0 < \alpha < \pi/2$   $s$ -компонента имеет больший коэффициент отражения, следовательно в отраженном свете  $s$ -колебания  $\vec{E}$  будут преобладать над  $p$ -колебаниями.

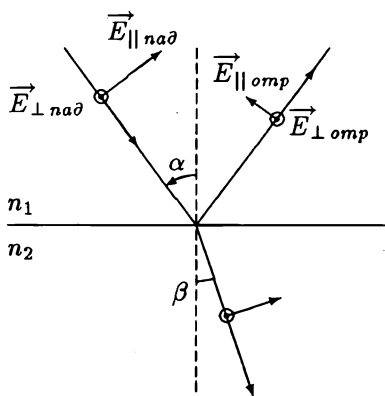


Рис. 14.5. Поляризация света при отражении

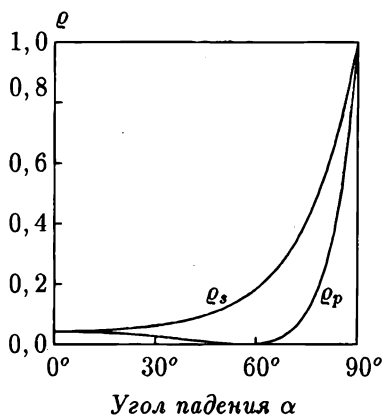


Рис. 14.6. Коэффициенты отражения света от стекла

При некотором значении  $\alpha_B$  угла падения  $\alpha$ , называемом *углом Брюстера*, компонента  $\vec{E}_\parallel$  не отражается. В этом случае отраженный свет окажется полностью поляризованно перпендикулярно плоскости падения (рис. 14.7). При угле Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны, т.е. сумма угла падения и угла преломления



$\beta$  равна  $\pi/2$ :

$$\alpha_B + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому с учетом закона Снеллиуса

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

будем иметь

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}} \quad (14.10)$$

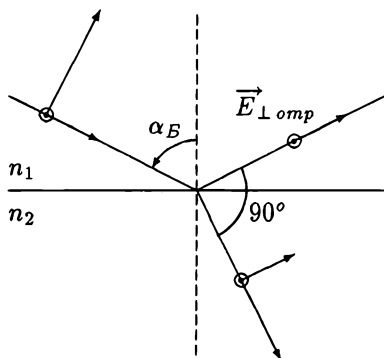


Рис. 14.7. Угол Брюстера

Соотношение (14.10) называют законом Брюстера. Рис. 14.7 относится к случаю падения света из воздуха ( $n_1 = 1$ ) на стекло ( $n_2 = 1,52$ ). При этом угол Брюстера  $\alpha = 56^\circ 40'$ .

Преломленный луч поляризован всегда лишь частично, в нем преобладают колебания, происходящие в плоскости падения. Степень поляризации преломленного луча становится наибольшей при угле падения  $\alpha_B$ . Чтобы достичь еще большей степени поляризации преломленного луча, его пропускают под углом Брюстера через стопу стеклянных пластинок, сложенных одна с другой (стопа Столетова). Если стопа состоит из 8 – 10 пластинок, то проходящий через нее свет практически полностью поляризован. Интенсивности отраженного и прошедшего лучей одинаковы и каждая составляет половину интенсивности падающего луча (если пренебречь поглощением в стекле). Направление колебаний в отраженном и прошедшем лучах взаимно перпендикулярны.

Рассмотрим теперь физическую суть явления поляризации света при отражении от поверхности какого-либо тела. Световая волна при своем движении в веществе заставляет заряды, входящие в состав его молекул, совершать вынужденные колебания, т.е. колебания, частота которых равна частоте волны. Движущиеся заряженные частицы создают в пространстве переменные электрическое и магнитное поля, т.е. испускают электромагнитные волны. Эти волны называют *вторичными*. Волна, отраженная от поверхности тела, представляет собой суперпозицию вторичных волн. Преломленная световая волна есть суперпозиция падающей (первичной) волны и вторичных волн, распространяющихся в том же направлении.

На заряд  $q$  в электромагнитном поле действуют две силы. Электрическое поле действует на этот заряд с силой  $\vec{F}_э = q\vec{E}$ . Действие на заряд магнитного поля определяется силой Лоренца. Причем первая сила существенно превышает по величине вторую. Поэтому заряженная частица в электромагнитной волне совершает вынужденные колебания в направлении вектора  $\vec{E}$  напряженности электрического поля. Движущийся заряд испускает электромагнитные волны во всех направлениях. Однако интенсивности этих волн не одинаковы. Наибольшей интенсивностью обладают вторичные волны, испущенные в направлениях, которые перпендикулярны скорости движения заряда, т.е. направлению вектора  $\vec{E}$  напряженности поля первичной волны. В направлении, в котором происходят вынужденные колебания заряда, т.е. вдоль вектора  $\vec{E}$  электромагнитные волны зарядом не испускаются. При падении света на поверхность тела под углом Брюстера направление вынужденных колебаний зарядов под действием поля  $\vec{E}_{||}$  совпадает с направлением отраженного луча (рис. 14.7). Поэтому интенсивность  $I_{||}$  отраженного света равна нулю.

#### 14.4. Поляризация света при двойном лучепреломлении

Поляризация происходит также при двойном лучепреломлении в *анизотропных* кристаллах. К таким кристаллам относятся все кристаллы, решетка которых не является кубической. Анизотропия кристаллов проявляется, в частности, в том, что их оптические свойства зависят от направления распространения света. Если на поверхность кристалла падает узкий пучок естественного света, то после преломления он разделится на два луча (рис. 14.8). Оба луча линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях. Во всяком двоякопреломляющем кристалле существует одно (а иногда два) направление, вдоль которого не происходит двойного лучепреломления. Это направление называется *оптической осью* кристалла. Если такое направление одно, кристалл называется *одноосным*. Плоскость, содержащая падающий на кристалл луч света и оптическую ось, называется *главным сечением* кристалла для данного луча.

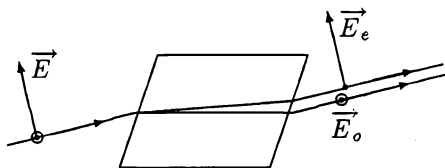


Рис. 14.8. Двойное лучепреломление

Лучи, образующиеся при двойном лучепреломлении в одноосном кристалле, имеют следующие свойства. Один из лучей подчиняется обычным законам преломления. Такой луч называют *обыкновенным*. Этот луч лежит в плоскости падения. Для света, который распространяется вдоль обыкновенного луча, показатель преломления  $n_o$  – величина постоянная, не зависящая от угла падения. Следовательно, скорость распространения света в кристалле вдоль этого луча не зависит от его направления. Электрический вектор  $\vec{E}$  в обыкновенном луче колеблется перпендикулярно главному сечению.

Второй луч называют *необыкновенным*. Для него не выполняются обычные законы преломления. Этот луч, как правило, не лежит в плоскости падения. Для света, который распространяется вдоль необыкновенного луча, показатель преломления зависит от угла падения. Даже при нормальном падении света на поверхность кристалла необыкновенный луч, вообще говоря, отклоняется от первоначального направления. Скорость распространения света в кристалле вдоль необыкновенного луча зависит от его направления. Колебания вектора  $\vec{E}$  в необыкновенном луче происходят в главном сечении кристалла. При распространении света вдоль оптической оси оба луча совпадают, а скорость света не зависит от направления вектора  $\vec{E}$ . При распространении света в любом другом направлении его скорость и показатель преломления вдоль необыкновенного луча отличаются от соответствующих значений для обыкновенного луча. То значение показателя преломления света, распространяющегося вдоль необыкновенного луча, которое максимально отличается от  $n_o$ , обозначают  $n_e$ .

Устройства для получения линейно поляризованного света из естественного называют *поляризаторами*. В некоторых анизотропных кристаллах один из лучей сильно поглощается, и на выходе из кристалла остается один, линейно поляризованный луч. Указанное свойство используется в устройствах, которые называют *поляроидами*. Поляририд представляет собой прозрачную пленку, в которую вкраплены одинаково ориентированные мельчайшие двоякопреломляющие кристаллики.

Получать линейно поляризованный свет можно также с помощью поляризационных призм, изготовленных из двоякопреломляющих кристаллов. На практике часто используют один из таких поляризаторов, который называют призмой Николя.

Поляризаторы (стопа Столетова, поляризационные призмы, поляриды и др.) могут использоваться также для анализа поляризованного света. При этом их называют *анализаторами*.

Идеальный поляризатор полностью пропускает излучение, в котором вектор  $\vec{E}$  колеблется в определенной плоскости, называемой *главной плоскостью* поляризатора, и полностью задерживает излучение, в котором вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен этой плоскости. Если на такой поляризатор падает естественный свет интенсивности  $I_0$ , то интенсивность линейно поляризованного света, выходящего из поляризатора, будет равна

$$I = \frac{I_0}{2}. \quad (14.11)$$

Пусть на поляризатор падает линейно поляризованный свет интенсивности  $I_0$ , для которого вектор  $\vec{E}_0$  лежит в плоскости, составляющей угол  $\varphi$  с главной плоскостью поляризатора (рис. 14.9). Вектор  $\vec{E}_0$  в падающем луче можно представить в виде суммы двух векторов  $\vec{E}_{\parallel}$  и  $\vec{E}_{\perp}$ , первый из которых лежит в главной плоскости поляризатора, а второй к этой плоскости перпендикулярен. Свет, характеризуемый вектором  $\vec{E}_{\parallel}$ , пройдет через идеальный поляризатор без изменения, а свет, характеризуемый вектором  $\vec{E}_{\perp}$ , будет им полностью поглощен. Амплитуда колебаний вектора  $\vec{E}_{\parallel}$  будет

$$E_{\parallel} = E_0 \cos \varphi,$$

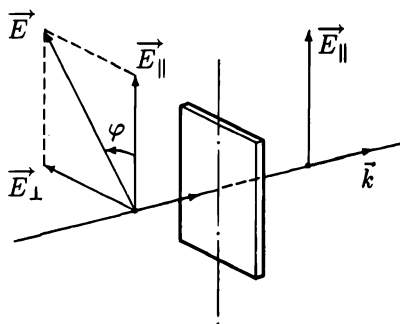


Рис. 14.9.

К формулировке закона Малюса

где  $E_0$  – амплитуда колебаний вектора  $\vec{E}_0$  в падающем линейно поляризованном свете. Так как интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды колебаний вектора  $\vec{E}$ , интенсивность света, прошедшего через идеальный поляризатор, будет

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (14.12)$$

Это соотношение носит название *закона Малюса*.

## 14.5. Интерференция поляризованных лучей

Напомним, что функции (14.1) описывают эллиптически поляризованный свет только тогда, когда описываемые ими волны являются когерентными, т.е. при условии (14.2). В зависимости от того, какие значения принимает разность фаз  $\alpha_z - \alpha_x$ , свет может быть линейно поляризован, поляризован по кругу или, в общем случае, по эллипсу. Изменив каким-либо образом разность фаз двух когерентных линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях световых волн, можно изменить характер поляризации суперпозиции этих волн. Например, из волны, поляризованной по кругу, можно получить линейно поляризованную волну и наоборот.

При нормальном падении света на грань анизотропного кристалла, которая параллельна его оптической оси, обыкновенный и необыкновенный лучи в кристалле не разделяются, но свет распространяется вдоль луча с различными скоростями в зависимости от ориентации вектора напряженности электрического поля. В таком случае свет удобно рассматривать как суперпозицию двух линейно поляризованных волн, в которых векторы напряженности электрического поля взаимно ортогональны. Вектор  $\vec{E}_o$  напряженности электрического поля для обыкновенного луча перпендикулярен главному сечению, т.е. плоскости, содержащей падающий на кристалл луч света и оптическую ось. Вектор  $\vec{E}_e$  напряженности электрического поля для необыкновенного луча будет лежать в этой плоскости. Пусть кристалл представляет собой пластинку, стороны которой параллельны его оптической оси. Толщина пластинки равна  $d$ . Для обыкновенного луча оптическая толщина пластинки равна  $n_o d$ , а для необыкновенного —  $n_e d$ . Вследствие различия этих длин разность фаз рассматриваемых волн после прохождения пластинки изменится на величину

$$\Delta\varphi = k(n_o - n_e)d. \quad (14.13)$$

Вырезанная параллельно оптической оси кристаллическая пластинка, для которой  $(n_o - n_e)d = \lambda/4$ , называется *пластинкой в четверть волны*. После прохождения такой пластинки разность фаз (14.13) будет

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Направим ось  $y$  перпендикулярно поверхности пластинки, ось  $z$  — вдоль ее оптической оси. Пусть на пластинку нормально падает волна

$$\begin{cases} E_x = E_m \cos(\omega t - ky + \alpha), \\ E_y = 0, \\ E_z = E_m \cos(\omega t - ky + \alpha). \end{cases} \quad (14.14)$$

Это есть линейно поляризованная волна, так как разность фаз между взаимно перпендикулярными колебаниями равна нулю. При этом вектор  $\vec{E}$  образует с осью  $z$ , т.е. с оптической осью кристалла угол  $\pi/4$ . На выходе из кристаллической пластинки в четверть волны разность фаз между волнами с различными направлениями векторов напряженности электрического поля будет равна  $\pi/2$ . Следовательно, вышедший из пластинки свет будет поляризован по кругу, так как амплитуды этих волн одинаковы.

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ

## 15.1. Дисперсия света

Дисперсия света была открыта И.Ньютоном в 1672 г. при изучении прохождения луча солнечного света через стеклянную призму. Когда луч белого света проходит через призму, он разделяется на лучи разного цвета (рис. 15.1). Ньютон выделил в спектре белого света семь цветов радуги.

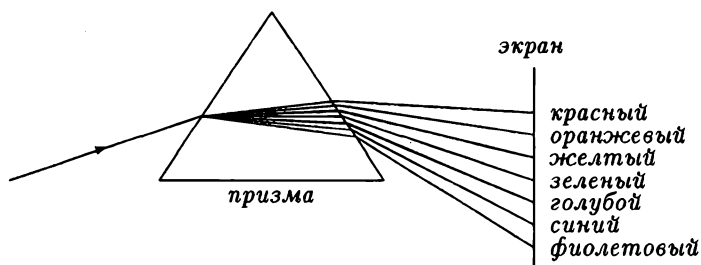


Рис. 15.1. Дисперсия света

Ньютон проделал целую серию различных опытов и пришел к выводу, что в самом солнечном свете содержатся лучи всех цветов, а стеклянная призма только разделяет лучи разного цвета, так как они по-разному преломляются на границе раздела стекла и воздуха.

С точки зрения волновой оптики дисперсия света является следствием зависимости показателя преломления  $n$  вещества от частоты (или длины) световой волны:

$$n = n(\omega). \quad (15.1)$$

Задача теории – получить аналитическое выражение зависимости (15.1), исходя из представлений о воздействии света на вещество и соответствующих законов физики.

## 15.2. Электронная теория дисперсии

Рассмотрим в общих чертах, как происходит взаимодействие электромагнитных волн с веществом. Электрическое поле волны действует на заряженные частицы, из которых состоит вещество. Заметнее всего оно действует на электроны, чем на атомные ядра, так как масса ядра во

много раз больше массы электрона. Переменное поле волны вынуждает электроны в атомах и молекулах вещества совершать колебания с частотой волны  $\omega$ . Колеблющиеся электроны сами излучают электромагнитные волны, частота которых равна частоте колебаний электронов. Таким образом, падающая на вещество волна принуждает само вещество испускать волны той же частоты. Причем испускаемые веществом волны распространяются во всех направлениях. Некоторые из них движутся навстречу падающей волне. Это так называемые отраженные волны. Отраженная волна представляет собой суперпозицию волн, испущенных всеми атомами вещества. Но кажется, что падающая волна отражается от поверхности тела.

Точный расчет показателя преломления очень сложен. Поэтому в этой главе будет изложена теория дисперсии света, которая справедлива только для веществ с показателем преломления, близким к единице. Такими показателями преломления характеризуются, например, разреженные газы. В этом случае излучение самого вещества является достаточно слабым и его можно не учитывать.

Прежде чем исследовать воздействие электромагнитной волны на вещество, необходимо представить себе строение молекул, из которых состоит это вещество. Каждая молекула состоит из одного или нескольких положительно заряженных ядер и определенного количества электронов. Так как масса ядер велика по сравнению с массой электронов, смещением ядер можно пренебречь и считать, что подвижными частицами в молекуле являются только электроны. Электрон в молекуле удерживается в ее пределах некоторой силой. Самое простое выражение для такой силы имеет вид

$$\vec{F} = -K \vec{r}, \quad (15.2)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор электрона;  $K$  – положительный коэффициент. Это есть центральная сила, притягивающая электрон к точке, в которой находится начало его радиус-вектора. Предположим, что движение электрона в молекуле можно описать посредством второго закона Ньютона

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

В проекциях на ось  $y$  закон Ньютона с учетом формулы (15.2) можно записать так:

$$m \ddot{y} = -K y.$$

Это уравнение удобно преобразовать к виду

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad (15.3)$$



где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}. \quad (15.4)$$

Уравнение (15.3) есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Таким образом, согласно принятой модели электрон в молекуле совершает гармонические колебания с частотой  $\omega_0$ .

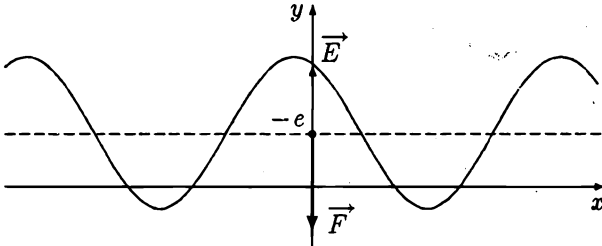


Рис. 15.2. Гармоническая волна вынуждает электрон в молекуле совершать колебания около положения равновесия

Пусть гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $x$  (рис. 15.2). Если вектор напряженности электрического поля этой волны направлен по оси  $y$ , то такая волна будет описываться функцией

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx), \quad (15.5)$$

где  $E_m$  – амплитуда волны,  $\omega$  – ее частота.

На электрон, движущийся в электромагнитном поле со скоростью  $\vec{v}$ , действует сила Лоренца

$$\vec{F} = -e \left( \vec{E} + [\vec{v} \vec{B}] \right). \quad (15.6)$$

Найдем отношение модулей сил

$$\vec{F}_э = -e \vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{F}_м = -e [\vec{v} \vec{B}],$$

с которыми на электрон действуют магнитное и электрическое поля волны соответственно. С учетом соотношения (11.30) получим

$$\frac{F_м}{F_э} = \frac{v B_m}{E_m} = \frac{v \mu H_m}{E_m} = v \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{v}{c},$$

где

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

– скорость света. Так как скорость электрона в молекуле существенно меньше скорости света, действием на него магнитного поля волны можно пренебречь.

Итак, на электрон в молекуле, на которую падает электромагнитная волна, будут действовать две силы. Первая сила удерживает электрон в пределах молекулы, а вторая есть сила, с которой на него действует электрическое поле волны. Рассматриваемая молекула находится в начале координат. Поэтому проекция электрической силы на ось  $y$  будет

$$F_y = -e E_y(t, x = 0) = -e E_m \cos \omega t. \quad (15.7)$$

При этом второй закон Ньютона в проекциях на ось  $y$  будет иметь вид

$$m \ddot{y} = -K y - e E_m \cos \omega t. \quad (15.8)$$

Запишем это уравнение так:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{e E_m}{m} \cos \omega t. \quad (15.9)$$

Частное решение полученного уравнения, описывающее вынужденные колебания электрона под действием электромагнитной волны, есть гармоническая функция с частотой волны:

$$y(t) = A \cos \omega t, \quad (15.10)$$

где  $A$  – амплитуда вынужденных колебаний. Подставив эту функцию в уравнение (15.9), найдем амплитуду колебаний электрона в молекуле под действием переменного электрического поля волны:

$$A = \frac{e E_m}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (15.11)$$

Согласно этой формуле в том случае, когда частота волны  $\omega$  равна частоте  $\omega_0$  собственных колебаний электрона, амплитуда его вынужденных колебаний становится бесконечно большой. Очевидно, что в действительности так быть не может. Однако продолжим вычисления.

Подставим выражение (15.11) в формулу (15.10). Получим следующую зависимость:

$$y(t) = \frac{e}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} E_y(t). \quad (15.12)$$

Как видно из этой формулы, под действием электрического поля волны электрон в молекуле смещается из положения равновесия вдоль направления вектора напряженности электрического поля. В векторной форме формула (15.12) имеет вид

$$\vec{r} = \frac{e}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \vec{E}. \quad (15.13)$$

Смещения электронов в молекуле из положений равновесия приводят к ее поляризации. Степень поляризации молекулы характеризуется электрическим дипольным моментом

$$\vec{p} = -e \sum_i \vec{r}_i, \quad (15.14)$$

где  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор одного из электронов под номером  $i$ . Смещение электрона под действием электрического поля волны описывается формулой (15.13). Таким образом, для дипольного момента молекулы можно записать следующее выражение:

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m} \sum_i \frac{1}{\omega_{oi}^2 - \omega^2} \vec{E}, \quad (15.15)$$

где  $\omega_{oi}$  – частота собственных колебаний  $i$ -го электрона в молекуле. Причем эта формула справедлива для любой молекулы вещества, где бы она ни находилась.

Если все молекулы вещества одинаковы, то поляризованность вещества, т.е. дипольный момент единицы объема, будет равен произведению дипольного момента одной молекулы на их концентрацию:

$$\vec{P} = n \vec{p}. \quad (15.16)$$

Как видно из формул (15.15) и (15.16), вектор  $\vec{P}$  поляризованности вещества коллинеарен вектору  $\vec{E}$  напряженности электрического поля, т.е. справедливо соотношение (2.24)

$$\vec{P} = \epsilon_o \chi_e \vec{E},$$

из которого найдем диэлектрическую восприимчивость вещества  $\chi_e$ . Затем по формуле (2.27) найдем относительную диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e.$$

В результате придем к формуле

$$\epsilon_r = 1 + \frac{e^2 n}{\epsilon_o m} \sum_i \frac{1}{\omega_{oi}^2 - \omega^2}. \quad (15.17)$$

Показатель преломления связан с относительной проницаемостью вещества соотношением (11.38)

$$n = \sqrt{\epsilon_r}. \quad (15.18)$$

Формулы (15.17) и (15.18) определяют искомую зависимость показателя преломления вещества от частоты электромагнитного излучения. График этой зависимости показан на рис. 15.3 для случая, когда частота собственных колебаний электронов принимает только два значения  $\omega_{o_1}$  и  $\omega_{o_2}$ .

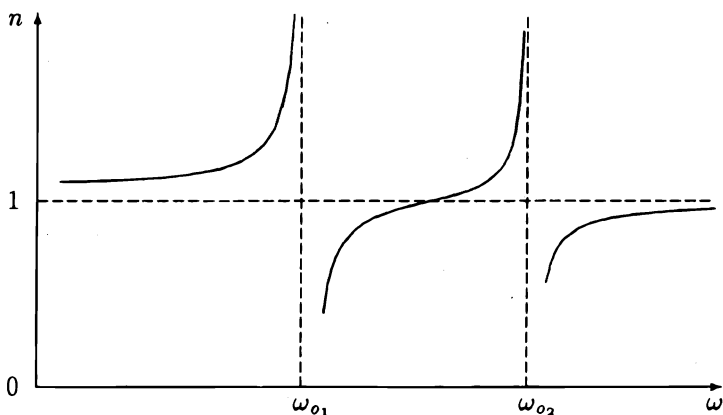


Рис. 15.3. Идеализированная зависимость показателя преломления от частоты электромагнитного излучения

Для всех прозрачных веществ частоты собственных колебаний электронов в атомах и молекулах больше частот видимого электромагнитного излучения. Так, например, для воздуха и многих других газов частоты собственных колебаний электронов соответствуют частотам ультрафиолетового излучения. Таким образом, для этих веществ в видимой части спектра  $\omega \ll \omega_{o_i}$ . Как видно из графика на рис. 15.3, при этих частотах показатель преломления будет больше единицы и является монотонно возрастающей функцией частоты  $\omega$ . Частота фиолетового света больше, чем частота красного. Поэтому и показатель преломления фиолетового света больше, чем красного. По этой причине лучи фиолетового света отклоняются призмой сильнее, чем лучи красного света (рис. 15.1).

Развитая теория имеет существенный недостаток. Согласно этой теории в том случае, когда частота  $\omega$  падающего на вещество излучения приближается к одной из частот  $\omega_{o_i}$  собственных колебаний электронов, показатель преломления вещества стремится к  $\pm\infty$ . Разумеется, этот вывод теории лишен физического смысла. Указанный недостаток теории может быть исправлен, если учесть, что свободные колебания электронов должны быть затухающими, т.е. электрон, совершающий свободные колебания, должен постепенно терять свою энергию. В таком случае

амплитуда вынужденных колебаний электрона ни при каких частотах  $\omega$  не будет бесконечной, а зависимость  $n = n(\omega)$  показателя преломления от частоты волны будет подобна зависимости, график которой изображен на рис. 15.4. Из этого рисунка видно, что при некоторых частотах функция  $n = n(\omega)$  является возрастающей. Такую дисперсию называют нормальной. На тех частотных интервалах, где функция  $n = n(\omega)$  убывает, дисперсию называют аномальной.

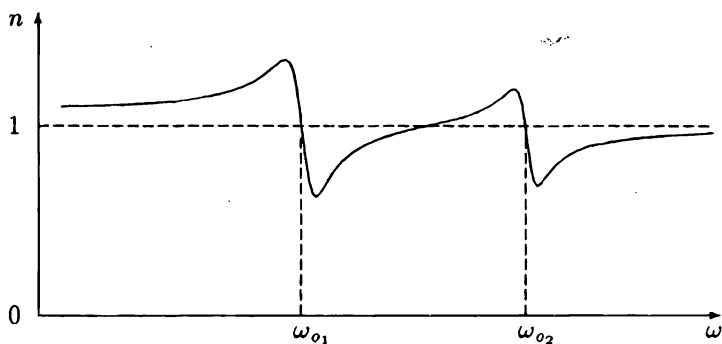


Рис. 15.4. Зависимость показателя преломления от частоты

По определению показатель преломления вещества есть отношение скорости света в вакууме  $c$  к скорости  $v$  электромагнитной волны в веществе:

$$n = \frac{c}{v}. \quad (15.19)$$

Изображенная на рис. 15.4 зависимость показателя преломления от частоты такова, что при некоторых значениях частоты показатель преломления оказывается меньше единицы. Согласно формуле (15.19) волны с такими частотами распространяются в веществе со скоростью  $v$ , большей скорости света в вакууме:  $v > c$ . Этот результат требует некоторых пояснений.

### 15.3. Групповая скорость волны

При измерении скорости электромагнитной волны применяют методы, в которых используют эффект запаздывания сигналов, посылаемых с этой волной. Сигнал посылается к некоторому объекту, расстояние  $r$  до которого известно. Измеряется время  $\tau$ , по прошествии которого отраженный от объекта сигнал возвращается обратно. Скорость волны вычисляют по формуле

$$v = \frac{2l}{\tau}.$$

Что такое сигнал? Сигнал – это "метка", которую необходимо сделать на волне для того, чтобы определить момент времени, когда волна была отправлена к исследуемому объекту. Функция (15.5)

$$E_y = E_m \cos(\omega t - k x)$$

описывает идеальную гармоническую волну. Эта волна распространяется бесконечно долго вдоль бесконечного луча. Такая волна не имеет на себе никаких "меток" и не может служить в качестве сигнала при измерении скорости волны. Сигналом может служить, например, "половина" гармонической волны, которая испускается генератором, начавшим работать в некоторый момент времени  $t_0$ . До этого момента генератор не работал. "Половина" гармонической волны уже не гармоническая волна. Волна сложной формы может быть представлена в виде суммы гармонических волн. В самом простом случае в такой сумме будет только два слагаемых. Рассмотрим волну, которая является суперпозицией двух гармонических волн одинаковой амплитуды:

$$E_y = E_y^{(1)} + E_y^{(2)},$$

где

$$E_y^{(1)} = E_m \cos(\omega_1 t - k_1 x), \quad E_y^{(2)} = E_m \cos(\omega_2 t - k_2 x).$$

Преобразуем эту сумму при помощи тригонометрического тождества

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Получим следующее выражение:

$$E_y = 2 E_m \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1) t - (k_2 - k_1) x}{2} \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2) t - (k_1 + k_2) x}{2}.$$

Пусть частоты  $\omega_1, \omega_2$  и волновые числа  $k_1, k_2$  незначительно отличаются друг от друга. т.е. положим

$$\omega_2 - \omega_1 = 2 d\omega, \quad k_2 - k_1 = 2 dk,$$

где  $d\omega$  и  $dk$  – бесконечно малые величины. Полусуммы частот и волновых чисел обозначим так:

$$\omega = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2), \quad k = \frac{1}{2} (k_1 + k_2).$$

Теперь сумма двух гармонических волн принимает вид

$$E_y = 2 E_m \cos(d\omega \cdot t - dk \cdot x) \cos(\omega t - k x). \quad (15.20)$$

Это выражение представляет собой функцию от времени  $t$  и координаты  $x$ . График зависимости напряженности  $E_y$  электрического поля от  $x$  при  $t = \text{const}$  показан на рис. 15.5.

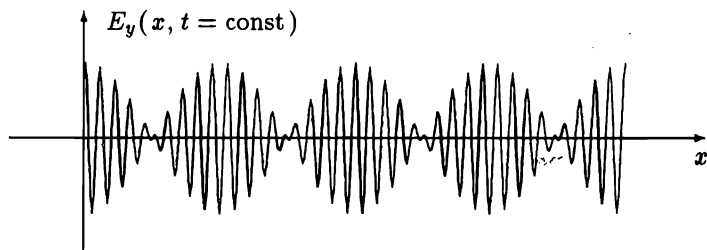


Рис. 15.5. Сумма двух гармонических волн

Волна, описываемая функцией (15.20), называется модулированной. Она содержит в себе две волны, одна из которых

$$A \cos(\omega t - kx) \quad (15.21)$$

называется несущей волной. Амплитуда

$$A = 2 E_m \cos(dw \cdot t - dk \cdot x) \quad (15.22)$$

также является волной. Эту волну называют модулирующей волной, или просто модуляцией. Модулирующая волна имеет частоту  $d\omega$ , которая очень мала по сравнению с частотой  $\omega$  несущей волны. При этом длина модулирующей волны много больше длины несущей волны.

Скорость несущей волны

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (15.23)$$

называют фазовой скоростью, а скорость модулирующей волны

$$u = \frac{d\omega}{dk} \quad (15.24)$$

– групповой скоростью. Вообще говоря, эти скорости не совпадают.

Модулированная волна может служить сигналом, так как модулирующая ее волна несет информацию. Эта информация распространяется вдоль луча с групповой скоростью  $u$ . Таким образом, при измерении скорости волны по времени запаздывания сигнала получают значение групповой скорости. Групповая скорость всегда меньше скорости света в пустоте, а фазовая скорость может быть даже больше скорости света.

## 15.4. Поглощение света

Когда гармоническая электромагнитная волна частоты  $\omega$  проходит через вещество, она принуждает электроны в молекулах совершать колебания с такой же частотой. При этом волна постепенно теряет свою энергию, передавая ее колеблющимся электронам. Колеблющиеся электроны испускают электромагнитные волны, которые уносят с собой часть их энергии. Некоторая часть энергии колебаний электронов в молекулах переходит в энергию беспорядочного теплового движения самих молекул. Вследствие этих процессов интенсивность электромагнитной волны уменьшается по мере ее продвижения через вещество. Это явление называют поглощением излучения веществом.

Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в веществе. Направим ось  $x$  вдоль одного из лучей в сторону распространения волны. Если вещество поглощает энергию волны, то ее интенсивность  $I$  будет монотонно убывающей функцией координаты  $x$ :

$$I = I(x).$$

Приращение  $dI$  этой функции, соответствующее приращению  $dx$  координаты, будет отрицательной величиной:  $dI < 0$ . При этом абсолютное значение  $|dI|$  приращения интенсивности должно быть прямо пропорционально длине интервала  $dx$  и самой интенсивности. Таким образом, приращение интенсивности волны будет

$$dI = -\alpha I dx, \quad (15.25)$$

где коэффициент пропорциональности  $\alpha$  называется коэффициентом поглощения. Эта величина является характеристикой вещества.

Равенство (15.25) есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, которое следует записать так:

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dx.$$

Интегрирование приводит к функции

$$I(x) = C e^{-\alpha x},$$

где  $C$  – постоянная интегрирования. Пусть значение координаты  $x = 0$  соответствует фазовой плоскости, на которой интенсивность волны принимает значение  $I_0$ :

$$I(0) = I_0. \quad (15.26)$$



При помощи этого граничного условия нетрудно установить, что постоянная  $C = I_0$ . Таким образом, получим зависимость

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (15.27)$$

которая выражает закон Бугера. Если коэффициент поглощения  $\alpha$  равен нулю, то интенсивность волны будет постоянной величиной:  $I = I_0$ . Это означает, что излучение проходит через вещество без поглощения. Такие вещества называют прозрачными для излучения. Чем больше значение коэффициента поглощения  $\alpha$  в формуле (15.27), тем быстрее убывает интенсивность волны при ее распространении через вещество.

Коэффициент поглощения  $\alpha$  определяется свойствами вещества и является некоторой функцией частоты  $\omega$  проходящего через вещество излучения:  $\alpha = \alpha(\omega)$ . Вынужденные колебания электронов под действием гармонической волны происходят с наибольшей амплитудой в том случае, когда частота волны  $\omega$  близка к одной из частот  $\omega_{oi}$ , собственных колебаний электронов. При этом электроны забирают у волны больше всего энергии. Когда частота волны  $\omega$  далека от частот  $\omega_{oi}$ , амплитуда вынужденных колебаний электронов очень мала, т.е. такая волна не может заставить электроны колебаться со своей частотой и не передает им свою энергию. Волны с такими частотами проходят через вещество без потерь энергии, т.е. вещество их не поглощает и является для них прозрачным ( $\alpha = 0$ ).

Интервалы частот, в которых коэффициент поглощения заметно отличается от нуля, называют полосами поглощения. Частоты  $\omega_{oi}$ , собственных колебаний электронов лежат в этих интервалах. Полосы поглощения электромагнитных волн газами очень узкие. Поэтому спектры поглощения излучения газами называют линейчатыми. Спектры поглощения излучения твердыми телами, жидкостями и газами при высоких давлениях содержат широкие полосы поглощения. Расширение полос поглощения при увеличении плотности вещества происходит из-за уменьшения среднего расстояния между атомами, что приводит к более интенсивному их взаимодействию.

Проводники практически непрозрачны для электромагнитного излучения, так как они содержат в себе носители тока. Когда электромагнитная волна проникает на некоторую глубину в проводник, она заставляет носители тока двигаться, т.е. волна возбуждает в проводнике переменные электрические токи. Это приводит к нагреванию проводника. Таким образом, энергия волны посредством носителей тока переходит в тепловую энергию. Вследствие этого интенсивность волны очень быстро уменьшается при ее продвижении в глубь проводника.

# КВАНТОВАЯ ОПТИКА

## ГЛАВА 16

### ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

---

#### 16.1. Взаимодействие излучения с веществом и его характеристики

Установлено, что нагретые тела испускают электромагнитные волны всех частот. Это излучение называют *тепловым*. Почему нагретые тела испускают электромагнитные волны? Вещество состоит из заряженных частиц: атомных ядер и электронов. Если бы эти частицы были неподвижны, то они создавали бы в пространстве постоянное электрическое поле. Движущиеся ускоренно заряженные частицы создают переменное электромагнитное поле и являются источниками электромагнитных волн. В нагретых телах заряженные частицы совершают беспорядочное тепловое движение, в результате которого эти тела излучают электромагнитные волны. Частоты теплового электромагнитного излучения соответствуют частотам колебаний зарядов в атомах и молекулах вещества, а интенсивность излучения определяется амплитудами этих колебаний. При испускании излучения нагретым телом происходит преобразование энергии теплового движения заряженных частиц в энергию электромагнитного излучения. При поглощении телом падающего на него излучения энергия последнего переходит в тепловую энергию атомов и молекул. Не все излучение, падающее на поверхность тела, им поглощается. Некоторая часть этого излучения отражается от поверхности тела. Это происходит потому, что под действием падающей на вещество электромагнитной волны электроны, содержащиеся в атомах и молекулах вещества, совершают вынужденные колебательные движения, частоты которых совпадают с частотами падающей волны. При этом атомы и молекулы испускают электромагнитные волны тех же частот. Это и есть отраженное излучение.

Рассмотрим величины, которые характеризуют взаимодействие вещества с тепловым электромагнитным излучением. Одной из таких ве-

личин является *энергетическая светимость*  $M$ . Пусть с небольшого участка поверхности нагретого тела за время  $dt$  испускается излучение, энергия которого равна  $dW_{ucn}$ . Это излучение распространяется с данного участка поверхности во всех направлениях в полупространство, которое определяется значением телесного угла  $2\pi$ . Очевидно, что энергия излучения должна быть пропорциональна площади  $dS$  рассматриваемого участка поверхности и времени  $dt$ :

$$dW_{ucn} = M dS dt. \quad (16.1)$$

Здесь коэффициент пропорциональности  $M$  называется *энергетической светимостью* данного участка поверхности тела. Согласно этому определению энергетическая светимость  $M$  есть энергия теплового электромагнитного излучения, испущенного за единицу времени с единицы площади поверхности тела во всех направлениях (т.е. в пределах телесного угла  $2\pi$ ).

Тепловое излучение представляет собой совокупность электромагнитных волн всех частот  $\omega$  ( $0 < \omega < \infty$ ). Количество энергии  $dW_{ucn}(\omega)$ , уносимой за время  $dt$  с участка поверхности площадью  $dS$  электромагнитными волнами, частоты которых лежат в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , будет пропорционально ширине этого интервала  $d\omega$ :

$$dW_{ucn}(\omega) = M(\omega) d\omega dS dt, \quad (16.2)$$

где  $M(\omega)$  – коэффициент пропорциональности, называемый *испускательной способностью* тела, или *спектральной энергетической светимостью*. Это есть энергетическая светимость, приходящаяся на единичный интервал частот.

Интегрирование выражения (16.2) по  $\omega$  в пределах от 0 до  $\infty$  приводит к энергии (16.1). В результате получим формулу

$$M = \int_0^{\infty} M(\omega) d\omega, \quad (16.3)$$

которая связывает энергетическую светимость  $M$  и испускательную способность  $M(\omega)$ .

Пусть  $dW_{над}(\omega)$  есть энергия электромагнитного излучения с частотами в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , падающего за время  $dt$  на рассматриваемый участок поверхности площадью  $dS$  со всех направлений (т.е. из телесного угла  $2\pi$ ). Обозначим часть этой энергии, которая соответствует излучению, поглощаемому телом, как  $dW_{ногл}(\omega)$ . Отношение

$$\alpha(\omega) = \frac{dW_{ногл}(\omega)}{dW_{над}(\omega)} \quad (16.4)$$

называется *поглощательной способностью* данного участка поверхности тела.

Поверхность тела называется *абсолютно черной*, если на этом участке поверхности тело поглощает все падающее на него излучение. Для такого участка поверхности тела поглощательная способность равна единице:  $\alpha(\omega) \equiv 1$ .

Энергия  $dW_{\text{пад}}(\omega)$  излучения, падающего на рассматриваемый участок поверхности тела со всех направлений, пропорциональна величинам  $d\omega$ ,  $dS$  и  $dt$ , если эти величины достаточно малы:

$$dW_{\text{пад}}(\omega) = E(\omega) d\omega dS dt. \quad (16.5)$$

Коэффициент пропорциональности  $E(\omega)$  в этой формуле называется *освещенностью* поверхности тела монохроматическим излучением, или *спектральной освещенностью*. В соответствии с определением (16.5) освещенность  $E(\omega)$  есть энергия излучения с частотами в единичном интервале вблизи частоты  $\omega$ , падающего за единицу времени на единицу площади из полупространства (т.е. из телесного угла  $2\pi$ ). Полная (интегральная) освещенность  $E$  есть энергия излучения всех частот, падающего за единицу времени на единицу площади из полупространства, т.е.

$$E = \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega. \quad (16.6)$$

Освещенность поверхности направленным излучением иначе называют *интенсивностью*. Излучение, спектральная интенсивность которого во всех направлениях одинакова, называется *изотропным*.

Рассмотрим электромагнитное излучение, заполняющее некоторый объем пространства  $V$ . Это излучение представляет собой совокупность электромагнитных волн различных частот, которые со скоростью света проносятся через выделенную часть пространства во всех направлениях. Пусть  $W$  – энергия излучения в объеме  $V$ . Плотностью энергии излучения  $w$  называют отношение его энергии к объему, который оно заполняет:

$$w = \frac{W}{V}. \quad (16.7)$$

Спектральная плотность энергии излучения  $w = w(\omega)$  по определению такова, что выражение

$$dW = w(\omega) V d\omega \quad (16.8)$$

есть энергия излучения в объеме  $V$  с частотами в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ . Интегрирование этого выражения по частотам приводит к энергии  $W$

излучения всех частот. При этом придем к равенству

$$w = \int_0^{\infty} w(\omega) d\omega. \quad (16.9)$$

В отличие от спектральной плотности энергии  $w(\omega)$  плотность  $w$  называют интегральной.

Очевидно, чем больше плотность энергии излучения, тем больше освещенность поверхности, на которую падает это излучение. Иначе говоря, освещенность прямо пропорциональна плотности энергии. В самом деле, можно доказать, что освещенность поверхности изотропным излучением связана с плотностью энергии этого излучения соотношением

$$E = \frac{1}{4} c w. \quad (16.10)$$

Аналогичное соотношение справедливо для спектральных величин

$$E(\omega) = \frac{1}{4} c w(\omega). \quad (16.11)$$

## 16.2. Законы равновесного теплового излучения

Пусть внутри некоторого тела имеется полость, стенки которой могут быть изготовлены из различных материалов. Внутри полости расположено несколько других тел. Поверхности этих тел и стенок полости постоянно испускают и поглощают электромагнитные волны. Таким образом, посредством теплового излучения происходит обмен энергией между телами и различными участками стенок полости. Если температура  $T$  стенок полости поддерживается постоянной, то со временем между телами, стенками полости и излучением в полости установится равновесие, которое выражается в том, что для любого участка поверхности тел и стенок энергия  $dW_{\text{нозл}}(\omega)$  поглощенного излучения равна энергии  $dW_{\text{исп}}(\omega)$  излучения, испущенного за то же время:

$$dW_{\text{нозл}}(\omega) = dW_{\text{исп}}(\omega). \quad (16.12)$$

В таком случае тепловое излучение называется *равновесным*.

Используя введенные выше определения (16.4) и (16.5), представим энергию  $dW_{\text{нозл}}(\omega)$  поглощенного излучения как

$$dW_{\text{нозл}}(\omega) = \alpha(\omega) dW_{\text{над}}(\omega) = \alpha(\omega) E(\omega) d\omega dS dt.$$

Для равновесного теплового излучения в силу условия (16.12) энергия  $dW_{\text{погл}}(\omega)$  поглощенного излучения равна энергии  $dW_{\text{исп}}(\omega)$  испущенного излучения, которая определяется формулой (16.2). Приравняв эти выражения, придем к соотношению

$$\alpha(\omega, T) E(\omega, T) = M(\omega, T),$$

в котором поглощательная и испускательная способности тела и его освещенность тепловым излучением соответствуют температуре  $T$ . Поглощательная  $\alpha(\omega, T)$  и испускательная  $M(\omega, T)$  способности являются характеристиками того или иного участка поверхности тела и могут принимать различные значения для различных участков поверхности. Тогда как спектральная освещенность  $E(\omega, T)$  является характеристикой теплового излучения и не зависит от того, на какую поверхность это излучение падает. Таким образом, справедливо утверждение: *отношение испускательной способности рассматриваемого участка поверхности тела к его поглощательной способности не зависит от химического состава тела и является для всех веществ одной и той же функцией частоты  $\omega$  и температуры  $T$ :*

$$\frac{M(\omega, T)}{\alpha(\omega, T)} = E(\omega, T). \quad (16.13)$$

Это закон установил в 1859 г. немецкий физик Густав Кирхгоф (1824 – 1887).

Для абсолютно черного тела  $\alpha(\omega, T) \equiv 1$  и закон Кирхгофа принимает вид

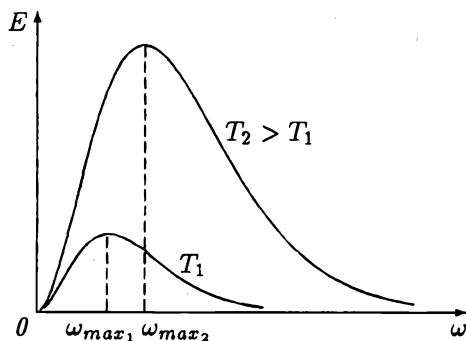
$$M_{\text{абс. черн. т.}}(\omega, T) = E(\omega, T), \quad (16.14)$$

т.е. испускательная способность абсолютно черного тела равна спектральной освещенности его поверхности равновесным тепловым излучением, которое имеет ту же температуру.

Абсолютно черных тел в природе не существует. Однако представим себе тело, внутри которого имеется полость. Электромагнитное излучение может проникать в полость и выходить из нее через небольшое отверстие. Луч света, прошедший через это отверстие в полость, после многократных отражений от ее стенок практически полностью ими поглощается независимо от того, какой поглощательной способностью обладает материал, из которого изготовлены стенки полости. Поэтому только очень незначительная часть попавшего внутрь полости излучения выйдет из отверстия наружу. По этой причине даже в ясный солнечный

день окна домов кажутся черными, несмотря на то, что в комнатах много солнечного света. Таким образом, воображаемая поверхность, затягивающая малое отверстие в стенке полости, является почти идеальной моделью абсолютно черного тела.

Итак, из отверстия в стенках полости, температура которых поддерживается постоянной, выходит тепловое излучение, аналогичное по своим характеристикам равновесному излучению от абсолютно черного тела. Это излучение при помощи дифракционной решетки разлагают



в спектр и измеряют интенсивность излучения (т.е. энергию излучения, падающего за единицу времени на единицу площади), приходящуюся на различные участки спектра. В результате получают зависимость (16.14) испускательной способности абсолютно черного тела от частоты при различных температурах. Такие зависимости для двух значений температуры  $T_1$  и  $T_2 > T_1$  приведены на рис. 16.1.

Рис. 16.1. Спектральная освещенность поверхности равновесным излучением

Зависимость  $E = E(\omega, T)$  обладает следующими особенностями. Площадь под кривой, т.е. энергетическая светимость абсолютно черного тела, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры:

$$M_{\text{абс. черн. т.}}(T) = E(T) = \sigma T^4, \quad (16.15)$$

где  $\sigma$  – положительная постоянная. Этот закон экспериментально установил в 1879 г. австрийский физик Йезеф Стефан (1835 – 1893). В 1884 г. его ученик Людвиг Больцман (1844 – 1906) доказал соотношение (16.15) теоретически при помощи принципов термодинамики. Теперь это соотношение называют *законом Стефана – Больцмана*.

В 1893 г. немецкий физик Вильгельм Вин (1864 – 1928) установил, что значение частоты  $\omega_{\text{max}}$ , на которую приходится максимум испускательной способности абсолютно черного тела, увеличивается при его нагревании прямо пропорционально абсолютной температуре (закон смещения Вина):

$$\omega_{\text{max}} \sim T. \quad (16.16)$$

В 1911 году за это открытие и другие исследования теплового излучения Вину была присуждена Нобелевская премия.

### 16.3. Формула Планка

Немецкий ученый Макс Планк (1858 – 1947) предложил гипотезу, согласно которой электромагнитное излучение представляет собой совокупность частиц. Эти частицы были названы *фотонами*, или *квантами света*. Энергия  $\epsilon$  одного фотона и частота  $\omega$  излучения связаны формулой

$$\epsilon = \hbar \omega, \quad (16.17)$$

где коэффициент пропорциональности

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

называют *постоянной Планка*.

Вычисления, основанные на гипотезе о фотонах, привели Планка к следующей зависимости плотности энергии равновесного теплового излучения от частоты и температуры:

$$w(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar \omega / kT} - 1)}. \quad (16.18)$$

При этом согласно соотношению (16.11) спектральная освещенность будет иметь вид

$$E(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4 \pi^2 c^2 (e^{\hbar \omega / kT} - 1)}. \quad (16.19)$$

Выражения (16.18) и (16.19) называют *формулами Планка*. Формула (16.19) с очень высокой точностью описывает экспериментальные зависимости освещенности равновесного теплового излучения от частоты и температуры:  $E = E(\omega, T)$ , представленные на рис. 16.1.

Формулы (16.18) и (16.19) были получены Планком в 1900 г. День 14 декабря 1900 г., когда Планк сделал сообщение в Немецком физическом обществе о получении им этих формул, теперь считают датой рождения квантовой физики. Однако прошли годы прежде, чем гипотеза квантов света привлекла внимание ученых и была ими признана. Только в 1918 г. Планк был удостоен Нобелевской премии.



## ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

(продолжение)

16.4. Освещенность поверхности  
изотропным излучением

Найдем зависимость между плотностью энергии  $w$  изотропного излучения и освещенностью  $E$  какой-либо поверхности таким излучением.

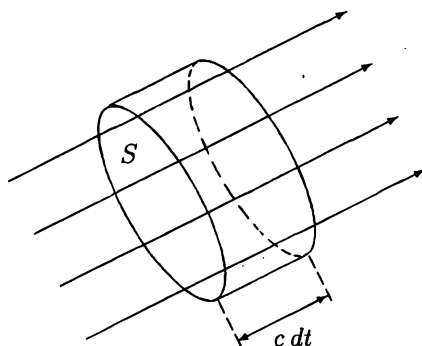


Рис. 16.2. К выводу формулы  $I = c w$

Рассмотрим сначала плоскую электромагнитную волну, плотность энергии которой равна  $w$ , а интенсивность —  $I$ . Построим воображаемый прямой цилиндр, образующая которого совпадает с направлением распространения волны (рис. 16.2). Пусть  $S$  — площадь основания этого цилиндра, а его длина равна  $c dt$ , т.е. расстоянию, которое преодолевает электромагнитная волна за время  $dt$ . По определению интенсивность равна среднему по времени значению энергии, которую переносит волна за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. В соответствии с этим определением, энергия излучения, выходящего из цилиндра за время  $dt$ , равна  $I S dt$ . С другой стороны, эта энергия принадлежит излучению, которое заполняло объем цилиндра, и, переместившись на расстояние  $c dt$ , вышло из него в течение времени  $dt$ . Энергия излучения, заполняющего неко-

торую область пространства, равна произведению плотности энергии  $w$  на объем этой области. В рассматриваемом случае энергия излучения внутри цилиндра будет  $w S c dt$ . Приравняем эти два выражения для энергии. Получим формулу

$$I = c w, \quad (16.20)$$

связывающую плотность энергии и интенсивность плоской электромагнитной волны.

Рассмотрим теперь изотропное электромагнитное излучение, заполняющее небольшой объем пространства  $V$ . Это излучение можно рассматривать как совокупность плоских электромагнитных волн, распространяющихся во всевозможных направлениях. Выделим при помощи "узкого" конуса часть волн, направления распространения которых лежат внутри этого конуса (рис. 16.3). Если телесный угол  $d\Omega$  конуса достаточно мал, то выделенные волны образуют почти плоскую волну, интенсивность  $dI$  которой согласно формуле (16.20) пропорциональна плотности энергии  $dw$ :

$$dI = c dw.$$

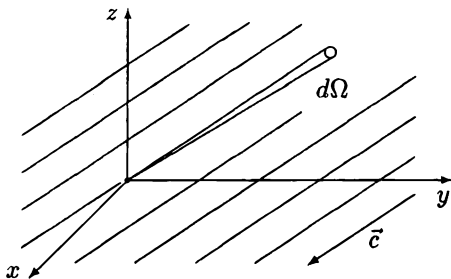


Рис. 16.3. Волны изотропного излучения, которые распространяются вдоль лучей, лежащих внутри "узкого" конуса, образуют почти плоскую волну

Плотность энергии  $w$  изотропного излучения в рассматриваемом объеме принадлежит волнам всех направлений, т.е. соответствует полному телесному углу  $4\pi$ . Для изотропного излучения его энергия распределена равномерно по всем направлениям. Поэтому

$$dw = \frac{w}{4\pi} d\Omega.$$

При этом интенсивность излучения, направления распространения которого лежат внутри конуса с телесным углом  $d\Omega$ , будет

$$dI = \frac{c w}{4\pi} d\Omega. \quad (16.21)$$

Пусть на плоскую поверхность площадью  $dS$  падает изотропное излучение. Достаточно "узкий" конус выделяет в этом излучении часть волн, направления распространения которых почти совпадают (рис. 16.4). Эти волны образуют почти плоскую волну. Вследствие этого, энергия, которую они сообщают поверхности за время  $dt$ , будет равна произведению их интенсивности  $dI$  на площадь  $dS \cos \theta$  поперечного сечения пучка рассматриваемых лучей и на время  $dt$ :

$$dW'_{\text{пад}} = dI dS \cos \theta dt, \quad (16.22)$$

где  $\theta$  – угол падения волн на поверхность, т.е. угол между направлением распространения волн и нормалью к поверхности.

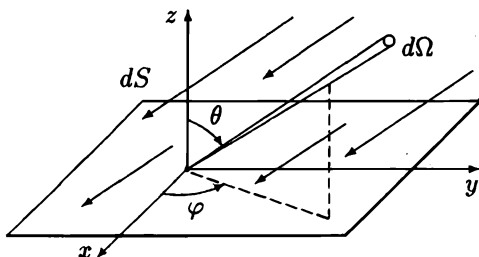


Рис. 16.4. К вычислению энергии излучения, падающего на поверхность

Направление луча, падающего на поверхность, удобно задать при помощи сферических углов  $\varphi$  и  $\theta$ . При этом телесный угол  $d\Omega$  можно выразить через угол  $\theta$  и приращения углов  $d\varphi$  и  $d\theta$ . Для этого построим сферу произвольного радиуса  $R$  (рис. 16.5).

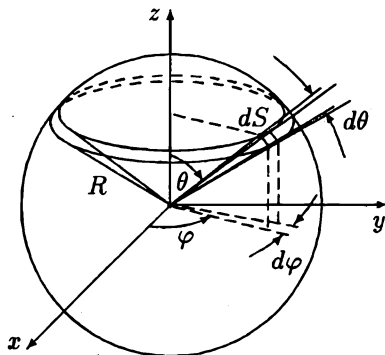


Рис. 16.5. К вычислению телесного угла  $d\Omega$

”Вырежем” из поверхности сферы небольшую часть площадью  $dS_{сф}$ . Телесный угол  $d\Omega$ , под которым видна эта часть поверхности сферы из ее центра, по определению равен отношению ее площади к квадрату радиуса сферы:

$$d\Omega = \frac{dS_{сф}}{R^2} . \quad (16.23)$$

Два конуса с углами раствора  $\theta$  и  $\theta+d\theta$  вырезают из сферы часть, называемую *шаровым поясом*. Площадь пояса равна произведению его ширины  $R d\theta$  на длину  $2 \pi R \sin \theta$ :

$$dS_{шар.пояс} = 2 \pi R^2 \sin \theta d\theta .$$

Две плоскости, проходящие через ось  $z$  и образующие с осью  $x$  углы  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$ , вырезают из шарового пояса небольшую часть, площадь которой

$$dS_{сф} = \frac{dS_{шар.пояс}}{2 \pi} \cdot d\varphi = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi .$$

Таким образом, формула (16.23) приводит к выражению

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi . \quad (16.24)$$

Используя формулы (16.21) и (16.24), получим следующее выражение для энергии (16.22) той части изотропного излучения, которая падает на площадь  $dS$  за время  $dt$  в пределах телесного угла  $d\Omega$ :

$$dW'_{над} = \frac{c w}{4 \pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi dS dt .$$

Так как для падающих на поверхность  $dS$  лучей угол  $\theta$  изменяется в пределах от 0 до  $\pi/2$ , а угол  $\varphi$  – от 0 до  $2 \pi$ , энергия излучения, упавшего на эту поверхность из полупространства (т.е. из телесного угла  $2 \pi$ ) за время  $dt$ , будет

$$dW_{над} = \frac{c w}{4 \pi} dS dt \int_0^{2 \pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{4} c w dS dt .$$

Из этого равенства с учетом определения освещенности

$$dW_{над} = E dS dt$$

следует, что освещенность поверхности изотропным излучением связана с плотностью энергии этого излучения соотношением

$$E = \frac{1}{4} c w . \quad (16.25)$$

Аналогичное соотношение справедливо для спектральных величин

$$E(\omega) = \frac{1}{4} c w(\omega). \quad (16.26)$$

### 16.5. Электромагнитное излучение в полости твердого тела

Рассмотрим электромагнитное излучение, заключенное в полости внутри некоторого тела. Если температура тела поддерживается постоянной, то со временем установится тепловое равновесие между излучением и стенками полости. В силу закона Кирхгофа свойства и характеристики равновесного теплового излучения не зависят от формы и химического состава тел, с которыми оно взаимодействует. Поэтому будем для простоты считать, что стенки полости имеют форму прямоугольного параллелепипеда и полностью отражают падающее на них излучение. Направим координатные оси вдоль ребер параллелепипеда, длины которых обозначим  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (рис. 16.6).

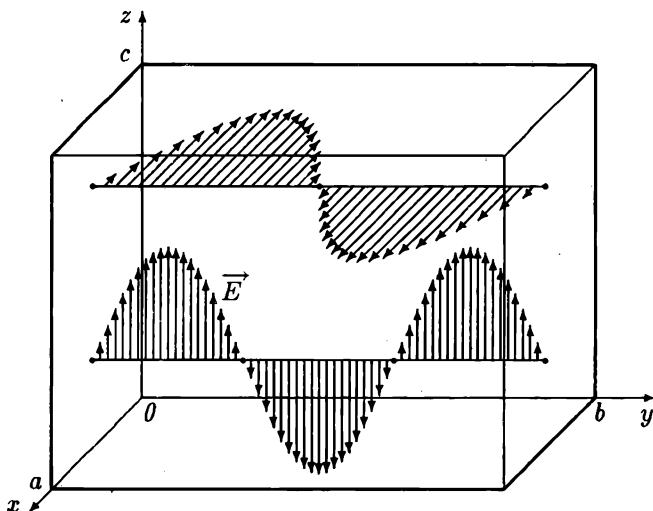


Рис. 16.6. Стоячие электромагнитные волны внутри прямоугольной полости с идеально отражающими стенками

При наложении электромагнитных волн, бегущих навстречу друг другу, образуются стоячие волны. Так как по предположению стенки по-

лости полностью отражают падающее на них излучение, напряженность электрического поля на поверхности полости будет равна нулю. В таком случае функции, описывающие стоячие волны внутри параллелепипеда, будут иметь наиболее простой вид. Так, например, волны, распространяющиеся вдоль оси  $y$ , образуют стоячие волны

$$E_x(t, y) = A_1 \sin(k_y y) \cos(\omega t + \alpha_1),$$

$$E_y = 0,$$

$$E_z(t, y) = A_2 \sin(k_y y) \cos(\omega t + \alpha_2),$$

где  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$  – проекции на оси координат вектора  $\vec{E}$  напряженности электрического поля;  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды волн;  $k_y$  – волновое число;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – начальные фазы. Вектор  $\vec{E}$ , определяемый этими формулами, обращается в ноль при  $y = 0$ , т.е. на одной из сторон параллелепипеда. Он должен быть равен нулю также и на противоположной его стороне при  $y = b$ :

$$\vec{E}(t, b) = 0.$$

Это условие выполняется, если волновое число

$$k_y = \frac{\pi}{b} n_y,$$

где  $n_y$  – целое число. В силу произвольности начальных фаз  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , равные по величине и противоположные по знаку волновые числа  $k_y$  характеризуют одну и ту же стоячую волну. Поэтому удобно положить

$$n_y = 1, 2, 3, \dots$$

Для волн, бегущих вдоль координатных осей  $x$  и  $z$ , волновые числа принимают значения

$$k_x = \frac{\pi}{a} n_x, \quad k_z = \frac{\pi}{c} n_z,$$

где

$$n_x = 1, 2, 3, \dots, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$$

Из полученных формул следует, что стоячие волны, возникающие внутри параллелепипеда с идеально отражающими стенками, характеризуются волновыми векторами

$$\vec{k} \left\{ \frac{\pi n_x}{a}, \frac{\pi n_y}{b}, \frac{\pi n_z}{c} \right\}.$$

При этом одному вектору  $\vec{k}$  соответствуют две стоячие волны с различными взаимно перпендикулярными направлениями векторов  $\vec{E}$ .

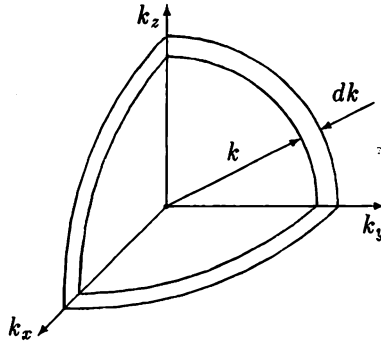


Рис. 16.7. К вычислению числа  $dN_k$  волн в прямоугольной полости

Найдем число  $dN_k$  стоячих волн, для которых волновые числа (т.е. модули волновых векторов  $\vec{k}$ ) лежат в интервале  $(k, k + dk)$ . Для этого построим прямоугольную систему координат, на осях которой будем откладывать значения проекций  $k_x, k_y, k_z$  волнового вектора  $\vec{k}$ . Каждой стоячей волне будет соответствовать в этом пространстве точка с координатами

$$\left( \frac{\pi n_x}{a}, \frac{\pi n_y}{b}, \frac{\pi n_z}{c} \right).$$

Все эти точки располагаются в первом октанте пространства и образуют прямоугольную "кристаллическую решетку". Объем элементарной ячейки этой решетки равен  $\pi^3/abc$ . Следовательно, концентрация точек, являющихся узлами решетки, будет равна  $abc/\pi^3$ . Волнам, для которых волновые числа лежат в интервале  $(k, k + dk)$ , соответствуют точки, лежащие внутри сферического слоя радиуса  $k$  и толщины  $dk$  (рис. 16.7). Число этих точек равно произведению их концентрации на объем  $1/8$  части слоя. Так как каждому волновому вектору  $\vec{k}$  соответствуют две стоячие волны с различными поляризациями (направлениями колебаний) вектора  $\vec{E}$ , то число волн будет вдвое больше числа точек:

$$dN_k = 2 \cdot \frac{abc}{\pi^3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 4\pi k^2 dk = \frac{V k^2 dk}{\pi^2}, \quad (16.27)$$

где  $V = abc$  – объем параллелепипеда.

Волновое число связано с частотой волны соотношением

$$k = \frac{\omega}{c},$$

где  $c$  – скорость света. При помощи этого соотношения найдем число  $dN_\omega$  волн в объеме  $V$  с частотами в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ :

$$dN_\omega = \frac{V \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \quad (16.28)$$

## 16.6. Формула Рэлея – Джинса

Равновесное тепловое излучение является изотропным. Поэтому справедливо соотношение (16.26). Спектральную плотность энергии  $w = w(\omega, T)$  можно найти следующим образом. Пусть известна средняя энергия  $\bar{\epsilon}$  одной стоячей электромагнитной волны в объеме  $V$ , частота которой равна  $\omega$ . При этом энергия (16.8) волн, частоты которых лежат в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ , будет равна произведению средней энергии одной волны на число волн:

$$w(\omega, T) V d\omega = \bar{\epsilon} \cdot dN_\omega. \quad (16.29)$$

Будем рассматривать стоячую электромагнитную волну как некоторый абстрактный гармонический осциллятор, средняя энергия которого, как известно, равна

$$\bar{\epsilon} = kT, \quad (16.30)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура. Подставим это выражение и выражение (16.28) в равенство (16.29). Получим следующую зависимость плотности энергии равновесного теплового излучения от частоты и температуры:

$$w(\omega, T) = \frac{kT \omega^2}{\pi^2 c^3}.$$

По формуле (16.26) найдем, что зависимость спектральной освещенности от частоты и температуры описывается формулой

$$E(\omega, T) = \frac{kT \omega^2}{4\pi^2 c^2}, \quad (16.31)$$

которая называется *формулой Рэлея – Джинса*. Эта формула не согласуется с результатами экспериментов и приводит к абсурдному выводу, что энергия равновесного теплового излучения всех частот, падающего



за единицу времени на единицу площади какой-либо поверхности бесконечно велика:

$$\int_0^{\infty} E(\omega, T) d\omega = \infty.$$

Это следствие формулы Рэлея – Джинса получило название "ультрафиолетовая катастрофа".

## 16.7. Вероятность

Представим себе физическую систему, возможные состояния которой образуют счетное множество, т.е. каждому состоянию можно приписать некоторый номер  $n = 1, 2, 3, \dots$ . В физике такие системы называют "квантовыми". Под влиянием каких-либо внешних воздействий или самопроизвольно (спонтанно) квантовая система может за очень короткое время перейти из одного состояния в другое. Такой "скачок" называют *квантовым переходом*. Будем наблюдать за этой системой в течение достаточно длительного времени  $\tau$ . За это время система совершит много переходов из одного состояния в другое и в каждом состоянии она побывает несколько раз. Пусть  $t_n$  – суммарное время, в течение которого система находилась в  $n$ -ом состоянии. Очевидно, что

$$\sum_n t_n = \tau.$$

Предел отношения времени  $t_n$  пребывания системы в  $n$ -ом состоянии к времени наблюдения  $\tau$

$$W_n = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{t_n}{\tau}$$

называется *вероятностью* того, что в некоторый произвольный момент времени система будет находиться в  $n$ -ом состоянии.

Вычислим сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{t_n}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{\tau} = 1.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n = 1, \tag{16.32}$$

которое называется *условием нормировки вероятности*.

Пусть  $\varepsilon_n$  – энергия системы в состоянии под номером  $n$ . Энергия системы  $\varepsilon(t)$  в произвольный момент времени  $t$  принимает одно из возможных значений  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ . Среднее значение энергии системы за время от некоторого  $t_0$  до  $t_0 + \tau$  по определению можно вычислить посредством формулы

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \varepsilon(t) dt = \frac{1}{\tau} \sum_n \varepsilon_n t_n = \sum_n \varepsilon_n \frac{t_n}{\tau}.$$

Для достаточно больших промежутков времени  $\tau$  будем иметь

$$\bar{\varepsilon} = \sum_n \varepsilon_n W_n. \quad (16.33)$$

## 16.8. Вывод формулы Планка

Теперь найдем спектральную плотность энергии равновесного теплового излучения и освещенность на основе гипотезы Планка о том, что электромагнитное излучение есть совокупность фотонов. Энергия  $\varepsilon$  одного фотона и частота  $\omega$  излучения связаны формулой

$$\varepsilon = \hbar \omega. \quad (16.34)$$

Рассмотрим некоторую квантовую физическую систему, находящуюся в состоянии термодинамического равновесия при температуре  $T$ . Американский физик-теоретик Дж. Гиббс (1839 – 1903) предложил закон, согласно которому вероятность  $W_n$  того, что равновесная система в произвольный момент времени окажется в микросостоянии под номером  $n$ , определяется формулой

$$W_n = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right), \quad (16.35)$$

где  $\varepsilon_n$  – энергия системы в состоянии под номером  $n$ ;  $k$  – постоянная Больцмана;  $Z$  – величина, не зависящая от номера  $n$  состояния. По закону Гиббса чем больше энергия  $\varepsilon_n$  системы в  $n$ -ом состоянии, тем меньше вероятность того, что система в произвольный момент времени окажется именно в этом состоянии.

Подстановка выражения (16.35) в условие нормировки (16.32) приводит к формуле

$$Z = \sum_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right). \quad (16.36)$$

Это выражение называется *статистической суммой*.

Применим распределение Гиббса для описания состояния равновесного электромагнитного излучения в полости, температура стенок которой поддерживается постоянной. При этом будем рассматривать электромагнитное излучение как совокупность фотонов. Если одна стоячая волна частоты  $\omega$  состоит из  $n$  фотонов, то ее энергия будет

$$\varepsilon_n = n \varepsilon = n \hbar \omega. \quad (16.37)$$

В этом случае статистическая сумма (16.36) принимает вид

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n \hbar \omega}{k T}\right).$$

Эту сумму более подробно можно записать как

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n x} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots, \quad (16.38)$$

где

$$x = \frac{\hbar \omega}{k T}.$$

Нетрудно видеть, что эта сумма есть сумма бесконечного числа членов убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой

$$q = e^{-x}.$$

Используя известную формулу для суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$Z = \frac{1}{1 - q},$$

найдем статистическую сумму

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-x}}. \quad (16.39)$$

Теперь найдем среднюю энергию  $\bar{\varepsilon}$  одной стоячей волны. Подстановка выражений (16.35) и (16.37) в формулу (16.33) дает

$$\bar{\varepsilon} = \sum_n \varepsilon_n W_n = \hbar \omega \frac{1}{Z} \sum_n n e^{-n x}.$$

При помощи равенства (16.38) нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$\sum_n n e^{-nx} = -\frac{d}{dx} \sum_n e^{-nx} = -\frac{dZ}{dx}.$$

С учетом этого тождества можно записать следующее выражение:

$$\bar{\varepsilon} = -\hbar\omega \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dx} = -\hbar\omega \frac{d \ln Z}{dx}.$$

Продифференцируем по  $x$  функцию  $Z = Z(x)$ , определяемую формулой (16.39). После несложных преобразований придем к формуле

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^x - 1}. \quad (16.40)$$

Заметим, что для низких частот величина  $x = \hbar\omega/kT$  может быть существенно меньше единицы:  $x \ll 1$ . При этом будет справедливо равенство

$$e^x \approx 1 + x,$$

используя которое нетрудно доказать, что

$$\bar{\varepsilon} \approx kT \quad \text{при} \quad \hbar\omega \ll kT.$$

Таким образом, полученная на основе квантовых представлений формула для средней энергии волны переходит в классическую формулу, если частота волны достаточно низка.

Среднее число фотонов в волне с частотой  $\omega$  можно найти, разделив энергию волны на энергию одного фотона:

$$\bar{n}_\omega = \frac{\bar{\varepsilon}}{\hbar\omega} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (16.41)$$

Из этой формулы видно, что низкочастотные волны равновесного электромагнитного излучения состоят из очень большого числа фотонов. С увеличением частоты  $\omega$  среднее число фотонов в волне стремится к нулю.

Умножив среднюю энергию  $\bar{\varepsilon}$  одной волны на число  $dN_\omega$  волн в объеме  $V$  с частотами в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ , найдем энергию этих волн (16.29):

$$w(\omega, T) V d\omega = \bar{\varepsilon} \cdot dN_\omega.$$

Подставив в это равенство выражения (16.28) и (16.40), найдем, что

$$w(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}. \quad (16.42)$$

Из соотношения (16.26) найдем, что спектральная освещенность  $E(\omega, T)$  определяется формулой

$$E(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4 \pi^2 c^2 (e^{\hbar \omega / k T} - 1)} \quad (16.43)$$

### 16.9. Закон Стефана – Больцмана

Интегральную освещенность некоторой поверхности равновесным тепловым излучением вычислим по формуле (16.6):

$$E(T) = \int_0^{\infty} E(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar}{4 \pi^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar \omega / k T} - 1}.$$

Произведем в этом интеграле переход к новой переменной интегрирования  $x = \hbar \omega / k T$ . После несложных преобразований придем к формуле, выражающей зависимость интегральной освещенности поверхности равновесным тепловым излучением от абсолютной температуры

$$E(T) = \sigma T^4, \quad (16.44)$$

где

$$\sigma = \frac{k^4}{4 \pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Таким образом, функция Планка приводит к закону Стефана – Больцмана.

### 16.10. Закон смещения Вина

Представим формулу Планка (16.43) в виде

$$E(\omega, T) = \frac{(k T)^3}{4 \pi^2 c^2 \hbar^2} \frac{x^3}{e^x - 1},$$

где  $x = \hbar \omega / k T$ . Значение  $x_m$  величины  $x$ , соответствующее максимуму спектральной освещенности теплового излучения, можно найти из условия экстремума функции

$$\frac{d}{dx} \frac{x^3}{e^x - 1} = 0.$$

Зная значение  $x_m$ , найдем зависимость от температуры частоты  $\omega_{max}$ , при которой спектральная плотность энергии равновесного теплового излучения достигает наибольшего значения:

$$\omega_{max} = \frac{x_m k T}{\hbar}. \quad (16.45)$$

Это выражение представляет собой одну из форм закона смещения Вина. Из этого выражения вытекает, что максимум спектральной освещенности при повышении температуры смещается пропорционально температуре в сторону высоких частот.

Спектральную освещенность можно представить как функцию от длины волны. Искомая функция  $E(\lambda, T)$  определяется из равенства

$$E(\lambda, T) d\lambda dS dt = E(\omega, T) d\omega dS dt, \quad (16.46)$$

левая часть которого есть энергия излучения с длинами волн в интервале  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ , падающая на площадь  $dS$  за время  $dt$ , а правая – энергия того же излучения, имеющего соответствующие частоты. Так как длина волны связана частотой соотношением

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

приращение частоты  $d\omega$  будет

$$d\omega = \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| d\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda.$$

Подставив выражения  $\omega(\lambda)$  и  $d\omega$  в равенство (16.46), получим зависимость

$$E(\lambda, T) = \frac{(kT)^5}{8\pi^3 c^3 \hbar^4} \frac{x^5}{e^x - 1},$$

где

$$x = \frac{2\pi c \hbar}{kT\lambda}.$$

Функция  $E = E(\lambda, T)$  при постоянной температуре  $T$  также имеет максимум при некоторой длине волны  $\lambda = \lambda_{max}$ , которая определяется формулой

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \quad (16.47)$$

где  $b = \text{const}$ . Эта формула также выражает закона смещения Вина. Согласно этому закону длина волны  $\lambda_{max}$ , на которую приходится максимум спектральной освещенности в спектре равновесного теплового излучения, обратно пропорциональна абсолютной температуре.

## 17.1. Фотоны

Для объяснения свойств и вывода законов теплового излучения Макс Планк предположил, что электромагнитное излучение представляет собой совокупность частиц, которые были названы *фотонами*, или квантами света. Все оптические явления, которые могут быть поняты и объяснены на основе этой гипотезы, составляют предмет изучения науки под названием *квантовая оптика*. В данном разделе будут рассмотрены некоторые из этих явлений.

Как и любая другая частица материи, фотон обладает энергией и импульсом. Энергия  $\varepsilon$  одного фотона пропорциональна частоте  $\omega$  электромагнитного излучения, частицей которого он является:

$$\varepsilon = \hbar \omega . \quad (17.1)$$

Иногда пользуются другой формулой для энергии фотона

$$\varepsilon = h \nu .$$

Здесь  $h = 2 \pi \hbar$  – постоянная, которую также называют постоянной Планка,  $\nu$  – частота излучения,

$$\omega = 2 \pi \nu .$$

Импульс фотона связан с его энергией соотношением

$$p = \frac{\varepsilon}{c} , \quad (17.2)$$

где  $c$  – скорость света. В векторной форме это соотношение имеет вид

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} , \quad (17.3)$$

где  $\vec{k}$  – волновой вектор. Напомним, что волновое число  $k$ , т.е. модуль волнового вектора, можно выразить через длину волны и частоту электромагнитного излучения посредством формул

$$k = \frac{2 \pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} .$$

## 17.2. Фотоэффект

Обнаружено, что при облучении поверхности металла светом с достаточно короткой длиной волны из него вылетают электроны. Это явление назвали *фотоэффектом*.

Устройство, при помощи которого можно наблюдать фотоэффект, называют *фотоэлементом*. Он представляет собой небольшой стеклянный сосуд, в который впаяны два металлических электрода (рис. 17.1). На один из электродов может падать свет. Этот электрод называют *фотокатодом*. Противоположный электрод называют *анодом*. Воздух из сосуда откачивают так, что в пространстве между катодом и анодом создается достаточно высокий вакуум, который, как известно, является хорошим электроизолятором. При облучении катода светом в цепи возникает электрический ток (фототок). Это означает, что в пространстве между катодом и анодом появляются заряженные частицы, упорядоченное движение которых и есть электрический ток. Такими частицами являются электроны, вылетающие с поверхности катода.

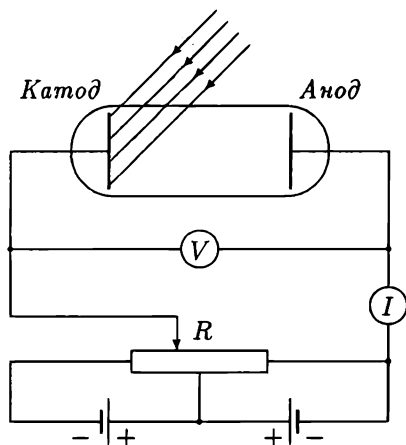


Рис. 17.1. Схема установки для исследования фотоэффекта

Схема установки для исследования фотоэффекта показана на рис. 17.1. Фотокатод облучают монохроматическим светом частоты  $\omega$ . На катод и анод подают напряжение  $U$  и тем самым в пространстве между ними создают электрическое поле. Электроны, вылетающие с поверхности катода, под действием электрического поля движутся к аноду. При этом в цепи идет электрический ток.

Закономерности фотоэффекта можно установить при исследовании *вольт-амперной характеристики* фотоэлемента, которая есть зависимость силы фототока от напряжения на его электродах. На рис. 17.2



изображена вольт-амперная характеристика вакуумного фотоэлемента. Из этого рисунка видно, что между катодом и анодом протекает электрический ток даже тогда, когда электрическое поле отсутствует. Это свидетельствует о том, что электроны вылетают с поверхности, имея ненулевые скорости. Если, приложив к электродам напряжение, создать в пространстве между ними электрическое поле, ускоряющее движение электронов, то сила тока в цепи увеличится. Когда напряжение между электродами невелико, только самые быстрые электроны достигают анода. Те же из электронов, которые при вылете из катода имеют не очень большие скорости, отбрасываются назад на катод ранее вылетевшими электронами.

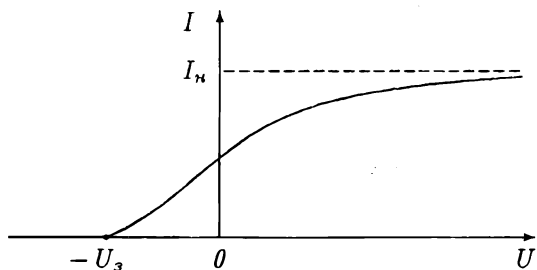


Рис. 17.2. Вольт-амперная характеристика вакуумного фотоэлемента

При достаточно большом напряжении ток достигает насыщения, т.е. сила тока перестает увеличиваться при повышении напряжения. Это означает, что все электроны, испущенные с катода, попадают на анод. Если за единицу времени фотоны "выбивают" из катода  $N_e$  электронов, то сила  $I_n$  тока насыщения будет

$$I_n = e N_e . \quad (17.4)$$

Русский ученый А.Г.Столетов (1839 – 1896) установил, что сила тока насыщения  $I_n$  пропорциональна энергии  $\Phi$  света, падающего за единицу времени на поверхность катода:

$$I_n \sim \Phi . \quad (17.5)$$

Этот факт свидетельствует о том, что свет следует рассматривать как совокупность частиц. В самом деле, если число фотонов, падающих на катод за единицу времени, равно  $N_\phi$ , то их энергия будет

$$\Phi = \hbar \omega N_\phi .$$

Число электронов  $N_e$ , выбиваемых фотонами с поверхности катода за единицу времени, должно быть пропорционально числу падающих на катод фотонов:

$$N_e \sim N_\phi .$$

Таким образом, будем иметь

$$I_n = e N_e \sim N_\phi = \frac{\Phi}{\hbar \omega} ,$$

т.е. придем к зависимости (17.5), выражающей закон Столетова.

Если изменить полярность напряжения, подаваемого на электроды, то электрическое поле будет уже не ускорять электроны, а тормозить их движение. Теперь при повышении напряжения сила тока будет уменьшаться вследствие того, что часть электронов возвращается на катод. При значении  $U_z$  обратного напряжения ток в цепи прекращается. Это значение называют *задерживающим напряжением*. При этом напряжении только самые быстрые электроны долетают до анода и, не касаясь его, возвращаются обратно на катод. Связь между наибольшей скоростью  $v_{max}$  электрона, вылетающего с поверхности катода, и задерживающим напряжением можно установить при помощи закона

$$\Delta E_k = A$$

из механики, согласно которому приращение кинетической энергии частицы равно работе действующих на нее сил. Этот закон приводит к уравнению

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 = e U_z , \quad (17.6)$$

где левая часть есть наибольшая кинетическая энергия вылетающего из катода электрона, а правая – потенциальная энергия, которую приобретает такой электрон, когда он подлетает к аноду.

Предполагают, что испускание электронов под действием света происходит потому, что при столкновении с электроном фотон отдает ему всю свою энергию, а сам исчезает (поглощается) (рис. 17.3). Что происходит с электроном после того, как он в результате взаимодействия с фотоном получил от него энергию  $\hbar \omega$ ? Не каждый электрон, получивший такую энергию покидает катод. Некоторые из этих электронов теряют всю полученную энергию при столкновении с частицами вещества: атомами, ионами и другими электронами. В редких случаях электрон, получивший энергию  $\hbar \omega$ , сразу начинает двигаться в сторону поверхности катода. Даже в таком благоприятном для выхода из металла случае

электрон теряет энергию  $A$ , преодолевая силы притяжения, действующие на него со стороны положительных ионов кристаллической решетки у поверхности металла (рис. 17.3). Энергия  $A$ , необходимая для преодоления этих сил, называется *работой выхода* электрона из металла.

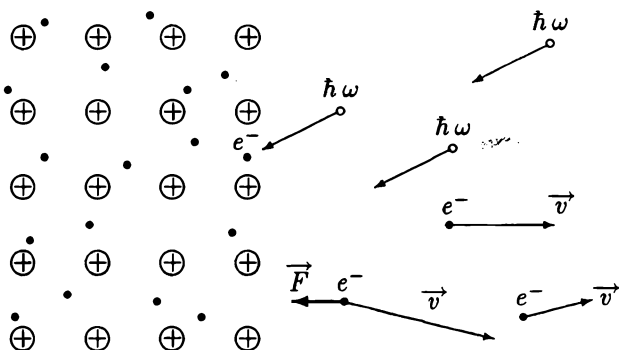


Рис. 17.3. Фотоны "выбивают" электроны из металла. Положительные ионы, образующие кристаллическую решетку, препятствуют движению электронов от поверхности металла

Очевидно, что отрыв электрона от поверхности металла возможен только, когда полученная им от фотона энергия больше работы выхода:

$$\hbar \omega > A.$$

Поэтому фотоэффект возможен при условии, что на поверхность металла падает свет с частотой

$$\omega > \omega_{кр}, \quad (17.7)$$

где частота

$$\omega_{кр} = \frac{A}{\hbar} \quad (17.8)$$

называется *красной границей* фотоэффекта.

Закон сохранения энергии для электрона, получившего от фотона энергию  $\hbar \omega$  и вылетевшего с поверхности катода со скоростью  $v$ , будет иметь вид

$$\hbar \omega = Q + A + \frac{1}{2} m v^2, \quad (17.9)$$

где  $Q$  – энергия, теряемая электроном при столкновениях с атомами и другими электронами в металле. В том случае, когда  $Q = 0$ , скорость вылета электрона будет наибольшей. При этом уравнение (17.9) прини-

мает вид

$$\hbar \omega = A + \frac{1}{2} m v_{max}^2, \quad (17.10)$$

где  $v_{max}$  – наибольшее значение скорости, которую могут иметь электроны, вылетающие с поверхности катода. Соотношение (17.10) называют формулой Эйнштейна. За объяснение фотоэффекта А. Эйнштейну в 1921 г. была присуждена Нобелевская премия.

Исключив из уравнений (17.6) и (17.10) величину  $v_{max}$ , приходим к зависимости задерживающего напряжения от частоты падающего на фотокатод света:

$$U_s = \frac{1}{e} (\hbar \omega - A).$$

График этой зависимости есть прямая (рис. 17.4). При помощи этого графика можно измерить значения  $\omega_{кр}$  частоты красной границы фотоэффекта и работы выхода  $A$  электрона из металла.

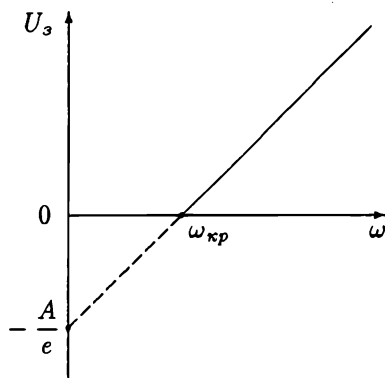


Рис. 17.4. Зависимость задерживающего напряжения от частоты света, падающего на фотокатод

### 17.3. Тормозное рентгеновское излучение

Рентгеновские лучи возникают при бомбардировке твердых тел быстрыми электронами. Устройство для создания рентгеновских лучей называют *рентгеновской трубкой*. Схема такого устройства показана на рис. 17.5. В стеклянную колбу вмонтированы два металлических электрода: катод и анод. Последний называют также мишенью, или антикатодом. В колбе создают достаточно высокий вакуум. При нагревании катода электрическим током с его поверхности начинают вылетать электроны. Это явление называется *термоэлектронной эмиссией*. Приложенное между катодом и анодом высокое напряжение  $U$  создает элек-

трическое поле, при движении в котором электроны ускоряются и с большими скоростями падают на поверхность анода-мишени. При взаимодействии электронов с атомами мишени происходит их торможение, которое сопровождается испусканием электромагнитного излучения. Это излучение впервые было обнаружено Рентгеном в 1895 г. (Вильгельм Рентген (1845 – 1923) – немецкий физик-экспериментатор, первый физик – лауреат Нобелевской премии 1901 г.). Теперь это излучение называют рентгеновскими лучами.

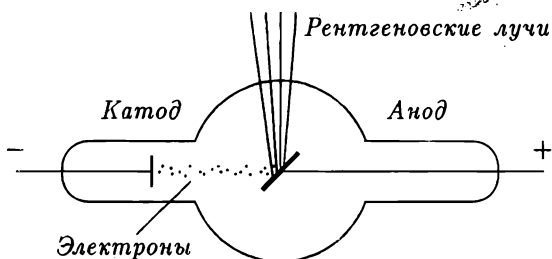


Рис. 17.5. Рентгеновская трубка

Типичный график зависимости  $I = I(\lambda)$  интенсивности рентгеновского излучения от длины волны приведен на рис. 17.6. Как видно из графика, в спектре рентгеновского излучения отсутствуют электромагнитные волны, длины которых меньше некоторого значения  $\lambda_{min}$ . Причем это значение зависит от ускоряющего электроны напряжения  $U$ , и не зависит от того, из какого вещества изготовлена мишень. Вид этой кривой дает основание рассматривать спектральную интенсивность  $I = I(\lambda)$  как сумму двух "независимых" функций  $I_1 = I_1(\lambda)$  и  $I_2 = I_2(\lambda)$ , которые описывают различные физические явления:

$$I(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda).$$

Первая из этих функций –  $I_1 = I_1(\lambda)$  является "гладкой". Она равна нулю для коротких длин волн, т.е. при  $\lambda \leq \lambda_{min}$ . В области  $\lambda > \lambda_{min}$  эта функция сначала резко возрастает, достигает максимума, а затем убывает до нуля при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Вид этой функции почти не зависит от вещества мишени. График второй функции  $I_2 = I_2(\lambda)$  представляет собой последовательность "острых" максимумов, которые подобны спектральным линиям видимого света, испускаемого нагретыми газами. Вид этой функции определяется веществом мишени и является его индивидуальной характеристикой.

Рассмотренные особенности спектров рентгеновского излучения позволяют предположить, что оно возникает в ходе двух различных процессов.

Та часть рентгеновского излучения, которая имеет непрерывный спектр, описываемый функцией  $I_1 = I_1(\lambda)$ , есть электромагнитное излучение, испускаемое самими электронами при их торможении в веществе мишени. Это излучение называют *тормозным* рентгеновским излучением. Рентгеновское излучение, имеющее "линейчатый" спектр  $I_2 = I_2(\lambda)$ , испускается теми атомами вещества, которые были предварительно возбуждены ударами быстрых электронов. Спектр этого излучения определяется строением испустивших его атомов. Поэтому его называют *характеристическим* рентгеновским излучением.

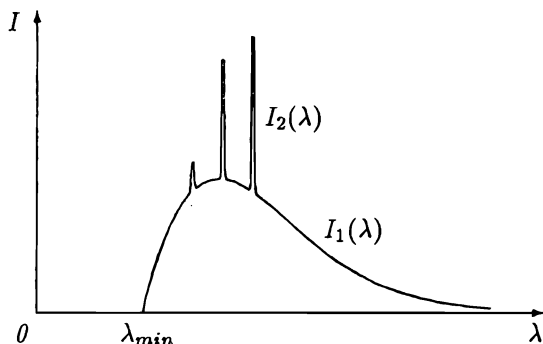


Рис. 17.6. Спектральная интенсивность рентгеновских лучей

Согласно классической теории электромагнитного поля неравномерно движущаяся заряженная частица должна излучать электромагнитные волны всех длин и частот. На самом деле в спектре тормозного рентгеновского излучения присутствуют волны, длины которых  $\lambda > \lambda_{min}$ . Присутствие коротковолновой границы  $\lambda_{min}$  в спектре тормозного рентгеновского излучения можно объяснить только на основе квантовых представлений о природе электромагнитного излучения. Действительно, предположим, что электромагнитное излучение есть совокупность частиц-фотонов. Энергия  $\hbar\omega$  одного фотона, рожденного при торможении в веществе одного электрона, не может быть больше кинетической энергии  $E_k$  этого электрона:

$$\hbar\omega \leq E_k. \quad (17.11)$$

Энергия  $E_k$  электрона, приобретаемая им при движении в электрическом поле от катода к аноду, равна работе  $eU$ , которую совершает поле:

$$E_k = eU.$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\hbar\omega \leq eU,$$

которое при помощи соотношения

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

можно преобразовать к виду

$$\lambda \geq \lambda_{min}, \quad (17.12)$$

где

$$\lambda_{min} = \frac{ch}{eU}. \quad (17.13)$$

Последнее соотношение используют для измерения постоянной Планка.

## 17.4. Эффект Комптона

В 1922 г. американский физик А.Комптон открыл явление изменения длины волны рентгеновского излучения при его рассеянии в веществе и построил теорию этого явления. За это открытие в 1927 г. он получил Нобелевскую премию.

От других электромагнитных волн рентгеновское излучение отличается только способом его генерации и значениями длин волн ( $0,1\text{\AA} < \lambda < 10\text{\AA}$ ). Комптон исследовал рассеяние рентгеновских лучей определенной длины волны  $\lambda_0$  некоторыми веществами. Схема установки, которую он использовал, показана на рис. 17.7. Источником почти монохроматического характеристического рентгеновского излучения служила рентгеновская трубка 1. Узкий пучок лучей формировался при помощи диафрагм 2. Пучок направлялся на графитовую мишень 3, которая рассеивала излучение в различных направлениях. Длины волн рассеянных под различными углами рентгеновских лучей измерялись спектрографом 4. Комптон обнаружил, что при углах рассеяния  $\theta$ , отличных от нуля, в спектре рассеянного излучения, кроме длины волны  $\lambda_0$  падающего на мишень излучения, присутствует еще одна длина волны  $\lambda$ , которая больше  $\lambda_0$  на величину  $\Delta\lambda$ :

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda.$$

Причем изменение  $\Delta\lambda$  длины волны зависит от угла рассеяния  $\theta$  по формуле

$$\Delta\lambda = 2\pi\Lambda(1 - \cos\theta), \quad (17.14)$$

где  $\Lambda$  – некоторая фундаментальная постоянная.

Теория эффекта Комптона основана на предположении, что изменение длины волны излучения обусловлено рассеянием фотонов на внешних

электронах в атомах. Эти электроны слабо связаны с атомами и являются почти свободными. После столкновения со свободным электроном энергия фотона должна уменьшиться, так как некоторая ее часть будет передана электрону. Следовательно, уменьшится частота рассеянного фотона и увеличится его длина волны. В этом суть эффекта Комптона.

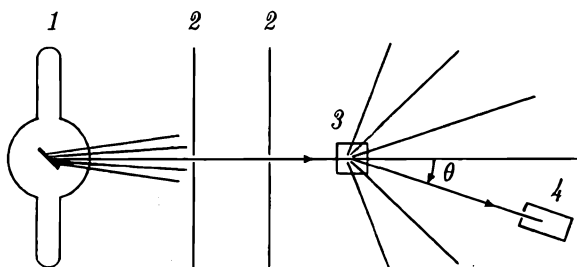


Рис. 17.7. Схема установки для изучения рассеяния рентгеновских лучей в веществе

Рассмотрим столкновение фотона с покоящимся электроном. При столкновениях частиц сохраняется их импульс, т.е. сумма импульсов частиц до столкновения равна сумме их импульсов после столкновения:

$$\hbar \vec{k}_0 = \hbar \vec{k} + \vec{p}, \quad (17.15)$$

где  $\hbar \vec{k}_0$  и  $\hbar \vec{k}$  – импульсы падающего и рассеянного фотонов;  $\vec{p}$  – импульс электрона после столкновения с фотоном. Волновые числа  $k_0$  и  $k$  падающего и рассеянного фотонов связаны с их длинами волн соотношениями

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \text{и} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (17.16)$$

Равенству (17.15) соответствует векторная диаграмма, приведенная на рис. 17.8.

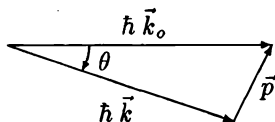


Рис. 17.8. К выводу формулы эффекта Комптона



Энергия фотона рентгеновского излучения так велика, что свободный электрон после столкновения с таким фотоном приобретает скорость, соизмеримую со скоростью света. В таком случае следует использовать релятивистские формулы для импульса  $\vec{p}$  и энергии  $E$  электрона. Эти величины связаны соотношением

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2, \quad (17.17)$$

где  $m$  – масса электрона. Согласно этой формуле энергия покоящегося электрона (когда  $p = 0$ ) будет

$$E_{\text{покоя}} = m c^2.$$

Запишем закон сохранения энергии фотона и электрона:

$$\hbar \omega_o + m c^2 = \hbar \omega + E, \quad (17.18)$$

где

$$\omega_o = c k_o \quad \text{и} \quad \omega = c k$$

– частоты падающего и рассеянного излучений;  $E$  – энергия электрона после столкновения с фотоном.

Запишем равенства (17.15) и (17.18) следующим образом:

$$\vec{p} = \hbar (\vec{k}_o - \vec{k}),$$

$$E = m c^2 + \hbar c (k_o - k).$$

Подставим эти выражения в равенство (17.17). Получим:

$$\left( m c^2 + \hbar c (k_o - k) \right)^2 = m^2 c^4 + \hbar^2 (\vec{k}_o - \vec{k})^2 c^2.$$

После элементарных преобразований придем к

$$m c (k_o - k) - \hbar k_o k = - \hbar \vec{k}_o \vec{k}.$$

Так как скалярное произведение

$$\vec{k}_o \vec{k} = k_o k \cos \theta,$$

будем иметь равенство

$$k_o - k = \frac{\hbar}{m c} k_o k (1 - \cos \theta),$$

которое при помощи формул (17.16) нетрудно привести к виду

$$\lambda - \lambda_0 = 2 \pi \Lambda (1 - \cos \theta), \quad (17.19)$$

где

$$\Lambda = \frac{\hbar}{m c}$$

– постоянная, которую называют комptonовской длиной волны электрона.

Присутствие в спектре рассеянного излучения длины волны  $\lambda_0$  падающего излучения можно объяснить столкновениями фотонов с целыми атомами. Так как масса атома существенно больше массы электрона, комptonовская длина волны атома очень мала и изменение длины волны излучения после рассеяния на атоме будет незначительным.

Эффект Комптона рассматривается как первое прямое доказательство существования фотонов.

## ФОТОНЫ

(продолжение)

## 17.5. Давление света. Опыты Лебедева

Максвелл на основе созданной им теории электромагнитного поля предсказал, что падающая на поверхность какого-либо тела электромагнитная волна должна оказывать на него давление, величина которого пропорциональна потоку энергии волны. Эта величина очень мала и для ее измерения необходимы очень точные приборы.

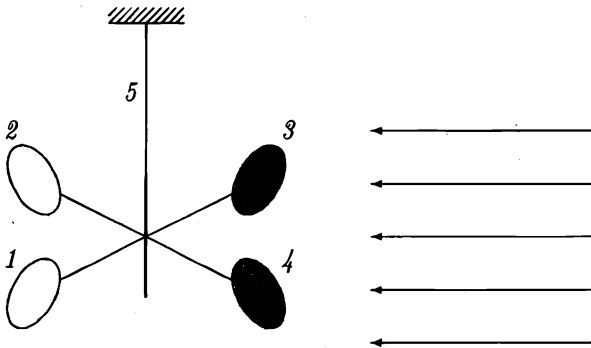


Рис. 17.9. Схема опыта Лебедева по измерению давления света

В 1899 г. русский физик-экспериментатор Петр Николаевич Лебедев (1866 – 1912) осуществил опыты по измерению давления света. Схема опыта Лебедева показана на рис. 17.9. Световая волна падает на специальную конструкцию, основными элементами которой являются легкие "крыльшки" 1 – 4. Одна сторона каждого крыльшка зачернена, а другая представляет собой маленькое зеркало. Конструкция подвешена на нити 5 и помещена в стеклянный сосуд, из которого откачивается воздух. Свет оказывает различное давление на зачерненную и зеркальную поверхности крыльшек. В результате момент сил, действующих на конструкцию, не равен нулю. При этом она поворачивается. Нить закручивается и в ней возникают упругие силы, которые противодействуют силам светового давления. Когда конструкция, отклонившись от

начального положения, придет в состояние покоя, момент упругих сил будет равен моменту сил светового давления. Так как момент упругих сил прямо пропорционален углу поворота конструкции, по углу поворота можно определить значение светового давления. Энергия падающего света измерялась при помощи термоэлемента. Как показали измерения, световое давление прямо пропорционально энергии света, падающего за единицу времени на единицу площади освещаемой поверхности. Измеренное Лебедевым значение светового давления в пределах ошибок измерений совпало со значением, вычисленным Максвеллом. Таким образом, Лебедев экспериментально доказал существование предсказанного Максвеллом давления света.

Опыты Лебедева в свое время рассматривались как одно из главных подтверждений справедливости созданной Максвеллом теории электромагнитного поля. Давление света можно вычислить также на основе представлений о свете как совокупности частиц.

## 17.6. Давление пучка света

Будем рассматривать электромагнитное излучение как поток фотонов. При столкновении с поверхностью тела фотон передает ему импульс. Следствием многочисленных столкновений фотонов с поверхностью является давление, оказываемое электромагнитным излучением на эту поверхность.

Пусть плоская электромагнитная волна интенсивности  $I$  падает на плоскую поверхность под углом  $\theta$  к нормали. Коэффициент отражения света поверхностью равен  $\rho$ . Найдём при помощи корпускулярных представлений нормальное давление, оказываемое светом на поверхность. В таком случае плоскую электромагнитную волну следует рассматривать как однородный поток фотонов, падающих на поверхность под углом  $\theta$ . Предположим, что все эти фотоны имеют одну и ту же энергию  $\varepsilon$ . При этом импульс каждого из них будет равен

$$p = \frac{\varepsilon}{c}. \quad (17.20)$$

Для того чтобы найти давление  $P$  на поверхность необходимо вычислить или измерить силу  $F_{\perp}$ , которая действует на нее по направлению нормали к ней, а затем разделить эту силу на площадь поверхности  $S$ :

$$P = \frac{F_{\perp}}{S}. \quad (17.21)$$

Сила, действующая на поверхность со стороны излучения, согласно закону изменения импульса равна отношению приращения импульса  $\Delta p_S$ ,

полученного поверхностью от фотонов, ко времени  $\tau$ , за которое это приращение произошло:

$$F_{\perp} = \frac{\Delta p_S}{\tau}. \quad (17.22)$$

Приращение импульса  $\Delta p_S$  поверхности равно сумме импульсов, которые она приобретает после многочисленных ударов о нее фотонов. Пусть  $\vec{p}_1$  – импульс фотона, подлетающего к поверхности, а  $\vec{p}_2$  – импульс отраженного фотона (рис. 17.10).

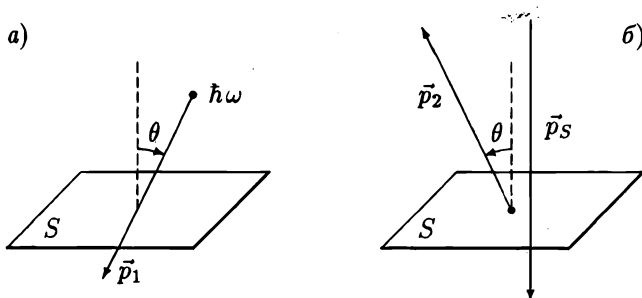


Рис. 17.10. Удар фотона о поверхность и отражение от нее

Закон сохранения импульса системы, состоящей из фотона и поверхности, выражается равенством

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_{S_{omp}}, \quad (17.23)$$

где  $\vec{p}_{S_{omp}}$  – импульс, приобретенный поверхностью после отражения фотона. Будем считать поверхность совершенно гладкой. В этом случае угол отражения света будет равен углу падения  $\theta$ . Импульсы фотона и поверхности, удовлетворяющие равенству (17.23), показаны на рис. 17.11. При отражении фотона от поверхности его энергия не изменяется. Не изменяется также и модуль его импульса:  $p_1 = p_2$ . Из рис. 17.11 нетрудно найти модуль вектора  $\vec{p}_{S_{omp}}$ .

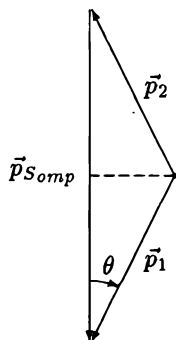


Рис. 17.11. К закону сохранения импульса фотона и поверхности.

После отражения фотона поверхность получает импульс  $\vec{p}_{S_{omp}}$ , который направлен по нормали к ней

Если импульс  $\vec{p}_1$  падающего фотона направлен под углом  $\theta$  к нормали, то после отражения фотона поверхность получит импульс

$$p_{S_{отр}} = 2 \frac{\varepsilon}{c} \cos \theta . \quad (17.24)$$

Если фотон поглощается поверхностью, то закон сохранения импульса будет иметь вид

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_{S_{погл}} , \quad (17.25)$$

т.е. поверхность получит импульс  $\vec{p}_1$  поглощенного ею фотона. При этом проекция полученного поверхностью импульса на нормаль к ней будет

$$p_{S_{погл}} = \frac{\varepsilon}{c} \cos \theta . \quad (17.26)$$

Пусть за время  $\tau$  на поверхность падают  $N$  фотонов. Энергии  $W_{над}$  излучения, падающего за это время на поверхность, будет равна произведению энергии  $\varepsilon$  одного фотона на их число:

$$W_{над} = \varepsilon N . \quad (17.27)$$

Таким же образом связаны энергия  $W_{отр}$  излучения, отраженного поверхностью за это время, и число  $N_{отр}$  отраженных фотонов:

$$W_{отр} = \varepsilon N_{отр} . \quad (17.28)$$

Коэффициент отражения  $\rho$  есть отношение энергии  $W_{отр}$  отраженного поверхностью излучения к энергии  $W_{над}$  излучения, падающего на нее:

$$\rho = \frac{W_{отр}}{W_{над}} . \quad (17.29)$$

Подставим в это равенство выражения (17.27) и (17.28). Получим

$$N_{отр} = \rho N . \quad (17.30)$$

Так как число поглощенных поверхностью фотонов

$$N_{погл} = N - N_{отр} ,$$

придем к формуле

$$N_{погл} = (1 - \rho) N . \quad (17.31)$$

За время  $\tau$  поверхность приобретает импульс

$$\Delta p_S = p_{S_{отр}} N_{отр} + p_{S_{погл}} N_{погл} .$$

При помощи формул (17.24), (17.26), (17.30) и (17.31) это выражение преобразуем к виду

$$\Delta p_S = (1 + \rho) N \frac{\varepsilon}{c} \cos \theta. \quad (17.32)$$

По определению энергия  $W_{пад}$  излучения, падающего на поверхность за время  $\tau$ , равна произведению интенсивности  $I$  излучения на площадь  $S \cos \theta$  поперечного сечения пучка света и на время  $\tau$ :

$$W_{пад} = I S \cos \theta \cdot \tau. \quad (17.33)$$

Используя соотношение (17.27), найдем число фотонов, падающих на поверхность за время  $\tau$ :

$$N = \frac{I}{\varepsilon} S \cos \theta \tau.$$

Подставим это выражение в формулу (17.32). Получим

$$\Delta p_S = (1 + \rho) \frac{I}{c} \cos^2 \theta S \tau.$$

Наконец, формулы (17.21) и (17.22) приводят к следующему выражению для давления, которое оказывает на поверхность плоская световая волна, падающая на нее под углом  $\theta$ :

$$P = (1 + \rho) \frac{I}{c} \cos^2 \theta. \quad (17.34)$$

Когда поверхность является зеркальной и отражает все падающее на нее излучение ( $\rho = 1$ ), формула (17.34) дает значение

$$P_{зерк} = 2 \frac{I}{c} \cos^2 \theta. \quad (17.35)$$

Если же поверхность является абсолютно черной и поглощает все падающее на нее излучение, то коэффициент отражения  $\rho = 0$  и давление излучения на поверхность будет

$$P_{черн} = \frac{I}{c} \cos^2 \theta. \quad (17.36)$$

Таким образом, давление излучения на зеркальную поверхность оказывается в два раза больше, чем на черную.

## 17.7. Давление изотропного излучения

Найдем давление, которое оказывает изотропное излучение на плоскую поверхность. Пусть плотность энергии излучения равна  $w$ . Будем рассматривать изотропное излучение как совокупность плоских электромагнитных волн, распространяющихся по всем возможным направлениям в пространстве. Выделим при помощи "узкого" конуса часть волн, направления распространения которых лежат внутри этого конуса (рис. 16.4). Если телесный угол  $d\Omega$  конуса достаточно мал, то выделенные волны образуют почти плоскую волну, интенсивность  $dI$  которой согласно формуле (1.20) пропорциональна ее плотности энергии  $dw$ :

$$dI = c dw .$$

Плотность энергии выделенных волн пропорциональна величине телесного угла:

$$dw = \frac{w}{4\pi} d\Omega .$$

Эти соотношения приводят к формуле (16.21)

$$dI = \frac{c w}{4\pi} d\Omega , \quad (17.37)$$

где согласно (16.24)

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi .$$

Давление, которое оказывает на поверхность выделенное излучение, найдем по формуле (17.34), заменив в ней интенсивность  $I$  на  $dI$ :

$$dP = (1 + \rho) \frac{dI}{c} \cos^2 \theta .$$

Подстановка выражения (17.37) преобразует эту формулу к виду

$$dP = (1 + \rho) \frac{w}{4\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi .$$

Для излучения, падающего на какую-либо поверхность из полупространства, угол  $\varphi$  изменяется в пределах от 0 до  $2\pi$ , а угол  $\theta$  — от 0 до  $\pi/2$ . Таким образом, давление изотропного излучения будет равно двойному интегралу

$$P = (1 + \rho) \frac{w}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta ,$$



вычисления которого приводят к формуле

$$P = \frac{1}{6} (1 + \varrho) w. \quad (17.38)$$

Нагретые тела не только отражают и поглощают электромагнитное излучение, но и сами его испускают. Испускаемое телом излучение также оказывает давление на его поверхность. Когда наступает равновесие между телом и излучением, от любого участка поверхности тела в полупространство уходит излучение, энергия которого равна энергии излучения, падающего из полупространства на этот участок. При этом сумма давлений отражаемого, поглощаемого и испускаемого телом излучений не будет зависеть от свойств поверхности тела. Таким образом, с учетом давления испускаемого телом излучения давление равновесного излучения можно найти по формуле (17.38), положив в ней  $\varrho = 1$ . В результате найдем, что давление равновесного излучения связано с его плотностью энергии соотношением

$$P = \frac{1}{3} w. \quad (17.39)$$

# АТОМНАЯ ФИЗИКА

## ГЛАВА 18

### БОРОВСКАЯ ТЕОРИЯ АТОМА

---

#### 18.1. Спектр излучения атома водорода

Атом является составной частицей, т.е. он состоит из других частиц. Так же как любая система частиц, атом обладает внутренней энергией, которая складывается из кинетических энергий частиц, входящих в его состав, и потенциальной энергии их взаимодействия. При столкновениях атомов друг с другом или с какими-либо другими частицами кинетическая энергия поступательного движения частиц может переходить во внутреннюю энергию атомов. Такие столкновения называют *неупругими*. Когда внутренняя энергия атома увеличивается, говорят, что атом переходит в возбужденное состояние. В состояние с более низкой энергией атом может перейти самопроизвольно. При этом он испускает электромагнитные волны, уносящие часть его внутренней энергии.

В твердых телах и жидкостях атомы расположены близко друг к другу и "сильно" взаимодействуют друг с другом. Поэтому спектры электромагнитного излучения твердых тел и жидкостей существенно отличаются от спектров излучения газов, когда источниками излучения являются практически изолированные атомы. Во второй половине прошлого века были подробно исследованы спектры электромагнитного излучения, испускаемого или поглощаемого различными атомами. Схема установки для изучения спектров электромагнитного излучения изображена на рис. 18.1.

Прибор, при помощи которого исследуют спектральный состав излучения от некоторого источника, называют *спектроскопом*. Если спектр регистрируют на фотопластинку, то прибор называют *спектрографом*. Основной частью спектроскопа является призма, изготовленная из прозрачного материала, или дифракционная решетка, после прохождения которой луч света разделяется на отдельные лучи с различными длинами

ми волн. В схеме на рис. 18.1 источником излучения 1 служит сосуд с нагретым газом или электродуговой разряд, в котором электромагнитное излучение испускается парами какого-нибудь металла. Щель 2 формирует узкий пучок параллельных лучей. Призма 3 благодаря дисперсии света, т.е. зависимости показателя преломления вещества от длины волны, производит разделение падающего луча на монохроматические лучи, идущие под разными углами. Спектр излучения наблюдают на экране 4 или регистрируют на фотопластинке.

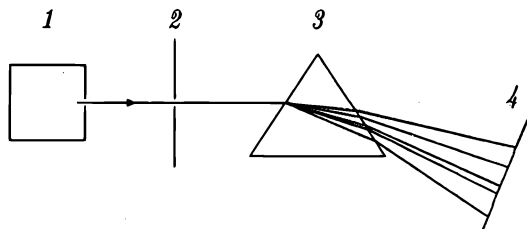


Рис. 18.1. Схема установки для наблюдения спектров излучения атомов

Если щель освещать белым светом, то на экране будет виден *сплошной спектр*, в котором присутствуют все цвета радуги от красного до фиолетового. Если же источниками света являются изолированные атомы, то на экране спектроскопа наблюдаются узкие цветные линии, разделенные черными промежутками. Такой спектр называют *линейчатым*. Это означает, что в электромагнитном излучении, испускаемом атомами какого-либо химического элемента, присутствуют волны не всех, а только некоторых частот (или длин волн). Причем каждому элементу соответствует только для него характерный набор частот, значения которых располагаются на числовой оси в определенном порядке. Когда электромагнитное излучение проходит через газ, его атомы поглощают волны тех частот, которые они сами могут испускать. Другими словами, спектры излучения, испускаемого и поглощаемого атомами данного химического элемента, тождественны.

В конце девятнадцатого века, когда спектры излучения различных атомов были достаточно хорошо изучены, возникла необходимость их математического описания и физического объяснения. Так исследования атомных спектров привели к появлению новых представлений в физике и рождению новой науки – квантовой механики.

В 1885 г. швейцарский физик И. Бальмер установил, что длины волн видимого света, испускаемого атомами водорода очень точно описывают-

ся формулой

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4},$$

где  $\lambda_0$  – постоянная,  $n = 3, 4, 5, \dots$

В настоящее время формулу Бальмера чаще записывают в виде

$$\omega = R \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (18.1)$$

где постоянную

$$R = 2,07 \cdot 10^{16} c^{-1}$$

называют постоянной Ридберга в честь шведского физика И.Ридберга. Совокупность спектральных линий, частоты которых описываются формулой (18.1), называют серией Бальмера.

В 1906 г. американский физик Т.Лайман открыл, что атомы водорода испускают также электромагнитное излучение, линии которого лежат в ультрафиолетовой части спектра. Серия частот этого излучения описывается формулой

$$\omega = R \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

где  $n = 2, 3, 4, \dots$

Дальнейшие исследования электромагнитного излучения атомов водорода показали, что, кроме серий Бальмера и Лаймана, в нем присутствуют еще несколько серий, лежащих в инфракрасной области спектра. Все частоты излучения, которое могут испускать или поглощать атомы водорода, можно описать одной формулой

$$\omega = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (18.2)$$

которую называют обобщенной формулой Бальмера. В этой формуле  $m$  и  $n$  – целые положительные числа,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $n > m$ . На рис. 18.2 изображена числовая ось  $\omega$ , на которой отмечены некоторые частоты излучения атома водорода.



Рис. 18.2. Частоты электромагнитного излучения, испускаемого или поглощаемого атомами водорода. Спектральные серии

## 18.2. Планетарная модель атома

В начале XX в. существование атомов было уже общепризнано. Это знание основывалось на множестве разнообразных экспериментальных данных. Было известно, что атом представляет собой систему заряженных частиц, имеющую размер порядка  $10^{-10}$  м. Был открыт электрон и установлено, что его заряд равен  $-e$ . Было известно также, что электроны входят в состав атома. Появилась необходимость в экспериментах, которые могли дать сведения о внутреннем строении атома. Задача заключалась в том, чтобы определить как распределены заряженные частицы внутри атома. Эти сведения можно было получить из экспериментов по рассеянию быстрых заряженных частиц атомами.

В 1909 – 10 годах Х.Гейгер и Э.Марсден провели эксперименты по рассеянию  $\alpha$ -частиц в тонких металлических пленках. Схема этого эксперимента приведена на рис. 18.3.

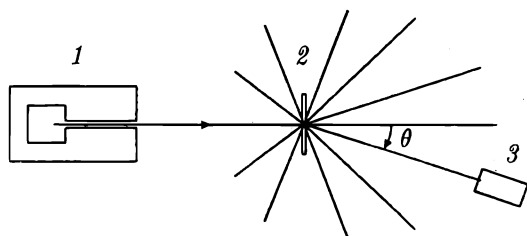


Рис. 18.3. Схема установки для изучения рассеяния  $\alpha$ -частиц в веществе

Узкий пучок  $\alpha$ -частиц от радиоактивного источника 1 направлялся на тонкую мишень 2 из исследуемого вещества. После взаимодействия с атомами мишени  $\alpha$ -частицы отклонялись на различные углы относительно направления своего первоначального движения. По угловому распределению рассеянных  $\alpha$ -частиц можно составить представление о строении атома. Количества  $\alpha$ -частиц, отклонившихся на определенные углы, измерялись при помощи сцинтилляционного счетчика. Сцинтиллятор — это вещество, при ударе о которое  $\alpha$ -частица вызывает вспышку света (сцинтилляцию). Эти вспышки наблюдали в микроскоп. Было установлено, что некоторое количество  $\alpha$ -частиц при столкновениях с атомами рассеивается на очень большие углы (больше  $90^\circ$ ), как будто внутри атома имеется "твердая" сердцевина.

Еще в 1906 г. английский физик Э.Резерфорд экспериментально доказал, что  $\alpha$ -частица есть дважды ионизированный атом гелия, т.е.  $\alpha$ -частица — это положительно заряженная частица, которая превращается в атом гелия, когда к ней присоединяются два электрона. Следовательно

но, заряд  $\alpha$ -частицы равен  $+2e$ . В 1911 г. Резерфорд вывел формулу, описывающую угловое распределение  $\alpha$ -частиц после их рассеяния на положительно заряженных частицах. Эта формула с высокой точностью описывает угловое распределение  $\alpha$ -частиц, наблюдаемое в опытах по их рассеянию атомами различных элементов. Согласие полученной формулы с результатами опытов позволило Резерфорду утверждать, что положительный заряд и почти вся масса атома сосредоточены в области, размер которой существенно меньше размеров самого атома и составляет величину порядка  $10^{-14}$  м. Эту область назвали *ядром* атома. Из формулы Резерфорда следовало, что заряд ядра должен быть равен  $+Ze$ , где  $Z$  – порядковый номер элемента в периодической таблице Менделеева. Резерфорд предложил рассматривать атом как некоторое подобие Солнечной системы. По его представлениям вокруг атомного ядра, как планеты вокруг Солнца, движутся  $Z$  электронов. Атом в целом нейтрален, так как отрицательный заряд всех его электронов равен по величине заряду ядра. Такая модель атома называется *планетарной*.

Итак, опыты по рассеянию  $\alpha$ -частиц атомами свидетельствуют в пользу планетарной модели атома. Однако согласно законам механики и электростатики система заряженных частиц может быть устойчивой, т.е. может существовать самостоятельно длительное время, не изменяя своего состояния, только при условии, что входящие в ее состав частицы находятся в постоянном движении. Так, например, планеты не падают на Солнце и не удаляются от него на большие расстояния потому, что движутся вокруг Солнца по орбитам, похожим на эллипсы. Когда частицы движутся в пределах конечного объема, их движение непременно будет ускоренным. По законам классической электромагнитной теории ускоренно движущиеся заряженные частицы испускают электромагнитные волны, которые непрерывно уносят с собой энергию этих частиц. Следовательно, атом как система ускоренно движущихся заряженных частиц должен постоянно излучать электромагнитные волны и при этом терять свою энергию. Из этого следует парадоксальный вывод, что атом является неустойчивой системой. Разумеется, этот вывод находится в полном противоречии с действительностью. Более того, в рамках классической электромагнитной теории не удастся правильно объяснить строение спектров излучения атомов. Эти противоречия обусловили необходимость формирования новых представлений и отыскания новых законов, на которых должна быть основана теория строения атома.

### 18.3. Опыты Франка и Герца

В 1910–14 годах немецкие физики Джеймс Франк (1882–1964) и Густав Герц (1887–1975) осуществили опыты по столкновениям электронов с атомами газов, которые явились прямым доказательством дискретности внутренних состояний атомов (Нобелевская премия 1925 г.). Схема их установки приведена на рис. 18.4.

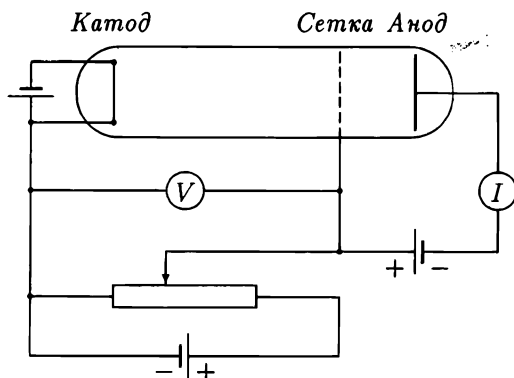


Рис. 18.4. Схема опытов Франка и Герца

В стеклянную трубку были вмонтированы три металлических электрода: катод, анод и сетка. Воздух из трубки откачивали вакуумным насосом, а затем она заполнялась парами ртути не очень высокой концентрации. На катод и сетку подавалось напряжение  $U$ . Таким образом в пространстве между катодом и сеткой создавалось электрическое поле, которое ускоряло электроны, вылетающие с поверхности нагретого катода вследствие термоэлектронной эмиссии. В пространстве между сеткой и анодом создавалось другое, более слабое электрическое поле, которое замедляло движение электронов, проникавших в эту область сквозь сетку. Только те электроны из числа проникших сквозь сетку достигали поверхности анода, кинетическая энергия которых была больше потенциальной энергии  $eU_3$ , приобретаемой ими при движении в электрическом поле от сетки к аноду. Здесь  $U_3$  – задерживающее напряжение между сеткой и анодом. Эти электроны создавали в цепи электрический ток, сила которого  $I$  измерялась посредством гальванометра. Целью измерений было снятие вольт-амперной характеристики, т.е. зависимости силы анодного тока  $I$  от напряжения между катодом и сеткой. Результаты этих измерений представлены графиком зависимости  $I = I(U)$  на рис. 18.5.

При увеличении напряжения  $U$  от значения  $U = 0$  сила тока  $I$  в цепи

анода сначала монотонно возрастает, достигает максимума при некотором значении напряжения  $U_0$ , затем резко падает, достигает минимума и снова начинает возрастать, достигая второго максимума при значении напряжения  $2U_0$ . Следующий максимум силы анодного тока соответствует значению напряжения  $3U_0$  и т.д. Такой характер зависимости силы тока от ускоряющего электроны напряжения можно объяснить следующим образом.

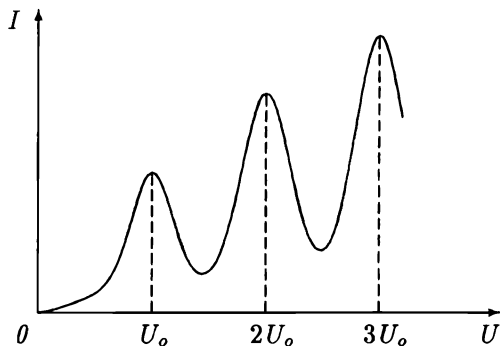


Рис. 18.5. Зависимость силы тока  $I$  в цепи анода от напряжения  $U$  между катодом и сеткой

Электроны, летящие от катода, сталкиваются с атомами ртути. Столкновение, после которого внутренняя энергия атома не изменяется, называют *упругим*. В зависимости от условий столкновения кинетическая энергия электрона после упругого столкновения может как уменьшиться, так и увеличиться. Но в любом случае она изменяется незначительно. Относительное изменение кинетической энергии электрона после упругого столкновения с атомом равно по порядку величины отношению массы электрона к массе атома, т.е.  $m_e/m_a \sim 10^{-4}$ . Таким образом, кинетическая энергия электрона в упругих столкновениях с атомами газа практически не изменяется.

Столкновение электрона с атомом, после которого изменяется внутреннее состояние последнего, называют *неупругим*. Возникает вопрос, какие значения может принимать внутренняя энергия атома? Если она может принимать любые значения, то при неупругом столкновении с электроном атом может принять от него (или отдать ему) любую часть энергии. В этом случае наблюдаемая в опытах Франка и Герца зависимость  $I = I(U)$  не поддается объяснению.

Предположим, что состояния атома дискретны, т.е. их можно перенумеровать. При этом энергия атома может принимать не любые, а только



вполне определенные значения  $E_1, E_2, E_3, \dots$ , каждое из которых соответствует какому-то состоянию атома. В таком случае при неупругом столкновении с электроном энергия атома может измениться только на величину  $\Delta E$ , которая равна разности каких-либо двух из возможных значений внутренней энергии атома  $E_1, E_2, E_3, \dots$ :

$$\Delta E = E_{n_2} - E_{n_1},$$

где  $n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots$

Пусть  $E_1$  есть наименьшее значение внутренней энергии атома. Состояние, в котором атом обладает такой энергией, называют *основным*. Все другие состояния атома называют *возбужденными*. Пусть  $E_2$  — наименьшее значение энергии атома в возбужденном состоянии. Следовательно, наименьшее значение энергии, которую может принять от электрона при неупругом ударе находящийся в основном состоянии атом, равно

$$\Delta E_0 = E_2 - E_1.$$

Если кинетическая энергия налетающего на атом электрона меньше  $\Delta E_0$ :

$$\frac{1}{2} m v^2 < \Delta E_0, \quad (18.3)$$

то внутренняя энергия атома после столкновения не изменится, т.е. столкновение будет упругим. Так как кинетическая энергия электрона после упругого столкновения с атомом практически не изменяется, при движении электрона от катода к сетке она под действием ускоряющего электрического поля будет постепенно увеличиваться. Подлетающий к сетке электрон приобретает наибольшую кинетическую энергию, которая связана с напряжением  $U$  между катодом и сеткой соотношением

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 = e U. \quad (18.4)$$

С учетом этого соотношения условие (18.3), при выполнении которого происходят только упругие столкновения электронов с атомами, можно записать как

$$e U < \Delta E_0. \quad (18.5)$$

Из этого неравенства следует, что до тех пор, пока напряжение  $U$  меньше значения

$$U_0 = \frac{\Delta E_0}{e}, \quad (18.6)$$

при увеличении  $U$  будет увеличиваться кинетическая энергия (18.4) подлетающих к сетке электронов и вследствие этого будет возрастать доля

электронов, которые преодолевают пространство между сеткой и анодом, где имеется тормозящее их движение электрическое поле, т.е. будет расти сила анодного тока  $I$ .

Когда напряжение  $U$  немного превысит значение  $U_0$  и кинетическая энергия (18.4) подлетающих к сетке электронов станет несколько больше  $\Delta E_0$ , некоторые электроны при столкновениях с атомами будут отдавать им почти всю свою энергию. Такие электроны, даже если они пролетят сквозь сетку, не смогут достичь анода. До анода будут долетать только электроны, которые не испытали неупругих столкновений с атомами. Чем больше напряжение  $U$ , тем больше кинетическая энергия электронов и тем большее число электронов теряют свою энергию в неупругих столкновениях с атомами. Поэтому при  $U > U_0$  сила тока в цепи анода начинает уменьшаться при увеличении напряжения  $U$ .

При напряжениях  $U > U_0$  вылетающие с катода электроны приобретают кинетическую энергию

$$\frac{1}{2} m v^2 = \Delta E_0,$$

когда расстояние до сетки еще достаточно велико. В таком случае электрон после неупругого соударения с атомом на пути к сетке еще успевает ускориться и приобрести кинетическую энергию, достаточную для преодоления тормозящего поля между сеткой и анодом. По этой причине начинается новый рост силы анодного тока при дальнейшем увеличении напряжения  $U$ .

Напряжение  $U_0$  называется *первым потенциалом возбуждения* атома. Атом, получивший при столкновении с электроном энергию  $\Delta E_0 = \epsilon U_0$ , переходит в возбужденное состояние. Спустя некоторое время ( $\sim 10^{-8}$  с) он самопроизвольно возвращается в основное состояние. При этом атом испускает квант электромагнитного излучения частоты  $\omega = \Delta E_0/\hbar$ .

При напряжении  $U$  между катодом и сеткой, которое немного превышает значение  $2U_0$ , электрон после одного неупругого столкновения с атомом подлетает к сетке с кинетической энергией, достаточной для второго неупругого столкновения. В этом столкновении он теряет почти всю свою энергию и поэтому не долетает до анода. При увеличении напряжения  $U$  все больше электронов на пути от катода к сетке испытывают неупругие столкновения с атомами ртути дважды. Поэтому сила анодного тока снова начинает уменьшаться. Аналогичные опыты были проведены с атомами других химических элементов. Все они дали такие же результаты, которые убедительно доказали, что внутренние состояния атомов дискретны. Эти результаты не согласуются с представлениями и законами классической механики, что послужило еще одним поводом к созданию новой теории строения атома.

## 18.4. Теория Бора

В 1913 г. датский физик Нильс Бор создал первую квантовую теорию атома (Нобелевская премия 1922 г.). В основу этой теории была положена планетарная модель атома. Однако Бор высказал совершенно новые идеи относительно характера движений электронов в атоме. Он предположил, что стационарное движение электронов в атоме происходит по определенным правилам, которые были им сформулированы в виде двух постулатов.

1. Электроны в атоме могут двигаться только по некоторым "разрешенным" орбитам, названным *стационарными*. Причем эти орбиты можно перенумеровать. Двигаясь по одной из таких орбит, электрон вопреки законам классической электромагнитной теории не излучает электромагнитные волны. При этом его энергия  $E$  не изменяется и принимает одно из возможных значений, которые образуют дискретный спектр  $E_1, E_2, E_3, \dots$

2. Электрон за очень короткое время может перейти с одной стационарной орбиты на другую. Такой переход сопровождается испусканием или поглощением кванта электромагнитного излучения (фотона), энергия которого  $\hbar\omega$  равна разности энергий электрона до и после перехода:

$$\hbar\omega = |E_{n_2} - E_{n_1}|, \quad (18.7)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — номера орбит. Испускание фотона атомом происходит в том случае, когда при переходе электрона с одной орбиты на другую его энергия уменьшается. Следствием поглощения фотона атомом является переход электрона на орбиту, где его энергия больше.

Бор предложил так называемое *правило квантования* орбит, которому должны удовлетворять стационарные орбиты электронов в атоме. Согласно этому правилу при движении электрона по стационарной орбите его момент импульса  $L$  равен целому числу постоянных Планка  $\hbar$ :

$$L = n\hbar, \quad (18.8)$$

где целое число  $n = 1, 2, 3, \dots$  называют *квантовым числом*.

Теория Бора дала замечательные результаты при описании атома водорода, состоящего из протона с зарядом  $+e$  и электрона, и водородоподобного иона, который состоит из ядра произвольного элемента и одного электрона. Так как масса ядра много больше массы электрона, ядро можно считать неподвижным, а электрон — движущимся вокруг него. Заряд ядра равен  $+Ze$ , где  $Z$  — порядковый номер элемента в таблице Менделеева. Поэтому на электрон, заряд которого равен  $-e$ , со стороны

ядра будет действовать сила Кулона

$$F = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}, \quad (18.9)$$

где  $r$  – расстояние между ядром и электроном.

Рассмотрим движение электрона вокруг ядра по окружности радиуса  $r$  (рис. 18.6). Запишем второй закон Ньютона:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}, \quad (18.10)$$

где  $m$  и  $v$  – масса электрона и его скорость.

Правило квантования (18.8) теперь можно записать так:

$$m v r = n \hbar. \quad (18.11)$$

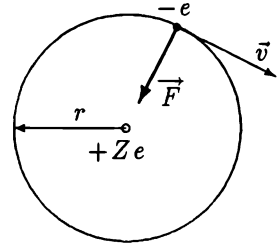


Рис. 18.6.  
Водородоподобный ион

Второй закон Ньютона (18.10) и постулат Бора (18.11) образуют систему из двух уравнений с двумя неизвестными  $v$  и  $r$ . Найдем решение этой системы. Для этого разделим первое уравнение на второе. Получим

$$v = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar n}.$$

Найдем теперь радиус орбиты электрона из уравнения (18.11). После простых преобразований приходим к формуле

$$r = \frac{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2 n^2}{Z m e^2}.$$

Как видно из этой формулы, радиус орбиты электрона зависит от числа  $n$ . Поэтому число  $n$  рассматривают в качестве номера орбиты. Радиус первой орбиты, для которой  $n = 1$ , в атоме водорода ( $Z = 1$ ) можно вычислить по формуле

$$r_B = \frac{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,529 \text{ \AA}.$$

Это значение называют *боровским радиусом*. Используя это обозначение, формулу для радиуса  $n$ -й орбиты электрона в водородоподобном ионе можно записать как

$$r = \frac{r_B n^2}{Z}.$$

Внутренняя энергия  $E$  водородоподобного иона есть полная механическая энергия электрона, движущегося вокруг неподвижного ядра. Кулоновскому взаимодействию электрона с ядром соответствует потенциальная энергия

$$-\frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r}.$$

Поэтому полная механическая энергия электрона

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r}. \quad (18.12)$$

Из уравнения Ньютона (18.10) следует, что абсолютное значение потенциальной энергии электрона равно его удвоенной кинетической энергии:

$$\frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} = m v^2.$$

Следовательно,

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - m v^2 = -\frac{1}{2} m v^2.$$

Таким образом, энергия электрона в водородоподобном ионе равна по величине и противоположна по знаку его кинетической энергии. Используя полученную выше формулу для скорости электрона, придем к следующему выражению для энергии электрона в водородоподобном ионе:

$$E = -\frac{Z^2 R \hbar}{n^2}, \quad (18.13)$$

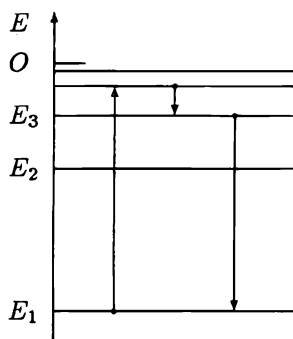
где

$$R = \frac{m e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^3}.$$

Подстановка в эту формулу известных значений фундаментальных постоянных приводит к значению  $R$ , которое с высокой точностью соответствует экспериментальному значению постоянной Ридберга. Согласно формуле (18.13) энергия электрона тем больше, чем больше квантовое число  $n$ .

Значения энергии электрона в атоме отмечают отрезками прямых линий на числовой оси  $E$  (рис. 18.7). Эти отрезки называют *уровнями энергии* электрона.

Рис. 18.7. Спектр энергий электрона в водородоподобном ионе. Стрелками условно обозначены переходы электрона с одной орбиты на другую



На рис. 18.8 изображены стационарные орбиты электрона в водородоподобном ионе. Когда электрон переходит на орбиту меньшего радиуса, его энергия уменьшается. При этом атом испускает фотон.

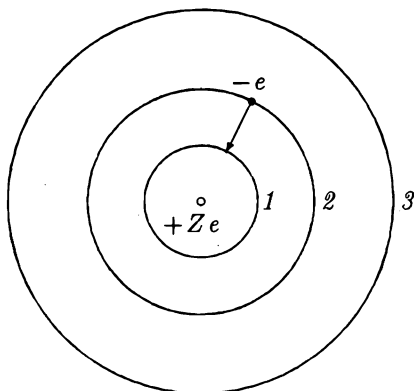


Рис. 18.8. Стационарные орбиты электрона в водородоподобном ионе

Процесс испускания атомом фотона описывают уравнением

$$A_{n_1} \rightarrow A_{n_2} + \hbar \omega,$$

где символ  $A_{n_1}$  обозначает атом в состоянии, которое характеризуется квантовым числом  $n_1$ , а символ  $A_{n_2}$  – атом в состоянии  $n_2$ . Испускание фотона атомом подобно выстрелу снарядом из пушки (рис. 18.9).

Очевидно, что атом  $A_{n_1}$  может испустить фотон только в том случае, когда его энергия  $E_{n_1}$  больше энергии  $E_{n_2}$ , которой он будет обладать после испускания фотона. Это условие выполняется, если  $n_1 > n_2$ . При

этом энергия  $\hbar\omega$  фотона, испущенного атомом, равна разности энергий электрона в начальном и конечном состояниях:

$$\boxed{\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_2}} \quad (18.14)$$

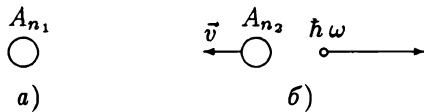


Рис. 18.9. Испускание фотона атомом

Процесс поглощения фотона атомом (рис. 18.10) описывают уравнением

$$\hbar\omega + A_{n_1} \rightarrow A_{n_2}.$$

В этом процессе фотон отдает всю свою энергию поглощающему его атому. Вследствие этого энергия атома увеличивается на величину  $\hbar\omega$ :

$$E_{n_2} - E_{n_1} = \hbar\omega, \quad (18.15)$$

где  $n_2 > n_1$ . Атом переходит в возбужденное состояние, а электрон – на орбиту большего радиуса.

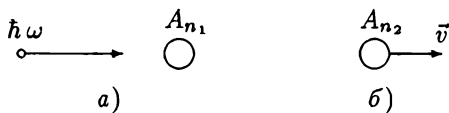


Рис. 18.10. Поглощение фотона атомом

Подставив выражение (18.13) для энергии электрона в атоме водорода ( $Z = 1$ ) в равенства (18.14) и (18.15), приходим к формуле (18.2) для спектра частот излучения, испускаемого или поглощаемого атомом водорода.

Атомы других химических элементов устроены более сложным образом, чем атом водорода и водородоподобный ион. В этих атомах вокруг ядра вращаются несколько электронов. В рамках теории Бора не удается правильно описать многоэлектронный атом, даже атом гелия, в котором имеется всего два электрона.

## ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

19.1. Корпускулярно-волновой дуализм.  
Волны де Бройля

В опытах по интерференции, дифракции и поляризации свет проявляет свои волновые свойства, т.е. для понимания и количественного описания этих опытов необходимо рассматривать свет как электромагнитные волны. В самом простом случае это может быть плоская монохроматическая волна

$$E_y(t, x) = A \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (19.1)$$

Эта функция описывает электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$ . Здесь  $E_y$  есть проекция вектора напряженности электрического поля на ось  $y$ ,  $A$  – амплитуда волны,  $\omega$  – частота,  $k$  – волновое число.

В явлениях квантовой оптики таких, как эффект Комптона и фотоэффект, обнаруживаются корпускулярные свойства света, т.е. эти явления находят правильное объяснение только в предположении, что электромагнитное излучение и свет, в частности, есть потоки частиц – корпускул, которые были названы фотонами. Фотон, или квант электромагнитного излучения, имеет импульс  $\vec{p}$  и энергию  $E$ , которые связаны с волновым вектором  $\vec{k}$  и частотой волны  $\omega$  соотношениями

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad E = \hbar \omega. \quad (19.2)$$

Таким образом, электромагнитное излучение в одних опытах ведет себя как волна, а в других – как поток частиц. Такая двойственность электромагнитного излучения обозначается термином ”корпускулярно-волновой дуализм”.

В 1923 г. французский физик Луи де Бройль высказал предположение, что потоки частиц вещества, например, потоки электронов также должны обладать волновыми свойствами. Это предположение получило убедительное подтверждение в опытах по дифракции электронов в кристаллах. За открытие волновой природы электрона де Бройль в 1929 г. был удостоен Нобелевской премии. В настоящее время на основании многочисленных экспериментов надежно установлено, что потоки любых микрочастиц вещества (электронов, протонов, нейтронов, мезонов и др.) проявляют волновые свойства.



Де Бройль предположил, что соотношения (19.2) справедливы не только для фотонов, но и для частиц вещества. Теперь эти соотношения называют формулами де Бройля. Из них следует, что однородный поток частиц, каждая из которых обладает импульсом  $p$  и энергией  $E$ , при определенных условиях будет вести себя как плоская волна с волновым числом  $k$  и частотой  $\omega$ :

$$k = \frac{p}{\hbar}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}. \quad (19.3)$$

Если частицы в потоке свободно движутся вдоль оси  $x$ , то соответствующая волна также должна распространяться вдоль оси  $x$ . Де Бройль описал эту волну комплексной функцией

$$\psi(t, x) = A e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (19.4)$$

где  $i$  – мнимая единица. При помощи формул (19.3) эту функцию можно преобразовать к виду

$$\psi(t, x) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}. \quad (19.5)$$

Возникают вопросы, какой физический смысл имеет величина  $\psi$  и какому уравнению должна удовлетворять функция  $\psi = \psi(t, x)$  в общем случае, когда частицы движутся не свободно, а под действием каких-либо сил. Ответы на эти и многие другие вопросы дает теория, называемая квантовой, или волновой механикой.

## 19.2. Волновая функция и ее смысл

В силу физической природы микрочастиц их движения могут быть описаны только статистически при помощи методов теории вероятностей. Экспериментатор, исследующий какое-либо проявление свойств микроскопических частиц, всегда имеет дело не с одной частицей, а системой, состоящей из очень большого числа микрочастиц. Такая система называется *статистическим ансамблем*.

Рассмотрим ансамбль, состоящий из  $N$  одинаковых частиц, заполняющих некоторый объем пространства  $V$ . Статистическое описание поведения одной из частиц ансамбля осуществляется посредством функции

$$w = w(t, \vec{r}), \quad (19.6)$$

которая называется *плотностью вероятности* и определяется следующим образом.

Разделим объем  $V$  на физически бесконечно малые объемы и рассмотрим один из них  $dV$ . Положение этого объема в пространстве определяется радиус-вектором  $\vec{r}$  одной из принадлежащих ему точек (рис. 19.1). Пусть в момент времени  $t$  в этом объеме оказалось  $dN$  частиц. Слова "физически бесконечно малый объем" означают, что число  $dN$  частиц в объеме  $dV$  мало по сравнению с числом  $N$  частиц в ансамбле, но в то же время число  $dN$  существенно больше единицы:

$$1 \ll dN \ll N.$$

Так как частицы непрерывно перемещаются в пространстве, число  $dN$  частиц в объеме  $dV$  может изменяться с течением времени  $t$ . Число  $dN$  зависит также от положения этого объема в пространстве, его величины и общего числа  $N$  частиц в ансамбле. Очевидно, что число частиц  $dN$  должно быть прямо пропорционально числу  $N$  и объему  $dV$ :

$$dN = N w(t, \vec{r}) dV. \quad (19.7)$$

Это соотношение можно рассматривать как определение плотности вероятности.

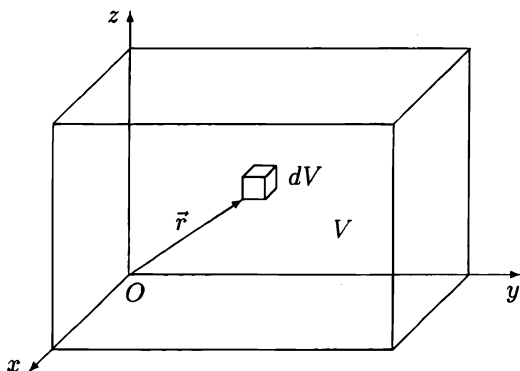


Рис. 19.1. К определению плотности вероятности

Величина

$$dW = \frac{dN}{N} \quad (19.8)$$

называется *вероятностью* обнаружить в момент времени  $t$  одну произвольно выбранную частицу ансамбля внутри объема  $dV$ . Из этого определения следует, что вероятность есть неотрицательная величина, удовлетворяющая неравенству

$$0 \leq dW \leq 1.$$

Так как сумма чисел  $dN$  равна числу  $N$  всех частиц в ансамбле:

$$\int dN = N,$$

сумма вероятностей  $dW$  равна единице:

$$\int dW = 1. \quad (19.9)$$

Это равенство называется *условием нормировки вероятности*.

Разделим равенство (19.7) на число  $N$ . С учетом (19.8) получим

$$dW = w(t, \vec{r}) dV. \quad (19.10)$$

Подстановка этого выражения в условие нормировки (19.9) преобразует его к виду

$$\int_V w(t, \vec{r}) dV = 1. \quad (19.11)$$

Покажем теперь, как при помощи плотности вероятности можно вычислить средние значения некоторых физических величин, характеризующих состояние частицы. Именно средние значения физических величин могут быть измерены в опытах с микрочастицами. Поэтому для предсказания результатов опытов, их математического описания и физического осмысления необходимо иметь теоретические формулы для расчета средних значений любых физических величин, характеризующих состояние и движение изучаемой микрочастицы.

Пусть  $f$  – некоторая физическая величина, зависящая от положения частицы в пространстве, т.е. эта величина представляет собой некоторую функцию от радиус-вектора  $\vec{r}$  частицы:  $f = f(\vec{r})$ . Например, это может быть потенциальная энергия частицы. Припишем каждой частице ансамбля порядковый номер  $i$ , который может принимать значения 1, 2, 3, ...,  $N$ . Радиус-вектор частицы под номером  $i$  обозначим как  $\vec{r}_i$ . В силу зависимости  $f = f(\vec{r})$  каждой частице соответствует определенное значение

$$f_i = f(\vec{r}_i)$$

величины  $f$ . Среднее значение  $\bar{f}$  величины  $f$  по определению равно сумме всех ее значений  $f_i$ , деленной на число частиц в ансамбле:

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i. \quad (19.12)$$

Так как число частиц в ансамбле очень велико, суммирование в этой формуле можно заменить интегрированием. Для этого сначала все слагаемые в этой сумме разделим на группы. Каждое слагаемое  $f_i$  в одной такой группе

$$\sum_{\vec{r}_i \in dV} f_i \equiv \sum_{\vec{r}_i \in dV} f(\vec{r}_i) \quad (19.13)$$

соответствует частицам, находящимся в каком-то малом объеме  $dV$ . Если этот объем достаточно мал, то все радиус-векторы  $\vec{r}_i \in dV$  можно положить равными одному какому-то вектору  $\vec{r} \in dV$ . При этом сумма (19.13) будет равна произведению значения  $f(\vec{r})$  на число  $dN$  частиц в объеме  $dV$ :

$$\sum_{\vec{r}_i \in dV} f_i = f(\vec{r}) dN.$$

Подставим в эту формулу выражение (19.7). Получим

$$\sum_{\vec{r}_i \in dV} f_i = N f(\vec{r}) w(t, \vec{r}) dV.$$

Сумма всех  $N$  значений  $f_i$  равна объемному интегралу от этого выражения. В результате придем к следующей формуле для среднего значения функции  $f = f(\vec{r})$ :

$$\bar{f} = \int_V f(\vec{r}) w(t, \vec{r}) dV. \quad (19.14)$$

Из этой формулы видно, что в общем случае среднее значение  $\bar{f}$  может зависеть от времени.

В квантовой механике описание движения одной из частиц ансамбля осуществляется при помощи так называемой *волновой функции*

$$\psi = \psi(t, \vec{r}). \quad (19.15)$$

В общем случае волновая функция является комплексной величиной, т.е. она содержит в себе мнимую единицу  $i$ , квадрат которой по определению равен  $-1$ :  $i^2 = -1$ . Физический смысл волновой функции заключается в том, что квадрат ее модуля равен плотности вероятности  $w(t, \vec{r})$  обнаружить частицу в момент времени  $t$  в некоторой окрестности точки  $\vec{r}$ :

$$w(t, \vec{r}) = |\psi(t, \vec{r})|^2 \equiv \psi^* \psi, \quad (19.16)$$

где  $\psi^*$  есть функция, комплексно сопряженная по отношению к функции  $\psi$ . Напомним, что комплексное число  $z$  можно представить в виде

суммы  $z = x + iy$ , где  $x$  и  $y$  – действительные числа. Число  $z^* = x - iy$  называется комплексно сопряженным по отношению к числу  $z$ . Таким образом, выражение, комплексно сопряженное по отношению к данному выражению, можно получить, если изменить в этом выражении знаки перед мнимой единицей на противоположные. Подстановка выражения (19.16) в равенство (19.11) преобразует его к виду

$$\int_V \psi^* \psi dV = 1. \quad (19.17)$$

Это равенство называют условием нормировки волновой функции.

Экспериментальному определению доступны не сами функции  $w(t, \vec{r})$  и  $\psi(t, \vec{r})$ , а только средние значения различных физических величин, характеризующих положение частицы и ее движение. Такими величинами являются координата частицы  $x$ , ее радиус-вектор  $\vec{r}$ , импульс частицы  $\vec{p}$ , его проекция  $p_x$  на ось  $x$ , энергия и другие механические величины. Зная волновую функцию, можно вычислить средние значения всех механических величин, а затем сравнить эти значения с аналогичными средними значениями, полученными в результате экспериментальных исследований. Так, например, среднее значение координаты  $\bar{x}$  можно вычислить по формуле

$$\bar{x} = \int_V x |\psi(t, \vec{r})|^2 dV,$$

которая является следствием формул (19.14) и (19.16). Совпадение теоретических (расчетных) и экспериментальных значений физических величин является критерием правильности теории.

### 19.3. Операторы в квантовой механике

При вычислении средних значений различных физических величин в квантовой механике поступают следующим образом. Каждой физической величине  $a$  ставится в соответствие оператор  $\hat{a}$ , который символизирует совокупность математических операций, производимых над волновой функцией  $\psi(t, \vec{r})$ . Результатом этих операций является другая функция  $f(t, \vec{r})$ :

$$f(t, \vec{r}) \equiv \hat{a} \psi(t, \vec{r}).$$

Координате  $x$  частицы соответствует оператор  $\hat{x}$ , который по определению равен  $x$ :

$$\hat{x} = x. \quad (19.18)$$

Таким образом, действие оператора  $\hat{x}$  на волновую функцию  $\psi(t, \vec{r})$  в данном случае сводится к ее умножению на  $x$ . В результате получим

функцию

$$\hat{x} \psi(t, \vec{r}) \equiv x \psi(t, \vec{r}).$$

Оператор импульса  $\hat{p}_x$  определяется так:

$$\hat{p}_x = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (19.19)$$

Из этого определения следует, что

$$\hat{p}_x \psi = -i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

т.е. действие оператора  $\hat{p}_x$  на функцию  $\psi$  состоит в дифференцировании функции по  $x$  и умножении на  $-i \hbar$ .

Согласно определению (19.19) оператор  $\hat{\vec{p}}$  импульса частицы можно записать как

$$\hat{\vec{p}} = -i \hbar \nabla, \quad (19.20)$$

где  $\nabla$  – дифференциальный оператор "набла" такой, что

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Оператор кинетической энергии  $\hat{T}$  связан с оператором импульса  $\hat{\vec{p}}$  так же, как кинетическая энергия частицы  $T$  связана с ее импульсом  $\vec{p}$ :

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2, \quad (19.21)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– оператор Лапласа.

Оператор потенциальной энергии равен самой потенциальной энергии:

$$\hat{U} = U(\vec{r}). \quad (19.22)$$

Оператор полной энергии  $\hat{H}$  называется оператором Гамильтона, или гамильтонианом. Этот оператор равен сумме операторов кинетической и потенциальной энергий:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}. \quad (19.23)$$

Более подробно это символическое равенство можно записать так:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}). \quad (19.24)$$

Физический смысл какого-либо оператора  $\hat{a}$  в квантовой механике заключается в том, что с его помощью по формуле

$$\bar{a} = \int_V \psi^*(t, \vec{r}) \hat{a} \psi(t, \vec{r}) dV \quad (19.25)$$

можно вычислить среднее значение величины  $a$ . В общем случае среднее значение изменяется с течением времени:  $\bar{a} = \bar{a}(t)$ . В частном случае, когда средние значения всех физических величин, характеризующих движение микрочастицы, не зависят от времени, состояние частицы называется *стационарным*. Такое состояние описывается волновой функцией вида

$$\psi(t, \vec{r}) = e^{-i\omega t} \varphi(\vec{r}), \quad (19.26)$$

где  $\omega$  – постоянная, а функция  $\varphi = \varphi(\vec{r})$  зависит только от радиус-вектора  $\vec{r}$ . Так как комплексно сопряженная функция

$$\psi^*(t, \vec{r}) = e^{i\omega t} \varphi^*(\vec{r}),$$

подстановка функции (19.26) в формулу (19.25) дает среднее значение

$$\bar{a} = \int_V \varphi^*(\vec{r}) \hat{a} \varphi(\vec{r}) dV, \quad (19.27)$$

которое не изменяется с течением времени.

Подстановка функции (19.26) в условие нормировки (19.17) приводит к равенству

$$\int_V \varphi^*(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV = 1. \quad (19.28)$$

## 19.4. Уравнение Шредингера

Основным законом в квантовой механике является уравнение для волновой функции  $\psi = \psi(t, \vec{r})$

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi.$$

(19.29)

В 1926 г. австрийский физик Эрвин Шредингер, развивая идеи де Бройля о волновых свойствах потоков частиц вещества, первым записал это уравнение (Нобелевская премия 1933 г.). Уравнение Шредингера имеет

в квантовой механике такое же фундаментальное значение, какое имеет второй закон Ньютона в классической механике.

С учетом строения оператора Гамильтона (19.24) уравнение Шредингера можно преобразовать к виду

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U \psi. \quad (19.30)$$

Это есть дифференциальное уравнение в частных производных. Для того чтобы среди множества различных решений уравнения Шредингера найти единственное  $\psi = \psi(t, \vec{r})$ , необходимо выделить его при помощи какого-либо дополнительного условия. В качестве такого условия обычно выбирают начальное условие

$$\psi(0, \vec{r}) = \psi_0(\vec{r}),$$

где  $\psi_0(\vec{r})$  — известная функция. Это условие задает зависимость  $\psi$  от  $\vec{r}$  при  $t = 0$ . Кроме этого, волновая функция в любой момент времени должна удовлетворять условию нормировки (19.17). Зная функцию  $\psi_0(\vec{r})$ , определяющую состояние частицы в начальный момент времени  $t = 0$ , из уравнения Шредингера можно найти функцию  $\psi = \psi(t, \vec{r})$ , описывающую состояние частицы в любой другой, более поздний момент времени  $t > 0$ .

Рассмотрим, как можно получить уравнение Шредингера из предположения, что волна де Бройля (19.5) является решением этого уравнения. Волна де Бройля (19.5) описывает поток свободно летящих частиц, каждая из которых имеет энергию  $E$  и импульс  $p$ . Аргументами волновой функции  $\psi$  в данном случае служат время  $t$  и координата  $x$ . При этом энергию  $E$  и импульс  $p$  частицы следует рассматривать как параметры. Естественно предположить, что волна де Бройля есть частное решение некоторого уравнения, которое выражает общий закон, определяющий движение частиц в рамках квантовой механики. В таком случае это уравнение не должно содержать в себе параметров, характеризующих какой-то один вид движения частицы. Исходя из этого предположения, найдем дифференциальное уравнение, частным решением которого является волна де Бройля (19.4), или (19.5). При этом будем иметь в виду, что энергия свободной частицы  $E$  и ее импульс  $p$  связаны соотношением

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (19.31)$$

Найдем первую производную от функции (19.4) по  $t$  и вторую по  $x$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \psi.$$



При помощи формул де Бройля (19.3) эти равенства можно записать так:

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \psi, \quad - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m} \psi.$$

Из этих равенств нетрудно исключить параметры  $E$  и  $p$ . Правые части этих равенств совпадают в силу соотношения (19.31). Следовательно, должны быть равны их левые части. Таким образом, приходим к уравнению

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (19.32)$$

В общем случае волновая функция свободной частицы может зависеть от всех координат:  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Очевидно, что в этом случае она должна удовлетворять уравнению

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi, \quad (19.33)$$

которое с учетом обозначения (19.21) оператора  $\hat{T}$  кинетической энергии можно записать так:

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{T} \psi. \quad (19.34)$$

Это уравнение для свободной частицы нетрудно обобщить на случай, когда частица движется в консервативном силовом поле. В этом случае ее полная энергия будет равна сумме кинетической и потенциальной энергий. Полной энергии частицы в квантовой механике соответствует оператор  $\hat{H}$ , определяемый формулой (19.23). Таким образом, более общее уравнение для волновой функции получим, если заменим в уравнении (19.34) оператор кинетической энергии  $\hat{T}$  на оператор полной энергии  $\hat{H}$ . В результате придем к уравнению Шредингера (19.29). Строго говоря, приведенные преобразования не являются выводом уравнения Шредингера, но они помогают понять его происхождение и физическое содержание.

## 19.5. Соотношение неопределенностей

Рассмотрим ансамбль частиц, каждая из которых находится в одном и том же квантовом состоянии. Пусть известна волновая функция  $\psi = \psi(t, \vec{r})$ , описывающая это состояние. Представим себе, что перед физиком-экспериментатором поставлена задача измерить величину  $a$ , характеризующую положение в пространстве или движение одной частицы. Предположим, что ему удалось измерить в некоторый момент времени  $t$  значения величины  $a$  для всех частиц ансамбля. Таким образом экспериментатор получил в свое распоряжение совокупность чисел

$a_1, a_2, \dots, a_N$ , где  $N$  – число частиц в ансамбле. Результатом измерения величины  $a$  является ее среднее значение  $\bar{a}$ , которое экспериментатор найдет по формуле

$$\bar{a}_{\text{эксп}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i. \quad (19.35)$$

Разность  $a_i - \bar{a}$  называется отклонением значения  $a_i$  от среднего значения  $\bar{a}$ , а выражение

$$\overline{(a - \bar{a})^2}_{\text{эксп}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2 \quad (19.36)$$

– средним значением квадрата отклонения. Ошибкой измерения величины  $a$ , или ее *неопределенностью* называется величина

$$\Delta a = \sqrt{\overline{(a - \bar{a})^2}}. \quad (19.37)$$

Эта величина характеризует ”разброс” значений  $a_i$  в окрестности среднего значения  $\bar{a}$  и определяет точность измерения величины  $a$ . Чем меньше  $\Delta a$ , тем выше точность измерения, т.е. с тем большей вероятностью величина  $a$  принимает значение, близкое к  $\bar{a}$ . Если  $\Delta a = 0$ , то это значит, что величина  $a$  в точности равна  $\bar{a}$ .

Среднее значение  $\bar{a}$  и неопределенность  $\Delta a$  величины  $a$  для частицы, находящейся в состоянии, описываемом известной волновой функцией  $\psi = \psi(t, \vec{r})$ , могут быть вычислены теоретически. Для расчета среднего значения в квантовой механике имеется формула (19.25). Среднее значение квадрата отклонения можно вычислить по аналогичной формуле

$$\overline{(a - \bar{a})^2} = \int_V \psi^* (\hat{a} - \bar{a})^2 \psi dV. \quad (19.38)$$

В том случае, когда экспериментальные и теоретические значения  $\bar{a}$  и  $\Delta a$  совпадают, можно говорить о согласии теории с результатами экспериментов.

Квантовая механика описывает движения микрочастиц вещества с учетом их волновых свойств. Это описание осуществляется посредством волновой функции  $\psi$ . Необходимость создания квантовой механики была вызвана тем, что движения микрочастиц вещества обладают такими особенностями, которые не могут найти объяснения в рамках классической механики. Одна из таких особенностей движения микрочастиц заключается в следующем. Пусть перед экспериментатором была поставлена

задача измерить одновременно координату  $x$  и импульс  $p_x$  некоторой микрочастицы. Точность измерения координаты определяется величиной  $\Delta x$ , а точность измерения импульса – величиной  $\Delta p_x$ , которые можно вычислить по приведенным выше формулам. Оказывается, неопределенности  $\Delta x$  и  $\Delta p_x$  всегда удовлетворяют неравенству

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (19.39)$$

В 1927 г. это неравенство было доказано теоретически немецким физиком В.Гейзенбергом и названо *соотношением неопределенностей*. Согласно этому неравенству неопределенности координаты  $\Delta x$  и импульса  $\Delta p_x$  не могут быть сколь угодно малы одновременно. Это означает, что координата  $x$  и импульс  $p_x$  частицы в одном и том же измерении не могут быть определены сколь угодно точно, какими бы совершенными ни были измерительные приборы. Соотношение неопределенностей есть следствие физической природы микрочастиц вещества. Многочисленные измерения подтверждают его справедливость.

## 19.6. Собственные функции и собственные значения операторов \*

Функция  $\varphi = \varphi(\vec{r})$  называется *собственной функцией* оператора  $\hat{a}$ , если она является решением уравнения

$$\hat{a} \varphi = a \varphi, \quad (19.40)$$

где число  $a$  называется *собственным значением* оператора  $\hat{a}$ . Это уравнение в общем случае имеет не одно, а множество различных решений. Совокупность всех значений числа  $a$ , при которых уравнение (19.40) имеет решение, называют *спектром собственных значений* оператора  $\hat{a}$ .

Собственные функции какого-либо оператора  $\hat{a}$  обладают замечательной особенностью. *Когда частица находится в состоянии, описываемом собственной функцией  $\varphi$  оператора  $\hat{a}$ , физическая величина  $a$  принимает значение, в точности равное соответствующему собственному значению  $a$ , т.е.*

$$\bar{a} = a \quad \text{и} \quad \Delta a = 0.$$

В самом деле, с учетом равенства (19.40) и условия нормировки (19.28) будем иметь

$$\bar{a} = \int \varphi^* \hat{a} \varphi dV = \int \varphi^* a \varphi dV = a \int \varphi^* \varphi dV = a.$$

Докажем теперь, что  $\Delta a = 0$ . Но прежде выведем формулу

$$\overline{(a - \bar{a})^2} = \bar{a}^2 - \bar{a}^2, \quad (19.41)$$

согласно которой среднее значение квадрата отклонения равно разности среднего квадрата величины  $a$  и квадрата ее среднего значения. Положим в формуле (19.38)  $\psi = \varphi$  и преобразуем ее следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{(a - \bar{a})^2} &= \int \varphi^* (\hat{a} - \bar{a})^2 \varphi dV = \int \varphi^* (\hat{a}^2 - 2\hat{a}\bar{a} + \bar{a}^2) \varphi dV = \\ &= \int \varphi^* \hat{a}^2 \varphi dV - 2\bar{a} \int \varphi^* \hat{a} \varphi dV + \bar{a}^2 \int \varphi^* \varphi dV. \end{aligned}$$

Так как

$$\int \varphi^* \hat{a}^2 \varphi dV = \bar{a}^2, \quad \int \varphi^* \hat{a} \varphi dV = \bar{a}, \quad \int \varphi^* \varphi dV = 1,$$

после простых преобразований приходим к формуле (19.41).

Вычислим  $\bar{a}^2$  при условии, что  $\varphi$  есть собственная функция оператора  $\hat{a}$ :

$$\begin{aligned} \bar{a}^2 &= \int \varphi^* \hat{a}^2 \varphi dV = \int \varphi^* \hat{a} (\hat{a} \varphi) dV = \\ &= \int \varphi^* \hat{a} (a \varphi) dV = a \int \varphi^* \hat{a} \varphi dV = a \bar{a} = a^2. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к выводу, что согласно формуле (19.41)

$$\overline{(a - \bar{a})^2} = 0 \quad \text{и} \quad \Delta a = 0.$$

Итак, доказано, что среднее значение  $\bar{a}$  в точности равно собственному значению  $a$ , которое соответствует данной собственной функции  $\varphi$  оператора  $\hat{a}$ .

## 19.7. Стационарные состояния

Стационарное состояние частицы описывается волновой функцией вида (19.26). Подставим эту функцию в уравнение Шредингера (19.29) и найдем таким образом уравнение для функции  $\varphi(\vec{r})$ . Частная производная от функции

$$\psi(t, \vec{r}) = e^{-i\omega t} \varphi(\vec{r})$$

по времени  $t$  будет

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega e^{-i\omega t} \varphi(\vec{r}).$$

Подстановка этой функции и ее производной в (19.29) приводит к уравнению

$$\hat{H} \varphi = E \varphi, \quad (19.42)$$

где  $E = \hbar \omega$ . Уравнение (19.42) называют уравнением Шредингера для стационарных состояний, или просто *стационарным уравнением Шредингера*. Уравнение (19.42) есть уравнение для собственных функций оператора  $\hat{H}$  полной энергии. Поэтому энергия частицы, состояние которой описывается волновой функцией  $\varphi$ , являющейся решением этого уравнения, будет в точности равна соответствующему собственному значению  $E$  гамильтониана  $\hat{H}$ .

С учетом формулы (19.24) уравнение (19.42) можно записать более подробно следующим образом:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi + U \varphi = E \varphi. \quad (19.43)$$

Уравнения (19.42) и (19.43) имеют решения не для любых значений энергии  $E$ . Все собственные значения оператора  $\hat{H}$  полной энергии, для которых эти уравнения имеют решение, образуют так называемый *энергетический спектр*, или спектр возможных значений энергии частицы.

В некоторых случаях эти значения образуют счетное множество, т.е. их можно перенумеровать. Пусть  $n$  – номер произвольного собственного значения энергии. При этом энергию частицы можно рассматривать как функцию от номера  $n$ :  $E_n = E(n)$ . Такой спектр энергий называется *дискретным*. Каждое значение энергии дискретного спектра можно отметить на числовой оси  $E$  посредством отрезка прямой линии, который называют *уровнем энергии* (рис. 19.2). Среди возможных значений энергии частицы всегда есть наименьшее. Волновая функция, соответствующая наименьшему значению энергии, описывает так называемое *основное состояние* частицы.

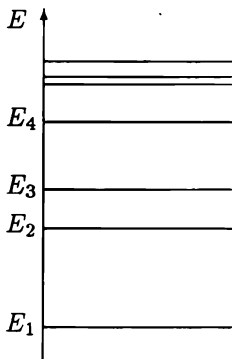


Рис. 19.2.  
Уровни энергии

Иногда различным состояниям частицы соответствует одно и то же значение энергии  $E$ . Такие состояния называют *вырожденными*. Число  $g$  различных стационарных состояний частицы с одной и той же энергией  $E$  называют *кратностью вырождения* данного значения (уровня) энергии.

## ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

## 20.1. Свободная частица

Движение частицы называется *свободным*, когда на нее не действуют внешние силы. В таком случае саму частицу также называют свободной. Потенциальную энергию свободной частицы можно считать равной нулю:  $U \equiv 0$ .

Волновая функция  $\psi = \psi(t, \vec{r})$ , описывающая движение свободной частицы удовлетворяет уравнению Шредингера (4.33). Рассмотрим поток свободных частиц, движущихся вдоль оси  $x$ . Движение частиц в этом случае описывается волновой функцией

$$\psi = \psi(t, x), \quad (20.1)$$

которая зависит только от одной координаты  $x$  и удовлетворяет уравнению Шредингера (4.32)

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (20.2)$$

Волновая функция, описывающая стационарное движение частиц, по определению (4.26) будет

$$\psi(t, x) = e^{-i\omega t} \varphi(x). \quad (20.3)$$

Подстановка этой функции в уравнение (20.2) приводит к стационарному уравнению Шредингера

$$- \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = E \varphi, \quad (20.4)$$

где

$$E = \hbar \omega. \quad (20.5)$$

Введем обозначение

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

и запишем уравнение (20.4) так:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi = 0. \quad (20.6)$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}.$$

При этом волновая функция (20.3) будет иметь вид

$$\psi(t, x) = A e^{-i(\omega t - kx)} + B e^{-i(\omega t + kx)}. \quad (20.7)$$

Первое слагаемое в этой формуле

$$\psi_+(t, x) = A e^{-i(\omega t - kx)} \quad (20.8)$$

есть гармоническая волна, бегущая вдоль оси  $x$  в сторону возрастания координаты, а второе

$$\psi_-(t, x) = B e^{-i(\omega t + kx)} \quad (20.9)$$

– волна, бегущая в противоположном направлении. Комплексные коэффициенты  $A$  и  $B$  называются амплитудами бегущих волн. Эти функции описывают потоки частиц, летящих вдоль оси  $x$  навстречу друг другу.

Подействуем на функцию  $\psi_+$  оператором импульса  $\hat{p}_x$ , т.е. вычислим функцию  $\hat{p}_x\psi_+$ . Используя определение (4.19), найдем, что

$$\hat{p}_x\psi_+ = -i\hbar \frac{\partial\psi_+}{\partial x} = -i\hbar \cdot ik\psi_+ = \hbar k\psi_+,$$

или

$$\hat{p}_x\psi_+ = \hbar k\psi_+.$$

Из этого равенства следует, что функция  $\psi_+$  является собственной функцией оператора импульса  $\hat{p}_x$ , а соответствующее собственное значение равно  $\hbar k$ . На основании теоремы, доказанной в предыдущем разделе, можно утверждать, что в состоянии, описываемом волновой функцией  $\psi_+$ , частица обладает импульсом  $p_x$ , который в точности равен собственному значению  $\hbar k$ :

$$p_x = \hbar k.$$

Таким образом, мы пришли к соотношению, которое вместе с формулой (20.5) составляет *соотношения де Бройля* (19.2).

Функции (20.7) – (20.9) таковы, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx$$

от квадрата модуля волновой функции расходится и не может быть равен единице. Поэтому в этом случае считают, что величина  $|\psi|^2$  есть концентрация  $n$  частиц в потоке, а не плотность вероятности. С учетом зависимости (20.3) придем к формуле

$$n(x) = |\varphi(x)|^2.$$

## 20.2. Движение частицы в поле консервативной силы

В классической механике движение частицы описывают при помощи зависимости ее радиус-вектора от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (20.10)$$

При заданных начальных условиях

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 \quad \text{и} \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

эта зависимость может быть найдена из второго закона Ньютона

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (20.11)$$

Движение частицы считается известным, если известна зависимость (20.10). В таком случае для любого момента времени можно сколь угодно точно определить положение частицы в пространстве и ее скорость. Поэтому описание движения частицы посредством зависимости (20.10) называют *детерминистическим*.

Консервативное силовое поле  $\vec{F}$  определяется соотношением

$$\vec{F} = -\nabla U, \quad (20.12)$$

связывающим вектор силы и потенциальную энергию частицы  $U = U(\vec{r})$ . Согласно этому определению проекция силы на ось  $x$  равна с обратным знаком производной по  $x$  от потенциальной энергии:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$



Если на частицу не действуют другие силы, кроме консервативной силы (20.12), то полная механическая энергия частицы со временем изменяться не будет:

$$\frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r}) = E = \text{const} . \quad (20.13)$$

Это утверждение составляет содержание закона сохранения энергии.

Так как кинетическая энергия есть величина неотрицательная, справедливо неравенство

$$U(\vec{r}) \leq E . \quad (20.14)$$

Из этого неравенства следует, что частица, обладающая определенной энергией  $E$ , не может оказаться в области пространства, где ее потенциальная энергия больше полной механической энергии  $E$ . Другими словами, эти области пространства недоступны для частицы с таким значением энергии.

Рассмотрим движение частицы вдоль оси  $x$  под действием силы, которая зависит только от ее положения:

$$F_x = F_x(x) .$$

Функцию  $F_x = F_x(x)$  одного переменного всегда можно представить в виде

$$F_x = - \frac{dU}{dx} , \quad (20.15)$$

где  $U = U(x)$  – потенциальная энергия частицы.

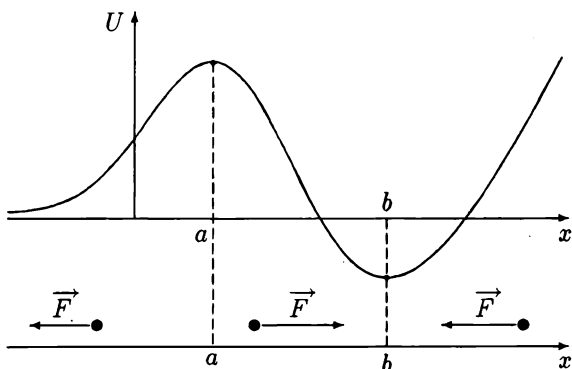


Рис. 20.1. Потенциальная энергия частицы и действующая на нее консервативная сила

На рис. 20.1 изображен график возможной зависимости  $U$  от  $x$ . При  $x = a$  эта функция имеет максимум, а при  $x = b$  – минимум. Часть

графика функции  $U = U(x)$ , содержащую максимум, называют *потенциальным барьером*. На рис. 20.1 эта часть соответствует  $x \in (-\infty, b)$ . Часть графика, содержащую минимум, называют *потенциальной ямой*. Кривая на рис. 20.1 имеет "яму" при  $x \in (a, +\infty)$ .

По виду графика функции  $U = U(x)$  можно определить направление силы, действующей на частицу. В тех точках оси  $x$ , где функция  $U = U(x)$  возрастает, проекция  $F_x$  силы на ось  $x$  отрицательна, т.е. сила направлена в сторону убывания  $x$  (рис. 20.1); а в точках оси  $x$ , где функция  $U = U(x)$  убывает, проекция силы  $F_x$  положительна и сила направлена в ту же сторону, что и ось  $x$ :

$$\frac{dU}{dx} > 0 \quad \text{и} \quad F_x < 0 \quad \text{при} \quad x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty);$$

$$\frac{dU}{dx} < 0 \quad \text{и} \quad F_x > 0 \quad \text{при} \quad x \in (a, b).$$

Запишем закон сохранения полной механической энергии частицы при ее движении вдоль оси  $x$ :

$$\frac{1}{2} m v^2 + U(x) = E = \text{const} . \quad (20.16)$$

Теперь неравенство (20.14) принимает вид

$$U(x) \leq E . \quad (20.17)$$

Из этого неравенства следует, что частица, полная механическая энергия которой равна  $E$ , не может оказаться в тех точках оси  $x$ , где ее потенциальная энергия больше значения  $E$ .

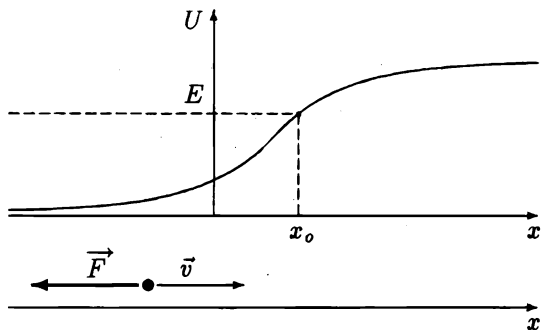


Рис. 20.2. Падение частицы на потенциальный барьер

Пусть потенциальная энергия  $U = U(x)$  движущейся вдоль оси  $x$  частицы есть монотонно возрастающая функция, график которой показан

на рис. 20.2. В таком случае действующая на частицу сила будет всюду направлена против оси  $x$ . Когда частица движется в сторону возрастания  $x$ , сила будет тормозить ее движение. В противоположную сторону частица будет двигаться ускоренно. Пусть частица с энергией  $E$  движется в сторону возрастания потенциальной энергии (в рассматриваемом случае из  $-\infty$  направо). Такое движение называют падением на потенциальный барьер. Так как при этом сила направлена против скорости, движение частицы будет замедляться. Когда частица достигнет точки, где ее потенциальная энергия равна  $E$  (на рис. 20.2 эта точка имеет координату  $x_0$ ), ее кинетическая энергия и скорость станут равны нулю, т.е. частица остановится. Затем под действием силы  $F_x$  частица начнет ускоренно двигаться в обратном направлении. В таком случае говорят, что произошло отражение частицы от потенциального барьера.

Подводя итоги, отметим, что согласно закону сохранения энергии – одному из основных законов классической механики – частица с энергией  $E$  не может проникнуть в те области пространства, где ее потенциальная энергия больше значения  $E$ . Многочисленные экспериментальные факты опровергают это утверждение. Оказывается, микрочастицы вопреки законам классической механики способны проникать в те области пространства, где их потенциальная энергия  $U$  больше полной механической энергии  $E$ . Правильное объяснение эти факты находят только в рамках квантовой механики.

### 20.3. Стационарное движение частицы вдоль прямой в поле консервативной силы

Рассмотрим теперь движение частицы вдоль оси  $x$  с позиций квантовой механики. Согласно представлениям этой теории движение частицы следует описывать посредством волновой функции, которая в данном случае будет зависеть от времени  $t$  и только одной координаты  $x$ :

$$\psi = \psi(t, x). \quad (20.18)$$

Волновая функция может быть найдена из уравнения Шредингера (4.29), которое представляет собой основной закон квантовой механики.

В рассматриваемом случае определяемый формулой (4.23) оператор полной энергии  $\hat{H}$ , так же, как и волновая функция  $\psi$ , будет зависеть только от координаты  $x$ :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x). \quad (20.19)$$

Подстановка этого выражения в уравнение Шредингера (4.29) преобразу-

зует его к виду

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x) \psi. \quad (20.20)$$

Стационарное движение частицы вдоль оси  $x$  описывается волновой функцией

$$\psi(t, x) = e^{-i\omega t} \varphi(x), \quad (20.21)$$

где  $\varphi = \varphi(x)$  – функция, удовлетворяющая стационарному уравнению Шредингера (4.42), которое теперь будет иметь вид

$$- \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + U(x) \varphi = E \varphi. \quad (20.22)$$

Это есть обыкновенное линейное дифференциальное уравнение, решение которого может быть найдено без труда в тех случаях, когда зависимость  $U = U(x)$  потенциальной энергии  $U$  от координаты  $x$  является достаточно простой. Некоторые такие случаи будут рассмотрены в следующих разделах.

Запишем уравнение (20.22) так, как это принято в теории дифференциальных уравнений, начиная со старшей производной, а коэффициент при ней сделаем равным единице:

$$\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x)) \varphi = 0. \quad (20.23)$$

При решении этого уравнения необходимо будет использовать некоторые дополнительные условия, которым должна удовлетворять волновая функция  $\varphi = \varphi(x)$ . Во-первых, по своему физическому смыслу функция  $\varphi = \varphi(x)$  должна быть непрерывной, т.е. она должна удовлетворять условию

$$\varphi(a-0) = \varphi(a) = \varphi(a+0), \quad (20.24)$$

где  $a$  – произвольное значение координаты  $x$  из области определения этой функции. Во-вторых, волновая функция  $\varphi = \varphi(x)$  должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x) \varphi(x) dx = 1. \quad (20.25)$$

Для этого необходимо, чтобы она была ограниченной, т.е. на бесконечности она должна обращаться в ноль:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0. \quad (20.26)$$

Докажем, что в тех точках на оси  $x$ , где потенциальная энергия  $U = U(x)$  терпит разрыв, но является ограниченной, первая производная функции  $\varphi = \varphi(x)$  должна быть непрерывной. С этой целью запишем уравнение (20.22) так:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = (E - U(x)) \varphi.$$

Пусть функция  $U = U(x)$  имеет разрыв в точке  $x = a$ . Проинтегрируем обе части этого равенства по  $x$  в пределах от  $a - \delta$  до  $a + \delta$ . Получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \varphi'' dx = \int_{a-\delta}^{a+\delta} (E - U(x)) \varphi dx.$$

Интеграл в левой части преобразуем по формуле Ньютона - Лейбница:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\varphi'(a + \delta) - \varphi'(a - \delta)) = \int_{a-\delta}^{a+\delta} (E - U(x)) \varphi dx.$$

В силу сделанного предположения функция под интегралом в правой части этого равенства ограничена. Поэтому в пределе при  $\delta \rightarrow 0$  этот интеграл будет равен нулю. Таким образом, приходим к условию:

$$\varphi'(a - 0) = \varphi'(a + 0). \quad (20.27)$$

из которого следует, что производная функции  $\varphi = \varphi(x)$  при  $x = a$  непрерывна или имеет устранимый разрыв.

#### 20.4. Частица в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками

Предположим, что при движении вдоль оси  $x$  частица встречает на своем пути две непреодолимые преграды, которые расположены в точках  $x = 0$  и  $x = l$  (рис. 20.3). В пространстве между этими преградами, т.е. при  $x \in (0, l)$ , частица движется свободно. Сталкиваясь с одной из преград, она отражается от нее и изменяет направление своего движения на противоположное. По этой причине частица не может выйти за пределы интервала  $(0, l)$ .

В таком случае зависимость потенциальной энергии частицы от координаты  $x$  имеет вид

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (0, l), \\ \infty & \text{при } x \notin (0, l). \end{cases} \quad (20.28)$$

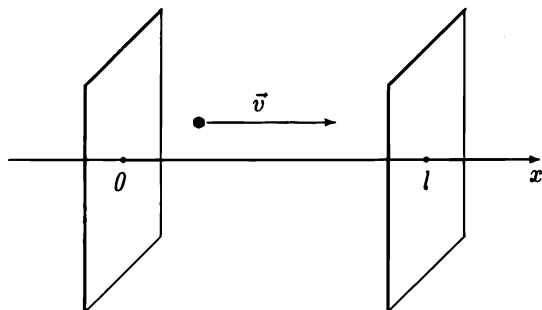


Рис. 20.3. Частица между непроницаемыми стенками

График зависимости (20.28) представлен на рис. 20.4. Эта кривая также называется потенциальной ямой. В данном случае потенциальная яма имеет бесконечно высокие вертикальные стенки.

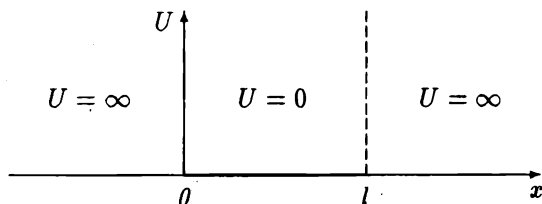


Рис. 20.4. Прямоугольная потенциальная яма с бесконечно высокими стенками

Так как при  $x \in (0, l)$  потенциальная энергия  $U(x)$  равна нулю, уравнение Шредингера (20.23) для этих значений  $x$  принимает вид

$$\varphi'' + k^2 \varphi = 0 \quad \text{при } x \in (0, l), \quad (20.29)$$

где

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (20.30)$$

Запишем решение уравнения (20.29) в виде

$$\varphi(x) = A \sin(kx + \alpha), \quad (20.31)$$

где  $A$  и  $\alpha$  – постоянные интегрирования, для отыскания которых необходимо сформулировать граничные условия, т.е. найти значения функции  $\varphi(x)$  при  $x = 0$  и  $x = l$ . Так как частица не может оказаться вне интервала  $(0, l)$ , волновая функция должна быть равна нулю вне этого интервала и в точках  $0$  и  $l$ :

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0. \quad (20.32)$$

Применим эти условия к функции (20.31). Получим равенства

$$A \sin \alpha = 0, \quad A \sin(kl + \alpha) = 0. \quad (20.33)$$

Амплитуда  $A$  не может быть равна нулю, так как это означало бы, что равна нулю вероятность найти частицу в интервале  $(0, l)$ , т.е. что она просто не существует. Поэтому положим

$$\alpha = 0.$$

При этом первое из равенств (20.33) выполняется, а второе принимает вид

$$\sin kl = 0.$$

Отсюда следует, что

$$k = \frac{\pi n}{l}, \quad (20.34)$$

где  $n$  – целое число.

Итак, волновая функция, описывающая стационарное состояние частицы в потенциальной яме (20.28), имеет вид

$$\varphi(x) = A \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (20.35)$$

Согласно вероятностной трактовке квантовой механики физический смысл имеет не сама волновая функция, а квадрат ее модуля. Поэтому волновые функции, модули которых тождественно равны друг другу, в действительности описывают одно и то же состояние частицы. Учитывая это, удобно считать, что в формуле (20.35) квантовое число  $n$  принимает только целые положительные значения:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

В противном случае волновые функции, описывающие одно и то же состояние частицы, соответствовали бы различным квантовым числам, что сопряжено с некоторыми неудобствами при подсчете числа возможных стационарных состояний частицы.

Функцию (20.35) можно записать так:

$$\varphi(x) = \frac{A}{2i} \left( e^{ikx} - e^{-ikx} \right).$$

При этом волновая функция (20.21) будет представлять собой суперпозицию двух бегущих навстречу друг другу волн одинаковых амплитуд:

$$\psi(t, x) = \frac{A}{2i} \left( e^{-i(\omega t - kx)} - e^{-i(\omega t + kx)} \right).$$

Таким образом, функция (20.35) есть стоячая волна, образованная в результате интерференции двух бегущих волн. Графики функции (20.35) для значений квантового числа  $n = 1, 2$  и  $3$  изображены на рис. 20.5.

Используя соотношение (20.30), связывающее энергию частицы и волновое число, получим формулу

$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = \frac{(\pi \hbar n)^2}{2m l^2}, \quad (20.36)$$

которая описывает энергетический спектр частицы. Наиболее важный вывод, который следует сделать из рассмотренного примера, заключается в следующем. Энергия частицы, которая совершает стационарное движение внутри потенциальной ямы, "квантуется", т.е. может принимать не любые, а только вполне определенные дискретные значения.

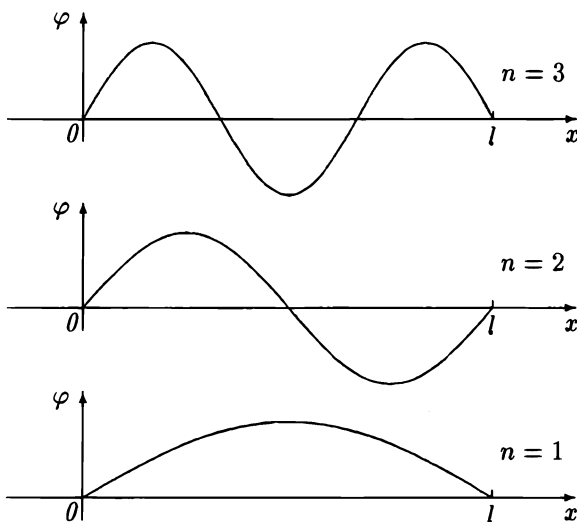


Рис. 20.5. Волновая функция  $\varphi = \varphi(x)$



Используя условие нормировки, найдем постоянную  $A$  в формуле (20.35). Для этого подставим функцию в равенство (20.25). Получим:

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = 1.$$

Так как интеграл

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left( 1 - \cos \frac{2\pi n x}{l} \right) dx = \frac{l}{2},$$

будем иметь

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

## 20.5. Гармонический осциллятор

Исследуем движение частицы, на которую действует сила  $F_x = -cx$ , где  $c$  – положительная постоянная. В классической механике движение частицы описывается посредством функции  $x = x(t)$ , удовлетворяющей уравнению Ньютона

$$m \ddot{x} = -cx.$$

Это уравнение удобно привести к виду

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (20.37)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (20.38)$$

Решением дифференциального уравнения (20.37) является функция

$$x(t) = A \cos(\omega t + \beta),$$

которая описывает гармонические колебания с частотой  $\omega$ . Частицу, совершающую такое движение, называют *гармоническим осциллятором*.

Когда частица находится в силовом поле  $F_x = -cx$ , она обладает потенциальной энергией

$$U(x) = \frac{1}{2} cx^2. \quad (20.39)$$

Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх (рис. 20.6). Такой график также называется потенциальной ямой.

В квантовой механике стационарные состояния гармонического осциллятора описывают посредством функции  $\varphi = \varphi(x)$ , которая удовлетворяет уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{2} c x^2 \varphi = E\varphi. \quad (20.40)$$

Это уравнение имеет счетное множество решений  $\varphi_n = \varphi_n(x)$ , где число  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  называют *колебательным* квантовым числом. Спектр энергий гармонического осциллятора определяется формулой

$$E = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (20.41)$$

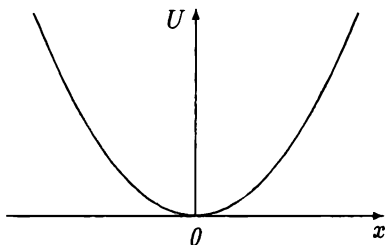


Рис. 20.6. Параболическая потенциальная яма

**З а д а ч а.** Основное состояние квантового гармонического осциллятора описывается функцией

$$\varphi(x) = A \exp(-\alpha x^2), \quad (20.42)$$

где  $A$  и  $\alpha$  – положительные постоянные. При помощи уравнения Шредингера (20.40) найти постоянную  $\alpha$  и энергию частицы в этом состоянии. Используя условие нормировки, найти постоянную  $A$ .

**У к а з а н и е.** В вычислениях использовать формулу Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ  
(продолжение)

**20.6. Падение частицы на потенциальный барьер**

Рассмотрим движение частицы вдоль оси  $x$  в консервативном силовом поле, описываемом следующей зависимостью потенциальной энергии  $U$  от координаты  $x$ :

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, 0), \\ U_0 & \text{при } x \in (0, +\infty), \end{cases} \quad (20.43)$$

где  $U_0$  — положительная постоянная, называемая "высотой" потенциального барьера. График зависимости (20.43) приведен на рис. 20.7. Эту зависимость следует рассматривать как идеализацию зависимости  $U = U(x)$ , график которой изображен на рис. 20.2. Производная функции (20.43) всюду на оси  $x$ , за исключением точки  $x = 0$ , равна нулю. В точке  $x = 0$  производная этой функции равна  $+\infty$ . Из этого следует, что при движении частицы вдоль оси  $x$  только на узком интервале в окрестности точки  $x = 0$  на нее будет действовать сила, которая направлена в сторону, противоположную оси  $x$ .

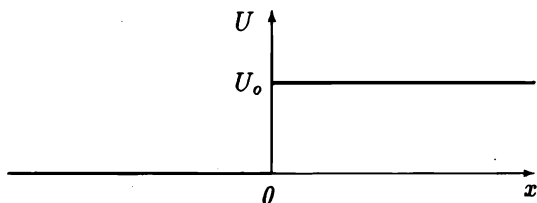


Рис. 20.7. Потенциальный барьер

Пусть на потенциальный барьер падает однородный поток частиц, движущихся слева направо. Рассмотрим случай, когда энергия  $E$  каждой из падающих на барьер частиц меньше высоты  $U_0$  барьера:

$$E < U_0.$$

В области перед барьером, где  $x < 0$ , потенциальная энергия частицы

равна нулю и уравнение (20.23) можно записать так:

$$\varphi'' + k^2 \varphi = 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \quad (20.44)$$

Здесь

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (20.45)$$

Общее решение уравнения (20.44) имеет вид

$$\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}, \quad (20.46)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные интегрирования. Таким образом, в области, где  $x < 0$ , волновая функция  $\psi = \psi(t, x)$  будет представлять собой сумму (20.7) двух волн, одна из которых  $\psi_+(t, x)$  бежит направо, т.е. падает на барьер, а другая  $\psi_-(t, x)$  – налево, т.е. отражается от барьера.

В области, где  $x > 0$ , потенциальная энергия  $U$  равна  $U_0$ . Для этих значений  $x$  уравнение (20.23) можно привести к виду

$$\varphi'' - \lambda^2 \varphi = 0 \quad \text{при} \quad x > 0. \quad (20.47)$$

Здесь

$$\lambda^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E). \quad (20.48)$$

Общее решение уравнения (20.47) имеет вид

$$\varphi(x) = C e^{-\lambda x} + D e^{\lambda x},$$

где  $C$  и  $D$  – постоянные. Коэффициент  $D$  следует положить равным нулю, так как в противном случае функция  $\varphi(x)$  будет неограниченно возрастать при  $x \rightarrow \infty$ , что лишено физического смысла.

Итак, волновая функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & \text{при} \quad x < 0, \\ C e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases} \quad (20.49)$$

Эта функция и ее производная непрерывны всюду, кроме точки  $x = 0$ , в которой они также должны быть непрерывны:

$$\begin{cases} \varphi(-0) = \varphi(+0), \\ \varphi'(-0) = \varphi'(+0). \end{cases} \quad (20.50)$$

Подстановка выражений (20.49) в эти условия приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} A + B = C, \\ ik(A - B) = -\lambda C, \end{cases}$$

разрешив которые относительно  $B$  и  $C$ , получим формулы

$$B = \frac{k - i\lambda}{k + i\lambda} A, \quad C = \frac{2k}{k + i\lambda} A.$$

Теперь функцию (20.49) можно записать так:

$$\varphi(x) = \begin{cases} A \left( e^{ikx} + \frac{k - i\lambda}{k + i\lambda} e^{-ikx} \right) & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{2k}{k + i\lambda} A e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

При помощи формулы Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

функцию  $\varphi(x)$  при  $x < 0$  нетрудно преобразовать к виду

$$\varphi(x) = 2A e^{-i\beta} \cos(kx + \beta),$$

где

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{k}.$$

Используя полученные выражения для функции  $\varphi(x)$ , построим график зависимости от координаты  $x$  концентрации частиц в потоках, падающих на потенциальный барьер, отраженных от него и преодолевших его:

$$n(x) = |\varphi(x)|^2.$$

График этой зависимости показан на рис. 20.8.

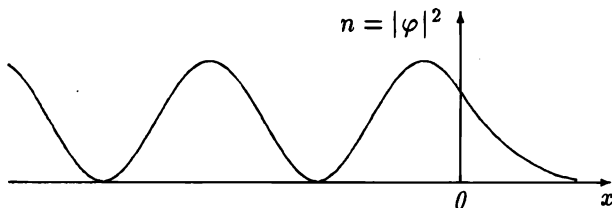


Рис. 20.8. Интерференция волновых функций и туннельный эффект

Зависимость  $n = n(x)$  на рис. 20.8 демонстрирует существенное различие в движениях потоков частиц по законам классической механики и по законам механики квантовой. Согласно законам классической механики концентрации частиц, падающих и отраженных от потенциального барьера в области  $x < 0$  всюду одинаковы; а в области  $x > 0$  концентрация частиц должна быть равна нулю при условии, что энергия частицы  $E$  меньше высоты  $U_0$  потенциального барьера. Как видно из графика на рис. 20.8, вследствие интерференции волн  $\psi_+(t, x)$  и  $\psi_-(t, x)$ , падающей на барьер и отраженной им, концентрация частиц в области  $x < 0$  периодически изменяется. Волновые свойства частиц проявляются также в том, что их концентрация в области  $x > 0$  не равна нулю. Эти свойства микрочастиц позволяют им проникать в те области пространства, где их присутствие запрещено законами классической механики. Это явление называют *туннельным эффектом*.

В области за барьером волновая функция  $\psi$  имеет вид

$$\psi(t, x) = C e^{-i\omega t - \lambda x}.$$

Эта функция – не бегущая волна. Она описывает неподвижное "облако" частиц, средняя скорость которых равна нулю.

В области  $x > 0$  концентрация частиц убывает по закону

$$n(x) = n(0) e^{-2\lambda x}.$$

Согласно этой формуле на расстоянии  $d = \lambda^{-1}$  от барьера, т.е. места, где на частицы действует тормозящая их движение сила, концентрация частиц имеет значение

$$n(d) = n(0) e^{-2} \approx \frac{1}{7} n(0).$$

Расстояние

$$d = \frac{1}{\lambda} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0 - E)}}$$

называют *глубиной проникновения* частиц за барьер. Из этой формулы видно, что глубина  $d$  тем больше, чем меньше разность  $U_0 - E$ . Когда энергия частицы будет больше или равна высоте барьера, глубина проникновения  $d$  станет бесконечно большой.

Интересно рассмотреть предельный случай, когда высота барьера  $U_0$  стремится к бесконечности. При этом будет неограниченно возрастать сила, которая тормозит движение частиц в окрестности точки  $x = 0$ . Очевидно, что в предельном случае бесконечно высокого барьера частицы не смогут его преодолеть и их концентрация за барьером будет равна

нулю. В самом деле, при  $U_0 \rightarrow \infty$  величина  $\lambda$ , определяемая формулой (20.48), также стремится к бесконечности. При этом предельная волновая функция будет

$$\varphi(x) = \begin{cases} A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iA \sin kx & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь падение на барьер потока частиц, которые летят из  $-\infty$  и энергия  $E$  каждой из которых больше высоты барьера  $U_0$ :

$$E > U_0.$$

В этом случае уравнение (20.23) при  $x > 0$  следует записать так:

$$\varphi'' + \tilde{k}^2 \varphi = 0 \quad \text{при } x > 0. \quad (20.51)$$

Здесь

$$\tilde{k}^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0). \quad (20.52)$$

Общее решение уравнения (20.51) имеет вид

$$\varphi(x) = C e^{i\tilde{k}x} + D e^{-i\tilde{k}x},$$

где  $C$  и  $D$  – постоянные интегрирования. Первое слагаемое в этой сумме описывает волну, бегущую направо от барьера, а второе – волну, бегущую в противоположную сторону из  $+\infty$ . По смыслу рассматриваемой задачи в области за барьером, где  $x > 0$ , может существовать только первая волна, описывающая поток частиц, преодолевших действие тормозящей силы. Поэтому коэффициент  $D$  следует положить равным нулю. Итак, в случае, когда  $E > U_0$ , волновая функция будет

$$\varphi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & \text{при } x < 0, \\ C e^{i\tilde{k}x} & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (20.53)$$

Условия (20.50) непрерывности функции  $\varphi(x)$  и ее производной приводят к уравнениям

$$\begin{cases} A + B = C, \\ ik(A - B) = -i\tilde{k}C, \end{cases}$$

Из этих уравнений найдем амплитуды отраженной от барьера и прошедшей за него волн:

$$B = \frac{k - \tilde{k}}{k + \tilde{k}} A, \quad C = \frac{2k}{k + \tilde{k}} A. \quad (20.54)$$

Произведение концентрации  $n$  частиц в потоке на их скорость  $v$  есть число частиц, пересекающих за единицу времени единичную площадку, перпендикулярную к траекториям частиц. Очевидно, что произведение  $n v$  для потока частиц, падающих на барьер, равно сумме таких произведений для потоков отраженных от барьера частиц и частиц, прошедших за барьер:

$$(n v)_{\text{пад}} = (n v)_{\text{отр}} + (n v)_{\text{прош}} .$$

Концентрация частиц в однородных потоках равна квадрату амплитуды волны, а скорость частицы связана с импульсом и волновым числом соотношениями

$$v = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m} .$$

Таким образом, приходим к равенству

$$|A|^2 k = |B|^2 k + |C|^2 \tilde{k} , \quad (20.55)$$

которое выражает закон сохранения числа частиц.

Отношение квадратов модулей амплитуд отраженной и падающей волн

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad (20.56)$$

есть доля частиц, отраженных от барьера, или вероятность отражения от него одной из падающих частиц. Величину  $R$  называют *коэффициентом отражения*. С учетом формул (20.54) его можно выразить через волновые числа  $k$  и  $\tilde{k}$ :

$$R = \left| \frac{k - \tilde{k}}{k + \tilde{k}} \right|^2 .$$

Отметим, что в случае, когда  $E < U_0$ , коэффициент отражения равен единице:

$$R = \left| \frac{k - i\lambda}{k + i\lambda} \right|^2 = 1 .$$

Отношение

$$D = \frac{|C|^2 \tilde{k}}{|A|^2 k} \quad (20.57)$$

есть доля частиц, прошедших за барьер, или вероятность проникновения за барьер одной из падающих на него частиц. Это отношение называют *коэффициентом прохождения*. В силу закона сохранения числа частиц (20.55) коэффициенты  $R$  и  $D$  связаны соотношением

$$R + D = 1 .$$



При  $E > U_0$  с учетом формул (20.54) будем иметь

$$D = \frac{4 k \tilde{k}}{(k + \tilde{k})^2} = \frac{4 \eta}{(1 + \eta)^2},$$

где параметр

$$\eta = \frac{\tilde{k}}{k},$$

т.е. отношение волновых чисел, при помощи формул (20.45) и (20.52) можно представить как функцию от энергии частицы:

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}.$$

Нетрудно видеть, при изменении энергии частицы  $E$  от значения  $U_0$  до  $+\infty$  параметр  $\eta$  монотонно возрастает от нуля до единицы. При этом коэффициент прохождения  $D$  также монотонно возрастает от нуля до единицы.

В случае, когда энергия  $E$  падающей на потенциальный барьер частицы больше его высоты  $U_0$ , классическая и квантовая теории также предсказывают различное поведение частиц после действия на них тормозящей силы. Согласно законам классической механики частица с энергией  $E > U_0$  преодолевает участок пути, где на нее действует тормозящая ее движение сила, и летит дальше. Поэтому все частицы в потоке, падающем на барьер, должны были бы пройти через него и удалиться на бесконечность. Однако так не происходит. Квантовая механика предсказывает, что часть  $R$  падающих на барьер частиц будет отброшена назад, как бы велика ни была энергия частицы  $E$ . Этот эффект также есть проявление волновых свойств частиц.

Некоторые выводы классической и квантовой теорий совпадают. Рассмотрим один из таких выводов. Импульсы  $p$  и  $\tilde{p}$  частицы до и после прохождения барьера связаны с волновыми числами соотношениями де Бройля:

$$p = \hbar k, \quad \tilde{p} = \hbar \tilde{k}.$$

При помощи формул (20.45) и (20.52) получим равенство

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{\tilde{p}^2}{2m} + U_0 = E,$$

которое выражает собой закон сохранения энергии.

Рассмотрим теперь движение частиц в силовом поле, которое характеризуется зависимостью  $U = U(x)$  потенциальной энергии частицы от

координаты  $x$ , изображенной графически на рис. 20.9. Такая зависимость означает, что в окрестности точки  $x = 0$  на частицу действует сила, направленная против оси  $x$ , а в окрестности точки  $x = l$  – сила, направленная в ту же сторону, что ось  $x$ .

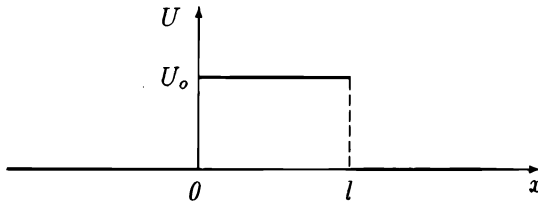


Рис. 20.9. Потенциальный барьер

Пусть энергия частиц  $E$  меньше высоты  $U_0$  потенциального барьера:  $E < U_0$ . В этом случае волновая функция  $\varphi = \varphi(x)$  слева и справа от барьера, т.е. при  $x \in (-\infty, 0) \cup (l, +\infty)$ , будет удовлетворять уравнению (20.44); а внутри барьера, т.е. при  $x \in (0, l)$ , – уравнению (20.47). Если поток частиц падает на барьер слева направо, то волновая функция должна иметь вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & \text{при } x \in (-\infty, 0), \\ a e^{\lambda x} + b e^{-\lambda x} & \text{при } x \in (0, l), \\ C e^{ikx} & \text{при } x \in (l, +\infty). \end{cases}$$

Эта функция должна удовлетворять граничным условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(-0) = \varphi(+0), \\ \varphi'(-0) = \varphi'(+0), \\ \varphi(l-0) = \varphi(l+0), \\ \varphi'(l-0) = \varphi'(l+0), \end{array} \right.$$

согласно которым волновая функция и ее производная должны быть не-

прерывны в точках  $x = 0$  и  $x = l$ . Эти условия приводят к равенствам

$$\begin{cases} A + B = a + b, \\ ik(A - B) = \lambda(a - b), \\ ae^{\lambda l} + be^{-\lambda l} = Ce^{ikl}, \\ \lambda(ae^{\lambda l} - be^{-\lambda l}) = ikCe^{ikl}. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на  $ik$  и сложим со вторым, третье также умножим на  $ik$  и вычтем из него четвертое. Придем к системе уравнений

$$\begin{cases} (\lambda + ik)a - (\lambda - ik)b = 2ikA, \\ (\lambda - ik)ae^{\lambda l} - (\lambda + ik)be^{-\lambda l} = 0, \end{cases}$$

которые разрешим относительно  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} a = 2i(\gamma + i) f A e^{-\lambda l}, \\ b = 2i(\gamma - i) f A e^{\lambda l}, \end{cases}$$

где

$$\gamma = \frac{\lambda}{k},$$

$$f = \left( (\gamma + i)^2 e^{-\lambda l} - (\gamma - i)^2 e^{\lambda l} \right)^{-1}.$$

В силу неравенства

$$e^{\lambda l} > e^{-\lambda l}$$

справедливо приближенное равенство

$$f \approx - \frac{e^{-\lambda l}}{(\gamma - i)^2}.$$

Теперь нетрудно выразить амплитуду  $C$  волны, прошедшей за барьер, через амплитуду  $A$  волны, падающей на него:

$$C = (ae^{\lambda l} + be^{-\lambda l})e^{-ikl} = 4i\gamma f A e^{-ikl} \approx - \frac{4i\gamma A}{(\gamma - i)^2} e^{-(\lambda + ik)l}.$$

Найдем по формуле (20.57) коэффициент прохождения  $D$ . Так как волновое число  $k$  волны, прошедшей за барьер, равно волновому числу  $k$ , будем иметь

$$D = \frac{|C|^2}{|A|^2} \approx \frac{16\gamma^2}{(\gamma^2 + 1)^2} e^{-2\lambda l}.$$

С учетом обозначения (20.48) этой формуле можно придать вид

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)l}\right),$$

где

$$D_0 = \frac{16\gamma^2}{(\gamma^2 + 1)^2}.$$

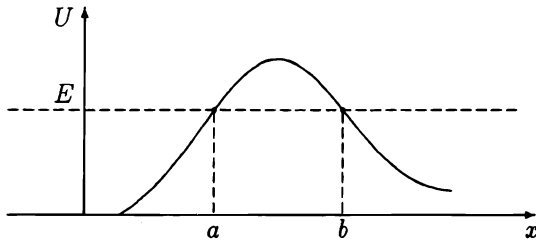


Рис. 20.10. Потенциальный барьер

Коэффициент  $D$  прохождения частицы через потенциальный барьер произвольной формы (рис. 20.10) можно вычислить по формуле

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U(x) - E)} dx\right),$$

где  $a$  и  $b$  – значения координаты  $x$ , при которых функция  $U(x)$  равна  $E$ .

”Туннельный эффект”, т.е. явление прохождения частиц через потенциальный барьер, высота которого  $U_0$  больше энергии частицы  $E$ , было обнаружено экспериментально.

## 20.7. Частица в ящике с непроницаемыми стенками

Рассмотрим в рамках квантовой механики движение частицы, заключенной в некотором ограниченном объеме  $V$ . Пусть этот объем имеет форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 20.11). Построим прямоугольную декартову систему координат так, чтобы плоскости, ограничивающие движение частицы, имели уравнения:  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ ,  $z = 0$  и  $z = c$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – длины ребер параллелепипеда.

Если частица испытывает воздействие только со стороны стенок ”ящика” при ударах о них, а внутри него движется свободно, то зависимость

ее потенциальной энергии от координат можно описать формулой

$$U(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \vec{r} \in V, \\ \infty & \text{при } \vec{r} \notin V. \end{cases} \quad (20.58)$$

где  $V$  – область пространства внутри ящика.

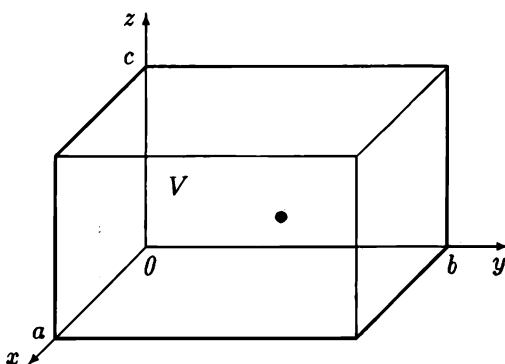


Рис. 20.11. Частица в ящике с непроницаемыми стенками

По условиям задачи волновая функция вне ящика всюду равна нулю. Функцию  $\varphi = \varphi(\vec{r})$ , которая описывает стационарное движение частицы внутри ящика, где  $U = 0$ , найдем из уравнения Шредингера (4.43)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi = E \varphi. \quad (20.59)$$

Так как волновая функция должна быть непрерывной по определению, на стенках ящика она должна быть равна нулю:

$$\varphi \Big|_{x=0} = \varphi \Big|_{x=a} = \varphi \Big|_{y=0} = \varphi \Big|_{y=b} = \varphi \Big|_{z=0} = \varphi \Big|_{z=c} = 0. \quad (20.60)$$

Имея в виду, что стационарные состояния частицы в одномерной потенциальной яме описываются функцией (20.50), предположим, что стационарные состояния частицы в прямоугольном ящике описываются функцией

$$\varphi(x, y, z) = A \sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z, \quad (20.61)$$

где

$$k_1 = \frac{\pi n_1}{a}, \quad k_2 = \frac{\pi n_2}{b}, \quad k_3 = \frac{\pi n_3}{c}, \quad (20.62)$$

$$n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots$$

Заметим, что совокупность чисел  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  можно рассматривать как трехзначный номер волновой функции:

$$\varphi_{n_1 n_2 n_3} = \varphi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z).$$

В самом деле, нетрудно видеть, что функция (20.61) удовлетворяет граничным условиям (20.60). Подстановка этой функции в стационарное уравнение Шредингера (20.59) убеждает в том, что она является его решением, если энергия частицы  $E$  связана с квантовыми числами  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  формулой

$$\begin{aligned} E &= \frac{\hbar^2}{2m} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = \\ &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{n_1}{a} \right)^2 + \left( \frac{n_2}{b} \right)^2 + \left( \frac{n_3}{c} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (20.63)$$

Величины  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  можно рассматривать как проекции на оси координат волнового вектора  $\vec{k}$ :

$$\vec{k} = \{k_1, k_2, k_3\}. \quad (20.64)$$

При этом энергию частицы можно представить формулой

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (20.65)$$

где  $k$  – модуль волнового вектора  $\vec{k}$ .

Постоянную  $A$  в формуле (20.61) нетрудно найти из условия нормировки (19.28) волновой функции:

$$A = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{V}},$$

где  $V = abc$  – объем параллелепипеда.

Итак, доказано, что возможные стационарные состояния частицы в ящике, описываемые функциями  $\varphi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z)$ , образуют счетное множество; а соответствующие этим состояниям значения энергии частицы составляют дискретный спектр.

СТРОЕНИЕ АТОМА

21.1. Атом водорода в квантовой механике

Атом водорода состоит из "массивного" положительно заряженного ядра и движущегося вокруг него "легкого" отрицательно заряженного электрона (рис. 21.1). Электрон – это микроскопическая частица, "уследить" за движением которой не представляется возможным. Другими словами, нельзя описать движение электрона посредством зависимости его радиус-вектора от времени. В квантовой механике движение частицы описывают при помощи волновой функции, которая определяет вероятность обнаружить частицу в том или ином месте пространства.

Если частица движется в пространстве, то описывающая ее движение волновая функция будет зависеть в общем случае от времени и координат:

$$\psi = \psi(t, \vec{r}) .$$

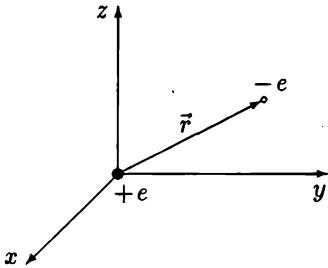


Рис. 21.1.

Электрон в атоме водорода – оператор Лапласа,  $U(\vec{r})$  – потенциальная энергия частицы.

Ядром в атоме водорода является протон, заряд которого равен  $+e$ . Так как заряд электрона равен  $-e$ , потенциальная энергия электрона в атоме водорода выражается формулой

Эту функцию можно найти из уравнения Шредингера

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\vec{r}) \psi , \quad (21.1)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$U(\vec{r}) = - \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} , \quad (21.2)$$

где расстояние от ядра до электрона

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

По определению волновая функция, описывающая стационарное состояние электрона, имеет вид

$$\psi(t, \vec{r}) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \cdot \varphi(\vec{r}), \quad (21.3)$$

где функция  $\varphi(\vec{r})$  есть решение стационарного уравнения Шредингера

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \varphi = E \varphi,} \quad (21.4)$$

где  $E$  – энергия электрона в стационарном состоянии.

Функции, являющиеся решениями этого уравнения образуют счетное множество. Каждой из них присваивается трехзначный номер  $nlm$ :

$$\varphi_{nlm} = \varphi_{nlm}(\vec{r}). \quad (21.5)$$

Число  $n$  принимает значения  $1, 2, 3, \dots$  и называется *главным* квантовым числом. Для заданного значения  $n$  число  $l$ , называемое *орбитальным*, принимает одно из  $n$  значений  $0, 1, 2, \dots, n-1$ . Наконец, *магнитное* квантовое число  $m$  принимает значения  $-l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, l-1, l$ . Всего при заданном значении  $l$  число  $m$  принимает  $2l+1$  значение.

Квантовые числа  $n, l$  и  $m$  имеют следующий физический смысл. Главное квантовое число  $n$  определяет возможные значения энергии электрона в атоме водорода:

$$\boxed{E = -\frac{R\hbar}{n^2},} \quad (21.6)$$

где

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Орбитальное квантовое число  $l$  дает возможность вычислить модуль  $L$  вектора  $\vec{L}$  момента импульса электрона:

$$\boxed{L = \hbar \sqrt{l(l+1)},} \quad (21.7)$$

где

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$



Проекция вектора  $\vec{L}$  момента импульса электрона на заданное направление  $z$  в пространстве определяется формулой

$$L_z = \hbar m, \quad (21.8)$$

где магнитное квантовое число  $m$  принимает значения:

$$m = -l, -l + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l - 1, l.$$

**З а д а ч а.** Основное состояние электрона в атоме водорода описывается функцией

$$\varphi(r) = A \exp(-\alpha r), \quad (21.9)$$

где  $A$  и  $\alpha$  – постоянные величины. При помощи уравнения (21.4) найти постоянную  $\alpha$  и энергию частицы  $E$  в этом состоянии. Найти постоянную  $A$  из условия нормировки.

**О т в е т ы:**

$$\alpha = \frac{1}{r_B}, \quad (21.10)$$

где

$$r_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

– первый борковский радиус;

$$E = -R\hbar,$$

$$A = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}. \quad (21.11)$$

Про функции  $\varphi_{nlm}(\vec{r})$  говорят, что они описывают "электронные облака". Точнее говоря, они определяют распределение в пространстве плотности вероятности:

$$w_{nlm}(\vec{r}) = |\varphi_{nlm}(\vec{r})|^2.$$

Электронное облако – это часть пространства, где плотность вероятности  $w_{nlm}$  принимает наибольшие значения. Поэтому вероятность обнаружить электрон в этой части пространства, т.е. внутри облака, почти равна единице; а вероятность обнаружить его вне облака практически равна нулю. Электронные облака в атоме имеют сложную форму и окружают ядро слоями.

При  $l = 0$  (в этом случае число  $m$  также равно нулю) электронное облако имеет сферически симметричную форму, т.е. плотность вероятности  $w_{n00}$  является сферически симметричной функцией

$$w_{n00}(r) = |\varphi_{n00}(r)|^2,$$

зависящей только от расстояния  $r$  от электрона до ядра. По определению произведение плотности вероятности на объем некоторой части пространства есть вероятность обнаружить здесь рассматриваемую частицу. Внутри тонкого сферического слоя радиуса  $r$  и толщины  $dr$  плотность вероятности  $w_{n00}$  во всех точках практически одинакова. Объем сферического слоя равен  $4\pi r^2 dr$ . Поэтому выражение

$$dP = f_n(r) dr = |\varphi_{n00}(r)|^2 4\pi r^2 dr$$

есть вероятность того, что расстояние от электрона до ядра принимает значение из интервала  $(r, r + dr)$ .

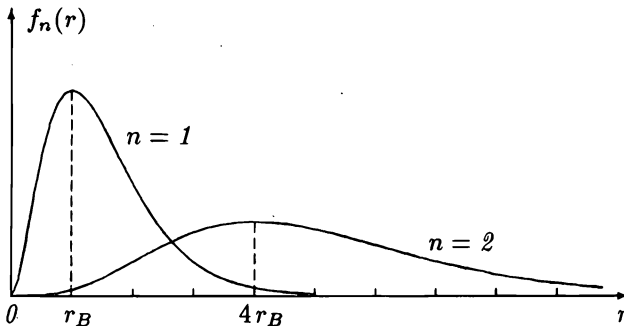


Рис. 21.2. Плотность вероятности  $f_n(r)$  обнаружить электрон на расстоянии  $r$  от ядра

**З а д а ч а.** Электронное облако, которое представляет электрон, находящийся в основном состоянии в атоме водорода, описывается функцией

$$f_1(r) = |\varphi_{100}(r)|^2 4\pi r^2, \quad (21.12)$$

где  $\varphi_{100}(r)$  есть функция (21.9). Значение  $r_{вер}$  расстояния  $r$ , при котором функция  $f_n(r)$  достигает наибольшего значения, называется *наиболее вероятным расстоянием* от электрона до ядра. Доказать, что для электрона в основном состоянии наиболее вероятное расстояние до ядра равно радиусу первой боровской орбиты:  $r_{вер} = r_B$ .

Графики функции

$$f_n(r) = |\varphi_{n00}(r)|^2 4\pi r^2$$

при  $n = 1$  и  $2$  показаны на рис. 21.2. Функция  $f_1(r)$  принимает наибольшее значение при  $r = r_B$ , а функция  $f_2(r)$  – при  $r = 4r_B$ . Можно показать, что наиболее вероятное расстояние от электрона, находящегося в стационарном состоянии  $\varphi_{n00}$ , до ядра равно радиусу  $n$ -ой боровской орбиты:

$$r_{\text{вер}n} = n^2 r_B.$$

Так как энергия электрона в атоме водорода зависит только от главного квантового числа  $n$ , каждому значению энергии  $E_n$  соответствует несколько различных состояний. Такие состояния называются "вырожденными", а их число  $g_n$  называется кратностью вырождения данного энергетического уровня.

## 21.2. Пространственное квантование

Когда электрон в атоме водорода находится в стационарном состоянии, описываемом волновой функцией  $\varphi_{nlm}$ , где  $n$ ,  $l$  и  $m$  – заданные числа, модуль  $L$  его момента импульса  $\vec{L}$  принимает вполне определенное значение, которое дает формула (21.7). При этом проекция  $L_z$  вектора  $\vec{L}$  на некоторое направление  $z$  принимает согласно формуле (21.8) значение  $\hbar m$ .

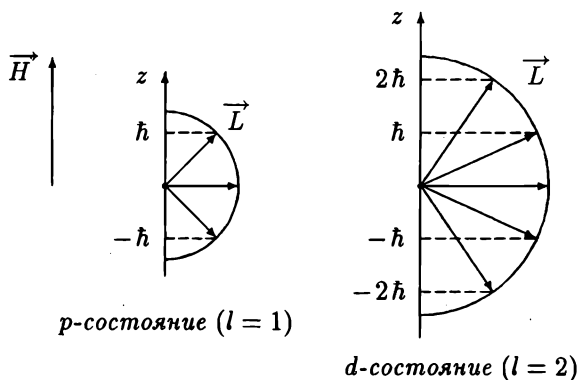


Рис. 21.3. Пространственное квантование. Возможные направления вектора  $\vec{L}$  момента импульса электрона в атоме водорода относительно силовых линий внешнего магнитного поля

В экспериментах направление в пространстве можно задать посредством магнитного поля, силовые линии которого и "указывают" это направление. Поэтому квантовое число  $m$  называют магнитным. Согласно формулам (21.7) и (21.8) модуль вектора момента импульса и его про-

екция на ось  $z$  принимают дискретные значения, иначе говоря, "квантуются". Из этого следует, что вектор  $\vec{L}$  может быть ориентирован в пространстве относительно силовых линий внешнего магнитного поля только вполне определенным образом. Это явление называют *пространственным квантованием*. На рис. 21.3 изображены векторы  $\vec{L}$  для электрона в состояниях  $\varphi_{nlm}$  при  $l = 1$  ( $p$ -состояние) и  $l = 2$  ( $d$ -состояние). Если  $l = 1$ , то модуль  $L$  вектора  $\vec{L}$  момента импульса электрона равен  $\hbar\sqrt{2}$ , а его проекция  $L_z$  на направление  $z$  внешнего магнитного поля может быть равна  $-\hbar$ ,  $0$  или  $\hbar$ . Если же  $l = 2$ , то  $L = \hbar\sqrt{6}$ , а  $L_z = -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar$ .

### 21.3. Гиромагнитное отношение

Представим себе, что электрон в атоме движется со скоростью  $v$  по круговой орбите радиуса  $r$  (рис. 21.4).

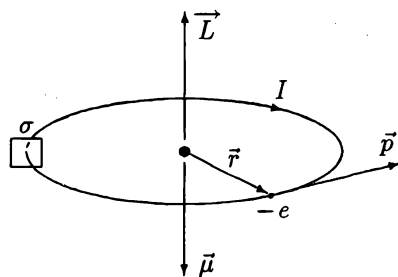


Рис. 21.4. Момент импульса и магнитный момент электрона

Как любая движущаяся частица, электрон обладает моментом импульса  $\vec{L}$ , который равен векторному произведению радиус-вектора  $\vec{r}$  на импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$ :

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}]. \quad (21.13)$$

Вектор  $\vec{L}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежит орбита электрона, а его модуль

$$L = m v r. \quad (21.14)$$

Период обращения электрона вокруг ядра, т.е. время за которое он совершает один оборот, равен отношению пройденного за это время пути  $2\pi r$  к скорости электрона:

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (21.15)$$

Двигаясь по орбите вокруг ядра, электрон один раз за период обращения пересекает площадку  $\sigma$ , расположенную поперек траектории в неко-

торой ее точке (рис. 21.4). При этом через площадку переносится заряд  $e$ . Следовательно, движущийся по орбите электрон есть электрический ток, сила которого

$$I = \frac{e}{T}. \quad (21.16)$$

Так как заряд электрона отрицателен, направление этого тока противоположно направлению движения электрона. Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, характеризуется магнитным моментом  $\vec{\mu}$ . Это есть вектор, перпендикулярный плоскости контура. Направление вектора  $\vec{\mu}$  связано с направлением тока правилом правого винта (рис. 21.4). Модуль магнитного момента равен произведению силы тока на площадь контура  $S$ :

$$\mu = I S \quad (21.17)$$

Для кругового тока площадь контура

$$S = \pi r^2.$$

Используя формулы (21.15) и (21.16), получим следующее выражение для магнитного момента электрона:

$$\mu = \frac{1}{2} e v r. \quad (21.18)$$

Отношение магнитного момента  $\mu$  частицы к ее механическому моменту  $L$ , т.е. к ее моменту импульса, называют *гиромагнитным отношением*. Для электрона на орбите это отношение равно

$$\frac{\mu}{L} = \frac{e}{2m}. \quad (21.19)$$

Более строгие расчеты приводят к этому же выражению.

Так как векторы  $\vec{\mu}$  и  $\vec{L}$  антипараллельны, справедливо равенство

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{L}. \quad (21.20)$$

## 21.4. Спин электрона

Экспериментально и теоретически установлено, что электрон, являясь элементарной (т.е. неделимой) частицей, в то же время обладает внутренней структурой. Это проявляется в том, что он может находиться в различных внутренних состояниях. Таких состояний всего два. До тех пор, пока отсутствуют какие-либо внешние воздействия на электрон,

обнаружить, в каком именно из этих двух состояний находится электрон, невозможно.

Для объяснения экспериментальных фактов предполагают, что электрон обладает собственным моментом импульса, который обозначают  $\vec{L}_s$  и называют *спином* (от англ. *spin* – верчение, кружение). Модуль  $L_s$  этого вектора можно вычислить по формуле

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad (21.21)$$

которая аналогична формуле (21.7) для орбитального момента импульса. В формуле (21.21) квантовое число  $s$  принимает только одно значение:

$$s = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, модуль спина электрона

$$L_s = \frac{\hbar \sqrt{3}}{2}. \quad (21.22)$$

Проекция  $L_{s_z}$  спина на направление  $z$ , задаваемое внешним магнитным полем, определяется формулой, которая аналогична формуле (21.8):

$$L_{s_z} = \hbar m_s, \quad (21.23)$$

где спиновое квантовое число  $m_s$  может принимать только два значения:

$$m_s = \pm \frac{1}{2}.$$

Именно число  $m_s$  служит характеристикой внутреннего состояния электрона.

Электрон обладает также собственным магнитным моментом  $\vec{\mu}_s$ , который связан с его спином соотношением

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{L}_s. \quad (21.24)$$

При этом модули векторов  $\vec{\mu}_s$  и  $\vec{L}_s$  относятся друг к другу как

$$\frac{\mu_s}{L_s} = \frac{e}{m}. \quad (21.25)$$

Это отношение называется *спиновым гиромагнитным отношением*. Как видно, оно в два раза больше орбитального гиромагнитного отношения (21.19).

Из формул (21.22), (21.23) и (21.24) найдем, что модуль  $\mu_s$  собственного магнитного момента  $\vec{\mu}_s$  электрона и его проекция  $\mu_{s_z}$  на направление  $z$  определяются формулами

$$\mu_s = \mu_B \sqrt{3}, \quad \mu_{s_z} = \frac{e \hbar}{m} m_s = \pm \mu_B, \quad (21.26)$$

где

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Джс/Тл}.$$

Величину  $\mu_B$  называют *магнетоном Бора*.

Полный момент импульса электрона  $\vec{L}_j$  равен векторной сумме орбитального момента импульса  $\vec{L} \equiv \vec{L}_l$  и спина  $\vec{L}_s$ :

$$\vec{L}_j = \vec{L}_l + \vec{L}_s. \quad (21.27)$$

Модули векторов  $\vec{L}_l$  и  $\vec{L}_s$  определяются формулами

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)},$$

где  $s = 1/2$ . Модуль вектора  $\vec{L}_j$  определяется аналогичной формулой

$$L_j = \hbar \sqrt{j(j+1)}, \quad (21.28)$$

в которой квантовое число  $j$  может принимать значения:

$$j = l + s, \quad |l - s|.$$

При  $l = 0$  квантовое число  $j$  принимает только одно значение:

$$j = \frac{1}{2}.$$

При  $l \neq 0$  число  $j$  может принимать значения:

$$j = l + \frac{1}{2}, \quad l - \frac{1}{2}.$$

Полный магнитный момент электрона  $\vec{\mu}_j$  равен сумме орбитального  $\vec{\mu} \equiv \vec{\mu}_l$  и спинового  $\vec{\mu}_s$  магнитных моментов:

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s. \quad (21.29)$$

В силу соотношений (21.20) и (21.24) вектор полного магнитного момента электрона не коллинеарен вектору полного механического момента  $\vec{L}_j$ .

## 21.5. Многоэлектронные атомы

Во всех атомах, кроме атома водорода, содержится более одного электрона. В таких атомах каждый электрон взаимодействует не только с ядром, но и с другими электронами. При этом потенциальная энергия электрона будет равна сумме энергии его взаимодействия с ядром и энергией взаимодействия с остальными  $Z - 1$  электронами:

$$U(\vec{r}) = -\frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} + \sum_{i=1}^{Z-1} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор рассматриваемого электрона,  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор другого электрона,  $i = 1, 2, \dots, Z-1$ . Так как электроны в атоме движутся с очень большими скоростями, можно считать, что каждый электрон движется в усредненном силовом поле, создаваемом другими электронами. Причем это силовое поле является сферически симметричным:

$$\bar{U}(r) = -\frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} + \tilde{U}(r), \quad (21.30)$$

где  $\tilde{U}(r)$  – усредненная потенциальная энергия взаимодействия одного электрона, находящегося на расстоянии  $r$  от ядра, со всеми другими электронами атома.

Решения

$$\varphi_{nlm} = \varphi_{nlm}(\vec{r})$$

стационарного уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi + \bar{U}(r) \varphi = E \varphi, \quad (21.31)$$

в котором потенциальная энергия электрона  $\bar{U}(r)$  есть сферически симметричная функция от его координат, подобны волновым функциям  $\varphi_{nlm}(\vec{r})$ , описывающим стационарные состояния электрона в атоме водорода. Однако в данном случае энергия  $E$  электрона, находящегося в стационарном состоянии, зависит не только от главного квантового числа  $n$ , но и от орбитального числа  $l$ :

$$E = E_{nl}.$$

Поэтому структуры энергетических спектров многоэлектронных атомов и спектров их излучения являются более сложными, чем у атома водорода.



Если не учитывать взаимодействие электронов, то энергию одного электрона в атоме приближенно можно положить равной его энергии в водородоподобном ионе:

$$E = - \frac{Z^2 R \hbar}{n^2}. \quad (21.32)$$

Состояние одного электрона в атоме характеризуется четверкой чисел  $n$ ,  $l$ ,  $m$  и  $m_s$ . Состояния электрона с  $l = 0$  называют  $s$ -состояниями, состояния с  $l = 1$  —  $p$ -состояниями, состояния с  $l = 2$  —  $d$ -состояниями, состояния с  $l = 3$  —  $f$ -состояниями и т.д. (табл. 1).

Таблица 1

Число $l$	0	1	2	3	...
Символ состояния электрона	$s$	$p$	$d$	$f$	...

Значения главного квантового числа  $n$  указывают перед символом состояния. Таким образом, с учетом того, что для заданного  $n$  число  $l$  принимает значения  $0, 1, \dots, n-1$ , возможны следующие состояния электрона в атоме:

$$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, 4s, 4p, 4d, 4f, \dots$$

Например, символ  $3p$  обозначает состояние с  $n = 3$  и  $l = 1$ , т.е. состояние электрона, описываемое волновой функцией  $\varphi_{31m}$ .

Совокупность электронных состояний  $\varphi_{nlm}(\vec{r})$  с одинаковыми  $n$  и  $l$  называется *оболочкой*, а совокупность оболочек с одним и тем же значением числа  $n$  — *электронным слоем*. Радиус оболочки, т.е. среднее расстояние от электрона до ядра, зависит от главного квантового числа  $n$ . Таким образом, волновые функции  $\varphi_{nlm} = \varphi_{nlm}(\vec{r})$  с одним и тем же значением  $n$ , но различными значениями  $l$  и  $m$  описывают электронные облака одного радиуса. Все эти облака принадлежат одному и тому же слою. Состояния с  $n = 1$  образуют так называемый  $K$ -слой, состояния с  $n = 2$  —  $L$ -слой, состояния с  $n = 3$  —  $M$ -слой, состояния с  $n = 4$  —  $N$ -слой и т.д. (табл. 2).

Таблица 2

Число $n$	1	2	3	4	...
Символ электронного слоя	$K$	$L$	$M$	$N$	...

Состояния электрона с фиксированным значением  $n$  отличаются значениями квантовых чисел  $l$ ,  $m$  и  $m_s$ . При заданном значении  $l$  число  $m$  может принимать любое из  $2l + 1$  значений  $-l, \dots, l$ . С учетом того, что спиновое квантовое число  $m_s$  принимает два значения:  $\pm \frac{1}{2}$ , число  $g_{nl}$  состояний с фиксированными значениями  $n$  и  $l$ , т.е. число состояний

в оболочке, будет

$$g_{nl} = 2(2l + 1). \quad (21.33)$$

Число  $g_n$  различных состояний, соответствующих данному значению  $n$ , т.е. число состояний в  $n$ -м слое, будет

$$g_n = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2 \underbrace{(1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1))}_{\text{всего } n \text{ слагаемых}}.$$

Слагаемые в круглых скобках суть члены арифметической прогрессии. Применяя известную формулу для суммы  $n$  членов арифметической прогрессии, получим:

$$g_n = 2n^2. \quad (21.34)$$

Классификация возможных состояний электрона в атоме приведена в табл. 3.

Таблица 3

Слой	Число состояний в оболочке $g_{nl} = 2(2l + 1)$					Число состояний в слое $g_n = 2n^2$
	$s$ $l = 0$	$p$ $l = 1$	$d$ $l = 2$	$f$ $l = 3$	...	
$K$ $n = 1$	2	-	-	-	-	2
$L$ $n = 2$	2	6	-	-	-	8
$M$ $n = 3$	2	6	10	-	-	18
$N$ $n = 4$	2	6	10	14	-	32
...						

Распределение электронов в атоме по состояниям осуществляется согласно *принципу Паули*, в силу которого в любой системе (например, в атоме) не может быть двух электронов, находящихся в одном и том же квантовом состоянии. Другими словами, какое-либо электронное состояние может быть либо свободно (т.е. не занято электроном), либо занято только одним электроном.

*Основное, или невозбужденное* состояние атома – это состояние с наименьшей энергией.

Описать состояние атома – это значит указать число электронов в каждом состоянии. Распределение электронов по состояниям называют *электронной конфигурацией* атома. Например, электронная конфигурация атома кобальта Co в основном состоянии символически записывается так:

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^7 4s^2 .$$

Здесь над символом электронного состояния указаны количества электронов в оболочке. Всего в атоме кобальта 27 электронов.

Электроны, находящиеся на внешнем слое атома, слабее связаны с ядром, чем внутренние электроны, расположенные ближе к ядру. Именно внешние электроны определяют химические свойства атома и строение его оптического спектра. Поэтому внешние электроны называют *валентными*, или *оптическими* электронами атома.

Возможные состояния электронов в атоме, классификация которых приведена в табл. 3, заполняются электронами в соответствии с принципом Паули. Руководствуясь этим принципом, можно установить электронные конфигурации атомов в основном состоянии. Знание электронных конфигураций атомов дает возможность объяснить химические свойства атомов и их расположение в периодической таблице элементов, открытой русским ученым Д.И.Менделеевым.

## 21.6. Векторная модель атома \*

Воздействие внешнего магнитного поля на атом определяется его магнитным моментом, который обусловлен: 1) орбитальным движением электронов, 2) собственными магнитными моментами электронов и 3) магнитным моментом атомного ядра. Магнитный момент ядра существенно меньше магнитного момента электрона. Поэтому в данном случае его можно не принимать во внимание. Покажем, как можно вычислить магнитный момент атома.

Полный механический момент атома равен сумме орбитальных моментов импульсов всех электронов в атоме и их спинов:

$$\vec{L}_J = \vec{L}_{l_1} + \dots + \vec{L}_{l_Z} + \vec{L}_{s_1} + \dots + \vec{L}_{s_Z}, \quad (21.35)$$

где  $Z$  – число электронов в атоме.

Вектор

$$\vec{L}_l = \vec{L}_{l_1} + \vec{L}_{l_2}$$

суммы двух моментов импульса обладает следующими свойствами. Модули векторов  $\vec{L}_{l_1}$  и  $\vec{L}_{l_2}$  определяются квантовыми числами  $l_1$  и  $l_2$  согласно формулам

$$L_{l_1} = \hbar \sqrt{l_1(l_1 + 1)}, \quad L_{l_2} = \hbar \sqrt{l_2(l_2 + 1)}.$$

Модуль  $L_l$  вектора суммы определяется аналогичной формулой

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l + 1)},$$

в которой квантовое число  $l$  может принимать следующие значения:

$$l = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|. \quad (21.36)$$

Предположим для определенности, что  $l_1 > l_2$ . В таком случае число  $l$  принимает одно из  $2l_2 + 1$  значений:

$$l = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, l_1 - l_2.$$

Проекцию  $L_{l_z}$  суммарного момента импульса на ось  $z$  можно найти по формуле

$$L_{l_z} = \hbar m_l,$$

где квантовое число  $m_l$  принимает значения:

$$m_l = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l.$$

Модуль и проекцию на ось  $z$  суммы нескольких моментов импульса можно найти, применяя последовательно описанные правила сложения двух моментов. Модуль и проекция на ось  $z$  вектора  $\vec{L}_J$  полного механического момента атома зависит от того, в какой последовательности осуществляется сложение векторов в формуле (21.35). Как показывает анализ экспериментального материала, для большинства атомов правильные значения модуля и проекции на ось  $z$  вектора  $\vec{L}_J$  могут быть получены, если сначала сложить орбитальные моменты всех электронов:

$$\vec{L}_L = \vec{L}_{l_1} + \dots + \vec{L}_{l_z},$$

отдельно сложить их спины:

$$\vec{L}_S = \vec{L}_{s_1} + \dots + \vec{L}_{s_z},$$

а затем сложить полученные таким образом полный орбитальный момент импульса  $\vec{L}_L$  и полный спиновый момент  $\vec{L}_S$ :

$$\vec{L}_J = \vec{L}_L + \vec{L}_S. \quad (21.37)$$

Такая схема вычислений отражает тип взаимодействия электронов в атоме, называемый  $(L, S)$ -связью.

Пусть модули векторов  $\vec{L}_L$  и  $\vec{L}_S$  оказались равны

$$L_L = \hbar \sqrt{L(L+1)}, \quad L_S = \hbar \sqrt{S(S+1)}. \quad (21.38)$$

Так как орбитальные квантовые числа  $l_1, l_2, \dots, l_Z$  отдельных электронов есть целые неотрицательные числа, квантовое число  $L$  согласно правилу (21.36) есть также целое неотрицательное число. Спиновые числа  $s_1, s_2, \dots, s_Z$  отдельных электронов все равны  $\frac{1}{2}$ . Поэтому согласно правилу (21.36) квантовое число  $S$  полного спина атома может быть либо целым, либо полуцелым неотрицательным числом. Описанное правило сложения моментов приводит к следующей формуле для модуля вектора  $\vec{L}_J$  суммарного момента импульса атома:

$$L_J = \hbar \sqrt{J(J+1)}, \quad (21.39)$$

где квантовое число  $J$  может принимать значения:

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|. \quad (21.40)$$

Проекция полного момента импульса атома на ось  $z$  будет

$$L_{J_z} = \hbar m_J, \quad (21.41)$$

где квантовое число

$$m_J = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J. \quad (21.42)$$

В силу соотношения (21.20) полный орбитальный магнитный момент атома  $\vec{\mu}_L$  коллинеарен механическому орбитальному моменту  $\vec{L}_L$ :

$$\vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m} \vec{L}_L.$$

В силу соотношения (21.24) полный спиновый магнитный момент атома  $\vec{\mu}_S$  коллинеарен механическому спиновому моменту  $\vec{L}_S$ :

$$\vec{\mu}_S = -\frac{e}{m} \vec{L}_S.$$

Полный магнитный момент атома  $\vec{\mu}$  равен сумме полного орбитального магнитного момента  $\vec{\mu}_L$  и полного спинового магнитного момента  $\vec{\mu}_S$ :

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S. \quad (21.43)$$

Нетрудно видеть, что вектор  $\vec{\mu}$  полного магнитного момента атома не коллинеарен вектору (21.37) полного механического момента атома. С течением времени вектор  $\vec{\mu}$  изменяет свое направление относительно вектора  $\vec{L}_J$ . Причем это изменение происходит таким образом, что среднее значение составляющей вектора  $\vec{\mu}$ , которая перпендикулярна вектору  $\vec{L}_J$ , оказывается равным нулю. Поэтому усредненный магнитный момент атома  $\vec{\mu}_J$  будет коллинеарен вектору полного механического момента:

$$\vec{\mu}_J = -\gamma \vec{L}_J, \quad (21.44)$$

где

$$\gamma = \frac{\mu_J}{L_J} \quad (21.45)$$

– гиромангнитное отношение для атома.

С учетом орбитального и спинового гиромангнитных отношений и формул (21.38) можно записать следующие выражения для модулей векторов  $\vec{\mu}_L$  и  $\vec{\mu}_S$ :

$$\mu_L = \mu_B \sqrt{L(L+1)}, \quad \mu_S = 2 \mu_B \sqrt{S(S+1)}.$$

Модуль магнитного момента атома можно вычислить по формуле

$$\mu_J = g \mu_B \sqrt{J(J+1)}, \quad (21.46)$$

где множитель

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (21.47)$$

называется множителем или фактором Ланде.

При помощи формул (21.39) и (21.46) найдем гиромангнитное отношение (21.45) для атома:

$$\gamma = \frac{g \mu_B}{\hbar} = \frac{g e}{2 m}. \quad (21.48)$$

Из формул (21.41) и (21.44) следует, что проекция вектора  $\vec{\mu}_J$  на ось  $z$  определяется квантовым числом  $m_J$  по формуле

$$\mu_{Jz} = g \mu_B m_J. \quad (21.49)$$

Классификация состояний (термов) атома производится по значениям, которые принимают квантовые числа  $L$ ,  $S$  и  $J$ . Состояния атома с  $L = 0, 1, 2, 3, \dots$  обозначают соответственно буквами  $S, P, D, F, \dots$  (табл. 4).

Таблица 4

Число $L$	0	1	2	3	...
Символ состояния атома	$S$	$P$	$D$	$F$	...

Справа внизу у символа состояния указывается значение квантового числа  $J$ , а слева сверху – значение числа  $k = 2S + 1$ , которое называется *мультиплетностью* терма. Например, символ  ${}^2P_{3/2}$  обозначает состояние атома, для которого  $L = 1$ ,  $J = \frac{3}{2}$  и  $S = \frac{1}{2}$ .

Равенство (21.44) служит основой для объяснения так называемых *магнетомеханических* явлений. Экспериментально установлено, что при быстром намагничивании тела оно начинает вращаться. Если же способное намагничиваться тело (например, железный стержень) достаточно быстро привести во вращение, то оно намагничивается. Такие эксперименты дают возможность измерить гиромагнитное отношение. Для атома железа оно оказалось равным  $e/m$ . Из этого следует, что магнитные свойства железа обусловлены собственными магнитными моментами электронов.

## 21.7. Опыт Штерна и Герлаха

Непосредственно измерить момент импульса электрона в атоме невозможно. Однако можно измерить проекцию  $\mu_J$  на направление внешнего магнитного поля вектора  $\vec{\mu}_J$  магнитного момента атома. Такие измерения осуществили в 1922 г. немецкие физики О.Штерн и В.Герлах. Их экспериментальная установка условно изображена на рис. 21.5.

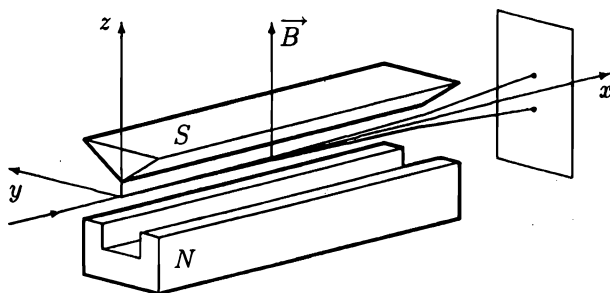


Рис. 21.5. Опыт Штерна и Герлаха. Расщепление атомарного пучка в неоднородном магнитном поле

Суть этого эксперимента заключается в том, что атом с движущимися в нем электронами подобен проволочной рамке с током. На атом в неоднородном магнитном поле, как на рамку с током, действует сила  $\vec{F}$ ,

вынуждающая его перемещаться вдоль силовых линий магнитного поля. Эта сила определяется формулой

$$\vec{F} = (\vec{\mu}_J \nabla) \vec{B}. \quad (21.50)$$

Здесь выражение в круглых скобках обозначает скалярное произведение векторов  $\vec{\mu}_J$  и  $\nabla$ ,  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля. Согласно этой формуле проекция вектора силы на ось  $z$  будет

$$F_z = \mu_{J_x} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mu_{J_y} \frac{\partial B_z}{\partial y} + \mu_{J_z} \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (21.51)$$

где  $\mu_{J_x}$ ,  $\mu_{J_y}$  и  $\mu_{J_z}$  – проекции вектора  $\vec{\mu}_J$  на оси координат,  $B_z$  – проекция вектора магнитной индукции на ось  $z$ .

Для измерения магнитного момента атома узкий пучок летящих в вакууме атомов пропускали между специальной формы полюсами электромагнита, создающего неоднородное магнитное поле. Пучок формировался при помощи диафрагмы с небольшим отверстием из атомов металла, которые испарялись с его поверхности при нагревании в печи. Когда магнитное поле отсутствовало, пролетев между полюсами магнита, атомы падали на экран, оставляя на нем заметный след в виде небольшого пятна. При движении в неоднородном магнитном поле атомы должны отклоняться от прямой, по которой они двигались, когда поля не было, и след, оставляемый ими на экране должен изменить свою форму.

Для количественного описания результатов экспериментов Штерна и Герлаха построим прямоугольную систему координат так, чтобы в отсутствие магнитного поля атомы двигались вдоль оси  $x$ ; а силовые линии магнитного поля во всех точках на оси  $x$  были направлены по оси  $z$  (рис. 21.5). В таком случае проекции вектора  $\vec{B}$  магнитной индукции на оси  $x$  и  $y$  будут равны нулю:

$$B_x = 0, \quad B_y = 0.$$

При этом согласно формуле (21.51) проекции на оси  $x$  и  $y$  силы, действующей на атом со стороны магнитного поля, также будут равны нулю:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0. \quad (21.52)$$

Магнитное поле, в котором двигались исследуемые атомы, было зеркально симметричным относительно плоскости  $xz$ . Поэтому справедливы равенства

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0.$$



В силу этих равенств формула (21.51) принимает вид

$$F_z = \mu_{J_z} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (21.53)$$

Согласно формулам (21.52) и (21.53) при движении в неоднородном магнитном поле на атом действует сила, смещающая его вдоль силовых линий поля. Проекция силы  $F_z$  может быть как положительной, так и отрицательной. Поэтому атомы в пучке по мере их продвижения в магнитном поле будут отклоняться от оси  $x$  в ту или другую сторону в зависимости от знака проекции  $\mu_{J_z}$  или не будут отклоняться вовсе при  $\mu_{J_z} = 0$ . Если бы величина  $\mu_{J_z}$  могла принимать любые значения в пределах от  $-\mu_J$  до  $\mu_J$ , где  $\mu_J$  — модуль вектора  $\vec{\mu}_J$  магнитного момента атома, то отклоненные магнитным полем атомы должны были оставить на экране след в виде непрерывной вытянутой полосы. В действительности на экране наблюдали не непрерывную полосу, а отдельные пятна; т.е. в неоднородном магнитном поле пучок атомов "расщепляется" на несколько отдельных пучков. Это означает, что проекция  $\mu_{J_z}$  на направление внешнего магнитного поля вектора  $\vec{\mu}_J$  магнитного момента атома "квантуется", т.е. принимает дискретные значения. Причем число возможных значений величины  $\mu_{J_z}$  конечно и для разных атомов различно. Некоторые атомы не отклоняются неоднородным магнитным полем, что свидетельствует об отсутствии у них магнитного момента. Пучки атомов щелочных металлов (лития, натрия и др.), атомов серебра и меди расщепляются магнитным полем на два пучка, т.е. для этих атомов проекция  $\mu_{J_z}$  принимает только два значения. Измерив величину отклонения следа пучка на экране от начального положения при  $B = 0$ , можно вычислить значения  $\mu_{J_z}$ . Для перечисленных выше атомов измерения привели к значениям

$$\mu_{J_z} = \pm \mu_B. \quad (21.54)$$

## 21.8. Эффект Зеемана \*

Когда какой-либо атом помещают в магнитное поле, спектр его излучения изменяется так, что каждая линия спектра  $\omega^{(0)}$  превращается в несколько близко расположенных линий  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  (расщепляется). Причем величина расщепления  $\omega_n - \omega_1$  прямо пропорциональна индукции  $B$  внешнего магнитного поля. Это явление называется эффектом Зеемана.

Энергия атома в магнитном поле

$$E = E^{(0)} - \vec{\mu}_J \vec{B} = E^{(0)} - \mu_{J_z} B, \quad (21.55)$$

где  $E^{(o)}$  – внутренняя энергия атома;  $-\vec{\mu}_J \vec{B}$  – энергия его взаимодействия с магнитным полем. Пусть

$$E_1 = E_1^{(o)} - \mu_{J_1} B$$

есть энергия атома в некотором состоянии 1, а

$$E_2 = E_2^{(o)} - \mu_{J_2} B$$

– его энергия в другом состоянии 2. При переходе атома из одного состояния в другое он испускает или поглощает фотон, энергия которого

$$\hbar \omega_{12} = E_2 - E_1 = \hbar \omega_{12}^{(o)} - (\mu_{J_2} - \mu_{J_1}) B,$$

где

$$\omega_{12}^{(o)} = \frac{1}{\hbar} (E_2^{(o)} - E_1^{(o)})$$

– частота излучения в отсутствие магнитного поля. С учетом (21.49) получим формулу

$$\omega_{12} = \omega_{12}^{(o)} - \frac{e B}{2 m} (g_2 m_{J_2} - g_1 m_{J_1}), \quad (21.56)$$

которая описывает расщепление спектральной линии в магнитном поле.

## 21.9. Рентгеновские спектры атомов

Частоты излучения, испускаемого атомами, лежат в очень широком интервале от частот инфракрасного излучения до частот рентгеновского излучения. Электромагнитное излучение оптического спектра частот возникает при переходе одного из внешних (оптических) электронов из возбужденного состояния в основное. Квант характеристического рентгеновского излучения рождается при переходе электрона в один из внутренних слоев атома, когда там имеется свободное состояние.

Рентгеновское излучение создается в специальных рентгеновских трубках при бомбардировке антикатада электронами высоких энергий (см. рис. 17.5). Рентгеновское излучение, возникающее при торможении электронов в веществе, имеет сплошной спектр частот, который не зависит от материала антикатада. Когда энергия бомбардирующих антикатод электронов достаточно велика, некоторые из них, сталкиваясь с атомами, выбивают электроны из их внутренних слоев. Спустя некоторое время на освободившееся место переходит электрон из слоя большего радиуса. При таких переходах атом испускает кванты рентгеновского излучения, частоты которого характерны только для данного атома. Спектральные

линии характеристического рентгеновского излучения видны на фоне сплошного спектра тормозного излучения (см. рис. 17.6). Рентгеновские спектры атомов в отличие от их оптических спектров имеют простое и одинаковое для всех атомов строение. Они состоят из нескольких серий, которые обозначают буквами  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и т.д. Каждая серия содержит небольшое число линий, обозначаемых в порядке убывания длины волны индексами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ..., которые пишут у символа серии:  $K_\alpha$ ,  $K_\beta$ , ...,  $L_\alpha$ ,  $L_\beta$ , ...

Английский физик Генри Мозли открыл в 1913 г. закон, связывающий частоту какой-либо линии характеристического рентгеновского излучения с порядковым номером  $Z$  испускающего это излучение атома:

$$\sqrt{\omega} = C (Z - \sigma), \quad (21.57)$$

где величина  $\sigma$  имеет одно и то же значение для всех линий одной серии, величина  $C$  для каждой линии принимает свое значение, но для всех атомов одинаковое, т.е. не зависящее от порядкового номера. Для всех линий  $K$ -серии  $\sigma = 1$ , для линий  $L$ -серии  $\sigma = 7,5$ .

Рассмотрим один из электронов атома, который находится в слое под номером  $n$ . Воздействие на этот электрон со стороны других электронов можно приближенно оценить, если учесть, что электронные облака имеют почти сферически симметричную форму. Как известно из электростатики, электрическое поле внутри заряженной сферы отсутствует, а вне сферы оно такое же, как поле точечного заряда. Поэтому на рассматриваемый электрон будут оказывать воздействие только те электроны атома, которые находятся в одном с ним слое или в слоях меньшего радиуса. Пусть число таких электронов равно  $\sigma_n$ . Тогда можно считать, что рассматриваемый электрон движется в кулоновском поле заряда  $e(Z - \sigma_n)$ . В таком случае энергию этого электрона с учетом формулы (21.32) можно представить в виде

$$E_n = - \frac{R \hbar}{n^2} (Z - \sigma_n)^2. \quad (21.58)$$

Уровни энергии электрона, описываемые этой формулой, показаны на рис. 21.6.

Формула (21.58) приводит к следующему выражению для спектра частот характеристического рентгеновского излучения:

$$\omega = \frac{1}{\hbar} (E_{n_2} - E_{n_1}) = R \left( \frac{(Z - \sigma_{n_1})^2}{n_1^2} - \frac{(Z - \sigma_{n_2})^2}{n_2^2} \right).$$

Если приближенно положить здесь  $\sigma_{n_1} = \sigma_{n_2}$ , то придем к формуле

$$\sqrt{\omega} = (Z - \sigma_{n_1}) \sqrt{R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)}, \quad (21.59)$$

которая выражает собой закон Мозли.

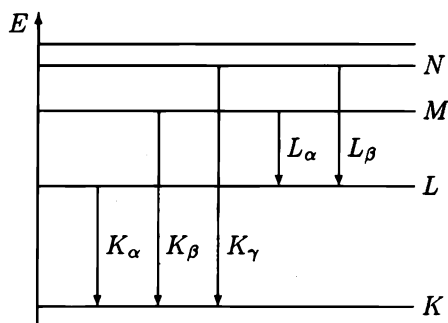


Рис. 21.6. Схема энергетических уровней, соответствующих различным электронным слоям атома. Стрелки обозначают переходы электронов из одного состояния в другое, сопровождающиеся испусканием кванта рентгеновского излучения

Линия  $K_\alpha$  рентгеновского излучения испускается атомом при переходе электрона из L-слоя ( $n_2 = 2$ ) в K-слой ( $n_1 = 1$ ). Для частот  $K_\alpha$ -линии формула (21.59) принимает вид

$$\sqrt{\omega} = (Z - 1) \frac{\sqrt{3R}}{2}. \quad (21.60)$$

На законе Мозли основан простой метод определения порядкового номера элемента в таблице Менделеева. Так, например, измерив частоту  $K_\alpha$ -линии рентгеновского излучения, испускаемого каким-то атомом, по формуле (21.60) можно вычислить порядковый номер  $Z$  этого атома.

# ГЛАВА 22

## МОЛЕКУЛЫ

### 22.1. Химическая связь

Связь атомов в молекулах называется *химической связью*. Она почти полностью обусловлена силами электростатического взаимодействия между электронами и ядрами атомов. Однако объяснить это явление можно только при помощи законов квантовой механики. Различают *ковалентную* и *ионную* связи атомов в молекулах. Различия между этими типами связи определяются различными пространственными распределениями валентных электронов в молекулах. Химическая связь двух атомов называется ковалентной, если волновая функция, описывающая движение внешнего электрона, такова, что он с равной вероятностью может находиться около любого из этих атомов. В таком случае говорят, что электрон принадлежит сразу двум атомам. Ковалентная связь характерна для молекул, состоящих из одинаковых атомов. Типичный пример ионной связи – связь атомов натрия Na и хлора Cl в молекуле NaCl. В этой молекуле единственный внешний электрон атома натрия переходит к атому хлора. В результате образуются ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$ , между которыми действуют силы кулоновского притяжения.

Независимо от того, какой характер имеет связь атомов в молекуле, при больших расстояниях ( $R > R_0$ ) атомы притягиваются друг к другу, а при малых ( $R < R_0$ ) они отталкиваются. При этом потенциальная энергия  $U$  взаимодействия атомов зависит от расстояния  $R$  между ними. Примерный график этой зависимости показан на рис 7.1.

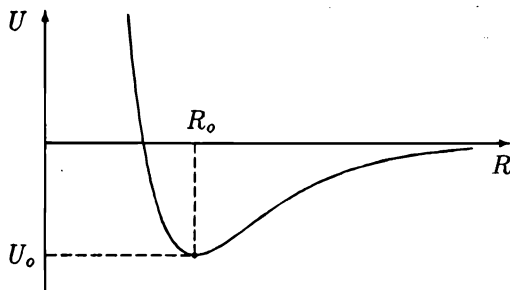


Рис. 22.1. Зависимость потенциальной энергии  $U$  взаимодействия двух атомов от расстояния  $R$  между ними

Запишем несколько первых членов разложения функции  $U = U(R)$  в ряд Тейлора по степеням  $R - R_0$ :

$$U(R) = U(R_0) + \frac{dU(R_0)}{dR} (R - R_0) + \\ + \frac{1}{2!} \frac{d^2U(R_0)}{dR^2} (R - R_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3U(R_0)}{dR^3} (R - R_0)^3 + \dots$$

Так как

$$\frac{dU(R_0)}{dR} = 0,$$

в окрестности точки  $R_0$  зависимость  $U = U(R)$  потенциальной энергии двух атомов от расстояния между ними можно описать приближенной формулой

$$U(R) = U_0 + \frac{1}{2} c \cdot (R - R_0)^2 - \frac{1}{3} f \cdot (R - R_0)^3, \quad (22.1)$$

где

$$U_0 = U(R_0), \quad c = \frac{d^2U(R_0)}{dR^2}, \quad f = -\frac{1}{2} \frac{d^3U(R_0)}{dR^3}.$$

При  $f = 0$  формула (22.1) описывает потенциальную энергию гармонического осциллятора. Система, потенциальная энергия которой зависит от расстояния  $R$  согласно формуле (22.1), где  $f \neq 0$ , называется *ангармоническим осциллятором*.

## 22.2. Ион молекулы водорода \*

Молекула водорода  $H_2$  состоит из двух атомов водорода. Ион молекулы водорода  $H_2^+$  образуется при удалении из молекулы водорода одного электрона, т.е. ион  $H_2^+$  состоит из трех частиц: двух протонов и одного электрона (рис. 22.2).

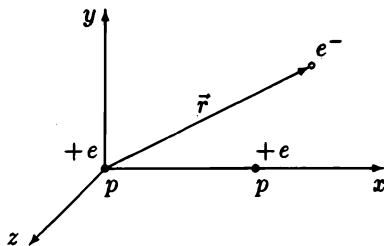


Рис. 22.2. Ион молекулы водорода

Уравнение Шредингера для системы, в которой содержится больше двух частиц, нельзя решить аналитически. При отыскании приближенного решения учитывают тот факт, что массы протона и ядер атомов значительно превышают массу электрона. Поэтому электроны движутся в атомах быстрее ядер. Предполагают что, ядра движутся так медленно, что при любом их расположении система электронов находится в стационарном состоянии.

Стационарное состояние электрона, движущегося в электрическом поле двух протонов, описывается волновой функцией

$$\psi = \psi(\vec{r}), \quad (22.2)$$

которая является решением уравнения Шредингера

$$\hat{H} \psi = E \psi, \quad (22.3)$$

где оператор полной энергии электрона

$$\hat{H} = \hat{T} + U_1 + U_2, \quad (22.4)$$

где оператор его кинетической энергии

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2, \quad U_i = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{R}_i|}$$

– потенциальная энергия взаимодействия электрона с  $i$ -м протоном,  $i = 1, 2$ ;  $\vec{R}_i$  – радиус-вектор этого протона.

Волновая функция (22.2) должна удовлетворять условию нормировки

$$\int |\psi|^2 dV = 1. \quad (22.5)$$

В химии волновые функции электронов в атомах принято называть *орбиталями*. Один из приближенных методов решения уравнения Шредингера для электрона в молекуле основан на предположении, что волновая функция электрона может быть представлена в виде суммы атомных орбиталей. Этот метод называют методом орбиталей.

Волновая функция

$$\psi_i(\vec{r}) = A \exp(-\alpha |\vec{r} - \vec{R}_i|) \quad (22.6)$$

есть волновая функция, описывающая основное состояние электрона, который движется около  $i$ -го протона ( $i = 1, 2$ ) при условии, что другой

протон находится достаточно далеко и не влияет на это движение. Другими словами, функция (22.6) есть орбиталь электрона в атоме водорода. Таким образом, функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  являются решениями уравнений

$$(\hat{T} + U_1) \psi_1 = E_0 \psi_1, \quad (\hat{T} + U_2) \psi_2 = E_0 \psi_2, \quad (22.7)$$

где  $E_0 = -R\hbar$  – энергия основного состояния электрона в атоме водорода.

Орбитали  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – нормированные функции:

$$\int |\psi_i|^2 dV = 1. \quad (22.8)$$

Построим прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось  $x$  проходила через протоны, и один из них находился в начале отсчета (рис. 22.2). На рис. 22.3 показаны графики зависимостей от координаты  $x$  потенциальных энергий  $U_1$  и  $U_2$  электрона и его волновых функций (22.6).

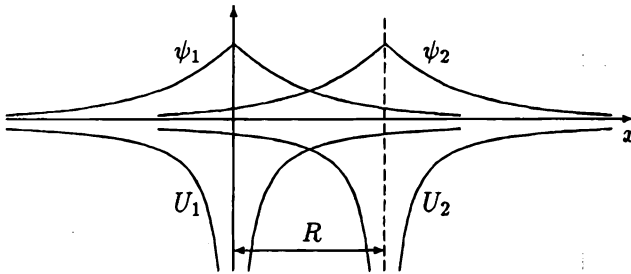


Рис. 22.3. Потенциальные энергии взаимодействия электрона с протонами и его орбитали  $\psi_1$  и  $\psi_2$

Следуя методу орбиталей, представим волновую функцию электрона в ионе молекулы водорода в виде суммы

$$\psi(\vec{r}) = C_1 \psi_1(\vec{r}) + C_2 \psi_2(\vec{r}), \quad (22.9)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – коэффициенты, которые нужно найти.

Квадрат модуля функции (22.9)

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= \psi^* \psi = (C_1^* \psi_1 + C_2^* \psi_2) (C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2) = \\ &= |C_1|^2 |\psi_1|^2 + |C_2|^2 |\psi_2|^2 + (C_1^* C_2 + C_1 C_2^*) \psi_1 \psi_2. \end{aligned}$$

Подставим это выражение в условие нормировки (22.5). Как видно из рис. 22.3, в тех точках пространства, где одна из функций  $\psi_1$  или  $\psi_2$



принимает наибольшие значения, другая функция почти равна нулю. Поэтому так называемый интеграл перекрытия

$$\int \psi_1 \psi_2 dV$$

существенно меньше единицы и его можно положить равным нулю. С учетом условий (22.8) придем к равенству

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1. \quad (22.10)$$

Подставим теперь сумму орбиталей (22.9) в уравнение (22.3). Получим

$$(\hat{T} + U_1 + U_2) (C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2) = E (C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2).$$

При помощи равенств (22.7) этому уравнению можно придать вид

$$E_0 C_1 \psi_1 + U_2 C_1 \psi_1 + U_1 C_2 \psi_2 + E_0 C_2 \psi_2 = E (C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2). \quad (22.11)$$

Умножив это уравнение на  $\psi_1$  и проинтегрировав полученное равенство по  $\vec{r}$ , придем к уравнению

$$(E - E_0 + I) C_1 + J C_2 = 0, \quad (22.12)$$

где

$$I = - \int U_2 \psi_1^2 dV, \quad J = - \int U_1 \psi_1 \psi_2 dV. \quad (22.13)$$

Умножим равенство (22.11) на  $\psi_2$  и вновь проинтегрируем по  $\vec{r}$ . Получим уравнение

$$J C_1 + (E - E_0 + I) C_2 = 0. \quad (22.14)$$

Уравнения (22.12) и (22.14) образуют систему с двумя неизвестными  $C_1$  и  $C_2$ . Эта система имеет нетривиальное решение при условии, что определитель

$$\begin{vmatrix} E - E_0 + I & J \\ J & E - E_0 + I \end{vmatrix} = 0.$$

Из этого уравнения найдем возможные значения энергии электрона в ионе молекулы водорода:

$$E_{1,2} = E_0 - I \pm J. \quad (22.15)$$

Как видно из этой формулы, вместо одного значения энергии  $E_0$  электрона в атоме водорода, энергия электрона в ионе молекулы водорода

может принимать два близких значения  $E_1$  и  $E_2$ . Такое явление называется *расщеплением* энергетического уровня.

Интегралы (22.13) есть положительные монотонно убывающие функции расстояния  $R$  между протонами. Они характеризуют влияние, которое оказывает второй протон на движение электрона. Когда расстояние  $R$  до этого протона стремится к бесконечности, интегралы (22.13) обращаются в ноль. Из сказанного следует, что значения (22.15) энергии электрона зависят от расстояния  $R$ :

$$E_1(R) = E_0 - I(R) - J(R), \quad (22.16)$$

$$E_2(R) = E_0 - I(R) + J(R). \quad (22.17)$$

Пусть энергия электрона в ионе молекулы водорода принимает значение (22.16). Подставив это значение в уравнение (22.12), придем к равенству  $C_1 = C_2$ . Из уравнения (22.10) найдем, что  $C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . При этом функция (22.9) примет вид

$$\psi_s(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})). \quad (22.18)$$

График этой функции в зависимости от координаты  $x$  изображен на рис. 22.4.

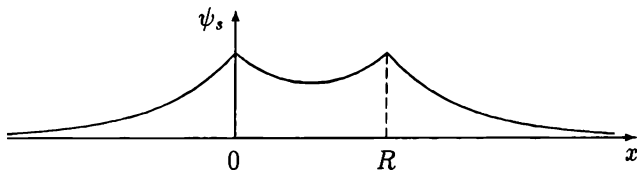


Рис. 22.4. "Симметричная" волновая функция  $\psi_s$  электрона в ионе молекулы водорода

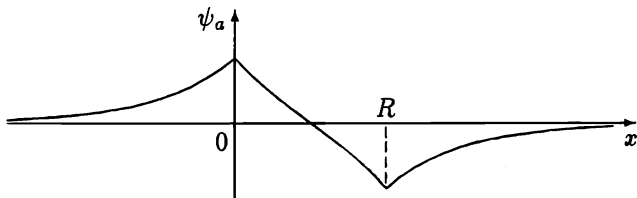


Рис. 22.5. "Антисимметричная" волновая функция  $\psi_a$  электрона в ионе молекулы водорода  $\text{H}_2^+$

Нетрудно показать, что энергия электрона принимает значение (22.17), когда его состояние описывается "антисимметричной" волновой функцией

$$\psi_a(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\vec{r}) - \psi_2(\vec{r})). \quad (22.19)$$

График этой функции в зависимости от координаты  $x$  изображен на рис. 22.5.

Полная энергия иона молекулы водорода равна сумме энергии электрона и кулоновской энергии отталкивания протонов:

$$E_{\text{H}_2^+}^{(1)} = E_1(R) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (22.20)$$

$$E_{\text{H}_2^+}^{(2)} = E_2(R) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (22.21)$$

Графики этих функций показаны на рис. 22.6. Как видно из этого рисунка, зависимость (22.20) энергии иона  $\text{H}_2^+$  от расстояния  $R$  между протонами при  $R > R_0$  есть возрастающая функция, т.е. при таких расстояниях протоны притягиваются друг к другу. Это можно объяснить следующим образом.

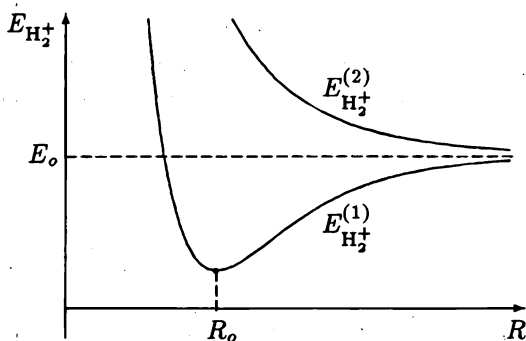


Рис. 22.6. Энергия иона молекулы водорода  $\text{H}_2^+$  как функция расстояния  $R$  между протонами

Соответствующая энергии (22.20) волновая функция (22.18) в пространстве между протонами не равна нулю, т.е. не равна нулю вероятность нахождения электрона в этой области пространства. Электрон при своем движении очень часто оказывается между протонами. При этом силы притяжения протонов к электрону больше сил их отталкивания. Напротив, функция (22.19), соответствующая энергии (22.21), в пространстве между протонами принимает не очень большие значения и даже равна нулю в средней точке (рис. 22.5). Поэтому при таком характере движения электрона силы кулоновского отталкивания протонов больше сил их притяжения к электрону в тех редких случаях, когда он оказывается между ними.

Молекула водорода находится в состоянии с наименьшей энергией при условии, что движение обоих ее электронов описывается "симметричной"

волновой функцией (22.18). При этом спины электронов в силу принципа Паули должны быть направлены в противоположные стороны. В таком случае оба электрона осуществляют ковалентную связь атомов водорода в молекуле  $H_2$ , а ее энергия равна сумме энергий электронов и энергии взаимодействия протонов:

$$E_{H_2} = 2 E_1(R) + \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 R}. \quad (22.22)$$

### 22.3. Энергия двухатомной молекулы

Рассмотрим движения, которые могут происходить внутри молекулы  $AB$ , состоящей из двух атомов  $A$  и  $B$ . Во-первых, внутри молекулы имеются электроны, которые находятся в непрерывном движении. Кроме этого, атомы  $A$  и  $B$  могут колебаться относительно центра масс молекулы, а также молекула может вращаться вокруг оси, проходящей через центр масс. Каждому из этих видов движения соответствует определенное значение энергии. Таким образом, выражение для энергии молекулы  $E$  можно записать так:

$$E = E_e + E_v + E_r, \quad (22.23)$$

где  $E_e$  – энергия электронов;  $E_v$  – колебательная, или вибрационная энергия молекулы;  $E_r$  – вращательная, или ротационная энергия.

Представим себе двухатомную молекулу в виде двух частиц, соединенных пружинкой (рис. 22.7). Пусть массы атомов равны  $m_1$  и  $m_2$ , а жесткость пружинки –  $c$ . Разумеется, никаких пружинок в молекуле нет, а есть реальные силы притяжения и отталкивания, действующие между атомами. Взаимодействие атомов характеризуется зависимостью потенциальной энергии от расстояния между ними. Эту зависимость можно описать приближенной формулой (22.1), положив в ней  $f = 0$ . Это означает, что молекулу в первом приближении можно рассматривать как гармонический осциллятор.

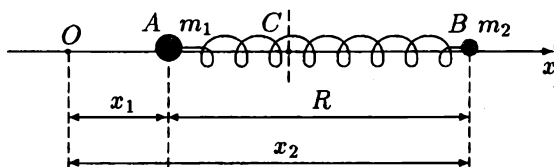


Рис. 22.7. Модель двухатомной молекулы

Стационарное движение двух частиц вдоль проходящей через них оси  $x$  согласно представлениям квантовой механики будем описывать посредством функции

$$\psi = \psi(x_1, x_2),$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — координаты частиц. Эта функция является решением уравнения Шредингера

$$\hat{H} \psi = E \psi,$$

в котором оператор Гамильтона  $\hat{H}$  равен сумме операторов кинетических энергий частиц

$$\hat{T}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad \hat{T}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

и оператора потенциальной энергии их взаимодействия

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2} c \cdot (x_2 - x_1 - R_0)^2.$$

Подробнее уравнение Шредингера для двух частиц можно записать так:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} c \cdot (x_2 - x_1 - R_0)^2 \psi = E \psi.$$

Волновая функция, описывающая движение частиц относительно их центра масс, должна зависеть только от разности координат:

$$\psi = \psi(\xi), \tag{22.24}$$

где

$$\xi = x_2 - x_1 - R_0.$$

Подстановка функции  $\psi = \psi(\xi)$  в уравнение Шредингера преобразует его к виду

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} c \xi^2 \psi = E \psi, \tag{22.25}$$

где

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

— приведенная масса молекулы. Функция (22.24), являющаяся решением уравнения (22.25), описывает стационарное состояние гармонического осциллятора, частота колебаний которого

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{\mu}}.$$

Энергия такого осциллятора принимает значения

$$E_v = \hbar \omega \left( v + \frac{1}{2} \right), \quad (22.26)$$

где колебательное квантовое число

$$v = 0, 1, 2, \dots$$

Энергия вращающегося тела зависит от его угловой скорости  $\Omega$  согласно известной формуле

$$E_r = \frac{1}{2} I \Omega^2, \quad (22.27)$$

где  $I$  – момент инерции тела. Нетрудно доказать, что момент инерции системы двух материальных точек относительно оси, проходящей через центр масс системы, равен

$$I = \mu R_o^2,$$

где  $\mu$  – приведенная масса,  $R_o$  – расстояние между частицами.

Момент импульса тела прямо пропорционален его угловой скорости:

$$L = I \Omega.$$

При помощи этой формулы выражению (22.27) для энергии вращения можно придать вид

$$E_r = \frac{L^2}{2I}. \quad (22.28)$$

Значения, которые может принимать момент импульса молекулы, можно найти по формуле

$$L = \hbar \sqrt{j(j+1)}, \quad (22.29)$$

где вращательное квантовое число

$$j = 0, 1, 2, \dots$$

Подстановка выражения (22.29) в формулу (22.28) дает

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1). \quad (22.30)$$

Таким образом, с учетом формул (22.26) и (22.30) для колебательной и вращательной энергий молекулы можно утверждать, что ее энергия (22.23) зависит от квантовых чисел  $v$  и  $j$ :

$$E(v, j) = E_e + \hbar \omega \left( v + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1). \quad (22.31)$$

Эта формула определяет спектр энергий молекулы и расположение энергетических уровней. Причем в силу неравенства

$$\frac{\hbar^2}{2I} \ll \hbar\omega$$

"расстояния" между вращательными уровнями, для которых число  $v = \text{const}$ , а число  $j$  принимает различные значения, меньше "расстояний" между колебательными уровнями, для которых  $j = 0$ , а число  $v$  изменяется. В свою очередь "расстояния" между колебательными уровнями меньше "расстояний" между уровнями энергий электронов. Схема расположения уровней энергии молекулы показана на рис. 22.8.

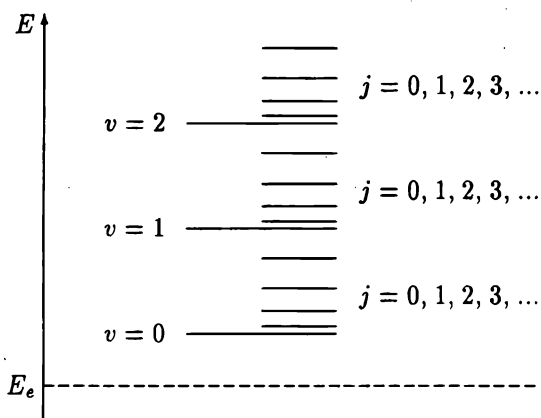


Рис. 22.8. Энергетический спектр молекулы

При переходе молекулы из одного состояния в другое она испускает или поглощает фотон. Спектр частот  $\omega$  электромагнитного излучения молекулы определяется формулой  $\hbar\omega = E_2 - E_1$ , где  $E_1$  и  $E_2$  — какие-либо два значения энергии молекулы из ее энергетического спектра (22.31).

## 22.4. Комбинационное рассеяние света

При прохождении монохроматического света через прозрачное вещество в спектре частот рассеянного молекулами света наблюдается не только частота  $\omega_0$  падающего света, но также частоты  $\omega_0 - \omega$  и  $\omega_0 + \omega$ , где  $\omega$  — частота, соответствующая переходам молекулы из одного состояния в другое. Это явление называется *комбинационным рассеянием* света. Спектральная линия рассеянного света частоты  $\omega_0 - \omega$  называется *красным спутником*, а частоты  $\omega_0 + \omega$  — *фиолетовым*. Отношение ин-

тенсивности фиолетового спутника к интенсивности красного спутника увеличивается при повышении температуры.

Изменение частоты света при его рассеянии на молекулах можно объяснить следующим образом. Пусть фотон, энергия которого равна  $\hbar\omega_0$ , сталкивается с молекулой, находящейся в основном состоянии (рис. 22.9). Энергия такой молекулы согласно формуле (22.31) равна

$$E(0, 0) = E_e + \frac{1}{2} \hbar \omega .$$

При столкновении фотона с молекулой он может отдать ей часть своей энергии. В результате молекула переходит в возбужденное состояние. Например, молекула может оказаться в первом возбужденном колебательном состоянии с  $v = 1$  и  $j = 0$ . Теперь молекула будет обладать энергией

$$E(1, 0) = E_e + \frac{3}{2} \hbar \omega ,$$

т.е. энергия молекулы увеличилась на величину

$$\Delta E = E(1, 0) - E(0, 0) = \hbar \omega .$$

При этом энергия фотона уменьшается на  $\Delta E$  и становится равной

$$\hbar \omega' = \hbar \omega_0 - \Delta E = \hbar (\omega_0 - \omega) ,$$

где  $\omega'$  – частота фотона после рассеяния на молекуле. Таким образом, частота  $\omega'$  рассеянного света будет

$$\omega' = \omega_0 - \omega .$$

Так возникает красный спутник в спектре частот рассеянного света.

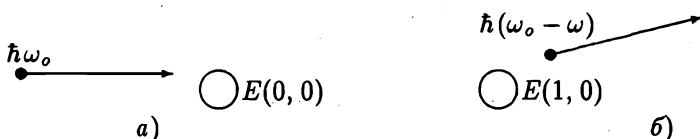


Рис. 22.9. Возникновение красного спутника в спектре рассеянного на молекулах излучения

Когда фотон сталкивается с возбужденной молекулой (рис. 22.10), он может принять от нее энергию  $\Delta E$ . Тогда его энергия будет

$$\hbar \omega'' = \hbar \omega_0 + \Delta E = \hbar (\omega_0 + \omega) ,$$



где частота  $\omega''$  рассеянного света теперь будет

$$\omega'' = \omega_0 + \omega.$$

Так в спектре частот рассеянного света появляется фиолетовый спутник.

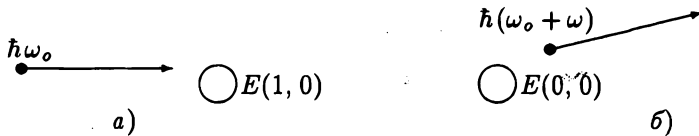


Рис. 22.10. Возникновение фиолетового спутника в спектре рассеянного на молекулах излучения

Очевидно, что интенсивность спутника пропорциональна числу молекул, столкновения фотонов с которыми приводят к его появлению. Когда вещество находится в состоянии термодинамического равновесия, распределение молекул по состояниям определяется законом Гиббса:

$$N_i = N_0 \exp(-E_i/kT),$$

где  $N_i$  – число молекул в состоянии с энергией  $E_i$ . Согласно этому закону интенсивность красного спутника пропорциональна числу молекул с энергией  $E(0, 0)$ :

$$I_{\text{красн}} \sim \exp(-E(0, 0)/kT),$$

а интенсивность фиолетового – числу молекул с энергией  $E(1, 0)$ :

$$I_{\text{фиолет}} \sim \exp(-E(1, 0)/kT).$$

При этом отношение интенсивности фиолетового спутника к интенсивности красного спутника будет зависеть от температуры согласно формуле

$$I_{\text{фиолет}}/I_{\text{красн}} = \exp(-\Delta E/kT).$$

# ЧАСТЬ 7

## ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

### ГЛАВА 23

### АТОМНОЕ ЯДРО

---

#### 23.1. Состав и характеристики атомных ядер

Ядро атома состоит из частиц, называемых *нуклонами*. К нуклонам относятся частицы двух типов: протоны и нейтроны. Протон  $p$  имеет положительный заряд, значение которого в точности равно элементарному электрическому заряду  $e$ . Нейтрон  $n$  является нейтральной частицей. Число  $Z$  протонов в ядре какого-либо атома равно порядковому номеру элемента в таблице Менделеева. Это число называется *зарядовым числом*. Таким образом, ядро с порядковым номером  $Z$  обладает зарядом  $+Ze$ .

В качестве единицы массы в ядерной физике используется *атомная единица массы* (сокращенно *а.е.м.*), равная  $\frac{1}{12}$  массы атома углерода  $^{12}_6\text{C}$ :

$$1 \text{ а.е.м.} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Массу ядра принято обозначать буквой  $M$ . Целое число  $A$ , ближайшее к численному значению массы  $M$  какого-либо атомного ядра, выраженному в атомных единицах массы, называется *массовым числом*. Число  $A$  есть число нуклонов в ядре. При этом число  $N$  нейтронов в ядре равно

$$N = A - Z.$$

Состав ядра какого-либо химического элемента определяется значением массового числа  $A$ , которое пишут слева вверху около символа  $X$ , обозначающего этот элемент, и значением зарядового числа  $Z$  — слева внизу:

$${}^A_Z X.$$

Атомы, ядра которых имеют одинаковый заряд  $+Ze$ , но различные массы, называются *изотопами*. Примерами изотопов одного элемента являются три изотопа водорода: протий  ${}^1_1\text{H}$ , дейтерий  ${}^2_1\text{H}$  и тритий  ${}^3_1\text{H}$ .

Масса нейтрона  $m_n = 1,00866$  а.е.м. превосходит массу протона  $m_p = 1,00728$  а.е.м. более чем на две массы электрона  $m_e = 5,49 \cdot 10^{-4}$  а.е.м. Точные измерения масс атомных ядер показали, что масса любого ядра меньше суммы масс входящих в него нуклонов:

$$M < Z m_p + N m_n . \quad (23.1)$$

Величина

$$\Delta m = Z m_p + N m_n - M \quad (23.2)$$

называется *дефектом массы ядра*.

Атомные ядра имеют почти сферическую форму. Радиус ядра определяется приближенной формулой

$$R = R_0 A^{1/3} ,$$

где  $R_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$  м.

### 23.2. Самопроизвольный распад частицы

Существуют частицы, которые могут без каких-либо внешних воздействий делиться на несколько частей. Запишем закон сохранения энергии для самопроизвольного распада первоначально покоившейся частицы. С этой целью воспользуемся формулой

$$E = m c^2 + T \quad (23.3)$$

для энергии  $E$  частицы массы  $m$ , которая обладает кинетической энергией  $T$ . Первое слагаемое в этой формуле называется *энергией покоя* частицы. Пусть масса распадающейся частицы равна  $M$ , а массы  $s$  частиц, которые из нее образуются, обозначим  $m_1, m_2, \dots, m_s$ . Согласно закону сохранения энергии энергия покоя  $M c^2$  исходной частицы равна сумме энергий частиц-продуктов ее распада:

$$M c^2 = \sum_{i=1}^s (m_i c^2 + T_i) , \quad (23.4)$$

где  $T_i$  – кинетическая энергия  $i$ -й частицы. Из этого равенства следует, что самопроизвольный распад частицы возможен только при условии, что ее масса  $M$  больше суммы масс продуктов распада:

$$M > \sum_{i=1}^s m_i . \quad (23.5)$$

### 23.3. Энергия связи

Все атомные ядра устойчивы по отношению к распаду на нуклоны, так как масса ядра всегда меньше суммы масс, входящих в него нуклонов. Факт существования устойчивых атомных ядер свидетельствует о том, что между нуклонами в ядре действуют силы притяжения, которые называются *ядерными силами*. Экспериментальные исследования этих сил показали, что они обладают следующими особенностями. Ядерные силы не зависят от наличия или отсутствия электрического заряда у взаимодействующих нуклонов. При расстоянии  $R = 10^{-15}$  м между двумя протонами действующая на них ядерная сила в 35 раз больше силы их кулоновского взаимодействия. С увеличением расстояния ядерные силы очень быстро ослабевают и при расстояниях между нуклонами, превышающих  $1,4 \cdot 10^{-15}$  м, действием этих сил можно пренебречь. При расстояниях, меньших  $10^{-15}$  м, притяжение нуклонов заменяется их отталкиванием.

Количественной характеристикой действия ядерных сил на нуклоны в ядре служит так называемая *энергия связи*

$$E_{св} = (Z m_p + N m_n - M) c^2 = \Delta m c^2. \quad (23.6)$$

Это есть наименьшая энергия, которую нужно сообщить стабильному ядру для того, чтобы разделить его на нуклоны.

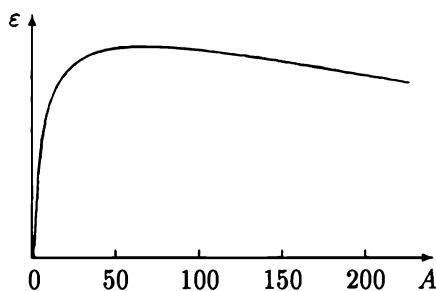


Рис. 23.1. График зависимости удельной энергии связи  $\epsilon$  нуклонов в ядре от его массового числа  $A$

Отношение энергии связи к массовому числу

$$\epsilon = \frac{E_{св}}{A} \quad (23.7)$$

называется *удельной энергией связи* нуклонов в ядре. Удельная энергия связи, т.е. энергия связи, приходящаяся на один нуклон, является

функцией от массового числа:  $\epsilon = \epsilon(A)$ . График этой функции показан на рис. 23.1. При небольших значениях массового числа ( $A < 56$ ) удельная энергия связи в среднем монотонно возрастает. Наибольшей удельной энергией связи обладают нуклоны в ядре изотопа железа  ${}_{26}^{56}\text{Fe}$ . При дальнейшем увеличении массового числа удельная энергия связи постепенно убывает.

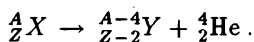
### 23.4. Радиоактивность

Атомные ядра, состоящие из одного и того же числа нуклонов, называются *изобарами*:  $Z + N = A = \text{const}$ . При  $A = \text{const}$  изобары отличаются друг от друга значениями чисел  $Z$  и  $N$ . Установлено, что большинству массовых чисел  $A$  соответствует только один стабильный изобар, а все другие изобары – нестабильны, т.е. самопроизвольно превращаются в другие ядра.

Стабильный изобар является таковым потому, что он обладает наименьшей энергией покоя  $Mc^2$  по сравнению со всеми ядрами, в которые он мог бы превратиться. Различия в энергиях ядер-изобар обусловлены неравенством масс протона и нейтрона и наличием у протона электрического заряда. Так как масса нейтрона больше массы протона, при замене в ядре протона на нейтрон увеличивается масса и энергия покоя ядра, что делает его менее устойчивым. С другой стороны, при увеличении числа протонов энергия ядра увеличивается за счет увеличения положительной энергии их кулоновского отталкивания. Устойчивые ядра характеризуются определенным значением отношения  $N/Z$  числа нейтронов к числу протонов. Для ядер, содержащих не очень большое число нуклонов (такие ядра называются легкими), это отношение близко к единице. С увеличением числа нуклонов в ядре отношение  $N/Z$  растёт, достигая для тяжелых ядер значения 1,6.

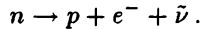
*Радиоактивностью* называется самопроизвольное превращение неустойчивых ядер одного химического элемента в ядра другого элемента. Такое превращение может происходить различными путями. Основными путями самопроизвольного распада ядер являются  $\alpha$ -распад,  $\beta$ -распад, протонная радиоактивность и спонтанное деление тяжелых ядер.

При  $\alpha$ -распаде из ядра вылетает  $\alpha$ -частица, т.е. ядро атома гелия  ${}^4_2\text{He}$ :

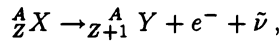


Так как  $\alpha$ -частица состоит из четырех нуклонов, среди которых два протона, при ее вылете из ядра  $X$  образуется ядро  $Y$  элемента, порядковый номер которого на две единицы меньше, а массовое число меньше на четыре единицы. Это правило называется *законом смещения*.

Масса нейтрона больше суммы масс протона и электрона. Поэтому возможен самопроизвольный распад нейтрона  $n$  на протон  $p$  и электрон  $e^-$ . При этом кроме протона и электрона образуется еще одна частица, которая не имеет ни массы, ни заряда. Эта частица называется *антинейтрино* и обозначается символом  $\bar{\nu}$ . Реакция распада нейтрона имеет вид



Самопроизвольное превращение атомного ядра, в результате которого его заряд увеличивается или уменьшается на один элементарный электрический заряд, называется  $\beta$ -распадом. Такие ядра называются  $\beta$ -радиоактивными. Если один из нейтронов в ядре превратится в протон, то произойдет реакция



которая называется электронным  $\beta$ -распадом.

Запишем закон сохранения энергии для электронного  $\beta$ -распада покоящегося ядра  $X$ , масса которого равна  $M_X$ :

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + T_Y + m_e c^2 + T_e + T_{\bar{\nu}}, \quad (23.8)$$

где  $M_Y$  и  $m_e$  — массы покоя ядра  $Y$  и электрона соответственно, масса покоя антинейтрино равна нулю;  $T_Y$ ,  $T_e$  и  $T_{\bar{\nu}}$  — кинетические энергии продуктов реакции. Как следует из уравнения (23.8), сумма этих кинетических энергий есть постоянная величина:

$$T_Y + T_e + T_{\bar{\nu}} = (M_X - M_Y - m_e) c^2.$$

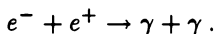
В каждом конкретном акте бета-распада кинетическая энергия распределяется между ядром  $Y$ , электроном  $e^-$  и антинейтрино  $\bar{\nu}$  произвольным образом. Поэтому энергия электрона, испускаемого при бета-распаде ядра, может принимать любое значение в пределах от 0 до

$$T_{\max} = (M_X - M_Y - m_e) c^2.$$

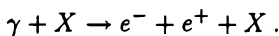
В таком случае говорят, что бета-спектр, т.е. спектр энергий бета-частицы (электрона) является сплошным и имеет верхнюю границу, определяемую значением  $T_{\max}$ .

Экспериментально и теоретически доказано, что каждой элементарной частице соответствует *античастица*. Частица, являющаяся античастицей для электрона, называется *позитроном*. Масса позитрона равна массе электрона, а его заряд — положителен и равен по величине элементарному электрическому заряду  $e$ . Позитрон обозначается символом

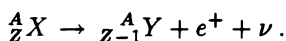
$e^+$ . Антинейтрино является античастицей по отношению к частице  $\nu$ , которая называется *нейтрино*. При столкновении частицы со своей античастицей происходит их *аннигиляция*, т.е. эти частицы исчезают, а вместо них рождаются два (редко три) фотона высоких энергий, так называемые  $\gamma$ -кванты. Например, взаимодействие электрона и позитрона приводит к их аннигиляции:



Наблюдается также обратный процесс – рождение электрона и позитрона при прохождении  $\gamma$ -кванта вблизи атомного ядра:



При испускании ядром позитрона заряд ядра уменьшается на один элементарный электрический заряд. Кроме позитрона и нового ядра среди продуктов распада присутствует нейтрино:



Такой  $\beta$ -распад называется позитронным.

Как уже говорилось выше, среди изобар легких элементов стабильными являются те, в которых количества протонов и нейтронов примерно одинаковы. Ядра, в которых нейтронов существенно больше, чем протонов, нестабильны по отношению к электронному  $\beta$ -распаду, а ядра с избытком протонов претерпевают позитронный  $\beta$ -распад.

Протонная радиоактивность, как показывает само название, есть превращение ядер, при котором они испускают один или два протона.

Ядра, массовые числа которых больше, чем у ядра урана, способны к самопроизвольному делению на две части. После деления ядра продукты деления, называемые ядрами-осколками, разлетаются в противоположные стороны под действием кулоновских сил отталкивания.

Следует отметить, что во всех описанных в этом разделе реакциях распада ядер сохраняются числа нуклонов и суммарный заряд частиц, т.е. число нуклонов в исходном ядре равно числу нуклонов в продуктах распада, а заряд ядра равен заряду частиц, на которые оно распадается. Законы сохранения числа нуклонов и электрического заряда необходимо учитывать при написании уравнения распада и при вычислениях массового и зарядового чисел нового ядра. Эти вычисления приводят к соответствующим законам смещения.

### 23.5. Закон радиоактивного распада

Пусть некоторое радиоактивное вещество содержит в себе  $N$  атомов с неустойчивыми ядрами. Закон  $N = N(t)$  изменения числа радиоактивных ядер с течением времени можно установить следующим образом. Пусть  $dN$  есть приращение функции  $N = N(t)$ , которое она получила за время от некоторого момента  $t$  до  $t + dt$ . Так как эта функция является убывающей, ее приращение  $dN < 0$ . Поэтому число ядер, которые испытали за время  $dt$  радиоактивный распад, равно  $-dN$ . Очевидно, что это число должно быть пропорционально числу  $N(t)$  радиоактивных ядер и времени  $dt$ :

$$-dN = \lambda N dt. \quad (23.9)$$

Коэффициент пропорциональности  $\lambda$  называется *постоянной распада*. Каждое радиоактивное вещество характеризуется своей постоянной распада. Уравнение (23.9) есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, т.е. его можно записать в виде

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt.$$

Интегрирование этого равенства приводит к зависимости

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (23.10)$$

которая выражает собой закон радиоактивного распада. В этой формуле  $N_0$  – постоянная интегрирования, которая равна числу радиоактивных ядер, имевшихся в веществе в момент времени  $t = 0$ .

Найдем отношение чисел  $N(t)$  и  $N(t + T)$  радиоактивных ядер в моменты времени  $t$  и  $t + T$ :

$$\frac{N(t)}{N(t + T)} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda(t+T)}} = e^{\lambda T}.$$

Если это отношение равно 2, то промежуток времени  $T$  называется *периодом полураспада*:

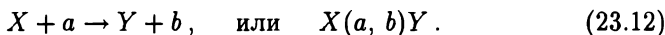
$$e^{\lambda T} = 2. \quad (23.11)$$

По определению период полураспада есть время, в течение которого количество радиоактивных ядер уменьшается в два раза.



## 23.6. Ядерные реакции

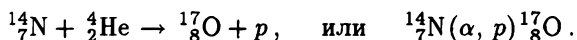
Превращение одного атомного ядра  $X$  в ядро  $Y$  другого химического элемента может происходить не только самопроизвольно, но также при взаимодействии с какой-нибудь частицей  $a$ , которую называют *бомбардирующей*. Такое превращение называется *ядерной реакцией*. Кроме ядра  $Y$  среди продуктов реакции всегда присутствует еще одна (или несколько) быстрая частица  $b$ , которая называется *испускаемой*. Таким образом, ядерную реакцию условно можно записать так:



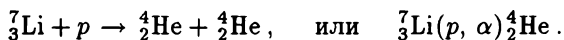
В качестве частиц  $a$  и  $b$  в ядерной реакции могут участвовать нейтрон  $n$ , протон  $p$ , ядро тяжелого водорода  ${}^2_1\text{H}$  – дейтрон,  $\alpha$ -частица или  $\gamma$ -квант.

Ядерная реакция может произойти только в том случае, когда частица  $a$  подлетает к ядру  $X$  так близко, что между ними начинают действовать ядерные силы. Незаряженные частицы, например нейтроны, могут проникать в атомные ядра, обладая любой кинетической энергией. Так как атомное ядро  $X$  имеет положительный заряд, для осуществления ядерной реакции с положительно заряженной частицей  $a$  необходимо, чтобы эта частица обладала достаточно высокой кинетической энергией для преодоления кулоновских сил отталкивания. Пучки заряженных частиц с энергией, достаточной для проникновения в атомные ядра, получают в специальных устройствах, называемых ускорителями, где заряженные частицы приобретают высокие энергии, двигаясь в сильных электрических и магнитных полях. В лабораторных условиях ядерные реакции протекают при падении потока частиц на мишень, которая обычно представляет собой очень тонкую пластинку, изготовленную из исследуемого вещества.

Первая ядерная реакция была осуществлена при облучении азота  $\alpha$ -частицами от радиоактивного источника. При этом некоторые ядра азота превращались в ядра кислорода и испускали протон. Эта реакция описывается уравнением



При бомбардировке атомов лития искусственно ускоренными протонами была вызвана ядерная реакция



Следует отметить, что во всех ядерных реакциях сохраняются числа нуклонов и заряд частиц.

При взаимодействии любых частиц должны выполняться законы сохранения импульса и энергии. Не должны быть исключением и взаимодействия частиц в ядерных реакциях. Закон сохранения импульса в ядерной реакции (23.12) выражается равенством

$$\vec{p}_X + \vec{p}_a = \vec{p}_Y + \vec{p}_b, \quad (23.13)$$

где  $\vec{p}_X$ ,  $\vec{p}_a$ ,  $\vec{p}_Y$  и  $\vec{p}_b$  – импульсы частиц  $X$ ,  $a$ ,  $Y$  и  $b$  соответственно. Закон сохранения энергии с учетом выражения (23.3) можно записать так:

$$M_X c^2 + T_X + m_a c^2 + T_a = M_Y c^2 + T_Y + m_b c^2 + T_b, \quad (23.14)$$

где  $M_X$ ,  $T_X$ ,  $m_a$ ,  $T_a$ ,  $M_Y$ ,  $T_Y$ ,  $m_b$ ,  $T_b$  – массы покоя и кинетические энергии частиц, участвующих в реакции.

Разность  $Q$  кинетических энергий частиц-продуктов реакции и частиц, вступающих в реакцию,

$$Q = T_Y + T_b - T_X - T_a, \quad (23.15)$$

называется *энергией реакции*. Используя эту величину, уравнение (23.14) выражающее закон сохранения энергии, можно преобразовать к виду

$$T_X + T_a + Q = T_Y + T_b, \quad (23.16)$$

где

$$Q = (M_X + m_a - M_Y - m_b) c^2. \quad (23.17)$$

Как видно из этой формулы, энергия реакции является ее энергетической характеристикой. Зная массы покоя частиц, участвующих в реакции, можно вычислить энергию реакции по формуле (23.17). Реакции, для которых энергия  $Q > 0$ , называются *экзотермическими*. Из равенства (23.15) следует, что для таких реакций суммарная кинетическая энергия продуктов реакции выше кинетической энергии исходных частиц. Это означает, что после реакции внутренняя энергия и температура вещества повышаются. В таком случае говорят, что реакция идет с выделением тепла, которое приводит к нагреванию вещества. Экзотермические ядерные реакции используют для получения тепловой энергии с целью дальнейшего ее превращения в электрическую энергию.

### 23.7. Капельная модель ядра

Одной из задач ядерной физики является объяснение экспериментально установленной зависимости удельной энергии связи  $\epsilon$  нуклонов в ядре от массового числа  $A$ . Удовлетворительное объяснение этой зависимости можно получить при помощи *капельной модели ядра*. Согласно этой

модели под действием ядерных сил нуклоны в ядре расположены так близко друг к другу, что ядро становится похожим на каплю жидкости.

Найдем зависимость радиуса  $R$  ядра от массового числа  $A$ . Пусть  $v$  – объем одного нуклона. Если представить себе ядро как шар из плотно прилегающих друг к другу нуклонов, то его объем будет приблизительно равен произведению числа нуклонов в ядре на объем одного нуклона:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = A v .$$

Из этого равенства вытекает соотношение

$$R \sim A^{1/3} , \quad (23.18)$$

которое согласуется с результатами измерений радиусов атомных ядер.

Пусть  $\bar{\epsilon}$  есть средняя энергия связи одного нуклона в ядре, обусловленная действием ядерных сил. Эту величину будем считать одинаковой для всех ядер. Таким образом, в первом приближении энергия связи будет

$$E_{св} \simeq \bar{\epsilon} A . \quad (23.19)$$

Эту формулу можно сделать более точной следующим образом. Нуклоны, расположенные у поверхности ядра, имеют в своем окружении меньшее число частиц, чем нуклоны внутри ядра. Поэтому эти поверхностные нуклоны слабее связаны с ядром и энергия связи, приходящаяся на один такой нуклон, должна быть более низкой. Таким образом, среднюю энергию связи (23.19) следует уменьшить на величину, пропорциональную числу поверхностных нуклонов, которое, в свою очередь, пропорционально площади поверхности ядра. В силу зависимости (23.18) площадь поверхности ядра

$$4 \pi R^2 \sim A^{2/3} .$$

В результате получим более точную формулу

$$E_{св} = \bar{\epsilon} A - k_1 A^{2/3} , \quad (23.20)$$

где  $k_1$  – коэффициент пропорциональности. Эту формулу также можно уточнить, если еще учесть энергию кулоновского отталкивания протонов. Энергия взаимодействия двух протонов определяется выражением

$$\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} ,$$

где  $r$  – расстояние между этими протонами. Потенциальная энергия взаимодействия всех  $Z$  протонов ядра равна произведению средней энергии

взаимодействия пары протонов на число

$$\frac{1}{2} Z(Z-1) \simeq \frac{1}{2} Z^2$$

пар протонов в ядре. Так как среднее расстояние между протонами пропорционально радиусу  $R$  ядра, энергия кулоновского взаимодействия протонов будет пропорциональна выражению

$$\frac{1}{R} Z^2 \sim A^{5/3},$$

где учтено, что для стабильных ядер

$$Z \simeq \frac{1}{2} A.$$

Кулоновское отталкивание протонов делает ядро менее устойчивым и уменьшает энергию связи. Поэтому с учетом энергии кулоновского взаимодействия протонов выражение (23.20) следует изменить так, чтобы энергия связи стала

$$E_{св} = \bar{\epsilon} A - k_1 A^{2/3} - k_2 A^{5/3}, \quad (23.21)$$

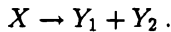
где  $k_2$  — еще один коэффициент пропорциональности. Эта формула приводит к зависимости удельной энергии связи нуклонов в ядре от массового числа

$$\epsilon(A) = \bar{\epsilon} - k_1 A^{-1/3} - k_2 A^{2/3}, \quad (23.22)$$

которая качественно правильно описывает аналогичную экспериментальную зависимость  $\epsilon = \epsilon(A)$ .

### 23.8. Деление тяжелых ядер

Рассмотрим реакцию самопроизвольного распада ядра  $X$  на два ядра  $Y_1$  и  $Y_2$ :



По определению (23.17) энергия этой реакции

$$Q = (M - M_1 - M_2) c^2, \quad (23.23)$$

где  $M$ ,  $M_1$  и  $M_2$  — массы ядер  $X$ ,  $Y_1$  и  $Y_2$  соответственно. Энергии связи нуклонов в этих ядрах таковы:

$$E_{свX} = \left( \sum_X m - M \right) c^2, \quad E_{свi} = \left( \sum_i m - M_i \right) c^2,$$

где  $i = 1, 2$ ;  $\sum_X m$ ,  $\sum_1 m$  и  $\sum_2 m$  есть суммы масс нуклонов, входящих в состав ядер  $X$ ,  $Y_1$  и  $Y_2$ . Так как ядра  $Y_1$  и  $Y_2$  формируются из тех же самых нуклонов, из которых состояло ядро  $X$ , справедливы равенства

$$\sum_X m = \sum_1 m + \sum_2 m \quad \text{и} \quad A = A_1 + A_2,$$

где  $A$ ,  $A_1$  и  $A_2$  – массовые числа ядер  $X$ ,  $Y_1$  и  $Y_2$ .

С учетом записанных соотношений преобразуем формулу (23.23) к виду

$$Q = E_{c\sigma_1} + E_{c\sigma_2} - E_{c\sigma_X}.$$

Выразим энергии связи ядер через соответствующие значения удельной энергии связи:

$$E_{c\sigma_X} = (A_1 + A_2) \varepsilon(A_1 + A_2), \quad E_{c\sigma_1} = A_1 \varepsilon(A_1), \quad E_{c\sigma_2} = A_2 \varepsilon(A_2).$$

В результате придем к следующему выражению для энергии реакции распада ядра:

$$\begin{aligned} Q &= A_1 \varepsilon(A_1) + A_2 \varepsilon(A_2) - (A_1 + A_2) \varepsilon(A_1 + A_2) \equiv \\ &\equiv A_1 \left( \varepsilon(A_1) - \varepsilon(A_1 + A_2) \right) + A_2 \left( \varepsilon(A_2) - \varepsilon(A_1 + A_2) \right). \end{aligned} \quad (23.24)$$

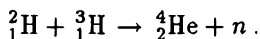
Как следует из этой формулы, энергия реакции распада ядра будет положительной, если справедливы неравенства

$$\varepsilon(A_1) > \varepsilon(A_1 + A_2), \quad \varepsilon(A_2) > \varepsilon(A_1 + A_2).$$

Эти неравенства выполняются, когда функция  $\varepsilon = \varepsilon(A)$  убывает при увеличении массового числа  $A$ . Таким свойством обладают удельные энергии связи нуклонов в тяжелых ядрах. Поэтому реакция распада тяжелого ядра является экзотермической. Ее осуществляют в специальных ядерных реакторах, которые используются на атомных электростанциях как источники тепловой энергии.

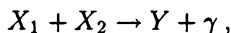
### 23.9. Реакции термоядерного синтеза

При взаимодействии двух ядер может образоваться новое ядро. Такая реакция называется *синтезом ядер*. Примером такой реакции может служить реакция синтеза дейтерия и трития



Преобразование ядер становится возможным только, когда они так близко подходят друг другу, что в действие вступают ядерные силы. Для того, чтобы два ядра смогли, преодолев силы кулоновского отталкивания, приблизиться друг к другу, они должны иметь достаточно высокие кинетические энергии. Такими энергиями ядра могут обладать, когда вещество имеет температуру порядка  $10^7 - 10^8$  К. Поэтому процесс слияния ядер называется *реакцией термоядерного синтеза*.

Получим выражение для энергии  $Q$  реакции синтеза двух ядер  $X_1$  и  $X_2$ :



в результате которой образуется ядро  $Y$  и испускается  $\gamma$ -квант. Согласно формуле (23.17)

$$Q = (M_1 + M_2 - M) c^2, \quad (23.25)$$

где  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M$  – массы ядер  $X_1$ ,  $X_2$  и  $Y$  соответственно. Запишем выражения для энергий связи этих ядер:

$$E_{св_i} = \left( \sum_i m - M_i \right) c^2, \quad E_{св_Y} = \left( \sum_Y m - M \right) c^2,$$

где  $i = 1, 2$ ;  $\sum_1 m$ ,  $\sum_2 m$  и  $\sum_Y m$  есть суммы масс нуклонов, входящих в состав ядер  $X_1$ ,  $X_2$  и  $Y$ . Так как ядро  $Y$  образуется из тех же самых нуклонов, из которых состояли ядра  $X_1$  и  $X_2$ , справедливы равенства

$$\sum_1 m + \sum_2 m = \sum_Y m \quad \text{и} \quad A_1 + A_2 = A,$$

где  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A$  – массовые числа ядер  $X_1$ ,  $X_2$  и  $Y$ . Эти соотношения позволяют преобразовать формулу (23.25) к виду

$$Q = E_{св_Y} - E_{св_1} - E_{св_2}.$$

Выразив энергии связи ядер через соответствующие значения удельной энергии связи при помощи формул

$$E_{св_1} = A_1 \varepsilon(A_1), \quad E_{св_2} = A_2 \varepsilon(A_2), \quad E_{св_Y} = (A_1 + A_2) \varepsilon(A_1 + A_2),$$

придем к следующему выражению для энергии реакции синтеза двух ядер:

$$\begin{aligned} Q &= (A_1 + A_2) \varepsilon(A_1 + A_2) - A_1 \varepsilon(A_1) - A_2 \varepsilon(A_2) \equiv \\ &\equiv A_1 \left( \varepsilon(A_1 + A_2) - \varepsilon(A_1) \right) + A_2 \left( \varepsilon(A_1 + A_2) - \varepsilon(A_2) \right). \end{aligned} \quad (23.26)$$

Как следует из этой формулы, энергия реакции синтеза ядер положительна при условиях

$$\varepsilon(A_1 + A_2) > \varepsilon(A_1), \quad \varepsilon(A_1 + A_2) > \varepsilon(A_2),$$

которые выполняются, если функция  $\varepsilon = \varepsilon(A)$  возрастает при увеличении массового числа  $A$ . Таким свойством обладают удельные энергии связи нуклонов в легких ядрах. Поэтому реакция термоядерного синтеза является экзотермической и может быть использована для получения тепловой энергии. Теоретические расчеты и наблюдения позволяют предположить, что термоядерные реакции протекают в недрах Солнца и других звезд.

*Учебное издание*

**Бондарев Борис Владимирович  
Калашников Николай Павлович  
Смирнов Геннадий Георгиевич**

**КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

*Книга 2*

**Электромагнетизм  
Волновая оптика  
Квантовая физика**

**Редактор Л.А. Савина  
Художник А.С. Сидорова  
Художественный редактор Е.А. Вишнякова  
Технический редактор Н.В. Быкова**

Лицензия ИД № 06236 от 09.11.01.

Изд. № РЕНТ-104а. Подп. в печать 17.01.05. Формат 60 × 88<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бум. офсетная. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.  
Объем 26,95 усл. печ. л. 26,95 усл. кр.-отт. 20,95 уч.-изд. л.  
Тираж 3000 экз. Заказ № А-36

ФГУП «Издательство «Высшая школа»,  
127994, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.

Тел.: (095) 200-04-56  
<http://www.v-shkola.ru> E-mail: [info@v-shkola.ru](mailto:info@v-shkola.ru)

Отдел реализации: (095) 200-07-69, 200-59-39; факс: (095) 200-03-01  
E-mail: [sales@v-shkola.ru](mailto:sales@v-shkola.ru)

Отпечатано в ГУП ПИК «Идел-Пресс».  
420066. г. Казань, ул. Декабристов, 2.