

BENJAMIN C. KUO

DIGITAL CONTROL SYSTEMS

Б. Куо

ТЕОРИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

«Машиностроение»

**ТЕОРИЯ
И ПРОЕКТИРОВАНИЕ
ЦИФРОВЫХ
СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ**

DIGITAL CONTROL SYSTEMS

BENJAMIN C. KUO

University of Illinois, Urbana

HOLT, RINEHART AND WINSTON, INC

*New York Chicago San Francisco Atlanta
Dallas Montreal Toronto London Sydney*

Б. Куо

**ТЕОРИЯ
И ПРОЕКТИРОВАНИЕ
ЦИФРОВЫХ
СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ**

Перевод с английского

**В.Г. Дунаева,
Б.И. Копылова,
А.Н. Косилова**

Под редакцией д-ра техн. наук
проф. П.И. Попова



Москва
«Машиностроение»
1986

ББК 32.965

К91

УДК 681.513.2 = 03.20 = 82

Куо Б.

К91 Теория и проектирование цифровых систем управления:
Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1986. — 448 с., ил.

В пер. 2 р. 30 коп.

Изложены теория и основы проектирования систем управления, содержащих в контуре цифровую вычислительную машину. Приведен математический аппарат исследования подобных систем, рассмотрены методы их анализа во временной и частотной областях. Изложены вопросы управляемости и наблюдаемости цифровых систем управления. Рассмотрена специфика систем, использующих микропроцессор в качестве управляющего устройства.

Для инженерно-технических работников, занимающихся анализом и проектированием систем автоматического управления, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

К $\frac{1502000000-151}{038(01)-86}$ 151-86

ББК 32.965
6Ф6.5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	8
Предисловие	9
Глава 1. Введение	12
1.1. Общие сведения	12
1.2. Преимущества дискретных систем	15
1.3. Примеры импульсных и цифровых систем	15
Список литературы	19
Глава 2. Преобразование и обработка сигналов.	20
2.1. Введение	20
2.2. Цифровые сигналы и кодирование	21
2.3. Преобразование данных и квантование	26
2.4. Устройства выборки и хранения	29
2.5. Цифроаналоговое преобразование	32
2.6. Аналого-цифровое преобразование	36
2.7. Математическое описание процесса квантования	42
2.8. Импульсная теорема	58
2.9. Некоторые свойства $F^*(s)$ на s -плоскости	59
2.10. Восстановление сигналов по дискретным выборкам	61
2.11. Фиксатор нулевого порядка	63
Список литературы	65
Глава 3. Теория z-преобразования	67
3.1. Определение z -преобразования	67
3.2. Вычисление z -преобразований	69
3.3. Соответствие между s -и z -плоскостями	72
3.4. Обратное z -преобразование	74
3.5. Теоремы z -преобразования	79
3.6. Ограничения метода z -преобразования	85
3.7. Импульсная передаточная функция	86
3.8. Импульсная передаточная функция фиксатора нулевого порядка и связь между $G(s)$ и $G(z)$	89
3.9. Процессы между моментами квантования	91
3.10. Применение метода графов к цифровым системам	99
Список литературы	111
Глава 4. Метод пространства состояний	113
4.1. Введение	113
4.2. Уравнения состояния и переходные уравнения состояния непрерывных систем	114
4.3. Уравнения состояния цифровых систем с квантованием и фиксацией	119
4.4. Уравнения состояния цифровых систем, содержащих только цифровые элементы	120
4.5. Переходные уравнения состояния цифровых систем	120
4.6. Переходные уравнения состояния цифровых стационарных систем	124
4.7. Цифровое моделирование и аппроксимация	125
4.8. Решение стационарного дискретного уравнения состояния с помощью z -преобразования	125
4.9. Связь уравнения состояния с передаточной функцией	128
4.10. Характеристическое уравнение, собственные значения и собственные векторы	131

4.11. Диагонализация матрицы A	138
4.12. Каноническая форма Жордана	140
4.13. Методы вычисления переходной матрицы состояния	142
4.14. Цифровые сопряженные системы	149
4.15. Связь между уравнениями состояния и разностными уравнениями высокого порядка	150
4.16. Преобразование к канонической форме фазовой переменной	152
4.17. Диаграмма состояния	159
4.18. Декомпозиция цифровых систем	164
4.19. Диаграммы состояния импульсных систем управления	169
4.20. Определение реакции импульсных систем между моментами кванто- вания с помощью понятия состояния	173
Список литературы	174
Глава 5. Цифровое моделирование и переоборудование систем управления на базе ЭВМ	176
5.1. Введение	176
5.2. Цифровое моделирование. Цифровая модель с квантованием и фикса- цией	176
5.3. Цифровое моделирование. Численное интегрирование	180
5.4. Цифровое моделирование с помощью z -форм	184
5.5. Переоборудование систем управления на базе ЭВМ.	189
Список литературы	201
Глава 6. Анализ во временной области	203
6.1. Введение	203
6.2. Сравнение временных характеристик непрерывных и цифровых сис- тем управления	204
6.3. Связь между временной характеристикой и положением корней на s - и z -плоскостях	209
6.4. Влияние расположения полюсов и нулей на z -плоскости на максималь- ное перегулирование и время максимума переходной функции дискрет- ных систем	210
6.5. Корневые годографы цифровых систем управления	217
6.6. Анализ установившейся ошибки цифровых систем управления	222
Список литературы	227
Глава 7. Анализ в частотной области	229
7.1. Введение	229
7.2. Годограф Найквиста	230
7.3. Логарифмические частотные характеристики	239
7.4. Запасы устойчивости по модулю и по фазе	240
7.5. Амплитудно-фазовая диаграмма и диаграмма Никольса	242
7.6. Определение полосы пропускания	243
7.7. Программы вычисления частотных характеристик на ЭВМ	246
Список литературы	249
Глава 8. Управляемость и наблюдаемость	250
8.1. Введение	250
8.2. Определение управляемости	251
8.3. Теоремы об управляемости для нестационарных систем	252
8.4. Теоремы об управляемости для стационарных систем	254
8.5. Определения наблюдаемости	257
8.6. Теоремы о наблюдаемости для нестационарных систем	257
8.7. Теоремы о наблюдаемости для стационарных систем	259
8.8. Дуальная связь между наблюдаемостью и управляемостью	261
8.9. Связь между управляемостью, наблюдаемостью и передаточными функциями	263
8.10. Зависимость управляемости и наблюдаемости от периода квантова- ния	265
8.11. Иллюстративные примеры	266

8.12. Теоремы об инвариантности управляемости	270
Список литературы	273
Глава 9. Синтез цифровых систем управления	274
9.1. Введение	274
9.2. Последовательная коррекция с помощью аналоговых регуляторов	276
9.3. Коррекция с помощью аналоговых регуляторов в цепи обратной связи.	286
9.4. Цифровой регулятор	289
9.5. Синтез цифровых систем управления с цифровыми регуляторами с помощью билинейного преобразования	302
9.6. Синтез с использованием корневых годографов на z -плоскости	306
9.7. Цифровой ПИД-регулятор	316
9.8. Синтез цифровых систем управления с аperiodическим переходным процессом.	320
9.9. Синтез по заданному расположению полюсов с помощью обратной связи по состоянию (случай единственного управляющего сигнала).	330
9.10. Синтез по заданному расположению полюсов с помощью обратной связи по состоянию (случай нескольких управляющих сигналов)	338
9.11. Синтез по заданному расположению полюсов с помощью неполной обратной связи по состоянию или обратной связи по выходу	341
9.12. Синтез цифровых систем управления с обратной связью по состоянию и динамической обратной связью по выходу	347
9.13. Реализация обратной связи по состоянию с помощью динамических регуляторов	353
Список литературы	360
Глава 10. Синтез с помощью принципа максимума	361
10.1. Дискретное уравнение Эйлера–Лагранжа	361
10.2. Дискретный принцип максимума (минимума)	366
10.3. Оптимальное по быстрдействию управление при ограниченной энергии	370
Список литературы	375
Глава 11. Синтез оптимального линейного цифрового регулятора	376
11.1. Введение	376
11.2. Синтез линейного цифрового регулятора (задача с конечным интервалом времени)	378
11.3. Синтез линейного цифрового регулятора (задача с бесконечным интервалом времени)	382
11.4. Принцип оптимальности и динамическое программирование	386
11.5. Решение дискретного уравнения Риккати	389
11.6. Чувствительность по отношению к периоду квантования	399
Список литературы	408
Глава 12. Цифровой наблюдатель состояния	409
12.1. Введение	409
12.2. Синтез наблюдателя состояния полного порядка	411
12.3. Синтез наблюдателя состояния пониженного порядка	420
Список литературы	426
Глава 13. Микропроцессоры в системах управления.	427
13.1. Введение	427
13.2. Микропроцессор как управляющее устройство систем управления	428
13.3. Ограничения микропроцессорных систем управления	432
13.4. Влияние конечной длины слова на управляемость и расположение полюсов замкнутой системы	432
13.5. Запаздывание в микропроцессорных системах управления	435
13.6. Эффекты квантования по уровню. Наименьший верхний предел ошибки квантования	438
Список литературы	446
Дополнительная литература.	447

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Широкое внедрение в нашей стране гибких автоматизированных производств, роботов, станков с числовым программным управлением в машиностроении и других отраслях промышленности привлекло к участию в этой деятельности большое число научных работников и инженеров. В связи с этим сильно возрос интерес к учебной и научной литературе, посвященной расчету и проектированию цифровых систем управления.

Предлагаемый перевод книги известного американского ученого, профессора Иллинойского университета Б. Куо представляет собой систематизированное изложение основных вопросов теории и практики проектирования цифровых систем управления и вызовет значительный интерес у советских читателей, работающих в этой области науки и техники. Она явится хорошим дополнением к отечественным книгам аналогичного содержания.

В книге изложены новые вопросы в теории управления, связанные с применением микропроцессоров и микроЭВМ, ранее не рассматривавшиеся в аналогичной литературе ввиду того, что интенсивное внедрение микропроцессорных устройств в системы автоматического управления началось в нашей стране лишь в последние годы. Заслуживает также внимания материал, посвященный коррекции цифровых систем, построенных с применением микропроцессоров. Отражены практически все основные вопросы теоретического описания цифровых систем, анализа их устойчивости, качества и синтеза с применением современного математического аппарата. Теория дискретных систем изложена как непосредственное развитие и продолжение теории непрерывных систем. Автор широко использует частотные методы и анализ цифровых систем во временной области.

Несомненным достоинством книги является большое число примеров, иллюстрирующих как общие принципы построения цифровых систем, так и отдельные аспекты их анализа и синтеза.

В процессе перевода и редактирования книги были устранены отдельные неточности; некоторые обозначения и термины заменены общепринятыми в отечественной литературе. Добавлен список наиболее интересных и оригинальных работ, изданных в СССР.

Книга предназначена для широкого круга научно-технических работников, инженеров и аспирантов, занимающихся вопросами автоматического управления в различных областях техники.

П.И. Попов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Это издание является существенной переработкой книги "Цифровые системы управления", опубликованной в 1977 г. издательством СРЛ (SRL). С 1963 г. автор выпустил несколько книг в области цифровых и дискретных систем управления. Первая из них, "Анализ и синтез импульсных систем управления", была опубликована в 1963 г. издательством "Прентис-Холл". В ней изложены классические методы анализа и синтеза дискретных систем управления и включена глава по нелинейным системам. В целом в книге в доступной форме рассмотрен широкий круг проблем дискретных систем управления. Вторая книга, "Дискретные системы управления", была опубликована в 1970 г. тем же издательством. В ней представлен совершенно новый подход по сравнению с изданием 1963 г. и рассмотрены главным образом методы пространства состояний и современной теории управления. Книга "Теория и проектирование цифровых систем управления" является полностью переработанным и расширенным вариантом издания "Дискретные системы управления".

Период расцвета аэрокосмической промышленности в 60-е годы стал наиболее плодотворным для развития теории дискретных систем управления. В этой области было опубликовано большое количество статей и книг. Хотя активность в аэрокосмическом секторе в последующие годы стабилизировалась, достижения в области микропроцессоров и микроЭВМ и развитие систем управления технологическими процессами послужили новым толчком к совершенствованию цифровых систем управления. Однако популярность микропроцессорного управления наложила свою особенность на развитие теории цифровых систем управления. Поскольку микропроцессоры – "медленные" цифровые машины (обычно оперируют со словами малой длины), при проектировании цифровых систем управления необходимо учитывать эти ограничения, а также эффекты временной задержки и квантования амплитуды. Многие инженеры, на практике применяющие микропроцессоры в системах управления, просто переносят на них алгоритмы аналогового управления и используют малые периоды дискретизации для обеспечения устойчивости всей системы. Пока такой подход эффективен во многих не критических случаях, но он неприемлем для более сложных задач проектирования.

По сравнению с первым изданием "Цифровые системы управления" настоящая книга содержит следующие основные дополнения.

1. Расширены традиционные методы анализа и синтеза, поскольку в большинстве случаев для проектирования систем управления используются именно эти способы. Они пригодны как для аналоговых, так и для цифровых систем управления.

2. Сильно расширены вопросы синтеза цифровых систем управления.

В гл. 9 представлены различные методы синтеза как традиционные, так и современные.

3. Введена глава по применению микропроцессоров в системах управления. Трудно сказать, в каком объеме материал по применению микропроцессоров должен быть включен в книгу, подобную этой. Большинство современных программ по подготовке инженеров в области управления содержат курсы по применению микропроцессоров. Автор считает, что изложение аспектов программирования не является задачей этой книги, и опыт программирования микропроцессоров для ее читателей не является обязательным. Вполне возможно, что инженеру по системам управления поручат разработку цифровой системы управления в целом, однако программист или инженер по математическому обеспечению будет более компетентен в программировании цифрового контроллера. Важно, чтобы проектировщик системы управления понимал, как работает микропроцессор и выполняются программы. В этом случае им может быть спроектирован реальный цифровой регулятор, учитывающий физические ограничения микропроцессора. Помня об этом, автор в гл. 13 представил основные компоненты и программную логику микропроцессора без углубления в специфические детали, при этом особое внимание обращено на эффекты временных задержек и квантования из-за конечности длины слова.

4. В целях экономии объема, необходимого для нового материала, главы по статистическим методам проектирования систем исключены. Так как предполагается, что новое издание будет использовано студентами старших курсов и аспирантами исключение материала по статистическим методам проектирования не будет серьезной помехой для большинства читателей.

Представленный материал охватывает большой круг учебных вопросов, чем односеместровый курс. Это дает возможность преподавателю выбрать темы, которые он хотел бы проработать. Весь материал книги был использован автором в преподавательской работе в Иллинойском университете. Книга также подготовлена с расчетом на инженеров; она может быть использована как справочник для самообразования.

Предполагается, что читатель знаком с основными принципами построения систем с обратной связью, алгеброй матриц и преобразованием Лапласа. Весьма полезным было бы предварительное знакомство с методом пространства состояний и программированием микропроцессоров.

В гл. 1 дано общее введение в теорию цифровых систем управления. В ней представлены типичные примеры цифровых систем управления. В гл. 2 рассмотрены вопросы преобразования и обработки сигналов, вопросы дискретизации. Это является основой для аналитического подхода при рассмотрении цифровых сигналов в системах управления. Гл. 3 освещает теорию z -преобразования. В эту главу включены также вопросы модифицированного z -преобразования и применения графов. В гл. 4 описаны методы пространства состояний в приложении к цифровым стационарным и нестационарным системам. В гл. 5 рассмотрено цифровое моделирование. Обсуждены методы численного интегрирования и моделирования в z -форме. В эту главу включены также вопросы переоборудования

на базе ЭВМ, показывающего, как непрерывную систему представить эквивалентной цифровой системой.

Гл. 6 посвящена анализу цифровых систем управления во временной области. Основное внимание уделено предсказанию переходных характеристик по расположению нулей и полюсов, методу корневого годографа, анализу систем в установившемся и переходном режимах. В гл. 7 представлены частотные методы анализа цифровых систем управления. Традиционные понятия, такие как критерий Найквиста, диаграммы Боде, диаграмма Никольса, запасы по амплитуде и фазе обобщены в расчете на цифровые системы управления. Гл. 8 посвящена проблемам управляемости и наблюдаемости. В гл. 9 представлены методы синтеза систем, от традиционных способов до методов с использованием обратной связи по состоянию и по выходу. Гл. 10–12 охватывают вопросы оптимального управления в цифровых системах. Рассмотрены принцип максимума, синтез оптимального линейного регулятора, динамическое программирование, чувствительность по отношению к периоду квантования и синтез наблюдателя состояния. В последней, тринадцатой главе рассмотрены вопросы микропроцессорного управления.

Книга содержит большое число иллюстративных примеров, взятых из практического опыта автора, хотя многие из них упрощены для более наглядного представления.

Автор благодарен своим студентам, чья помощь при обсуждении материала во время аудиторных занятий и работе над проектами была неоценимой при подготовке этой книги. Он хочет выразить благодарность своей дочери Тине, выполнившей большинство иллюстраций этой книги, и двум другим дочерям, Лори и Линде, за правку и считывание рукописи. Особую благодарность автор адресует Джейн Карлтон, своему бывшему секретарю, за профессиональное и умелое печатание всей рукописи. В заключение автор хочет поблагодарить свою жену Маргарет за ее всестороннюю поддержку этого и многих других начинаний автора на протяжении многих лет. Без ее моральной и физической поддержки эти начинания никогда не были бы осуществлены.

Б. Куо

г. Шампейн, шт. Иллинойс

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Последние годы характеризуются существенным прогрессом в области дискретных и цифровых систем управления.

Популярность этих систем во всех отраслях промышленности объясняется как развитием цифровых вычислительных машин, в частности микропроцессоров, так и преимуществами работы с цифровыми сигналами.

Дискретные и цифровые системы управления отличаются от непрерывных или аналоговых тем, что сигналы в одной или нескольких точках этих систем представляют собой последовательность импульсов или цифровой код. В литературе по управлению термины *"импульсные системы"*, *"дискретные системы"*, *"системы с дискретным временем"*, *"цифровые системы"* используются довольно произвольно. Правильнее термин *"импульсные"* относить к системам с амплитудной модуляцией импульсов, при которой информационным параметром является амплитуда импульса, термин *"цифровые"* обычно относят к системам, в которых сигналы генерируются ЭВМ или цифровыми устройствами в виде кодов. Однако, что будет показано ниже, в реальных системах управления могут присутствовать как аналоговые и импульсные сигналы, так и цифровые коды. Поэтому в книге термин *"дискретные системы"* будет использоваться в широком смысле для описания всех систем, в которых сигналы имеют цифровую или импульсную форму.

На рис. 1.1 показана типичная импульсная система управления с обратной связью. Квантователь представляет собой устройство, выходной сигнал которого имеет вид периодической или непериодической последовательности импульсов, причем между двумя соседними импульсами информация отсутствует.

Рис. 1.2 иллюстрирует принцип работы квантователя. Непрерывный входной сигнал $e(t)$ квантуется по времени, при этом выходной сигнал квантователя представляет собой последовательность импульсов. Предполагается, что в рассматриваемом случае частота квантования постоянна, а амплитуда импульса в момент замыкания определяется соответст-

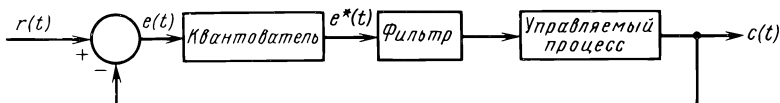


Рис. 1.1. Импульсная система управления с обратной связью

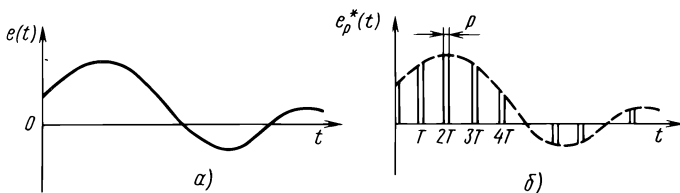


Рис. 1.2. Непрерывный входной (а) и дискретный выходной (б) сигналы квантователя

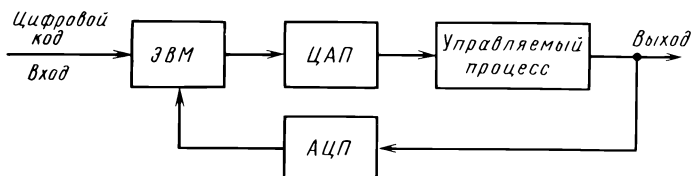


Рис. 1.3. Типичная цифровая система управления

вующим значением входного сигнала $e(t)$. Существуют и другие способы квантования сигналов, например, квантование с циклически изменяющимся периодом, многократное, со случайным периодом, с широтно-импульсной модуляцией. На практике наиболее распространены квантование с постоянным периодом и многократное квантование. Различные способы квантования и их особенности будут рассмотрены ниже.

Расположенный между квантователем и управляемым процессом фильтр выполняет функцию сглаживания, так как большинство управляемых процессов рассчитано на прием аналоговых сигналов.

В цифровой системе управления сигналы в одной или нескольких точках представляются цифровыми кодами, с которыми оперируют цифровая электронная вычислительная машина (ЭВМ) или цифровое устройство. Структура типичной цифровой системы управления показана на рис. 1.3. Наличие в некоторых точках системы сигналов в виде цифрового кода, например, двоичного, обуславливает использование цифроаналогового (ЦАП) и аналого-цифрового (АЦП) преобразователей. Хотя между структурами и элементами импульсной и цифровой систем имеются существенные различия, математические описания этих систем достаточно близки, и они могут быть исследованы одинаковыми аналитическими методами.

Квантование по времени в системах управления применялось по крайней мере 70 лет назад. В этих ранних разработках импульсная модуляция использовалась для улучшения тех или иных эксплуатационных характеристик систем управления. Например, в гальванометре с падающей дужкой (рис. 1.4), описанном Ольденбургом и Сарториусом [1], с помощью квантования достигается высокая чувствительность системы к маломощному входному сигналу.

Как показано на рисунке, к катушке гальванометра прикладывается малый сигнал. На стрелку гальванометра периодически опускается падающая дужка, заставляя вал нагрузки поворачиваться на угол, пропорцио-

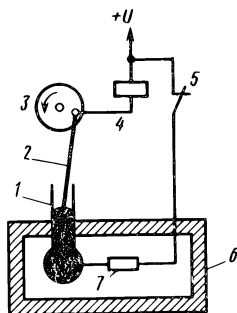
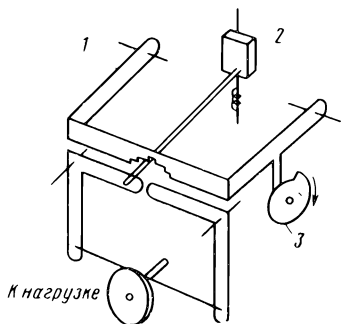


Рис. 1.4. Гальванометр с падающей дужкой:

1 – падающая дужка; 2 – гальванометр; 3 – кулачок

Рис. 1.5. Дискретная система стабилизации температуры в духовом шкафу:

1 – ртутный термометр; 2 – контактный стержень; 3 – колесо, вращаемое электродвигателем; 4 – обмотка реле; 5 – размыкающие контакты реле; 6 – духовой шкаф; 7 – нагреватель

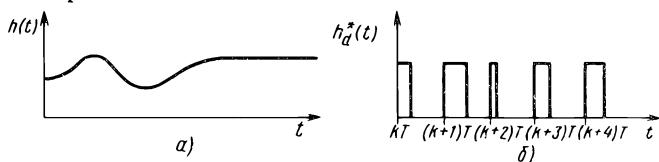


Рис. 1.6. Входной (а) и выходной (б) сигналы широтно-импульсного модулятора:

$h(t)$ – температура духового шкафа; $h_d^*(t)$ – ток нагревателя

нальный входному сигналу. Таким образом, поворот вала нагрузки определяется не вращающим моментом гальванометра, а перемещением падающей дужки.

Другим известным примером раннего применения квантования по времени в системах управления является система стабилизации температуры в духовом шкафу [2]. Система содержит элементы, показанные на рис. 1.5. Когда контактный стержень погружен в ртуть, ток проходит по обмотке реле, при этом контакты реле разомкнуты, что вызывает прерывание тока в обмотке нагревателя. Так как стержень погружается в ртуть периодически, ток в обмотке нагревателя представляет собой последовательность импульсов. Более того, поскольку время погружения зависит от уровня ртути, который в свою очередь определяется температурой в духовом шкафу, то длительность импульсов тока в нагревателе будет изменяться в соответствии с температурой, но амплитуда импульсов будет постоянна. Типичная форма сигналов в такой системе показана на рис. 1.6. Длительность импульсов тока в нагревателе пропорциональна амплитуде $h(t)$ при $t = nT$. В отличие от процедуры квантования (см. рис. 1.2), в которой амплитуда импульсов определяется амплитудой входного сигнала, при модуляции, показанной на рис. 1.6, амплитуда импульсов остается постоянной, а информационным параметром является длительность импульсов. Такая модуляция получила название *широтно-импульсной* (ШИМ). На практике используются различные методы модуляции сигналов, или точнее представления сигналов в дискретной форме.

1.2. ПРЕИМУЩЕСТВА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Для полного понимания достоинств и преимуществ дискретных систем мы должны уяснить, почему используются дискретные сигналы. Другими словами, какие преимущества и характеристики дискретных систем определяют повышенный к ним интерес в современной технике управления? Отвечая на эти вопросы, необходимо прежде всего отметить, что многие физические системы дискретны, т.е. их поведение может быть описано дискретными или цифровыми моделями. Например, в радарных системах передаваемые и принимаемые сигналы являются импульсными. Существуют многочисленные явления, социальные, экономические и биологические системы, динамика которых может быть описана дискретными моделями.

Во многих современных системах управления используются дискретные элементы и цифровые процессоры. Некоторые из преимуществ импульсных и цифровых систем заключаются в следующем: повышенная чувствительность, большая надежность, отсутствие дрейфа, более высокая устойчивость к шумам и возмущениям, меньшие габаритные размеры и масса, меньшая стоимость, удобства в программировании.

Система с падающей дужкой, описанная в п. 1.1, является примером повышения чувствительности в дискретной системе. В этом случае малые сигналы усиливаются благодаря операции квантования.

Одним из существенных преимуществ цифровых контроллеров является их большая гибкость по сравнению с аналоговыми регуляторами. Программа цифрового регулятора может быть изменена в соответствии с требованиями проектировщиков или приспособлена к характеристикам объекта без каких-либо изменений в аппаратном обеспечении. Цифровые компоненты электронных схем часто надежнее, прочнее и компактнее, чем аналоговые компоненты того же назначения. Эти и другие очевидные преимущества дискретных систем склоняют проектировщиков к их выбору.

1.3. ПРИМЕРЫ ИМПУЛЬСНЫХ И ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим типичные примеры импульсных и цифровых систем управления, обратив внимание на их основные элементы, хотя этот обзор и не будет исчерпывающим.

Автопилот. На рис. 1.7 показана упрощенная структурная схема аналогового автопилота для одного управляемого параметра (угол тангажа, рыскания или крена) летательного аппарата. Это типичная аналоговая, или непрерывная, система, в которой сигналы могут быть представлены как функции от непрерывного времени t . Целью управления является слежение устройства регулирования угла ориентации аппарата за командным сигналом. Для улучшения устойчивости системы введена обратная связь по скорости. Аналоговый регулятор в системе может быть заменен цифровым, при этом дополнительно требуются аналого-цифровой и цифроаналоговый преобразователи (рис. 1.8). Заметим, что поскольку кроме цифро-

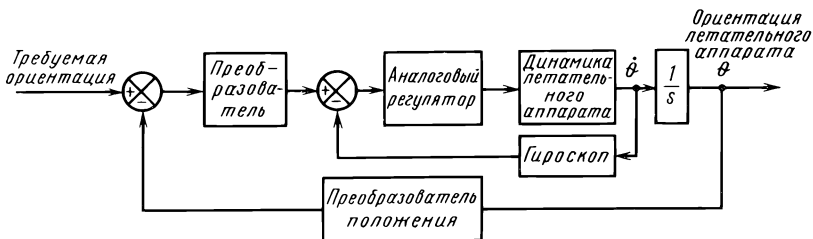


Рис. 1.7. Упрощенная схема аналогового автопилота для одного управляемого параметра

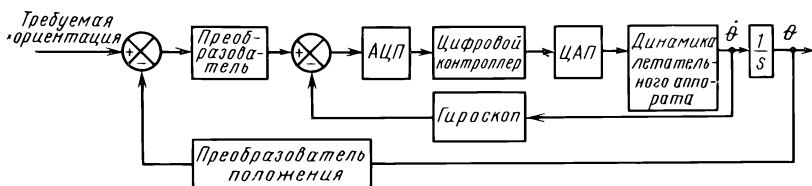


Рис. 1.8. Упрощенная схема цифрового автопилота для одного управляемого параметра

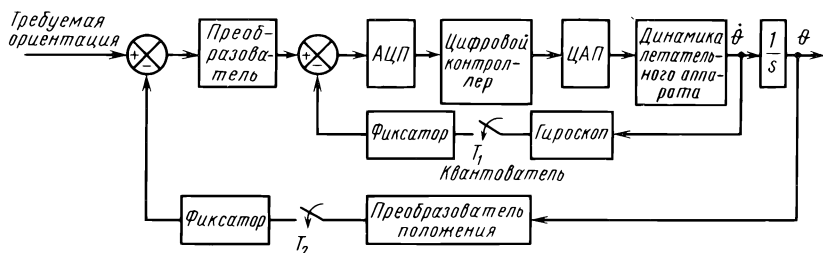


Рис. 1.9. Упрощенная схема цифрового автопилота с многократным квантованием

вого контроллера все остальные элементы системы остались аналоговыми, использование этих преобразователей в ней обязательно.

На рис. 1.9 показана схема цифрового автопилота, в котором сигналы, несущие информацию о положении и скорости летательного аппарата, поступают от цифровых устройств; на схеме они представлены в виде квантователей и фиксаторов. Квантователь преобразует аналоговый сигнал в импульсный в каждый тактовый момент времени, а фиксатор удерживает его уровень неизменным до следующего тактового момента. На рисунке проиллюстрирована ситуация, при которой два квантователя обладают различными периодами квантования (T_1 и T_2). Вообще говоря, если скорость изменения сигнала в одном контуре системы намного меньше, чем в другом, то период квантования в "медленном" контуре может быть больше. Показанная на рисунке система с двумя квантователями с различными периодами квантования называется системой с многократным квантованием.

Одним из преимуществ систем с квантованием является возможность использования дорогостоящего оборудования в режиме разделения времени.

Цифровая система управления прокатным станом. Многие производственные процессы контролируются и управляются с применением ЭВМ. Практически все современные прокатные станы управляются с помощью ЭВМ. На рис. 1.10 показаны основные элементы такой системы, а на рис. 1.11 изображена ее часть, предназначенная для управления толщиной прокатываемой стальной полосы.

Цифровой контроллер турбины и генератора. На рис. 1.12 показана структурная схема и основные элементы миникомпьютерной системы управления скоростью и напряжением блока турбина—генератор с подсистемой получения цифровых данных. Цифроаналоговые преобразователи образуют интерфейс между ЭВМ и регуляторами. Подсистема получения цифровых данных обеспечивает измерение и ввод в ЭВМ таких параметров, как угловая скорость генератора, выходное напряжение, ток возбуждения и ток якоря, активная и реактивная мощности. Некоторые из этих параметров могут быть измерены цифровыми преобразователями и через цифровой мультиплексор введены в ЭВМ (рис. 1.13). Сигналы, измеренные аналоговыми преобразователями, поступают на аналоговый мультиплексор, где на обработку каждого сигнала затрачивается определенное время. Устройства, включенные после мультиплексора, используются в режиме разделения времени. Такая подсистема получения данных показана на рис. 1.14. Выход аналогового мультиплексора соединен со входом квантователя. Фиксатор сохраняет значение сигнала на выходе до окончания преобразования этого сигнала аналого-цифровым преобразователем в цифровой код.

Система управления шаговым двигателем. Можно привести пример системы, состоящей только из цифровых элементов, так что в использова-

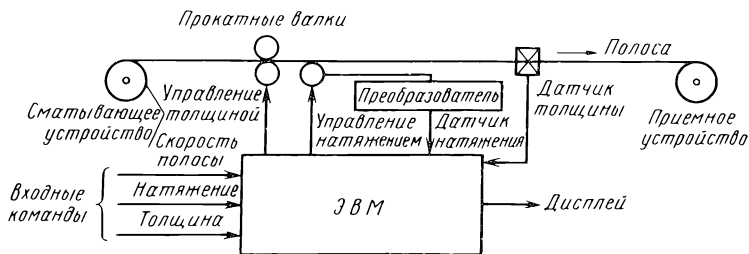


Рис. 1.10. Цифровая система управления прокатным станом

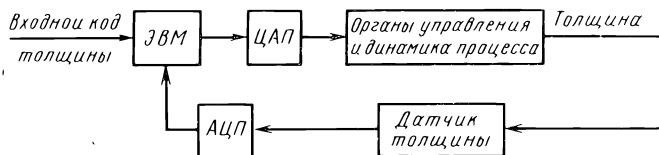


Рис. 1.11. Система управления толщиной стальной полосы



Рис. 1.12. Цифровое управление блоком турбина—генератор:
ЭГП – электрогидравлический преобразователь

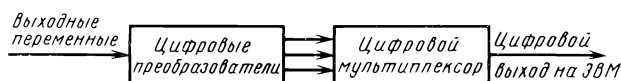


Рис. 1.13. Подсистема получения цифровых данных



Рис. 1.14. Подсистема получения данных с аналоговыми преобразователями

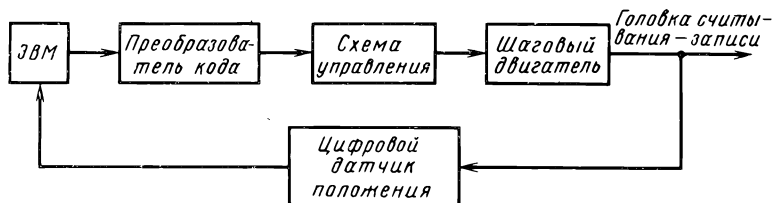
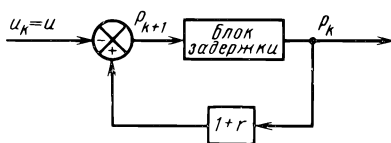


Рис. 1.15. Система управления шаговым двигателем для перемещения головки считывания-записи дисководов ЭВМ

нии аналого-цифрового и цифроаналогово преобразователей нет необходимости. На рис. 1.15 показана такая система, которая используется для управления головкой считывания-записи дисководов ЭВМ. Для перемещения головки в этой системе используется шаговый двигатель, управляемый командными импульсами. Ротор шагового двигателя перемещается на строго определенный шаг в ответ на каждый входной импульс. Таким образом, система может быть классифицирована как полностью цифровая.

Дискретная модель задачи на выплату займа. Выше мы рассмотрели цифровые системы, которые имеют физическую природу. Существует большое число социальных и экономических систем, которые могут быть описаны дискретными моделями. Аналоговые динамические системы описываются дифференциальными уравнениями относительно переменных, являющихся функциями непрерывного аргумента t . Динамика дискрет-

Рис. 1.16. Дискретная модель для задачи на выплату займа



ных систем описывается разностными уравнениями. Переменные дискретной модели системы являются функциями дискретной временной переменной kT ($k = 0, 1, 2, \dots$), где T — константа, или функция дискретной переменной k .

Рассмотрим задачу на выплату займа, которая определяется следующим образом. Предположим, что величина займа равна P_0 . Проценты на невыплаченную часть займа за период составляют r . Предположим, что выплата займа и процентов должна быть сделана равными платежами u за N периодов.

Пусть P_k есть величина займа, оставшаяся к выплате после k -го периода. Тогда разностное уравнение задачи может быть записано следующим образом:

$$P_{k+1} = (1 + r)P_k - u \quad (1-1)$$

где P_{k+1} — величина выплаты к концу $(k + 1)$ -го периода. Граничными условиями являются заданное значение P_0 и $P_N = 0$. Разностное уравнение (1-1) можно решить относительно u рекуррентным методом или методом z -преобразования. Это уравнение известно также как разностное уравнение первого порядка. Ему соответствует структурная схема, показанная на рис. 1.16.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oldenbourg, R. C., and Sartorius, H., *The Dynamics of Automatic Control*. American Society of Mechanical Engineers, New York, 1948.
2. Gouy, G., "On a Constant Temperature Oven," *J. Physique*, 6, Series 3, 1897, pp. 479-483.

ГЛАВА 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

2.1. ВВЕДЕНИЕ

Специалисты по системам управления применяют ЭВМ в двух основных случаях. В первом случае ЭВМ используется для моделирования и расчета динамики систем. Большинство реальных систем описываются уравнениями высокого порядка и содержат нелинейные элементы, что затрудняет использование аналитических методов. Поэтому часто инженеры по управлению проводят анализ и синтез сложных систем управления на ЭВМ. К моделированию на ЭВМ обращаются также для проверки результатов, полученных аналитическими методами.

Во втором случае ЭВМ используются в системах управления в качестве контроллеров или процессоров. Так как управляемые процессы в основном имеют аналоговый характер, то в большинстве цифровых систем управления присутствуют как аналоговые, так и цифровые сигналы. Следовательно, необходимо такое преобразование сигналов, которое обеспечивало бы взаимодействие цифровых и аналоговых элементов. Например, выходные сигналы аналоговых устройств должны быть подвергнуты *аналого-цифровому (А/Ц) преобразованию* перед дальнейшей их обработкой в цифровом контроллере. Аналого-цифровое преобразование может быть описано как операция *кодирования*. Подобным образом цифровой код контроллера или ЭВМ может быть послан на аналоговые устройства только после *цифроаналогового (Ц/А) преобразования*. В гл. 1 было показано, что для операции *разделения времени* требуется специальное интерфейсное оборудование: *мультиплексор, квантователь, фиксатор* и др. Поскольку эти компоненты чрезвычайно важны для обработки сигналов, они будут коротко рассмотрены в этой главе. Следует, однако, помнить, что обработка сигналов и технические элементы систем не являются главным предметом данной книги. Читатель может получить дополнительные сведения по этим вопросам из книг, список которых приведен в конце главы. Рассмотрение АЦП, ЦАП, мультиплексоров, квантователей и фиксаторов в этой книге определяется возможностью использования их для обработки сигналов и дискретных и цифровых системах и ставит целью создание их моделей и математического описания для анализа и проектирования.

Цифроаналоговый преобразователь осуществляет операцию *декодирования* над цифровыми входными данными. На выходе ЦАП получают аналоговый сигнал, обычно в виде тока или напряжения. ЦАП необходим как интерфейсное средство между цифровым каналом или ЭВМ и аналоговым устройством. ЦАП называют также *декодером*.

Аналого-цифровой преобразователь преобразует аналоговый сигнал

в цифровой код. АЦП является необходимым интерфейсным устройством аналоговой подсистемы, выходные сигналы которой предполагается обрабатывать в ЭВМ.

Устройство выборки и хранения широко применяется в дискретных и цифровых системах. Оно осуществляет выборку аналогового сигнала и затем сохраняет его уровень постоянным до следующей выборки. В дальнейшем мы будем рассматривать это устройство как составную часть АЦП.

Мультиплексор. Когда сигналы от нескольких устройств должны быть обработаны одним и тем же процессором или информационным каналом, то для представления этих сигналов в виде некоторой заданной последовательности используется мультиплексор. Эта последовательность сигналов затем обрабатывается процессором в режиме разделения времени. Например, если сигналы нескольких цифровых устройств должны быть обработаны центральным процессором, то эти устройства обычно связываются с процессором через мультиплексор и общий канал параллельных линий.

2.2. ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ И КОДИРОВАНИЕ

Цифровые сигналы в ЭВМ и цифровых системах управления обычно передаются в виде слов или кодов. В слове информация обычно представляется в форме дискретных битов (логический импульс "0" или "1"), образующих последовательный или параллельный код. Численное значение слова и есть значение переменной, которое это слово представляет.

Все современные ЭВМ построены на основе двоичной системы счисления. Цифровой сигнал в ЭВМ может быть представлен как последовательность нулей и единиц. Каждый разряд двоичного числа (0 или 1) называется *битом*. Бит является носителем небольшого количества информации, поэтому обычно 8 бит объединяют и называют *байтом*. Несколько байтов могут быть объединены в *слово*. Слова могут быть практически любой длины от 4 до 128 бит и более. Различие между битом и байтом схоже с различием между буквой алфавита и словом. Можно сказать, что буква является наименьшей единицей информации, но обычно не несет смысла до тех пор, пока не объединяется с другими буквами в форме слова. Рис. 2.1 иллюстрирует связь между *словом*, *байтом* и *битом*. В этом случае длина слова равняется 2 байт или 16 бит.

Емкость памяти ЭВМ обычно определяется в байтах. Например,

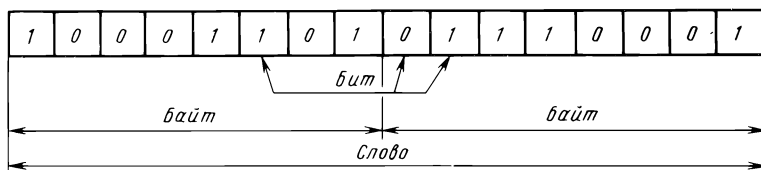


Рис. 2.1. Связь между словом, байтом и битом

микропроцессор "Интел 8080" спроектирован таким образом, что может работать с памятью до 64К. 64К равны 2^{16} или 65 536 бит.

Точность ЭВМ определяется длиной слов, которые ЭВМ может запоминать и с которыми может оперировать. Например, ЭВМ с длиной слова 8 бит может запоминать числа только с восемью разрядами. Так как регистры и аккумулятор такой ЭВМ также оперируют с 8-разрядным словом, то увеличение точности обработки возможно только при использовании слов двойной длины и соответствующих алгоритмов обработки.

Цифровые сигналы в ЭВМ могут быть представлены в форме с фиксированной и с плавающей запятыми.

Представление числа в форме с фиксированной запятой. Если для представления числа мы используем все 16 бит слова, показанного на рис. 2.1, где каждый бит может принимать значение 0 или 1, то мы имеем дело с представлением числа в форме с фиксированной запятой. Вообще говоря, n -разрядное двоичное слово, представляющее целое число N в форме с фиксированной запятой, может быть записано как

$$N = a_{n-1}2^{n-1} + \dots + a_22^2 + a_12^1 + a_02^0 \quad (2-1)$$

где коэффициенты a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ принимают значение 0 или 1. Двоичная форма числа определяется значением коэффициентов соотношения (2-1) слева направо, со старшим битом (СБ) слева и младшим битом (МБ) справа.

В качестве простого примера рассмотрим трехразрядное двоичное слово

$$N = a_22^2 + a_12^1 + a_02^0 \quad (2-2)$$

Присваивая различные комбинации 0 и 1 коэффициентам a_0 , a_1 и a_2 , можно получить восемь (2^3) различных значений слова N или восемь чисел. Соотношение между двоичной и десятичной формами представления целых чисел для слова длиной 3 бит показано в табл. 2.1.

Для представления дробных чисел можно также использовать форму с фиксированной запятой. Используя фиктивную "двоичную запятую" в слове, можно часть слова отвести для представления целой части числа,

Таблица 2.1

Десятичное число	Двоичное число	Двоичный код целого числа		
		СБ (x4)	(x2)	МБ (x1)
0	000	0	0	0
1	001	0	0	1
2	010	0	1	0
3	011	0	1	1
4	100	1	0	0
5	101	1	0	1
6	110	1	1	0
7	111	1	1	1

а другую часть — для дробной. Например, в 8-разрядном слове на рис. 2.2 первые пять разрядов представляют целую часть числа, а последние три — дробную. Заметим, что "двоичная запятая" не требует для представления отдельного разряда и является фиктивной.

В соответствии с рисунком число N может быть записано как

$$N = a_4 2^4 + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 + a_{-1} 2^{-1} + a_{-2} 2^{-2} + a_{-3} 2^{-3} \quad (2-3)$$

Следовательно, двоичное число 01011,101 эквивалентно десятичному

$$N = 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 8 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 11.625 \quad (2-4)$$

Вообще n -разрядная дробь может быть представлена как

$$N = a_{-1} 2^{-1} + a_{-2} 2^{-2} + \dots + a_{-n} 2^{-n} \quad (2-5)$$

где коэффициенты a_i ($i = -1, -2, \dots, -n$) принимают значение 0 или 1. Первый коэффициент a_{-1} представляет собой старший бит в коде числа, a_{-n} — младший. Простая иллюстрация такого представления показана в табл. 2.2.

Мы рассмотрели двоичное представление только положительных чисел. Отрицательные числа могут быть представлены с использованием первого разряда двоичного слова, или *бита знака*, значение которого устанавливается 0 для положительных чисел и 1 для отрицательных. Альтернативным способом представления отрицательных чисел является представление числа в дополнительном коде.

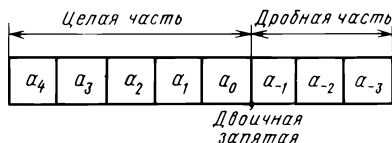


Рис. 2.2. Представление 8-разрядного дробного числа в форме с фиксированной запятой

Таблица 2.2

Правильная дробь	Двоичная дробь	Двоичный код дроби		
		СБ ($\times \frac{1}{2}$)	($\times \frac{1}{4}$)	МБ ($\times \frac{1}{8}$)
0	0,000	0	0	0
1/8	0,001	0	0	1
1/4	0,010	0	1	0
3/8	0,011	0	1	1
1/2	0,100	1	0	0
5/8	0,101	1	0	1
3/4	0,110	1	1	0
7/8	0,111	1	1	1

Десятичное целое число	Двоичное число	Двоичный код целого числа		
		Бит знака	СБ (×2)	МБ (×1)
-3	111	1	1	1
-2	110	1	1	0
-1	101	1	0	1
-0	100	1	0	0
+0	000	0	0	0
+1	001	0	0	1
+2	010	0	1	0
+3	011	0	1	1

Если первый бит 3-разрядного слова используется как бит знака, то наибольшее целое число, которое может быть представлено этим словом, есть $2^2 - 1 = 3$, а наименьшее есть $-(2^2 - 1) = -3$. Любое n -разрядное слово с битом знака может представлять любое число в интервале между $2^{n-1} - 1$ и $-(2^{n-1} - 1)$ включая нуль. Числа, которые можно представить 3-разрядным словом с битом знака, приведены в табл. 2.3. Заметим, что в этом случае нуль представляется дважды, +0 и -0. Однако, трехразрядное слово определяет восемь различных состояний как и в случае, показанном в табл. 2.1.

Подобным образом бит знака может быть использован для представления дробного числа или дроби. Числа, которые могут быть представлены n -разрядным словом с битом знака и m разрядами для дробной части (m бит после "двоичной запятой"), лежат в интервале между $(2^{n-1} - 1)2^{-m}$ и $-(2^{n-1} - 1)2^{-m}$.

Представление чисел в форме с фиксированной запятой имеет серьезные недостатки, вызванные ограниченным диапазоном представляемых чисел и жестким расположением "двоичной запятой". Обычно, когда перемножаются два больших числа, результат не укладывается в длину слова; в этом случае происходит переполнение, вызывающее потерю точности вычислений.

Представление числа в форме с плавающей запятой. Более удобным в практическом применении, охватывающим к тому же больший диапазон чисел, является представление чисел в форме с плавающей запятой. Этот метод известен также как правило, согласно которому первая часть слова используется для записи числа, называемого мантиссой, а вторая для записи порядка. Например, в десятичной системе число 5 может быть записано как $0,5 \cdot 10^1$, $50 \cdot 10^{-1}$, $0,05 \cdot 10^2$ и т.д. В ЭВМ двоичное представление чисел в форме с плавающей запятой обычно определяется как

$$N = M \times 2^E \quad (2-6)$$

где M — мантисса; E — порядок числа N . Кроме того, обычно M масштабируется таким образом, чтобы соответствующее десятичное значение лежало в пределах $0,5 \leq M < 1$.

На рис. 2.3 показано представление 8-разрядного числа в форме с

Рис. 2.3. Представление 8-разрядного числа в форме с плавающей запятой

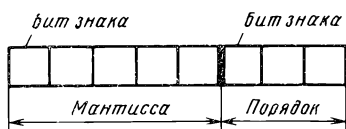


Рис. 2.4. Представление числа в форме с плавающей запятой двумя машинными словами

плавающей запятой: пять разрядов отведено под мантиссу и три под порядок. Так как и мантисса, и порядок могут быть положительными и отрицательными, первые разряды мантиссы и порядка отведены под биты знака. (Можно использовать первые два разряда целого слова для битов знака мантиссы и порядка, соответственно). В микропроцессорах, рассчитанных на малую длину слова, для представления числа в форме с плавающей запятой могут использоваться два последовательных слова (рис. 2.4).

Так как мантисса нормализуется и является дробью между $1/2$ и 1 , первый разряд после бита знака всегда должен содержать 1 , а "двоичная запятая" всегда должна следовать за битом знака.

Порядок E указывает, на сколько разрядов "двоичная запятая" должна быть смещена вправо (для $E > 0$) или влево (для $E < 0$). В качестве примера на рис. 2.5 показано представление десятичного числа $6,5$ в форме с плавающей запятой. В этом случае мантисса содержит четыре разряда для дроби $0,1101$, а порядок записывается в двух разрядах целым числом 11 , которое соответствует десятичному числу 3 . Таким образом, число представляется как

$$N = 0,1101 \cdot 2^{11} = \quad \text{(двоичное)}$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right] 2^3 = \quad \text{(десятичное)}$$

$$= 6,5. \quad \text{(десятичное)}$$

Если передвинуть "двоичную запятую" вправо на три разряда, где 3 — десятичный порядок, то получим двоичное число $110,1$ в форме с фиксированной запятой, которое соответствует десятичному числу $6,5$.

Для n -разрядного слова, содержащего m разрядов для мантиссы, e разрядов для порядка и два разряда для знака, наибольшее представляемое число N_{\max} показано на рис. 2.6, а. В этом случае все знаковые разряды заполнены единицами, и N_{\max} выражается как

$$N_{\max} = (1 - 2^{-m+1}) 2^{(2^{e-1}-1)} \quad (2-7)$$



Рис. 2.5. Представление десятичного числа $6,5$ 8-разрядным словом

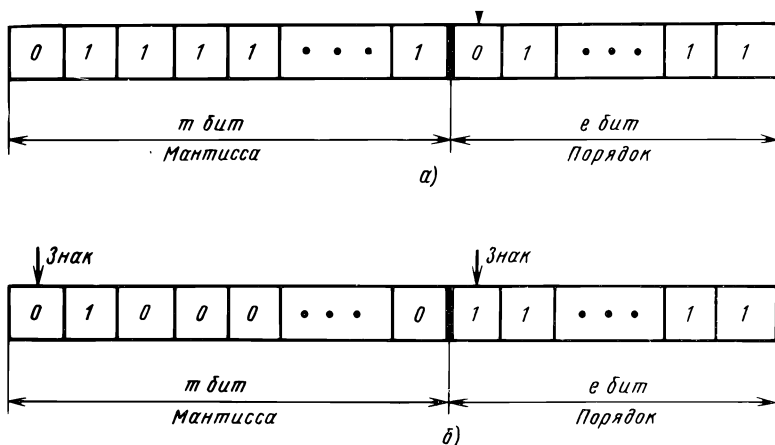


Рис. 2.6. Представление максимального и минимального чисел в форме с плавающей запятой

Для 8-разрядного слова, показанного на рис. 2.5, с $t = 5$ и $e = 3$ наибольшее представляемое число

$$N_{\max} = (1 - 2^{-4})2^{(2^3-1)} = (1 - 1/16)2^3 = 7,5 \quad (2-8)$$

Для того же 8-разрядного слова с четырьмя битами, отведенными под мантиссу и столькими же для порядка, получим

$$N_{\max} = (1 - 2^{-3})2^{(2^3-1)} = (1 - 1/8)2^7 = 112 \quad (2-9)$$

На рис. 2.6, б показан состав наименьшего положительного числа N_{\min} , которое может быть представлено n -разрядным словом с t разрядами для мантиссы и e для порядка. В этом случае первый разряд после бита знака мантиссы содержит единицу, а все остальные биты мантиссы равны нулю. Разряды порядка заполнены единицами. Следовательно, N_{\min} запишем как

$$N_{\min} = 0,5 \times 2^{-(2^e-1)} \quad (2-10)$$

2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАННЫХ И КВАНТОВАНИЕ

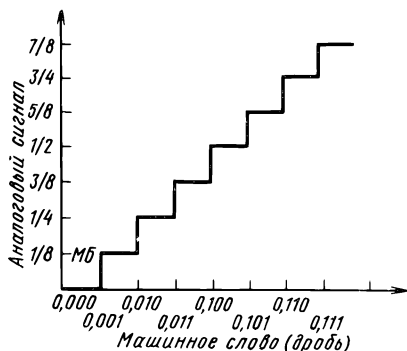
Обычно цифровые системы управления содержат как аналоговые, так и цифровые элементы, поэтому необходимо преобразовывать аналоговые сигналы в цифровые (АЦП) и цифровые в аналоговые (ЦАП).

При изучении А/Ц и Ц/А преобразований важно правильно понимать вес каждого разряда машинного слова. На практике схемы АЦП и ЦАП базируются на двоичном представлении чисел с использованием двоичного кода дробного числа. Как показано в табл. 2.2, старший бит 3-разрядного двоичного слова имеет вес $1/2$ от максимального значения числа (МЗЧ),

Рис. 2.7. Представление дробного десятичного числа двоичным кодом

второй бит имеет вес $1/4$ МЗЧ, и младший бит $1/8$ МЗЧ. Для n -разрядного двоичного кода дробного числа старший бит имеет вес $1/2$ МЗЧ, а младший 2^{-n} МЗЧ.

Независимо от того, используется ли код целого числа или дробного n -разрядное слово определяет 2^n различных состояний, с разрешением $1/2^n$. Например, на рис. 2.7 разрешение 3-разрядного двоичного кода



дробного числа есть $2^{-3} = 1/8$. Вес младшего бита в этом случае $1/8$, а максимальное значение числа равно 1. Разрешение может быть улучшено при увеличении разрядности слова. Например, 4-разрядное двоичное машинное слово при МЗЧ = 1 имеет вес младшего бита 2^{-4} , или $1/16$, разрешение соответственно, увеличивается до $1/16$. В этом случае график, показанный на рис. 2.7, будет иметь 16 уровней. Заметим, что цифровой код не соответствует своему аналоговому сигналу, и наоборот. Это же правило справедливо при представлении целых чисел. Необходимо помнить, что при увеличении разрядов в машинном слове с целью увеличения разрешения максимальное значение аналогового или цифрового сигнала должно быть сохранено тем же.

Если количество разрядов в машинном слове конечно, что имеет место на практике, то А/Ц преобразование может обеспечить только конечное разрешение. Одной из главных операций при А/Ц преобразовании является процедура *квантования*. Так как цифровой выход может иметь конечное число состояний, то аналоговое число должно быть *проквантовано* или *округлено* до ближайшего возможного значения. На рис. 2.8 показано соотношение между аналоговым входным сигналом и двоичным кодом целого числа (3-разрядное слово для положительных и отрицательных чисел).

Как следует из рисунка, точное преобразование аналогового сигнала имеет место только при его значениях $0,5q, 1,5q, 2,5q, \dots, 6,5q$. Соотношение между аналоговым сигналом и цифровым кодом D при 3-разрядном А/Ц преобразовании показано в табл. 2.4.

Следует отметить, что А/Ц преобразование, показанное на рис. 2.8, не обеспечивает взаимно-однозначного соответствия. Параметр q , значение которого равно младшему биту (МБ) слова, называется *шагом квантования*. Как показано в табл. 2.4, для 3-разрядного слова МБ равен $1/8$ МЗЧ. Разница между аналоговым сигналом и цифровым выходом преобразователя называется *ошибкой квантования*. Ошибка квантования зависит от числа уровней квантования или разрешения квантователя. На рис. 2.8 видно, что в рабочем диапазоне ошибка квантования равна нулю, когда величина аналогового сигнала кратна q . До достижения насыщения максимальная ошибка квантования составляет $\pm q/2$.

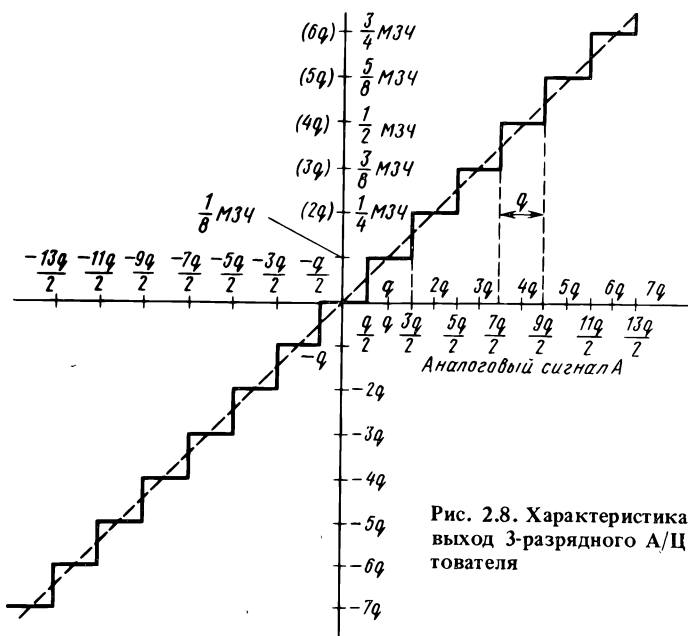


Рис. 2.8. Характеристика вход-выход 3-разрядного А/Ц квантователя

Таблица 2.4

Аналоговый сигнал A	Двоичный цифровой сигнал D		
	Двоичное число		
	СБ ($\times 4q$)	($\times 2q$)	МБ ($\times q$)
$ A < 0,5q$	0	0	0
$0,5q \leq A < 1,5q$	0	0	1
$1,5q \leq A < 2,5q$	0	1	0
$2,5q \leq A < 3,5q$	0	1	1
$3,5q \leq A < 4,5q$	1	0	0
$4,5q \leq A < 5,5q$	1	0	1
$5,5q \leq A < 6,5q$	1	1	0
$6,5q \leq A < \infty$	1	1	1

Важно, что рабочий диапазон квантователя (см. рис. 2.8) соответствует двоичному числу 111, или $7/8$ МЗЧ, а не МЗЧ. Это обстоятельство не будет сказываться на точности преобразования, пока аналоговый сигнал не превысит $7/8$ МЗЧ + $q/2$; при этом условии максимальная ошибка квантования равна $\pm q/2$. Например, если максимальное напряжение входного аналогового сигнала 10 В, то МЗЧ = 10 В, а $q = \frac{1}{8}$ МЗЧ = 1,25 В.

Следовательно, максимальное значение аналогового сигнала, которое может быть преобразовано с ошибкой, не превышающей $\pm 0,625$ В,

$$\frac{7}{8} \text{ МЗЧ} + \frac{q}{2} = 9,375 \text{ В.}$$

Хотя натуральный двоичный код наиболее широко применяется на практике, что определяется его простотой и легкостью реализации в цифровых устройствах, разработан и применяется ряд других кодов. Это двоично-десятичный код, код Грея, код с избытком 3, код "один из десяти" и т.д.

2.4. УСТРОЙСТВА ВЫБОРКИ И ХРАНЕНИЯ

Под квантователем в дискретных или цифровых системах понимается устройство, преобразующее аналоговый сигнал в последовательность амплитудно-модулированных импульсов или кодов. В гл. 1 были рассмотрены некоторые реальные системы, в которых квантование определялось или физической природой процессов, или внешней причиной. Устройство фиксации в простейшем случае сохраняет или "замораживает" значение импульса или цифрового сигнала в течении определенного времени. Часто квантователь и фиксатор объединяют в одно устройство, которое принято называть устройством выборки и хранения (УВХ).

Эти устройства находят широкое применение в цифровых системах. Одной из главных задач УВХ является фиксация быстро изменяющихся сигналов при различных преобразованиях. Другим назначением УВХ является запоминание выходных сигналов мультиплексора. На УВХ возлагается также задача детектирования импульсных сигналов. Ниже показано, что УВХ часто объединяют с АЦП и ЦАП.

Простейшее устройство выборки и хранения показано на рис. 2.9. Размыкание и замыкание ключа определяется *командным сигналом*. Когда ключ замкнут, выходной сигнал УВХ изменяется в соответствии с входным сигналом $e_s(t)$. Когда ключ разомкнут, значение выходного сигнала определяется напряжением на конденсаторе.

На рис. 2.10 показаны типовые сигналы на входе и выходе простого УВХ в предположении, что сопротивление источника равно нулю. Временной интервал, в течение которого ключ замкнут, называется *временем выборки* p . На практике сопротивление R_s отличается от нуля, и конденсатор будет заряжаться в соответствии с входным сигналом с постоянной времени $R_s C$. Более того, требуется конечное время на отработку командных сигналов.

На практике выходной сигнал УВХ может существенно отличаться от идеального (см. рис. 2.10), что определяется несовершенством устройства и его погрешностями.

На рис. 2.11 показаны типичные входные сигналы $e_s(t)$ и выходной сигнал реального УВХ. На выходной сигнал УВХ влияют временные задержки и неидеальность фиксации. Основные характеристики процессов, показанных на рисунке, могут быть определены следующим образом.

Время выборки (T_a) определяется интервалом от момента поступления команды на выборку до момента, когда выходной сигнал станет равным входному с некоторой погрешностью (обычно $\pm 1\%$).

Рис. 2.9. Принцип работы УВХ

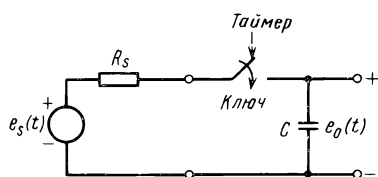


Рис. 2.10. Сигнал в простейшем УВХ при $R_s = 0$

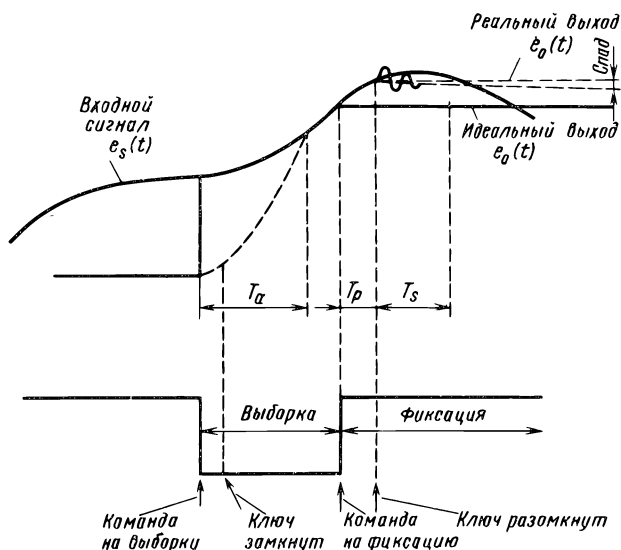
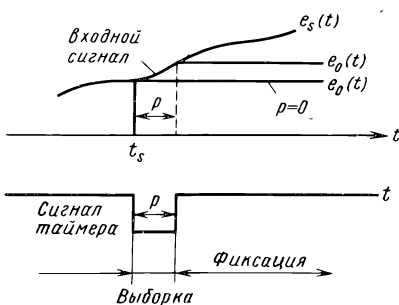


Рис. 2.11. Входные и выходные сигналы в реальном УВХ

Апертурное время (T_p) – интервал от момента поступления команды на фиксацию до момента, когда ключ разомкнется. Оно определяется временем срабатывания переключающей схемы внутри УВХ. Для одного УВХ это время непостоянно, и обычно в технических данных указывается его среднее значение. Апертурное время типового УВХ может иметь значение ~ 10 нс.

Время установления (T_s) – период, необходимый для затухания колебаний до некоторой величины (определяемой допустимой погрешностью). При переходе к режиму фиксации возникает переходный процесс, обусловленный реактивными элементами в схемах цифровой логики. Время установления для типового УВХ может быть от нескольких наносекунд до нескольких микросекунд, в зависимости от требуемой точности.

Спад сигнала – медленное уменьшение выходного напряжения УВХ из-за токов утечки переключателя и буферного усилителя в течение времени фиксации.

Спад сигнала может быть существенно уменьшен, если на выходе УВХ включить буферный усилитель с высоким входным сопротивлением. Аналогично, можно включить буферный усилитель на входе УВХ для согласования его с источником сигнала. УВХ с буферными усилителями на входе и выходе показано на рис. 2.12.

В цифровых системах операции выборки и хранения инициируются периодически таймерами. На рис. 2.13 показаны процессы, протекающие в УВХ при постоянной частоте управляющих импульсов. Время между командными сигналами называется *периодом квантования* T .

Структурная схема устройства выборки и хранения. Хотя устройство выборки и хранения изготавливается как единый блок, и на структурных схемах этот блок изображается одним элементом (рис. 2.14), аналитически удобно рассматривать процессы выборки и хранения отдельно. Эквивалентная схема, в которой процессы выборки и хранения разделены, показана на рис. 2.15; на схеме отражены также временные задержки и динамика процесса. Квантователь, который может быть рассмотрен как амплитудно-импульсный модулятор, обеспечивает время выборки p . Фиксатор сохраняет квантованный по времени сигнал постоянным в течение времени хранения. Время задержки T_d объединяет время выборки и апер-

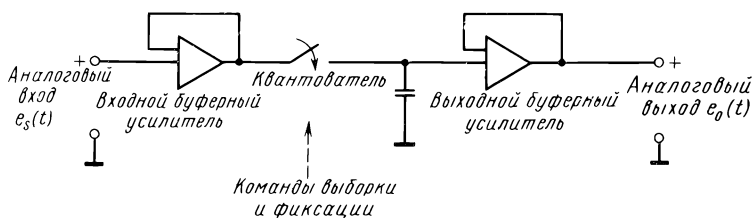


Рис. 2.12. УВХ с буферными усилителями

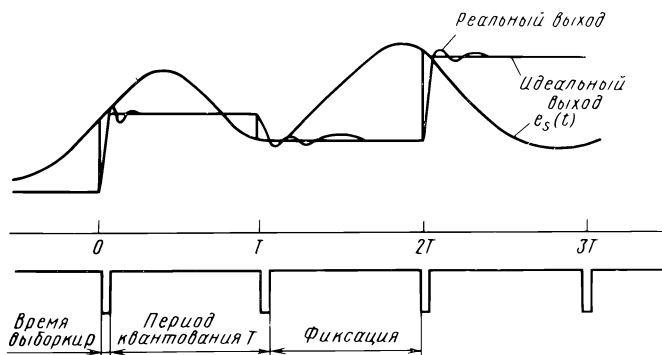


Рис. 2.13. Входные и выходные сигналы в УВХ с постоянным периодом квантования

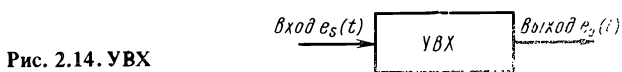


Рис. 2.14. УВХ

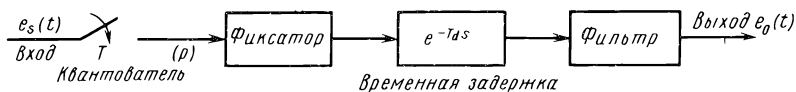


Рис. 2.15. Структурная схема УВХ

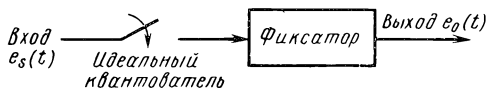


Рис. 2.16. Идеальное УВХ

Рис. 2.17. Входные и выходные сигналы идеального УВХ



турное время; фильтр отражает динамику переходных процессов в буферных усилителях. В общем случае передаточная функция фильтра может быть представлена в виде

$$G_f(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Импульсный элемент (см. рис. 2.15) обычно называется *квантователем с конечной длительностью импульса*. На практике время выборки p мало по сравнению с периодом квантования и характерными постоянными времени входного аналогового сигнала. Время задержки в УВХ также мало, поэтому с учетом динамики системы этими величинами можно пренебречь. Например, апертурное время может быть ~ 10 нс, а время выборки 300 нс. Еще 100 нс может занять время установления; следовательно, общая задержка составляет 410 нс, чем можно пренебречь, так как вряд ли система управления способна быстрее отреагировать на входной сигнал.

Следовательно, в практических случаях, когда $p \ll T$ и временная задержка мала, УВХ может быть представлено структурной схемой (рис. 2.16). В этом случае импульсный элемент называется *идеальным квантователем*, так как предполагается, что время выборки равно нулю, т.е. $p = 0$. В дальнейшем покажем, что модель идеального квантователя позволяет получить удобное математическое описание операции выборки и хранения. Входной и выходной сигналы идеального УВХ показаны на рис. 2.17.

2.5. ЦИФРОАНАЛОГОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Цифроаналоговое преобразование, или декодирование, заключается в преобразовании числа, представленного в виде машинного слова, в эквивалентный аналоговый сигнал. Структурная схема ЦАП показана на рис. 2.18. Назначение логической схемы заключается в управлении подключением источника опорного напряжения или тока ко входам резистив-

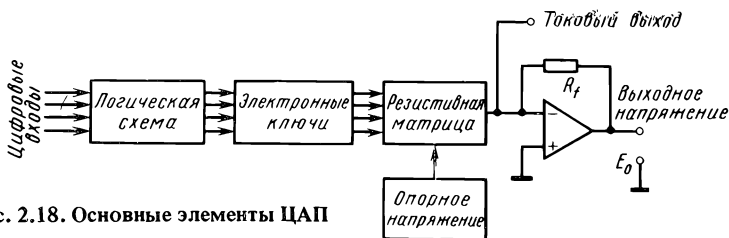


Рис. 2.18. Основные элементы ЦАП

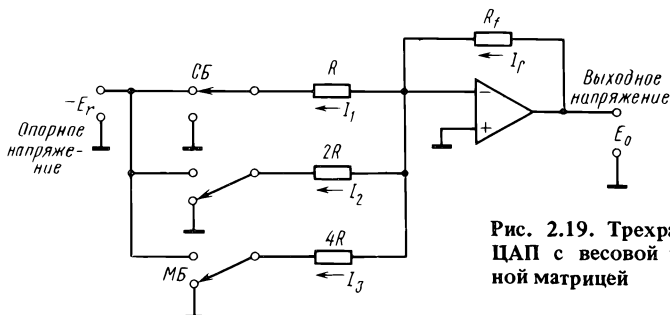


Рис. 2.19. Трехразрядный ЦАП с весовой резистивной матрицей

ной матрицы в соответствии со значением каждого разряда входного цифрового сигнала. На рис. 2.19 показан простой 3-разрядный ЦАП, работающий в двоичном коде. Значения суммирующих резисторов операционного усилителя выбраны в соответствии с весом каждого разряда двоичного кода. Каждый резистор подключается через электронный ключ к источнику опорного напряжения или замыкается на землю. Когда двоичная 1 появляется на одном из входов логической схемы управления ключами, соответствующий ключ замыкается и подсоединяет резистор к источнику опорного напряжения. При наличии двоичного 0 резистор замыкается на землю. Входное сопротивление операционного усилителя с высоким коэффициентом усиления мало, поэтому можно считать, что напряжение на суммирующей точке практически равно нулю. Следовательно, если ключ старшего бита (СБ) замкнут, а два других разомкнуты (заземлены), то выходное напряжение, соответствующее цифровому слову 100

$$E_0 = R_f I_f \quad (2-11)$$

Так как $I_f = I_1$ и $I_1 = E_r/R$, то

$$E_0 = \frac{1}{R} R_f E_r \quad (2-12)$$

где E_r — опорное напряжение. Если преобразуется цифровое слово 110, замкнут ключ СБ и следующий за ним, то выходное напряжение

$$E_0 = \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right] R_f E_r = \frac{3}{2R} R_f E_r \quad (2-13)$$

Максимальное 3-разрядное слово соответствует выходному напряжению

$$E_0 = \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R} \right] R_f E_r = \frac{7}{4R} R_f E_r \quad (2-14)$$

Наличие двоичной 1 только в младшем бите (цифровое слово 001) будет соответствовать выходному напряжению $R_f E_r / (4R)$. Следовательно, максимальное выходное напряжение $8R_f E_r / (4R) = 2R_f E_r / R$. В табл. 2.5 приведены выходные напряжения ЦАП (см. рис. 2.19), соответствующие всем значениям 3-разрядного слова для максимального выходного напряжения (МВН) 10 В.

Для n -разрядного двоичного слова резистивная матрица должна содержать n резисторов. Сопротивление резистора, соответствующее младшему биту, равно $2^{n-1} R$. Выходное напряжение можно записать в виде

$$E_0 = \left[\frac{a_0}{R} + \frac{a_1}{2R} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1} R} \right] R_f E_r \quad (2-15)$$

где коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_{n-1} равны 1 или 0 в зависимости от значения преобразуемого цифрового слова.

Главным недостатком ЦАП с весовой резистивной матрицей (см. рис. 2.19) является зависимость точности и стабильности преобразования от точности и температурной стабильности резисторов. Кроме того, диапазон значений резисторов изменяется от R до $2^{n-1} R$, следовательно, разность между наибольшим и наименьшим сопротивлениями может быть значительна; при этих условиях трудно выдержать точное соотношение между сопротивлениями всех резисторов.

Более практичным является ЦАП с цепной ($R - 2R$)-матрицей. На рис. 2.20 показан этот тип ЦАП для 3-разрядного цифрового слова. Так как резисторы имеют сопротивления только R или $2R$, это очень удобно с точки зрения их выбора и подстройки. Выходной сигнал может быть получен в виде напряжения E_0 или тока I_0 .

Положение ключей на рис. 2.20 соответствует цифровому слову 100.

Таблица 2.5

Цифровое слово	Выходное напряжение	
	в долях МВН	при МВН = 10 В
001	$\frac{\text{МВН}}{8} = \text{МБ}$	1,25
010	$\frac{\text{МВН}}{4}$	2,50
011	$\frac{3}{8} \text{ МВН}$	3,75
100	$\frac{1}{2} \text{ МВН}$	5,00
101	$\frac{5}{8} \text{ МВН}$	6,25
110	$\frac{3}{4} \text{ МВН}$	7,50
111	$\text{МВН} - \text{МБ} = \frac{7}{8} \text{ МВН}$	8,75

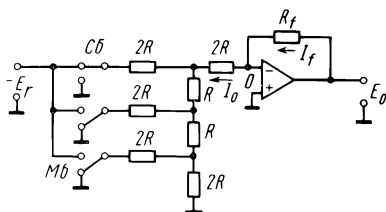


Рис. 2.20. ЦАП с цепной $(R - 2R)$ -матрицей

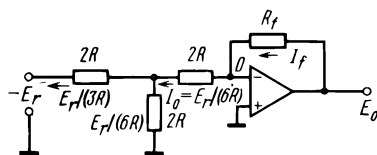


Рис. 2.21. Эквивалентная схема ЦАП показанного на рис. 2.20

Эквивалентная схема ЦАП для этого случая показана на рис. 2.21. Так как потенциал на входе операционного усилителя практически равен нулю, то легко можно вычислить токи через резисторы. Выходной ток матрицы (он же входной ток операционного усилителя)

$$I_0 = \frac{E_r}{6R} \quad (2-16)$$

Соответствующее выходное напряжение операционного усилителя определяется как

$$E_0 = \frac{E_r R_f}{6R} \quad (2-17)$$

Теперь предположим, что к источнику опорного напряжения подключен следующий резистор, а все остальные резисторы соединены с землей; эта ситуация соответствует цифровому слову 010. Эквивалентная схема ЦАП в этом случае показана на рис. 2.22. Токи, проходящие через резисторы, обозначены на рисунке. В этом случае выходной ток

$$I_0 = \frac{E_r}{12R} \quad (2-18)$$

а выходное напряжение

$$E_0 = \frac{E_r R_f}{12R} \quad (2-19)$$

Аналогично можно показать, что для цифрового слова 001

$$I_0 = \frac{E_r}{24R} \quad (2-20)$$

$$E_0 = \frac{E_r R_f}{24R} \quad (2-21)$$

Вообще, для 3-разрядного преобразования

$$I_0 = \frac{1}{3} \left[\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} \right] \frac{E_r}{R} \quad (2-22)$$

где a_1 , a_2 и a_3 принимают значение 1 или 0 в зависимости от преобразуемого цифрового слова.

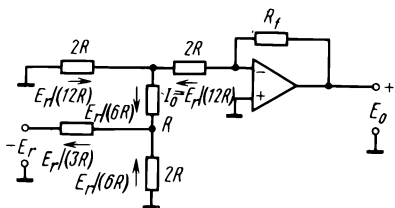


Рис. 2.22. Эквивалентная схема ЦАП при преобразовании слова 010

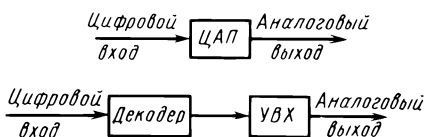


Рис. 2.23. Структурная схема ЦАП

В общем случае n -разрядный ЦАП с цепной $(R - 2R)$ -матрицей содержит n параллельных резисторов сопротивлением $2R$; выходной ток при этом определяется выражением

$$I_0 = \frac{1}{3} \left[\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \right] \frac{E_r}{R} \quad (2-23)$$

Так как при Ц/А преобразовании цифровой сигнал трансформируется в аналоговый соответствующей величины, то ЦАП как система может быть представлен в виде декодера и устройства выборки и хранения (УВХ) сигнала (рис. 2.23). В декодере цифровое слово преобразуется в число или в амплитудно-модулированный импульс. Квантователь в показанной на рисунке структурной схеме в действительности не нужен. Поскольку УВХ обычно рассматривается как единое целое, то операция квантования присутствует, даже если в ней нет необходимости. Передаточная функция декодера соответствует простому усилительному звену, причем коэффициент усиления в идеальном случае равен единице.

Следует заметить, что на выходе ЦАП из-за работы операционного усилителя могут возникать колебания и пульсации; на практике УВХ может быть использовано для устранения этих пульсаций. Таким образом, использование устройства выборки и хранения в структурной схеме ЦАП имеет реальную предпосылку.

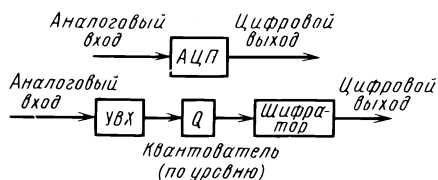
2.6. АНАЛОГО-ЦИФРОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Аналого-цифровое преобразование, или кодирование, заключается в преобразовании информации, содержащейся в аналоговом сигнале, в цифровой код. А/Ц преобразование является более сложным процессом, чем Ц/А преобразование, и требует более сложного схемотехнического решения. АЦП по сравнению с ЦАП, как правило, имеет меньшее быстродействие при той же точности; стоимость АЦП также выше.

Если рассматривать преобразование числа, то АЦП совершает две операции: *квантование по уровню и кодирование*. Когда в цифровую форму должен быть преобразован изменяющийся во времени сигнал (напряжение или ток), то АЦП совершает следующую последовательность операций: *выборку и хранение, квантование по уровню, кодирование*.

Квантование по времени необходимо для выборки значений аналогового сигнала в периодически повторяющиеся моменты времени. Теорети-

Рис. 2.24. Структурная схема АЦП



чески операция хранения не является необходимой, однако АЦП имеет отличное от нуля время преобразования в течение которого аналоговый сигнал может измениться. Для устранения этого явления квантованный сигнал сохраняется постоянным до завершения преобразования. Структурная схема АЦП представлена на рис. 2.24.

Обычно на вход АЦП подается сигнал в виде тока или напряжения, который в процессе преобразования квантуется по уровню. Идеальная статическая характеристика вход-выход для 3-разрядного двоичного АЦП идентична характеристике, приведенной на рис. 2.8. Входные сигналы могут принимать любые значения, а выходные соответствуют восьми (2^3) дискретным уровням. Как видно из рис. 2.8, погрешность преобразования, равная по модулю половине значения младшего разряда, будет всегда добавляться к ошибкам реального АЦП. При необходимости повысить точность преобразования следует увеличить количество разрядов в выходном сигнале. Однако это приведет к возрастанию сложности АЦП и, возможно, к увеличению времени преобразования.

Хотя существуют различные схемы АЦП, только некоторые из них могут быть рекомендованы для практического применения. Наиболее часто используются следующие типы АЦП: с поразрядным уравниванием; интегрирующий (однотактный и двухтактный); со ступенчато нарастающим опорным напряжением или следящим алгоритмом; параллельный. Каждый тип АЦП имеет свои преимущества и недостатки. Выбор типа АЦП определяется скоростью и точностью преобразования, стоимостью АЦП, его размерами, спецификой использования. Промышленность выпускает АЦП с количеством разрядов от 6 до 16; погрешность преобразования обычно составляет $0,01\% \text{ MBN} \pm 1/2 \text{ МБ}$.

Для иллюстрации А/Ц преобразования коротко рассмотрим работу АЦП с поразрядным уравниванием, упрощенная структурная схема которого представлена на рис. 2.25. Основными элементами АЦП являются компаратор, ЦАП и логическая схема управления. В начале преобразования все разряды выходного сигнала устанавливаются в 0 ("очистка"), затем старший бит ЦАП устанавливается в 1. Сигнал старшего бита, соответствующий половине максимального выходного напряжения, преобразуется в ЦАП и сравнивается с аналоговым входным сигналом. Если входной аналоговый сигнал больше сигнала, поступающего от ЦАП, то старший бит (СБ) выходного кода устанавливается в 1; в противном случае СБ = 0. Затем устанавливается следующий бит ЦАП, и сравнение повторяется. Процесс продолжается до сравнения младшего бита, после чего вырабатывается сигнал об окончании преобразования, и выходной сигнал готов для передачи. Типичные временные диаграммы для АЦП с поразрядным уравниванием показаны на рис. 2.26.

Время преобразования АЦП приводит к появлению запаздывания, которое, как хорошо известно, ухудшает устойчивость замкнутой системы. Кроме того, конечное время преобразования накладывает ограни-

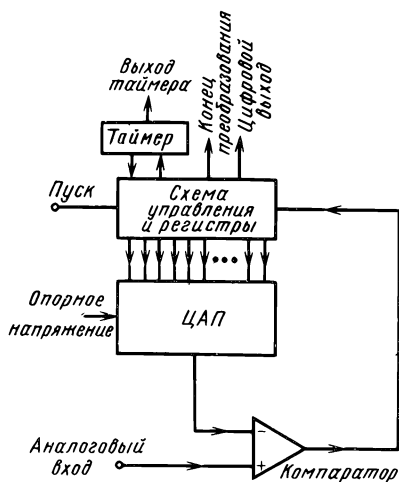


Рис. 2.25. Схема АЦП с поразрядным уравниванием

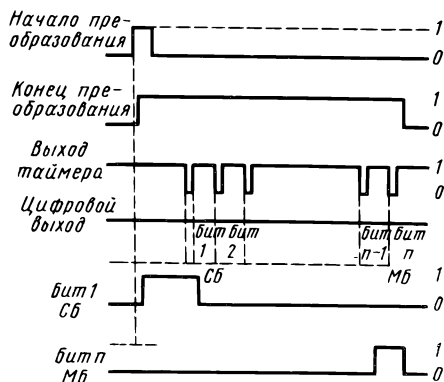


Рис. 2.26. Временные диаграммы АЦП с поразрядным уравниванием

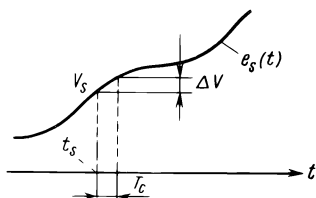


Рис. 2.27. Время преобразования и амплитудная неопределенность при А/Ц преобразовании

В простейшем случае, когда входной аналоговый сигнал постоянен, время преобразования не имеет значения, так как входной сигнал не меняется в процессе его сравнения с эталонными напряжениями АЦП. Однако на практике входной аналоговый сигнал обычно изменяется во времени и, как было отмечено выше, вначале этот сигнал подвергается преобразованию в устройстве выборки и хранения.

Для иллюстрации влияния времени преобразования рассмотрим аналоговый сигнал (рис. 2.27). Значение сигнала V_s должно быть преобразовано АЦП в цифровой код. Однако, если для этого требуется время T_c^* , в течение которого сигнал изменяется, то в измерении амплитуды сигнала будет появляться неопределенность. Предположим, что максимальное значение входного сигнала равно V_{FS} и АЦП является n -разрядным. Это означает, что сигнал должен быть представлен n -разрядным числом с разрешением $1/2^n$. Изменение амплитуды сигнала в течение времени преобразования приблизительно может быть определено как

$$\Delta V \cong \left. \frac{dV_s(t)}{dt} \right|_{t=t_s} \times T_c \quad (2-24)$$

* Величина T_c складывается из времени преобразования АЦП, времени выборки, апертурного времени, и времени установления УВХ.

Для разрешения 2^{-n} принимаем

$$\frac{\Delta V}{V_{FS}} \leq 2^{-n} \quad (2-25)$$

Объединяя соотношения (2-24) и (2-25), получим

$$\left. \frac{de_s(t)}{dt} \right|_{t=t_s} \leq 2^{-n} \frac{V_{FS}}{T_c} \quad (2-26)$$

Правая часть соотношения (2-26) является верхним пределом скорости изменения входного сигнала, при котором разрешение преобразования может быть сохранено равным $1/2^n$.

На практике входной сигнал можно характеризовать частотой его высшей гармонической составляющей. В качестве примера предположим, что время преобразования 10-разрядного двоичного АЦП равно 1 мкс. Представляя

$$e_s(t) = \frac{V_{FS}}{2} \sin \omega t \quad (2-27)$$

и используя соотношение (2-26), получаем

$$\left. V_{FS} \omega \cos \omega t \right|_{t=0} \leq 2 \times 2^{-10} \frac{V_{FS}}{T_c} \quad (2-28)$$

В последнем выражении мы выбрали момент квантования $t = 0$, что дает наибольшее значение $\cos \omega t$ (или наибольший наклон $\sin \omega t$). Тогда

$$\omega \leq 2^{-9}/10^{-6} \approx 1953 \text{ рад/с}, \quad (2-29)$$

или входной сигнал не должен меняться с частотой большей, чем 311 Гц. Таким образом, хотя АЦП совершает 10^6 преобразований за 1 с, но не обеспечит достаточную точность кодирования сигналов, если в их спектре содержится частота выше 311 Гц.

В общем случае максимальная частота

$$\omega_{\max} = \frac{1}{2^{n-1} T_c} \quad (2-30)$$

где n — количество разрядов преобразователя. Соотношение (2-30) показывает, что ω_{\max} обратно пропорционально времени преобразования T_c . При увеличении разрядности (разрешения) преобразователя максимальное значение допустимой частоты уменьшается в геометрической прогрессии. В табл. 2.6 показаны максимальные значения частоты входного сигнала (рад/с) при различных сочетаниях разрядности АЦП и времени преобразования T_c .

Период квантования. Из предыдущего рассмотрения ясно, что время преобразования T_c играет доминирующую роль во влиянии АЦП на характеристики системы. Так как время преобразования может быть уменьшено только при применении преобразователя с более высоким быстродействием, ограничение на максимальную частоту входного сигнала может

Таблица 2.6

Время преобразования T_c , с	Длина слова, бит						
	4	6	8	10	12	14	16
10^{-3} (1 мс)	125	31,25	7,8125	1,953	0,488	0,122	0,0305
10^{-4} (100 мкс)	1250	312,5	78,125	19,53	4,88	1,22	0,305
10^{-5} (10 мкс)	12500	3125	781,25	195,3	48,8	12,2	3,05
10^{-6} (1 мкс)	125000	31250	7812,5	1953	488	122	30,5
10^{-7} (100 нс)	1250000	312500	78125	19530	4880	1220	305

быть сделано менее жестким при использовании УВХ на входе АЦП. УВХ квантует входной сигнал по времени и затем сохраняет значение сигнала в течение времени преобразования. На практике проектировщик цифровой системы всегда сталкивается с вопросом, как правильно выбрать частоту квантования.

Обозначим частоту квантования f_s (Гц) или ω_s (рад/с). Частота квантования связана с периодом квантования соотношениями

$$f_s = 1/T;$$

$$\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T.$$

Вообще говоря, частота квантования зависит от многих факторов, связанных с преобразованием сигналов и характеристиками системы. В этом параграфе рассмотрим факторы, определяемые преобразованием и обработкой сигналов.

Минимальный период квантования ограничен временем А/Ц преобразования и задержками УВХ. Например, если суммарное время преобразования 10-разрядного АЦП равно 1 мкс, то минимальный период квантования также равен 1 мкс. Соответствующая максимальная частота квантования равна 1 МГц. Однако на практике минимальный период квантования или максимальная частота квантования определяется и другими компонентами системы, в частности их быстродействием. Если в системе используется мультиплексирование или если данные должны быть обработаны микропроцессором, то не только УВХ и АЦП ограничивают частоту квантования. Так как микропроцессор является довольно медленным цифровым устройством, данные в нем могут обрабатываться только с определенной максимальной скоростью. Таким образом, в дискретных и цифровых системах управления максимальная частота квантования редко ограничивается лишь характеристиками УВХ и АЦП.

В то же время нетрудно заметить, что существует ограничение снизу на частоту квантования. Очевидно, что УВХ должно работать с достаточно большой частотой, чтобы информация, содержащаяся во входном сигнале, не была потеряна в течение операций выборки и хранения.

Предположим, что синусоидальный сигнал с частотой 1 МГц квантуется каждую микросекунду. Если квантование всегда происходит в тот момент, когда синусоидальный сигнал равен нулю, то результирующее значение квантованного сигнала ошибочно будет равно нулю. Аналогично,

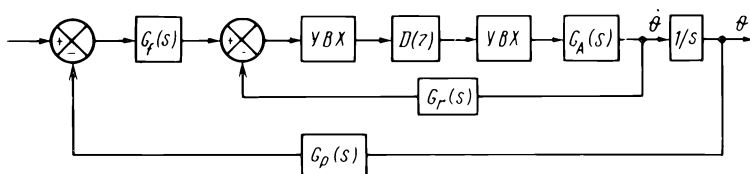


Рис. 2.28. Структурная схема цифрового автопилота (см. рис. 1.8) для аналитического исследования:

$G_f(s)$ – передаточная функция преобразователя; $D(z)$ – дискретная передаточная функция контроллера; $G_A(s)$ – динамика аппарата; $G_r(s)$ – передаточная функция гироскопа; $G_p(s)$ – передаточная функция позиционной обратной связи

квантованный выход будет равен нулю, если период квантования равен 0,5 мкс и моменты выборки совпадают с нулевыми значениями синусоидального входного сигнала. Следовательно, для точного представления синусоидального сигнала необходимо иметь частоту квантования, которая более чем в 2 раза превышает частоту входного сигнала. В общем, если частота наивысшей гармоники входного сигнала равна ω_H (рад/с), то для сохранения информации в процессе квантования частота квантования должна быть больше $2\omega_H$. Этот критерий минимума частоты квантования, определяемый процессом обработки сигналов, представлен в п. 2.7 *импульсной теоремой* *. Например, для рассмотренного выше АЦП суммарное время преобразования равно 1 мкс. Если частота квантования будет выбрана равной 1 МГц (теоретический максимум), то входной сигнал не должен содержать гармоник с частотой более 0,5 МГц.

В последующих главах мы покажем, что устойчивость замкнутых цифровых систем управления тесно связана с периодом квантования. В большинстве случаев небольшой период квантования является определяющим фактором устойчивости замкнутой системы. Следовательно, выбор необходимого периода квантования для замкнутой цифровой системы управления часто диктуется соображениями устойчивости.

Упрощенные структурные схемы АЦП и ЦАП. Интересно сравнить структурные схемы ЦАП (см. рис. 2.23) и АЦП (см. рис. 2.24). Если разрешение АЦП достаточно велико, то нелинейными эффектами квантования по уровню можно пренебречь; в этом случае функции преобразования декодера и шифратора могут быть представлены коэффициентами усиления. Тогда обе структурные схемы сводятся к схеме УВХ, что действительно справедливо при аналитическом исследовании цифровых систем. Например, для аналитического исследования цифровой автопилот, показанный на рис. 1.2, представляется структурной схемой (рис. 2.28), где АЦП и ЦАП заменены УВХ. В этом случае контроллер представлен дискретной передаточной функцией $D(z)$, а аналоговые элементы – соответствующими непрерывными передаточными функциями. Передаточная функция УВХ будет определена в п. 2.1.1.

* Теорема В.А. Котельникова. – Прим. ред. пер.

2.7. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА КВАНТОВАНИЯ

Так как операции выборки и хранения являются достаточно важными в цифровых и дискретных системах управления, необходимо разработать реалистическую и достаточно простую математическую модель УВХ. Хотя УВХ на практике обычно представляет собой единое устройство, аналитически удобнее рассматривать операции выборки и хранения отдельно.

Квантователь как амплитудно-импульсный модулятор. Операция квантования может рассматриваться как преобразование аналогового или непрерывного во времени сигнала в модулированный импульсный или цифровой сигнал. Как было показано выше, распространенным видом модуляции в процессе выборки и хранения является амплитудно-импульсная модуляция (АИМ).

На рис. 2.29 показана структурная схема периодического квантователя с конечным временем выборки. Длительность импульса или время выборки равно p , период квантования — T . Безусловно, на практике время выборки p или временной интервал, в течение которого ключ квантователя замкнут, конечно.

Для входного сигнала $f(t)$, который является функцией непрерывно изменяющегося параметра t , выход квантователя, обозначенный как $f_p^*(t)$, представляет последовательность импульсов конечной длительности, амплитуда которых промодулирована входным сигналом $f(t)$. На рис. 2.30 квантователь представлен как эквивалентный амплитудно-импульсный модулятор. В этом случае входной сигнал $f(t)$ должен быть умножен на несущий сигнал $p(t)$, который является последовательностью периодических импульсов единичного веса. Рис. 2.31 иллюстрирует типичные формы входного сигнала $f(t)$, несущего сигнала $p(t)$ и выходного сигнала $f_p^*(t)$.

Законы управления работой квантователей, используемых в цифровых системах, могут быть различны. Например, период квантования может быть непостоянным или изменяться циклически. Довольно часто встречаются цифровые системы с несколькими квантователями и с различными периодами квантования (например, показанная на рис. 1.9). Системы такого типа обычно называют *системами с многократным прерыванием*. Периоды квантования таких систем могут быть кратными или некрратными и несинхронизированными.

В некоторых физических системах операция квантования может происходить случайно, т.е. временной интервал между прерываниями может рассматриваться как случайный процесс.

Использование модели амплитудно-импульсного модулятора для представления квантователя (см. рис. 2.30) обеспечивает очевидное преимущество: при различных законах квантования меняется только несущий сигнал $p(t)$.

Если квантователь работает по схеме широтно-импульсной модуляции (ШИМ), то выходной сигнал представляет собой последовательность импульсов, длительность которых является функцией амплитуды входного сигнала в моменты выборки. Типичные входные и выходные сигналы ШИМ показаны на рис. 2.32. Существуют и более сложные схемы преобра-

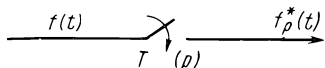


Рис. 2.29. Схема квантователя с постоянным периодом и конечным временем выборки

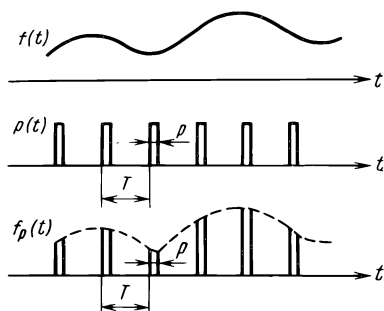


Рис. 2.31. Входной и выходные сигналы квантователя с постоянным периодом

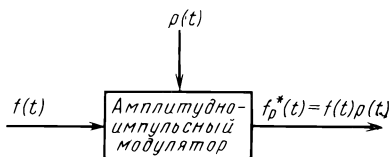


Рис. 2.30. Амплитудно-импульсный модулятор как квантователь: $\rho(t)$ — несущий сигнал

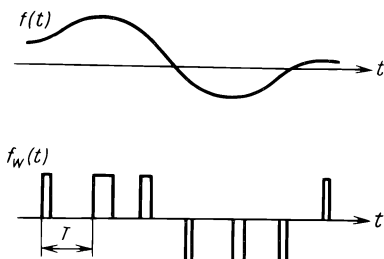


Рис. 2.32. Входной и выходные сигналы широтно-импульсного модулятора

зования. В одной из них в соответствии с входным сигналом в моменты замыкания изменяются и амплитуда и длительность выходных импульсов. Такой тип квантователя известен как *широтно-импульсный амплитудный модулятор*. В некоторых случаях применение подобных сложных квантователей позволяет улучшить характеристики цифровых систем управления.

В этой главе будет рассмотрено математическое описание только для квантователя с постоянным периодом. Однако полученные соотношения легко распространить на другие типы квантователей с переменным периодом.

Соотношение вход-выход для квантователя с конечной шириной импульсов. Концепция амплитудно-импульсного модулятора, представленная выше, оказывается полезной для математического анализа операции квантования. Квантователь, который может быть описан процессом амплитудно-импульсной модуляции (см. рис. 2.30 и 2.31), является *линейным* устройством. Это справедливо, так как квантователь удовлетворяет принципу суперпозиции. Однако сущность аналого-цифрового преобразования затрудняет возможность получения корректной передаточной функции. Тем не менее, поскольку рассматриваемый здесь квантователь является линейным, то для получения соотношения вход-выход можно использовать преобразования Фурье и Лапласа.

Рассматриваемый здесь квантователь будет также иметь конечную ширину импульсов, как и в реальных случаях. Ниже показано, что учет конечной ширины импульсов может быть достаточно сложным. При рассмотрении процесса выборки и хранения можно предположить, что квантователь имеет нулевую длительность импульсов или нулевое время выборки. В этом случае математическое описание квантователя существенно

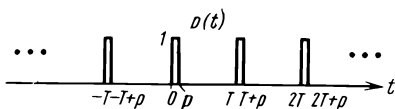


Рис. 2.33. Последовательность единичных импульсов

упрощается. Однако для лучшего понимания получаемых результатов сначала будет рассмотрен общий случай.

Выходной сигнал квантователя с постоянным периодом и конечной шириной импульсов, получаемый при входном сигнале $f(t)$, может быть рассмотрен как произведение входного сигнала $f(t)$ и несущего сигнала $p(t)$, который является последовательностью единичных импульсов с периодом T (см. рис. 2.29–2.31). Таким образом, несущий сигнал можно выразить как

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [u_s(t - kT) - u_s(t - kT - p)] \quad (p < T) \quad (2.31)$$

где $u_s(t)$ — единичная ступенчатая функция

$$\begin{aligned} u_s(t) &= 0 & t < 0 \\ u_s(t) &= 1 & t > 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

В данном случае предполагаем, что операция квантования начинается при $t = -\infty$, и передний фронт импульса при $t = 0$ совпадает с $t = 0$ (рис. 2.33). Выход квантователя запишем в виде

$$f_p^*(t) = f(t)p(t) \quad (2.33)$$

Подставляя соотношение (2.31) в (2.33), получим

$$f_p^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [u_s(t - kT) - u_s(t - kT - p)] \quad (p < T) \quad (2.34)$$

Выражение (2.34) представляет описание во временной области соотношения вход-выход для квантователя с постоянным периодом и конечной длительностью импульсов.

Интересно исследовать частотные характеристики выходного сигнала квантователя. Последовательность импульсов $f_p^*(t)$ обычно содержит составляющие с большими частотами, чем $f(t)$. Следовательно, квантователь можно рассматривать как *генератор гармоник*.

Поскольку последовательность единичных импульсов $p(t)$ является периодической функцией с периодом T , она может быть представлена в виде ряда Фурье

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad (2.35)$$

где ω_s — частота квантования, рад/с, которая связана с периодом квантования соотношением

$$\omega_s = 2\pi/T \quad (2.36)$$

C_n — коэффициенты ряда Фурье в комплексной форме, определяемые как

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-jn\omega_s t} dt \quad (2.37)$$

Так как $p(t) = 1$ для $0 \leq t \leq p$, то соотношение (2-37) принимает вид

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^p e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1 - e^{-jn\omega_s p}}{jn\omega_s T} \quad (2-38)$$

Используя хорошо известное тригонометрическое соотношение, запишем

$$C_n = \frac{p}{T} \frac{\sin(n\omega_s p/2)}{(n\omega_s p/2)} e^{-jn\omega_s p/2} \quad (2-39)$$

Подставляя соотношение (2-39) в выражение (2-35), имеем

$$p(t) = \frac{p}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_s p/2)}{n\omega_s p/2} e^{-jn\omega_s p/2} e^{jn\omega_s t} \quad (2-40)$$

Подстановка $p(t)$ из (2-40) в (2-33) дает

$$f_p^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n f(t) e^{jn\omega_s t} \quad (2-41)$$

где C_n определяется из соотношения (2-39).

Преобразование Фурье сигнала $f_p^*(t)$ может быть получено в виде

$$F_p^*(j\omega) = \mathcal{F}[f_p^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_p^*(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-42)$$

где \mathcal{F} — операция преобразования Фурье. Используя теорему о смещении преобразования Фурье в области комплексной переменной, которая утверждает, что

$$\mathcal{F}[e^{jn\omega_s t} f(t)] = F(j\omega - jn\omega_s) \quad (2-43)$$

соотношение (2-42) может быть записано как

$$F_p^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F(j\omega - jn\omega_s) \quad (2-44)$$

Соотношению (2-44) можно придать иную форму:

$$F_p^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F(j\omega + jn\omega_s) \quad (2-45)$$

где n изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Важность рассмотрения операции квантования в частотной области иллюстрируется следующим исследованием соотношения (2-45).

Определим коэффициент ряда Фурье в соотношении (2-39) при $n \rightarrow 0$:

$$C_0 = \lim_{n \rightarrow 0} C_n = \frac{p}{T} \quad (2-46)$$

В соотношении (2-45) возьмем только член, соответствующий $n = 0$:

$$F_p^*(j\omega) \Big|_{n=0} = C_0 F(j\omega) = \frac{p}{T} F(j\omega) \quad (2-47)$$

Последнее выражение иллюстрирует важное свойство: гармоники, содержащиеся в непрерывном входном сигнале $f(t)$, представлены и в выход-

ном сигнале квантователя $f_p^*(t)$, однако их амплитуды отличаются в p/T раз.

Для $n \neq 0$ коэффициент C_n является комплексной величиной, но его модуль может быть записан в виде

$$|C_n| = \frac{p}{T} \left| \frac{\sin(n\omega_s p/2)}{n\omega_s p/2} \right| \quad (2-48)$$

Модуль $F_p^*(j\omega)$ равен

$$|F_p^*(j\omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F(j\omega + jn\omega_s) \right| \quad (2-49)$$

Частотный спектр последовательности единичных импульсов $p(t)$ представляет собой зависимость коэффициентов ряда Фурье C_n в зависимости от ω , когда n принимает различные целые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Амплитудный спектр C_n показан на рис. 2.34, а. Видно, что амплитудный спектр C_n не является непрерывной функцией; он представлен равностоящими спектральными линиями при $\omega = n\omega_s$ для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Огибающая спектра описывается правой частью соотношения (2-49).

Это соотношение можно записать также в форме

$$|F_p^*(j\omega)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| |F(j\omega + jn\omega_s)| \quad (2-50)$$

которая может быть использована для иллюстрации амплитудного спектра $F_p^*(j\omega)$. Предположим, что амплитудный спектр непрерывного входного сигнала имеет форму, как показано на рис. 2.34, б. Тогда на основании соотношения (2.50) спектр $F_p^*(j\omega)$ будет иметь вид, показанный на рис. 2.34, в. Следует заметить, что $|F_p^*(j\omega)|$ содержит не только основную составляющую $F(j\omega)$, но и транспонированные составляющие $F(j\omega + jn\omega_s)$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Для получения n -й транспонированной составляющей выходного спектра необходимо умножить $|F(j\omega)|$ на соответствующий коэффициент ряда Фурье $|C_n|$ и сдвинуть его на $n\omega_s$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Следовательно, квантователь можно представить как генератор гармоник, выход которого содержит основную составляющую и все транспонированные составляющие с соответствующими весовыми коэффициентами, отстоящие друг от друга на частоту квантования. Основная полоса частот передает всю информацию, содержащуюся в непрерывном входном сигнале. Эта же информация повторяется в боковых полосах частот, причем амплитудный спектр каждой боковой полосы определяется весовым коэффициентом — модулем соответствующего коэффициента ряда Фурье $|C_n|$. Частотный спектр для $|F_p^*(j\omega)|$, показанный на рис. 2.34, в, получен при условии, что частота квантователя ω_s превышает более чем в 2 раза высшую частотную составляющую сигнала $f(t)$, т.е. $\omega_s > 2\omega_c$. Если $\omega_s < 2\omega_c$, то частотный спектр $|F_p^*(j\omega)|$ будет искажаться вследствие наложения гармоник.

На рис. 2.34, г показано, что если $\omega_s < 2\omega_c$, спектр $|F_p^*(j\omega)|$ в основной полосе частот мало похож на спектр исходного сигнала. Следовательно, теоретически исходный сигнал может быть восстановлен с помощью

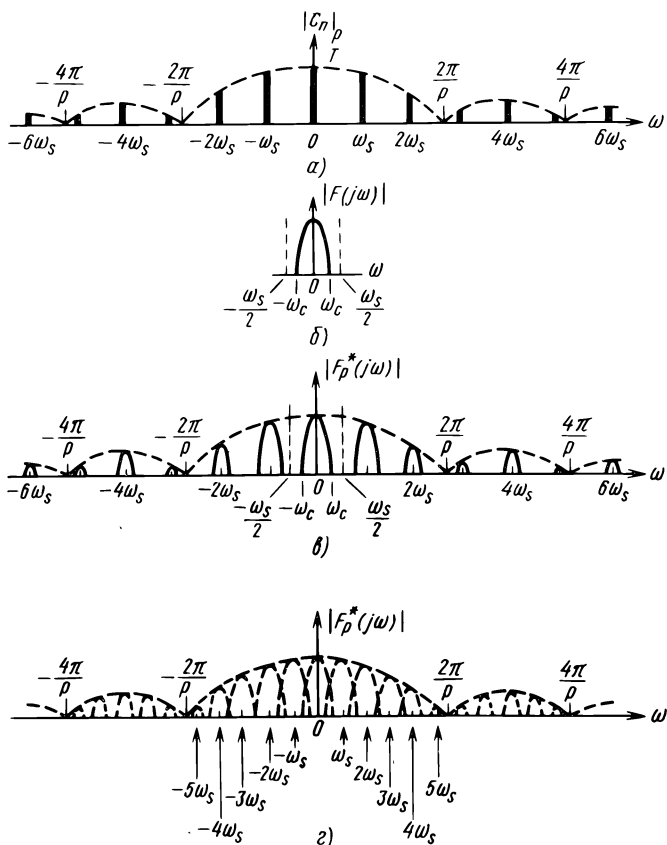


Рис. 2.34. Амплитудные спектры входных и выходных сигналов для квантователя с конечной шириной импульсов:

а — спектр последовательности единичных импульсов $p(t)$; б — спектр непрерывного входного сигнала $f(t)$; в — спектр выходного сигнала квантователя ($\omega_s > 2\omega_c$); г — спектр выходного сигнала квантователя ($\omega_s < 2\omega_c$)

идеального полосового фильтра из спектра, показанного на рис. 2.34, в, тогда как восстановление исходного сигнала из спектра, показанного на рис. 2.34, г, невозможно из-за наложения транспонированных составляющих.

Явление перекрытия высокочастотных составляющих основной составляющей частотного спектра квантованного сигнала иногда называют *наложением*.

Требование, чтобы частота ω_s была по крайней мере в 2 раза больше высшей частотной составляющей сигнала $f(t)$, известно под названием *импульсной теоремы*, которая в общем виде представлена в п. 2.8. Частоту $\omega_s/2$ иногда называют *границной*. В действительности большинство сигналов в системах управления не могут быть представлены в виде ограниченного спектра, как показано на рис. 2.34, б, поэтому эффект наложения

будет иметь место, даже если частоту квантования сделать больше граничной частоты. Физический смысл эффекта наложения и его влияние на характеристики цифровых систем управления будут рассмотрены ниже.

Преобразование Фурье сигнала $f_p^*(t)$, $F_p^*(j\omega)$, определяемое соотношением (2-44) или (2-45), весьма полезно для иллюстрации эффектов квантования в частотной области. Оба выражения показывают, что преобразование Фурье проквантованного сигнала $f_p^*(t)$ может быть получено сдвигом аргумента преобразования Фурье $F(j\omega)$ непрерывного во времени сигнала $f(t)$ на величину $j n \omega_s$ и умножением его на C_n . Однако выражения для $F_p^*(j\omega)$ не удобны для аналитического исследования, так как представлены в виде бесконечных рядов.

Альтернативное описание квантованного сигнала $f_p^*(t)$ в области изображений можно получить с помощью теоремы о свертке в преобразовании Лапласа. Преобразование Лапласа для $f_p^*(t)$ [см. соотношение (2-33)] запишем в виде

$$F_p^*(s) = \mathcal{L}[f_p^*(t)] = \mathcal{L}[f(t)p(t)] \quad (2-51)$$

где буква \mathcal{L} означает операцию преобразования Лапласа.

Соотношение (2-51) можно записать в виде

$$F_p^*(s) = F(s) * P(s) \quad (2-52)$$

где символ $*$ означает операцию свертки в преобразовании Лапласа; $F(s)$ и $P(s)$ — изображения по Лапласу функций $f(t)$ и $p(t)$, соответственно.

Определим сначала изображение по Лапласу функции $p(t)$. Подвергнем преобразованию Лапласа обе части соотношения (2.31), тогда

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-ps}}{s} e^{-kTs} \quad (2-53)$$

Суммирование в выражении (2-53) начинается при $k = 0$, так как одностороннее преобразование Лапласа определяется для $0 \leq t < \infty$. Бесконечный ряд в (2-53) можно записать в компактной форме

$$P(s) = \frac{1 - e^{-ps}}{s(1 - e^{-Ts})} \quad (2-54)$$

Подставляя $P(s)$ из последнего уравнения в выражение (2-52), получим

$$F_p^*(s) = F(s) * \frac{1 - e^{-ps}}{s(1 - e^{-Ts})} \quad (2-55)$$

Из теоремы свертки следует, что

$$F_p^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\xi) P(s - \xi) d\xi \quad (2-56)$$

Тогда, используя выражение (2-54), соотношение (2-55) можно представить в виде

$$F_p^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\xi) \frac{1 - e^{-p(s-\xi)}}{(s - \xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}]} d\xi \quad (2-57)$$

где ξ — переменная интегрирования; $\sigma_1 < c < \sigma - \sigma_2$; $\sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2)$; σ — действительная часть s : σ_1 и σ_2 — абсциссы абсолютной сходимости функций $F(\xi)$ и $P(\xi)$, соответственно. Частично интеграл в выражении (2-57) берется вдоль прямой линии от $\xi = c - j\infty$ до $\xi = c + j\infty$ на комплексной ξ -плоскости (рис. 2-35).

Интеграл в выражении (2-57) может быть определен интегрированием по контуру, образованному линией от $\xi = c - j\infty$ до $\xi = c + j\infty$ и полуокружностью бесконечно большого радиуса, охватывающей правую или левую часть ξ -плоскости. Значение контурного интеграла может быть вычислено с помощью теоремы вычетов теории функций комплексной переменной. Другими словами, выражение (2-57) может быть записано в виде

$$1. F_p^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} F(\xi) \frac{1 - e^{-P(s-\xi)}}{(s-\xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}]} d\xi - \\ - \frac{1}{2\pi j} \oint F(\xi) \frac{1 - e^{-P(s-\xi)}}{(s-\xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}]} d\xi$$

или

$$2. F_p^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_2} F(\xi) \frac{1 - e^{-P(s-\xi)}}{(s-\xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}]} d\xi - \\ - \frac{1}{2\pi j} \oint F(\xi) \frac{1 - e^{-P(s-\xi)}}{(s-\xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}]} d\xi$$

где Γ_1 и Γ_2 — замкнутые контуры, включающие левую и правую часть ξ -плоскости, соответственно. Оба контура показаны на рис. 2.35.

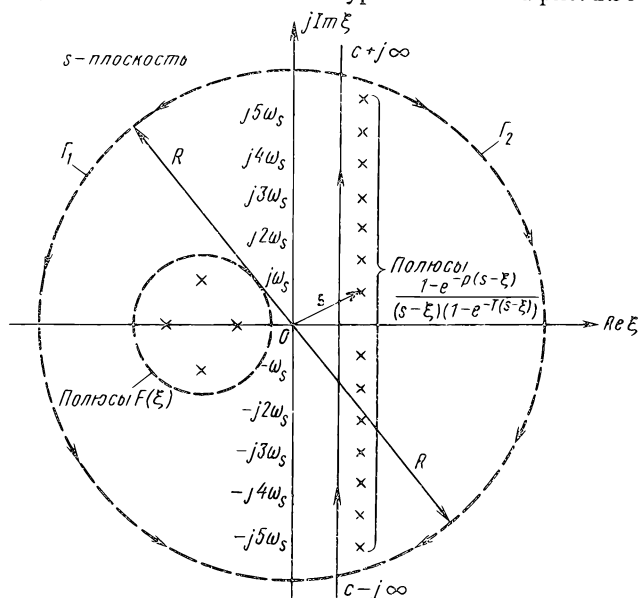


Рис. 2.35. Контуры интегрирования в правой и левой частях ξ -плоскости

Для того чтобы использовать теорему о вычетах, необходимо исследовать полюсы и нули функций $F(\xi)$ и $P(s - \xi)$. Обычно полюсы $F(\xi)$ расположены в левой части ξ -плоскости или на мнимой оси и их число конечно; функция $P(s - \xi)$ имеет простые полюсы

$$\xi_n = s + \frac{2\pi nj}{T} = s + jn\omega_s, \quad -\infty < n (\text{целое}) < \infty, \quad (2-60)$$

где T — период квантования; ω_s — частота квантования. Из выражения (2-60) следует, что число полюсов $P(s - \xi)$ бесконечно, и они расположены на ξ -плоскости вдоль прямой $\text{Re}(\xi) = \text{Re}(s)$ с интервалами $n\omega_s$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Типичное расположение полюсов $F(\xi)$ и $P(s - \xi)$ показано на рис. 2.35. Если функция $F(\xi)$ имеет число полюсов хотя бы на один больше, чем нулей, т.е.

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} F(\xi) = 0 \quad (2-61)$$

то вторые члены в правой части выражений (2-58) и (2-59) равны нулю, поскольку интегралы вдоль полуокружностей бесконечного радиуса исчезают. Тогда уравнение (2-58) принимает вид

$$F_p^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} F(\xi) \frac{1 - e^{-P(s-\xi)}}{(s-\xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}]} d\xi \quad (2-62)$$

Из теоремы о вычетах следует, что значение контурного интеграла (2-62) равно сумме вычетов подынтегральной функции, определенных в тех ее полюсах, которые попадают внутрь замкнутого контура Γ_1 . Следовательно,

$$F_p^*(s) = \sum \text{Res} \left[F(\xi) \frac{1 - e^{-P(s-\xi)}}{(s-\xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}]} \right] \text{ в полюсах } F(s). \quad (2-63)$$

Если предположить, что $F(\xi)$ является рациональной функцией с k простыми полюсами, то выражение (2-63) примет вид

$$F_p^*(s) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \frac{1 - e^{-P(s-\xi_n)}}{(s-\xi_n)[1 - e^{-T(s-\xi_n)}]} \quad (2-64)$$

где

$$F(\xi) = \frac{N(\xi)}{D(\xi)} \quad (2-65)$$

$$D'(\xi_n) = \left. \frac{dD(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_n} \quad (2-66)$$

ξ_n — n -й полюс $F(\xi)$; $n = 1, 2, \dots, k$.

Предположим, что $F(\xi)$ — рациональная алгебраическая функция, имеющая k различных полюсов s_1, s_2, \dots, s_k , причем s_n имеет кратность m_n , $n = 1, 2, \dots, k$, $m_n \geq 1$. Тогда

$$F_p^*(s) = F(s) * P(s) = \sum_{n=1}^k \sum_{i=1}^{m_n} \frac{(-1)^{m_n-i} K_{ni}}{(m_n-i)!} \left. \frac{\partial^{m_n-i}}{\partial s^{m_n-i}} P(s) \right|_{s=s-s_n} \quad (2-67)$$

где

$$K_{ni} = \frac{1}{(i-1)!} \left. \frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}} \left[(s-s_n)^{m_n} F(s) \right] \right|_{s=s_n} \quad (2-68)$$

Теперь рассмотрим контурный интеграл (2-59), который вычисляется по контуру Γ_2 . Если выполняется условие (2-61), то выражение (2-59) запишем как

$$F_p^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_2} F(\xi) \frac{1 - e^{-p(s-\xi)}}{(s-\xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}]} d\xi \quad (2-69)$$

Применяя теорему о вычетах, запишем соотношение (2-69) в виде

$$F_p^*(s) = - \sum \text{Res} F(\xi) \frac{1 - e^{-p(s-\xi)}}{(s-\xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}]} \quad (2-70)$$

$$\text{в полюсах } \frac{1 - e^{-p(s-\xi)}}{(s-\xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}]},$$

где минус перед знаком суммы подчеркивает, что обход вдоль контура интегрирования Γ_2 производится по часовой стрелке. Так как функция $P(s-\xi)$ имеет только простые полюсы, лежащие с периодическими интервалами вдоль прямой $\text{Re}(\xi) = \text{Re}(s)$ на ξ -плоскости, выражение (2-70) станет равным

$$F_p^*(s) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} F(\xi_n) \quad (2-71)$$

где $\xi_n = s + jn\omega_s$ — полюсы $P(s-\xi)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В этом же выражении

$$N(\xi_n) = 1 - e^{-p(s-\xi)} \Big|_{\xi=\xi_n=s+jn\omega_s} = 1 - e^{jn\omega_s p} \quad (2-72)$$

$$D'(\xi_n) = \frac{d}{d\xi} \left[(s-\xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}] \right] \Big|_{\xi=s+jn\omega_s} = jn\omega_s T \quad (2-73)$$

Следовательно, выражение (2-71) примет вид

$$F_p^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{jn\omega_s p}}{-jn\omega_s T} F(s + jn\omega_s) \quad (2-74)$$

Заметим, что если s заменить на $j\omega$, выражение (2-74) становится идентичным соотношению (2.45), которое получено другим методом.

Итак, мы получили несколько альтернативных выражений для опи-

сания передаточных свойств квантователя с конечной шириной импульсов. Приведем эти выражения еще раз в качестве справочных данных.

Преобразование Фурье:

$$F_p^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p}{T} \frac{\sin(n\omega_s p/2)}{n\omega_s p/2} e^{-jn\omega_s p/2} F(j\omega + jn\omega_s) \quad (2-45)$$

Преобразование Лапласа:

$$F_p^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p}{T} \frac{\sin(n\omega_s p/2)}{n\omega_s p/2} e^{-jn\omega_s p/2} F(s + jn\omega_s) \quad (2-74)$$

Преобразование Лапласа [$F(s)$ имеет k простых полюсов]:

$$F_p^*(s) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \frac{1 - e^{-p(s-\xi_n)}}{(s - \xi_n)[1 - e^{-T(s-\xi_n)}]} \quad (2-64)$$

$$F(\xi) = N(\xi)/D(\xi)$$

$$D'(\xi_n) = \left. \frac{dD(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_n}$$

где ξ_n — n -й простой полюс $F(\xi)$, $n = 1, 2, \dots, k$.

Преобразование Лапласа [$F(s)$ имеет k полюсов с кратностью $m_n \geq 1$]:

$$F_p^*(s) = \sum_{n=1}^k \sum_{i=1}^{m_n} \frac{(-1)^{m_n-i} K_{ni}}{(m_n - i)!} \frac{\partial^{m_n-i}}{\partial s^{m_n-i}} P(s) \bigg|_{s=s-s_n} \quad (2-67)$$

$$K_{ni} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}} (s - s_n)^{m_n} F(s) \bigg|_{s=s_n} \quad (2-68)$$

Идеальный квантователь. При анализе работы квантователя, если время выборки p много меньше периода квантования T и наименьшей постоянной времени входного сигнала $f(t)$, выходной сигнал квантователя с конечной шириной импульсов $f_p^*(t)$ может быть представлен следующей последовательностью прямоугольных импульсов:

$$f_p^*(t) = \begin{cases} f(kT), & kT \leq t < kT + p \\ 0, & kT + p \leq t < (k+1)T, \end{cases} \quad (2-75)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Запишем $f_p^*(t)$ в виде

$$f_p^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) [u_s(t - kT) - u_s(t - kT - p)] \quad (2-76)$$

где $u_s(t)$ — единичная ступенчатая функция.

Преобразовывая по Лапласу обе части выражения (2-76), получим

$$F_p^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \left[\frac{1 - e^{-ps}}{s} \right] e^{-kTs} \quad (2-77)$$

Если время выборки p очень мало, то

$$1 - e^{-ps} = 1 - \left[1 - ps + \frac{(ps)^2}{2!} - \dots \right] \cong ps \quad (2-78)$$

Тогда выражение (2-77) примет вид

$$F_p^*(s) \cong p \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} \quad (2-79)$$

что соответствует оригиналу

$$f_p^*(t) \cong p \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) \quad (2-80)$$

где $\delta(t)$ — единичная импульсная функция.

Правая часть выражения (2-80) представляет собой последовательность импульсов с площадью импульса $pf(kT)$ при $t = kT$. Это означает, что квантователь с конечной шириной импульсов может быть заменен "импульсным модулятором" (см. рис. 2.30) с несущим сигналом вида

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (2-81)$$

или *идеальным квантователем*, выход которого соединен с аттенюатором (коэффициент ослабления p), как показано на рис. 2.36. Квантователи (а) и (б) эквивалентны, если p много меньше периода квантования T и наименьшей постоянной времени $f(t)$. Таким образом, идеальный квантователь может быть определен как квантователь с нулевым временем выборки, который замыкается и размыкается мгновенно через каждые T секунд. Заметим, что аттенюатор необходим только в том случае, если не применяется устройство фиксации.

Выходной сигнал идеального квантователя можно записать в форме

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) = f(t) \delta_T(t) \quad (2-82)$$

где $f(t)$ — входной сигнал квантователя. Предполагается, что квантование

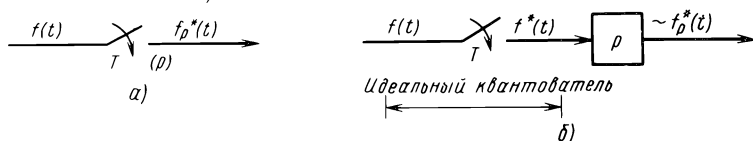


Рис. 2.36. Квантователи:

а — с конечной длительностью импульсов; б — идеальный, выход которого соединен с аттенюатором p

начинается при $t = 0$. Подвергая обе части выражения (2-82) преобразованию Лапласа, получим

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \quad (2-83)$$

что является изображением по Лапласу выходного сигнала идеального квантователя.

На рис. 2.37 показаны типичные входной и выходной сигналы идеального квантователя. Выходом идеального квантователя является последовательность импульсов, площадь которых равна значению входного сигнала в соответствующие моменты замыкания. Так как импульсная функция по определению имеет нулевую длительность и бесконечную амплитуду, импульсы на рис. 2.37 представлены стрелками, длина которых соответствует площади импульсов. Используя (2-74), можно получить выражение для $F^*(s)$ в иной форме. Так как $\delta_T(t)$ и $p(t)$ связаны соотношением

$$\delta_T(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} p(t) \quad (2-84)$$

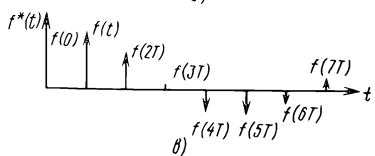
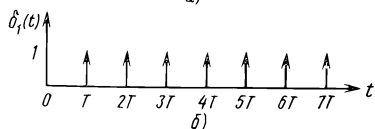
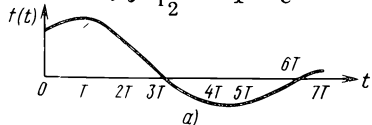
то

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} F_p^*(s) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{jn\omega_s p}}{-jn\omega_s T} F(s + jn\omega_s) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) \end{aligned} \quad (2-85)$$

Однако соотношение (2-74) получаем интегрированием вдоль контура Γ_2 , который охватывает правую половину ξ -плоскости. Поэтому важно проверить сходимость интеграла, который берем вдоль полуокружности бесконечного радиуса. Используя выражение (2-69), найдем предел $F_p^*(s)/p$ при $p \rightarrow 0$:

$$F^*(s) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi j p} \oint_{\Gamma_2} F(\xi) \frac{1 - e^{-p(s-\xi)}}{(s-\xi)[1 - e^{-T(s-\xi)}]} d\xi = \quad (2-86)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_2} F(\xi) \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi$$



Поскольку функция $1/[1 - e^{-T(s-\xi)}]$ имеет простой полюс в бесконечности на ξ -плоскости, то в этом случае часть интеграла в выражении (2-86), которую мы берем вдоль полуокружности бесконечного радиуса в правой половине ξ -плоскости, может и не стремиться к нулю. Действительно,

Рис. 2.37. Сигналы идеального квантователя:

a — входной; b — несущий; $в$ — выходной
 $f^*(t) = f(t) \delta_T(t)$

если степень знаменателя $F(\xi)$ по ξ превышает степень числителя не более, чем на 2, интеграл вдоль полуокружности может иметь конечное значение или даже может расходиться. Следовательно, выражение (2-85) справедливо только в том случае, если у функции $F(s)$ число полюсов на 2 или более превышает число нулей. Другими словами, входной сигнал $f(t)$ не должен иметь разрыва при $t = 0$.

Более общее выражение, чем (2-85), может быть получено для $F^*(s)$, если определить $\delta_T(t)$ как четную функцию: при $t = 0$ импульс имеет амплитуду $1/p$ и длительность от $t = -p/2$ до $t = p/2$ для $p \rightarrow 0$. Пусть ряд Фурье для $\delta_T(t)$ при всех значениях t определяется как

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t}$$

где $C_n = 1/T$, что может быть легко показано. Тогда, при $t \geq 0$ имеем

$$\delta_T(t) = \frac{1}{2} \delta(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_s t} \quad (2-87)$$

Наличие члена $\delta(t)/2$ в правой части выражения (2-87) объясняется тем, что для $t > 0$ рассматривалась только половина импульса. Теперь подставим выражение (2-87) в соотношение (2-82), взяв преобразование Лапласа

$$F^*(s) = \frac{f(0^+)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) \quad (2-88)$$

В случае идеального квантователя выражение для $F^*(s)$ аналогично выражению (2-64) и для простых полюсов имеет форму

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{-T(s - \xi_n)}} \quad (2-89)$$

где $N(\xi_n)$ и $D'(\xi_n)$ определяются выражениями (2-65) и (2-66), соответственно.

Проиллюстрируем применение выражений (2-83), (2-85), (2-88) и (2-89) на примере.

Пример 2.1. Предположим, что единичная ступенчатая функция $f(t) = U_s(t)$ квантуется идеальным квантователем через каждые T секунд. Из выражения (2-82) следует формула для выходного сигнала идеального квантователя

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (2-90)$$

Преобразование Лапласа функции $f^*(t)$

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \quad \text{для } |e^{-Ts}| < 1. \quad (2-91)$$

Теперь применим выражение (2-89). Имея

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s} \quad (2-92)$$

поскольку $N(s) = 1$ и $D'(s) = 1$, из (2-89) получим

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \quad (2-93)$$

что совпадает с результатом (2.91).

Тот же результат, что и в выражении (2-93), можно получить, используя соотношение (2-88), хотя математически это гораздо сложнее. По этой причине выражение (2-88) редко используется для определения решения $F^*(s)$ в компактной форме.

Соотношение, схожее с выражением (2-67), может быть получено при наличии кратного полюса в случае идеального квантователя.

В заключение приведем математические выражения для описания идеального квантователя.

Представление в виде бесконечной последовательности импульсов во временной области:

Временная область

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) \quad (2-82)$$

Преобразование Лапласа

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \quad (2-83)$$

Представление в виде бесконечного ряда в частотной области

$$F^*(s) = \frac{f(0^+)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) \quad (2-88)$$

Преобразование Лапласа [$F(s)$ имеет k простых полюсов]

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi_n)}} \quad (2-89)$$

$$F(\xi) = N(\xi)/D(\xi)$$

$$D'(\xi_n) = \left. \frac{dD(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_n}$$

где ξ_n — n -й простой полюс $F(\xi)$, $n = 1, 2, \dots, k$.

Преобразование Лапласа [$F(s)$ имеет k полюсов с кратностью $m_n \geq 1$]

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^k \sum_{i=1}^{m_n} \frac{(-1)^{m_n-i} K_{ni}}{(m_n-i)!} \frac{\partial^{m_n-i}}{\partial s^{m_n-i}} \Delta_T(s) \Bigg|_{s=s-s_n} \quad (2-94)$$

$$K_{ni} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}} \left[(s-s_n)^{m_n} F(s) \right] \Bigg|_{s=s_n} \quad (2-95)$$

$$\Delta_T(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \quad (2-96)$$

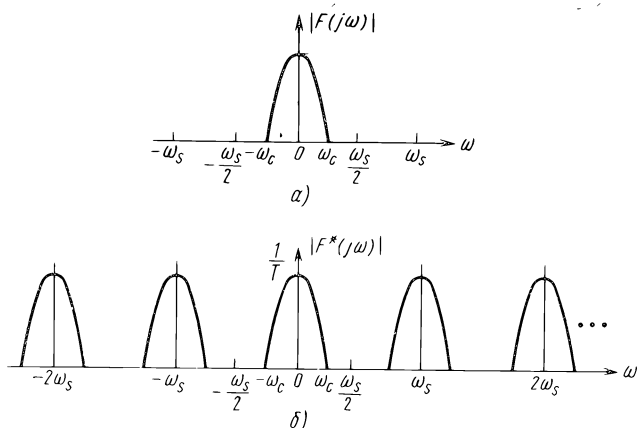


Рис. 2.38. Амплитудные спектры входного и выходного сигналов идеального квантователя:

a — амплитудный спектр непрерывного входного сигнала $f(t)$; b — амплитудный спектр выходного сигнала ($\omega_s > 2\omega_c$)

Пример 2.2. В качестве иллюстрации применения соотношения (2-94) в случае кратных полюсов, рассмотрим преобразование единичной линейной функции идеальным квантователем. В этом случае

$$f(t) = tu_s(t) \quad (2-97)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \quad (2-98)$$

Так как $F(s)$ имеет двойной полюс $s = 0$, то для определения $F^*(s)$ может быть использовано выражение (2-94).

Одному полюсу с кратностью 2 соответствует $k = 1$ и $m_n = m_1 = 2$. Из соотношения (2-95) следует

$$K_{11} = s^2 F(s) \Big|_{s=0} = 1 \quad (2-99)$$

$$K_{12} = \frac{\partial}{\partial s} s^2 F(s) \Big|_{s=0} = 0 \quad (2-100)$$

Окончательно из (2-94) получим

$$F^*(s) = (-1)K_{11} \left[\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \right] = \frac{T e^{-Ts}}{(1 - e^{-Ts})^2} \quad (2-101)$$

Вообще соотношения (2-83), (2-89) и (2-94) весьма полезны в случае определения преобразования Лапласа для сигнала, который проходит через идеальный квантователь. Соотношение (2-88) удобно использовать при построении частотных характеристик и частотном анализе.

Анализ соотношений (2-85) и (2-88) еще раз показывает, что идеальный квантователь является генератором гармоник. На выходе идеального квантователя воспроизводится как спектр непрерывного входного сигнала $f(t)$, так и дополнительные составляющие на частотах, кратных частоте квантования, причем амплитуды всех гармоник изменяются в $1/T$ раз. Если предположить, что амплитудный спектр непрерывного входного сигнала имеет вид, показанный на рис. 2.38, a , то соответствующий ампли-

тудный спектр квантованного сигнала $f^*(t)$ при $\omega_s > 2\omega_c$ будет иметь вид, показанный на рис. 2.38, б, где ω_s — частота квантования; ω_c — наибольшая частота, содержащаяся в $f(t)$. Если частота квантования будет меньше $2\omega_c$, то в выходном частотном спектре появятся искажения из-за наложения дополнительных боковых полос.

2.8. ИМПУЛЬСНАЯ ТЕОРЕМА

Простое физическое рассуждение, сделанное в предыдущем параграфе относительно минимальной частоты квантования, необходимой для полного восстановления непрерывного сигнала, фактически отвечает на основной и достаточно важный вопрос о правильном выборе частоты квантования, если квантование применяется намеренно. При использовании в данной системе квантования часто задают вопрос: каковы ограничения на частоту квантования? Теоретически верхнего предела частоты квантования не существует, хотя любой реальный квантователь должен иметь конечную максимальную частоту преобразования. Теоретически, когда частота квантования достигает бесконечности, сигнал превращается в непрерывный. При рассмотрении идеального квантования необходимо пользоваться понятием бесконечной частоты квантования с осторожностью, так как в этом случае импульсы практически сливаются. Представляет интерес нижний предел частоты квантования. В этом случае интуитивно ясно, что если непрерывный сигнал изменяется во времени быстро, то квантуя его со слишком малой скоростью, можно потерять важную информацию о сигнале между моментами выборки. Следовательно, может оказаться невозможным восстановление исходного сигнала по информации, содержащейся в дискретных выборках.

Из амплитудных спектров, представленных на рис. 2.38, можно заключить, что наименьшая частота квантования для возможности восстановления сигнала равна $2\omega_c$, где ω_c — наивысшая частота, содержащаяся в спектре $f(t)$. Формально это положение известно как *импульсная теорема*. Теорема утверждает, что *если сигнал не содержит частот выше, чем ω_c радиан в секунду, он полностью описывается своими значениями, измеренными в дискретные моменты времени с интервалом $T = (1/2) \times (2\pi/\omega_c)$ секунд*. Однако, реально на выбор частоты квантования влияют требование устойчивости замкнутых систем и другие практические соображения, которые могут сделать необходимым квантование сигнала с частотой более высокой, чем теоретический минимум. Более того, сигналы с ограниченным спектром физически не существуют в системах связи или управления. Все физические сигналы, существующие в реальном мире, содержат гармоники, покрывающие широкий диапазон частот. Но вследствие того, что амплитуды высокочастотных составляющих значительно ослаблены, предполагается, что сигнал имеет ограниченный спектр. Поэтому на практике эти факторы в сочетании с нереализуемостью идеального низкочастотного фильтра делают невозможным точное воспроизведение непрерывного сигнала по его дискретным выборкам, даже если выполняются условия импульсной теоремы.

Следует привести интересное замечание по поводу импульсной теоремы: сигнал все же может быть полностью определен при квантовании его со скоростью меньшей чем $2\omega_c$ радиан в секунду, если в моменты выборки известна информация как об амплитуде сигнала, так и о его производных. Фогель [10] и др. доказали, что если сигнал не содержит частот больших, чем ω_c радиан в секунду, он полностью определяется значениями $f^{(n)}(kT)$, $f^{(n-1)}(kT)$, ..., $f^{(1)}(kT)$ и $f(kT)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), измеренными в дискретные моменты времени с интервалом $T = (1/2) \times (n+1) (2\pi/\omega_c)$ секунд, где

$$f^{(n)}(kT) = \left. \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right|_{t=kT} \quad (2-102)$$

Это означает, что если кроме значений $f(kT)$ в моменты $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) известны значения первой производной $f(t)$, $f^{(1)}(kT)$, то максимально допустимый период квантования $T = 2\pi/\omega_c$. Это вдвое больше периода, необходимого при измерении только $f(kT)$. Добавление каждой последующей производной позволяет увеличивать интервал между выборками до величины $T = (1/2) (n+1) (2\pi/\omega_c)$, где n — порядок высшей производной, при условии, что для каждой выборки все производные низших порядков известны.

2.9. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА $F^*(s)$ НА s -ПЛОСКОСТИ

Два важных свойства выходного сигнала идеального квантователя следуют из выражения (2-85).

1. $F^*(s)$ является периодической функцией с периодом $j\omega_s$.

То, что $F^*(s)$ обладает свойством периодичности, очевидно из выражения (2.85) и рис. 2.38. Аналитически это можно показать путем подстановки $s + jm\omega_s$ вместо s в (2-83), где m — целое число. Подстановка дает

$$F^*(s + jm\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kT(s + jm\omega_s)} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} \quad (2-103)$$

так как $e^{-jkm\omega_s T} = 1$ для целых k и m . Следовательно,

$$F^*(s + jm\omega_s) = F^*(s) \quad (2-104)$$

где m — целое число. Другими словами, для любой данной точки $s = s_1$ на s -плоскости функция $F^*(s)$ имеет одинаковое значение для всех периодических точек $s = s_1 + jm\omega_s$, где m — любое целое число. Это свойство хорошо иллюстрируется рис. 2.39. Как показано на рисунке, s -плоскость разделена на бесконечное число периодических полос. Полоса между $\omega = -\omega_s/2$ и $\omega = \omega_s/2$ называется *основной*, а все остальные, соответствующие более высоким частотам, обозначаются как *дополнительные полосы*. Функция $F^*(s)$ имеет одно и то же значение для всех конгруэнтных точек в различных периодических полосах.

2. Если функция $F(s)$ имеет полюс $s = s_1$, то $F^*(s)$ имеет полюсы $s = s_1 + jm\omega_s$ для любого целого m (от $-\infty$ до $+\infty$).

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из выра-

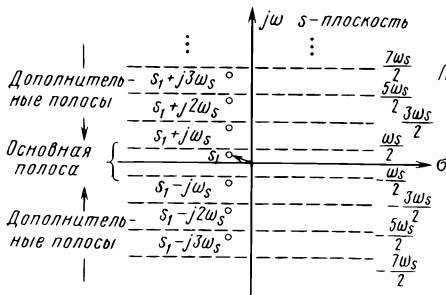


Рис. 2.39. Периодические полосы на s -плоскости

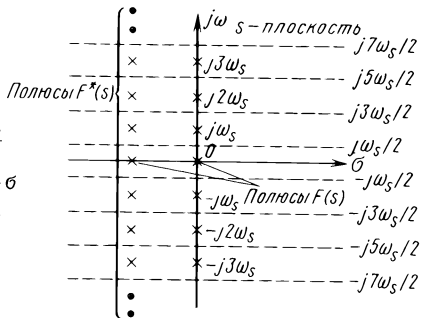


Рис. 2.40. Периодичность полюсов $F^*(s)$

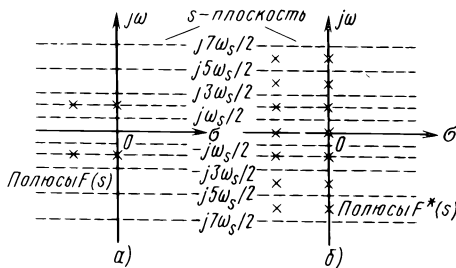


Рис. 2.41. Расположение полюсов $F(s)$ и $F^*(s)$, поясняющее эффект отображения

жения (2-85). Типичный набор полюсов $F(s)$ и соответствующих полюсов $F^*(s)$ показан на рис. 2.40.

Свойство периодичности $F^*(s)$, которое иллюстрируется на рис. 2.40, может быть ис-

пользовано для объяснения важности удовлетворения условий импульсной теоремы и смысла основной частоты. На рис. 2.40 ясно видно, что в результате квантования полюсы $F(s)$ "отображаются" относительно частот, в целое число раз больших основной частоты $\omega_s/2$, образуя при этом полюсы $F^*(s)$. Если полюсы $F(s)$ лежат внутри основной полосы частот $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$, что соответствует частоте квантования по меньшей мере в 2 раза большей максимальной частоты, содержащейся в $F(s)$, то эти полюсы в результате процесса квантования однозначно транспонируются в дополнительные полосы. Тогда, по крайней мере в принципе, идеальный фильтр с полосой пропускания $|\omega_c| < \omega_s/2$ исключил бы все гармонические полюсы, так что окончательный результат соответствовал бы в точности $F(s)$.

В то же время предположим, что условия импульсной теоремы не выполняются, так что полюсы данной функции $F(s)$ по отношению к основной частоте расположены, как показано на рис. 2.41, а. Дискретная функция $F^*(s)$ (рис. 2.41, б) будет иметь теперь полюсы, которые отображаются обратно на основную полосу. При проектировании системы управления такое обратное отображение полюсов в область низких частот может вызвать дополнительные трудности. Точно так же, при рассмотрении непрерывного сигнала, если импульсная теорема не удовлетворяется, обратное отображение полюсов $F(s)$ в основную полосу препятствовало бы восстановлению исходного сигнала из $F^*(s)$ даже с помощью идеального фильтра.

2.10. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО ДИСКРЕТНЫМ ВЫБОРКАМ

В большинстве дискретных или цифровых систем управления высшие гармоники в сигнале $f^*(t)$, которые возникают вследствие операции квантования по времени, должны быть отфильтрованы до того, как сигнал будет приложен к непрерывной части системы. Большинство систем управления содержит элементы, которые спроектированы в расчете на непрерывные входные сигналы, поэтому необходимо использовать сглаживающие импульсных сигналов. В противном случае аналоговые элементы систем могут подвергаться чрезмерному износу. Для сопряжения цифровых и аналоговых элементов часто используют устройство восстановления данных, или, проще говоря, фильтр. Схема хранения, используемая в сочетании с операцией квантования, рассмотренная в п. 2.4, есть, по существу, наиболее общий тип фильтрующего устройства в дискретных системах. Кроме того, большинство промышленных устройств выборки и хранения выпускаются как единое изделие, и операция выборки выделена нами только для удобства математического описания, поэтому для завершения описания операции выборки и хранения в целом теперь получим модель запоминающего устройства.

Для изучения процесса восстановления данных предположим, что идеальный квантователь имеет частоту ω_s , которая по крайней мере в 2 раза больше максимальной частоты, содержащейся в непрерывном входном сигнале. На рис. 2.42 показан амплитудный спектр $F^*(s)$. Из рисунка ясно, что для получения дубликата непрерывного сигнала квантованный по времени сигнал должен быть пропущен через идеальный низкочастотный фильтр с амплитудной характеристикой, показанной на рис. 2.43. К сожалению, идеальная характеристика фильтра физически нереализуема, так как хорошо известно, что в этом случае переходная функция должна начинаться до приложения входного сигнала. Однако даже если бы можно было реализовать идеальный фильтр, то, как упоминалось выше, точное воспроизведение непрерывного сигнала основано на предположении, что $f(t)$ имеет ограниченный спектр. Поэтому во всех практических случаях невозможно точно восстановить непрерывный сигнал, если он квантован по времени. Самое лучшее, что можно сделать при восстановлении данных, это постараться как можно точнее аппроксимировать исходную функцию времени. Более того, как будет показано в этой главе, лучшая аппроксимация исходного сигнала требует в общем случае большей временной за-

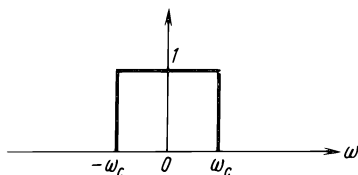
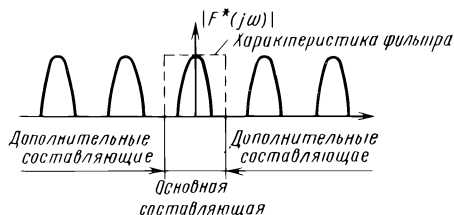


Рис. 2.42. Восстановление непрерывного сигнала по дискретным выборкам с использованием идеального низкочастотного фильтра

Рис. 2.43. Амплитудная характеристика идеального фильтра

держки, что нежелательно с точки зрения ее неблагоприятного влияния на устойчивость системы. Следовательно, проектирование устройства восстановления данных обычно подразумевает компромисс между требованиями устойчивости и желанием получить точную аппроксимацию непрерывного сигнала.

Задача заключается в том, чтобы при имеющемся ряде чисел $f(0)$, $f(T)$, ..., $f(kT)$, ... , или последовательности импульсов с амплитудой в моменты времени $t = kT$, равной $f(kT)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$, восстановить непрерывный сигнал $f(t)$, $t \geq 0$, по информации, содержащейся в этих дискретных данных. Этот процесс может рассматриваться как процесс экстраполяции, так как непрерывный сигнал должен быть восстановлен на основании информации, доступной только в предшествующие моменты выборки. Например, исходный сигнал $f(t)$ между двумя последовательными моментами выборки kT и $(k+1)T$ должен оцениваться на основании значений $f(t)$ во все предшествующие моменты выборки kT , $(k-1)T$, $(k-2)T$, ..., 0 ; т.е. по значениям $f(kT)$, $f[(k-1)T]$, $f[(k-2)T]$, ..., $f(0)$.

Известный метод получения требуемой аппроксимации основан на разложении $f(t)$ в ряд на интервале между моментами выборки kT и $(k+1)T$, т.е.

$$f_k(t) = f(kT) + f'(kT)(t - kT) + \frac{f''(kT)}{2!}(t - kT)^2 + \dots \quad (2-105)$$

где

$$f_k(t) = f(t) \text{ для } kT \leq t < (k+1)T; \quad (2-106)$$

$$f'(kT) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT} \quad (2-107)$$

$$f''(kT) = \left. \frac{d^2f(t)}{dt^2} \right|_{t=kT} \quad (2-108)$$

Для того чтобы вычислить коэффициенты ряда, заданного выражением (2-105), производные функции $f(t)$ должны быть получены в моменты выборки. Поскольку единственная доступная информация об $f(t)$ — это ее значения в моменты выборки, то производные $f(t)$ должны оцениваться по значениям $f(kT)$. Простое выражение, включающее только два дискретных значения, дает оценку первой производной $f(t)$ в момент $t = kT$ в виде

$$f'(kT) = \frac{1}{T} [f(kT) - f(k-1)T] \quad (2-109)$$

Аппроксимированное значение второй производной $f(t)$ при $t = kT$ равно

$$f''(kT) = \frac{1}{T} [f'(kT) - f'[(k-1)T]] \quad (2-110)$$

Подстановка (2-109) в (2-110) дает

$$f''(kT) = \frac{1}{T^2} [f(kT) - 2f[(k-1)T] + f[(k-2)T]] \quad (2-111)$$

Из аппроксимированных значений $f'(kT)$ и $f''(kT)$ видно, что чем выше порядок производной, которую нужно аппроксимировать, тем большее число требуется предшествующих выборок. В самом деле, можно легко показать, что число предшествующих выборок, необходимых для аппроксимации значения $f^{(n)}(kT)$, равно $n + 1$. Таким образом, описанное выше экстраполирующее устройство состоит, по существу, из набора временных задержек, а число которых зависит от точности оценки временной функции $f(t)$. Неблагоприятное влияние временного запаздывания на устойчивость систем управления с обратной связью хорошо известно. Поэтому попытка использовать производную более высокого порядка для более точной экстраполяции часто наталкивается на серьезные трудности в сохранении устойчивости системы. Более того, экстраполяция высокого порядка требует также сложных схемотехнических решений и приводит к высоким затратам при их реализации. По этим двум причинам на практике очень часто используется только первый член выражения (2-105).

Устройство, в котором реализован только член $f(kT)$ из выражения (2-105) для временного интервала $kT \leq t < (k + 1)T$, обычно называют *экстраполятором нулевого порядка*, так как используемый полином имеет нулевой порядок. Подобное устройство также широко известно как *фиксатор нулевого порядка*, поскольку оно фиксирует значение предыдущей выборки в течение данного периода квантования до следующей выборки. Фиксатор нулевого порядка имеет точно такие же характеристики, как схема фиксации, рассмотренная в п. 2.4. Устройство, которое реализует первые два члена выражения (2-105), называется *фиксатором первого порядка*, так как реализуемый им полином имеет первый порядок. Математическое описание фиксатора нулевого порядка рассмотрено ниже.

2.11. ФИКСАТОР НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Если для аппроксимации сигнала между двумя последовательными выборками используется только первый член ряда (2-105), то реализованное устройство называется фиксатором нулевого порядка. Этот тип фиксатора может быть применен для моделирования операции фиксации в устройстве выборки и хранения. Согласно выражению (2-105) в этом случае

$$f_k(t) = f(kT) \quad (2-112)$$

Выражение (2-112) определяет импульсную переходную функцию экстраполятора нулевого порядка, входной и выходной сигналы которого показаны на рис. 2.44. Работа квантователя и фиксатора нулевого порядка иллюстрируется с помощью простой схемы, показанной на рис. 2.45. Предполагается, что конденсатор мгновенно заряжается до напряжения $f(kT)$ в момент выборки $t = kT$. (В действительности скорость заряда конденсатора определяется его емкостью и сопротивлением источника). Так как ключ квантователя разомкнут в течение периода квантования T , то конденсатор сохраняет заряд до момента прихода следующего импульса от квантователя. Предполагается, что входное сопротивление усилителя равно бесконечности, поэтому разряд конденсатора отсутствует.

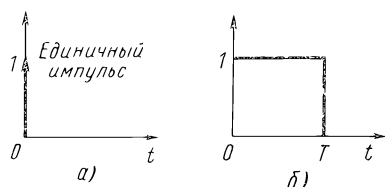


Рис. 2.44. Единичный импульс на входе фиксатора нулевого порядка (а) и реакция фиксатора нулевого порядка на импульсное воздействие (б)

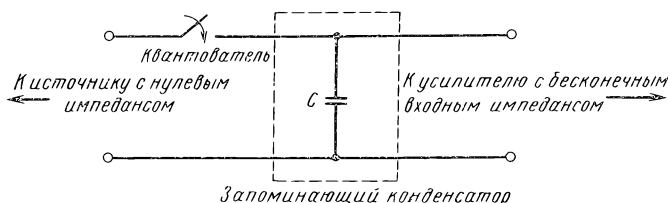


Рис. 2.45. Упрощенная схема квантователя и фиксатора нулевого порядка

Таким образом, фиксатор нулевого порядка преобразует входные импульсы в последовательность прямоугольных импульсов длительностью T . Однако на практике усилитель имеет конечное входное сопротивление, поэтому в действительности форма выходного сигнала фиксатора нулевого порядка соответствует не прямоугольным импульсам, а последовательности импульсов, амплитуда которых уменьшается экспоненциально с большой постоянной времени. Входной и выходной сигналы идеального фиксатора нулевого порядка показаны на рис. 2.46. Заметим, что выходной сигнал фиксатора нулевого порядка является ступенчатой аппроксимацией непрерывного сигнала, и увеличение частоты квантования приведет к увеличению точности этой аппроксимации.

Реакция фиксатора нулевого порядка на импульсное воздействие, что следует из рис. 2.44, может быть записана в виде

$$g_{h0}(t) = u_s(t) - u_s(t - T) \quad (2-113)$$

где $u_s(t)$ — единичная ступенчатая функция. Тогда передаточная функция фиксатора нулевого порядка

Рис. 2.46. Временные процессы в фиксаторе нулевого порядка:

а — входной $f(t)$ и квантованный $f^*(t)$ сигналы; б — выходной сигнал

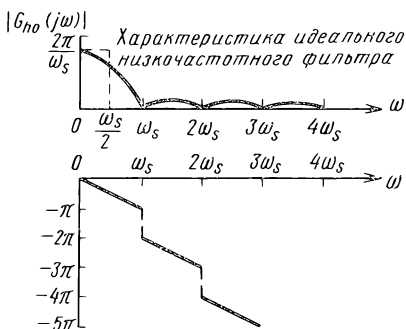
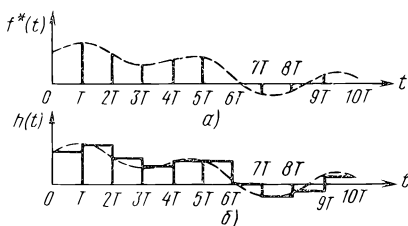


Рис. 2.47. Амплитудная и фазовая характеристики фиксатора нулевого порядка

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (2-114)$$

Заменяя s на $j\omega$ в последнем выражении, получим

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \quad (2-115)$$

Выражение (2-115) может быть записано в виде:

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{2e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{j2\omega} = \frac{2\sin(\omega T/2)e^{-j\omega T/2}}{\omega} \quad (2-116)$$

или

$$G_{h0}(j\omega) = T \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega T/2)} e^{-j\omega T/2} \quad (2-117)$$

Поскольку T — период квантования и $T = 2\pi/\omega_s$, где ω_s — частота квантования, рад/с, то выражение (2-117) может быть представлено как

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{\sin\pi(\omega/\omega_s)}{(\omega\pi/\omega_s)} e^{-j\pi(\omega/\omega_s)} \quad (2-118)$$

Амплитудная и фазовая характеристики фиксатора нулевого порядка показаны на рис. 2.47. На рисунке видно, что фиксатор нулевого порядка обладает свойствами низкочастотного фильтра. Однако при сравнении характеристик фиксатора и идеального фильтра (см. рис. 2.43) видно, что амплитудная характеристика фиксатора нулевого порядка обращается в нуль при $\omega = \omega_s$ вместо того, чтобы резко спадать до нуля при $\omega_s/2$. При $\omega = \omega_s/2$ модуль $G_{h0}(j\omega)$ равен 0,636.

Из рис. 2.46 хорошо видно, что точность фиксатора нулевого порядка как устройства экстраполирования существенно зависит от частоты квантования ω_s . Влияние частоты квантования на точность фиксатора нулевого порядка может быть прослежено также по частотным характеристикам. В целом можно сказать, что на практике используются исключительно фильтрующие свойства фиксатора нулевого порядка, и потому в дальнейшем мы будем ссылаться на комбинацию квантователь—фиксатор нулевого порядка как на *устройство выборки и хранения*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Цифровая обработка сигналов:

1. Rabiner, L. R., and Rader, C. M., (ed.), *Digital Signal Processing* IEEE Press, New York, 1972.
2. Helms, H. D., and Rabiner, L. R., (ed.), *Literature in Digital Signal Processing Terminology and Permuted Title Index* IEEE Press, New York, 1972.
3. Oppenheim, A. V., and Schaffer, R. W., *Digital Signal Processing* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.
4. Moeschle, D. F., Jr., *Analog-to-Digital/Digital-to-Analog Conversion Techniques* John Wiley & Sons, New York, 1968.

АЦП и ЦАП.

5. Sheingold, D. M., (ed.), *Analog-Digital Conversion Handbook* Analog Devices, Inc., Norwood, Massachusetts, 1972.
6. Schmid, M., *Electronic Analog/Digital Conversion* Van Nostrand Reinhold, New York, 1970.

Квантование и восстановление сигналов:

7. Balakrishnan, A. V., "A Note on the Sampling Principle for Continuous Signals," *I.R.E. Trans. on Information Theory*, Vol. IT-3, June 1957, pp. 143-146.
8. Shannon, C. E., "Communication in the Presence of Noise," *Proc. I.R.E.*, Vol. 37, January 1949, pp. 10-21.
9. Shannon, C. E., Oliver, B. M., and Pierce, J. R., "The Philosophy of Pulse Code Modulation," *Proc. I.R.E.*, Vol. 36, November 1948, pp. 1324-1331.
10. Fogel, L. J., "A Note of the Sampling Theorem," *I R.E. Trans. on Information Theory*, 1, March 1955, pp. 47-48.
11. Jagerman, and Fogel, L. J., "Some General Aspects of the Sampling Theorem," *I R.E. Trans. on Information Theory*, 2, December 1956, pp. 139-146.
12. Linden, D. A., "A Discussion of Sampling Theorems," *Proc. I R.E.*, Vol. 47, July 1959, pp. 1219-1226.
13. Oliver, R. M., "On the Functions Which are Represented by the Expansions of the Interpolation-Theory," *Proc. Royal Society (Edinburgh)*, 35, 1914-1915, pp. 181-194.
14. Kuo, B. C., *Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.
15. Barker, R. H., "The Reconstruction of Sampled-Data," *Proc. Conference on Data Processing and Automatic Computing Machines*, Salisbury, Australia, June 1957.
16. Porter, A., and Stoneman, F., "A New Approach to the Design of Pulse Monitored Servo Systems," *J.I.E.E.*, London, 97, Part II, 1950, pp. 597-610.
17. Ragazzini, J. R., and Zadeh, L. H., "The Analysis of Sampled-Data Systems," *Trans. A.I.E.E.*, 71, Part II, 1952, pp. 225-234.
18. Цыпкин Я. З. Импульсные автоматические системы с экстраполирующими устройствами. — *Автоматика и телемеханика*, 1958, т. 19, № 5, с. 389–400.
19. Linden, D. A., and Abramson, N. M., "A Generalization of the Sampling Theorem," *Tech. Report No 1551-2*, Solid-State Elec. Laboratory, Stanford University, August 1959.
20. Jury, E. I., "Sampling Schemes in Sampled-Data Control Systems," *I R.E. Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-6, February 1961, pp. 86-88.
21. Beutler, F. J., "Sampling Theorems and Bases in a Hilbert Space," *Information and Control*, Vol. 4, 1961, pp. 97-117.

ГЛАВА 3. ТЕОРИЯ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

z-Преобразование является одним из математических методов, разработанных для анализа и проектирования дискретных систем. Аппарат z-преобразования играет для цифровых систем ту же роль, что и преобразование Лапласа для непрерывных систем. В последние годы при исследовании дискретных систем существенную роль стал играть метод пространства состояний благодаря его многосторонности и общему подходу к задачам анализа и проектирования. Однако важность метода z-преобразования не следует недооценивать, так как классические методы анализа и проектирования систем управления всегда будут представлять интерес для практического применения.

Мотивировку использования z-преобразования для изучения дискретных систем можно пояснить на примере преобразования Лапласа квантованного сигнала. Пусть выходной сигнал идеального квантователя обозначен через $f^*(t)$ и определен соотношением (2-82). Преобразование Лапласа для $f^*(t)$ определяется выражением (2-83):

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \quad (3-1)$$

Выражение для $F^*(s)$ не является рациональной функцией относительно s , поскольку оно содержит множитель e^{-Ts} , не свойственной большинству передаточных функций непрерывных систем. Когда в передаточной функции появляется множитель e^{-Ts} , могут возникнуть трудности в вычислении обратного преобразования Лапласа. Следовательно, желательно сначала преобразовать иррациональную функцию $F^*(s)$ в рациональную, обозначаемую $F(z)$, посредством замены комплексной переменной s на другую комплексную переменную z . Выбор такой замены очевиден:

$$z = e^{Ts} \quad (3-2)$$

хотя и замена $z = e^{-Ts}$ отвечает тем же требованиям. Решая уравнение (3-2) относительно s , получим

$$s = \frac{1}{T} \ln z \quad (3-3)$$

В двух последних уравнениях T — период квантования; z — комплексная переменная, действительная и мнимая части которой определяются как

$$\operatorname{Re} z = e^{T\sigma} \cos \omega T \quad (3-4)$$

$$\operatorname{Im} z = e^{T\sigma} \sin \omega T \quad (3-5)$$

где

$$s = \sigma + j\omega \quad (3-6)$$

Связь между s и z в уравнении (3-2) может быть определена как z -отображение. Подставляя (3-2) в выражение (3-1), получим

$$F^* \left[s = \frac{1}{T} \ln z \right] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \quad (3-7)$$

что при представлении в компактной форме является рациональной функцией относительно z . Следовательно, $F(z)$ можно определить как z -преобразование функции $f(t)$, т.е.

$$F(z) = z\text{-преобразование } f(t) = \mathcal{Z} [f(t)], \quad (3-8)$$

где \mathcal{Z} — оператор z -преобразования. Следуя выражениям (3-1) и (3-7), можно записать

$$\begin{aligned} F(z) &= [\text{преобразование Лапласа } f^*(t)] \Big|_{s = \frac{1}{T} \ln z} = \\ &= [F^*(s)] \Big|_{s = \frac{1}{T} \ln z} \end{aligned} \quad (3-9)$$

Поскольку z -преобразование $f(t)$ получается из преобразования Лапласа для функции $f^*(t)$ заменой $z = e^{Ts}$, то в общем для любой функции $f(t)$, имеющей преобразование Лапласа, существует также z -преобразование.

Процедура нахождения z -преобразования непрерывной функции включает следующие три этапа:

1) определение $f^*(t)$ как выходного сигнала идеального квантователя для входной функции $f(t)$;

2) определение преобразования Лапласа $f^*(t)$

$$F^*(s) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs}$$

3) замена e^{Ts} на z в выражении для $F^*(s)$, чтобы получить

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \quad (3-10)$$

Выражение (3-10) используется при нахождении z -преобразования функции $f(t)$. Однако неудобство этого выражения состоит в том, что оно является бесконечным рядом, а не эквивалентной функцией в компактной форме.

Альтернативное выражение для z -преобразования функции можно получить, если использовать ее изображение $F(s)$, заданное в виде (2-89). Заменяя e^{-Ts} на z^{-1} в (2-89), получим

$$F(z) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D(\xi_n)} \frac{1}{1 - \xi_n^T z^{-1}} \quad (3-11)$$

где

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3-12)$$

имеет конечное число простых полюсов. Если $F(s)$ имеет кратные полюсы

s_1, s_2, \dots, s_k с кратностью m_1, m_2, \dots, m_k соответственно, то z -преобразование $F(s)$ с учетом выражения (2-94) запишем в виде

$$F(z) = \sum_{n=1}^k \sum_{i=1}^{m_n} \frac{(-1)^{m_n-i} K_{ni}}{(m_n-i)!} \left[\frac{d^{m_n-i}}{ds^{m_n-i}} \frac{1}{1-e^{-Ts}} \right] \bigg|_{s=s_n} \bigg|_{z=e^{Ts}} \quad (3-13)$$

где

$$K_{ni} = \frac{1}{(i-1)!} \left[\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} (s-s_n)^{m_n} F(s) \right] \bigg|_{s=s_n} \quad (3-14)$$

3.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ z -ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Выражения (3-10), (3-11) и (3-13) можно использовать для вычисления z -преобразований. Выражение (3-10) применяют, если задано $f(t)$ или $f(kT)$. Строго говоря, на временные функции или ряды никакие ограничения не накладываются, хотя для того, чтобы $F(z)$ можно было выразить в компактной форме, бесконечный ряд в выражении (3-10) должен сходиться. Выражения (3-11) и (3-13) определяют z -преобразования функций, заданных в виде преобразований Лапласа $F(s)$. Выражение (3-11) используется для функции $F(s)$, которая имеет только простые полюсы, а (3-13) — для функции, которая имеет, по крайней мере, один кратный полюс.

Следующие примеры иллюстрируют нахождение z -преобразований для некоторых часто встречающихся функций. В инженерной практике полезно использовать таблицы z -преобразований, которые можно найти в справочниках и учебниках.

Пример 3.1. Найдем z -преобразование единичной ступенчатой функции $u_s(t)$. Следуя процедуре нахождения z -преобразования, изложенной в предыдущем параграфе, получим следующее

1) единичная ступенчатая функция квантуется идеальным квантователем, при этом его выходным сигналом является последовательность единичных импульсов, описываемая как

$$u_s^*(t) = \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (3-15)$$

2) применение преобразования Лапласа к обеим частям выражения (3-15) дает

$$U_s^*(s) = \Delta_T(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} \quad (3-16)$$

где ряд сходится для $|e^{-Ts}| < 1$, а чтобы выразить $U_s^*(s)$ в компактной форме, умножим обе части выражения (3-16) на e^{-Ts} и вычтем результат из (3-16), тогда

$$U_s^*(s) = \Delta_T(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \quad \text{для } |e^{-Ts}| < 1 \quad (3-17)$$

3) замена e^{-Ts} на z в выражении (3-17) дает

$$U_s(z) = \mathcal{Z}[u_s(t)] = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (3-18)$$

для $|z^{-1}| < 1$ или $|z| > 1$.

Тот же результат можно получить, применяя формулу (3-11). Преобразование Лапласа $u_s(t)$ равно $1/s$ и имеет простой полюс $s = 0$. Следовательно, из (3-11) имеем $N(s) = 1$, $D(s) = s$, $D'(s) = dD(s)/ds = 1$. z-Преобразование единичной ступенчатой функции

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{\xi T} z^{-1}} \Big|_{\xi=0} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (3-19)$$

Пример 3.2. Найдем z-преобразование экспоненциальной функции $f(t) = e^{-at}$, где a — действительное постоянное число.

Не рассматривая процедуру решения детально, как в примере 3-1, подставим $f(t)$ в выражение (3-10) и получим

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \quad (3-20)$$

Бесконечный ряд сходится для всех значений z , которые удовлетворяют условию

$$|e^{-aT} z^{-1}| < 1 \quad (3-21)$$

Чтобы получить выражение (3-20) в компактной форме, умножим обе части уравнения на $e^{-aT} z^{-1}$ и вычтем результат из этого же уравнения. После преобразования получим

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (3-22)$$

для $|e^{-aT} z^{-1}| < 1$ или $|z^{-1}| < e^{aT}$.

Можно продемонстрировать, что применение выражения (3-11) ведет к тому же результату. Преобразование Лапласа e^{-at} есть

$$F(s) = \frac{1}{s + a} \quad (3-23)$$

Эта функция имеет простой полюс $s = -a$. В (3-11) $N(s) = 1$, $D(s) = s + a$ и $D'(s) = 1$. Таким образом, из (3-11) получим

$$F(z) = \frac{N(\xi_1)}{D(\xi_1)} \frac{1}{1 - e^{\xi_1 T} z^{-1}} \Big|_{\xi_1 = -a} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (3-24)$$

Пример 3.3. Найдем z-преобразование функции $f(t) = \sin \omega t$. Выражение (3-10) дает

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin \omega kT z^{-k} \quad (3-25)$$

или

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}}{2j} z^{-k} \quad (3-26)$$

Этот бесконечный ряд сходится для $|z^{-1}| < 1$ и может быть записан в виде

$$F(z) = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right] \quad (3-27)$$

После упрощений последнее уравнение можно представить как

$$F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \quad (3-28)$$

Теперь, применив (3-11) при

$$F(s) = \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3-29)$$

получим

$$N(s) = \omega;$$

$$D(s) = s^2 + \omega^2;$$

$$D'(s) = 2s.$$

Функция $F(s)$ имеет полюсы $s = \xi_1 = j\omega$ и $s = \xi_2 = -j\omega$. Следовательно, $N(\xi_1) = N(\xi_2) = \omega$, а так как $N(s)$ не зависит от s , то

$$D(\xi_1) = 2j\omega$$

$$D(\xi_2) = -2j\omega$$

Выражение (3-11) дает

$$F(z) = \sum_{n=1}^2 \frac{N(\xi_n)}{D(\xi_n)} \frac{1}{1 - e^{-T\xi_n} z^{-1}} = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right] \quad (3-30)$$

что явно ведет к результату (3-28).

Пример 3.4. Найдем z -преобразование для линейной функции $f(t) = t u_s(t)$. Используя выражение (3-10), получим

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k T z^{-k} = T z^{-1} + 2T z^{-2} + \dots \quad (3-31)$$

Для представления $F(s)$ в компактной форме, умножим обе части выражения (3-31) на z^{-1} :

$$z^{-1} F(z) = T z^{-2} + 2T z^{-3} + \dots \quad (3-32)$$

Вычитая последнее выражение из соотношения (3-31), получим

$$(1 - z^{-1}) F(z) = T z^{-1} + T z^{-2} + T z^{-3} + \dots \quad (3-33)$$

Далее, повторяя процедуру, описанную выше, получим $F(z)$ в форме

$$F(z) = \frac{T z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{T z}{(z - 1)^2} \quad (3-34)$$

Преобразование Лапласа для $f(t) = t u_s(t)$ есть $F(s) = 1/s^2$, при этом $F(s)$ имеет двойной полюс $s = 0$. Следовательно, должна быть использована формула (3-13). Определяем, что $k = 1$, $s_1 = 0$ и $m_1 = 2$. Тогда выражение (3-14) дает

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \left[\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} s^2 \frac{1}{s^2} \right] \Big|_{s=0} \quad (3-35)$$

Следовательно, $K_{11} = 1$ и $K_{12} = 0$. Формула (3-13) дает

$$F(z) = \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{2-i} K_{1i}}{(2-i)!} \left[\frac{d^{2-i}}{ds^{2-i}} \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \right] \Big|_{z=e^{Ts}} = \frac{T z}{(z - 1)^2} \quad (3-36)$$

что совпадает с результатом (3-34).

3.3. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ s - И z -ПЛОСКОСТЯМИ

Изучение соответствия между s - и z -плоскостями при преобразовании $z = e^{Ts}$ является весьма важным. Проектирование непрерывных систем управления часто основывается на анализе распределения нулей и полюсов передаточной функции системы на s -плоскости. Аналогично, полюсы и нули z -преобразования передаточной функции определяют реакцию системы в моменты замыкания. В этом параграфе рассмотрим отображение на z -плоскости заменой $z = e^{Ts}$ некоторых часто используемых на s -плоскости кривых, таких, как линии постоянных коэффициента затухания и частоты и др.

Как показано на рис. 2-39, s -плоскость делится на бесконечное число периодических полос. Основная полоса расположена в диапазоне частот от $\omega = -\omega_s/2$ до $+\omega_s/2$, дополнительные полосы расположены в диапазоне от $-\omega_s/2$ до $-3\omega_s/2$, от $-3\omega_s/2$ до $-5\omega_s/2$ и т.д. для отрицательных частот и от $\omega_s/2$ до $3\omega_s/2$, от $3\omega_s/2$ до $5\omega_s/2$ и т.д. для положительных частот. Если рассматривать только основную полосу (рис. 3.1, а), то контур (1)–(2)–(3)–(4)–(5)–(1), расположенный в левой половине s -плоскости, отображается преобразованием $z = e^{Ts}$ в единичную окружность на z -плоскости с центром в начале координат, как показано на рис. 3-1, б.

Так как

$$e^{(s+jn\omega_s)T} = e^{Ts} e^{j2\pi n} = e^{Ts} = z \quad (3-37)$$

для целых n , то все другие дополнительные полосы в левой половине s -плоскости отображаются в тот же самый единичный круг на z -плоскости. Все точки левой половины s -плоскости отображаются внутрь единичного круга на z -плоскости. Точки правой половины s -плоскости отображаются в область вне единичного круга на z -плоскости.

Ниже рассматривается отображение на z -плоскость для цифровых систем линий постоянных затухания и частоты и коэффициента затухания.

Линии постоянного затухания. Для постоянного затухания σ_1 на s -плоскости соответствующая кривая на z -плоскости представляет собой окружность с радиусом $z = e^{\sigma_1 T}$ и с центром в начале координат (рис. 3.2).

Линии постоянной частоты. Для любой фиксированной частоты $\omega = \omega_1$ на s -плоскости соответствующая линия на z -плоскости (рис. 3.3)

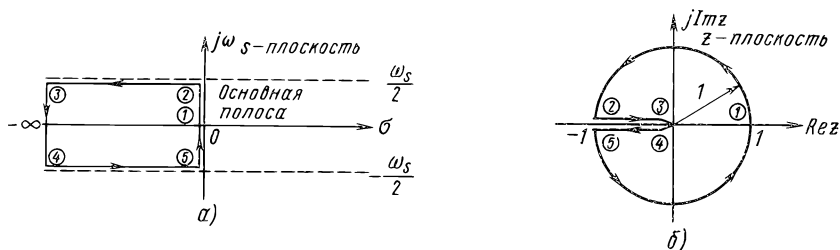


Рис. 3.1. Отображение основной полосы левой половины s -плоскости на z -плоскость

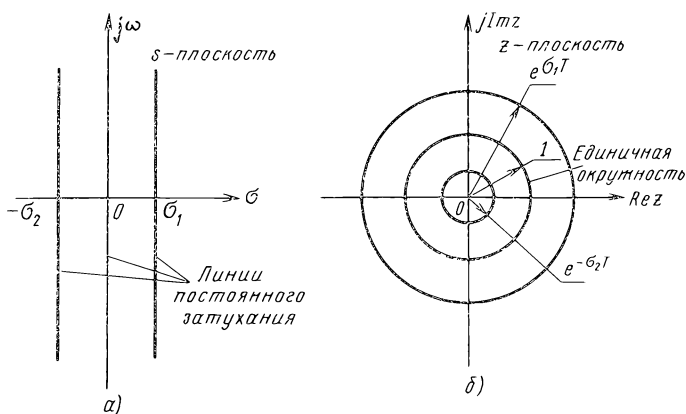


Рис. 3.2. Линии постоянного затухания на s - и z -плоскостях

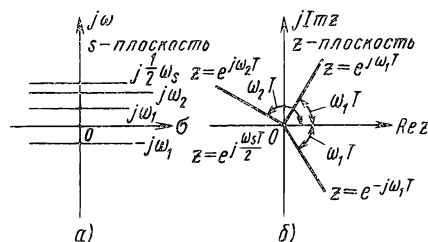


Рис. 3.3. Линии постоянной частоты на s - и z -плоскостях

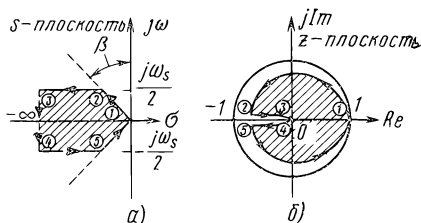


Рис. 3.4. Линии постоянного коэффициента затухания на s - и z -плоскостях

Рис. 3.5. Линии постоянного коэффициента затухания для $\beta = 30^\circ$ ($\xi = 0,5$) на s - и z -плоскостях

имеет вид луча, исходящего из начала координат под углом $\theta = \omega_1 T_{\text{рад}}$. Угол измеряется от положительного направления действительной оси.

Линии постоянного коэффициента затухания. Линии, соответствующие постоянному коэффициенту затухания на s -плоскости, описываются выражением

$$s = -\omega \operatorname{tg} \beta + j\omega \quad (3-38)$$

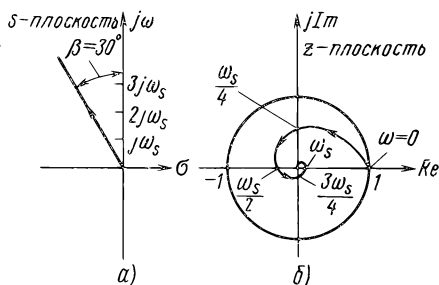
На z -плоскости оно примет вид

$$z = e^{Ts} = \exp(-2\pi\omega \operatorname{tg} \beta / \omega_s) \exp(j2\pi\omega / \omega_s), \quad (3-39)$$

где

$$\beta = \arcsin \xi = \text{const.} \quad (3-40)$$

Для заданного угла β линия постоянного значения ξ , описываемая уравнением (3-39), представляет собой на z -плоскости логарифмическую



спираль (кроме значений $\beta = 0$ и $\beta = 90^\circ$). Отображение линии постоянного коэффициента затухания с s -плоскости на z -плоскость показано на рис. 3.4. Заштрихованные области на рис. 3.4, a и b соответствуют друг другу. На рис. 3.5 показаны линии на s - и z -плоскостях для $\beta = 30^\circ$. Каждые пол-оборота логарифмической спирали соответствуют отрезку линии постоянного значения ξ на s -плоскости при изменении частоты по мнимой оси на $\omega_s/2$.

3.4. ОБРАТНОЕ z -ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Преобразование Лапласа и его обратное преобразование являются однозначными, т.е. если $F(s)$ есть преобразование Лапласа для функции $f(t)$, то $f(t)$ является обратным преобразованием Лапласа для функции $F(s)$. Для z -преобразования обратное z -преобразование не является однозначным. z -Преобразование $f(t)$ определяется функцией $F(z)$, а обратное z -преобразование не обязательно равно $f(t)$. Корректный результат обратного z -преобразования функции $F(z)$ есть $f(kT)$, который равен $f(t)$ только в моменты квантования $t = kT$.

Рис. 3.6 иллюстрирует тот факт, что для z -преобразования единичной ступенчатой функции, которое равно $z/(z-1)$ и соответствует последовательности единичных импульсов, обратное z -преобразование может быть любой функцией, значения которой равны единице в моменты $t = 0, T, 2T, \dots$. Неоднозначность обратного z -преобразования является одним из ограничений, о котором необходимо помнить при применении аппарата z -преобразования.

Обратное z -преобразование обозначается как

$$f(kT) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \text{обратное } z\text{-преобразование } F(z). \quad (3-41)$$

В общем случае обратное z -преобразование может быть определено одним из следующих трех методов.

1. **Метод разложения на простые дроби.** Этот метод при небольшой модификации соответствует методу разложения на простые дроби в преобразовании Лапласа. При анализе непрерывных систем обратное преобразование Лапласа функции $F(s)$ может быть получено разложением $F(s)$ в виде

$$F(s) = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} + \frac{C}{s+c} + \dots \quad (3-42)$$

где $a, b,$ и c — отрицательные полюсы $F(s)$ (здесь предполагается случай простых полюсов); A, B и C — вычеты $F(s)$ в этих полюсах. Тогда обратное преобразование Лапласа функции $F(s)$ определяется как

$$f(t) = Ae^{-at} + Be^{-bt} + Ce^{-ct} + \dots \quad (3-43)$$

Для случая z -отображения $F(z)$ не надо представлять в форме (3-42).

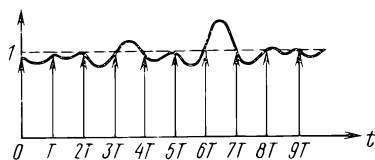


Рис. 3.6. Неоднозначность обратного z -преобразования

Дело в том, что в таблице z -преобразований обратное z -преобразование для выражения вида $A/(z + a)$ отсутствует, хотя при положительном значении a член такого вида соответствует последовательности импульсов с экспоненциально затухающей амплитудой, когда присутствует временная задержка. Вместе с тем известно, что обратное z -преобразование функции $Az/(z - e^{-aT})$ равно Ae^{-akT} . Следовательно, удобнее разложить на простые дроби функцию $F(z)/z$. После разложения обе части выражения для $F(z)/z$ умножают на z для получения $F(z)$.

Для функции, которые не содержат нулей ($z = 0$), соответствующая последовательность импульсов имеет временной сдвиг. Разложение функции $F(z)$ на простые дроби представляются в обычном виде, т.е.

$$F(z) = \frac{A}{z + a} + \frac{B}{z + b} + \dots \quad (3.44)$$

После чего находим

$$F_1(z) = zF(z) = \frac{Az}{z + a} + \frac{Bz}{z + b} + \dots \quad (3.45)$$

Если найдено обратное z -преобразование функции $F_1(z)$, $f_1(k, T)$, то обратное z -преобразование функции $F(z)$ определяется следующим образом:

$$f(kT) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}F_1(z)] = f_1[(k-1)T] \quad (3.46)$$

Равенство в выражении (3.46) является прямым результатом соотношения (3.7), если $f(kT) = 0$ для всех $k < 0$.

Пример 3.5. Дано z -преобразование

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \quad (3.47)$$

где a — положительное постоянное число; T — период квантования. Используя метод разложения на простые дроби, найти обратное z -преобразование $F(z)$, $f(kT)$. Разложение $F(z)/z$ на простые дроби дает

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z - e^{-aT}} \quad (3.48)$$

Следовательно,

$$F(z) = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (3.49)$$

Из таблицы z -преобразований может быть найдено обратное z -преобразование $F(z)$ в виде временной функции, значения которой в моменты квантования определяются как

$$f(kT) = 1 - e^{-akT} \quad (3.50)$$

Следовательно, дискретная временная функция может быть записана в виде

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-akT})\delta(t - kT) \quad (3.51)$$

Заметим, что временная функция $f(t)$ не может быть найдена из обратного

z-преобразования. так как оно не определяет значения функции между моментами замыкания.

2. Метод разложения в степенной ряд. Из выражения (3-7) следует, что обратное z-преобразование функции $F(z)$ может быть определено разложением ее в бесконечный ряд по степеням z^{-1} . Из выражения (3-7) получаем

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k} + \dots \quad (3-52)$$

Следовательно, коэффициенты ряда соответствуют значениям $f(t)$ в моменты квантования. Основное различие между методами разложения на простые дроби и в степенной ряд заключается в том, что первый метод дает решение для $f(kT)$ в компактной форме, в то время как решением второго метода является последовательность чисел. Разумеется, оба метода эквивалентны, и для последовательности чисел также может быть записано выражение в компактной форме.

Пример. 3.6. Определить обратное z-преобразование функции

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{z^2 - (1 + e^{-aT})z + e^{-aT}} \quad (3-53)$$

которая совпадает с функцией (3-47).

Последовательное деление числителя на знаменатель дает

$$F(z) = (1 - e^{-aT})z^{-1} + (1 - e^{-2aT})z^{-2} + \dots \quad (3-54)$$

В этом случае легко видеть, что

$$f(kT) = 1 - e^{-akT} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3-55)$$

и, следовательно,

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-akT})\delta(t - kT) \quad (3-56)$$

что совпадает с результатом (3-51), полученным методом разложения на простые дроби.

3. Метод, основанный на использовании формулы обращения. Интересно сравнить определения преобразования Лапласа и z-преобразования. Если для функции $f(t)$ аргумента t существует преобразование Лапласа, то это преобразование Лапласа и z-преобразование функции $f(t)$ соответственно равны:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (3-57)$$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \quad (3-58)$$

Обратное преобразование Лапласа определяем как

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{ts}ds \quad (3-59)$$

где c — абсцисса сходимости, которую выбираем таким образом, чтобы

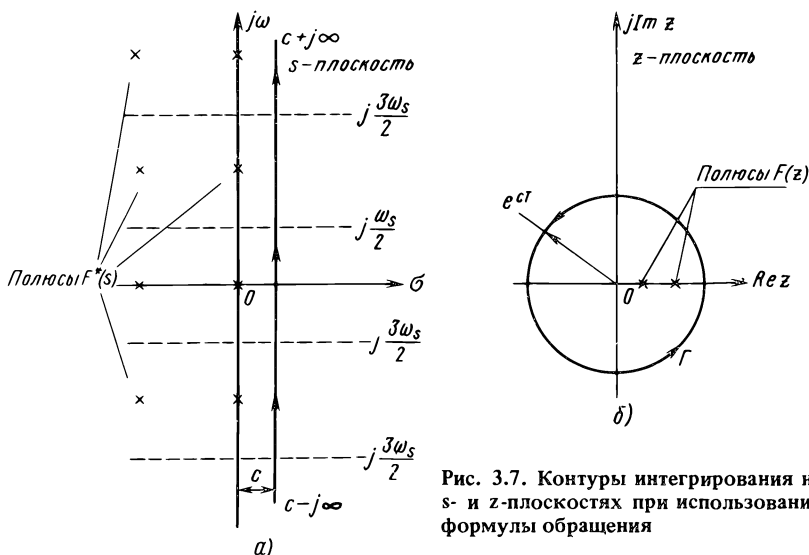


Рис. 3.7. Контуры интегрирования на s - и z -плоскостях при использовании формулы обращения

особые точки подынтегральной функции $F(s)e^{ts}$ лежали слева от нее. Можно показать, что для обратного z -преобразования существует аналогичное выражение

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)z^{k-1} dz \quad (3-60)$$

где Γ — замкнутый контур (обычно окружность) на z -плоскости, включающий все особые точки $F(z)z^{k-1}$.

Подставляя $t = kT$ в выражение (3-59), получим

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{kTs} ds \quad (3-61)$$

Как показано на рис. 3.7, а, интеграл (3-61) берется вдоль прямой линии $\sigma = c$, проходящей от $-j\infty$ до $+j\infty$. Эта прямая пересекает периодические полосы на s -плоскости, и, следовательно, интеграл (3-61) может быть представлен в виде суммы интегралов, каждый из которых берется в пределах одной периодической полосы. Тогда

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{c+j\omega_s(i-\frac{1}{2})}^{c+j\omega_s(i+\frac{1}{2})} F(s)e^{kTs} ds \quad (3-62)$$

где $\omega_s = 2\pi/T$. Заменяя s на $s + ji\omega_s$, где i — целое число, получим выражение (3-62) в виде

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F(s + ji\omega_s) e^{kT(s+ji\omega_s)} d(s + ji\omega_s) \quad (3-63)$$

или

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F(s + ji\omega_s) e^{kTs} ds \quad (3-64)$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования в последнем выражении, получим

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} F(s + ji\omega_s) e^{kTs} ds \quad (3-65)$$

Так как из выражения (2-85) следует, что

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + jk\omega_s) \quad (3-66)$$

то уравнение (3-65) можно представить как

$$f(kT) = \frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F^*(s) e^{kTs} ds \quad (3-67)$$

Подставляя $z = e^{Ts}$ в (3-67) и учитывая, что

$$F(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = F(z) \quad (3-68)$$

$$e^{kTs} = z^k \quad (3-69)$$

$$ds = d\left[\frac{1}{T} \ln z\right] = \frac{1}{T} z^{-1} dz \quad (3-70)$$

Получим

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz \quad (3-71)$$

Линия интегрирования от $s = c - j(\omega_s/2)$ до $s = c + j(\omega_s/2)$ отображается в окружность $|z| = e^{cT}$ на z -плоскости (рис. 3.7, б). Так как $F^*(s)$ на s -плоскости не имеет особых точек на линии интегрирования $s = c + j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, или справа от нее, то все особые точки $F(z)z^{k-1}$ должны лежать на z -плоскости внутри окружности Γ , $|z| = e^{cT}$.

Пример 3.7. Определим обратное z -преобразование функции $F(z)$, заданной выражением (3-47), по формуле обращения (3-60).

Подставляя (3-47) в (3-60), получим

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})} z^{k-1} dz \quad (3-72)$$

где Γ — окружность, включающая полюсы $F(z)$, $z = 1$ и $z = e^{-aT}$. Интеграл (3-72) может быть определен по теореме вычетов, т.е.

$$f(kT) = \sum \text{Res } F(z) z^{k-1} \text{ в полюсах } F(z). \quad (3-73)$$

Следовательно,

$$f(kT) = \sum \text{Res} \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})} z^{k-1} \Big|_{\substack{z=1 \\ z=e^{-aT}}} = 1 - e^{-akT}. \quad (3-74)$$

Результат совпадает с выражениями (3-50) и (3-55), полученными двумя предыдущими методами.

3.5. ТЕОРЕМЫ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Использование z -отображения часто может быть существенно облегчено применением теорем z -преобразования. Ниже приводятся доказательства основных теорем z -преобразования и примеры их практического приложения.

1. Суммирование и вычитание. Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют z -преобразования

$$F_1(z) = \mathcal{Z}[f_1(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT)z^{-k} \quad (3-75)$$

и

$$F_2(z) = \mathcal{Z}[f_2(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT)z^{-k} \quad (3-76)$$

соответственно, то

$$\mathcal{Z}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(z) \pm F_2(z) \quad (3-77)$$

Доказательство. Из определения z -преобразования следует:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f_1(t) \pm f_2(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} [f_1(kT) \pm f_2(kT)]z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT)z^{-k} \pm \sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT)z^{-k} = F_1(z) \pm F_2(z) \end{aligned} \quad (3-78)$$

2. Умножение на константу. Если $F(z)$ есть z -преобразование $f(t)$, то

$$\mathcal{Z}[af(t)] = a\mathcal{Z}[f(t)] = aF(z) \quad (3-79)$$

где a — константа.

Доказательство. Из определения z -преобразования следует:

$$\mathcal{Z}[af(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} af(kT)z^{-k} = a \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = aF(z) \quad (3-80)$$

3. Сдвиг по временной области. Если $f(t)$ имеет z -преобразование $F(z)$, то

$$\mathcal{Z}[f(t - nT)] = z^{-n}F(z) \quad (3-81)$$

$$\mathcal{Z}[f(t + nT)] = z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right] \quad (3-82)$$

где n — положительное целое число.

Доказательство. По определению

$$\mathcal{Z}[f(t - nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - nT)z^{-k} \quad (3-83)$$

что может быть записано как

$$\mathcal{F}[f(t - nT)] = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - nT) z^{-(k-n)} \quad (3-84)$$

Предполагая, что $f(t)$ равно нулю при $t < 0$, получим выражение (3-84) в виде

$$\mathcal{F}[f(t - nT)] = z^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} f(kT - nT) z^{-(k-n)} = z^{-n} F(z) \quad (3-85)$$

Для доказательства (3-82) запишем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t + nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + nT) z^{-k} = \\ &= z^n \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + nT) z^{-(k+n)} = z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right] \end{aligned} \quad (3-86)$$

Пример 3.8. Найдем z -преобразование единичной ступенчатой функции при задержке ее на один период квантования T . Используя теорему о сдвиге во временной области (3-81), получим

$$\mathcal{F}[u_s(t - T)] = z^{-1} \mathcal{F}[u_s(t)] = z^{-1} \frac{z}{z - 1} = \frac{1}{z - 1} \quad (3-87)$$

4. Теорема об умножении оригинала на экспоненту (смещение в области изображений). Если $f(t)$ имеет z -преобразование $F(z)$, то

$$\mathcal{F}[e^{\mp at} f(t)] = [F(s \pm a)] \Big|_{z=e^{Ts}} = F(ze^{\pm aT}) \quad (3-88)$$

где a — константа.

Доказательство. По определению

$$\mathcal{F}[e^{\mp at} f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{\mp akT} z^{-k} \quad (3-89)$$

Положим $z_1 = ze^{\pm aT}$, тогда выражение (3-89) запишем в виде

$$\mathcal{F}[e^{\mp at} f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z_1^{-k} = F(z_1) \quad (3-90)$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}[e^{\mp at} f(t)] = F(ze^{\pm aT}) \quad (3-91)$$

Пример 3.9. Найдем z -преобразование функции $f(t) = e^{-at} \sin \omega t$ с помощью теоремы об умножении оригинала на экспоненту.

Из таблицы z -преобразований для $e^{-at} \sin \omega t$ найдем

$$\mathcal{F}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}} \quad (3-92)$$

а для $\sin \omega t$

$$\mathcal{F}[\sin \omega t] = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \quad (3-93)$$

Очевидно, что результат (3-92) может быть получен подстановкой ze^{aT} в выражение (3-93) вместо z .

5. Теорема о начальном значении. Если функция $f(t)$ имеет z -преобразование $F(z)$ и если существует предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z),$$

то

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (3-94)$$

Из теоремы следует, что значение дискретного сигнала $f^*(t)$ при $t = 0$ определяется значением $F(z)$ при $z = \infty$.

Доказательство. По определению $F(z)$ можно представить в виде

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \quad (3-95)$$

Возьмем предел от каждой части последнего выражения и, учитывая, что z стремится к бесконечности, получим

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) \quad (3-96)$$

6. Теорема о конечном значении. Если функция $f(t)$ имеет z -преобразование $F(z)$ и если функция $(1 - z^{-1})F(z)$ не имеет полюсов на окружности единичного радиуса $|z| = 1$ или вне ее на z -плоскости, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) \quad (3-97)$$

Доказательство. Рассмотрим два ряда с конечным числом членов:

$$\sum_{k=0}^n f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + \dots + f(nT)z^{-n} \quad (3-98)$$

$$\sum_{k=0}^n f[(k-1)T]z^{-k} = f(0)z^{-1} + f(T)z^{-2} + \dots + f[(n-1)T]z^{-n} \quad (3-99)$$

Предположим, что $f(t) = 0$ при $t < 0$, тогда член $f(-T)$ в выражении (3-99) равен нулю. Сравнивая выражения (3-98) и (3-99), видим, что последний ряд может быть записан как

$$\sum_{k=0}^n f[(k-1)T]z^{-k} = z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \quad (3-100)$$

Определим в пределе при $z \rightarrow 1$ разность между выражениями (3-98) и (3-100).

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{k=0}^n f(kT)z^{-k} - z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right] = \\ = \sum_{k=0}^n f(kT) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) = f(nT) \end{aligned} \quad (3-101)$$

В последнем выражении возьмем предел при $n \rightarrow \infty$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{k=0}^n f(kT)z^{-k} - z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right] \quad (3-102)$$

Меняя порядок перехода к пределу в последнем выражении и учитывая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(kT)z^{-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} = F(z) \quad (3.103)$$

получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) \quad (3.104)$$

что и является доказательством теоремы о конечном значении.

Пример 3.10. Используя теорему о конечном значении, определить конечное значение $f(kT)$ для заданного z -преобразования

$$F(z) = \frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2 - 0.416z + 0.208)} \quad (3.105)$$

Для решения нужно применить теорему о конечном значении, так как функция

$$(1 - z^{-1})F(z) = \frac{0.792z}{z^2 - 0.416z + 0.208} \quad (3.106)$$

не имеет полюсов на единичной окружности $|z| = 1$ или вне ее. Следовательно, из (3.97) получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.792z}{z^2 - 0.416z + 0.208} = 1 \quad (3.107)$$

Полученный результат можно проверить разложением $F(z)$ в ряд по степеням z^{-1} :

$$\begin{aligned} F(z) = & 0.792z^{-1} + 1.12z^{-2} + 1.091z^{-3} + 1.01z^{-4} + 0.983z^{-5} + \\ & + 0.989z^{-6} + 0.99z^{-7} + \dots \end{aligned} \quad (3.108)$$

Видно, что последовательность значений коэффициентов ряда быстро сходится к установившемуся значению, равному единице.

7. Теорема дифференцирования. Пусть z -преобразование функции $f(t, a)$ есть $F(z, a)$, где a — независимая переменная или константа. Тогда z -преобразование частной производной функции $f(t, a)$ по a определяем как

$$\mathcal{Z} \left[\frac{\partial}{\partial a} [f(t, a)] \right] = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a) \quad (3.109)$$

Доказательство. По определению

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[\frac{\partial}{\partial a} [f(t, a)] \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} f(kT, a) z^{-k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT, a) z^{-k} = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a) \end{aligned} \quad (3.110)$$

Следующий пример показывает, что при использовании теоремы дифференцирования z -преобразования некоторых функций могут быть получены довольно просто.

Пример 3.11. Определим z -преобразование функции $f(t) = te^{-at}$ с помощью теоремы дифференцирования.

Z -преобразование $f(t)$ можно вычислить как

$$\mathcal{Z}[f(t)] = \mathcal{Z}[te^{-at}] = \mathcal{Z}\left[-\frac{\partial}{\partial a} e^{-at}\right] \quad (3-111)$$

Из выражения (3-109) следует, что

$$\mathcal{Z}\left[-\frac{\partial}{\partial a} e^{-at}\right] = -\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{Z}[e^{-at}] = -\frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} \right] = \frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} \quad (3-112)$$

8. Теорема о свертке во временной области. Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют z -преобразования $F_1(z)$ и $F_2(z)$ соответственно и $f_1(t) = f_2(t) = 0$ для $t < 0$, то

$$F_1(z)F_2(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{n=0}^k f_1(nT)f_2(kT - nT)\right] \quad (3-113)$$

Доказательство. Правая часть уравнения (3-113) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\sum_{n=0}^k f_1(nT)f_2(kT - nT)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k f_1(nT)f_2(kT - nT)z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT)f_2(kT - nT)z^{-k} \end{aligned} \quad (3-114)$$

Полагая $m = k - n$ и изменяя порядок суммирования, получим

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{n=0}^k f_1(nT)f_2(kT - nT)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT)z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} f_2(mT)z^{-m} \quad (3-115)$$

Так как $f_2(t) = 0$ для $t < 0$, то последнее выражение примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\sum_{n=0}^k f_1(nT)f_2(kT - nT)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT)z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f_2(mT)z^{-m} = \\ &= F_1(z)F_2(z) \end{aligned} \quad (3-116)$$

Нетрудно заметить, что теорема о свертке во временной области аналогична соответствующей теореме преобразования Лапласа. Однако необходимо помнить, что обратное z -преобразование (или Лапласа) произведения двух функций не равно произведению соответствующих оригиналов, т.е.

$$\mathcal{Z}^{-1}[F_1(z)F_2(z)] \neq f_1(kT)f_2(kT) \quad (3-117)$$

9. Теорема о свертке в области изображений. Если z -преобразования $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно равны $F_1(z)$ и $F_2(z)$, то z -преобразование произведения этих двух функций

$$\mathcal{Z}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\xi)F_2(z\xi^{-1})}{\xi} d\xi \quad (3-118)$$

Здесь Γ — окружность, которая лежит в кольцевой области, определяемой выражениями

$$\sigma_1 < |\xi| < |z|/\sigma_2; \\ |z| > \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 \sigma_2),$$

где σ_1 и σ_2 — радиусы сходимости соответственно $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$.

Доказательство. Из определения z -преобразования $f_1(t)f_2(t)$ запишем

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT)f_2(kT)z^{-k} \quad (3-119)$$

Для абсолютной сходимости этого ряда необходимо, чтобы модуль z был больше, чем наибольшее значение σ_1 , σ_2 и $\sigma_1 \sigma_2$, т.е. $|z| = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 \sigma_2)$.

Можно записать $f_1(kT)$ в виде соответствующего обратного z -преобразования

$$f_1(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F_1(\xi) \xi^{k-1} d\xi \quad (3-120)$$

где Γ — окружность, включающая все особые точки $F_1(\xi) \xi^{k-1}$; следовательно, $|\xi| > \sigma_1$. Подставляя (3-120) в формулу (3-119), получим

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\xi)}{\xi} d\xi \sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT)(\xi^{-1}z)^{-k} \quad (3-121)$$

Так как

$$F_2(\xi^{-1}z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT)(\xi^{-1}z)^{-k} \quad (3-122)$$

абсолютно сходится для $|\xi^{-1}z| > \sigma_2$, или $|\xi| < |z|/\sigma_2$, то выражение (3-121) принимает вид

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\xi)}{\xi} F_2(z\xi^{-1}) d\xi \quad (3-123)$$

с учетом условия

$$\sigma_1 < |\xi| < \frac{|z|}{\sigma_2} \quad (3-124)$$

Пример 3.12. Применим теорему о свертке в области изображений для определения z -преобразования функции $f(t) = te^{at}$

Пусть $f_1(t) = t$ и $f_2(t) = e^{at}$. Тогда

$$F_1(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad |z| > 1 = \sigma_1 \quad (3-125)$$

$$F_2(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad |z| > e^{-aT} = \sigma_2 \quad (3-126)$$

Подставляя (3-125) и (3-126) в формулу (3-118), получим

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{T\xi}{\xi(\xi-1)^2} \frac{z\xi^{-1}}{z\xi^{-1} - e^{-aT}} d\xi \quad (3-127)$$

где Γ — окружность, лежащая в кольце

$$1 < |\xi| < \frac{|z|}{e^{-aT}} = |z|e^{aT} \quad (3-128)$$

$|z| > 1$.

Следовательно, контур интегрирования в выражении (3-127) включает в себя только те полюсы подынтегральной функции, которые соответствуют $\xi = 1$. Применяя теорему о вычетах к выражению (3-127), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} [f_1(t)f_2(t)] &= \text{Res} \left. \frac{Tz\xi^{-1}}{(\xi-1)^2(z\xi^{-1} - e^{-aT})} \right|_{\xi=1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{Tz\xi^{-1}}{(z\xi^{-1} - e^{-aT})} \right] \bigg|_{\xi=1} = \frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} \end{aligned} \quad (3-129)$$

что согласуется с результатом, полученным выше в примере 3.11.

3.6. ОГРАНИЧЕНИЯ МЕТОДА z -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В предыдущих параграфах было показано, что метод z -преобразования является удобным средством анализа линейных цифровых систем. Однако методу z -преобразования присущи ограничения, и в некоторых случаях необходимо проявлять осторожность при его применении и интерпретации полученных результатов.

При применении z -преобразования надо учитывать следующие соображения.

1. z -Преобразование базируется на предположении, что квантованный сигнал представляет собой последовательности импульсов, площадь которых равна амплитуде входного сигнала квантователя в дискретные моменты времени. Это предположение справедливо только в том случае, если время квантования намного меньше определяющей постоянной времени системы.

2. z -Преобразование выходного сигнала линейной системы $C(z)$ определяет значения временной функции $c(t)$ только в моменты квантования; $C(z)$ не содержит информации о значениях $c(t)$ между моментами квантования. Следовательно, для заданной функции $C(z)$ ее обратное z -преобразование $c(kT)$ описывает $c(t)$ только в моменты квантования $t = kT$.

3. При анализе линейной системы методами z -преобразования передаточная функция непрерывной системы $G(s)$ должна иметь полюсов, по крайней мере, на один больше, чем нулей; эквивалентным требованием является отсутствие разрыва импульсной переходной функции для $G(s)$ при $t = 0$. В противном случае процессы в системе, полученные с помощью метода z -преобразования, могут быть ошибочными.

При полном описании любой системы почти всегда требуется знать характер процессов между моментами квантования. На основе z -преобразования разработано несколько методов, позволяющих определять значения переходных процессов в цифровых системах между моментами квантования. Из них наиболее известны методы модифицированного z -преобразования и дробного квантования. Они описаны в п. 3.9.

3.7. ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

До сих пор рассмотрение дискретных систем сводилось к изучению свойств и математического описания дискретных сигналов. Теперь проанализируем случай, когда ко входу линейной системы прикладывается дискретный сигнал.

Для линейной разомкнутой системы с непрерывным сигналом $r(t)$ на входе (рис. 3.8, а) соотношение вход-выход описывается передаточной функцией

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \quad (3-130)$$

Если теперь на вход этой же системы приложить квантованный сигнал, как показано на рис. 3.8, б, то преобразование Лапласа для выходного сигнала системы можно записать в виде

$$C(s) = R^*(s)G(s) \quad (3-131)$$

где $R^*(s)$ – преобразование Лапласа дискретного сигнала. Наша задача – найти способ описания цифровой системы в терминах z -преобразований $C(z)$, $R(z)$ и $G(z)$. Проще всего это сделать, получив с помощью выражения (2-85)

$$C^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s + jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^*(s + jn\omega_s)G(s + jn\omega_s) \quad (3-132)$$

Используя тождество (2-104), получим

$$R^*(s + jn\omega_s) = R^*(s) \quad (3-133)$$

Перепишем выражение (3-132) в виде

$$C^*(s) = R^*(s) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \quad (3-134)$$

Определяя

$$G^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \quad (3-135)$$

из соотношения (3-134) получим

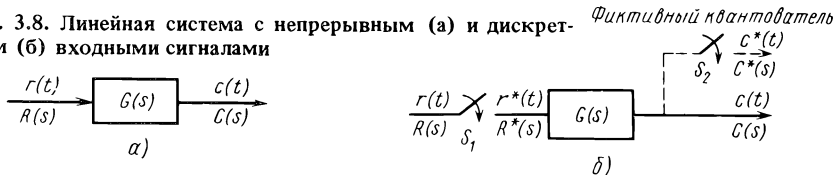
$$C^*(s) = R^*(s)G^*(s) \quad (3-136)$$

Переходя к переменной z ($z = e^{Ts}$), получим следующий вид выражения (3-136):

$$C(z) = G(z)R(z) \quad (3-137)$$

что является требуемым передаточным отношением для линейной системы с дискретным входным сигналом. Заметим, что выходной сигнал

Рис. 3.8. Линейная система с непрерывным (а) и дискретным (б) входными сигналами



системы может быть непрерывным, но выражение (3-137) определяет выходной сигнал только в моменты квантования.

Выражение (3-137) может быть получено иным способом при анализе импульсной переходной функции. Предположим, что единичный импульс прикладывается ко входу системы (рис. 3.8, б) при $t = 0$. Выходной сигнал системы описывается импульсной переходной функцией $g(t)$. Если на выходе системы расположен фиктивный квантователь S_2 , синхронизированный с S_1 , то выходной сигнал квантователя S_2 может быть записан в виде

$$c^*(t) = g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\delta(t - kT) \quad (3-138)$$

где $g(kT)$ – *весовая, или импульсная, последовательность* системы для $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Если ко входу линейной системы приложен дискретный сигнал $r^*(t)$, то выходной сигнал системы можно записать в форме

$$c(t) = r(0)g(t) + r(T)g(t - T) + r(2T)g(t - 2T) + \dots \quad (3-139)$$

При $t = kT$, где k – положительное целое число, выражение (3-139) примет вид

$$\begin{aligned} c(kT) &= r(0)g(kT) + r(T)g[(k - 1)T] + \dots + r(kT)g(0) = \\ &= \sum_{n=0}^k r(nT)g(kT - nT) \end{aligned} \quad (3-140)$$

Беря z -преобразование от обеих частей (3-140) и применяя теорему о свертке во временной области (3-113), получим

$$C(z) = R(z)G(z) \quad (3-141)$$

где

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} \quad (3-142)$$

является *импульсной передаточной функцией* линейной системы. Следовательно, импульсная передаточная функция $G(z)$ связывает z -преобразование входного сигнала $R(z)$ с z -преобразованием выходного $C(z)$ подобно тому, как передаточная функция непрерывной системы $G(s)$ связывает $R(s)$ и $C(s)$. Однако, если линейная система содержит только аналоговые элементы, выходной сигнал является функцией непрерывного аргумента t .

В выражении (3-141) z -преобразование определяет непрерывный сигнал $c(t)$ только в дискретные моменты времени $t = kT$, что является одним из ограничений метода z -преобразования. В некоторых случаях потеря информации между моментами квантования не имеет значения. В других же случаях, если в сигнале $c(t)$ между моментами квантования содержатся колебания большой амплитуды, метод z -преобразования часто может дать неправильные результаты. При сравнении выражений (3-135) и (3-142) видно, что импульсная передаточная функция $G(z)$ находится по импульсной переходной функции $g(t)$ точно так же, как $R(z)$ определяется по сигналу $r(t)$.

Последовательное соединение звеньев импульсных систем. При рас-

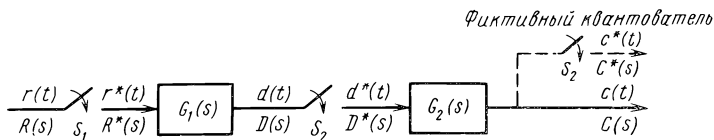
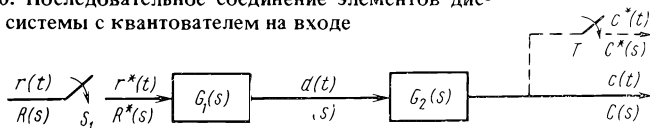


Рис. 3.9. Последовательное соединение элементов дискретной системы, разделенных квантователем

Рис. 3.10. Последовательное соединение элементов дискретной системы с квантователем на входе



смотрении дискретной системы с последовательным соединением звеньев необходимо внимательно подойти к нахождению передаточной функции всей системы. На рис. 3.9 показана дискретная система с последовательно соединенными звеньями G_1 и G_2 . Два звена разделены квантователем S_2 , который идентичен первому S_1 и синхронизирован с ним.

Импульсная передаточная функция всей системы определяется следующим образом. Сигналы на выходе звеньев G_1 и G_2

$$D(z) = G_1(z)R(z); \quad (3-143)$$

$$C(z) = G_2(z)D(z) \quad (3-144)$$

Подстановка (3-143) в выражение (3-144) дает

$$C(z) = G_1(z)G_2(z)R(z) \quad (145)$$

Следовательно, импульсная передаточная функция двух линейных звеньев, разделенных квантователем, равна произведению импульсных передаточных функций этих звеньев.

Когда два звена соединены последовательно, но не разделены квантователем, как показано на рис. 3.10, импульсная передаточная функция всей системы должна быть записана в виде

$$\mathcal{Z}[G_1(s)G_2(s)] = G_1G_2(z) = G_2G_1(z) \quad (3-146)$$

Заметим, что в общем случае

$$G_1G_2(z) \neq G_1(z)G_2(z) \quad (3-147)$$

Выход системы может быть определен как

$$C(z) = G_1G_2(z)R(z) \quad (3-148)$$

Передаточные функции цифровых систем с обратной связью и с боль-

* Для большего количества звеньев импульсная передаточная функция может быть записана как $\mathcal{Z}[G_1(s)G_2(s)G_3(s)] = G_1G_2G_3(z)$. Это замечание в дальнейшем используется без доказательства.

шим числом синхронизированных квантователей могут быть получены алгебраическими преобразованиями или методом сигнальных графов. Алгебраический метод громоздок и трудно реализуем, особенно в сложных случаях. Метод сигнальных графов рассмотрен в п. 3.10.

3.8. ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ФИКСАТОРА НУЛЕВОГО ПОРЯДКА И СВЯЗЬ МЕЖДУ $G(s)$ И $G(z)$

В гл. 2 было установлено, что передаточная функция фиксатора нулевого порядка [выражение (2-114)]

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (3-149)$$

z -Преобразование $G_{h0}(s)$ есть

$$G_{h0}(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \quad (3-150)$$

Этот результат очевиден, так как фиксатор нулевого порядка в течение периода квантования удерживает постоянным дискретный сигнал, полученный в результате выборки, и вычисление z -преобразования для передаточной функции фиксатора должно определять исходный квантованный сигнал. Однако в большинстве случаев на практике за фиксатором нулевого порядка следует непрерывная часть системы (рис. 3.11). z -Преобразование выходного сигнала системы в этом случае

$$C(z) = G_1(z)\dot{R}(z) \quad (3-151)$$

где

$$G_1(z) = \mathcal{Z}[G_{h0}(s)G(s)] \quad (3-152)$$

Подставляя передаточную функцию (3-149) в последнее выражение, получим

$$G_1(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s)\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[G(s)/s] \quad (3-153)$$

В рассматриваемом случае z -преобразование числителя передаточной функции фиксатора можно вынести за скобки в соответствии с теоремой сдвига во временной области (3-81). Однако z -преобразование $G(s)/s$ должно быть определено как для одного целого.

В гл. 2 было сделано замечание, что теоретически при бесконечном возрастании частоты квантования импульсная система стремится к соот-

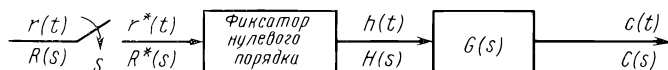


Рис. 3.11. Система с устройством выборки и хранения

ветствующей непрерывной системе. Однако это не означает, что для заданного преобразования

$$\mathcal{Z}[G(s)] = G(z) \quad (3-154)$$

следует

$$\lim_{T \rightarrow 0} G(z) = G(s) \quad (3-155)$$

Так как z -преобразование основано на амплитудно-импульсной модуляции непрерывного сигнала с периодом квантования $T(c)$, то устремление T к нулю лишено физического смысла. Другими словами, если сигнал $r(t)$ квантуется идеальным квантователем и при этом образуется сигнал $r^*(t)$, то устремление периода квантования к нулю не обеспечивает совпадения $r^*(t)$ и $r(t)$. Это объясняет, почему выражение (3-155) в общем случае не справедливо. Однако если дискретный сигнал $r^*(t)$ поступает на вход фиксатора нулевого порядка, выход которого есть $h(t)$, то

$$\lim_{T \rightarrow 0} h(t) = r(t) \quad (3-156)$$

или

$$\lim_{T \rightarrow 0} H(s) = R(s) \quad (3-157)$$

Таким образом, смысл последних двух выражений заключается в том, что если непрерывный сигнал послан на устройство выборки и хранения, то выходной сигнал последнего совпадает с $r(t)$ при устремлении периода квантования к нулю.

Пример 3.13. В качестве простой иллюстрации рассмотрим случай, когда входной сигнал $r(t)$ системы, показанной на рис. 3.11, равен e^{-at} . Тогда $R(s) = 1/(s + a)$. Дискретное преобразование $r(t)$ есть

$$R^*(s) = \frac{e^{-Ts}}{e^{Ts} - e^{-aT}} \quad (3-158)$$

Тогда преобразование Лапласа для сигнала на выходе фиксатора нулевого порядка определяется как

$$H(s) = G_{h0}(s)R^*(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{e^{-Ts}}{e^{Ts} - e^{-aT}} \quad (3-159)$$

Можно показать, что при устремлении периода квантования T к нулю

$$\lim_{T \rightarrow 0} H(s) = \frac{1}{s + a} = R(s) \quad (3-160)$$

Другим важным и полезным свойством z -преобразования является то, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{Z}[G_{h0}(s)G(s)] = G(s) \quad (3-161)$$

Это свойство может быть получено подстановкой (3-149) в выражении (3-161), что дает

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{Z}[G_{h0}(s)G(s)] = \lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s)\right] \quad (3-162)$$

Раскладывая e^{-Ts} в ряд и учитывая только первые два члена, приведем выражение (3-162) к виду

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{Z}[G_{h0}(s)G(s)] = \lim_{T \rightarrow 0} TG(z) \quad (3-163)$$

В результате замены переменной

$$G(z) = G^*(s) \Big|_{z=e^{Ts}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + j2n\pi/T) \Big|_{z=e^{Ts}} \quad (3-164)$$

выражение (3-163) можно записать как

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{Z}[G_{h0}(s)G(s)] = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + j2n\pi/T) \Big|_{z=e^{Ts}} = G(s) \quad (3-165)$$

Пример 3.14. Предположим, что передаточная функция дискретной системы, изображенной на рис. 3.11, имеет вид

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad (3-166)$$

где K и a — постоянные. Тогда

$$G_1(z) = \mathcal{Z}[G_{h0}(s)G(s)] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{K}{s^2(s+a)} \right] \quad (3-167)$$

Вычисляя z -преобразование для последнего выражения и производя его упрощение, получим

$$G_1(z) = \frac{KT}{a(z-1)} - \frac{K(1-e^{-aT})}{a^2(z-e^{-aT})} \quad (3-168)$$

Чтобы показать, что предел $G_1(z)$ при $T \rightarrow 0$ равен $G(s)$, положим $z = e^{Ts}$ и представим e^{Ts} в виде $1 + Ts$ (первые два члена разложения в степенной ряд). Аналогично, e^{-aT} представим как $1 - aT$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} G_1(z) &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{KT}{a(Ts + 1 - 1)} - \lim_{T \rightarrow 0} \frac{K(1 - 1 + aT)}{a^2(1 + sT - 1 + aT)} = \\ &= \frac{K}{as} - \frac{K}{a(s+a)} = \frac{K}{s(s+a)} = G(s) \end{aligned} \quad (3-169)$$

3.9. ПРОЦЕССЫ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ КВАНТОВАНИЯ

В п. 3.6 было подчеркнуто, что метод z -преобразования обладает достаточной точностью только применительно к системам, в которых сигналы слабо изменяются. Другими словами, метод z -преобразования эффективен только для систем, в которых сигналы могут быть адекватно представлены их выборками в моменты квантования.

Если метод z -преобразования не обеспечивает адекватного представления сигналов, необходимо определить реакцию системы между моментами квантования. В этом случае могут быть полезны *метод дробного квантования* и *метод модифицированного z -преобразования*, которые описаны ниже. Эти же методы используются в качестве основного математического аппарата при анализе цифровых систем с многократным квантованием и с переменным периодом квантования.

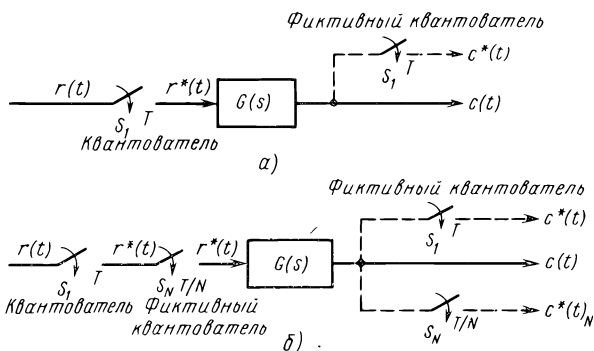


Рис. 3.12. Дискретная система:

а – с одним фиктивным квантователем; *б* – с двумя фиктивными квантователями для определения реакции между моментами квантования

Метод дробного квантования. На рис. 3.12, *а* показана структурная схема с фиктивным квантователем на выходе дискретной системы, анализируемой методом z -преобразования. Оба квантователя работают с основным периодом квантования $T(c)$ и обозначены S_1 . Связь между входом и выходом системы определяется соотношением (3-141), где импульсная передаточная функция задана выражением (3-142). Чтобы найти значения сигналов между моментами квантования, введем в систему два дополнительных фиктивных квантователя S_N , как показано на рис. 3.12, *б*. Период квантования S_N равен T/N , где N – положительное целое число, большее единицы. Так как входным сигналом фиктивного квантователя S_N на входе системы является последовательность импульсов с периодом T секунд, а частота квантования S_N в N раз больше, чем S_1 , то введение фиктивных квантователей в исходную систему не изменяет ее характеристик.

Выходной сигнал системы $c(t)$ может быть записан в виде суммы импульсных переходных функций

$$c(t) = \sum_{m=0}^{\infty} r(mT)g(t - mT) \quad (3-170)$$

где $g(t)$ – импульсная переходная функция системы. В любой момент квантования $t = kT/N$ значение $c(t)$ равно

$$c(kT/N) = \sum_{m=0}^{\infty} r(mT)g(kT/N - mT) \quad (3-171)$$

Выход фиктивного квантователя S_N запишем как

$$c^*(t)_N = \sum_{k=0}^{\infty} c(kT/N)\delta(t - kT/N) \quad (3-172)$$

Вычисляя z -преобразование от обеих частей выражения (3-172), получим

$$C(z)_N = \mathcal{Z}[c^*(t)_N] = \sum_{k=0}^{\infty} c(kT/N)z^{-k/N} \quad (3-173)$$

Сравнение выражения (3-173) с формулой обычного z -преобразования показывает, что $C(z)_N$ может быть получено непосредственно из $C(z)$ заменой z на $z^{1/N}$ и T на T/N , т.е.

$$C(z)_N = C(z) \Big|_{\substack{z=z^{1/N} \\ T=T/N}} \quad (3-174)$$

Подставляя (3-171) и (3-173), получим

$$C(z)_N = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r(mT)g(kT/N - mT)z^{-k/N} \quad (3-175)$$

Положим $v/N = (k/N - m)$, где v — целое число, тогда выражение (3-175) принимает вид

$$C(z)_N = \sum_{v=0}^{\infty} g(vT/N)z^{-v/N} \sum_{m=0}^{\infty} r(mT)z^{-m} \quad (3-176)$$

Обозначая

$$G(z)_N = \sum_{v=0}^{\infty} g(vT/N)z^{-v/N} = G(z) \Big|_{\substack{z=z^{1/N} \\ T=T/N}} \quad (3-177)$$

запишем выражение (2-176) в виде

$$C(z)_N = G(z)_N R(z) \quad (3-178)$$

Проведенные преобразования позволяют сделать вывод, что реакция между регулярными моментами квантования может быть получена заменой z и T в обычной импульсной передаточной функции системы. Необходимо подчеркнуть, что, если в системе присутствует фиксатор нулевого порядка, на член передаточной функции $1 \sim z^{-1}$ замена $T = T/N$ и $z = z^{1/N}$ влияния не оказывает.*

Число требуемых дополнительных значений $c(t)$ определяет значение N . В общем, если m — число дополнительных точек, то $N = m + 1$.

Пример 3.15. Пусть дискретная система, показанная на рис. 3.12, а, имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (3-179)$$

Входной сигнал $r(t)$ является единичной ступенчатой функцией. Период квантования равен 1 с. Требуется найти реакцию системы в моменты времени $t = kT/3, k = 0, 1, 2, \dots$

На основании (3-178) z -преобразование выхода системы в дробные моменты квантования запишем как

$$C(z)_3 = G(z)_3 R(z) \quad (3-180)$$

где

$$G(z)_3 = G(z) \Big|_{\substack{z=z^{1/3} \\ T=T/3}} = \frac{z}{z - e^{-T}} \Big|_{\substack{z=z^{1/3} \\ T=T/3}} \quad (3-181)$$

* Если $G(s)$ содержит фиксатор нулевого порядка, т. е. $G(s) = G_{h0}(s)G_1(s)$, то

$$G(z)_N = (1 - z^{-1}) \left[\mathcal{Z}[G_1(s)/s] \right]_{z=z^{1/N}, T=T/N}.$$

Следовательно,

$$\Omega(z)_3 = \frac{z^{1/3}}{z^{1/3} - e^{-1/3}} = \frac{z^{1/3}}{z^{1/3} - 0.717} \quad (3-182)$$

z -Преобразование единичной ступенчатой функции $R(z) = z/(z - 1)$. Тогда z -преобразование выхода системы при дробном квантовании

$$C(z)_3 = \frac{z^{1/3}}{z^{1/3} - 0.717} \frac{z}{z - 1} \quad (3-183)$$

Дробная степень z в последнем выражении затрудняет дальнейший анализ, поэтому введем новую переменную

$$z_3 = z^{1/3} \quad (3-184)$$

Тогда выражение (3-183) перепишем в виде

$$C(z)_3 = \frac{z_3}{z_3 - 0.717} \frac{z_3^3}{z_3^3 - 1} = \frac{z_3^4}{(z_3 - 0.717)(z_3^3 - 1)} \quad (3-185)$$

Раскладывая $C(z)_3$ в ряд по степеням z_3^{-1} , получим

$$\begin{aligned} C(z)_3 = & 1 + 0.717z_3^{-1} + 0.513z_3^{-2} + 1.368z_3^{-3} + 0.98z_3^{-4} + 0.703z_3^{-5} + \\ & + 1.504z_3^{-6} + 1.08z_3^{-7} + 0.773z_3^{-8} + 1.55z_3^{-9} + \dots \end{aligned} \quad (3-186)$$

Коэффициенты разложения $C(z)_3$ в ряд являются значениями $c^*(t)_3$ при $t = kT/3$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Переходный процесс $c^*(t)_3$ показан на рис. 3.13. Метод дробного z -преобразования показывает, что в данном случае обычное z -преобразование привело бы к неверному результату.

Метод модифицированного z -преобразования. Другим методом определения реакции дискретной системы между моментами квантования является метод модифицированного z -преобразования. Метод разработан как модификация обычного z -преобразования и предусматривает введение в дискретную систему фиктивной временной задержки.

Предположим, что требуется определить переходный процесс между моментами квантования для системы, показанной на рис. 3.14, а. Прежде всего соединим выход системы с блоком фиктивной задержки. Затем смещенный во времени выход системы проквантуем фиктивным квантователем (3.14, б). Фиктивное время задержки равно ΔT , где значение Δ лежит в пределах $0 \leq \Delta < 1$. Фиктивные квантователи синхронизированы с входным квантователем и имеют такую же частоту. Как видно на рис. 3.14, б и поскольку сигнал $c(t)$ остается неизменным, введение фиктивного квантователя не нарушает работу системы.

Выходной сигнал фиктивного квантователя с временной задержкой имеет вид

$$\begin{aligned} c^*(t - \Delta T) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} c(kT - \Delta T) \delta(t - kT) \end{aligned} \quad (3-187)$$

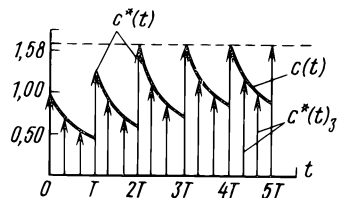


Рис. 3.13. Переходный процесс в дискретной системе

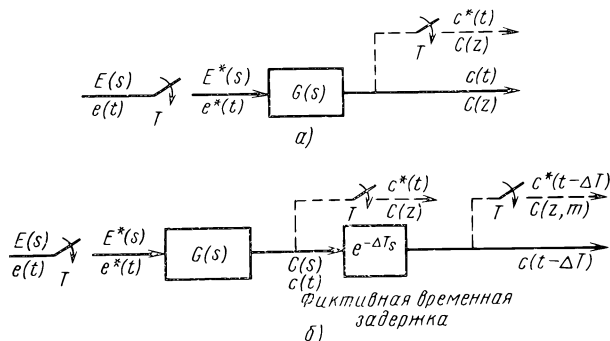


Рис. 3.14. Дискретная система управления:
а – разомкнутая; б – с фиктивной временной задержкой

z -Преобразование $c^*(t - \Delta T)$ может быть выражено как

$$\mathcal{Z}[c^*(t - \Delta T)] = C(z, \Delta) = \mathcal{Z}[c(t - \Delta T)] * \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\right] \Big|_{z=e^{Ts}} \quad (3-188)$$

или

$$C(z, \Delta) = \left[C(s) e^{-\Delta Ts} * \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \right] \Big|_{z=e^{Ts}} \quad (3-189)$$

Свертка в последнем выражении

$$C(z, \Delta) = \frac{1}{2\pi j} \left[\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} C(\xi) e^{-\Delta T\xi} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi \right] \Big|_{z=e^{Ts}} \quad (3-190)$$

Интеграл в выражении (3-190) может быть определен вдоль линии $c - j\infty$, $c + j\infty$ и полуокружности бесконечного радиуса, лежащей в левой или правой половине комплексной ξ -плоскости (как на рис. 2.35). Интегрирование по замкнутому контуру даст корректный результат для интеграла (3-190), если интеграл вдоль одной из полуокружностей равен нулю. Однако, если даже интегралы вдоль обеих полуокружностей конечны, результаты интегрирования по двум разным контурам будут различны.

Рассмотрим вначале интегрирование вдоль бесконечной полуокружности в левой половине ξ -плоскости. Так как член $e^{-\Delta T\xi}$ имеет полюс $\xi = -\infty$, то он расположен на бесконечной полуокружности в левой половине ξ -плоскости. Чтобы преодолеть эту трудность, введем параметр

$$m = 1 - \Delta \quad (3-191)$$

Поскольку $0 \leq \Delta < 1$, значение m также лежит между нулем и единицей. Если ввести обозначение

$$C(z, m) = C(z, \Delta) \Big|_{\Delta=1-m} \quad (3-192)$$

Выражение (3-190) примет вид

$$C(z, m) = \left[\frac{1}{2\pi j} \oint C(\xi) e^{-T\xi} e^{mT\xi} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi \right] \Big|_{z=e^{Ts}} \quad (3-193)$$

Теперь интеграл вдоль полуокружности бесконечного радиуса в левой половине ξ -плоскости равен нулю. Следовательно, контурный интеграл в формуле (3-193) равен интегралу вдоль прямой линии в выражении (3-190).

Применяя теорему о вычетах из теории функций комплексной переменной, запишем выражение (3-193) как

$$C(z, m) = z^{-1} \Sigma \text{Res} C(\xi) \frac{e^{mT\xi}}{1 - e^{T\xi} z^{-1}} \text{ в полюсах } C(\xi). \quad (3-194)$$

Выражение (3-194) дает одно из определений модифицированного z -преобразования для сигнала $c(t)$. Проведенный анализ обосновывает также замену фактора запаздывания Δ на параметр m .

Вычисляя интеграл по контуру, включающему бесконечную полуокружность в правой половине ξ -плоскости, для интеграла (3-190) вдоль линии получим

$$C(z, \Delta) = \frac{1}{2\pi j} \oint C(\xi) e^{-\Delta T \xi} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi \Big|_{z=e^{Ts}} \quad (3-195)$$

В этом случае интеграл вдоль бесконечной полуокружности равен нулю, если $\lim_{s \rightarrow \infty} C(s) = 0$. Применяя теорему о вычетах к последнему выражению, получим

$$C(z, \Delta) = - \Sigma \text{Res} C(\xi) e^{-\Delta T \xi} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} \Big|_{z=e^{Ts}} \quad (3-196)$$

в полюсах $1/[1 - e^{-T(s-\xi)}]$.

Так как полюсы функции $1/[1 - e^{-T(s-\xi)}]$ имеют вид $\xi = s \pm jn\omega_s$, $n = 0, 1, \dots$ и являются простыми, то выражение (3-196) дает в результате

$$C(z, \Delta) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s + jn\omega_s) e^{-\Delta T(s + jn\omega_s)} \Big|_{z=e^{Ts}} \quad (3-197)$$

Хотя в этом случае нет необходимости вводить параметр $m = 1 - \Delta$, тем не менее для унификации определения модифицированного z -преобразования запишем выражение (3-197) как

$$C(z, m) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s + jn\omega_s) e^{-(1-m)T(s + jn\omega_s)} \Big|_{z=e^{Ts}} \quad (3-198)$$

Еще одно выражение для модифицированного z -преобразования $c(t)$ получаем путем применения z -преобразования непосредственно к выражению (3-187). В результате

$$C(z, m) = \mathcal{Z}[c^*(t - \Delta T)] \Big|_{\Delta=1-m} = \sum_{k=0}^{\infty} c(kT + mT - T) z^{-k} \quad (3-199)$$

Используя теорему сдвига во временной области (3-81), можно упростить последнее выражение:

$$C(z, m) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c[(k+m)T] z^{-k} \quad (3-200)$$

Мы определили следующие три альтернативных выражения для модифицированного z -преобразования сигнала: (3-194), (3-198) и (3-200). Эти выражения справедливы при различных условиях и применяются для разных целей. Выражение (3-194) справедливо для любого сигнала $c(t)$, имеющего преобразование Лапласа для $C(s)$. Оно может быть использовано при вычислении модифицированного z -преобразования. Выражение (3-198) справедливо, если только $c(0) = 0$, т. е. оно не действительно для временных функций, имеющих разрыв непрерывности при $t = 0$. Выражение (3-200) является наиболее общим и справедливо для любого $c(t)$.

В заключение отметим, что модифицированное z -преобразование функции $c(t)$ обозначается следующим образом:

$$\text{модифицированное } z\text{-преобразование } c(t) = \mathcal{Z}_m[c(t)] = C(z, m). \quad (3-201)$$

Однако на практике $C(z, m)$ определяют так же, как z -преобразование функции с запаздыванием $c(t - \Delta T)$ или $c(t - T + mT)$, где $0 \leq \Delta < 1$ и $0 \leq m < 1$, т. е.

$$C(z, m) = \mathcal{Z}[c(t - \Delta T)] = \mathcal{Z}[c(t - T + mT)] \quad (3-202)$$

Значения сигнала между моментами квантования определяют из $C(z, m)$ при варьировании значения m (или Δ) от нуля до единицы. Ясно, что при $\Delta = 0$ модифицированное z -преобразование сводится к обычному z -преобразованию. Однако когда $\Delta = 0$, то $m = 1$, и следующее выражение в общем случае несправедливо:

$$C(z, m) \Big|_{m=1} = C(z) \quad (3-203)$$

Положив $z = 1$ в выражении (3-200), получим

$$C(z, m) \Big|_{m=1} = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c[(k+1)T] z^{-k} = C(z) - c(0) \quad (3-204)$$

Следовательно, выражение (3-203) в общем случае справедливо, только если $c(0) = 0$. Положив $m = 1$ в выражении (3-198), получим

$$C(z, m) \Big|_{m=1} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s + jn\omega_s) \Big|_{z=e^{Ts}} = C(z) \quad (3-205)$$

что объясняется справедливостью выражения (3-198) только для $c(0) = 0$.

Применение модифицированного z -преобразования иллюстрируется на следующих примерах. (Таблицы модифицированного и обычного z -преобразования можно найти в соответствующих учебниках и справочниках.)

Пример 3.16. Рассмотрим временную функцию $c(t) = e^{-at}$ ($t \geq 0$), где a — постоянная. Используя выражение (3-200), определим модифицированное z -преобразование $c(t)$:

$$C(z, m) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a(k+m)T} z^{-k} \quad (3-206)$$

Бесконечный ряд может быть представлен в комплексной форме

$$C(z, m) = \frac{e^{-maT}}{z - e^{-aT}} \quad (3-207)$$

Поскольку $c(0) \neq 0$, в этом случае $C(z, 1) \neq C(z)$, что и предполагалось.

Подставляя преобразование Лапласа $c(t)$ в выражение (3-194), получим

$$\begin{aligned} C(z, m) &= z^{-1} \left[\operatorname{Res} \frac{1}{s+a} \frac{e^{mT\xi}}{1 - e^{T\xi} z^{-1}} \right] \Big|_{\xi=-a} = z^{-1} \frac{e^{mT\xi}}{1 - e^{T\xi} z^{-1}} \Big|_{\xi=-a} = \\ &= \frac{e^{-maT}}{z - e^{-aT}} \end{aligned} \quad (3-208)$$

Разложение $G(z, m)$ в ряд дает

$$C(z, m) = e^{-maT} z^{-1} + e^{-(m+1)aT} z^{-2} + \dots + e^{-(m+k)aT} z^{-(k+1)} + \dots \quad (3-209)$$

Коэффициент этого бесконечного ряда при z^{-k} равен значению $c(t)$ между моментами квантования $t = (k-1)T$ и $t = kT$, где $k = 1, 2, \dots$ и $0 < m \leq 1$.

Выражения для модифицированного z -преобразования (3-198) можно использовать для определения передаточной функции системы, показанной на рис. 3.14. Так как преобразование Лапласа для выходного сигнала $c(t)$

$$C(s) = G(s)E^*(s) \quad (3-210)$$

то, подставляя это выражение в (3-198), получим

$$\begin{aligned} C(z, m) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) E^*(s + jn\omega_s) e^{-(1-m)T(s + jn\omega_s)} \Big|_{z=e^{Ts}} = \\ &= E(z) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) e^{-(1-m)T(s + jn\omega_s)} \Big|_{z=e^{Ts}} = E(z)G(z, m) \end{aligned} \quad (3-211)$$

где $G(z, m)$ — модифицированное z -преобразование $G(s)$. Приведенное выше выражение показывает, что модифицированное z -преобразование передаточной функции получается так же, как и z -преобразование функции времени, но уже в импульсной форме. Это можно продемонстрировать следующим образом:

$$\mathcal{Z}_m[E^*(s)] = E(z) \quad (3-212)$$

Следовательно,

$$\mathcal{Z}_m[C(s)] = C(z, m) = \mathcal{Z}_m[G(s)E^*(s)] = G(z, m)E(z) \quad (3-213)$$

Пример 3.17. Предположим, что система, показанная на рис. 3.14, имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \quad (3-214)$$

где a — постоянная. Ко входу системы приложена единичная ступенчатая функция $e(t) = u_s(t)$. Необходимо определить выход системы с помощью модифицированного z -преобразования.

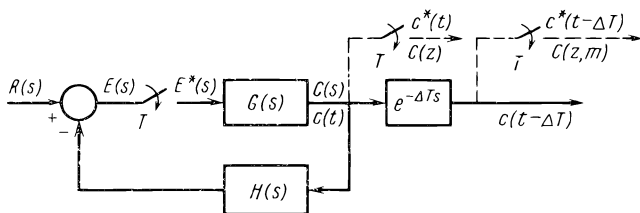


Рис. 3.15. Замкнутая дискретная система управления с фиктивной временной задержкой

Модифицированное z -преобразование выходного сигнала системы определяется с помощью выражения (3-213). Модифицированное z -преобразование $G(s)$ уже определено выражением (3-207).

Подстановка (3-207) и z -преобразования единичной ступенчатой функции в (3-213) дает

$$C(z, m) = G(z, m)E(z) = \frac{e^{-maT}}{z - e^{-aT}} \frac{z}{z - 1} \quad (3-215)$$

Можно показать, что при разложении $C(z, m)$ в ряд по степеням z^{-1} коэффициент при z^{-k} равен $e^{-maT} (1 - e^{-kaT}) / (1 - e^{-aT})$. Это выражение определяет значение переходной функции для временного интервала $(k-1)T < t \leq kT$, $k \geq 1$, при изменении m от нуля до единицы. Переходная функция будет иметь такой же вид, как на рис. 3.13.

Для замкнутой дискретной системы ее реакция между моментами квантования может быть определена таким же образом, как и для разомкнутой системы. На рис. 3.15 показана замкнутая дискретная система с фиктивной временной задержкой на выходе. На основе структурной схемы можно записать следующие уравнения:

$$C(z, m) = G(z, m)E(z) \quad (3-216)$$

$$E(z) = R(z) - GH(z)E(z) \quad (3-217)$$

где $GH(z)$ — z -преобразование $G(s)H(s)$. Из уравнений (3-216) и (3-217) получим модифицированное z -преобразование выходного сигнала системы

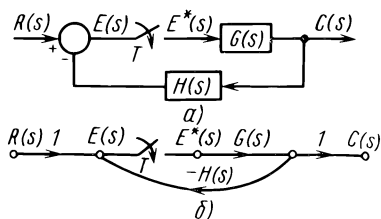
$$C(z, m) = \frac{G(z, m)}{1 + GH(z)} R(z) \quad (3-218)$$

Хотя первоначально метод модифицированного z -преобразования был разработан для описания сигналов между моментами квантования, он может быть также использован для систем с многократным прерыванием.

3.10. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАФОВ К ЦИФРОВЫМ СИСТЕМАМ

В предыдущих разделах для анализа замкнутых дискретных систем использовались методы z -преобразования и модифицированного z -преобразования. Нахождение передаточных функций одноконтурных систем проводилось с помощью алгебраических преобразований. Однако для дискретных систем со сложной структурой и несколькими квантователями

Рис. 3.16. Замкнутая цифровая система:
 а – структурная схема; б – эквивалентный граф



требуется рассмотрение, упорядоченное в большей степени, так как метод структурных преобразований может оказаться достаточно сложным.

Хорошо известно, что для определения передаточных функций линейных непрерывных систем может быть использован метод графов, в частности формула Мэсона [15, 16]. В этом параграфе мы рассмотрим возможность применения метода графов к дискретным и цифровым системам. Однако в большинстве цифровых систем управления присутствуют как цифровые, так и непрерывные сигналы, поэтому, хотя и можно построить граф, эквивалентный структурной схеме, формулой Мэсона непосредственно воспользоваться нельзя. Будут рассмотрены два подхода, расширяющие аппарат метода графов. Первый основан на формировании "дискретного графа", в котором все узловые переменные имеют дискретные значения. В этом случае формула Мэсона справедлива и может быть использована. Второй метод, разработанный Седлером и Бэки [17], позволяет определить связь между входными и выходными переменными непосредственно на основе графа системы. Для этого метода вводится формула, отличная от исходной формулы Мэсона.

Метод дискретных графов. По этому методу предусмотрена следующая процедура.

1. На основе структурной схемы системы определяем эквивалентный граф системы. Для иллюстрации на рис. 3.16 показана структурная схема системы и ее эквивалентный граф.

2. Следующий шаг включает в себя несколько операций и предусматривает построение на основе графа системы ее "дискретного графа". Для системы, показанной на рис. 3.16, б, запишем систему уравнений для всех узлов графа:

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s) \quad (3-219)$$

$$C(s) = G(s)E^*(s) \quad (3-220)$$

Заметим, что на этом этапе ко всем узлам применима формула Мэсона при условии, что выходные сигналы квантователей рассматриваются как входные переменные. Далее квантователи могут быть удалены из графа, поскольку определены их выходные переменные.

Переходя к дискретному преобразованию в обеих частях уравнений (3-219) и (3-220), получим

$$E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s) \quad (3-221)$$

$$C^*(s) = G^*(s)E^*(s) \quad (3-222)$$

где, как было показано выше,

$$[G(s)H(s)]^* = HG^*(s) = GH^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)H(s + jn\omega_s) \quad (3-223)$$

$$[E^*(s)]^* = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E^*(s + jn\omega_s) = E^*(s) \quad (3-224)$$

Так как уравнения (3-221) и (3-222) содержат только дискретные переменные, то теперь граф, соответствующий этим уравнениям, называется *дискретным графом* системы, изображенной на рис. 3.16. Дискретный граф показан на рис. 3.17.

3. После определения дискретного графа системы передаточная функция между любой парой входных и выходных узлов* этого графа может быть определена по формуле Мэсона. Например, для дискретного графа, показанного на рис. 3.17, где $C^*(s)$ и $E^*(s)$ относятся к выходным узлам, применение формулы Мэсона дает

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 + GH^*(s)} R^*(s) \quad (3-225)$$

$$E^*(s) = \frac{1}{1 + GH^*(s)} R^*(s) \quad (3-226)$$

4. Передаточные функции между входными и непрерывными выходными сигналами системы могут быть получены из *составного графа* [19]. Составной граф цифровой системы является комбинацией эквивалентного непрерывного и дискретного графов. Для его получения выходные узлы квантователей эквивалентного графа соединяем с аналогичными узлами дискретного графа с помощью ветвей с единичными коэффициентами усиления. В качестве примера на рис. 3.18 показан составной граф для системы, изображенной на рис. 3.16.

Применение формулы Мэсона к составному графу позволяет определить передаточные функции для всех цифровых и непрерывных выходных сигналов. Следовательно, из рис. 3.18 получим

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + GH^*(s)} R^*(s) \quad (3-227)$$

$$E(s) = R(s) - \frac{G(s)H(s)}{1 + GH^*(s)} R^*(s) \quad (3-228)$$

Описанная выше процедура может быть применена к линейным мно-

Рис. 3.17. Дискретный граф системы, показанной на рис. 3.16

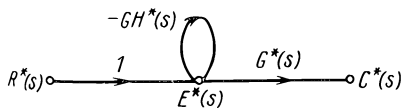
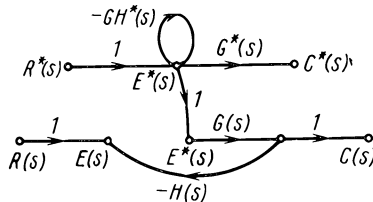


Рис. 3.18. Составной граф цифровой системы, показанной на рис. 3.16



* Согласно определениям метода графов под входным узлом понимают узел, имеющий только выходящие ветви, а под выходным — узел, объединяющий только входящие ветви.

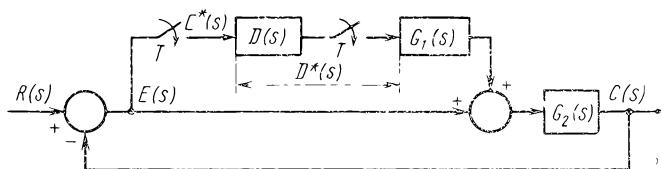


Рис. 3.19. Структурная схема цифровой системы управления

гоконтурным системам с несколькими квантователями, которые синхронизированы и имеют одинаковую частоту квантования. Модифицированные z -преобразования для $C(s)$ и $E(s)$ можно получить непосредственно из уравнений (3-227) и (3-228) соответственно.

При наличии достаточного опыта уравнивания, подобные (3-221) и (3-222), можно получить непосредственно на основе эквивалентного графа.

Пример 3.18. Определим методом дискретных графов непрерывные и дискретные сигналы системы (рис. 3.19) согласно рассмотренной процедуре.

1. Граф системы изображен на рис. 3.20.

2. Используя формулу Мэсона и на основе рис. 3.20 можно записать следующие уравнения:

$$E = \frac{R}{1 + G_2} - \frac{D^* G_1 G_2}{1 + G_2} E^* \quad (3-229)$$

$$Y_1 = \frac{R}{1 + G_2} + \frac{D^* G_1}{1 + G_2} E^* \quad (3-230)$$

$$C = \frac{R G_2}{1 + G_2} + \frac{D^* G_1 G_2}{1 + G_2} E^* \quad (3-231)$$

где $E(s)$, $Y_1(s)$ и $C(s)$ — выходные узлы; $R(s)$ и $E^*(s)$ — входные узлы.

Для простоты аргумент s опущен, т. е. функция $E^*(s)$ обозначена как E^* ; $R(s)$ — как R и т. д.

Определим дискретное преобразование для обеих частей уравнений (3-229) — (3-231), тогда

$$E^* = \left[\frac{R}{1 + G_2} \right]^* - D^* \left[\frac{G_1 G_2}{1 + G_2} \right]^* E^* \quad (3-232)$$

$$Y_1^* = \left[\frac{R}{1 + G_2} \right]^* + D^* \left[\frac{G_1}{1 + G_2} \right]^* E^* \quad (3-233)$$

$$C^* = \left[\frac{R G_2}{1 + G_2} \right]^* + D^* \left[\frac{G_1 G_2}{1 + G_2} \right]^* E^* \quad (3-234)$$

3. Используя последние шесть уравнений, построим составной граф системы (рис. 3.21).

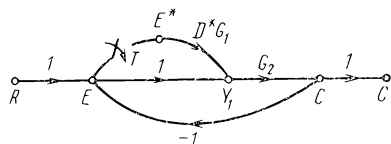
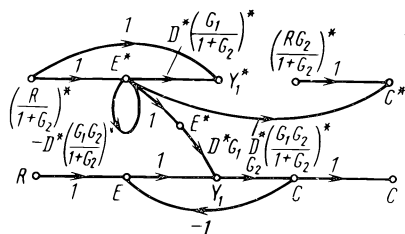


Рис. 3.20. Эквивалентный граф цифровой системы, показанной на рис. 3.19

Рис. 3.21. Составной граф системы, показанной на рис. 3.19



4. Применяя формулу Мэсона к составному графу этой системы, определим ее непрерывные и дискретные выходные сигналы

$$\begin{aligned}
 C^* &= \left[\frac{RG_2}{1+G_2} \right]^* + \frac{D^* \left[\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right]^*}{1 + D^* \left[\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right]^*} \left[\frac{R}{1+G_2} \right]^* = \\
 &= \frac{\left[\frac{RG_2}{1+G_2} \right]^* + \left[\left(\frac{RG_2}{1+G_2} \right)^* + \left(\frac{R}{1+G_2} \right)^* \right] D^* \left[\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right]^*}{1 + D^* \left[\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right]^*} \quad (3-235)
 \end{aligned}$$

Так как

$$\left[\frac{RG_2}{1+G_2} \right]^* + \left[\frac{R}{1+G_2} \right]^* = R^* \quad (3-236)^*$$

то уравнение (3-235) запишем в виде

$$C^* = \frac{\left[\frac{RG_2}{1+G_2} \right]^* + R^* D^* \left[\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right]^*}{1 + D^* \left[\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right]^*} \quad (3-237)$$

Переходя к z-преобразованию в уравнении (3-237), получим

$$C(z) = \frac{\frac{RG_2}{1+G_2}(z) + R(z)D(z)\frac{G_1 G_2}{1+G_2}(z)}{1 + D(z)\frac{G_1 G_2}{1+G_2}(z)} \quad (3-238)$$

где

$$\frac{RG_2}{1+G_2}(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{R(s)G_2(s)}{1+G_2(s)} \right] \quad (3-239)$$

а $\left[\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right](z)$ определяется аналогично.

Для $C(s)$ как для выходного узла составного графа определяем

$$C = \frac{RG_2 \left[1 + D^* \left(\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right)^* \right] + \left[\frac{R}{1+G_2} \right]^* G_1 G_2 D^*}{1 + G_2 + D^* \left[\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right]^* + G_2 D^* \left[\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right]^*} =$$

* Для доказательства этого равенства достаточно "снять звездочки" в обеих частях уравнения и сделать несложные преобразования.

$$= \frac{RG_2}{1+G_2} + \frac{\left[\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right] D^* \left[\frac{R}{1+G_2} \right]^*}{1 + D^* \left[\frac{G_1 G_2}{1+G_2} \right]^*} \quad (3-240)$$

Для простоты записи в последнем уравнении аргумент s опущен.

Метод прямого графа. Метод, предложенный Седлером и Бэки [17] является прямым и позволяет определить связь между входными и выходными сигналами на основе графа цифровой системы управления без промежуточных операций.

Так как в цифровых системах обычно присутствуют и непрерывные, и цифровые сигналы, необходимо ввести новое обозначение узла для отражения операции квантования. Вводятся два типа узлов:

белый узел \circ используется для представления непрерывных переменных;

черный узел \bullet используется для представления дискретных, или квантованных, переменных.

После введения черных узлов все квантователи и цифровые операции в цифровой системе должны изображаться с их помощью. Кроме того, все узловые переменные нового графа могут быть представлены переменными "без звездочки", так как переменная, представленная черным узлом, равна в дискретной форме сумме всех сигналов, входящих в узел.

В качестве примера на рис. 3.22 показан граф системы (см. рис. 3.16, б), на котором операция квантования отражена черным узлом. Переменная в черном узле определяется как

$$Y_1(s) = E^*(s). \quad (3-241)$$

Для удобства входная переменная принимается равной единице, для чего вводится ветвь с коэффициентом усиления, равным входному сигналу (см. рис. 3.22).

В дополнение к таким понятиям как узлы и ветви, используемым в традиционном методе графов, необходимо ввести следующие.

Сегмент, обозначаемый как $\sigma(y_m, y_n)$, есть связь между двумя узлами y_m и y_n , где y_m — входной, или черный, узел и y_n — выходной, или белый, узел, а все остальные узлы сегмента σ белые. Ни один узел сегмента не следует проходить более одного раза.

Связи и петли первого типа содержат только белые узлы, они соответственно обозначаются $u^{(1)}$ и $v^{(1)}$.

Связи и петли второго типа содержат по крайней мере один черный узел, они обозначаются соответственно $u^{(2)}$ и $v^{(2)}$.

Элементарная связь первого типа является элементарной, если при движении по ней любой узел проходит только один раз.

Элементарная петля первого типа является элементарной, если любой

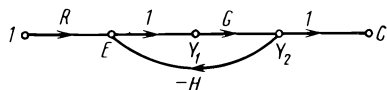


Рис. 3.22. Граф (см. рис. 3.16, б) с операцией квантования, обозначенной черным узлом

содержащийся в ней узел (кроме совпадающих входного и выходного узлов петли) проходят не более одного раза.

Элементарная связь второго типа существует в том случае, если она объединяет отдельные сегменты, и каждый черный узел встречается в ней не более одного раза.

Элементарная петля второго типа объединяет отдельные сегменты, при этом каждый черный узел встречается в ней не более одного раза.

Прямая связь соединяет входной узел с выходными. Прямая связь может быть первого и второго типов.

Касание первого типа наблюдается тогда, когда связь или петля первого типа имеет с другой связью, петлей или сегментом первого типа только один общий узел, и этот узел является белым.

Касание второго типа наблюдается тогда и только тогда, когда связь или петля второго типа имеет с другой связью или петлей того же типа один общий черный узел.

Коэффициент передачи связи u есть произведение коэффициентов передачи всех ветвей этой связи. Для связи, содержащей черные узлы, необходимо определить дискретную форму коэффициентов передачи, предшествующих черным узлам. Будем использовать $P_i^{(1)}$ для обозначения коэффициента передачи i -й элементарной связи первого типа и $P_i^{(2)}$ — то же для второго типа.

Коэффициент передачи сегмента σ_i , обозначаемый S_i , есть произведение коэффициентов передачи всех ветвей сегмента.

Коэффициент передачи петли v вычисляется как произведение коэффициентов передачи всех ветвей петли. Обозначим через $L_i^{(1)}$ коэффициент передачи i -й элементарной петли первого типа, а через $L_i^{(2)}$ коэффициент передачи i -й элементарной петли второго типа.

Для иллюстрации применения определенных выше терминов рассмотрим граф, показанный на рис. 3.22. Сегменты и соответствующие им коэффициенты передачи определяются следующим образом:

$$\sigma_1 = \sigma(1, Y_1) = (1, E, Y_1), \quad S_1 = R^*$$

$$\sigma_2 = \sigma(Y_1, C) = (Y_1, C), \quad S_2 = G$$

Элементарные связи первого типа между входным узлом I и выходным C отсутствуют.

Между узлами I и C можно выделить одну элементарную связь второго типа

$$u_1^{(2)} = (1, E, Y_1, C)$$

с коэффициентом передачи

$$P_1^{(2)} = R^*G$$

Элементарные петли первого типа на графе отсутствуют.

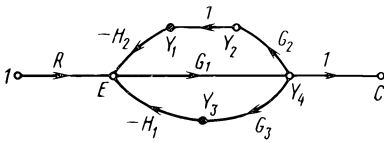
Можно выделить одну элементарную петлю второго типа

$$v_1^{(2)} = (Y_1, Y_2, E, Y_1)$$

с коэффициентом передачи

$$L_1^{(2)} = -(GH)^*$$

Рис. 3.23. Граф цифровой системы



Теперь в качестве примера рассмотрим более тщательно граф, изображенный на рис. 3.23.

Между входным узлом 1 и выходным C можно выделить следующие элементарные связи:

первого типа

$$u_1^{(1)} = (1, E, Y_4, C), \quad P_1^{(1)} = RG_1$$

второго типа

$$u_1^{(2)} = (1, E, Y_4, Y_2, Y_1, E, Y_4, C)$$

$$P_1^{(2)} = -(RG_1 G_2) * H_2 G_1$$

$$u_2^{(2)} = (1, E, Y_4, Y_3, E, Y_4, C)$$

$$P_2^{(2)} = -(RG_1 G_3) * H_1 G_1$$

$$u_3^{(2)} = (1, E, Y_4, Y_3, E, Y_4, Y_2, Y_1, E, Y_4, C)$$

$$P_3^{(2)} = (RG_1 G_3) * (H_1 G_1 G_2) * H_2 G_1$$

$$u_4^{(2)} = (1, E, Y_4, Y_2, Y_1, E, Y_4, Y_3, E, Y_4, C)$$

$$P_4^{(2)} = (RG_1 G_2) * (H_2 G_1 G_3) * H_1 G_1$$

Заметим, что при выделении элементарных связей второго типа можно проходить белые узлы несколько раз, при этом каждый раз один и тот же узел относится к различным сегментам. Например, для связи $u_2^{(2)}$ при прохождении узла Y_4 первый раз он относится к сегменту $(1, E, Y_4, Y_3)$, второй раз — к сегменту (Y_3, E, Y_4, C) . Аналогично элементарная связь второго типа $u_3^{(2)}$ содержит следующие сегменты:

$$\sigma_1(1, Y_3) = (1, E, Y_4, Y_3)$$

$$\sigma_2(Y_3, Y_1) = (Y_3, E, Y_4, Y_2, Y_1)$$

$$\sigma_3(Y_1, C) = (Y_1, E, Y_4, C)$$

Хотя узлы E и Y_4 проходят связью $u_3^{(2)}$ 3 раза, каждый раз при их прохождении они относятся к различным сегментам.

Элементарные петли первого типа в графе не содержатся.

Можно выделить следующие петли второго типа:

$$v_1^{(2)} = (Y_3, E, Y_4, Y_3), L_1^{(2)} = -(G_1 G_3 H_1)^*,$$

$$v_2^{(2)} = (Y_1, E, Y_4, Y_1), L_2^{(2)} = -(G_1 G_2 H_2)^*;$$

$$v_3^{(2)} = (Y_3, E, Y_4, Y_2, Y_1, E, Y_4, Y_3), L_3^{(2)} = (G_1 G_2 H_1)^* (G_1 G_3 H_2)^*;$$

Определить связь между входом и выходом системы с использованием графа можно по формуле

$$C = \frac{\Delta_j^{(1)} \otimes \sum_{i=1}^N P_i \Delta_i^{(2)}}{\Delta^{(1)} \Delta^{(2)}} \quad (3-242)$$

где C — выходная переменная графа (значение входного сигнала принято равным единице); P_i — коэффициент передачи i -й элементарной прямой связи (первого или второго типа), при этом общее число элементарных прямых связей (первого и второго типа) равно N ; $\Delta^{(1)}$ — первый детерминант графа, определяемый как

$$\Delta^{(1)} = 1 - \sum L_i^{(1)} + \sum L_i^{(1)} L_j^{(1)} - \sum L_i^{(1)} L_j^{(1)} L_k^{(1)} + \dots \quad (3-243)$$

где сумма коэффициентов передачи всех элементарных петель первого типа

$$\sum L_i^{(1)} \quad (3-244)$$

сумма произведений коэффициентов передачи всех некасающихся элементарных петель первого типа (взятых по двое)

$$\sum L_i^{(1)} L_j^{(1)} \quad (3-245)$$

сумма произведений коэффициентов передачи всех некасающихся элементарных петель первого типа (взятых по трое)

$$\sum L_i^{(1)} L_j^{(1)} L_k^{(1)} \quad (3-246)$$

второй детерминант графа

$$\Delta^2 = 1 - \sum L_i^{(2)} + \sum L_i^{(2)} L_j^{(2)} - \sum L_i^{(2)} L_j^{(2)} L_k^{(2)} + \dots \quad (3-247)$$

Слагаемые в уравнении (3-247) интерпретируются так же, как для первого детерминанта, но включают коэффициенты передачи элементарных петель второго типа.

$\Delta_i^{(2)}$ — второй детерминант $\Delta^{(2)}$ для части графа, которая не имеет касания второго типа (но содержит по крайней мере один черный узел) с i -й прямой связью. Заметим, что если прямая связь первого типа, то $\Delta_i^{(2)} = \Delta^{(2)}$.

Символ \otimes означает операцию умножения $\Delta_j^{(1)} / \Delta^{(1)}$ на коэффициент передачи j -го сегмента для всех сегментов, входящих в

$$\sum_{i=1}^N \frac{P_i \Delta_i^{(2)}}{\Delta^{(2)}}$$

Если коэффициент передачи какого-либо сегмента имеет дискретную форму, то при умножении должно использоваться соответствующее непрерывное значение, после чего результат квантуется.

$\Delta_j^{(1)}$ — первый детерминант $\Delta^{(1)}$ части графа, которая не касается j -го сегмента σ_j .

Проследим процедуру этого метода на примере.

Пример 3.19. Рассмотрим цифровую систему, граф которой показан на рис. 3.22. Для этого графа ранее было получено следующее.

Элементарные прямые связи первого типа – нет.

Элементарные прямые связи второго типа $u_1^{(2)} = (1, E, Y_1, C)$.

Коэффициент передачи связи $P_1^{(2)} = R^*G$.

Элементарные петли первого типа – нет.

Следовательно, $\Delta^{(1)} = 1$.

Элементарные петли второго типа: $v_1^{(2)} = (Y_1, Y_2, E, Y_1)$.

Коэффициент передачи петли: $L_1^{(2)} = -(GH)^*$.

Следовательно, $\Delta^{(2)} = 1 - L_1^{(2)} = 1 + (GH)^*$.

Используя формулу (3-242), получим

$$C = \frac{\Delta_1^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \otimes \frac{P_1^{(2)} \Delta_1^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \quad (3-248)$$

Так как $u_1^{(2)}$ имеет касание второго типа с $v_1^{(2)}$, то $\Delta_1^{(2)} = 1$ и выражение (3-248) примет вид

$$C = \frac{\Delta_1^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \otimes \frac{R^*G}{1 + (GH)^*} \quad (3-249)$$

В выражении $R^*G/[1 + (GH)^*]$ уравнения (3-249) R^* и G^* являются коэффициентами передачи сегментов, и операция \otimes должна быть выполнена над этими величинами. Поскольку $\Delta^{(1)} = 1$ и $\Delta_j^{(1)} = 1$ для всех j , то получим

$$C = \frac{R^*G}{1 + (GH)^*} \quad (3-250)$$

что согласуется с результатом (3-227), полученным выше.

z-Преобразование выходного сигнала может быть получено непосредственно из выражения (3-250).

Пример 3.20. Определим связь между входом и выходом системы, показанной на рис. 3.19. Граф системы с черными узлами, отражающими цифровые операции, показан на рис. 3.24.

Из графа могут быть определены следующие сегменты, прямые связи и петли:

Сегменты

$$\sigma_1 = (1, E, Y_3, Y_4, C)$$

$$S_1 = RG_2$$

$$\sigma_2 = (1, E, Y_1)$$

$$S_2 = R^*$$

$$\sigma_3 = (Y_1, Y_2)$$

$$S_3 = D^*$$

$$\sigma_4 = (Y_2, Y_3, Y_4, C)$$

$$S_4 = G_1 G_2$$

$$\sigma_5 = (Y_2, Y_3, Y_4, E, Y_1)$$

$$S_5 = -(G_1 G_2)^*$$

Элементарные прямые связи между узлами 1 и C:

первого типа:

$$u_1^{(1)} = (1, E, Y_3, Y_4, C)$$

$$P_1^{(1)} = RG_2$$

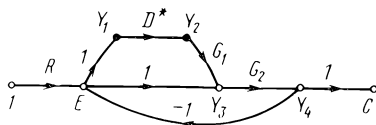


Рис. 3.24. Граф цифровой системы, показанной на рис. 3.19

второго типа:

$$u_1^{(2)} = (1, E, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, C) \quad P_1^{(2)} = R * D * G_1 G_2$$

Между узлами 1 и С графа имеется только одна элементарная связь второго типа. Связь $(1, E, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, E, Y_3, Y_4, C)$ не является элементарной второго типа, хотя черные узлы проходят не более, чем один раз. Но при этом нарушается условие, что в нее должны входить элементы различных сегментов.

Элементарная петля первого типа

$$v_1^{(1)} = (E, Y_3, Y_4, E) \quad L_1^{(1)} = -G_2$$

Элементарная петля второго типа

$$v_1^{(2)} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, E, Y_1) \quad L_1^{(2)} = -D * (G_1 G_2) *$$

Первый детерминант

$$\Delta^{(1)} = 1 - L_1^{(1)} = 1 + G_2 \quad (3-251)$$

Второй детерминант

$$\Delta^{(2)} = 1 - L_1^{(2)} = 1 + D * (G_1 G_2) * \quad (3-252)$$

Для $u_1^{(1)}$:

$$\Delta_1^{(2)} = 1 + D * (G_1 G_2) *$$

а для $u_1^{(2)}$:

$$\Delta_2^{(2)} = 1$$

На основе формулы (3-242) выход системы может быть записан в виде

$$\begin{aligned} C &= \frac{\Delta_1^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \otimes \frac{P_1^{(1)} \Delta_1^{(2)} + P_1^{(2)} \Delta_2^{(2)}}{\Delta^{(2)}} = \\ &= \frac{\Delta_1^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \otimes \frac{R G_2 [1 + D * (G_1 G_2) *] + R * D * G_1 G_2}{1 + D * (G_1 G_2) *} \end{aligned} \quad (3-253)$$

Второй член правой части выражения (3-253)

$$\frac{R G_2 [1 + D * (G_1 G_2) *] + R * D * G_1 G_2}{1 + D * (G_1 G_2) *} = \frac{S_1 (1 - S_3 S_5) + S_2 S_3 S_4}{1 - S_3 S_5} \quad (3-254)$$

где S_j – коэффициент передачи j -го сегмента.

Детерминант $\Delta_j^{(1)}$ для $j = 1, 2, 3, 4, 5$ находится из $\Delta^{(1)}$ -й части графа, которая не касается j -го сегмента. Следовательно,

$$\sigma_1: \Delta_1^{(1)} = 1$$

$$\sigma_2: \Delta_2^{(1)} = 1$$

$$\sigma_3: \Delta_3^{(1)} = \Delta^{(1)} = 1 + G_2$$

$$\sigma_4: \Delta_4^{(1)} = 1$$

$$\sigma_5: \Delta_5^{(1)} = 1$$

Умножая теперь коэффициенты передачи сегментов на соответствующие дроби $\Delta_j^{(1)} / \Delta^{(1)}$ согласно выражению (3-253) (если коэффициент передачи сегмента имеет дискретную форму, то в умножении участвует соответствующее непрерывное значение, а результат квантуется), запишем выражение для выхода системы

$$C = \frac{RG_2}{1+G_2} + \frac{(R/1+G_2)*D*(G_1G_2/1+G_2)}{1+D*(G_1G_2/1+G_2)*} \quad (3-255)$$

что согласуется с результатом (3-240), полученным выше.

Пример 3.21. Рассмотрим цифровую систему, показанную на рис. 3.25.

На основе графа рис. 3.25, б можно определить следующие сегменты, прямые связи и петли:

Сегменты:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1, E, Y_1) & S_1 &= R* \\ \sigma_2 &= (Y_1, Y_2, Y_4, C) & S_2 &= G_1G_2 \\ \sigma_3 &= (Y_3, Y_2, Y_4, C) & S_3 &= -G_2H \\ \sigma_4 &= (Y_1, Y_2, Y_4, Y_3) & S_4 &= (G_1G_2)* \\ \sigma_5 &= (Y_3, Y_2, Y_4, E, Y_1) & S_5 &= (G_2H)* \end{aligned}$$

Элементарные прямые связи между узлами l и C :

первого типа – нет

$$p_i^{(1)} = 0 \text{ для всех } i$$

второго типа.

$$\begin{aligned} u_1^{(2)} &= (1, E, Y_1, Y_2, Y_4, C) & p_1^{(2)} &= R*G_1G_2 \\ u_2^{(2)} &= (1, E, Y_1, Y_2, Y_4, Y_3, Y_2, Y_4, C) & p_2^{(2)} &= R*(G_1G_2)*(-G_2H) \end{aligned}$$

Элементарные петли.

первого типа – нет;

$$L_i^{(1)} = 0 \text{ для всех } i$$

второго типа:

$$\begin{aligned} v_1^{(2)} &= (E, Y_1, Y_2, Y_4, E) & L_1^{(2)} &= -(G_1G_2)* \\ v_2^{(2)} &= (Y_2, Y_4, Y_3, Y_2) & L_2^{(2)} &= -(G_2H)* \\ v_3^{(2)} &= (Y_1, Y_2, Y_4, Y_3, Y_2, Y_4, E, Y_1) & L_3^{(2)} &= (G_1G_2)*(G_2H)* \end{aligned}$$

Первый детерминант $\Delta^{(1)} = 1$, так как нет петель первого типа.

Второй детерминант: $\Delta^{(2)} = 1 - L_1^{(2)} + L_2^{(2)} + L_3^{(2)} + L_1^{(2)}L_2^{(2)}$.

Последний член правой части последнего уравнения есть произведение коэффициентов передачи петель $v_2^{(2)}$ и $v_3^{(2)}$, которые не имеют касания второго типа. Поэтому $\Delta^{(1)} = 1, \Delta^{(2)} = 1$ для всех j .

Выходной сигнал системы может быть теперь получен по формуле (3-242):

$$\begin{aligned} C &= \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \otimes \frac{P_1^{(2)}\Delta_1^{(2)} + P_2^{(2)}\Delta_2^{(2)}}{\Delta^{(2)}} = \\ &= \frac{R*G_1G_2[1 + (G_2H)*] - R*(G_1G_2)*G_2H}{1 + (G_1G_2)* + (G_2H)*} \end{aligned} \quad (3-256)$$

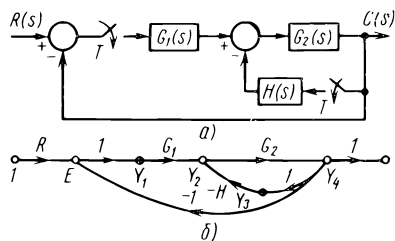


Рис. 3.25. Цифровая система управления:
а – структурная схема; б – граф

Выходной сигнал системы как функцию z получаем применением z -преобразования к обеим частям выражения (3-256):

$$C(z) = \frac{G_1 G_2(z)[1 + G_2 H(z)] - G_1 G_2(z) G_2 H(z)}{1 + G_1 G_2(z) + G_2 H(z)} R(z) \quad (3-257)$$

Из рассмотренных в этом параграфе примеров видно, что метод прямого графа проще, чем метод дискретного графа, при определении выходного сигнала цифровой системы. Дальнейшее сравнение двух методов показывает, что метод дискретного графа, возможно, легче для понимания, поскольку метод прямого графа требует освоения топологической интерпретации и дополнительных определений. Однако оба метода полезны тем, что результаты, полученные одним из них, могут быть проверены с помощью другого. В той форме, в которой он приведен в этом параграфе, прямой метод может быть применен при анализе системы на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Квантование и z -преобразование:

1. Lago, G. V., "Additions to Sampled-Data Theory," *Proc. National Electronics Conf.*, Vol. 10, 1954, pp. 758-766.
2. Helm, H. A., "The Z-Transformation," *Bell System Technical Journal*, Vol. 38, January 1959, pp. 177-196.
3. Ragazzini, J. R., and Zadeh, L. H., "The Analysis of Sampled-Data Systems," *Trans. AIEE*, Vol. 71, Part 2, 1952, pp. 225-234.
4. Kuo, B. C., *Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.
5. Jury, E. I., "A General z -Transform Formula for Sampled-Data Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, 5, October 1967, pp. 606-608.
6. Jury, E. I., *Theory and Application of the z -Transform Method*. John Wiley & Sons, New York, 1964.
7. Kliger, I., and Lipinski, W. C., "The z -Transform of a Product of Two Functions," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-9, October 1964, pp. 582-583.
8. Will, P. M., "Variable Frequency Sampling," *IRE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-7, October 1962, pp. 126.
9. Dorf, R. C., Farren, M. C., and Phillips, C. A., "Adaptive Sampling Frequency For Sampled-Data Control Systems," *IRE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-7, January 1962, pp. 38-47.
10. Cavin, R. K., III, Chenoweth, D. L., and Phillips, C. L., "The z -Transform of an Impulse Function," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, February 1967, pp. 113.
11. Phillips, C. L., "A Note on Sampled-Data Control Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-10, October 1965, pp. 489-490.
12. Lago, G. V., "Additions to z -Transformation Theory for Sampled-Data System," *Trans. AIEE*, 74, Part 2, January 1955, pp. 403-407.
13. Hufnagel, R. E., "Analysis of Cyclic-Rate Sampled-data Feedback-Control Systems," *Trans. AIEE (Applications and Industry)*, Vol. 77, November 1958, pp. 421-425.
14. Jury, E. I., and Mullin, F. J., "The Analysis of Sampled-data Control Systems With a Periodically Time-varying Sampling Rate," *IRE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-4, May 1959, pp. 15-21.

Метод графов:

15. Mason, S. J., "Feedback Theory — Some Properties of Flow Graphs," *Proc IRE*, 41, September 1953, pp. 1144-1156.
16. Mason, S. J., "Feedback Theory — Further Properties of Signal Flow Graphs," *Proc IRE*, 44, July 1956, pp. 960-966.
17. Sedlar, M., and Bekey, G. A., "Signal Flow Graphs of Sampled-Data Systems: A New Formulation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, 2, April 1967, pp. 154-161.
18. Ash, R., Kim, W. E., and Kranc, G. M., "A General Flow Graph Technique for the Solution of Multiloop Sampled Systems," *Trans. of ASME Journal of Basic Engineering*, June 1960, pp. 360-370.
19. Kuo, B. C., "Composite Flow Graph Technique for the Solution of Multiloop, Multi-sampler, Sampled Systems," *IRE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-6, 1961, pp. 343-344.
20. Salzer, J. M., "Signal Flow Techniques for Digital Compensation," *Proc. Computers in Control Systems Conference*, October 1957.
21. Salzer, J. M., "Signal Flow Reductions in Sampled-Data Systems," *IRE WESCON Convention Record*, Part 4, 1957, pp. 166-170.

Импульсная передаточная функция.

22. Barker, R. H., "The Pulse Transfer Function and Its Application to Servo Systems," *Proc. IEE*, London, 99, Part 4, December 1952, pp. 302-317.
23. Lendaris, G. G., and Jury, E. I., "Input-Output Relationships for Multiple Sampled-Loop Systems," *Trans. AIEE*, 79, Part 2, January 1960, pp. 375-385.
24. Tou, J. T., "Simplified Technique for the Determination of Output Transforms of Multiloop, Multisampler, Variable-Rate Discrete-Data Systems," *Proc. of the IRE*, 49, March 1961, pp. 646-647.
25. Dejka, W. J., "The Generation of Discrete Functions with a Digital Computer," *IRE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-7, July 1962, pp. 56-57.

Модифицированное z-преобразование

26. Jury, E. I., "Additions to the Modified z-Transform Method," *IRE WESCON Convention Record*, Part 4, 1957, pp. 136-156.
27. Jury, E. I., and Farmanfarma, "Tables of z-Transforms and Modified z-Transforms of Various Sampled-Data Systems Configurations," Univ. of California (Berkeley), Electronics Research Lab., Report 136A, Ser. 60, 1955.
28. Mesa, W., and Phillips, C. L., "A Theorem on the Modified z-Transform," *IEEE Trans on Automatic Control*, Vol. AC-10, October 1965, pp. 489.

ГЛАВА 4. МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ и синтез линейных систем обычно осуществляется одним из двух основных методов. Первый метод основан на использовании преобразования Лапласа и z -преобразования, передаточных функций, структурных схем и графов. Название второго — метода пространства состояний — отождествляют с современной теорией управления, поскольку подавляющее большинство современных методов проектирования систем управления основано на описании и моделировании систем в пространстве состояний.

В широком смысле метод пространства состояний, по крайней мере при изучении цифровых систем управления, имеет следующие преимущества перед традиционным частотным методом:

- описание в пространстве состояний является естественным и удобным для решения задач на ЭВМ;

- позволяет унифицировать описание цифровых систем с различными типами квантования;

- позволяет унифицировать описание одномерных и многомерных систем;

- может применяться к некоторым типам нелинейных и нестационарных систем.

В пространстве состояний непрерывная система описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка, называемых *уравнениями состояния*. Для цифровых систем, содержащих только дискретные элементы, уравнения состояния — разностные уравнения первого порядка. Как уже говорилось, цифровая система может содержать аналоговые и цифровые элементы, и, следовательно, уравнения состояния в общем случае будут состоять одновременно из дифференциальных и разностных уравнений первого порядка. Однако не должно складываться впечатление, что использование метода пространства состояний для анализа и синтеза систем управления всегда имеет очевидные преимущества. Достоинство хорошо известного частотного метода состоит в его компактности, и большое число задач проектирования реальных систем управления по-прежнему решается с использованием методов синтеза, основанных на определении передаточной функции.

Так как цифровые системы часто содержат аналоговые элементы и разностные уравнения иногда используются для приближенного описания динамики аналоговых систем, рассмотрим вначале уравнения состояния и их решения для непрерывных систем.

4.2. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

И ПЕРЕХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Пусть непрерывная система с p входами и q выходами, изображенная на рис. 4.1, описывается следующей системой дифференциальных уравнений первого порядка, называемых уравнениями состояния:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \quad (4-1)$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

где $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ — переменные состояния; $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_p(t)$ — входные переменные, f_i — i -е функциональное соотношение, которое в общем случае может быть линейным или нелинейным.

Выходные переменные системы связаны с переменными состояния и входными переменными через *уравнения выхода*, которые имеют вид

$$c_k(t) = g_k[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \quad (4-2)$$

($k = 1, 2, \dots, q$)

Здесь g_k имеет тот же смысл, что и f_i в выражении (4-1).

Совокупность уравнений состояния и уравнений выхода называется *уравнениями динамики* системы.

Обычно уравнения динамики записывают в следующей векторно-матричной форме:

$$\text{уравнение состояния} \quad \frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), u(t), t] \quad (4-3)$$

$$\text{уравнение выхода} \quad c(t) = g[x(t), u(t), t] \quad (4-4)$$

где вектор состояния (матрица-столбец размерностью $n \times 1$)

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

вектор входа (матрица-столбец размерностью $p \times 1$)

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

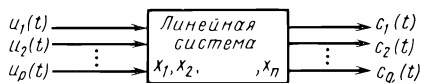


Рис. 4.1. Линейная система с p входами, q выходами и n переменными состояниями

вектор выхода (матрица-столбец размерностью $q \times 1$)

$$c(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_q(t) \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

Если система линейна, но содержит нестационарные элементы, уравнения динамики (4-3) и (4-4) записываются в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4-8)$$

$$c(t) = D(t)x(t) + E(t)u(t) \quad (4-9)$$

где $A(t)$ — квадратная матрица размерностью $n \times n$; $B(t)$, $D(t)$ и $E(t)$ — матрицы размерностью $n \times p$, $q \times n$ и $q \times p$ соответственно. Все элементы этих матриц-коэффициентов предполагаются непрерывными функциями времени t .

Если система линейна и стационарна, уравнения (4-8) и (4-9) принимают вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (4-10)$$

$$c(t) = Dx(t) + Eu(t) \quad (4-11)$$

В этом случае элементы матриц A , B , D и E — константы.

Переходная матрица состояния для нестационарных систем. По определению *переходная матрица состояния* $\Phi(t, t_0)$ — это матрица размерности $n \times n$, удовлетворяющая однородному уравнению состояния

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t) \quad (4-12)$$

для всех действительных t_0 , т. е.

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0) \quad (4-13)$$

с начальным условием $\Phi(t_0, t_0) = I$, где I — единичная матрица размерностью $n \times n$.

Тогда решение однородного уравнения состояния (4-12) имеет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) \quad (4-14)$$

для любых t и t_0 , что можно доказать, продифференцировав во времени обе части выражения (4-14) с использованием (4-13).

Для нестационарного уравнения состояния (4-12) переходная матрица состояния определяется как

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] = I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \int_{t_0}^{\tau} A(\lambda) d\lambda + \dots \quad (4-15)$$

если матрицы $A(t)$ и $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ коммутативны, т. е.

$$A(t) \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau A(t) \quad (4-16)$$

Для доказательства продифференцируем по времени обе части выражения (4-15)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] &= \frac{d}{dt} \left[I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \right. \\ &+ \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \int_{t_0}^t A(\lambda) d\lambda + \dots \left. \right] = A(t) + \frac{1}{2!} A(t) \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau A(t) + \dots \end{aligned} \quad (4-17)$$

Правая часть выражения (4-13) имеет вид

$$A(t)\phi(t, t_0) = A(t) + A(t) \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \dots \quad (4-18)$$

Сравнение (4-18) и (4-17) показывает, что эти два выражения равны только в том случае, если $A(t)$ удовлетворяет условию (4-16).

Свойства переходной матрицы состояния (нестационарный случай). Рассмотрим некоторые важные свойства переходной матрицы состояния.

$$1. \Phi(t_1, t_2)\Phi(t_2, t_3) = \Phi(t_1, t_3) \text{ для любых } t_1, t_2, t_3 \quad (4-19)$$

Это свойство вытекает из следующих равенств

$$x(t_1) = \phi(t_1, t_2)x(t_2) \quad (4-20)$$

$$x(t_2) = \phi(t_2, t_3)x(t_3) \quad (4-21)$$

$$x(t_1) = \phi(t_1, t_3)x(t_3) \quad (4-22)$$

Подстановка (4-21) в (4-22) дает

$$x(t_1) = \phi(t_1, t_2)\phi(t_2, t_3)x(t_3) \quad (4-23)$$

Сравнение выражений (4-22) и (4-23) доказывает утверждение (4-19).

$$2. \Phi(t_0, t_0) = I \text{ (единичная матрица)}. \quad (4-24)$$

Это свойство следует непосредственно из (4-15).

3. $\Phi(t, t_0)$ – невырожденная матрица, т.е. определитель $|\Phi(t, t_0)|$ не равен нулю. Это следует из теоремы Абеля–Якоби–Лиувилля [12], которая утверждает, что

$$|\phi(t, t_0)| = \exp \left[\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau \right] \quad (4-25)$$

где $\text{tr} A(\tau)$ – след матрицы $A(\tau)$, равный сумме элементов главной диагонали $A(\tau)$. Очевидно, что, поскольку $\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau$ не может быть равным $-\infty$ для любых t и t_0 , определитель $|\Phi(t, t_0)|$ не равен нулю.

4. Если $\Phi(t_2, t_1)$ – невырожденная матрица, то

$$\Phi(t_1, t_2) = \Phi(t_2, t_1) \text{ для любых } t_1 \text{ и } t_2 \quad (4-26)$$

Полагая $t_1 = t_3$ в выражении (4-19) и используя свойство (4-24), получаем

$$\phi(t_1, t_2)\phi(t_2, t_1) = I \quad (4-27)$$

Таким образом, умножая обе части последнего выражения справа на $\Phi^{-1}(t_2, t_1)$, получим (4-26).

Переходная матрица состояния (стационарный случай). Для линейных стационарных систем однородное уравнение состояния запишем в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad (4-28)$$

В этом случае из (4-15) следует, что переходная матрица состояния определяется как

$$\phi(t - t_0) = I + A(t - t_0) + \frac{1}{2!} A^2(t - t_0)^2 + \dots = e^{A(t-t_0)} \quad (4-29)$$

Для $t_0 = 0$

$$\phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (4-30)$$

С учетом стационарности рассматриваемой системы возьмем преобразование Лапласа от обеих частей уравнения (4-28):

$$sX(s) - x(0^+) = AX(s) \quad (4-31)$$

где $x(0^+)$ – начальный вектор состояния, определяемый при $t = 0^+$.

Решение уравнения (4-31) дает

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0^+) \quad (4-32)$$

Вычисляя обратное преобразование Лапласа от обеих частей последнего выражения, получим

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] x(0^+) \quad (4-33)$$

Таким образом, переходная матрица состояния определяется также равенством

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] \quad (4-34)$$

Свойства переходной матрицы состояния (стационарный случай). Все свойства переходной матрицы состояния стационарной системы могут быть получены как частные случаи для нестационарных систем. Они формулируются в следующем виде

$$1. \Phi(t_1 - t_2)\Phi(t_2 - t_3) = \Phi(t_1 - t_3) \text{ для любых } t_1, t_2, t_3. \quad (4-35)$$

$$2. \Phi(0) = I. \quad (4-36)$$

$$3. \Phi(t) \text{ – невырожденная матрица для конечномерной матрицы } A.$$

$$4. \phi^{-1}(t) = \phi(-t) \quad (4-37)$$

Решение неоднородного уравнения состояния. Заметим, что если неоднородное нестационарное уравнение состояния

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4-38)$$

преобразовать сначала к виду

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t) \quad (4-39)$$

то его решение не будет представлять затруднений.

Положим

$$x(t) = \phi(t, t_0)y(t) \quad (4-40)$$

где $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица состояния. Тогда

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\phi(t, t_0)}{dt} y(t) + \phi(t, t_0) \frac{dy(t)}{dt} \quad (4-41)$$

Приравнявая уравнения (4-28) и (4-41) с учетом равенств (4-13) и (4-40), получаем

$$\phi(t, t_0) \frac{dy(t)}{dt} = B(t)u(t) \quad (4-42)$$

Таким образом,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \phi(t_0, t)B(t)u(t) \quad (4-43)$$

Решение уравнения (4-43) находим интегрированием обеих частей:

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (4-44)$$

Теперь с использованием выражения (4-40) решение уравнения (4-38) будет иметь вид

$$x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (4-45)$$

для любых t и t_0 .

Для стационарных систем решение уравнения (4-10) с очевидностью следует из выражения (4-45):

$$x(t) = \phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t - \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (4-46)$$

для любых t и t_0 .

Найденные уравнения состояния называют также *переходными уравнениями состояния*.

4.3. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ С КВАНТОВАНИЕМ И ФИКСАЦИЕЙ

Если на входе системы, изображенной на рис. 4.1, добавить устройства выборки и хранения, получим разомкнутую дискретную систему, представленную на рис. 4.2.

Поскольку $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, p$, являются выходными сигналами устройств выборки и хранения, они описываются равенствами

$$u_i(t) = u_i(kT) = e_i(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (4-47)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$; $i = 1, 2, \dots, p$.

Предположим, что динамика линейной системы характеризуется нестационарными уравнениями состояния (4-8). Переходное уравнение состояния имеет вид (4-45) для всех t и t_0 . Поскольку входы системы постоянны на интервале квантования T , в формуле (4-45) входной вектор $u(\tau)$ может быть вынесен за знак интеграла. Тогда

$$x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)B(\tau)d\tau u(kT) \quad (4-48)$$

причем подразумевается, что $t_0 = kT$ и $kT \leq t \leq (k+1)T$.

Выражение (4-48) описывает состояния в течение интервала квантования $kT \leq t \leq (k+1)T$. После дальнейшего преобразования его можно использовать и для описания изменения состояний цифровой системы непосредственно с момента квантования. Полагая в (4-48) $t_0 = kT$ и $t = (k+1)T$, получим

$$x[(k+1)T] = \phi[(k+1)T, kT]x(kT) + \theta[(k+1)T, kT]u(kT) \quad (4-49)$$

для $kT \leq t \leq (k+1)T$, где

$$\theta[(k+1)T, kT] = \int_{kT}^{(k+1)T} \phi[(k+1)T, \tau]B(\tau)d\tau \quad (4-50)$$

Следует заметить, что, хотя $u_i(kT)$ является постоянной величиной только на интервале от kT до $(k+1)T^-$, решение (4-48) справедливо для всего интервала квантования, включая $t = (k+1)T$, поскольку $x(t)$ есть непрерывная функция времени t .

Выражение (4-49) представляет собой *дискретное уравнение состояния* цифровой системы, изображенной на рис. 4.2. Однако, оно описывает динамику состояния только в моменты квантования. Другими словами, при замене $t_0 = kT$ и $t = (k+1)T$ в формуле (4-48) теряется вся информация о поведении системы между моментами квантования.

По аналогии дискретизация уравнения выхода (4-9) осуществляется заменой $t = kT$:

$$c(kT) = D(kT)x(kT) + E(kT)u(kT) \quad (4-51)$$

Соотношения (4-49) и (4-51) в совокупности образуют уравнения динамики цифровой системы.

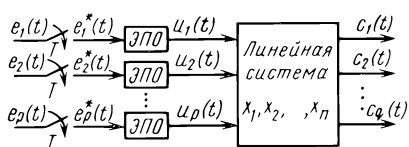


Рис. 4.2. Многомерная цифровая система с квантованием и фиксацией

Эти уравнения можно записать в более простой форме для нормализованного периода квантования $T = 1$. В этом случае уравнения динамики принимают вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k) + \theta(k+1, k)\mathbf{u}(k) \quad (4-52)$$

где

$$\theta(k+1, k) = \int_k^{k+1} \Phi(k+1, \tau)\mathbf{B}(\tau)d\tau \quad (4-53)$$

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{D}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}(k)\mathbf{u}(k) \quad (4-54)$$

Еще один способ записи уравнений динамики (4-49) и (4-51) состоит в замене $t = t_{k+1}$ и $t_0 = t_k$:

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}(t_k) + \theta(t_{k+1}, t_k)\mathbf{u}(t_k) \quad (4-55)$$

где

$$\theta(t_{k+1}, t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)\mathbf{B}(\tau)d\tau \quad (4-56)$$

$$\mathbf{c}(t_k) = \mathbf{D}(t_k)\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{E}(t_k)\mathbf{u}(t_k) \quad (4-57)$$

4.4. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ТОЛЬКО ЦИФРОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Если цифровая система состоит полностью из цифровых элементов, а на ее входе и выходе присутствуют только цифровые сигналы, эта система может быть описана следующими дискретными уравнениями динамики:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \quad (4-58)$$

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{D}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}(k)\mathbf{u}(k) \quad (4-59)$$

где $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$, $\mathbf{D}(k)$ и $\mathbf{E}(k)$ — матрицы коэффициентов с нестационарными элементами. Значения этих элементов могут изменяться только в дискретные моменты $k = 0, 1, 2, \dots$. На практике уравнения динамики (4-52) и (4-59) могут описывать дискретную систему, в которой k обозначает "шаги" или "последовательность событий". Поэтому дискретное время не всегда должно быть независимой переменной в уравнениях динамики.

4.5. ПЕРЕХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

Нестационарные системы. Поскольку дискретные уравнения состояния (4-49), (4-52), (4-55) и (4-58), по существу, имеют одинаковую форму, очевидно, что их решения также должны быть подобны. Однако прежде чем приступить к решению дискретных уравнений состояния, следует подчеркнуть сходство и различие между непрерывными и дискретными уравнениями состояния. Заметим, что решение непрерывного уравнения состояния (4-38), описываемое выражением (4-45), справедливо для лю-

бых t и t_0 , если $\Phi(t, t_0)$ — невырожденная матрица. Другими словами, решение справедливо как для $t \geq t_0$, так и для $t \leq t_0$. Это означает, что изменение состояния непрерывного процесса может происходить и в прямом, и в обратном времени. Можно показать, что дискретные уравнения состояния (4-49), (4-52) и (4-55) также двунаправлены по k , если $\Phi(k+1, k)$ — невырожденная матрица. Исходно эти уравнения состояния определены в прямом времени, поскольку они получены путем замены $t_0 = kT$ и $t = (k+1)T$ в переходных уравнениях состояния непрерывной системы.

Существуют, по крайней мере, два способа перехода к обратному времени в дискретных уравнениях состояния. Если переходная матрица состояния $\Phi(k+1, k)$ невырождена, то, применяя обозначения, используемые в (4-52), можно записать уравнение состояния в виде

$$\mathbf{x}(k) = \phi^{-1}(k+1, k)\mathbf{x}(k+1) - \phi^{-1}(k+1, k)\theta(k+1, k)\mathbf{u}(k) \quad (4-60)$$

Используя свойства матрицы $\Phi(k+1, k)$ из (4-19) и (4-26), получаем

$$\mathbf{x}(k) = \phi(k, k+1)\mathbf{x}(k+1) + \theta(k, k+1)\mathbf{u}(k) \quad (4-61)$$

где

$$\theta(k, k+1) = \int_{k+1}^k \phi(k, \tau)\mathbf{B}(\tau)d\tau \quad (4-62)$$

Выражение (4-61) можно рассматривать как уравнение, описывающее изменение состояния на интервале от $k+1$ до k , где $\mathbf{u}(k)$ — вектор входа с постоянными элементами в течение этого интервала.

Другой способ состоит в замене $t_0 = k+1$ и $t = k$ в выражении (4-45) при $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(k)$, что приводит к тому же результату (4-61). Чтобы изменение состояния было двунаправлено по k , в общем случае матрица $\Phi(k+1, k)$ должна быть невырожденной.

Интересно заметить, что, поскольку уравнения состояния (4-49), (4-52) и (4-55) получены в результате применения операции квантования и фиксации к переходному уравнению состояния непрерывной системы, переходная матрица состояния $\Phi(k+1, k)$ всегда невырождена, если матрица $\mathbf{A}(t)$ в исходном дифференциальном уравнении непрерывна и конечна.

Дискретные уравнения состояния (4-58) приводят к другой проблеме, поскольку в принципе не существует физических ограничений на элементы матриц $\mathbf{A}(k)$ и $\mathbf{B}(k)$. Поэтому, пока матрица $\mathbf{A}(k)$ не будет невырожденной для всех k , уравнение состояния (4-58) можно решать только в прямом времени. Если матрица $\mathbf{A}(k)$ невырождена для $k \leq j$, то

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{-1}(k)\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{A}^{-1}(k)\mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \quad (4-63)$$

для $k = 0, 1, 2, \dots, j$.

Покажем теперь, что дискретное уравнение состояния может быть решено с помощью итерационной процедуры. Рассмотрим уравнение состояния в форме (4-58) вследствие более простых обозначений, но учтем, что искомое решение полностью удовлетворяет любой форме дискретных уравнений состояния, если заменить матрицы $\mathbf{A}(k)$ на $\Phi(k+1, k)$, $\mathbf{B}(k)$ на $\Theta(k+1, k)$ и т.д. Перепишем общее выражение (4-58):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \quad (4-64)$$

Для последовательных итераций получим:

$$k = 0 \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{A}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}(0)\mathbf{u}(0) \quad (4-65)$$

$$k = 1 \quad \mathbf{x}(2) = \mathbf{A}(1)\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}(1)\mathbf{u}(1) = \\ = \mathbf{A}(1)\mathbf{A}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}(1)\mathbf{B}(0)\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}(1)\mathbf{u}(1) \quad (4-66)$$

$$\vdots \\ k = N-1 \quad \mathbf{x}(N) = \mathbf{A}(N-1)\mathbf{x}(N-1) + \mathbf{B}(N-1)\mathbf{u}(N-1) = \\ = \mathbf{A}(N-1)\mathbf{A}(N-2) \dots \mathbf{A}(1)\mathbf{A}(0)\mathbf{x}(0) + \\ + \mathbf{A}(N-1)\mathbf{A}(N-2) \dots \mathbf{A}(1)\mathbf{B}(0)\mathbf{u}(0) + \\ + \mathbf{A}(N-1)\mathbf{A}(N-2) \dots \mathbf{A}(2)\mathbf{B}(1)\mathbf{u}(1) + \\ + \dots + \mathbf{A}(N-1)\mathbf{B}(N-2)\mathbf{u}(N-2) + \mathbf{B}(N-1)\mathbf{u}(N-1) \quad (4-67)$$

Положим

$$\phi(N, i+1) = \mathbf{A}(N-1)\mathbf{A}(N-2) \dots \mathbf{A}(i+1) \quad (4-68)$$

для $i = -1, 0, 1, 2, \dots, N-2, N > i+1$ и

$$\phi(N, i+1) = \mathbf{I} \quad (4-69)$$

для $N = i+1$. С использованием этих обозначений выражение (4-67) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(N) = \phi(N, 0)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{N-1} \phi(N, i+1)\mathbf{B}(i)\mathbf{u}(i) \quad (4-70)$$

что и является искомым решением уравнения (4-64) для всех $\mathbf{x}(N)$, $N \geq 0$, данного начального состояния $\mathbf{x}(0)$ и входа $\mathbf{u}(i)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Аргумент в выражении (4-70) можно сдвинуть вперед на любое положительное целое M , т.е.

$$\mathbf{x}(N+M) = \phi(N+M, M)\mathbf{x}(M) + \sum_{i=M}^{N+M-1} \phi(N+M, i+1)\mathbf{B}(i)\mathbf{u}(i) \quad (4-71)$$

Теперь, полагая $k = N+M$, получим

$$\mathbf{x}(k) = \phi(k, M)\mathbf{x}(M) + \sum_{i=M}^{k-1} \phi(k, i+1)\mathbf{B}(i)\mathbf{u}(i) \quad (4-72)$$

где

$$\phi(k, M) = \begin{cases} \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2) \dots \mathbf{A}(M) & k \geq M+1 \\ \mathbf{I} & k = M \end{cases} \quad (4-73)$$

В общем случае можно записать уравнение состояния в виде

$$\mathbf{x}(k_{j+1}) = \mathbf{A}(k_j)\mathbf{x}(k_j) + \mathbf{B}(k_j)\mathbf{u}(k_j) \\ j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4-74)$$

а переходное уравнение состояния в виде

$$\mathbf{x}(k_N) = \Phi(k_N, k_0) \mathbf{x}(k_0) + \sum_{i=0}^{N-1} \Phi(k_N, k_{i+1}) \mathbf{B}(k_i) \mathbf{u}(k_i) \quad (4-75)$$

где

$$\Phi(k_N, k_0) = \begin{cases} \mathbf{A}(k_{N-1}) \mathbf{A}(k_{N-2}) \dots \mathbf{A}(k_1) \mathbf{A}(k_0) & k_N > k_0 \\ \mathbf{I} & k_N = k_0 \end{cases} \quad (4-76)$$

В этом случае интервалы между k_i и k_{i+1} не обязательно постоянны и k_j может обозначать дискретное время или шаг.

Матрица $\Phi(k_j, k_0)$ размерностью $n \times n$ называется переходной матрицей состояния для матрицы $\mathbf{A}(k_j)$ и удовлетворяет однородному уравнению состояния

$$\mathbf{x}(k_{j+1}) = \mathbf{A}(k_j) \mathbf{x}(k_j) \quad (4-77)$$

для $j \geq 0$. Таким образом, справедливо следующее соотношение:

$$\Phi(k_{N+1}, k_0) = \mathbf{A}(k_N) \Phi(k_N, k_0) \quad k_N \geq k_0 \quad (4-78)$$

Свойства переходной матрицы состояния $\Phi(k_j, k_0)$. Подобно непрерывным системам переходная матрица состояния $\Phi(k_j, k_0)$ имеет следующие свойства, важные для анализа цифровых систем.

$$1. \Phi(i, j) \Phi(j, m) = \Phi(i, m) \text{ для всех шагов } i, j, m, \quad (4-79)$$

если матрица $\mathbf{A}(k)$ невырождена для всех k , лежащих между $\min(i, j, m)$ и $\max(i, j, m)$. Если матрица $\mathbf{A}(k)$ вырождена для $k \geq p$, то равенство (4-79) справедливо только для $\max(i, j, m) < p$.

Этапы доказательства этого свойства очень похожи на процедуру, описываемую выражениями (4-20) — (4-23). Чтобы переходный процесс состояния мог развиваться в обоих направлениях, необходимо существование матрицы $\mathbf{A}^{-1}(k)$, поскольку i, j и m — произвольные числа. Если $\mathbf{A}(k)$ — вырожденная матрица для $k \geq p$, можно записать

$$\begin{aligned} \Phi(i, j) \Phi(j, m) &= \mathbf{A}(i-1) \mathbf{A}(i-2) \dots \mathbf{A}(j) \mathbf{A}(j-1) \mathbf{A}(j-2) \dots \mathbf{A}(m) = \Phi(i, m) \end{aligned} \quad (4-80)$$

для $p > i \geq j \geq m$.

$$2. \Phi(k, k) = \mathbf{I} \quad (4-81)$$

Это свойство следует непосредственно из определения (4-73) матрицы $\Phi(k, M)$.

$$3. \Phi(i, j) = \Phi^{-1}(j, i) \text{ для всех } i, j, \quad (4-82)$$

если $\mathbf{A}(k)$ — невырожденная матрица для

$$k = j-1, j-2, \dots, i \quad j > i$$

$$k = i-1, i-2, \dots, j \quad i > j$$

Доказательство этого свойства предлагается читателю выполнить в качестве упражнения.

4.6. ПЕРЕХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЦИФРОВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Если линейная цифровая система стационарна, ее уравнения динамики можно записать в нескольких видах:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \phi(T)\mathbf{x}(kT) + \theta(T)\mathbf{u}(kT) \quad (4-83)$$

$$\mathbf{c}(kT) = \mathbf{D}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{E}\mathbf{u}(kT) \quad (4-84)$$

где $\Phi(T)$ – переходная матрица состояния;

$$\phi(T) = e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I} + \mathbf{A}T + \frac{\mathbf{A}^2 T^2}{2!} + \dots \quad (4-85)$$

$$\theta(T) = \int_0^T \phi(T-\tau)\mathbf{B}(\tau)d\tau \quad (4-86)$$

или

$$\mathbf{x}(k+1) = \phi(1)\mathbf{x}(k) + \theta(1)\mathbf{u}(k) \quad (4-87)$$

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}\mathbf{u}(k) \quad (4-88)$$

или

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (4-89)$$

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}\mathbf{u}(k) \quad (4-90)$$

Как было показано выше, матрицы $\Phi(T)$ и $\Phi(1)$ всегда невырождены, если элементы \mathbf{A} конечны. Однако в общем случае не существует ограничений на матрицы коэффициентов чисто цифрового уравнения состояния (4-89), так что \mathbf{A} может быть вырожденной матрицей.

Как и для нестационарных систем, стационарное уравнение состояния можно решить с помощью итерационной процедуры. Для уравнения (4-83) решение имеет вид

$$\mathbf{x}(NT) = \phi(NT)\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \phi[(N-k-1)T]\theta(T)\mathbf{u}(kT) \quad (4-91)$$

где

$$\phi(NT) = \underbrace{\phi(T)\phi(T) \dots \phi(T)}_N = \phi^N(T) \quad (4-92)$$

Следует заметить, что $\Phi(NT)$ – это только обозначение, используемое для упрощения записи в выражении (4-92). В общем случае $\Phi(NT)$ не равно $\Phi(T)$, где T заменено на NT , хотя в простейших случаях равенство может оказаться справедливым.

Для уравнения (4-89) переходное уравнение состояния имеет вид

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-k-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (4-93)$$

Эти переходные уравнения состояния можно записать также со сдвигом для нулевого начального времени или шага, т.е.

$$\mathbf{x}[(N + M)T] = \phi(NT)\mathbf{x}(MT) + \sum_{k=0}^{N-1} \phi[(N - k - 1)T]\theta(T)\mathbf{u}[(M + k)T] \quad (4-94)$$

или

$$\mathbf{x}(N + M) = \mathbf{A}^N \mathbf{x}(M) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-k-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(M + k) \quad (4-95)$$

4.7. ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АППРОКСИМАЦИЯ

Дискретные уравнения состояния можно получить также в результате приближенного описания аналоговой системы цифровой моделью. Рассмотрим следующие уравнения динамики аналоговой системы:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4-96)$$

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4-97)$$

Перейдем к цифровой аппроксимации системы в моменты $t = t_k$. Положим

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t_k \quad (4-98)$$

Производную от $\mathbf{x}(t)$ в момент $t = t_k$ можно приблизительно вычислить с помощью следующего соотношения:

$$\dot{\mathbf{x}}(t_k) \cong \frac{1}{\Delta t_k} [\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)] \quad (4-99)$$

Тогда уравнение (4-96) аппроксимируется выражением

$$\frac{1}{\Delta t_k} [\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)] = \mathbf{A}(t_k)\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{B}(t_k)\mathbf{u}(t_k) \quad (4-100)$$

По аналогии уравнение (4-97) принимает вид

$$\dot{\mathbf{c}}(t_k) = \mathbf{D}(t_k)\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{E}(t_k)\mathbf{u}(t_k) \quad (4-101)$$

Уравнение (4-100) окончательно запишем в форме дискретного уравнения состояния

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = [\mathbf{I} + \Delta t_k \mathbf{A}(t_k)] \mathbf{x}(t_k) + \Delta t_k \mathbf{B}(t_k) \mathbf{u}(t_k) \quad (4-102)$$

4.8. РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Метод z-преобразования можно применять для решения линейных дискретных стационарных уравнений состояния. Кроме того, ниже рассмотрен еще один метод определения дискретной переходной матрицы состояния.

Рассмотрим дискретное уравнение состояния

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \theta(T)\mathbf{u}(kT) \quad (4-103)$$

Возьмем z -преобразование от обеих частей этого уравнения:

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \Phi(T)\mathbf{X}(z) + \theta(T)\mathbf{U}(z) \quad (4-104)$$

где по определению

$$\mathbf{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(kT)z^{-k} \quad (4-105)$$

то же самое относится и к $\mathbf{U}(z)$. Определяя $\mathbf{X}(z)$ из (4-104), получим

$$\mathbf{X}(z) = [z\mathbf{I} - \Phi(T)]^{-1} z\mathbf{x}(0) + [z\mathbf{I} - \Phi(T)]^{-1} \theta(T)\mathbf{U}(z) \quad (4-106)$$

Обратное z -преобразование последнего выражения дает

$$\mathbf{x}(kT) = \mathcal{Z}^{-1} \left[[z\mathbf{I} - \Phi(T)]^{-1} z \right] \mathbf{x}(0) + \mathcal{Z}^{-1} \left[[z\mathbf{I} - \Phi(T)]^{-1} \theta(T)\mathbf{U}(z) \right] \quad (4-107)$$

Покажем, что обратное z -преобразование от $[z\mathbf{I} - \Phi(T)]^{-1}$ есть дискретная переходная матрица состояния $\Phi(kT)$.

z -преобразование $\Phi(kT)$ определяется известным способом:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(kT)z^{-k} \quad (4-108)$$

Умножая обе части последнего уравнения слева на $\Phi(T)z^{-1}$ и вычитая результат из (4-108), получаем

$$[\mathbf{I} - \Phi(T)z^{-1}] \Phi(z) = \mathbf{I}$$

Отсюда

$$\Phi(z) = [\mathbf{I} - \Phi(T)z^{-1}]^{-1} = [z\mathbf{I} - \Phi(T)]^{-1} z \quad (4-109)$$

Вычисляя обратное z -преобразование от обеих частей последнего уравнения, получаем

$$\Phi(kT) = \mathcal{Z}^{-1} \left[[z\mathbf{I} - \Phi(T)]^{-1} z \right] \quad (4-110)$$

Таким образом, выражение (4-110) представляет собой метод определения переходной матрицы состояния дискретного уравнения состояния, основанный на z -преобразовании.

Последний член в выражении (4-107) вычисляем с помощью теоремы свертки (3-113) и выражения (4-110). Можно показать, что

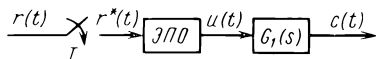
$$\mathcal{Z}^{-1} \left[[z\mathbf{I} - \Phi(T)]^{-1} \theta(T)\mathbf{U}(z) \right] = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi[(k-i-1)T] \theta(T)\mathbf{u}(iT) \quad (4-111)$$

В целом переходное уравнение состояния

$$\mathbf{x}(kT) = \Phi(kT)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi[(k-i-1)T] \theta(T)\mathbf{u}(iT) \quad (4-112)$$

имеет ту же самую форму, что и (4-91). С помощью описанного метода

Рис. 4.3. Разомкнутая цифровая система



z-преобразования по аналогии могут быть решены и уравнения состояния в форме (4-87) и (4-89).

Пример 4.1. На этом примере проиллюстрируем анализ разомкнутой цифровой системы с помощью описанного выше метода переменных состояния. Структурная схема рассматриваемой системы представлена на рис. 4.3. Уравнения динамики, описывающие линейный объект имеют вид

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4-113)$$

$$c(t) = x_1(t) \quad (4-114)$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – переменные состояния; $c(t)$ и $u(t)$ – скалярные выходная и входная переменные, соответственно. Кроме того, поскольку $u(t)$ – выходной сигнал экстраполятора нулевого порядка, то

$$u(t) = u(kT) = r(kT)$$

для $kT \leq t < (k+1)T$.

Сравнивая (4-113) со стандартной формой уравнения состояния (4-10), имеем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (4-115)$$

и

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-116)$$

Образум матрицу

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \quad (4-117)$$

Отсюда

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \quad (4-118)$$

Переходная матрица состояния для матрицы \mathbf{A} определяется с использованием обратного преобразования Лапласа от $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Поэтому с учетом (4-34)

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (4-119)$$

Подстановка (4-116) и (4-119) в формулу (4-86) дает

$$\begin{aligned} \theta(T) &= \int_0^T \phi(T-\tau) \mathbf{B} d\tau = \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-(T-\tau)} - e^{-2(T-\tau)} \\ -e^{-(T-\tau)} + 2e^{-2(T-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2} e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-120)$$

Подставляя теперь выражение (4-119) для $t = T$ и (4-120) в формулу (4-83), запишем дискретное уравнение состояния системы

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2} e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} u(kT) \quad (4-121)$$

Положим период квантования в системе (4-121) равным 1 с:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.233 \\ -0.466 & -0.097 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix} u(k) \quad (4-122)$$

Уравнение (4-121) может отождествляться с каноническими уравнениями (4-83) или (4-89). Поэтому с использованием формулы (4-91) решение уравнения (4-121) запишем в виде

$$\begin{bmatrix} x_1(N) \\ x_2(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-N} - e^{-2N} & e^{-N} - e^{-2N} \\ -2e^{-N} + 2e^{-2N} & -e^{-N} + 2e^{-2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} 0.633e^{-(N-k-1)} - 0.433e^{-2(N-k-1)} \\ -0.633e^{-(N-k-1)} + 0.866e^{-2(N-k-1)} \end{bmatrix} u(k) \quad (4-123)$$

где N – любое положительное целое.

4.9. СВЯЗЬ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ С ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Представляет интерес исследовать взаимосвязь метода переменных состояния и метода, основанного на понятии передаточной функции.

Предположим, что цифровая многомерная система описана с помощью z -преобразования соотношением

$$C(z) = G(z)U(z), \quad (4-124)$$

где

$$C(z) = \begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_q(z) \end{bmatrix} \quad (4-125)$$

есть z -преобразование $(q \times 1)$ -мерного вектора выхода;

$$\mathbf{U}(z) = \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \\ \vdots \\ U_p(z) \end{bmatrix} \quad (4-126)$$

есть z -преобразование $(p \times 1)$ -мерного вектора входа;

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & \dots & G_{1p}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & \dots & G_{2p}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(z) & G_{q2}(z) & \dots & G_{qp}(z) \end{bmatrix} \quad (4-127)$$

есть матричная дискретная передаточная функция размерностью $q \times p$.

Элементы матрицы $\mathbf{G}(z)$ имеют вид

$$G_{ij}(z) = \frac{a_{n+1} + a_n z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n}}{b_{m+1} + b_m z^{-1} + \dots + b_1 z^{-m}} \quad (4-128)$$

Теперь опишем цифровую систему уравнением динамики

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \quad (4-129)$$

$$\mathbf{c}(kT) = \mathbf{D}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{E}\mathbf{u}(kT) \quad (4-130)$$

Вычисляя z -преобразование от обеих частей выражения (4-129) и решая его относительно $\mathbf{X}(z)$, получим

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \quad (4-131)$$

Подстановка (4-131) в z -преобразование от выражения (4-130) дает

$$\mathbf{C}(z) = \mathbf{D}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + \mathbf{D}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{E}\mathbf{U}(z) \quad (4-132)$$

Передаточная функция определяется при нулевом начальном состоянии $\mathbf{x}(0)$, поэтому выражение (4-132) упрощается до

$$\mathbf{C}(z) = [\mathbf{D}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{E}] \mathbf{U}(z) \quad (4-133)$$

Из сравнения выражений (4-133) и (4-124) видно, что матричная дискретная передаточная функция системы может быть записана в виде

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{D}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{E} \quad (4-134)$$

Если в дискретной системе имеются операции выборки-хранения, и она описывается уравнениями динамики вида (4-10) и (4-11), в выражении (4-134) нужно лишь заменить матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} на $\Phi(T)$ и $\Theta(T)$ соответственно. Конечно, это можно сделать только при условии, что для системы существует дискретная передаточная функция. В п. 3.10 было показано, что иногда передаточные функции вида (4-124) невозможно определить для импульсных систем с экстраполяторами и существуют только уравнения, связывающие входной и выходной сигналы.

Обратное преобразование матричной передаточной функции называется *импульсной переходной матрицей*. Применив обратное z -преобразование к обеим частям формулы (4-134), получим

$$g(kT) = D\phi[(k-1)T]B + E\delta(0) \quad (4-135)^*$$

где $\delta(0)$ – дельта-функция при $t = 0$.

Поскольку $\phi[(k-1)T] = 0$ для $k < 1$, матрицу $g(kT)$ можно записать в виде

$$g(kT) = E \quad k = 0 \quad (4-136)$$

$$g(kT) = D\phi[(k-1)T]B \quad k \geq 1 \quad (4-137)$$

Пример 4.2. В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда требуется определить передаточную функцию разомкнутой системы, изображенной на рис. 4.3 для числовых данных из примера 4.1

Сначала используем метод переменных состояния, описанный выше. Из примера 4.1 имеем

$$\phi(1) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.233 \\ -0.466 & -0.097 \end{bmatrix} \quad (4-138)$$

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix} \quad (4-139)$$

$$D = [1 \ 0] ; \quad E = 0 \quad (4-140)$$

Подставляя найденные значения (4-138) и (4-140) в формулу (4-134), получаем передаточную функцию системы

$$G(z) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} z - 0.6 & -0.233 \\ 0.466 & z + 0.097 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix} = \frac{0.2z + 0.074}{(z - 0.135)(z - 0.368)} \quad (4-141)$$

Чтобы использовать метод z -преобразования, необходимо вначале определить передаточную функцию линейного процесса $G_1(s)$ (см. рис. 4.3). На основании уравнений динамики процесса (4-113) и (4-114) запишем дифференциальное уравнение, связывающее $u(t)$ и $c(t)$:

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3 \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = u(t) \quad (4-142)$$

где $u(t)$ – выходной сигнал экстраполятора нулевого порядка. Отсюда передаточная функция

$$G_1(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad (4-143)$$

С учетом схемы (см. рис. 4.3) дискретная передаточная функция всей системы

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_1(s) \right] = \frac{C(z)}{R(z)} \quad (4-144)$$

или

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} \right] \quad (4-145)$$

* Обратное z -преобразование от константы – дельта-функция.

вычисляя z -преобразование, получаем

$$G(z) = \frac{0.2z + 0.074}{(z - 0.135)(z - 0.368)} \quad (4-146)$$

что совпадает с полученным выше результатом (4-141).

Импульсную (весовую) последовательность систем можно найти обратным z -преобразованием $G(z)$. Разложение $G(z)$ на элементарные слагаемые дает

$$G(z) = \frac{0.633}{z - 0.368} - \frac{0.433}{z - 0.135}$$

Отсюда

$$g(k) = 0.633e^{-(k-1)} - 0.433e^{-2(k-1)} \quad (4-147)$$

для $k > 0$. Для $k = 0$ $g(0) = 0$.

Другой метод определения $g(k)$ основан на использовании формул (4-136) и (4-137). В этом случае

$$g(0) = E = 0$$

$$g(kT) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2e^{-(k-1)} - e^{-2(k-1)} & e^{-(k-1)} - e^{-2(k-1)} \\ -2e^{-(k-1)} + 2e^{-2(k-1)} & -e^{-(k-1)} + 2e^{-2(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \quad 2 \\ 0.233 \end{bmatrix} =$$

$$= 0.633e^{-(k-1)} - 0.433e^{-2(k-1)} \quad (4-148)$$

для $k > 0$.

4.10. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Характеристическое уравнение линейной стационарной системы можно записать исходя из разностного уравнения системы, ее передаточной функции или матрицы A .

Разностное уравнение. Пусть линейная одномерная цифровая система описывается разностным уравнением n -го порядка

$$c(k+n) + a_n c(k+n-1) + a_{n-1} c(k+n-2) + \dots \quad (4-149)$$

$$\dots + a_2 c(k+1) + a_1 c(k) = b_{n+1} r(k+n) + b_n r(k+n-1) + \dots$$

$$\dots + b_2 r(k+1) + b_1 r(k)$$

Характеристическим уравнением системы называется полином n -го порядка, коэффициенты которого совпадают с коэффициентами однородного разностного уравнения. Таким образом, характеристическое уравнение записывается в виде

$$\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + a_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + a_2 \lambda + a_1 = 0 \quad (4-150)$$

Передаточная функция системы, описываемой уравнением (4-149), получается путем z -преобразования обеих частей разностного уравнения при нулевых начальных условиях с последующим определением отношения $C(z)/R(z)$. Таким образом, передаточная функция системы (4-149)

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_{n+1} z^n + b_n z^{n-1} + \dots + b_2 z + b_1}{z^n + a_n z^{n-1} + \dots + a_2 z + a_1} \quad (4-151)$$

Характеристическим уравнением называется уравнение, получаемое в результате приравнивания знаменателя передаточной функции к нулю, т.е.

$$z^n + a_n z^{n-1} + \dots + a_2 z + a_1 = 0 \quad (4-152)$$

Матрица A . Характеристическое уравнение линейной стационарной системы можно также записать, исходя из уравнения состояния. Предположим, что цифровая система описывается уравнением состояния

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4-153)$$

где $x(k)$ и A — n -мерны.

Характеристическим уравнением системы, которое на практике часто называют *характеристическим уравнением матрицы A* , является уравнение, получаемое приравниванием к нулю определителя матрицы $zI - A$, т.е.

$$|zI - A| = 0 \quad (4-154)$$

Заметим, что матрица коэффициентов B вообще не связана с характеристическим уравнением, поскольку однородная часть уравнения (4-153) не включает в себя $Bu(k)$.

Уравнение (4-154) также можно найти из матричной передаточной функции (4-134).

Формула (4-134) может быть записана в виде

$$G(z) = D \frac{[\Delta_{ij}]'}{|zI - A|} B + E = \frac{D[\Delta_{ij}]'B + |zI - A|E}{|zI - A|} \quad (4-155)$$

где Δ_{ij} — алгебраическое дополнение ij -го элемента матрицы $zI - A$; $[\Delta_{ij}]'$ — транспонированная матрица с элементами Δ_{ij} . Приравнявая к нулю определитель, получим тот же результат, что и в выражении (4-154).

Собственные значения. Корни характеристического уравнения называются *собственными значениями матрицы A* . Поскольку корни уравнений (4-150) и (4-152) являются собственными значениями матрицы, они совпадают.

Для системы, рассмотренной в примере 4.2, легко показать, что характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2 - 0.503z + 0.0497 = 0 \quad (4-156)$$

а его корни $z_1 = 0.135$ и $z_2 = 0.368$.

Собственные значения обладают следующими важными свойствами.

1. Если коэффициенты характеристического уравнения есть скалярные величины, то собственные значения либо действительны, либо образуют комплексно-сопряженные пары.

2. След матрицы A определяется как сумма элементов в ее главной диагонали, т.е.

$$\text{След матрицы } A = \text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \quad (4-157)$$

где $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ — собственные значения матрицы A .

3. Определитель матрицы A связан с собственными значениями соотношением

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n \quad (4-158)$$

4. Если матрица A невырождена и имеет собственные значения λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, то $1/\lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, являются собственными значениями матрицы A^{-1} .

5. Если λ_i — собственное значение матрицы A , то оно же является собственным значением матрицы A' .

6. Если A — действительная симметрическая матрица, то все ее собственные значения действительны.

7. Для квадратных матриц A и B

$$|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA| \quad (4-159)$$

В этом случае собственные значения матрицы AB совпадают с собственными значениями матрицы BA .

Собственные векторы. Вектор p_i размерности $n \times 1$, который удовлетворяет матричному уравнению

$$(\lambda_i I - A)p_i = 0 \quad (4-160)$$

где λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ — собственное значение матрицы A , называется *собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению λ_i* .

Для различных собственных значений собственные векторы могут быть найдены непосредственно из (4-160).

Пример 4.3. Собственными векторами матрицы $\Phi(1)$ из примера 4.2 являются векторы p_1 и p_2 , удовлетворяющие уравнению

$$[\lambda_i I - \Phi(1)]p_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4-161)$$

или

$$\begin{bmatrix} \lambda_i - 0.6 & -0.233 \\ 0.466 & \lambda_i + 0.397 \end{bmatrix} p_i = 0 \quad (4-162)$$

где $\lambda_1 = 0,135$; $\lambda_2 = 0,368$.

Пологая

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} \quad (4-163)$$

из выражения (4-162) получим сначала для λ_1 следующие два скалярных уравнения:

$$-0.466p_{11} - 0.233p_{12} = 0 \quad (4-164)$$

$$0.466p_{11} + 0.233p_{12} = 0 \quad (4-165)$$

Так как эти уравнения линейно зависимы, можно присвоить произвольное значение либо p_{11} , либо p_{12} . Положим $p_{11} = 1$, тогда $p_{12} = -2$.

По аналогии подстановка $\lambda_2 = 0,368$ в (4-162) приводит к уравнениям

$$-0.233p_{21} - 0.233p_{22} = 0 \quad (4-166)$$

$$0.466p_{21} + 0.466p_{22} = 0 \quad (4-167)$$

Пологая вновь в этих зависимых уравнениях $p_{21} = 1$, получим $p_{22} = -1$. Таким образом, собственные векторы

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{для } \lambda_1 = 0,135; \quad (4-168)$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{для } \lambda_2 = 0,368. \quad (4-169)$$

Для различных собственных значений собственные векторы матрицы A можно также вычислять с использованием любого нулевого столбца матрицы $\text{Adj}(\lambda_i I - A)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пример 4.4. Используя данные из примера 4.3, находим

$$[\lambda_i I - \phi(1)] = \begin{bmatrix} \lambda_i - 0.6 & -0.233 \\ 0.466 & \lambda_i + 0.097 \end{bmatrix} \quad (4-170)$$

Запишем присоединенную матрицу

$$\text{Adj}[\lambda_i I - \phi(1)] = \begin{bmatrix} \lambda_i + 0.097 & 0.233 \\ -0.466 & \lambda_i - 0.6 \end{bmatrix} \quad (4-171)$$

Тогда

$$\text{Adj}[\lambda_1 I - \phi(1)] = \begin{bmatrix} 0.233 & 0.233 \\ -0.466 & -0.466 \end{bmatrix} \quad (4-172)$$

$$\text{Adj}[\lambda_2 I - \phi(1)] = \begin{bmatrix} 0.466 & 0.233 \\ -0.466 & -0.233 \end{bmatrix} \quad (4-173)$$

Выберем p_1 равным столбцу присоединенной матрицы (4-172), деленному на общий множитель:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{для } \lambda_1 = 0,135. \quad (4-174)$$

Аналогично, используя выражение (4-173), получим

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{для } \lambda_2 = 0,368. \quad (4-175)$$

Некоторые важные свойства собственных векторов состоят в следующем.

1. Ранг матрицы $(\lambda_i I - A)$, где λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, — различные собственные значения матрицы A , равен $n - 1$. Это свойство было проиллюстрировано в предыдущем примере.

2. Собственный вектор p_i определяется любым нулевым столбцом матрицы $\text{Adj}(\lambda_i I - A)$, где λ_i — i -е простое собственное значение матрицы A .

3. Если матрица A имеет n различных собственных значений, то система из n собственных векторов p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, линейно независима.

4. Если p_i — собственный вектор матрицы A , то kp_i есть также собственный вектор, где k — скалярный множитель.

Когда одно или несколько собственных значений матрицы являются кратными корнями характеристического уравнения, полная система из n линейно независимых собственных векторов может существовать или не существовать. Число линейно независимых собственных векторов, соот-

ветствующих данному собственному значению λ_i кратности m_i , равняется дефекту d_i матрицы $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$. Дефект d_i матрицы $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$ определяется как

$$d_i = n - r_i \quad (4-176)$$

где n — размерность матрицы \mathbf{A} , а r_i — ранг матрицы $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$. Всегда существует d_i линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ_i . Кроме того,

$$1 \leq d_i \leq m_i \quad (4-177)$$

Собственные векторы матрицы \mathbf{A} с кратными собственными значениями определяются следующими методами.

Полная вырожденность ($d_i = m_i$). Для собственного значения λ_i , имеющего кратность m_i , в случае полной вырожденности существует полная система из m_i собственных векторов, соответствующих λ_i . Эти собственные векторы определяются ненулевыми столбцами матрицы

$$\frac{1}{(m_i - 1)!} \left[\frac{d^{m_i-1}}{d\lambda^{m_i-1}} [\text{Adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})] \right] \bigg|_{\lambda=\lambda_i} \quad (4-178)$$

Пример 4.5. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (4-179)$$

Характеристическое уравнение матрицы \mathbf{A}

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - 3)^2(\lambda - 5) = 0 \quad (4-180)$$

Собственные значения матрицы \mathbf{A} равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ и $\lambda_3 = 5$. Таким образом, собственное значение $\lambda_1 = 3$ имеет кратность 2, а $\lambda_3 = 5$ является простым. Чтобы определить дефект матрицы $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ для $\lambda_1 = 3$, образуем матрицу

$$\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \bigg|_{\lambda=3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4-181)$$

которая имеет ранг, равный 1. Таким образом, дефект матрицы $\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}$

$$d_1 = n - r_1 = 3 - 1 = 2 \quad (4-182)$$

Так как λ_1 имеет кратность 2, говорят, что матрица $\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}$ полностью вырождена.

Теперь, используя формулу (4-178), получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\lambda} \text{Adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \right] \bigg|_{\lambda=\lambda_1} &= \frac{d}{d\lambda} \begin{bmatrix} (\lambda - 3)(\lambda - 5) & 0 & 0 \\ 2(\lambda - 3) & (\lambda - 3)(\lambda - 4) & \lambda - 3 \\ 2(\lambda - 3) & \lambda - 3 & (\lambda - 3)(\lambda - 4) \end{bmatrix} \bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \\ &= \begin{bmatrix} 2\lambda - 8 & 0 & 0 \\ 2 & 2\lambda - 7 & 1 \\ 2 & 1 & 2\lambda - 7 \end{bmatrix} \bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-183)$$

Следовательно, два независимых столбца последней матрицы выбираются в качестве собственных векторов:

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для собственного значения $\lambda_3 = 5$ собственный вектор определяется обычным образом как решение p_3 уравнения $(\lambda_3 I - A)p_3 = 0$ или с использованием произвольного ненулевого столбца матрицы $\text{Adj}(\lambda_3 I - A)$. В результате имеем

$$p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Простая вырожденность ($d_i = 1$). В случае когда дефект матрицы $\lambda_i I - A$ равен единице (простая вырожденность), существует только один собственный вектор, соответствующий λ_i , независимо от кратности λ_i . Собственный вектор, соответствующий λ_i , можно определить тем же методом, что и в случае простых собственных значений. Однако для собственного значения кратности m_i существуют $m_i - 1$ дополнительных векторов, называемых *обобщенными собственными векторами*. Эти $m_i - 1$ обобщенных собственных векторов $p_{i2}, p_{i3}, \dots, p_{im_i-1}$ находим из следующих $m_i - 1$ уравнений:

$$\begin{aligned} (\lambda_i I - A)p_{i2} &= -p_{i1} \\ (\lambda_i I - A)p_{i3} &= -p_{i2} \\ &\vdots \\ (\lambda_i I - A)p_{im_i} &= -p_{im_i-1} \end{aligned} \quad (4-184)$$

где p_{i1} — собственный вектор, соответствующий λ_i , который определяется решением

$$(\lambda_i I - A)p_{i1} = 0$$

Пример 4.6. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (4-185)$$

Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad (4-186)$$

Собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Таким образом, собственное значение $\lambda_1 = -1$ имеет кратность 2.

Для определения дефекта рассмотрим матрицу

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & -2 \\ 2 & \lambda_1 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (4-187)$$

которая имеет ранг, равный 1. Таким образом, дефект матрицы $\lambda_1 I - A$ также ра-

Характеристика систем	Непрерывная система	Цифровая система с фиксатором	Цифровая система
Переменные состояния	$\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{x}(kT)$	$\mathbf{x}(k)$
Уравнения состояния:			
стационарные	$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \theta(T)\mathbf{u}(kT)$	$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k)$
нестационарные	$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi[(k+1)T, kT]\mathbf{x}(kT) + \theta[(k+1)T, kT]\mathbf{u}(kT)$	$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{u}(k)$
Переходная матрица состояния:			
стационарная	$\Phi(t) = e^{At}$	$\Phi(kT) = \{\Phi(T)\}^k$	$\Phi(k) = A^k$
нестационарная	$\Phi(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$	$\Phi[(k+1)T, kT] = \exp \int_{kT}^{(k+1)T} A(\tau) d\tau$	$\Phi(N, k) = A(N-1)A(N-2) \cdot A(k+1)A(k)$
изображения матрицы	$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$	$\Phi(z) = [zI - \Phi(T)]^{-1} z$	$\Phi(z) = (zI - A)^{-1} z$
Импульсная переходная матрица	$\mathbf{g}(t) = D\Phi(t)B + E\delta(t)$	$\mathbf{g}(kT) = D\Phi[(k-1)T]B = E$	$\mathbf{g}(k) = D\Phi(k-1)B = E$
Передаточная матрица	$G(s) = D(sI - A)^{-1}B + E$	$G(z) = D[zI - \Phi(T)]^{-1}B + E$	$G(z) = D(zI - A)^{-1}B + E$
Переходные уравнения состояния:	$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)B\mathbf{u}(\tau) d\tau$	$\mathbf{x}(NT) = \Phi(NT)\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi[(N-k-1)T]\theta(T)\mathbf{u}(kT)$	$\mathbf{x}(N) = A^N\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1}B\mathbf{u}(k)$
стационарные	$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau$	$\mathbf{x}(NT) = \Phi(NT, 0)\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi[NT, (N-k)T] \cdot \theta[(N-k)T, (N-k-1)T]\mathbf{u}[(N-k-1)T]$	$\mathbf{x}(N) = \Phi(N, 0)\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(N, k+1)B(k)\mathbf{u}(k)$
Характеристическое уравнение	$ sI - A = 0$	$ zI - \Phi(T) = 0$	$ zI - A = 0$

вен 1. Это означает, что можно найти только один независимый собственный вектор с использованием матрицы

$$\text{Adj}(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (4-188)$$

Отсюда собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = -1$, равен

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Чтобы найти обобщенный собственный вектор, по определению запишем

$$(\lambda_1 I - A)p_2 = -p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-189)$$

или

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-190)$$

Разрешая последнее уравнение относительно p_2 , получим

$$p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Подводя итог, представим для сравнения в табличной форме (табл. 4.1) результаты анализа линейных систем в пространстве состояний, рассмотренные выше.

4.11. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ A

Решать уравнения состояния стационарных цифровых систем было бы весьма просто, если бы эти уравнения не были связаны друг с другом, т.е. если бы матрица A была диагональной. Например, если уравнения состояния цифровой системы n -го порядка имеют вид

$$x_i(k+1) = \lambda_i x_i(k) + \sum_{j=1}^r \gamma_j u_j(k)$$

$i = 1, 2, \dots, n$, то их решения при заданных $x_i(0)$ и $u_j(k)$ для $k \geq 0$ имеют простую форму:

$$x_i(k) = \lambda_i^k x_i(0) + \sum_{j=1}^r \sum_{m=0}^k \gamma_j \lambda_i^{m-1} u_j(k-m) \quad (4-191)$$

Поэтому переходная матрица состояния $\Phi(k)$ является также диагональной матрицей с элементами λ_i^k , $i = 1, 2, \dots, n$, расположенными на главной диагонали.

В общем случае, если матрица A имеет различные собственные значения, ее можно привести к диагональному виду преобразованием подобия. Рассмотрим дискретное уравнение состояния

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4-192)$$

где $x(k)$ — n -мерный вектор; $u(k)$ — r -мерный вектор; A имеет различные

собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Пусть P — невырожденная матрица, преобразующая вектор состояния $x(k)$ в вектор $y(k)$, т.е.

$$x(k) = Py(k) \quad (4-193)$$

$$y(k) = P^{-1}x(k) \quad (4-194)$$

Требуемое уравнение состояния имеет вид

$$y(k+1) = Ay(k) + Gu(k) \quad (4-195)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad (4-196)$$

Несвязанные уравнения состояния (4-195) известны как *каноническая форма*. Чтобы найти матрицу P , подставим выражение (4-193) в уравнение (4-142) и с учетом тождества (4-194) получим

$$A = P^{-1}AP \quad (4-197)$$

$$G = P^{-1}B \quad (n \times r) \quad (4-198)$$

Существуют несколько методов определения матрицы P при заданных матрице A и ее собственных значениях. Тем не менее, покажем, что столбцы матрицы P всегда совпадают с собственными векторами матрицы A . Обозначим через p_i собственный вектор матрицы A , соответствующий λ_i . Тогда

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \quad (4-199)$$

Доказательство этого соотношения проводят на основании определения собственного вектора (4-160), которое запишем в виде

$$\lambda_i p_i = Ap_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-200)$$

Образует матрицу размерностью $n \times n$

$$[\lambda_1 p_1 \ \lambda_2 p_2 \ \dots \ \lambda_n p_n] = [Ap_1 \ Ap_2 \ \dots \ Ap_n] = AP \quad (4-201)$$

Это выражение также запишем в виде

$$[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]A = PA = AP \quad (4-202)$$

откуда следует формула (4-197).

Можно показать, что если матрица A записана в канонической форме фазовой переменной, то матрица P есть матрица Вандермонда:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4-203)$$

4.12. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ЖОРДАНА

Если матрица A (за исключением симметрической матрицы) имеет кратные собственные значения, она не может быть приведена к диагональному виду. Однако это не означает, что систему невозможно преобразовать к форме, при которой решение уравнений состояния записывается непосредственно по их виду. Если матрица A не может быть приведена к диагональному виду, то тем не менее существует преобразование подобия $\Lambda = P^{-1}AP$, с помощью которого матрица A преобразуется к канонической форме Жордана, т.е. почти к диагональной матрице. В качестве примера предположим, что матрица A имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3$, причем последние три одинаковы. Матрица канонической формы Жордана имеет вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4-204)$$

В качестве другого примера для собственного значения кратности 4 матрица

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (4-205)$$

Каноническая матрица Жордана в общем случае имеет следующие свойства:

диагональными элементами матрицы Λ являются собственные значения матрицы A ;

все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю;

некоторые элементы, находящиеся непосредственно над главной диагональю, равны единице;

в матрице Λ (4-204), разделенной на части пунктирными линиями, подматрицы, которые образованы каждым собственным значением, называются *клетками Жордана*. Матрица (4-205) целиком образует одну клетку Жордана.

Существует веская причина для использования канонической формы Жордана, даже если она не является диагональной матрицей. Рассмотрим матрицу Λ (4-205) для уравнения состояния

$$y(k+1) = \Lambda y(k) \quad (4 \times 1) \quad (4-206)$$

Можно систематизировать нахождение переходной матрицы состояния

$e^{\Lambda t}$ почти так же просто, как и для диагональной матрицы. Скалярное уравнение состояния системы (4-206) полностью не связано с другими уравнениями. Поэтому решение для $y_4(k)$ имеет вид

$$y_4(k) = \lambda_1^k y_4(0) \quad (4-207)$$

Запишем третье уравнение состояния

$$y_3(k+1) = \lambda_1 y_3(k) + y_4(k) \quad (4-208)$$

Так как $y_4(k)$ уже задано формулой (4-207), уравнение (4-208) решается просто и дает результат

$$y_3(k) = \lambda_1^k y_3(0) + k \lambda_1^{k-1} y_4(0) \quad (4-209)$$

По аналогии второе уравнение состояния

$$y_2(k+1) = \lambda_1 y_2(k) + y_3(k) \quad (4-210)$$

Подставляя $y_3(k)$ из формулы (4-209) в уравнение (4-210) и решая его, имеем

$$y_2(k) = \lambda_1^k y_2(0) + k \lambda_1^{k-1} y_3(0) + \frac{k(k-1)}{2!} \lambda_1^{k-2} y_4(0) \quad (4-211)$$

Продолжая этот процесс, найдем решение для $y_1(k)$:

$$\begin{aligned} y_1(k) = & \lambda_1^k y_1(0) + k \lambda_1^{k-1} y_2(0) + \frac{k(k-1)}{2!} \lambda_1^{k-2} y_3(0) + \\ & + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \lambda_1^{k-3} y_4(0) \end{aligned} \quad (4-212)$$

В матричной форме переходное уравнение состояния запишем в виде

$$y(k) = \phi(k) y(0) \quad (4-213)$$

где

$$\phi(k) = \lambda_1^k \begin{bmatrix} 1 & k\lambda_1^{-1} & \frac{k(k-1)}{2!} \lambda_1^{-2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \lambda_1^{-3} \\ 0 & 1 & k\lambda_1^{-1} & \frac{k(k-1)}{2!} \lambda_1^{-2} \\ 0 & 0 & 1 & k\lambda_1^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-214)$$

В общем случае, если λ_1 имеет кратность m , переходная матрица состояния имеет форму

$$\phi(k) = \lambda_1^k \begin{bmatrix} 1 & k\lambda_1^{-1} & \frac{k(k-1)}{2!} \lambda_1^{-2} & \dots & \frac{k(k-1) \dots (k-n+2)}{(n-1)!} \lambda_1^{-n+1} \\ 0 & 1 & k\lambda_1^{-1} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \frac{k(k-1)}{2!} \lambda_1^{-2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & k\lambda_1^{-1} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4-215)$$

Определим теперь матрицу P , которая преобразует матрицу A с кратными собственными значениями в каноническую форму Жордана. Матрицу P , как и выше, вычисляем с использованием собственных векторов матрицы A (4-199). Собственные векторы, соответствующие собственным значениям матрицы A , находим обычным образом. Собственные векторы, соответствующие форме Жордана порядка m , находим с использованием клетки Жордана, имеющей вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{bmatrix} \quad (m \times m) \quad (4-216)$$

В этом случае с учетом $\Lambda = P^{-1}AP$ должно выполняться следующее соотношение:

$$[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m] \Lambda = A[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m] \quad (4-217)$$

которое раскрываем по столбцам в виде

$$\begin{aligned} \lambda_j p_1 &= Ap_1 \\ p_1 + \lambda_j p_2 &= Ap_2 \\ p_2 + \lambda_j p_3 &= Ap_3 \\ &\vdots \\ p_{m-1} + \lambda_j p_m &= Ap_m \end{aligned} \quad (4-218)$$

Преобразуя эти уравнения, получим:

$$\begin{aligned} (\lambda_j I - A)p_1 &= 0 \\ (\lambda_j I - A)p_2 &= -p_1 \\ (\lambda_j I - A)p_3 &= -p_2 \\ &\vdots \\ (\lambda_j I - A)p_m &= -p_{m-1} \end{aligned} \quad (4-219)$$

Из этих уравнений определяем обобщенные собственные векторы p_1, p_2, \dots, p_m .

4.13. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕХОДНОЙ МАТРИЦЫ СОСТОЯНИЯ

Выше были представлены переходная матрица состояния цифровой системы управления и ее частные случаи. Имеет смысл подчеркнуть отличие определений переходной матрицы состояния для двух различных условий.

Для импульсной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4-220)$$

где

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (4-221)$$

переходная матрица состояния дискретной системы

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \theta(T)\mathbf{u}(kT) \quad (4-222)$$

равна

$$\Phi(NT) = \Phi(T) \cdot \Phi(T) \dots \Phi(T) \quad (4-223)$$

где

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T} = \Phi(t) \Big|_{t=T} \quad (4-224)$$

В последней формуле $\Phi(t)$ есть переходная матрица состояния для матрицы \mathbf{A} . Выше было подчеркнуто, что в общем случае $\Phi(NT)$ не совпадает с $\Phi(t)$ при замене t на NT . Поэтому в импульсных системах, описываемых уравнениями (4-220) и (4-221), для нахождения переходной матрицы состояния $\Phi(NT)$ необходимо найти $\Phi(t)$, заменить t на T и затем воспользоваться выражением (4-223). Задача, по существу, состоит в нахождении переходной матрицы состояния $\Phi(t)$ для матрицы \mathbf{A} .

Для цифровой системы управления

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (4-225)$$

переходная матрица состояния определяется как

$$\Phi(N) = \mathbf{A}^N = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_N \quad (4-226)$$

Задача нахождения $\Phi(N)$ состоит только в умножении матрицы \mathbf{A} саму на себя N раз.

Рассмотрим вначале два различных метода вычисления $\Phi(NT)$: при заданной матрице $\Phi(T)$ для импульсной системы и при заданной матрице \mathbf{A} для цифровой системы.

Метод, основанный на теореме Кэли–Гамильтона. При заданной матрице $\Phi(T)$ или \mathbf{A} выражение (4-223) или (4-226) можно вычислить с использованием теоремы Кэли–Гамильтона.

Теорема утверждает, что каждая квадратная матрица должна удовлетворять своему характеристическому уравнению, т.е. в общем случае матрица \mathbf{A}^N может быть записана в виде

$$\mathbf{A}^N = \sum_{i=0}^{n-1} a_{Ni} \mathbf{A}^i \quad (4-227)$$

для любого положительного, целого числа N , где n — размерность матрицы \mathbf{A} ; a_{Ni} — коэффициенты характеристического уравнения для матрицы \mathbf{A} . Аналогично, если задана матрица $\Phi(T)$

$$\phi(NT) = [\phi(T)]^N = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{Ni} [\phi(T)]^i \quad (4-228)$$

где α_{Ni} — коэффициенты характеристического уравнения матрицы $\Phi(T)$.

Пример 4.7. Для иллюстрации применения теоремы Кэли–Гамильтона предположим, что матрица A в уравнении (4-225) задана в виде

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (4-229)$$

Характеристическое уравнение для матрицы A

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \quad (4-230)$$

Применяя теорему Кэли–Гамильтона, получаем матричное уравнение

$$A^2 - 6A + 5I = 0 \quad (4-231)$$

из которого имеем

$$A^2 = 6A - 5I \quad (4-232)$$

Таким образом, матрицу A^2 можно выразить через матрицу A . Суть теоремы Кэли–Гамильтона состоит в том, что матрицу A^N можно выразить как алгебраическую сумму матриц $A^{N-1}, A^{N-2}, \dots, A$ и в результате последовательного применения теоремы матрицу A^N в конечном счете выразить через матрицу A .

Поэтому

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(6A - 5I) = 6A^2 - 5A = 6(6A - 5I) - 5A = 31A - 30I \quad (4-233)$$

Аналогично можно показать, что

$$A^4 = 156A - 155I \quad (4-234)$$

Продолжая подобный итерационный процесс, можно вычислить матрицу A^N для сколь угодно большого N .

Метод, основанный на z -преобразовании. Для импульсной системы (4-222) переходная матрица состояния $\Phi(T)$ выразится в терминах z -преобразования в соответствии с (4-110):

$$\phi(NT) = \mathcal{Z}^{-1} \left[[zI - \phi(T)]^{-1} z \right] \quad (4-235)$$

Для цифровой системы управления (4-225)

$$\phi(N) = \mathcal{Z}^{-1} [(zI - A)^{-1} z] \quad (4-236)$$

В этих двух уравнениях вычисление переходной матрицы состояния включает обращение матрицы и затем нахождение обратного z -преобразования. Для системы второго порядка эти операции легко выполнить аналитически. Однако для систем более высокого порядка количество выполняемых вычислений может быть непомерно большим.

Задачу нахождения $(zI - A)^{-1}$ для заданной матрицы можно упростить с помощью описанного метода следующим образом.

Положим

$$(zI - A)^{-1} z = F \quad (4-237)$$

Тогда

$$zF = zI + AF \quad (4-238)$$

умножая обе части последнего выражения слева на $z\mathbf{I} + \mathbf{A}$, после упрощения имеем

$$z^2\mathbf{F} = \mathbf{A}^2\mathbf{F} + z\mathbf{A} + z^2\mathbf{I} \quad (4.239)$$

Снова умножая обе части последнего уравнения на $z\mathbf{I} + \mathbf{A}$, после упрощения получим

$$z^3\mathbf{F} = \mathbf{A}^3\mathbf{F} + z\mathbf{A}^2 + z^2\mathbf{A} + z^3\mathbf{I} \quad (4.240)$$

Продолжая процедуру, запишем следующие упрощения:

$$z^4\mathbf{F} = \mathbf{A}^4\mathbf{F} + z\mathbf{A}^3 + z^2\mathbf{A}^2 + z^3\mathbf{A} + z^4\mathbf{I} \quad (4.241)$$

$$\vdots$$

$$z^n\mathbf{F} = \mathbf{A}^n\mathbf{F} + z\mathbf{A}^{n-1} + z^2\mathbf{A}^{n-2} + \dots + z^{n-1}\mathbf{A} + z^n\mathbf{I} \quad (4.242)$$

Таким образом, получим следующие выражения:

$$a_1\mathbf{F} = a_1\mathbf{F}$$

$$a_2z\mathbf{F} = a_2\mathbf{A}\mathbf{F} + a_2z\mathbf{I}$$

$$a_3z^2\mathbf{F} = a_3\mathbf{A}^2\mathbf{F} + a_3z\mathbf{A} + a_3z^2\mathbf{I}$$

$$a_4z^3\mathbf{F} = a_4\mathbf{A}^3\mathbf{F} + a_4z\mathbf{A}^2 + a_4z^2\mathbf{A} + a_4z^3\mathbf{I} \quad (4.243)$$

$$\vdots$$

$$a_nz^{n-1}\mathbf{F} = a_n\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{F} + a_nz\mathbf{A}^{n-2} + a_nz^2\mathbf{A}^{n-3} + \dots + a_nz^{n-2}\mathbf{A} + a_nz^{n-1}\mathbf{I}$$

$$z^n\mathbf{F} = \mathbf{A}^n\mathbf{F} + z\mathbf{A}^{n-1} + z^2\mathbf{A}^{n-2} + \dots + z^{n-1}\mathbf{A} + z^n\mathbf{I}$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — коэффициенты характеристического уравнения матрицы \mathbf{A} ;

$$\sum_{i=0}^n a_{i+1}z^i = 0 \quad (a_{n+1} = 1) \quad (4.244)$$

Просуммировав левые и правые части выражения (4.243), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_{i+1}z^i\mathbf{F} &= \sum_{i=0}^n a_{i+1}\mathbf{A}^i\mathbf{F} + \sum_{i=1}^n a_{i+1}\mathbf{A}^{i-1}z + \sum_{i=2}^n a_{i+1}\mathbf{A}^{i-2}z^2 + \\ &+ \dots + \sum_{i=n-1}^n a_{i+1}\mathbf{A}^{i-n+1}z^{n-1} + z^n\mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.245)$$

где $a_{n+1} = 1$.

В соответствии с теоремой Кэли—Гамильтона первый член в правой части последнего уравнения есть нулевая матрица. Поэтому из выражения (4.245) получаем

$$\mathbf{F} = \frac{\sum_{j=1}^n z^j \sum_{i=1}^n a_{i+1}\mathbf{A}^{i-j}}{\sum_{i=0}^n a_{i+1}z^i} \quad (4.246)$$

или

$$F = \frac{\sum_{j=1}^n z^j \sum_{i=j}^n a_{i+1} A^{i-j}}{|zI - A|} \quad (4-247)$$

Числитель последнего выражения есть не что иное, как матрица $[Adj(zI - A)]z$.

После вычисления F по формуле (4-247), определяем матрицу

$$\phi(N) = Z^{-1}[F] \quad (4-248)$$

Для нахождения $\Phi(NT)$ в соответствии с (4-235) просто заменяем матрицу A на $\Phi(T)$ в выражении (4-247).

Пример 4.8. Предположим, что цифровая система управления, описываемая уравнением (4-225), имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad (4-249)$$

Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad (4-250)$$

Коэффициенты характеристического уравнения равны $a_4 = 1$, $a_3 = 6$, $a_2 = 11$ и $a_1 = 6$.

Используя выражение (4-247), запишем матрицу в виде

$$F = (zI - A)^{-1}z = \frac{\sum_{j=1}^3 z^j \sum_{i=j}^3 a_{i+1} A^{i-j}}{|zI - A|} = \frac{a_4 z^3 I + (a_3 I + a_4 A)z^2 + (a_2 I + a_3 A + a_4 A^2)z}{|zI - A|} \quad (4-251)$$

Подставляя коэффициенты a_4, a_3, a_2, a_1 и матрицу A в последнее выражение, имеем

$$F = \frac{z^3 I + \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ -6 & -11 & 0 \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} z}{(z-1)(z-2)(z-3)} \quad (4-252)$$

Представление выражения (4-252) в виде суммы элементарных слагаемых дает

$$F = \frac{z}{2(z-1)} \begin{bmatrix} 18 & 7 & 1 \\ -6 & 7 & 1 \\ -6 & -17 & 1 \end{bmatrix} - \frac{z}{z-2} \begin{bmatrix} 27 & 8 & 1 \\ -6 & 16 & 2 \\ -12 & -28 & 4 \end{bmatrix} + \frac{z}{2(z-3)} \begin{bmatrix} 38 & 9 & 1 \\ -6 & 27 & 3 \\ -18 & -39 & 9 \end{bmatrix} \quad (4-253)$$

Находя теперь обратное z -преобразование от обеих частей последнего уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \phi(k) = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 18 & 7 & 1 \\ -6 & 7 & 1 \\ -6 & -17 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 27 & 8 & 1 \\ -6 & 16 & 2 \\ -12 & -28 & 4 \end{bmatrix} e^{-0.693k} + \\ & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 38 & 9 & 1 \\ -6 & 27 & 3 \\ -18 & -39 & 9 \end{bmatrix} e^{-1.1k} \end{aligned} \quad (4-254)$$

Этот результат можно проверить, убедившись, что $\Phi(0) = I$, где I — единичная матрица.

Вычисление переходной матрицы состояния $\Phi(T)$. Ранее обсуждались вопросы вычисления переходной матрицы состояния $\Phi(NT)$ или $\Phi(N)$ соответственно для импульсных или цифровых систем управления. При рассмотрении импульсной системы отправной точкой является уравнение (4-220), в котором известны матрицы A и B . Чтобы найти матрицу $\Phi(NT)$ с помощью выражения (4-223), необходимо вначале вычислить матрицу $\Phi(T)$, которая определяется формулой (4-224).

Выше переходная матрица состояния $\Phi(t)$ матрицы A определялась выражениями (4-30) и (4-34). Формула (4-30) представляет собой описание в виде степенного ряда, в то время как (4-34) дает решение в виде преобразования Лапласа. Рассмотрим различные методы вычисления $\Phi(t)$ при заданной матрице A .

Метод преобразования Лапласа. Перепишем формулу (4-34)

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] \quad (4-255)$$

Матрицу $sI - A$ можно обращать по сути дела с помощью той же процедуры, которая описана выражениями (4-237) — (4-246). Результат можно записать в виде

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{i=j+1}^n a_i A^{i-j-1}}{|sI - A|} \quad (4-256)$$

где n — размерность матрицы A , и

$$|sI - A| = a_{n+1} s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 \quad (4-257)$$

Метод разложения в бесконечный степенной ряд. Матрица $\Phi(T)$ представляется в виде степенного ряда

$$\phi(T) = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots \quad (4-258)$$

Члены этого выражения могут вычисляться итерационно. Например, k -й член ряда равен $A^k T^k / k!$, а $(k+1)$ -й равен $A^{k+1} T^{k+1} / (k+1)!$. Поэтому можно записать

$$[(k+1)\text{-й член}] = \frac{AT}{k+1} \times (k\text{-й член}), \quad (4-259)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ Обычно при вычислении суммы ряда делается проверка на сходимость, и итерации могут прекращаться после N членов.

Метод разложения в ограниченный степенной ряд (теорема Кэли–Гамильтона). Степенной ряд для $\Phi(T)$ может быть ограничен N членами, где N – некоторое положительное целое. В этом случае

$$\phi(T) \cong \phi_N(T) = \sum_{k=0}^N \frac{A^k T^k}{k!} \quad (4-260)$$

Применяя к последнему выражению теорему Кэли–Гамильтона, можно записать

$$\phi_N(T) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j A^j \quad (4-261)$$

где n – размерность матрицы A , а a_j зависят от коэффициентов характеристического уравнения матрицы A и могут вычисляться итерационно. В общем случае N и n не связаны между собой, поэтому N может быть больше, чем n .

Метод собственных значений (теорема разложения Сильвестра, матрица A имеет различные собственные значения). Для систем с различными собственными значениями теорема разложения Сильвестра утверждает, что если

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k \quad (4-262)$$

то

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) F(\lambda_i) \quad (4-263)$$

где $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, – собственные значения (все различные) матрицы A ;

$$F(\lambda_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-264)$$

Для задачи вычисления переходной матрицы состояния

$$f(A) = \phi(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{k!} = e^{AT}$$

Таким образом,

$$f(\lambda_i) = e^{\lambda_i T} \quad (4-266)$$

и в соответствии с выражением (4-263)

$$\phi(T) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i T} F(\lambda_i) \quad (4-267)$$

где $F(\lambda_i)$ определяются выражением (4-264).

Пример 4.9. Для иллюстрации метода воспользуемся той же матрицей A (4-229).

Собственные значения матрицы A различны и равны: $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 1$. На основании формулы (4-266)

$$f(\lambda_1) = e^{5T} \quad (4-268)$$

$$f(\lambda_2) = e^T \quad (4-269)$$

Выражение (4-264) дает

$$F(\lambda_1) = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (4-270)$$

$$F(\lambda_2) = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (4-271)$$

Поэтому

$$\phi(T) = f(\lambda_1)F(\lambda_1) + f(\lambda_2)F(\lambda_2) = 0.5 \begin{bmatrix} e^{5T} + e^T & e^{5T} - e^T \\ e^{5T} - e^T & e^{5T} + e^T \end{bmatrix} \quad (4-272)$$

4. 14. ЦИФРОВЫЕ СОПРЯЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Как и для случая непрерывных систем управления, полезно рассмотреть сопряженные линейные цифровые системы. При проектировании оптимальных систем управления на основе вариационного метода очень часто необходимые условия оптимальности приводят к уравнениям сопряженной системы.

Для линейной непрерывной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4-273)$$

сопряженная система определяется уравнением

$$\dot{y}(t) = -A'(t)y(t) + B'(t)u(t)$$

которое следует из условия постоянства скалярного произведения векторов $x(t)$ и $y(t)$, т.е. $x'(t)y(t) = \text{const}$. Можно показать, что если $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица состояния для $A(t)$, то переходная матрица состояния для $-A'(t)$ есть $\Phi'(t_0, t)$.

Определить цифровую сопряженную систему можно на основании этого соотношения. Дискретное уравнение состояния, как следует из (4-273), имеет вид [см. уравнение (4-75)]

$$x(k_N) = \phi(k_N, k_0)x(k_0) + \sum_{j=0}^{N-1} \phi(k_N, k_{j+1})B(k_j)u(k_j) \quad (4-274)$$

Уравнение состояния цифровой сопряженной системы определяется как

$$y(k_N) = \phi^*(k_N, k_0)y(k_0) + \sum_{j=0}^{N-1} \phi^*(k_N, k_{j+1})B(k_j)u(k_j) \quad (4-275)$$

где

$$\phi^*(k_N, k_0) = \phi'(k_0, k_N) \quad (4-276)$$

Для чисто цифровых систем, заданных уравнениями

$$x(k_{i+1}) = A(k_i)x(k_i) + B(k_i)u(k_i) \quad (4-277)$$

можно представить сопряженную систему в виде

$$y(k_{i+1}) = A^*(k_i)y(k_i) + B(k_i)u(k_i) \quad (4-278)$$

Определяя сопряженную систему как систему, однородная часть которой удовлетворяет условию $x'(k_i) \cdot y(k_i) = \text{const}$, можно найти необходимую связь между $A(k_i)$ и $A^*(k_i)$. Предположим, что $A(k_i)$ и $A^*(k_i)$ невырождены. Далее, запишем скалярное произведение $x(k_i)$ и $y(k_i)$:

$$x'(k_i)y(k_i) = x'(k_{i+1})[A'(k_i)]^{-1}[A^*(k_i)]^{-1}y(k_{i+1}) \quad (4-279)$$

Поскольку скалярное произведение полагается постоянным, справедливо

$$x'(k_i)y(k_i) = x'(k_{i+1})y(k_{i+1}) \quad (4-280)$$

Отсюда

$$A^*(k_i) = [A'(k_i)]^{-1} = [A^{-1}(k_i)]' \quad (4-281)$$

Кроме того, переходная матрица состояния для $A(k_i)$ имеет вид [см. уравнение (4-76)]

$$\phi(k_i, k_0) = \begin{cases} A(k_{i-1})A(k_{i-2}) \dots A(k_0) & k_i > k_0 \\ I & k_i = k_0 \end{cases} \quad (4-282)$$

Переходная матрица состояния для $A^*(k_i)$

$$\phi^*(k_i, k_0) = \begin{cases} A^*(k_{i-1})A^*(k_{i-2}) \dots A^*(k_0) & k_i > k_0 \\ I & k_i = k_0 \end{cases} \quad (4-283)$$

На основании выражения (4-281) приходим к следующему соотношению:

$$\phi^*(k_i, k_0) = \phi'(k_0, k_i) \quad (4-284)$$

которое справедливо для всех k_i и k_0 и совпадает с (4-276).

4.15. СВЯЗЬ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ И РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Выше обсуждались уравнения состояния и их решения для линейных цифровых систем. Хотя обычно можно записать уравнения состояния непосредственно по структурной схеме системы, на практике, как правило, цифровая система описывается вначале разностным уравнением высокого порядка или соответствующей передаточной функцией. В этой связи полезно научиться записывать уравнения состояния по виду разностного уравнения или передаточной функции.

Процедура получения уравнений состояния по передаточной функции называется *декомпозицией*. Она рассмотрена в п. 4.18, где показано, что

в общем случае проще вначале преобразовать разностное уравнение высокого порядка в передаточную функцию, а затем применить какой-либо метод декомпозиции для получения уравнений состояния. Здесь установим некоторые основные закономерности в определении уравнений состояния систем высокого порядка.

Предположим, что одномерная линейная цифровая система описывается следующим разностным уравнением n -го порядка:

$$c(k+n) + a_n c(k+n-1) + a_{n-1} c(k+n-2) + \dots + a_2 c(k+1) + a_1 c(k) = r(k) \quad (4-285)$$

где $c(k)$ — выходная переменная, а $r(k)$ — входная. Коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n в действительности могут зависеть от времени.

Задача состоит в замене уравнения (4-285) n уравнениями состояния и уравнением выхода. Первый шаг состоит в определении переменных состояния как функций выходной переменной $c(k)$. Хотя набор переменных состояния этой системы не является единственным, наиболее удобно определить их следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= c(k) \\ x_2(k) &= c(k+1) = x_1(k+1) \\ &\vdots \\ x_n(k) &= c(k+n-1) \end{aligned} \quad (4-286)$$

После подстановки соотношений (4-286) в уравнение (4-285) и преобразования уравнения состояния принимают вид

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= -a_1 x_1(k) - a_2 x_2(k) - \dots - a_{n-1} x_{n-1}(k) - a_n x_n(k) + r(k) \end{aligned} \quad (4-287)$$

$$\text{Уравнение выхода имеет простой вид} \quad c(k) = x_1(k) \quad (4-288)$$

Для стационарных систем уравнения (4-287) записываются в компактной форме

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}r(k) \quad (4-289)$$

где $\mathbf{x}(k)$ — $(n \times 1)$ -мерный вектор состояния; $r(k)$ — скалярная входная переменная. Матрица коэффициентов имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad (4-290)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (n \times 1) \quad (4-291)$$

Уравнение выхода в векторно-матричной форме имеет вид

$$c(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) \quad (4-292)$$

где

$$\mathbf{D} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (n \times 1) \quad (4-293)$$

Уравнение состояния (4-289), матрицы коэффициентов которого \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют типовой вид (4-290) и (4-291), называется *канонической формой фазовой переменной*.

Далее мы покажем, что система, представленная в канонической форме фазовой переменной, имеет некоторые специфические полезные свойства, которые облегчают анализ и проектирование линейных цифровых систем.

Следует заметить, что разностное уравнение (4-285) не является уравнением общего вида, поскольку в его правой части отсутствуют члены высокого порядка, связанные со входным воздействием. В общем случае, если слагаемые, подобные $r(k+1)$, $r(k+2)$, ..., присутствуют в правой части уравнения (4-285), процедура определения переменных состояния уже не будет столь очевидной, как показано выше [см. уравнение (4-286)]. В подобной ситуации удобнее вначале преобразовать разностное уравнение высокого порядка в передаточную функцию, а затем для получения уравнений динамики воспользоваться декомпозицией.

4.16. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ФАЗОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В п. 4.15 указывалось, что линейная одномерная система относится к канонической форме фазовой переменной, если ее матрицы коэффициентов \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют форму (4-290) и (4-291). Система в канонической форме фазовой переменной имеет свойства, которые облегчают некоторые процедуры анализа и синтеза. Следующая теорема показывает, что собственные значения системы в канонической форме фазовой переменной всегда могут быть заданы произвольным образом с помощью обратной связи по состоянию.

Теорема 4.1. Пусть уравнения состояния линейной цифровой системы представлены в виде

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (4-294)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad (4-295)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (n \times 1) \quad (4-296)$$

Собственные значения системы могут быть произвольно заданы с помощью обратной связи по состоянию

$$u(t) = -Gx(t) \quad (4-297)$$

где

$$G = [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_n] \quad (4-298)$$

g_1, g_2, \dots, g_n — действительные константы.

Структурная схема, изображающая обратную связь по состоянию, показана на рис. 4.4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя уравнение (4-297) для входного сигнала $u(t)$ в (4-294), получаем уравнения состояния замкнутой системы

$$x(k+1) = (A - BG)x(k) \quad (4-299)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$|\lambda I - A + BG| = 0 \quad (4-300)$$

Подстановка выражений (4-295), (4-296) и (4-298) в уравнение (4-300) дает

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_1 + g_1 & a_2 + g_2 & a_3 + g_3 & a_4 + g_4 & a_5 + g_5 & \dots & \lambda + a_n + g_n \end{vmatrix} = 0 \quad (4-301)$$

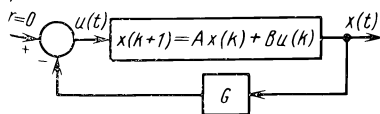


Рис. 4.4. Линейная цифровая система с обратной связью по состоянию

Это характеристическое уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} \lambda^n + (a_n + g_n)\lambda^{n-1} + (a_{n-1} + g_{n-1})\lambda^{n-2} + \dots \\ \dots + (a_2 + g_2)\lambda + (a_1 + g_1) = 0 \end{aligned} \quad (4-302)$$

Поскольку каждый коэффициент усиления обратной связи входит только в один коэффициент последнего уравнения, очевидно, что, если собственные значения характеристического уравнения замкнутой системы выбрать произвольно, т.е. произвольно задать коэффициенты уравнения (4-302), мы получим n линейно независимых уравнений для определения коэффициентов усиления обратных связей g_1, g_2, \dots, g_n .

Если система не представлена в канонической форме фазовой переменной, то существует преобразование подобия, которое преобразует матрицы **A** и **B** в соответствующую форму (4-295) и (4-296). Следующая теорема доказывает это положение.

Теорема 4.2. Пусть уравнения состояния линейной цифровой системы представлены в виде

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (4-303)$$

где $\mathbf{x}(k)$ — n -мерный вектор; $u(k)$ — скалярная входная переменная; **A** — некоторая матрица коэффициентов размерности $n \times n$; **B** — некоторая матрица размерности $n \times 1$, тогда

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (n \times n) \quad (4-304)$$

есть невырожденная матрица. Существует невырожденное преобразование

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) \quad (4-305)$$

или

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}(k) \quad (4-306)$$

которое преобразует уравнение (4-303) к канонической форме фазовой переменной

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}_1\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_1u(k) \quad (4-307)$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad (4-308)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-309)$$

Матрица M задается в виде

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_1 A \\ \vdots \\ M_1 A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad (4-310)$$

где

$$M_1 = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]^{-1} \quad (4-311)$$

Доказательство. Предположим, что матрица M записана в виде

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad (4-312)$$

где

$$M_i = [m_{i1} \quad m_{i2} \quad \dots \quad m_{in}] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-313)$$

Приравнивая первые строки обеих частей выражения (4-305), получаем

$$y_1(k) = M_1 x(k) \quad (4-314)$$

Увеличение на единицу аргумента (времени или шага) последнего уравнения дает

$$y_1(k+1) = M_1 x(k+1) \quad (4-315)$$

Подставляя уравнение состояния (4-303) в выражение (4-315) с учетом (4-308), имеем

$$y_1(k+1) = M_1 Ax(k) + M_1 Bu(k) = y_2(k) \quad (4-316)$$

Поскольку в соответствии с (4-305) $y(k)$ является функцией только $x(k)$, то в выражении (4-316) $M_1 B = 0$. Таким образом,

$$y_1(k+1) = y_2(k) = M_1 Ax(k) \quad (4-317)$$

Вновь увеличивая на единицу время или шаг в выражении (4-317) получаем

$$y_1(k+2) = y_2(k+1) = y_3(k) = M_1 A x(k+1) = M_1 A^2 x(k) \quad (4-318)$$

где учтено, что $M_1 A B = 0$.

Повторение данной процедуры $n-1$ раз дает в итоге

$$y_{n-1}(k+1) = y_n(k) = M_1 A^{n-1} x(k) \quad (4-319)$$

с учетом $M_1 A^{n-2} B = 0$. Поэтому, объединяя полученные результаты, имеем

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{bmatrix} = M x(k) = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_1 A \\ \vdots \\ M_1 A^{n-1} \end{bmatrix} x(k) \quad (4-320)$$

Таким образом, для произвольного $x(k)$

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_1 A \\ \vdots \\ M_1 A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4-321)$$

и, кроме того, матрица M_1 удовлетворяет условию

$$M_1 B = M_1 A B = \dots = M_1 A^{n-2} B = 0 \quad (4-322)$$

С учетом выражения (4-305) записываем

$$\begin{aligned} y(k+1) &= M x(k+1) = M A x(k) + M B u(k) = \\ &= M A M^{-1} y(k) + M B u(k) \end{aligned} \quad (4-323)$$

Сравнивая выражения (4-323) и (4-307), получаем

$$A_1 = M A M^{-1} \quad (4-324)$$

$$B_1 = M B \quad (4-325)$$

Тогда, с учетом выражения (4-321) запишем

$$S_1 = \begin{bmatrix} M_1 B \\ M_1 A B \\ \vdots \\ M_1 A^{n-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-326)$$

Поскольку M_1 — матрица размерностью $1 \times n$, выражение (4-326) запишем в виде

$$M_1 [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \quad (4.327)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} M_1 &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1][B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]^{-1} = \\ &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]S^{-1} \end{aligned} \quad (4.328)$$

если матрица S невырождена. Ниже будет показано, что условие невырожденности матрицы S является условием полной управляемости по состоянию. После того как M_1 определена в соответствии с (4.328), находим матрицу M по формуле (4.321).

Теорема 4.3. Две системы, описываемые уравнениями состояния (4.303) и (4.307) и связанные преобразованием подобия (4.324) и (4.325), имеют одинаковые собственные значения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Собственные значения системы (4.303) являются корнями характеристического уравнения

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (4.329)$$

Для системы (4.307) характеристическое уравнение имеет вид

$$|\lambda I - A_2| = |\lambda I - MAM^{-1}| = 0 \quad (4.330)$$

Уравнение (4.330) перепишем в виде

$$|\lambda MM^{-1} - MAM^{-1}| = 0 \quad (4.331)$$

или

$$|M(\lambda I - A)M^{-1}| = 0 \quad (4.332)$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению их определителей, получаем

$$|M(\lambda I - A)M^{-1}| = |M||\lambda I - A||M^{-1}| = |\lambda I - A| \quad (4.333)$$

Это доказывает, что характеристические уравнения двух систем идентичны, а следовательно, должны быть идентичны и их собственные значения.

Смысл теоремы 4.3 состоит в том, что для любой цифровой системы с одним входом и уравнением состояния вида (4.303) собственные значения могут быть выбраны произвольным образом с помощью обратной связи по состоянию $u(k) = -Gx(k)$, если матрица S в выражении (4.304) невырождена. Кроме того, можно преобразовать систему к канонической форме фазовой переменной с тем, чтобы упростить вычисление постоянных коэффициентов усиления обратной связи $u(k) = -G_1 y(k)$ преобразованной системы по заданным собственным значениям. Коэффициенты усиления обратной связи исходной системы окончательно определяются из соотношения

$$G = G_1 M \quad (4.334)$$

Для общего многомерного случая необходимое и достаточное условие произвольного задания собственных значений системы с обратной связью по состоянию заключается в том, что матрица $S(n \times nr)$ должна иметь ранг n . Строгое доказательство этого условия математически сложно и здесь не приводится.

Следующий пример иллюстрирует метод синтеза по заданным собственным значениям с использованием канонической формы фазовой переменной.

Пример 4.10. Предположим, что уравнения состояния цифровой системы второго порядка представлены в виде

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (4-335)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-336)$$

Требуется найти матрицу коэффициентов \mathbf{G} для обратной связи по состоянию $u(k) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(k)$, такую, чтобы собственные значения замкнутой системы были равны: $\lambda_1 = 0,4$ и $\lambda_2 = 0,6$. Собственные значения матрицы \mathbf{A} равны $\lambda = 1, 1$. Таким образом, обратная связь по состоянию располагает эти собственные значения внутри единичной окружности на z -плоскости, делая систему устойчивой.

Хотя элементы матрицы \mathbf{G} можно определить, приравнявая коэффициенты требуемого характеристического уравнения

$$(\lambda - 0,4)(\lambda - 0,6) = \lambda^2 - \lambda + 0,24 = 0 \quad (4-337)$$

к коэффициентам уравнения

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G}| = 0 \quad (4-338)$$

преобразуем вначале систему к канонической форме фазовой переменной. Из выражения (4-304) находим матрицу

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-339)$$

которая является невырожденной. Тогда

$$\mathbf{M}_1 = [0 \quad 1]\mathbf{S}^{-1} = [-1 \quad 1] \quad (4-340)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_1\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4-341)$$

Для системы в канонической форме имеем

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}_1\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_1u(k) \quad (4-342)$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4-343)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{M}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-344)$$

Характеристическое уравнение преобразованной замкнутой системы

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{G}_1| = 0 \quad (4-345)$$

где

$$\mathbf{G}_1 = [g_1^* \quad g_2^*] \quad (4-346)$$

есть матрица обратной связи. Раскрывая уравнение (4-345), получаем

$$\lambda^2 + (g_2^* - 2)\lambda + (g_1^* + 1) = 0 \quad (4-347)$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты уравнений (4-337) и (4-347), находим

$$\mathbf{G}_1 = [g_1^* \quad g_2^*] = [-0.76 \quad 1] \quad (4-348)$$

Матрица обратной связи исходной системы определяется как

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \mathbf{M} = [-0.76 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [-0.24 \quad 1.24] \quad (4-349)$$

Легко показать, что собственные значения матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{BG}$ равны 0,4 и 0,6. Таким образом, управление с использованием обратной связи по состоянию, обеспечивающее требуемые собственные значения, имеет вид

$$u(k) = [0.24 \quad -1.24] \mathbf{x}(k).$$

4.17. ДИАГРАММА СОСТОЯНИЯ

Метод графов, описанный в гл. 3, применяется к алгебраическим уравнениям. Поэтому традиционный метод графов может использоваться для описания соотношений входных и выходных сигналов линейной системы только в области изображений. Здесь метод переходных графов состояния будет распространен на разностные уравнения состояния. Для краткости *переходный граф состояния* назовем *диаграммой состояния*.

В случае непрерывных систем диаграмма состояния имеет сходство со структурной схемой программы для аналоговой вычислительной машины (АВМ). Поэтому при наличии диаграммы состояния задача может решаться либо на АВМ, либо вручную. В случае цифровых систем диаграмма состояния описывает операции, выполняемые гибридной или цифровой вычислительной машиной, так что задача по-прежнему может решаться как машинными, так и аналитическими методами.

Диаграмма состояния непрерывных систем. Основными линейными операциями, которые могут выполняться на АВМ, являются умножение на константу, суммирование, изменение знака и интегрирование. Покажем теперь, что эти вычислительные операции тесно связаны с элементами диаграмм состояния.

1. *Умножение машинной переменной на константу* в АВМ осуществляется с помощью потенциометров и усилителей. Рассмотрим операцию

$$x_2(t) = ax_1(t) \quad (4-350)$$

где a — константа. Если a лежит между нулем и единицей, то для этих целей используется потенциометр. Если a является отрицательным целым, меньшим или равным -1 , то для реализации выражения (4-350) используется операционный усилитель. Потенциометр и операционный усилитель как элементы структурной схемы показаны на рис. 4.5, a и b соответственно. Поскольку выражение (4-350) является алгебраическим, оно может быть представлено соответствующим графом, изображенным на рис. 4.5, $в$. Этот граф можно рассматривать как диаграмму состояния или элемент диаграммы состояния, если переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются

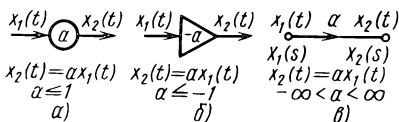


Рис. 4.5. Элементы структурной схемы: а – потенциометр; б – операционный усилитель; в – диаграмма состояния операции умножения переменной на константу

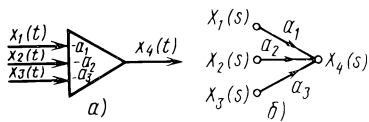


Рис. 4.6. Изображение на структурной схеме операционного усилителя, используемого в качестве сумматора (а) и представление операции суммирования в виде диаграммы состояния (б)

переменными состояния или их линейными комбинациями. Поскольку преобразование по Лапласу выражения (4-350) имеет вид

$$X_2(s) = aX_1(s) \quad (4-351)$$

то фрагмент диаграммы состояния на рис. 4.5, в изображает также связь между преобразованными переменными.

2. *Алгебраическая сумма двух или более машинных переменных* образуется на АВМ с помощью операционного усилителя, изображенного на рис. 4.6, а. В качестве иллюстрации представлено алгебраическое выражение вида

$$x_4(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) \quad (4-352)$$

где все коэффициенты предполагаются меньшими или равными нулю. Диаграмма состояния, представленная на рис. 4.6, б, изображает как само выражение (4-352), так и его преобразование Лапласа.

3. *Интегрирование машинной переменной* выполняется на АВМ с помощью блока, называемого интегратором. Если выходной сигнал интегратора обозначить $x_1(t)$ с заданным начальным условием $x_1(t_0)$ при $t = t_0$, а его входной сигнал – $x_2(t)$, то интегратор выполняет следующую операцию:

$$x_1(t) = \int_{t_0}^t a x_2(\tau) d\tau + x_1(t_0) \quad (4-353)$$

где a – константа, меньшая или равная нулю. Изображение интегратора на структурной схеме представлено на рис. 4.7, а. В общем случае интегратор может использоваться одновременно как суммирующее и как усиливающее устройство. Для представления операции интегрирования на диаграмме состояния возьмем преобразование Лапласа от обеих частей выражения (4-353):

$$X_1(s) = a \frac{X_2(s)}{s} + a \int_{t_0}^0 x_2(\tau) d\tau + \frac{x_1(t_0)}{s} \quad (4-354)$$

Поскольку состояние интегратора к моменту t_0 учтено членом $x_1(t_0)$ и предполагается, что изменение состояния начинается при $t = t_0$, то $x_2(\tau) = 0$ для $0 < \tau < t_0$. Тогда выражение (4-354) принимает вид

$$X_1(s) = \frac{aX_2(s)}{s} + \frac{x_1(t_0)}{s} \quad (t \geq t_0) \quad (4-355)$$

рис. 4.7. Изображение интегратора на структурной схеме (а) и диаграммы состояния операции интегрирования (б, в)

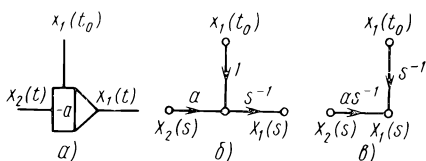


рис. 4.8. Диаграмма состояния системы, описываемой уравнением (4-357)

Следует подчеркнуть, что преобразованное выражение (4-355) определено только для $t \geq t_0$. Поэтому обратное преобразование Лапласа от $X_1(s)$ должно иметь вид

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_1(s)] = a \int_{t_0}^t x_2(\tau) d\tau + x_1(t_0) \quad (4-356)$$

Изображение операции интегрирования на диаграмме состояния следует из описания соответствующего графа выражением (4-355). Два варианта представления интегратора на диаграмме состояния показаны на рис. 4.7, б и в.

Диаграмма состояния не только используется при моделировании на АВМ, но и может являться источником следующей информации о линейной динамической системе:

- 1) уравнения динамики, т.е. уравнения состояния и уравнения выхода;
- 2) переходное уравнение состояния;
- 3) передаточная функция;
- 4) переменные состояния.

Рассмотрим числовой пример для иллюстрации использования диаграммы состояния при анализе линейных непрерывных систем.

Пример 4.11. Предположим, что линейная динамическая система описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3 \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = r(t) \quad (4-357)$$

где $c(t)$ – выходной сигнал, а входное воздействие $r(t)$ есть единичная ступенчатая функция. Начальное состояние системы описывается значениями $c(t_0)$ и $dc(t_0)/dt$, вычисленными при $t = t_0$.

Диаграмма состояния, изображенная на рис. 4.8, получена в результате решения уравнения (4-357) относительно старшей производной. Переменные состояния системы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ определяются как выходные переменные интеграторов. Переходные уравнения состояния системы, преобразованные по Лапласу, следуют непосредственно из диаграмм состояния на основании формулы Мэсона

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} R(s) \quad (4-358)$$

Для единичной ступенчатой входной функции $R(s) = 1/s$ обратное преобразование по Лапласу уравнения (4-358) имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} \\ -2e^{-(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)} & -e^{-(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-(t-t_0)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-t_0)} \\ e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} \quad t \geq t_0 \quad (4-359)$$

и представляет собой переходное уравнение состояния системы.

Заметим, что при выводе последнего уравнения предполагалось, что $t = t_0$, поэтому использовалась следующая формула обратного преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \right] = e^{-a(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \quad (4-360)$$

Для сравнения читатель может найти переходные уравнения состояния с использованием выражения (4.46).

Уравнения состояния системы определяются из диаграммы состояния в результате применения формулы Мэсона к узлам $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при входных сигналах $r(t)$, $x_1(t)$ и $x_2(t)$. При этом ветви с коэффициентом передачи s^{-1} исключаются из диаграммы состояния, поэтому уравнения динамики системы записываются в виде

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (4-361)$$

$$c(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4-362)$$

Передаточная функция системы обычно определяется с помощью преобразования по Лапласу уравнения (4-357). В то же время, применяя формулу Мэсона для точек $R(s)$ и $C(s)$ на диаграмме состояния (см. рис. 4.8) и полагая начальные состояния нулевыми, получаем

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad (4-363)$$

Диаграмма состояния цифровых систем. Если цифровая система описывается разностными уравнениями или дискретными уравнениями состояния, то связи между дискретными переменными состояния можно отразить с помощью диаграммы состояния. В то время как структурная схема программы АВМ имеет сходство с непрерывной диаграммой состояния, цифровая диаграмма состояния изображает операции на цифровой вычислительной машине (ЭВМ).

К числу линейных операций ЭВМ относятся: умножение на константу, сложение нескольких переменных, временная задержка или запоминание. Математическое описание этих основных цифровых операций вместе с соответствующими z -преобразованиями представлены ниже.

1. Умножение на константу:

$$x_2(kT) = ax_1(kT) \quad (4-364)$$

$$X_2(z) = aX_1(z) \quad (4-365)$$

2. Суммирование:

$$x_3(kT) = x_1(kT) + x_2(kT) \quad (4-366)$$

$$X_3(z) = X_1(z) + X_2(z) \quad (4-367)$$

3. Временная задержка или запоминание:

$$x_2(kT) = x_1[(k+1)T] \quad (4-368)$$

$$X_2(z) = zX_1(z) - zx_1(0) \quad (4-369)$$

или

$$X_1(z) = z^{-1}X_2(z) + x_1(0)$$

Изображения диаграмм состояния и соответствующих структурных схем ЭВМ для этих операций представлены на рис. 4.9. Рассмотрим пример для иллюстрации построения и использования диаграммы состояния цифровой системы.

Пример 4.12. Предположим, что цифровая система описывается разностным уравнением

$$c(k+2) + 2c(k+1) + 3c(k) = r(k) \quad (4-370)$$

Диаграмма состояния системы, представленная на рис. 4.10, получена в результате решения уравнения (4.370) относительно первой переменной.

За переменные состояния системы приняты выходные сигналы блоков задержки на диаграмме состояния. Пренебрегая начальными состояниями и ветвями с коэффициентами передачи z^{-1} , запишем уравнение состояния системы в виде

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k) \quad (4-371)$$

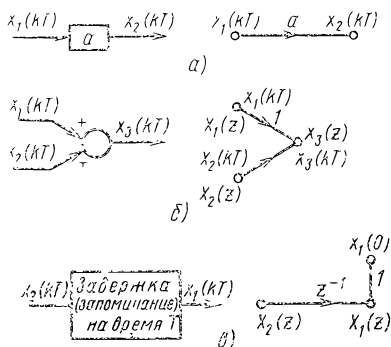


Рис. 4.9. Основные элементы цифровой диаграммы состояния и соответствующие операции ЭВМ

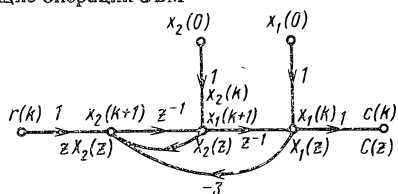


Рис. 4.10. Диаграмма состояния цифровой системы, описываемой уравнением (4-370)

и уравнение выхода в виде

$$c(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (4-372)$$

Переходное уравнение состояния системы, которое является решением уравнения (4-371), определяется из диаграммы состояния на основании формулы Мэсона. Используя $X_1(z)$ и $X_2(z)$ в качестве выходных узлов, а $R(z)$, $x_1(0)$ и $x_2(0)$ в качестве входных узлов, имеем

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + 2z^{-1} & z^{-1} \\ -3z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} z^{-2} \\ z^{-1} \end{bmatrix} R(z) \quad (4-373)$$

где

$$\Delta = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \quad (4-374)$$

Уравнение (4-373) является переходным уравнением состояния в области z -преобразования. Общая форма этого уравнения задается выражением (4-131), т.е.

$$X(z) = (zI - A)^{-1} zX(0) + (zI - A)^{-1} BR(z) \quad (4-375)$$

Одно из преимуществ диаграммы состояния заключается в том, что уравнение (4-373) легко выводится с помощью формулы Мэсона. Это позволяет избежать обращения матрицы $(zI - A)$, которое требуется при использовании формулы (4-375).

Переходное уравнение состояния во временной области находится из выражения (4-373) с помощью обратного z -преобразования.

Передаточная функция между выходом и входом системы определяется из диаграммы состояния в виде

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{X_1(z)}{R(z)} = \frac{z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}} = \frac{1}{z^2 + 2z + 3} \quad (4-376)$$

4.18. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

В общем случае передаточная функция цифрового регулятора или системы $D(z)$ может быть реализована с помощью импульсных RC -фильтров, универсальной и специализированной ЭВМ. Благодаря преимуществам в скорости вычисления, емкости памяти и гибкости ЭВМ находят все более широкое применение в системе управления. Более того, дискретная природа сигналов, воспринимаемых и обрабатываемых цифровым регулятором, позволяет легко реализовать дискретную передаточную функцию на ЭВМ.

Априорное требование к передаточной функции $D(z)$ состоит в том, что она должна быть физически реализуема. Условие физической реализуемости произвольной линейной системы предполагает, что выходной сигнал системы не может возникнуть прежде, чем будет приложен входной сигнал. Предположим, что передаточная функция $D(z)$ цифрового регулятора выражается отношением двух полиномов:

$$D(z) = \frac{a_{m+1}z^m + a_m z^{m-1} + \dots + a_1}{b_{n+1}z^n + b_n z^{n-1} + \dots + b_1} \quad (4-377)$$

Известно, что при разложении $D(z)$ в ряд по степеням z^{-1} коэффициенты

членов ряда представляют собой значения весовой последовательности цифровой системы. Так, коэффициент при члене z^{-k} соответствует значению весовой последовательности в момент $t = kT$. Очевидно, что для физической реализуемости цифровой системы при разложении $D(z)$ в степенной ряд в нем не должно содержаться ни одного члена с положительным показателем степени. Положительный показатель степени y z среди членов ряда указывает на наличие "упреждения" или, другими словами, на то, что выходной сигнал предшествует входному. Поэтому, чтобы $D(z)$ в выражении (4-377) представляла собой физически реализуемую передаточную функцию, наивысший показатель степени знаменателя должен быть равным соответствующему показателю степени числителя или превосходить его, т.е. $n \geq m$.

Довольно часто $D(z)$ имеет одинаковое число полюсов и нулей и записывается в виде

$$D(z) = \frac{a_{n+1} + a_n z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n}}{b_{m+1} + b_m z^{-1} + \dots + b_1 z^{-m}} \quad (4-378)$$

где n и m — положительные целые числа. В этом случае знаменатель $D(z)$ не должен содержать общего множителя z^{-1} . Иными словами, в формуле (4-378) $b_{m+1} \neq 0$.

Реализация дискретной передаточной функции на ЭВМ в общем случае может осуществляться тремя различными способами: непосредственной, последовательной или параллельной декомпозицией. Эти три метода декомпозиции иллюстрируются ниже в терминах диаграмм состояния.

1. Непосредственная декомпозиция. Предположим, что передаточная функция цифрового регулятора имеет вид

$$D(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{a_{n+1} + a_n z^{-1} + a_{n-1} z^{-2} + \dots + a_1 z^{-n}}{b_{m+1} + b_m z^{-1} + b_{m-1} z^{-2} + \dots + b_1 z^{-m}} \quad (4-379)$$

где $b_{m+1} \neq 0$; m и n — положительные целые числа; $C(z)$ и $R(z)$ — z -преобразования выходного и входного сигналов регулятора, соответственно. Построим диаграмму состояния, поскольку она совпадает с реализацией системы на ЭВМ.

Умножим числитель и знаменатель выражения (4-379) на переменную $X(z)$. В результате получим

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{(a_{n+1} + a_n z^{-1} + a_{n-1} z^{-2} + \dots + a_1 z^{-n})X(z)}{(b_{m+1} + b_m z^{-1} + b_{m-1} z^{-2} + \dots + b_1 z^{-m})X(z)} \quad (4-380)$$

Приравнивание числителей в последнем равенстве дает

$$C(z) = (a_{n+1} + a_n z^{-1} + a_{n-1} z^{-2} + \dots + a_1 z^{-n})X(z) \quad (4-381)$$

Та же операция для знаменателей приводит к выражению

$$R(z) = (b_{m+1} + b_m z^{-1} + b_{m-1} z^{-2} + \dots + b_1 z^{-m})X(z) \quad (4-382)$$

Чтобы построить диаграмму состояния, выражение (4-382) должно

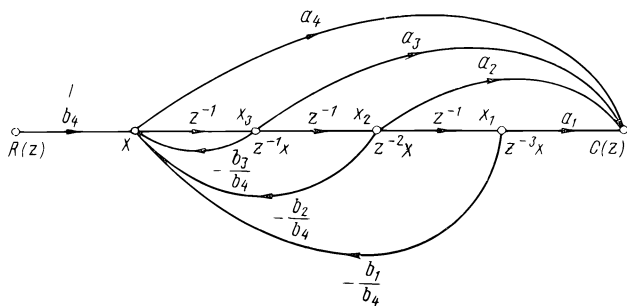


Рис. 4.11. Диаграмма состояния для передаточной функции (4-379) при $m = n = 3$ полученная непосредственной декомпозицией

быть записано с указанием причинно-следственных связей. Разрешая выражение (4-382) относительно $X(z)$, получаем

$$X(z) = \frac{1}{b_{m+1}} R(z) - \frac{b_m}{b_{m+1}} z^{-1} X(z) - \frac{b_{m-1}}{b_{m+1}} z^{-2} X(z) - \dots - \frac{b_1}{b_{m+1}} z^{-m} X(z) \quad (4-383)$$

Диаграмма состояния для выражений (4-381) и (4-383) изображена на рис. 4.11 при условии, что $m = n = 3$. Для простоты на диаграмме не представлены начальные состояния. Эта диаграмма может служить основой программы для ЭВМ, при этом ветви с коэффициентами передачи z^{-1} реализуются временной задержкой или запоминанием на T секунд.

Диаграмма состояния (см. рис. 4.11) может быть использована, конечно, и для аналитических расчетов. Определяя в качестве переменных состояния выходные сигналы узлов всех блоков задержки и применяя формулу Мэсона, можно получить уравнение динамики и переходное уравнение состояния непосредственно из диаграммы состояния.

Поскольку дискретные уравнения состояния представляют собой систему разностных уравнений первого порядка, для применения формулы Мэсона блоки задержки с коэффициентом передачи ветви z^{-1} должны быть исключены из диаграммы состояния.

Применяя описанную выше процедуру к диаграмме состояния, показанной на рис. 4.11, запишем уравнение состояния в виде

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \end{aligned} \quad (4-384)$$

$$x_3(k+1) = -\frac{b_1}{b_4} x_1(k) - \frac{b_2}{b_4} x_2(k) - \frac{b_3}{b_4} x_3(k) + \frac{1}{b_4} r(k)$$

Отсюда можно сделать вывод, что непосредственная декомпозиция всегда приводит к модели системы в пространстве состояний в канонической форме фазовой переменной.

2. Последовательная декомпозиция. Если передаточная функция $D(z)$ задана в форме сомножителей, ее можно записать в виде произведения пе-

редаточных функций первого порядка, каждая из которых реализуется простой программой для ЭВМ или иллюстрируется соответствующей диаграммой состояния. Исходная передаточная функция $D(z)$ в этом случае заменяется последовательным соединением программ или диаграмм состояния, соответствующих передаточным функциям первого порядка.

Предположим, что передаточная функция цифровой системы записана в виде

$$D(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K(z + c_1)(z + c_2) \dots (z + c_m)}{(z + d_1)(z + d_2) \dots (z + d_n)} \quad (4-385)$$

где $n \geq m$; $-c_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ и $-d_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ — нули и полюсы $D(z)$, соответственно. В общем случае эти полюсы и нули могут быть действительными или комплексными, хотя работа с комплексными числами в программе может представлять трудности. Поэтому форму $D(z)$, задаваемую выражением (4-385), лучше всего использовать для действительных полюсов и нулей.

Записывая $D(z)$ в виде произведения коэффициента K и передаточных функций первого порядка, получаем

$$D(z) = K D_1(z) D_2(z) \dots D_n(z) \quad (4-386)$$

где

$$D_k(z) = \frac{z + c_k}{z + d_k} = \frac{1 + c_k z^{-1}}{1 + d_k z^{-1}} \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4-387)$$

$$D_k(z) = \frac{1}{z + d_k} = \frac{z^{-1}}{1 + d_k z^{-1}} \quad k = m + 1, m + 2, \dots, n \quad (4-388)$$

Диаграмма состояния для выражения (4-387) представлена на рис. 4.12, а, а для выражения (4-388) — на рис. 4.12, б. Общая программа, реализующая $D(z)$, получается в результате последовательного соединения элемента $K = a_0/b_0$ с программами первого порядка для $D_k(z)$, представленными на рис. 4.12.

Когда диаграмма состояния построена полностью, непосредственно по ее виду на основании формулы Мэсона могут быть записаны уравнения состояния и выхода.

3. Параллельная декомпозиция. Передаточная функция $D(z)$ может быть реализована также с помощью параллельной декомпозиции; в данном случае в форме сомножителей необходимо представить только знаменатель $D(z)$.

Пусть передаточная функция цифровой системы представлена в виде

$$D(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = K \frac{z^m + a_m z^{m-1} + \dots + a_2 z + a_1}{z^n + b_n z^{n-1} + \dots + b_2 z + b_1} \quad (4-389)$$

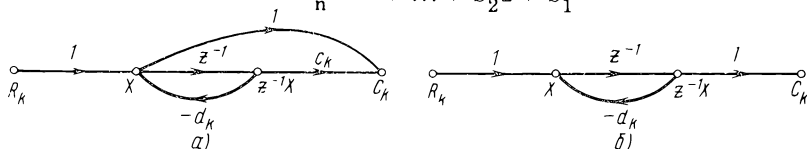


Рис. 4.12. Диаграммы состояний для выражений (4-387) и (4-388)

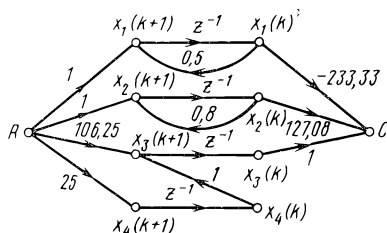


Рис. 4.13. Диаграмма состояния для выражения (4-392), полученная параллельной декомпозицией

где $n > m$. Предположим, что одинаковые нули и полюсы в $D(z)$ отсутствуют и что среди n собственных значений i являются различными, а оставшиеся имеют кратность $n - i$, тогда с помощью разложения на простые слагаемые запишем

$$D(z) = \sum_{k=1}^i \frac{K_k}{z + d_k} + \sum_{k=i+1}^n \frac{K_k}{(z + d_k)^{k-i}} \quad (4-390)$$

где первое слагаемое соответствует различным собственным значениям d_k , $k = 1, 2, \dots, i$, а второе — кратным, причем через $d_{i+1} = d_{i+2} = \dots = d_n$ обозначено собственное значение кратности $n - i$.

Для изображения диаграммы состояния перепишем выражение (4-390) в виде

$$D(z) = \sum_{k=1}^i \frac{K_k z^{-1}}{1 + d_k z^{-1}} + \sum_{k=i+1}^n \frac{K_k z^{i-k}}{(1 + d_k z^{-1})^{k-i}} \quad (4-391)$$

Передаточная функция $D(z)$ теперь представлена в виде диаграммы состояния, которая состоит из основных блоков, изображенных на рис. 4.12, б, соединенных параллельно. Важно отметить, что параллельная декомпозиция приводит к системе уравнений состояния в канонической форме при различных собственных значениях или в общем случае к системе в жордановой канонической форме. Следующий пример иллюстрирует основные особенности параллельной декомпозиции.

Пример 4.13. Рассмотрим передаточную функцию

$$D(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{10(z^2 + z + 1)}{z^2(z - 0.5)(z - 0.8)} \quad (4-392)$$

собственные значения которой равны $z = 0; 0; 0.5; 0.8$. Необходимо преобразовать эту передаточную функцию с помощью параллельной декомпозиции и затем определить уравнения динамики данной системы.

В результате разложения $D(z)$ на простые слагаемые имеем

$$D(z) = \frac{-233.33}{z - 0.5} + \frac{127.08}{z - 0.8} + \frac{25}{z^2} + \frac{106.25}{z}$$

Передаточная функция $D(z)$ реализуется параллельным соединением звеньев первого порядка, представленных на рис. 4.13.

Следует заметить, что, поскольку $D(z)$ имеет четвертый порядок, на диаграмме должно быть только четыре блока задержки. На рис. 4.13 изображена также реализация минимального порядка для заданной передаточной функции. Уравнения состояния системы записываются по известной методике. В результате имеем

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 106.25 \\ 25 \end{bmatrix} r(kT) \quad (4-393)$$

что представляет собой каноническую форму Жордана. Уравнение выхода записывается в виде

$$c(k) = [-233.33 \quad 127.08 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}(k) \quad (4-394)$$

4.19. ДИАГРАММЫ СОСТОЯНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Импульсные системы управления обычно содержат как цифровые, так и аналоговые элементы. Эти два типа элементов соединяются вместе через устройства выборки и хранения. В качестве иллюстрации на рис. 4.14 показана структурная схема импульсной системы управления. Система состоит из цифрового регулятора, экстраполятора нулевого порядка и непрерывного процесса. Покажем, каким образом к цифровым системам такого типа можно применить методы диаграмм состояния и анализа в пространстве состояний. Однако перед получением диаграммы состояния для всей системы, изображенной на рис. 4.14, необходимо определить диаграмму состояния экстраполятора нулевого порядка.

Диаграмма состояния экстраполятора нулевого порядка. Обозначим входной и выходной сигналы экстраполятора нулевого порядка через $e^*(t)$ и $h(t)$ соответственно. Тогда для интервала $kT \leq t < (k+1)T$ имеем

$$h(t) = e(kT) \quad (4-395)$$

Вычисляя преобразование Лапласа от обеих частей последнего выражения, получаем

$$H(s) = \frac{e(kT)}{s} \quad (4-396)$$

для $kT \leq t < (k+1)T$. Поэтому диаграмма состояния экстраполятора нулевого порядка состоит из единственной ветви, соединяющей узлы $e(kT)$ и $H(s)$, как показано на рис. 4.15. Коэффициент передачи ветви равен s^{-1} .

Пример 4.14. Рассмотрим импульсную систему управления, изображенную на рис. 4.16. Необходимо построить диаграмму состояния и записать уравнения состояния для этой системы. Диаграмма состояния для передаточной функции объекта управления

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (4-397)$$

полученная методом непосредственной декомпозиции, изображена на рис. 4.17.

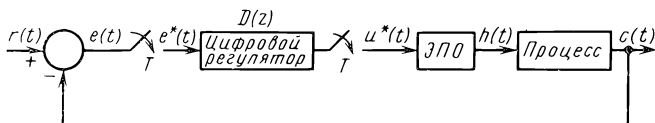


Рис. 4.14. Импульсная система управления

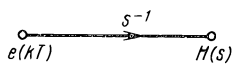


Рис. 4.15. Диаграмма состояния экстраполятора нулевого порядка для $kT \leq t < (k+1)T$

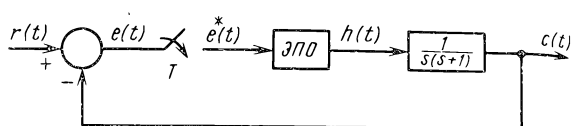


Рис. 4.16. Импульсная система управления

Диаграмма состояния всей системы в целом представляет собой соединение диаграммы состояния, изображенной на рис. 4.17, и диаграммы состояния экстраполятора нулевого порядка с учетом соотношения

$$e(kT) = r(kT) - c(kT) = r(kT) - x_1(kT) \quad (4-398)$$

Кроме того, полагая $t_0 = kT$ и

$$h(kT^+) = h(t) = e(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (4-399)$$

получим полную диаграмму состояния системы, представленную на рис. 4.18.

Переходные уравнения состояния в векторно-матричной форме относительно изображений записываются непосредственно по виду диаграмм состояния с использованием формулы Мэсона:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2(s+1)} & \frac{1}{s(s+1)} \\ -\frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2(s+1)} \\ \frac{1}{s(s+1)} \end{bmatrix} r(kT) \quad (4-400)$$

для $kT \leq t < (k+1)T$.

Вычисляя обратное преобразование Лапласа от обеих частей последнего уравнения, получаем

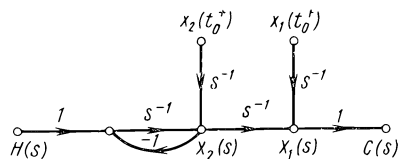
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - (t - kT) - e^{-(t-kT)} & 1 - e^{-(t-kT)} \\ -1 + e^{-(t-kT)} & e^{-(t-kT)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (t - kT) - 1 + e^{-(t-kT)} \\ 1 - e^{-(t-kT)} \end{bmatrix} r(kT) \quad (4-401)$$

для $kT \leq t < (k+1)T$.

Если значения переменных состояния представляют интерес только в момент квантования, то полагая $t = (k+1)T$. Тогда уравнение (4-401) принимает вид

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1)T \\ x_2(k+1)T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - T - e^{-T} & 1 - e^{-T} \\ -1 + e^{-T} & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T - 1 + e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} r(kT) \quad (4-402)$$

Уравнение (4-402) запишем аналогично уравнению (4-83):



$$x[(k+1)T] = \phi(T)x(kT) + \theta(T)r(kT) \quad (4-403)$$

Рис. 4.17. Диаграмма состояния для передаточной функции $G(s) = 1/[s(s+1)]$

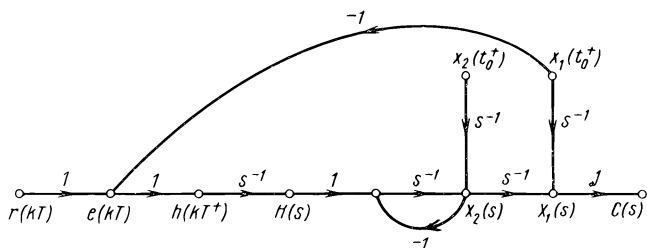


Рис. 4.18. Диаграмма состояния для импульсной системы управления, изображенной на рис. 4.16.

Для периода квантования $T = 1$ с и единичного ступенчатого входного воздействия $r(t) = u_s(t)$ имеем

$$\phi(1) = \begin{bmatrix} 0.632 & 0.632 \\ -0.632 & 0.368 \end{bmatrix} \quad (4.404)$$

$$\theta(1) = \begin{bmatrix} 0.368 \\ 0.632 \end{bmatrix} \quad (4.405)$$

Тогда

$$[zI - \phi(1)]^{-1}z = \begin{bmatrix} z - 0.632 & -0.632 \\ 0.632 & z - 0.368 \end{bmatrix}^{-1}z = \quad (4.406)$$

$$= \frac{z}{z^2 - z + 0.632} \begin{bmatrix} z - 0.368 & 0.632 \\ -0.632 & z - 0.632 \end{bmatrix}$$

$$\phi(k) = \mathcal{Z}^{-1} [[zI - \phi(1)]^{-1}z] =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-0.23k}(-0.378\sin 0.88k + \cos 0.88k) & e^{-0.23k}\sin 0.88k \\ -e^{-0.23k}\sin 0.88k & e^{-0.23k}(-0.786\sin 0.88k + \cos 0.88k) \end{bmatrix} \quad (4.407)$$

Кроме того,

$$\phi[(N-k-1)]\theta(1) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-0.23(N-k-1)}[0.493\sin 0.88(N-k-1) + 0.368\cos 0.88(N-k-1)] \\ e^{-0.23(N-k-1)}[-0.865\sin 0.88(N-k-1) + 0.632\cos 0.88(N-k-1)] \end{bmatrix} \quad (4.408)$$

Поэтому дискретное уравнение переходных состояний системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(N) &= \begin{bmatrix} e^{-0.23N}(-0.378\sin 0.88N + \cos 0.88N) & e^{-0.23N}\sin 0.88N \\ -e^{-0.23N}\sin 0.88N & e^{-0.23N}(-0.786\sin 0.88N + \cos 0.88N) \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} e^{-0.23(N-k-1)}[0.493\sin 0.88(N-k-1) + 0.368\cos 0.88(N-k-1)] \\ e^{-0.23(N-k-1)}[-0.865\sin 0.88(N-k-1) + 0.632\cos 0.88(N-k-1)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.409)$$

для $N = 1, 2, 3, \dots$

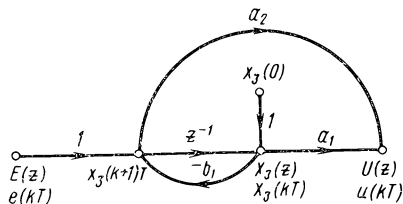


Рис. 4.19. Диаграмма состояния для $D(z) = (a_2 + a_1 z^{-1}) / (1 + b_1 z^{-1})$

Пример 4.15. Проведем анализ в пространстве состояний импульсной системы с цифровым регулятором. Рассмотрим структурную схему, изображенную на рис. 4.14. Цифровой регулятор, который может быть реализован на основе

ЭВМ, описывается передаточной функцией

$$D(z) = \frac{a_2 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} \quad (4.410)$$

а $G(s)$ задается выражением (4.397).

Необходимо изобразить диаграмму состояния и получить переходные уравнения состояния для рассматриваемой системы.

Применяя к $D(z)$ схему непосредственной декомпозиции, имеем

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{(a_2 + a_1 z^{-1})X(z)}{(1 + b_1 z^{-1})X(z)} \quad (4.411)$$

Положим

$$U(z) = (a_2 + a_1 z^{-1})X(z) \quad (4.412)$$

$$E(z) = (1 + b_1 z^{-1})X(z) \quad (4.413)$$

В соответствии с выражением (4.413) имеем

$$X(z) = E(z) - b_1 z^{-1} X(z) \quad (4.414)$$

Диаграмма состояния для цифрового регулятора представлена на рис. 4.19 с использованием выражений (4.412) и (4.414).

На основании рис. 4.19 запишем уравнения динамики, характеризующие $D(z)$ в виде

$$x_3[(k+1)T] = e(kT) - b_1 x_3(kT) \quad (\text{уравнение состояния}); \quad (4.415)$$

$$u(kT) = a_2 e(kT) + (a_1 - a_2 b_1) x_3(kT) \quad (\text{уравнение выхода}). \quad (4.416)$$

Диаграммы состояния для $G(s)$ и экстраполятора нулевого порядка были получены в примере 4.14. Диаграмма состояния всей системы представлена на рис. 4.20.

Применяя формулу Мэсона для выходных узлов $X_1(s)$ и $X_2(s)$ (см. рис. 4.20), получаем

$$\begin{aligned} X_1(s) = & \frac{1}{s} - \frac{a_2}{s^2(s+1)} x_1(kT) + \frac{1}{s(s+1)} x_2(kT) + \frac{a_1 - a_2 b_1}{s^2(s+1)} x_3(kT) + \\ & + \frac{a_2}{s^2(s+1)} r(kT) \end{aligned} \quad (4.417)$$

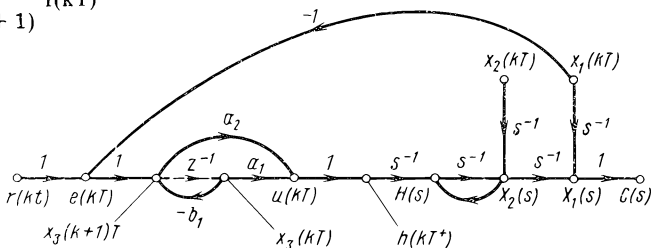


Рис. 4.20. Диаграмма состояния для импульсной системы управления, изображенной на рис. 4.14

$$X_2(s) = \frac{-a_2}{s(s+1)} x_1(kT) + \frac{1}{s+1} x_2(kT) + \frac{a_1 - a_2 b_1}{s(s+1)} x_3(kT) + \frac{a_2}{s(s+1)} r(kT) \quad (4.418)$$

Заметим, что в этом случае $x_1(kT)$, $x_2(kT)$, $x_3(kT)$ и $r(kT)$ рассматриваются в качестве входных сигналов. Применяя формулу Мэсона также и к $x_3(k+1)T$, имеем

$$x_3[k+1)T] = -x_1(kT) - b_1 x_3(kT) + r(kT) \quad (4.419)$$

выражение (4.419) совместно с (4.417) и (4.418), если для последних найдено обратное преобразование Лапласа, при замене t на $(k+1)T$ образует дискретные уравнения состояния системы

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1)T \\ x_2(k+1)T \\ x_3(k+1)T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a_2(T-1+e^{-T}) & 1 - e^{-T} & (a_1 - a_2 b_1)(T-1+e^{-T}) \\ -a_2(1-e^{-T}) & e^{-T} & (a_1 - a_2 b_1)(1-e^{-T}) \\ -1 & 0 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2(T-1+e^{-T}) \\ a_2(1-e^{-T}) \\ 1 \end{bmatrix} r(kT) \quad (4.420)$$

Уравнение выхода имеет вид $c(kT) = x_1(kT)$. Теперь можно решить уравнение (4.420) с использованием метода, описанного в примере 4.14.

4.20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ КВАНТОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПОНЯТИЯ СОСТОЯНИЯ

Метод пространства состояний может применяться для определения реакции систем между моментами квантования. Он представляет собой альтернативу методу модифицированного z -преобразования.

На основании (4.46) находим вектор $x(t)$ для любого $t > t_0$ в виде

$$x(t) = \phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (4.421)$$

если $x(t_0)$ и $u(\tau)$ определены для $t \geq t_0$. При условии, что $u(t)$ — константа для $t_0 \leq \tau < t$, запишем выражение (4.421) в виде

$$x(t) = \phi(t - t_0)x(t_0) + \theta(t - t_0)u(t_0) \quad (4.422)$$

где

$$\theta(t - t_0) = \int_{t_0}^t \phi(t - \tau)Bd\tau$$

$$u(t_0) = u(\tau) \quad t_0 \leq \tau < t$$

Если теперь требуется определить реакцию между моментами квантования, положим

$$t = kT + \Delta T = (k + \Delta)T \quad (4.423)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ и $0 \leq \Delta \leq 1$. Тогда на основании (4.422) получаем

$$x(kT + \Delta T) = \phi(\Delta T)x(kT) + \theta(\Delta T)u(kT) \quad (4.424)$$

где в качестве начального момента времени принято $t_0 = kT$.

Таким образом, изменяя значения Δ от 0 до 1, можно получить всю информацию о $x(t)$ для любого t .

Пример 4.16. Для системы, описанной в примере 4.14, переходное уравнение состояния (4.402) определяет значения переменных состояния только в моменты квантования. Однако при подстановке $t = (k + \Delta)T$ уравнение (4.402) принимает вид

$$\begin{bmatrix} x_1(kT + \Delta T) \\ x_2(kT + \Delta T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \Delta T - e^{-\Delta T} & 1 - e^{-\Delta T} \\ -1 + e^{-\Delta T} & e^{-\Delta T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \Delta T - 1 + e^{-\Delta T} \\ 1 - e^{-\Delta T} \end{bmatrix} r(kT) \quad (4.425)$$

Для завершения итерационной процедуры необходимо положить $t = (k + 1)T$ и $t_0 = (k + \Delta)T$, тогда уравнение (4.402) может быть записано в виде

$$x[(k + 1)T] = \phi(T - \Delta T)x[(k + \Delta)T] + \theta(T - \Delta T)r[(k + \Delta)T] \quad (4.426)$$

Переходное уравнение состояния для системы между моментами $t_0 = (k + \Delta)T$ и $t = (k + 1)T$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1[(k + 1)T] \\ x_2[(k + 1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - (1 - \Delta)T - e^{-(1-\Delta)T} & 1 - e^{-(1-\Delta)T} \\ -1 + e^{-(1-\Delta)T} & e^{-(1-\Delta)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[(k + \Delta)T] \\ x_2[(k + \Delta)T] \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} (1 - \Delta)T - 1 + e^{-(1-\Delta)T} \\ 1 - e^{-(1-\Delta)T} \end{bmatrix} r[(k + \Delta)T] \quad (4.427)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, 3rd edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.
2. Zadeh L. A., Desoer C. A. *Linear System Theory*. McGraw-Hill, New York, 1963. (Опубликован перевод: Заде Л., Дезоер Ч. *Теория линейных систем. Метод пространства состояний*. М.: Наука, 1970).
3. Zadeh, L. A., "An Introduction to State Space Techniques," Workshop on State Space Techniques for Control Systems, *Proc. Joint Automatic Control Conference*, Boulder, Colorado, 1962.
4. Kalman, R. E., and Bertram, J. E., "A Unified Approach to the Theory of Sampling Systems," *Journal of Franklin Inst.*, 267, May 1959, pp. 405-436.
5. Kuo, B. C., *Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.

6. Kuo, B. C., *Linear Networks and Systems* McGraw-Hill, New York, 1967.
7. Tou J. T. Digital and Sampled-Data Control Systems, McGraw-Hill, New York, 1959. (Опубликован перевод: Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. М.: Машиностроение, 1964).
8. Jury, E. I., *Theory and Application of the z-Transform Method* John Wiley & Sons, New York, 1964.
9. Gibson, J. E., *Nonlinear Automatic Control* McGraw-Hill, New York, 1963.
10. Tou J. T. Modern Control Theory. McGraw-Hill, New York, 1964. (Опубликован перевод: Ту Ю. Современная теория управления. — М.: Машиностроение, 1971).
11. Lindorff, D. P., *Theory of Sampled-Data Control Systems* John Wiley & Sons, New York, 1964.
12. Brockett, R. W., *Finite Dimensional Linear Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1970.

ГЛАВА 5. ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПЕРЕОБОРУДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА БАЗЕ ЭВМ

5.1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что ЭВМ играют все более важную роль в анализе и проектировании систем управления с обратной связью. При этом ЭВМ используются не только для расчета и моделирования систем управления, но часто и для прямого управления процессами. Кроме того, совершенно естественным стало применение бортовых ЭВМ для управления в режиме "онлайн" и в реальном времени.

В этой главе рассмотрены различные методы цифрового моделирования и переоборудования систем управления на базе ЭВМ.

5.2. ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

ЦИФРОВАЯ МОДЕЛЬ С КВАНТОВАНИЕМ И ФИКСАЦИЕЙ

Моделирование аналоговой системы на ЭВМ требует описания ее динамики с помощью дискретной передаточной функции. Подобный анализ обычно состоит из следующих двух этапов:

- 1) описание непрерывной системы с помощью цифровой модели;
- 2) собственно моделирование на ЭВМ.

Второй этап был рассмотрен в п. 4.18.

Существует множество способов замены непрерывной системы цифровой моделью. Как правило, используются следующие три метода:

- 1) введение в непрерывную систему устройств выборки и хранения;
- 2) численное интегрирование;
- 3) аппроксимация с помощью z -форм.

В этом параграфе рассмотрен первый метод. Наиболее простой путь приближенного описания непрерывной системы цифровой моделью — это введение фиктивных устройств выборки и хранения в соответствующие точки структурной схемы. В этом случае система может быть описана дискретными передаточными функциями или разностными уравнениями состояния. Например, непрерывная система управления, изображенная на рис. 5.1, а, приближенно описывается цифровой моделью, представленной на рис. 5.1, б. При этом по усмотрению исследователя могут использоваться фиксирующие устройства произвольного типа, включая даже линейный экстраполятор, который очень удобен для цифрового моделирования, хотя физически и не реализуем. Обозначим через $G_H(s)$ передаточную

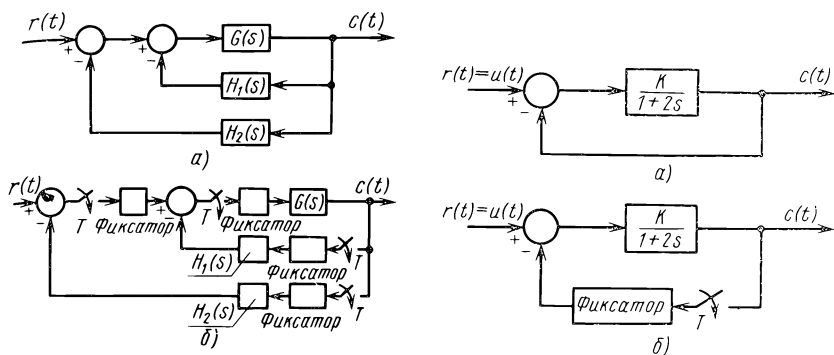


Рис. 5.1. Непрерывная система управления (а) и цифровая модель непрерывной системы с фиктивными устройствами выборки-хранения (б)

Рис. 5.2. Непрерывная система управления (а) и цифровая модель непрерывной системы с квантователем и фиксатором, введенными в цепь обратной связи (б)

функцию фиксирующего устройства, изображенного на рис. 5.1, б. Тогда дискретная передаточная функция цифровой модели имеет вид

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_h(z)G_h G(z)}{1 + G_h G(z)G_h H_1(z) + G_h(z)G_h G(z)G_h H_2(z)} \quad (5-1)$$

где

$$G_h(z) = \mathcal{Z}[G_h(s)] \quad (5-2)$$

$$G_h G(z) = \mathcal{Z}[G_h(s)G(s)] \quad (5-3)$$

$$G_h H_1(z) = \mathcal{Z}[G_h(s)H_1(s)] \quad (5-4)$$

$$G_h H_2(z) = \mathcal{Z}[G_h(s)H_2(s)] \quad (5-5)$$

Хотя описанный метод цифрового моделирования в принципе прост, прежде чем приступить к его практической реализации, необходимо решить два важных вопроса. Первый касается выбора подходящего периода квантования фиктивных ключей. Период квантования непосредственно влияет на точность и время, необходимое для цифрового моделирования. Второй вопрос – проблема устойчивости. Выше подчеркивалось, что если непрерывная система устойчива, то ее цифровая модель не обязательно будет устойчивой. Фактические устройства выборки и хранения, как правило, неблагоприятно влияют на устойчивость системы. Поэтому при включении устройств выборки и хранения в устойчивую непрерывную систему важно, чтобы цифровая модель оставалась устойчивой.

Рассмотрим непрерывную систему, представленную на рис. 5.2, а. Цифровая аппроксимация системы может быть получена путем введения квантователя и фиксатора в цепь обратной связи, как показано на рис. 5.2, б. Для выходного сигнала цифровой модели z -преобразование записывается в виде

$$C(z) = \frac{RG(z)}{1 + G_{h0}G(z)} \quad (5-6)$$

где

$$RG(z) = \mathcal{Z}[R(s)G(s)] \quad (5-7)$$

$$G_{h0}G(z) = \mathcal{Z}[G_{h0}(s)G(s)] \quad (5-8)$$

Для единичного ступенчатого входного сигнала имеем

$$RG(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{K}{s(1+2s)}\right] = \frac{K(1-e^{-0.5T})z}{(z-1)(z-e^{-0.5T})} \quad (5-9)$$

Предположим, что в качестве фиксатора используется экстраполятор нулевого порядка. Тогда получим

$$G_{h0}G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{K}{1+2s}\right] = \frac{K(1-e^{-0.5T})}{(z-e^{-0.5T})} \quad (5-10)$$

Подстановка выражений (5-9) и (5-10) в (5-6) дает

$$C(z) = \frac{K(1-e^{-0.5T})z}{(z-1)[z-e^{-0.5T}+K(1-e^{-0.5T})]} \quad (5-11)$$

Выбрав $T = 0,25$ с и полагая $K = 1$, преобразуем последнее уравнение к виду

$$C(z) = \frac{0.118z}{(z-1)(z-0.764)} \quad (5-12)$$

Разлагая $C(z)$ в ряд с помощью деления числителя на знаменатель, получим

$$\begin{aligned} C(z) = & 0.118z^{-1} + 0.207z^{-2} + 0.276z^{-3} + 0.329z^{-4} + \\ & + 0.369z^{-5} + 0.4z^{-6} + 0.423z^{-7} + 0.441z^{-8} + \\ & + 0.455z^{-9} + 0.466z^{-10} + 0.473z^{-11} + 0.48z^{-12} + \\ & + 0.485z^{-13} + 0.488z^{-14} + \dots \end{aligned} \quad (5-13)$$

Конечное значение $c(kT)$ равно 0,5. Очевидно, что цифровая модель является устойчивой.

Предположим, что фиксирующее устройство обеспечивает кусочно-линейную аппроксимацию, так что

$$G_h(s) = \frac{e^{Ts} + e^{-Ts} - 2}{Ts^2} \quad (5-14)$$

Тогда при $T = 0,25$ с и $K = 1$ z -преобразование выходного сигнала цифровой системы имеет вид

$$C(z) = \frac{0.1108z}{(z-1)(z-0.778)} \quad (5-15)$$

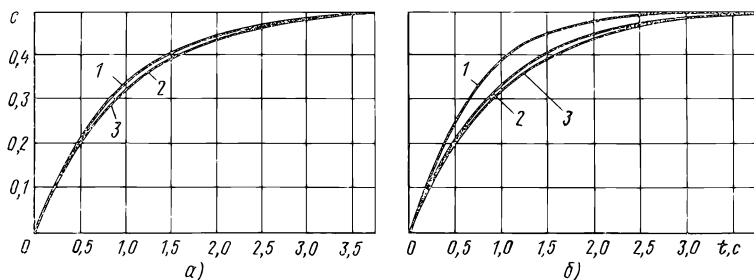


рис. 5.3. Переходные процессы в системах, полученные путем цифрового моделирования:

$a - T = 0,25$ с; $b - T = 1$ с; 1 – для модели с экстраполятором нулевого порядка; 2 – $c(kT)$ для модели с линейным экстраполятором; 3 – $c(t)$ для непрерывной системы

Разложение выражения (5-15) в ряд дает

$$\begin{aligned} C(z) = & 0.1108z^{-1} + 0.197z^{-2} + 0.264z^{-3} + 0.316z^{-4} + \\ & + 0.357z^{-5} + 0.388z^{-6} + 0.413z^{-7} + 0.433z^{-8} + \\ & + 0.447z^{-9} + 0.459z^{-10} + 0.468z^{-11} + 0.475z^{-12} + \\ & + 0.481z^{-13} + 0.485z^{-14} + \dots \end{aligned} \quad (5-16)$$

Для сравнения на рис. 5.3, a представлены переходные функции непрерывной системы и цифровой модели с экстраполятором нулевого порядка и линейным экстраполятором. На рис. 5.3, b представлены переходные функции для периода квантования в цифровой модели, равного 1 с. При этом, как и ожидалось, отклонение действительной переходной функции непрерывной системы от переходной функции цифровой модели увеличилось.

Рассматриваемая непрерывная система имеет первый порядок, поэтому она устойчива при всех конечных положительных значениях K . Однако цифровая модель может быть как устойчивой, так и неустойчивой в зависимости от значений K и T . Например, для экстраполятора нулевого порядка при $K = 2$ максимальное значение периода квантования, обеспечивающее устойчивость цифровой системы, равно 2,2 с. При увеличении K до 10 критическое значение T становится равным 0,404 с. При $T = 2$ с z -преобразование выходного сигнала цифровой системы с линейным экстраполятором имеет вид

$$C(z) = \frac{0.632Kz}{(z-1)[(1+0.368K)z + (0.264K - 0.368)]} \quad (5-17)$$

Можно показать, что эта система устойчива для всех конечных положительных значений K . Поэтому в данном случае линейный экстраполятор обеспечивает не только лучшую аппроксимацию, но и большую устойчивость цифровой модели системы.

5.3. ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Другой распространенный метод цифрового моделирования непрерывных систем состоит в использовании численного интегрирования. Поскольку интегрирование — наиболее трудная, требующая больших временных затрат основная математическая операция ЭВМ, ее цифровое моделирование имеет большое значение. Вместо введения фиктивных устройств выборки и хранения в непрерывную систему в рассматриваемом методе используется приближенное описание непрерывной операции интегрирования численными методами. Эта задача может быть также сформулирована как цифровое моделирование интеграторов s^{-1} на непрерывной диаграмме состояния. На рис. 5.4 изображен интегратор как элемент диаграммы состояния. Запишем соотношение входного и выходного сигналов в виде

$$x(t) = \int_0^t r(\tau) d\tau \quad (5-18)$$

и

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{s} \quad (5-19)$$

Если входной сигнал интегратора $r(\tau)$ имеет вид, показанный на рис. 5.5, выходной сигнал $x(t)$ равен площади под кривой $r(\tau)$ между точками $\tau = 0$ и $\tau = t$.

Интегрирование по методу прямоугольников. Одним из стандартных методов численного интегрирования является метод прямоугольников, два варианта которого представлены на рис. 5.6. Интегрирование приближенно заменяется суммированием площадей прямоугольников шириной T под ступенчатой линией, аппроксимирующей входной сигнал. Метод прямоугольников эквивалентен введению квантования совместно с экстраполятором нулевого порядка перед каждым интегратором, как показано на рис. 5.6. Схема, представленная на рис. 5.6, *а*, соответствует методу прямоугольников, а на рис. 5.6, *б* — методу прямоугольников с упрещением.

На основании рис. 5.6, *а*, можно записать дискретную передаточную функцию интегрирования по методу прямоугольников

$$\frac{X(z)}{R(z)} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2} \right] = \frac{T}{z - 1} \quad (5-20)$$

Уравнение состояния имеет вид

$$x[(k + 1)T] = x(kT) + Tr(kT) \quad (5-21)$$

Рис. 5.4. Изображение интегратора в виде диаграммы состояния

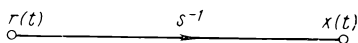
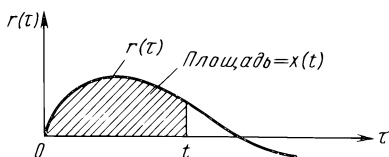


Рис. 5.5. Связь входного и выходного сигналов интегратора



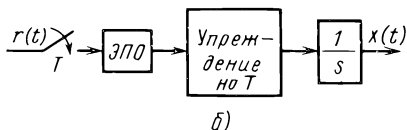
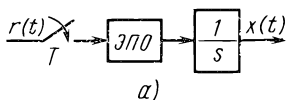
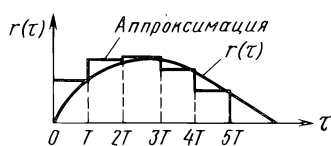
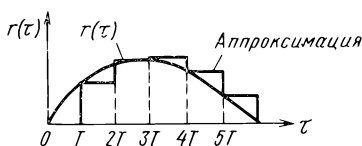


Рис. 5.6. Численное интегрирование по методу прямоугольников (а) и по методу прямоугольников с упреждением (б)

Аналогично запишем дискретную передаточную функцию интегрирования по методу прямоугольников с упреждением в виде

$$\frac{X(z)}{R(z)} = z(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2} \right] = \frac{Tz}{z - 1} \quad (5-22)$$

а уравнение состояния в виде

$$x[(k + 1)T] = x(kT) + Tr(k + 1)T \quad (5-23)$$

В качестве иллюстрации непрерывная система, изображенная на рис. 5.2, а, моделируется вначале с помощью интегрирования по методу прямоугольников. Диаграмма состояния цифровой модели представлена на рис. 5.7 с учетом замены интегратора $1/s$ передаточной функцией $T/(z - 1)$.

Преобразование выходного сигнала цифровой модели при единичной ступенчатой функции на входе ($K = 1$, $T = 0,25$ с) имеет вид

$$C(z) = \frac{0.125z}{(z - 1)(z - 0.75)} \quad (5-24)$$

Раскладывая $C(z)$ в ряд, получаем

$$C(z) = 0.125z^{-1} + 0.218z^{-2} + 0.288z^{-3} + 0.34z^{-4} + \\ + 0.379z^{-5} + 0.408z^{-6} + 0.431z^{-7} + 0.45z^{-8} + \\ + 0.463z^{-9} + 0.473z^{-10} + \dots$$

Переходная функция изображена на рис. 5.8 вместе с результатами моделирования по схеме с квантованием и фиксацией. При использовании метода прямоугольников с упреждением передаточная функция интегратора $1/s$ в непрерывной схеме заменяется на $Tz/(z - 1)$. При $K = 1$ и $T = 0,25$ с z -преобразование выходного сигнала цифровой системы в случае единичного ступенчатого сигнала на входе имеет вид

$$C(z) = \frac{0.1z^2}{(z - 1)(z - 0.8)} \quad (5-25)$$

а соответствующая переходная функция изображена на рис. 5.8.

Сравнение результатов показывает, что оба варианта моделирования с использованием интегрирования по методу прямоугольников дают худ-

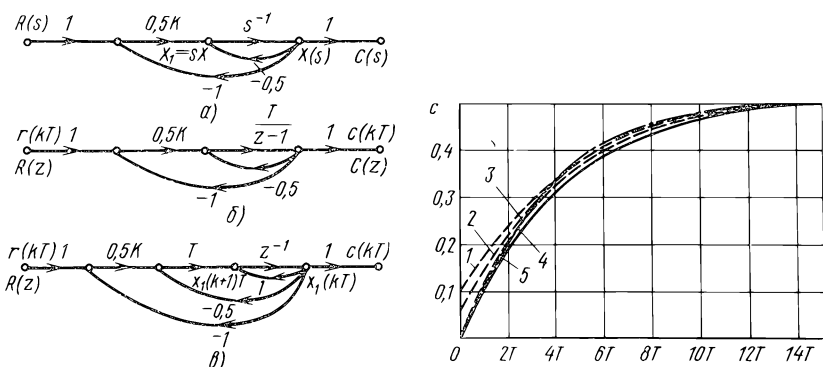


Рис. 5.7. Диаграммы состояния для системы управления, изображенной на рис. 5.2, с интегрированием по методу прямоугольников:

а – диаграмма состояния непрерывной системы; б – переход к численному интегрированию по методу прямоугольников; в – диаграмма состояния цифровой модели с интегрированием по методу прямоугольников

Рис. 5.8. Сравнение различных методов цифрового моделирования:

1, 2 и 3 – соответственно интегрирование по методам прямоугольников с упреждением, трапеций и прямоугольников; 4 – схема с квантователем и экстраполятором нулевого порядка; 5 – схема с квантователем и линейным экстраполятором (непрерывная система)

шие результаты по сравнению со схемой, использующей квантование и фиксацию. Метод прямоугольников с упреждением приводит к скачкообразному изменению выходного сигнала при $t = 0$, хотя переходная функция оказывается близкой к истинной после значительных ошибок для нескольких первых периодов квантования.

Интегрирование по методу трапеций. Значительно более точная схема численного интегрирования получается при использовании кусочно-линейной аппроксимации, как показано на рис. 5.9, а. Площадь под кривой $r(\tau)$ может быть приближенно заменена суммой площадей трапеций с основанием T . Очевидно, что с уменьшением периода квантования T может быть достигнута любая заданная точность аппроксимации. Этот способ приближенного интегрирования, основанный на кусочно-линейной аппроксимации, называется интегрированием по методу трапеций. Он эквивалентен введению квантователя и линейного экстраполятора перед каждым интегратором, как показано на рис. 5.9, б.

Так как передаточная функция линейного экстраполятора имеет вид

$$G_h(s) = \frac{e^{Ts} + e^{-Ts} - 2}{Ts^2} \quad (5-26)$$

то передаточная функция соответствующего метода интегрирования

$$\frac{X(z)}{R(z)} = \frac{z + z^{-1} - 2}{T} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^3} \right] = \frac{T}{2} \left[\frac{z + 1}{z - 1} \right] \quad (5-27)$$

рис. 5.9. Кусочно-линейная аппроксимация, или интегрирование по методу трапеций

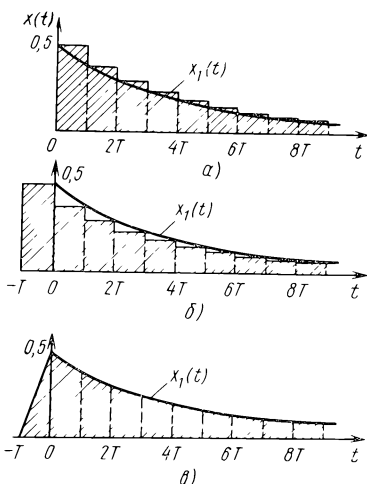
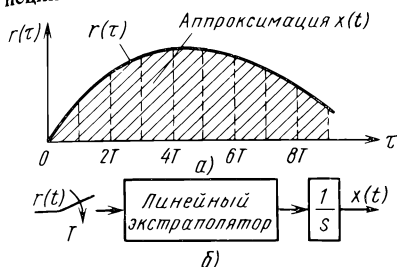


рис. 5.10. Входной сигнал интегратора $x_1(t)$ для системы, изображенной на рис. 5.2, и площади, представляющие собой результаты численного интегрирования по методам:

а – прямоугольников; б – прямоугольников с упреждением; в – трапеций

Уравнение состояния системы имеет вид

$$x[(k+1)T] = x(kT) + \frac{T}{2} r[(k+1)T] + \frac{T}{2} r(kT) \quad (5-28)$$

Переходная функция цифровой модели системы, изображенной на рис. 5.2, а, в которой используется интегрирование по методу трапеций, представлена на рис. 5.8. Этот метод интегрирования дает худшие результаты по сравнению с методом трапеций, что объясняется характеристиками рассматриваемой системы первого порядка. Запишем входной сигнал интегратора в непрерывной системе в соответствии с рис. 5.7, а в виде

$$X_1(s) = \frac{0.5s}{s+1} R(s) = \frac{0.5}{s+1} \quad (5-29)$$

Поэтому

$$x_1(t) = 0.5e^{-t} \quad (t > 0) \quad (5-30)$$

Численное интегрирование $x_1(t)$ с помощью трех описанных выше схем иллюстрируется рис. 5.10. Поскольку в сигнале $x_1(t)$ имеется скачок в момент $t = 0$, то при интегрировании по методам прямоугольников с упреждением и трапеций результирующие площади содержат участки, предшествующие моменту $t = 0$.

Условия устойчивости. Поскольку цифровая модель исследуемой системы должна быть устойчивой независимо от метода аппроксимации, необходимо проанализировать влияние на устойчивость схем интегрирования, рассмотренных в п. 5.2. Для этого воспользуемся методом корневого годографа, обладающим простотой и наглядностью, применив его к замкнутой системе, изображенной на рис. 5.11. Хотя в общем случае действительное влияние на устойчивость различных схем численного интегрирования зависит от передаточной функции моделируемой непрерывной

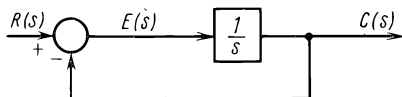


Рис. 5.11. Простая система с интегратором

системы, простая система с интегратором, изображенная на рис. 5.11, даст возможность качественно оценить устойчивость моделирования в целом. Передаточная функция разомкнутой непрерывной системы имеет простой вид

$$G(s) = \frac{1}{s} = \frac{T}{\ln z} \quad (5-31)$$

Отсюда при $T = 0$ корень характеристического уравнения $z = 1$, а при $T = \infty$ $z = 0$. Корни располагаются внутри единичной окружности для всех значений T в диапазоне от 0 до ∞ . Поэтому непрерывная модель всегда устойчива. Для интегрирования по методу прямоугольников передаточная функция рассматриваемой системы заменяется на $T/(z - 1)$. Система является неустойчивой для $T \geq 2$.

Для интегрирования по методу прямоугольников с упреждением имеем

$$G(z) = \frac{Tz}{z - 1} \quad (5-32)$$

Система вновь является устойчивой для всех значений T от 0 до ∞ . Для интегрирования по методу трапеций получаем

$$G(z) = \frac{T}{2} \left[\frac{z + 1}{z - 1} \right] \quad (5-33)$$

и цифровая модель устойчива для всех конечных T . Результатом этого анализа является вывод о том, что интегрирование по методу прямоугольников, как правило, наихудшим образом влияет на устойчивость системы.

Известны и более сложные схемы численного интегрирования, например методы Симпсона. Однако соответствующие передаточные функции имеют высокий порядок, что вызывает серьезные проблемы, связанные с устойчивостью моделей. Поэтому применительно к системам управления методы интегрирования высокого порядка используются редко.

5.4. ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ z-ФОРМ

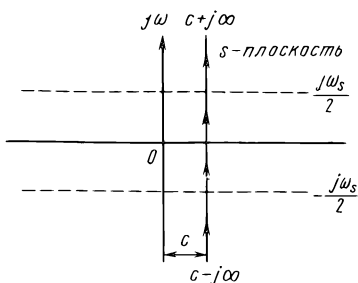
Неудобство рассмотренных выше способов численного интегрирования для цифрового моделирования состоит в том, что в передаточной функции системы вначале должны быть в явном виде выделены интеграторы, которые затем заменяются схемами численного интегрирования. Упрощенная процедура основана на использовании z-форм. Метод z-форм, рассматриваемый ниже, является более простым в связи с тем, что имеется возможность использовать непосредственно передаточную функцию непрерывной системы в s -области для преобразования ее в эквивалентную дискретную передаточную функцию в z -области.

Рис. 5.12. Путь интегрирования для формулы (5-35)

Предположим, что имеется непрерывный сигнал $g(t)$. Тогда $g(t)$ и его изображение по Лапласу $G(s)$ связаны соотношением

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt \quad (5-34)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(s)e^{st} ds \quad (5-35)$$



Если сигнал $g(t)$ квантуется по времени с периодом T , то дискретный сигнал описывается выражением

$$g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\delta(t - kT) \quad (5-36)$$

где

$$g(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z)z^{k-1} dz \quad (5-37)$$

а контур Γ представляет собой окружность на плоскости z , описываемую уравнением $|z| = e^{cT}$. Интеграл (5-35) вычисляется вдоль линии, изображенной на рис. 5.12. Разделим путь интегрирования от $c - j\infty$ до $c + j\infty$ на три части, как показано на рисунке. Тогда выражение (5-35) может быть записано в виде

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c-j\omega_s/2} G(s)e^{ts} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} G(s)e^{ts} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{c+j\omega_s/2}^{c+j\infty} G(s)e^{ts} ds \quad (5-38)$$

где $\omega_s = 2\pi/T$.

Если период квантования достаточно мал, то $g(t)$ приближенно описывается соотношением

$$g(t) \cong \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} G(s)e^{ts} ds \quad (5-39)$$

Заменяя t на kT и обозначая правую часть последнего выражения как $g_A(t)$, имеем

$$g(kT) \cong g_A(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} G(s)e^{kTs} ds \quad (5-40)$$

Поскольку s и z связаны соотношением

$$s = \frac{1}{T} \ln z \quad (5-41)$$

то, подставляя его вместо s в выражение (5-40), получим

$$g_A(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G\left(\frac{1}{T} \ln z\right) e^{kT(1/T) \ln z} d\frac{1}{T} \ln z \quad (5-42)$$

или

$$g_A(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{1}{T} G\left(\frac{1}{T} \ln z\right) z^{k-1} dz \quad (5-43)$$

При сравнении выражений (5-43) и (5-37) видно, что эти два интеграла совпадают с точностью до коэффициента $1/T$. Это означает, что $g_A(kT)$, т.е. приближенное значение $g(kT)$ может быть найдено с помощью разложения $G[(1/T)\ln z]/T$ в ряд по степеням z^{-1} . Поэтому суть метода z -форм состоит в следующем.

1. В передаточной функции $G(s)$ непрерывной системы заменяют s^{-1} на $T/\ln z$ и получают $G[(1/T)\ln z]$.

2. Значение $g_A(kT)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) определяется путем разложения $G[(1/T)\ln z]/T$ в ряд по степеням z^{-1} . Однако вначале это выражение должно быть представлено в виде рациональной функции от z , для чего необходимо аргумент $T/\ln z$ приближенно записать в виде конечного ряда.

Представим $\ln z$ в виде следующего степенного ряда:

$$\begin{aligned} \ln z &= 2 \left\{ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left[\frac{z-1}{z+1} \right]^3 + \frac{1}{5} \left[\frac{z-1}{z+1} \right]^5 + \dots \right\} = \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]^3 + \frac{1}{5} \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]^5 + \dots \right\} \quad |z| > 0 \end{aligned} \quad (5-44)$$

Тогда

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{\ln z} = \frac{T/2}{u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \dots} \quad (5-45)$$

где

$$u = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (5-46)$$

Разделив числитель на знаменатель, запишем выражение (5-45) в виде

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{\ln z} = \frac{T}{2} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{3}u - \frac{4}{45}u^3 - \frac{44}{945}u^5 + \dots \right] \quad (5-47)$$

В общем случае для n положительных целых имеем

$$\frac{1}{s^n} = \left[\frac{T}{2} \right]^n \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{3}u - \frac{4}{45}u^3 - \frac{44}{945}u^5 + \dots \right]^n \quad (5-48)$$

Заметим, что правые части выражений (5-47) и (5-48) представлены в форме ряда Лорана. Сохраняя только главную часть и постоянный член ряда Лорана, получаем

$$\frac{1}{s^n} \cong \frac{N_n(z^{-1})}{(1-z^{-1})^n} = G_n(z^{-1}) \quad (5-49)$$

где $N_n(z^{-1})$ — полином по степеням z^{-1} , а $G_n(z^{-1})$ называется z -формой

от s^{-n} . Следует подчеркнуть, что поскольку при $s = 0$ $z = 1$, полюса обеих частей выражения (5.49) соответствуют друг другу. Поэтому учет дополнительных членов ряда привел бы к появлению дополнительных полюсов на плоскости z и, как следствие, к большим, а не меньшим ошибкам.

Продemonстрируем теперь определение z -форм для $n = 1$ и $n = 2$.

Для $n = 1$, используя главную часть ряда в выражении (5.47), получаем

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{\ln z} \cong G_1(z^{-1}) = \frac{T}{2} \left[\frac{1}{u} \right] = \frac{T}{2} \left[\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right] \quad (5.50)$$

Для $n = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} &= \left[\frac{T}{\ln z} \right]^2 \cong G_2(z^{-1}) = \left[\frac{T}{2} \right]^2 \left\{ \left[\frac{1}{u} \right]^2 - \frac{2}{3} \right\} = \\ &= \frac{T^2}{12} \left[\frac{1 + 10z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

С использованием этой же процедуры получены и представлены в табл. 5.1 z -формы более высоких порядков.

Хотя z -форма для $1/s$ совпадает с выражением для интегрирования по методу трапеций, существует принципиальное отличие между представленным методом z -форм и методом численного интегрирования, рассмотренным выше. При использовании приближенного интегрирования по методам трапеций и прямоугольников непрерывная система вначале описывается цифровой моделью, а затем для получения выходного сигнала учитывается входной сигнал в цифровой форме. При применении метода z -форм, напротив, изображение по Лапласу входного сигнала вначале умножают на

Таблица 5.1

s^{-n}	$G_n(z^{-1})$
s^{-1}	$\frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$
s^{-2}	$\frac{T^2}{12} \frac{1 + 10z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2}$
s^{-3}	$\frac{T^3}{2} \frac{z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})^3}$
s^{-4}	$\frac{T^4}{6} \frac{z^{-1} + 4z^{-2} + z^{-3}}{(1 - z^{-1})^4} - \frac{T^4}{720}$
s^{-5}	$\frac{T^5}{24} \frac{z^{-1} + 11z^{-2} + 11z^{-3} + z^{-4}}{(1 - z^{-1})^5}$

передаточную функцию непрерывной системы, а затем в выражение $C(s)$ подставляют z -форму для получения приближенного значения выходного сигнала $C_A(z)$.

Поэтому этапы приближенного описания реакции непрерывной системы с помощью метода z -форм можно окончательно сформулировать следующим образом:

записывают изображение по Лапласу выходного сигнала системы $C(s)$ в виде рациональной функции по степеням s^{-1} ;

заменяют s^{-n} соответствующими z -формами на основании табл. 5.1; в результате $C(s)$ преобразуется в рациональную функцию по степеням z^{-1} ;

для получения $C_A(z)$ делят выражение, полученное на последнем этапе, на период квантования T ;

делением числителя на знаменатель преобразуют $C_A(z)$ в степенной ряд вида

$$c_A(0) + c_A(T)z^{-1} + c_A(2T)z^{-2} + \dots + c_A(kT)z^{-k} + \dots$$

где $c_A(kT)$ — приближенное значение реакций $c(t)$ при $t = kT$.

Пример 5.1. Для иллюстрации метода цифровой аппроксимации на основе z -форм предположим, что передаточная функция разомкнутой системы управления с единичной обратной связью имеет вид

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (5-52)$$

где K — постоянный коэффициент усиления.

Запишем передаточную функцию замкнутой системы в виде

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + s + K} \quad (5-53)$$

Для единичного ступенчатого входного сигнала изображение выходного сигнала

$$C(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + K)} \quad (5-54)$$

Умножая числитель и знаменатель последнего выражения на s^{-3} , получим

$$C(s) = \frac{Ks^{-3}}{1 + s^{-1} + Ks^{-2}} \quad (5-55)$$

Подставим теперь соответствующие формы из табл. 5.1 и, умножая результат на T , получим

$$C_A(z) = \frac{1}{T} \frac{\frac{T^3}{2} K \left[\frac{z^{-4} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})^3} \right]}{1 + \frac{T}{2} \left[\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right] + \frac{T^2 K}{12} \left[\frac{1 + 10z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} \right]} \quad (5-56)$$

Упрощая последнее выражение, окончательно запишем

$$C_A(z) = \frac{6T^2 K (z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})[(12 + 6T + T^2 K) + (-24 + 10T^2 K)z^{-1} + (12 - 6T + T^2 K)z^{-2}]} \quad (5-57)$$

Два корня уравнения

$$(12 + 6T + T^2 K)z^2 + (-24 + 10T^2 K)z + (12 - 6T + T^2 K) = 0 \quad (5-58)$$

определяют устойчивость цифровой модели, полученной с использованием z -форм. Применяя критерий устойчивости, можно показать, что значения K и T , соответст-

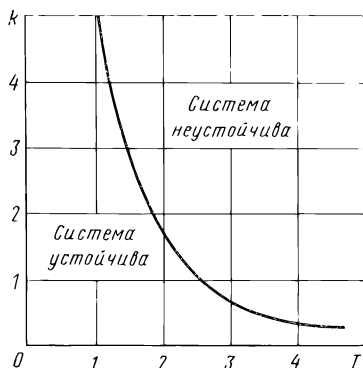


Рис. 5.13. Максимальные значения K и T для устойчивой цифровой системы

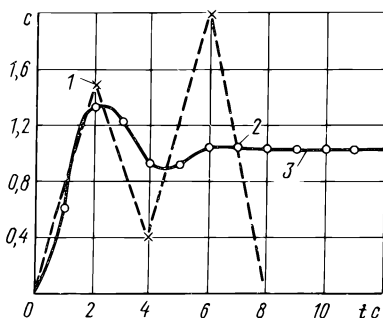


Рис. 5.14. Переходные процессы в системе из примера 5.1:
1 — $T = 2$, $K = 2$; 2 — $T = 1$, $K = 2$;
3 — действительный переходный процесс

вующие устойчивой модели, связаны зависимостью, приведенной на рис. 5.13. Можно также показать, что для всех значений K и T , которые соответствуют устойчивой цифровой системе, конечное значение $c_A(kT)$ равно единице. Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_A(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})C_A(z) = 1 \quad (5-59)$$

Переходная функция цифровой модели для $K = 2$, $T = 1$ и $T = 2$ совместно с переходной функцией исходной непрерывной системы изображены на рис. 5.14.

5.5. ПЕРЕБОРУДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА БАЗЕ ЭВМ

Двумя наиболее важными проблемами в области цифровых систем управления являются моделирование и проектирование. Очень часто при анализе и синтезе систем управления бывает необходимо провести моделирование непрерывной системы на ЭВМ. Выше были представлены некоторые методы цифрового моделирования.

Здесь рассмотрим еще один метод решения той же задачи.

Большое число систем управления промышленного назначения является непрерывными системами. С точки зрения их характеристик эти системы вполне удовлетворительны. Однако поскольку технология микропроцессоров и ЭВМ становится более совершенной, часто бывает желательно переоборудовать эти системы на базе цифровых преобразователей и цифровых регуляторов. Вместо выполнения совершенно нового проекта с использованием теории цифровых систем управления можно применить методику переоборудования на базе ЭВМ для создания эквивалентной цифровой системы. Считают, что цифровая система эквивалентна непрерывной системе, если реакции двух систем для одних и тех же входных сигналов и начальных условий хорошо совпадают.

Структурная схема рассматриваемой непрерывной системы изображена на рис. 5.15. Для удобства используется модель с обратной связью по

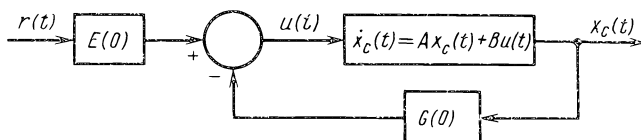


Рис. 5.15. Непрерывная система

состоянию. Предполагается, что любая линейная система управления с обратной связью может быть представлена в такой форме.

Процесс, управляемый непрерывной системой, описывается уравнением состояния

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (5-60)$$

Вектор управления связан с вектором состояния $\mathbf{x}(t)$ и вектором входа $\mathbf{r}(t)$ соотношением

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{E}(0)\mathbf{r}(t) - \mathbf{G}(0)\mathbf{x}_c(t) \quad (5-61)$$

Заданы следующие векторы и матрицы: $\mathbf{x}_c(t)$ — вектор состояния ($n \times 1$); $\mathbf{u}(t)$ — вектор управления ($m \times 1$); $\mathbf{r}(t)$ — вектор входа ($m \times 1$); \mathbf{A} — матрица коэффициентов ($n \times n$); \mathbf{B} — матрица коэффициентов ($n \times m$); $\mathbf{E}(0)$ — матрица входа ($m \times m$); $\mathbf{G}(0)$ — матрица обратной связи ($m \times n$).

Подстановка соотношения (5-61) в уравнение (5-60) дает

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}(0)]\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}\mathbf{E}(0)\mathbf{r}(t) \quad (5-62)$$

Решение последнего уравнения для $t \geq t_0$ имеет вид

$$\mathbf{x}_c(t) = \phi_c(t - t_0)\mathbf{x}_c(t_0) + \int_{t_0}^t \phi_c(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{E}(0)\mathbf{r}(\tau)d\tau \quad (5-63)$$

где $\mathbf{x}_c(t_0)$ — начальное состояние для $\mathbf{x}_c(t)$ при $t = t_0$ и

$$\phi_c(t - t_0) = e^{[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}(0)](t - t_0)} \quad (5-64)$$

По определению (см. гл. 4) $\Phi_c(t - t_0)$ есть переходная матрица состояния для $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}(0)$, описываемая степенным рядом

$$\phi_c(t - t_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}(0)]^j (t - t_0)^j \quad (5-65)$$

На рис. 5.16 представлена структурная схема цифровой системы управления, которая приближенно описывает систему, изображенную на рис. 5.15. В данном случае цифровая система может рассматриваться как имитационная модель непрерывной системы или модель переоборудованной на базе ЭВМ непрерывной системы.

Выходные сигналы устройств выборки и хранения на рис. 5.16 представляют собой последовательность ступенчатых функций, амплитуды которых являются элементами вектора $\mathbf{u}_s(kT)$ для $kT \leq t < (k+1)T$. Через $\mathbf{G}(T)$ и $\mathbf{E}(T)$ обозначены матрицы коэффициентов усиления обратной и прямой связей, соответственно.

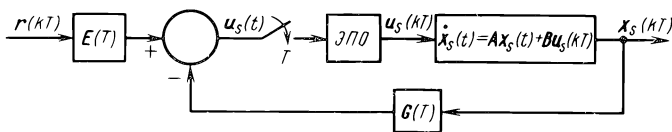


Рис. 5.16. Цифровая система управления, которая приближенно описывает непрерывную систему, изображенную на рис. 5.15

Запишем уравнения состояния цифровой системы в виде

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_s(kT) \quad (5-66)$$

для $kT \leq t \leq (k+1)T$, где

$$\mathbf{u}_s(kT) = \mathbf{E}(T)\mathbf{r}(kT) - \mathbf{G}(T)\mathbf{x}_s(kT) \quad (5-67)$$

Важно отметить, что матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} идентичны матрицам, используемым в уравнении (5-60).

Подстановка соотношения (5-67) в уравнение (5-66) дает

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{B}[\mathbf{E}(T)\mathbf{r}(kT) - \mathbf{G}(T)\mathbf{x}_s(kT)] \quad (5-68)$$

для $kT \leq t \leq (k+1)T$.

Решение уравнения (5-68) при $t = (k+1)T$ и $t_0 = kT$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s[(k+1)T] = & \left[\phi(T) - \int_{kT}^{(k+1)T} \phi(kT + T - \tau) d\tau \mathbf{B}\mathbf{G}(T) \right] \mathbf{x}_s(kT) + \\ & + \int_{kT}^{(k+1)T} \phi(kT + T - \tau) d\tau \mathbf{B}\mathbf{E}(T)\mathbf{r}(kT) \end{aligned} \quad (5-69)$$

где

$$\phi(T) = e^{\mathbf{A}T} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}T)^j}{j!} \quad (5-70)$$

Задача состоит в определении таких матриц $\mathbf{E}(T)$ и $\mathbf{G}(T)$, чтобы при заданном входном сигнале $\mathbf{r}(t)$ состояния цифровой модели на рис. 5.16 имели наилучшее совпадение с состояниями непрерывной системы в момент квантования.

Чтобы решение для $\mathbf{E}(T)$ не зависело от $\mathbf{r}(t)$, необходимо выполнение условия $\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}(kT)$ для $kT \leq t < (k+1)T$. Поэтому предполагается, что входной сигнал непрерывной системы, изображенной на рис. 5.15, в действительности проходит через устройства выборки и хранения. Это предположение не будет влиять на решение, если элементы $\mathbf{r}(t)$ — ступенчатые функции. Если входные сигналы не являются ступенчатыми функциями, аппроксимация будет удовлетворительной лишь для малых периодов квантования.

Полагая в выражении (5-63) $t_0 = kT$ и $t = (k+1)T$ и предполагая, что в течение одного периода квантования $\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}(kT)$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c[(k+1)T] = & \phi_c(T)\mathbf{x}_c(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \phi_c(kT + T - \tau) \mathbf{B}\mathbf{E}(0) d\tau \mathbf{r}(kT) \\ & kT \leq t \leq (k+1)T \end{aligned} \quad (5-71)$$

Реакции, определяемые уравнениями (5-69) и (5-71), будут совпадать при $t = (k + 1)T$ для произвольного начального состояния $x_c(kT) = x_s(kT)$ и произвольного входного сигнала $g(\tau)$ только в том случае, если справедливы следующие два соотношения:

$$\phi_c(T) = \phi(T) - \int_{kT}^{(k+1)T} \phi(kT + T - \tau) d\tau \mathbf{B} \mathbf{G}(T) \quad (5-72)$$

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \phi(kT + T - \tau) d\tau \mathbf{B} \mathbf{E}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \phi_c(kT + T - \tau) \mathbf{B} \mathbf{E}(0) d\tau \quad (5-73)$$

Обращаясь вначале к выражению (5-72) и полагая $\lambda = (k + 1)T - \tau$, получим

$$\phi_c(T) = \phi(T) - \theta(T) \mathbf{G}(T) \quad (5-74)$$

где

$$\theta(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda} \mathbf{B} d\lambda \quad (5-75)$$

В принципе матрица обратной связи $\mathbf{G}(T)$ для цифровой системы может быть найдена из уравнения (5-74). Однако на нее накладываются ограничения, смысл которых поясняет последующее изложение.

Решение для $\mathbf{G}(T)$ в замкнутой форме. Для совпадения всех n состояний цифровой системы $x_s(kT)$ с состояниями непрерывной системы $x_c(kT)$ в каждый момент квантования достаточно, чтобы было справедливо уравнение (5-74). Однако оно состоит из n^2 скалярных уравнений с mn неизвестными элементами матрицы $\mathbf{G}(T)$. Если число переменных состояния n равно числу входов m и матрица $\mathbf{\Theta}(T)$ является невырожденной, то матрица обратной связи $\mathbf{G}(T)$ определяется в соответствии с (5-74) как

$$\mathbf{G}(T) = [\theta(T)]^{-1} [\phi(T) - \phi_c(T)] \quad (5-76)$$

Для большинства систем управления $n > m$, т.е. переменных состояний больше, чем входных сигналов, и уравнение (5-74) не имеет решения. Однако если ранг матрицы $\mathbf{\Theta}(T)$ удовлетворяет определенным условиям, речь о которых пойдет ниже, система уравнений (5-74) является совместной и по-прежнему имеет решение.

Положим

$$\mathbf{G}(T) = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \dots \quad \mathbf{g}_n] \quad (5-77)$$

$$\phi(T) - \phi_c(T) = [\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \dots \quad \mathbf{d}_n] \quad (5-78)$$

где $\mathbf{g}_i, i = 1, 2, \dots, n$ — m -мерные векторы, а $\mathbf{d}_i, i = 1, 2, \dots, n$ — n -мерные векторы. Тогда, если

$$\text{rank } [\theta] = \text{rank } [\theta, \mathbf{d}_i] \quad (5-79)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$ система уравнений (5-74) имеет, по крайней мере, одно решение. Если же условие (5-79) не выполняется, то уравнения являются несовместными и решение не существует.

Частичное совпадение состояний. В общем случае условие (5-79) ред-

ко выполняется для матриц $\Theta(T)$ и $\Phi(T) - \Phi_c(T)$. Так, если $n > m$, то не для всех состояний непрерывной и цифровой систем можно добиться совпадения в моменты квантования.

Хотя точное совпадение всех состояний невозможно, покажем, что некоторые состояния или алгебраические суммы состояний могут совпадать в каждый момент квантования.

Введем весовую матрицу \mathbf{H} , которая позволяет обеспечить частичное совпадение состояний. Перепишем уравнение (5-74) в виде

$$\mathbf{D}(T) = \phi(T) - \phi_c(T) = \theta(T)\mathbf{G}(T) \quad (5-80)$$

Умножая слева обе части последнего уравнения на матрицу \mathbf{H} размерностью $m \times n$, получим

$$\mathbf{H}\mathbf{D}(T) = \mathbf{H}\theta(T)\mathbf{G}(T) \quad (5-81)$$

Если матрица \mathbf{H} выбрана так, что $(m \times m)$ -мерная матрица $\mathbf{H}\Theta(T)$ является невырожденной, то из уравнения (5-81) может быть найдена матрица $\mathbf{G}(T)$, обеспечивающая частичное совпадение состояний. Обозначим эту матрицу обратной связи через $\mathbf{G}_w(T)$. Тогда

$$\mathbf{G}_w(T) = [\mathbf{H}\Theta(T)]^{-1} \mathbf{H}\mathbf{D}(T). \quad (5-82)$$

Следует заметить, что матрица $\mathbf{G}_w(T)$, определяемая соотношением (5-82), не удовлетворяет уравнению (5-80), если только матрица \mathbf{H} не является единичной. Это объясняется тем, что при умножении уравнения (5-80) на матрицу \mathbf{H} система из n^2 уравнений превращается в систему из m уравнений. Поэтому для $n > m$ найденное решение не будет удовлетворять исходным уравнениям.

Для выяснения физического смысла преобразования уравнения (5-81) и решения (5-82) снова приравняем уравнения (5-69) к (5-71) и затем умножим обе части полученного равенства слева на \mathbf{H} . В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{x}_c[(k+1)T] &= \mathbf{H}\mathbf{x}_s[(k+1)T] = \mathbf{H}\phi_c(T)\mathbf{x}_c(kT) + \mathbf{H}\theta_c(T)\mathbf{E}(0)\mathbf{r}(kT) = \\ &= \mathbf{H}[\phi(T) - \theta(T)\mathbf{G}(T)]\mathbf{x}_s(kT) + \mathbf{H}\theta(T)\mathbf{E}(T)\mathbf{r}(kT) \end{aligned} \quad (5-83)$$

где

$$\theta_c(T) = \int_0^T \phi_c(\lambda)\mathbf{B}d\lambda \quad (5-84)$$

Для произвольных $\mathbf{x}_c(kT)$, $\mathbf{x}_s(kT)$ и $\mathbf{r}(kT)$ соотношение (5-83) распадается на два уравнения:

$$\mathbf{H}\phi_c(T)\mathbf{x}_c(kT) = \mathbf{H}[\phi(T) - \theta(T)\mathbf{G}(T)]\mathbf{x}_s(kT) \quad (5-85)$$

$$\mathbf{H}\theta_c(T)\mathbf{E}(0)\mathbf{r}(kT) = \mathbf{H}\theta(T)\mathbf{E}(T)\mathbf{r}(kT) \quad (5-86)$$

Важная особенность состоит в том, что $\mathbf{G}_w(T)$, т.е. решение уравнения (5-82), удовлетворяет уравнению (5-85) для любого начального состояния $\mathbf{x}_c(kT)$. Умножение слева обеих частей переходных уравнений состояния (5-69) и (5-71) преобразует n -мерные векторы состояния $\mathbf{x}_c[(k+1)T]$ и $\mathbf{x}_s[(k+1)T]$ в новый m -мерный вектор $\mathbf{y}[(k+1)T]$, который удовлетворяет соотношению

$$y[(k+1)T] = Hx_c[(k+1)T] = Hx_s[(k+1)T] \quad (5-87)$$

Выражение (5-87) показывает, что m новых состояний $y_i[(k+1)T]$, $i = 1, 2, \dots, m$, являются алгебраическими суммами n исходных переменных состояния, т.е.

$$y_i[(k+1)T] = \sum_{j=1}^n h_{ij} x_j[(k+1)T] \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5-88)$$

Таким образом, матрица $G_w(T)$, определяемая выражением (5-82), обеспечивает совпадение в моменты квантования m состояний цифровой системы и взвешенных алгебраических сумм n состояний непрерывной системы.

Определение матрицы обратной связи с помощью разложения в ряд. Хотя соотношение (5-82) позволяет получить точное решение $G_w(T)$, можно упростить эту процедуру с помощью разложения $G(T)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $T = 0$. В общем случае, если этот ряд сходится, матрица $G(T)$ может быть аппроксимирована суммой конечного числа членов ряда.

Разложим $G(T)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $T = 0$:

$$G(T) = \lim_{K \rightarrow \infty} G_K(T) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{1}{j!} G^{(j)}(T) T^j \quad (5-89)$$

где

$$G^{(j)}(T) = \left. \frac{\partial^j G(T)}{\partial T^j} \right|_{T=0} \quad (5-90)$$

Подстановка выражения (5-89) в уравнение (5-74) дает

$$\phi_c(T) = \phi(T) - \theta(T) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j} G^{(j)}(T) T^j \quad (5-91)$$

Запишем уравнение (5-91) в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{[A - BG(0)]^j T^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j T^j}{j!} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j T^{j+1}}{(j+1)!} B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G^{(k)}(T) T^k}{k!} \quad (5-92)$$

или

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{[A - BG(0)]^j T^j}{j!} - \frac{A^j T^j}{j!} + \frac{A^j B}{(j+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G^{(k)}(T) T^{k+j+1}}{k!} \right\} = 0 \quad (5-93)$$

Приравнявая теперь коэффициенты при T^i , $i = 1, 2, \dots$, к нулю, получаем

$$\frac{[A - BG(0)]^i}{i!} - \frac{A^i}{i!} + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{A^{i-j-1} BG^{(j)}(T)}{(i-j)! j!} = 0 \quad (5-94)$$

В общем случае можно выразить $G^{(i-1)}(T)$ через $G^{(i-2)}(T)$, $G^{(i-3)}(T)$, \dots , $G^{(1)}(T)$ и $G^{(0)}(T)$, где $G^{(0)}(T) = G(0)$.

Перепишем соотношение (5-94) в виде

$$\frac{[A - BG(0)]^i}{i!} - \frac{A^i}{i!} + \sum_{j=0}^{i-2} \frac{A^{i-j-1} BG^{(j)}(T)}{(i-j)! j!} + \frac{BG^{(i-1)}(T)}{(i-1)!} = 0 \quad (5-95)$$

$i = 1, 2, \dots$. Разрешая это уравнение относительно последнего члена, получим

$$\frac{\mathbf{BG}^{(i-1)}(T)}{(i-1)!} = \frac{\mathbf{A}^i}{i!} - \frac{[\mathbf{A} - \mathbf{BG}(0)]^i}{i!} - \sum_{j=0}^{i-2} \frac{\mathbf{A}^{i-j-1} \mathbf{BG}^{(j)}(T)}{(i-j)!j!} \quad (5-96)$$

Поскольку \mathbf{B} в общем случае не является квадратной матрицей, то, чтобы найти $\mathbf{G}^{(i-1)}(T)$ из последнего уравнения, вновь введем весовую матрицу $\mathbf{H}(m \times n)$, такую, чтобы \mathbf{HB} была невырождена. Умножая слева обе части уравнения (5-96) на \mathbf{H} и выделяя в явном виде $\mathbf{G}^{(i-1)}(T)$, получим

$$\mathbf{G}_w^{(i-1)}(T) = (\mathbf{HB})^{-1} \mathbf{H} \left\{ \frac{\mathbf{A}^i}{i} - \frac{[\mathbf{A} - \mathbf{BG}(0)]^i}{i} - (i-1)! \sum_{j=0}^{i-2} \frac{\mathbf{A}^{i-j-1} \mathbf{BG}^{(j)}(T)}{(i-j)!j!} \right\} \quad (5-97)$$

$i = 1, 2, \dots$. В табл. 5.2 представлены выражения для $\mathbf{G}_w^{(i-1)}(T)$ при $i = 1, 2$ и 3.

Таблица 5.2

i	$\mathbf{G}_w^{(i-1)}(T)$
1	$\mathbf{G}(0)$
2	$\frac{1}{2} \mathbf{G}(0)[\mathbf{A} - \mathbf{BG}(0)]$
3	$(\mathbf{HB})^{-1} \mathbf{H} \left[-\frac{1}{6} \mathbf{ABG}(0)[\mathbf{A} - \mathbf{BG}(0)] + \frac{1}{3} \mathbf{BG}(0)[\mathbf{A} - \mathbf{BG}(0)]^2 \right]$

Результаты, представленные в табл. 5.2, позволяют приближенно вычислить $\mathbf{G}(T)$, используя не более трех членов ряда (5-89). В соответствии с (5-89) имеем

$$K = 1 \quad \mathbf{G}_1(T) = \mathbf{G}^{(0)}(T) = \mathbf{G}(0) \quad (5-98)$$

$$K = 2 \quad \mathbf{G}_2(T) = \mathbf{G}(0) + T\mathbf{G}^{(1)}(T) \quad (5-99)$$

$$K = 3 \quad \mathbf{G}_3(T) = \mathbf{G}(0) + T\mathbf{G}^{(1)}(T) + \frac{T^2}{2} \mathbf{G}^{(2)}(T) \quad (5-100)$$

На практике вместо точных матриц можно использовать их приближенные аналоги $\mathbf{G}_w^{(0)}(T)$, $\mathbf{G}_w^{(1)}(T)$ и $\mathbf{G}_w^{(2)}(T)$. Кроме того, отметим (см. табл. 5.2), что $\mathbf{G}_w^{(0)}(T)$ и $\mathbf{G}_w^{(1)}(T)$ не зависят от \mathbf{H} . Поэтому приближенные значения $\mathbf{G}(T)$, полученные при использовании одного или двух членов ряда, соответственно $\mathbf{G}_1(T)$ и $\mathbf{G}_2(T)$, применяются для согласования всех состояний непрерывной и цифровой систем. При учете более двух членов ряда необходимо применять весовую матрицу \mathbf{H} , поскольку $\mathbf{G}_w^{(2)}(T) \neq \mathbf{G}^{(2)}(T)$, и при замене в выражении (5-100) $\mathbf{G}^{(2)}(T)$ на $\mathbf{G}_w^{(2)}(T)$ в зависимости от выбранной матрицы \mathbf{H} обеспечивается совпадение только определенных состояний и комбинаций состояний.

В общем случае при увеличении числа членов ряда (5-89), используемого для аппроксимации $G(T)$, полученное решение будет стремиться к точному значению $G_w(T)$, определяемому соотношением (5-82).

Точное решение для $E(T)$. Вернемся теперь к определению матрицы прямой связи $E(T)$. Запишем условие совпадения состояний в соответствии с (5-73) в виде

$$\theta(T)E(T) = \theta_c(T)E(0) \quad (5-101)$$

Как и при рассмотрении замкнутой формы решения для $G(T)$, если $m = n$ и матрица $\Theta(T)$ является невырожденной, существует единственное решение уравнения (5-101), имеющее вид

$$E(T) = [\theta(T)]^{-1} \theta_c(T) E(0) \quad (5-102)$$

В общем случае при $n > m$ решение $E(T)$, соответствующее частично-му совпадению состояний, равно

$$E_w(T) = [H\theta(T)]^{-1} H\theta_c(T) E(0) \quad (5-103)$$

где предполагается, что $H\theta(T)$ — невырожденная матрица.

Определение $E(T)$ с помощью разложения в ряд. По аналогии с $G(T)$ матрицу $E(T)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности $T = 0$:

$$E(T) = \lim_{K \rightarrow \infty} E_K(T) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{1}{j!} E^{(j)}(T) T^j \quad (5-104)$$

где

$$E^{(j)}(T) = \left. \frac{\partial^j E(T)}{\partial T^j} \right|_{T=0} \quad (5-105)$$

Подставляя разложение $E(T)$ в уравнение (5-101) и выполняя операции, подобные (5-92), получим

$$E_w^{(i-1)}(T) = (HB)^{-1} H \left[\frac{[A - BG(0)]^{i-1} BE(0)}{i} - (i-1)! \sum_{j=0}^{i-2} \frac{A^{i-j-1} BE^{(j)}(T)}{(i-j)! j!} \right] \quad (5-106)$$

$i = 1, 2, \dots$. В табл. 5.3 приведены значения $E_w^{(i-1)}(T)$ для $i = 1, 2$ и 3.

Таблица 5.3

i	$E_w^{(i-1)}(T)$
1	$E(0)$
2	$-\frac{1}{2} G(0) B E(0)$
3	$(HB)^{-1} H \left[\frac{ABG(0)B}{6} - \frac{BG(0)[A - BG(0)]B}{3} \right] E(0)$

Так же как и для $G(T)$, при аппроксимации $E(T)$ не более чем двумя членами ряда, в весовой матрице H нет необходимости. В этом случае стараются согласовать все состояния цифровой и непрерывной систем.

Условия устойчивости и ограничения на выбор весовой матрицы H . Выше весовая матрица H вводилась для частичного совпадения состояний в задаче переоборудования систем с использованием ЭВМ. Поскольку выбор элементов матрицы H точно не определен, важным требованием является асимптотическая устойчивость замкнутой цифровой системы управления. Задача состоит в определении ограничений на вид H , которые гарантируют устойчивость.

Решая уравнение состояния (5-66) для моментов квантования, имеем

$$\mathbf{x}_s[(k+1)T] = \Phi(T)\mathbf{x}_s(kT) + \theta(T)\mathbf{u}_s(kT) \quad (5-107)$$

где $\Phi(T)$ и $\Theta(T)$ определяются соотношениями (5-70) и (5-75), соответственно. Для $\mathbf{r}(kT) = 0$ закон управления с обратной связью по состоянию имеет вид

$$\mathbf{u}_s(kT) = -G(T)\mathbf{x}_s(kT) \quad (5-108)$$

Подстановка выражения (5-108) в (5-107) дает

$$\mathbf{x}_s[(k+1)T] = [\Phi(T) - \theta(T)G(T)]\mathbf{x}_s(kT) \quad (5-109)$$

Цифровая замкнутая система, описываемая уравнением (5-109), является асимптотически устойчивой, если все собственные значения матрицы $[\Phi(T) - \theta(T)G(T)]$ располагаются внутри единичной окружности $|z| = 1$. Если задан период квантования T , то $\Phi(T)$ и $\Theta(T)$ известны и, следовательно, ограничения на $G(T)$, диктуемые соображениями устойчивости, можно найти с помощью обычных критериев.

Замена в выражении (5-81) $G(T)$ на $G_w(T)$ дает

$$H\mathbf{D}(T) = H\theta(T)G_w(T) \quad (5-110)$$

Транспонируя матрицы в обеих частях последнего уравнения, получаем

$$\mathbf{D}'(T)\mathbf{H}' = G_w'(T)\theta'(T)\mathbf{H}' \quad (5-111)$$

или

$$[G_w'(T)\theta'(T) - \mathbf{D}'(T)]\mathbf{H}' = 0 \quad (5-112)$$

Это матричное уравнение соответствует системе из n линейных однородных уравнений, которые имеют нетривиальные решения только в том случае, если выполняется следующее условие:

$$|G_w'(T)\theta'(T) - \mathbf{D}'(T)| = 0 \quad (5-113)$$

которое эквивалентно условию

$$|\theta(T)G_w(T) - \mathbf{D}(T)| = 0 \quad (5-114)$$

Таким образом, если выполняется соотношение (5-114), всегда существует отличная от нуля матрица H , которая будет удовлетворять уравнению

$$G_w(T) = [H\theta(T)]^{-1}H\mathbf{D}(T) \quad (5-115)$$

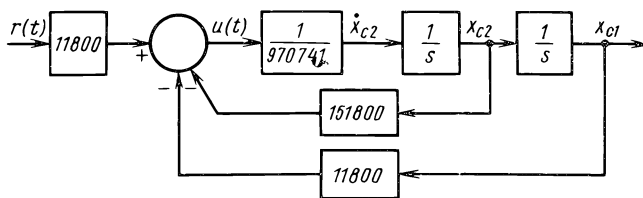


Рис. 5.17. Упрощенная система ориентации космической станции "Скайлэб" по одной координате

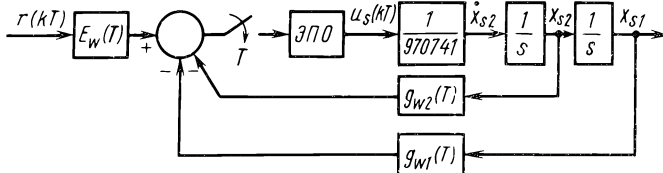


Рис. 5.18. Эквивалентная цифровая система управления станцией "Скайлэб"

Переоборудование на базе ЭВМ упрощенной системы управления космической станцией "Скайлэб". Ниже представлен пример, иллюстрирующий методику переоборудования систем управления на базе ЭВМ. Структурная схема, изображенная на рис. 5.17, описывает динамику упрощенной системы ориентации космической станции "Скайлэб" по одной координате. Можно показать, что непрерывная система управления станцией "Скайлэб" характеризуется коэффициентом затухания, приблизительно равным 0,707.

Уравнения состояния системы, изображенной на рис. 5.17, можно записать в форме (5-60), причем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 970741 \end{bmatrix} \quad (5-116)$$

Матрица обратной связи имеет вид

$$G(0) = [11800 \quad 151800] \quad (5-117)$$

а матрица прямой связи —

$$E(0) = 11800$$

Теперь необходимо построить эквивалентную цифровую систему со структурной схемой, изображенной на рис. 5.18, состояния которой будут совпадать с состояниями непрерывной системы в моменты квантования при одних и тех же входных воздействиях и начальных состояниях.

Матрицы коэффициентов усиления $E_w(T)$ и $G_w(T) = [g_{w1}(T) g_{w2}(T)]$ должны быть определены с использованием метода, рассмотренного выше.

При использовании только одного члена ряда для аппроксимации $G(T)$ и $E(T)$ результаты имеют вид $G(0)$ и $E(0)$ соответственно. В этом случае следует выбирать период квантования цифровой системы, изображенной на рис. 5.18, исходя из асимптотической устойчивости системы.

При аппроксимации двумя членами имеем

$$\begin{aligned} G_w(T) &\cong G(0) + \frac{T}{2} G(0)[A - BG(0)] = \\ &= [11800 - 922.6T \quad 151800 - 5968.9T] \end{aligned} \quad (5-119)$$

$$E_w(T) \cong E(0) - \frac{T}{2} G(0)BE(0) = 11800 - 922.6T \quad (5-120)$$

Эти результаты показывают, что коэффициенты передачи в матрицах обратной и прямой связей уменьшаются с увеличением периода квантования. В табл. 5.4 приведены значения элементов $G_w(T)$ и $E_w(T)$ при аппроксимации двумя членами для $T = 1 \div 5$ с.

Таблица 5.4

$T(c)$	$g_{w1}(T)$	$g_{w2}(T)$	$E_w(T)$
1	10 877.4	145 831	10 877.4
2	9 954.8	139 862	9 954.8
3	9 032.2	133 893	9 032.2
4	8 109.6	127 924	8 109.6
5	7 187.0	121 955	7 187.0

Точные значения матриц $G_w(T)$ и $E_w(T)$ вычислялись на основании соотношений (5-82) и (5-103) соответственно. В табл. 5.5 приведены точные значения элементов матриц $G_w(T)$ и $E_w(T)$ для $T = 1 \div 5$ с $\mathbf{H} = [0 \ 1]$ и $\mathbf{H} = [1 \ 0]$. При $\mathbf{H} = [0 \ 1]$ должно согласовываться состояние x_{c2} , а при $\mathbf{H} = [1 \ 0]$ – состояние x_{c1} .

Таблица 5.5

$T(c)$	\mathbf{H}	$g_{w1}(T)$	$g_{w2}(T)$	$E_w(T)$
1	0 1	10 901.5	145 840	10 901.5
2	0 1	10 051.2	139 921,	10 051.2
3	0 1	9 248.4	134 071	9 248.4
4	0 1	8 492.5	128 315	8 492.5
5	0 1	7 782.3	122 674	7 782.3
1	1 0	11 197.0	147 825	11 197.0
2	1 0	10 618.1	143 867	10 618.1
3	1 0	10 063.1	139 937	10 063.1
4	1 0	9 531.8	136 048	9 531.8
5	1 0	9 023.7	132 207	9 023.7

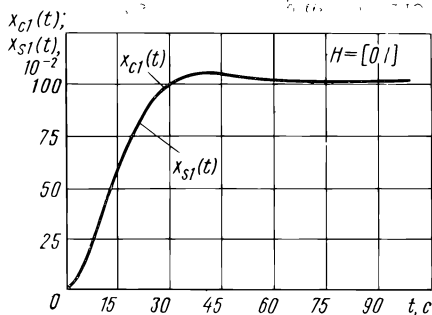


Рис. 5.19. Траектория состояний $x_{c1}(t)$ и $x_{s1}(t)$ упрощенной системы управления станцией "Скайлэб"

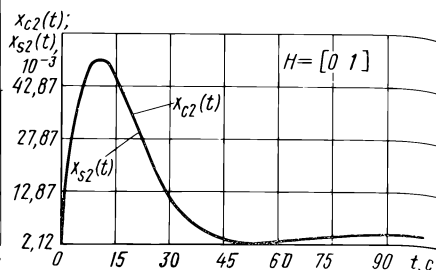


Рис. 5.20. Траектория состояний $x_{c2}(t)$ и $x_{s2}(t)$ упрощенной системы управления станцией "Скайлэб"

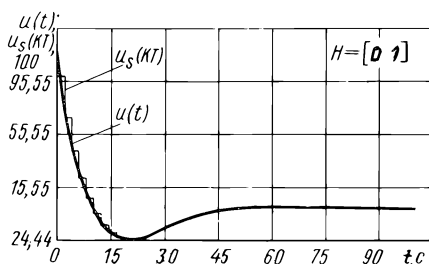


Рис. 5.21. Управляющие сигналы $u(t)$ и $u_s(KT)$ для упрощенной системы станции "Скайлэб"

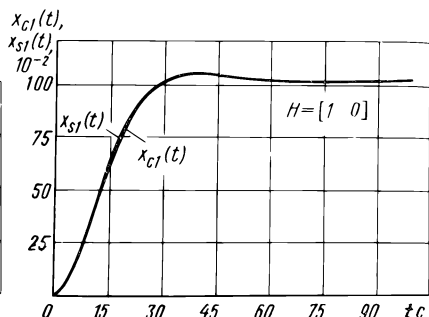


Рис. 5.22. Траектория состояний $x_{c1}(t)$ и $x_{s1}(t)$ упрощенной системы управления станцией "Скайлэб"

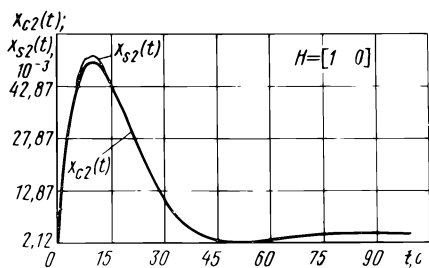


Рис. 5.23. Траектория состояний $x_{c2}(t)$ и $x_{s2}(t)$ упрощенной системы управления станцией "Скайлэб"

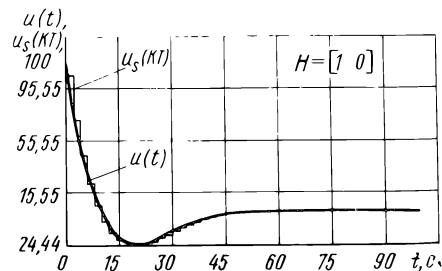


Рис. 5.24. Управляющие сигналы $u(t)$ и $u_s(KT)$ для упрощенной системы управления станцией "Скайлэб"

Цифровую систему управления, матрицы которой представлены в табл. 5.5, моделировали на ЭВМ при $T = 2$ с. Переходную функцию непрерывной системы управления станцией "Скайлэб" также рассчитывали на ЭВМ для значений $G(0)$ и $E(0)$, задаваемых выражениями (5-117) и (5-118) соответственно. На рис. 5.19 – 5.21 представлены результаты расчетов для $T = 2$ с и $H = [0 \ 1]$. Рис. 5.22 – 5.24 иллюстрируют результаты для $H = [1 \ 0]$. Кривые показывают, что метод переоборудования систем

управления на базе ЭВМ позволяет получить цифровую систему станции "Скайлэб", переходные процессы в которой очень хорошо совпадают с соответствующими процессами в непрерывной системе. Период квантования, равный 2 с, оказался вполне приемлемым. При $\mathbf{H} = [0 \ 1]$ получены лучшие результаты по сравнению с $\mathbf{H} = [1 \ 0]$. Это означает, что переходные функции двух систем лучше совпадают, если большее значение придается согласованию $x_{c2}(t)$, а не $x_{c1}(t)$.

Можно исследовать глобальные условия устойчивости на плоскости параметров $g_{w2}(T)$, $g_{w1}(T)$. Характеристическое уравнение замкнутой цифровой системы имеет вид

$$F(z) = |z\mathbf{I} - \phi(T) + \theta(T)\mathbf{G}_w(T)| = \quad (5-121)$$

$$= z^2 + 2 \left[\frac{g_{w1}}{970741} + \frac{g_{w2}}{970741} - 1 \right] z - \frac{2g_{w1}}{970741} - \frac{2g_{w2}}{970741} + 1 = 0$$

Применяя критерий устойчивости, получим следующие три условия:

$$F(0) < 1 \quad g_{w1} < g_{w2}$$

$$F(1) > 0 \quad g_{w1} > 0$$

$$F(-1) > 0 \quad g_{w2} < 970741 \quad (5-122)$$

Область устойчивости ограничивается на плоскости g_{w2} , g_{w1} этими линиями. Можно показать, что все результаты, представленные в табл. 5.4 и 5.5, лежат внутри области устойчивости.

Выше был рассмотрен метод переоборудования систем на базе ЭВМ, основанный на сравнении состояний в дискретные моменты времени. В общем случае существуют и другие способы сопоставления состояний непрерывной системы и ее эквивалентной цифровой модели. Например, для согласования состояний в моменты квантования можно применять экстраполятор высокого порядка, а не экстраполятор нулевого порядка, как предложено здесь. Более того, доказано, что состояния могут подстраиваться в моменты, кратные периоду квантования. Изменяя коэффициенты усиления обратной связи $G(T)$ и прямой связи $E(T)$, можно подстраивать также состояния между моментами квантования без использования весовой матрицы \mathbf{H} . Эти и другие методы переоборудования систем управления на базе ЭВМ описаны в литературе, приведенной в ссылках к этой главе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Salzer, J. M., "Frequency Analysis of Digital Computers Operating in Real Time," *Proc. IRE*, Vol. 42, No. 2, February 1954, pp. 457-466.
2. Fryer, W. D., and Schultz, W. C., "A Survey of Methods for Digital Simulation of Control Systems," Cornell Aeronautical Lab., Cornell University, New York.
3. Halijak, C. A., "Digital Approximation of the Solutions of Differential Equations Using Trapezoidal Convolution," Bendix Systems Divisions, Report ITM-64, August 1960.

4. Boxer, R., and Thaler, S., "A Simplified Method of Solving Linear and Nonlinear Systems," *Proc. IRE*, Vol. 44, January 1956, pp. 89-101.
5. Liff, A. I., and Wolf, J. K., "On the Optimum Sampling Rate for Discrete-Time Modeling of Continuous-Time Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-11, April 1966, pp. 288-290.
6. Widrow, B., "A Study of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theory," *IRE Trans. on Circuit Theory*, Vol. CT-3, December 1964, pp. 266-276.
7. Beale, G. O., and Cook, G., "Frequency Domain Synthesis of Discrete Representations," *IEEE Trans. on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, Vol. 23, No. 4, November 1976, pp. 438-443.
8. Rosko, J. S., *Digital Simulation of Physical Systems*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1972.
9. Tustin, A., "A Method of Analyzing the Behavior of Linear Systems in Terms of Time Series," *Journal of the IEE*, Vol. 94, II-A, May 1947.
10. Sage, A. P., and Smith, S. L., "Real-Time Digital Simulation for Systems Control," *Proc. of the IEEE*, Vol. 54, December 1966, pp. 1802-1812.
11. Parrish, E. A., McVey, E. S., and Cook, G., "The Investigation of Optimal Discrete Approximations for Real-Time Flight Simulations," *NASA Technical Report EG-4041-102-76*, March 1976.
12. McVey, E. S., and Lee, Y. C., "Choice of Method for Discretization of Continuous Systems," *AIAA Journal of Guidance and Control*, Vol. 2, No. 1, January-February 1979, pp. 92-94.
13. Singh, G., Kuo, B. C., and Yackel, R. A., "Digital Approximation by Point-by-Point State Matching with Higher-Order Holds," *International J. on Control*, Vol. 20, No. 1, 1974, pp. 81-90.
14. Kuo, B. C., Singh, G., and Yackel, R. A., "Digital Approximation of Continuous-Data Control Systems by Point-by-Point State Comparison," *Computers & Elec. Eng.*, Vol. 1, Pergamon Press, 1973, pp. 155-170.
15. Kuo, B. C., and Peterson, D. W., "Optimal Discretization of Continuous-Data Control Systems," *IFAC Automatica*, Vol. 9, No. 1, 1973, pp. 125-129.
16. Fryer, W. D., and Schultz, W. C., "A Survey of Methods For Digital Simulation of Control Systems," *Cornell Aeronautical Lab., Cornell University, New York*.
17. Yackel, R. A., Kuo, B. C., and Singh, G., "Digital Redesign of Continuous Systems by Matching of States at Multiple Sampling Periods," *IFAC Automatica*, Vol. 10, Pergamon Press, 1974, pp. 105-111.
18. Winsor, C. A., and Roy, R. J., "The Application of Specific Optimal Control to the Design of Desensitized Model Following Control Systems," *Proc. JACC*, 1970, pp. 271-277.
19. Moore, B. C., and Silverman, L. M., "Model Matching by State Feedback and Dynamic Compensation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-17, 1972, pp. 491-497.
20. Wang, S. H., and Desoer, C. A., "The Exact Model Matching of Linear Multivariable Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-17, 1972, pp. 347-349.
21. Wang, S. H., and Davison, E. J., "Solution of The Exact Model Matching Problem," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-17, 1972, pp. 574.

ГЛАВА 6. АНАЛИЗ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

6.1. ВВЕДЕНИЕ

Поскольку выходные переменные цифровых систем управления обычно являются функциями непрерывного аргумента t , качество системы необходимо оценивать во временной области. Однако при использовании z -преобразования или уравнения состояния в дискретной форме выходные переменные системы измеряются только в моменты замыкания. Такое дискретное представление может быть, а может и не быть точным — все зависит от периода квантования и его соотношения с постоянными времени системы. Иными словами, может быть большое расхождение между выходной переменной $c(t)$ и дискретным сигналом $c^*(t)$, так что последний не отражает действительного поведения системы.

Как и при анализе непрерывных систем, поведение во времени цифровой системы управления может быть охарактеризовано такими терминами, как *перерегулирование*, *время нарастания*, *время запаздывания*, *время установления*, *коэффициент затухания*, *фактор затухания*, *собственная частота при отсутствии затухания* и т.п.

Качество цифровой системы управления во временной области часто определяется путем подачи на ее вход тестового сигнала в виде *единичной ступенчатой функции*. Для линейных систем такое воздействие может дать ценную информацию о поведении системы в переходном и установившемся режимах. Фактически перерегулирование, время нарастания, время запаздывания и время установления определяются исключительно при единичном ступенчатом входном воздействии. Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие называется *переходной функцией*.

На рис. 6.1 изображена типичная переходная функция цифровой системы управления. Отметим, что, хотя система называется цифровой, поскольку содержит цифровые преобразователи и (или) цифровые регуляторы, ее выходной сигнал обычно является функцией непрерывной переменной t . Следовательно, такие параметры, как максимальное перерегулирование, время запаздывания, время установления и время максимума, определяются обычным способом (см. рис. 6.1).

Если для анализа цифровых систем управления используется z -преобразование или уравнение состояния в дискретной форме, то их реакции представляются только в моменты замыкания. К этим дискретным данным следует подходить осторожно, поскольку они могут и не быть точным представлением истинной реакции цифровой системы.

На рис. 6.2 изображены типичный выходной сигнал цифровой системы управления $c(t)$, имеющий максимальное значение c_m , и соответствующий ему дискретный сигнал $c^*(t)$. Очевидно, что максимальное значение $c^*(t)$,

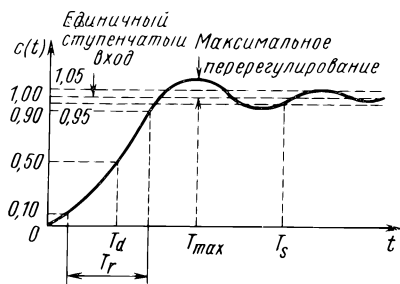


Рис. 6.1. Типичная переходная функция цифровой системы управления и иллюстрация показателей качества во временной области:

T_r — время нарастания; T_s — время установления

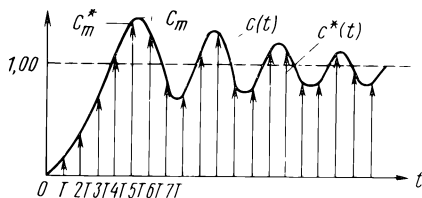


Рис. 6.2. Типичная переходная функция цифровой системы управления и ее дискретное представление

т.е. c_m^* , всегда меньше c_m или равно ему. Рис. 6.2 иллюстрирует случай, когда период квантования достаточно мал, так что дискретный сигнал $c^*(t)$ дает адекватное представление истинной реакции, и различие между c_m и c_m^* незначительно. Однако в общем случае, если период квантования слишком велик, дискретное представление может быть совершенно ошибочным. Следует отметить, что выбор периода квантования цифровой системы управления обычно определяется вовсе не правильностью представления ее реакции в моменты замыкания, а, что более важно, соображениями устойчивости, точности и качества системы в целом.

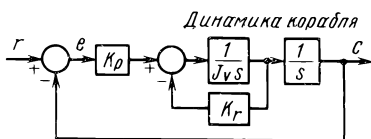
6.2. СРАВНЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕПРЕРЫВНЫХ И ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Сравним характерные особенности непрерывных и цифровых систем, используя в качестве примера систему управления космическим кораблем. Следует иметь в виду, что характеристики, иллюстрируемые этим примером, соответствуют конкретной системе, и что в общем случае имеются исключения, которые не всегда согласуются с полученными результатами.

Структурная схема упрощенной системы управления космическим кораблем изображена на рис. 6.3. Система предназначена для управления положением корабля по одной координате. Если система трехкоординатная, то имеются еще две идентичные системы, осуществляющие управление по двум другим пространственным координатам; предполагается, что в динамике управление этими координатами может осуществляться независимо. В большинстве задач управления космическими объектами, если корабль имеет жесткую структуру (на практике это встречается редко), его можно смоделировать в виде простой массы или момента инерции. На рис. 6.3 корабль представлен чистым моментом инерции J_v , так что передаточная функция между приложенным вращающим моментом и положением имеет вид

$$\frac{C(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{J_v s^2} \quad (6-1)$$

рис. 6.3. Непрерывная система управления космическим кораблем:
 K_p – датчик положения; K_r – датчик скорости



По положению $c(t)$ и его производной – скорости $v(t)$ – с помощью соответствующих датчиков осуществляется обратная связь, в результате чего образуется замкнутый контур управления. В теории непрерывных систем обратная связь по скорости часто используется для целей стабилизации.

Даны параметры простой непрерывной системы управления: коэффициент усиления датчика положения $K_p = 1,65 \cdot 10^6$; коэффициент усиления датчика скорости $K_r = 3,17 \cdot 10^5$; момент инерции корабля $J_v = 41822$.

Предполагается, что все единицы измерения приведены в соответствие друг с другом, так что в аналитических выкладках мы их умышленно опускаем.

По рис. 6.3 находим передаточную функцию разомкнутой системы

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{K_p}{s(J_v s + K_r)} \quad (6-2)$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K_p}{J_v s^2 + K_r s + K_p} \quad (6-3)$$

Подставляя в (6-3) параметры системы, получим

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{39,453}{s^2 + 8,871s + 39,453} \quad (6-4)$$

Приравнявая к нулю знаменатель последнего выражения, получим характеристическое уравнение системы

$$s^2 + 8,871s + 39,453 = 0 \quad (6-5)$$

Сравняя уравнение (6-5) со стандартным характеристическим уравнением второго порядка

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (6-6)$$

находим: коэффициент затухания $\zeta = 0,706$; собственная частота при отсутствии затухания $\omega_n = 6,28$ рад/с.

Переходная функция системы изображена на рис. 6.4.

Поскольку система имеет второй порядок, а все ее параметры положительны, то корни квадратного уравнения (6-5) всегда будут расположены в левой половине s -плоскости. Следовательно, при всех положительных значениях K_p , K_r и J_v непрерывная система всегда будет асимптотически устойчива.

Теперь будем считать, что в системе, изображенной на рис. 6.3, осуществляется цифровое управление. Это возможно в случае, когда датчики положения и скорости являются цифровыми преобразователями. На практике принято использовать цифровой или дифференциальный датчик поло-

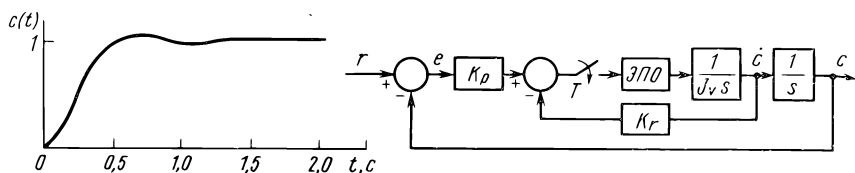


Рис. 6.4. Переходная функция непрерывной системы управления космическим кораблем, представленной на рис. 6.3

Рис. 6.5. Цифровая система управления космическим кораблем

жения, выходной сигнал которого обрабатывается так, чтобы получить информацию как о положении, так и о скорости.

В цифровой системе выходные сигналы датчиков положения и скорости обрабатываются устройствами выборки и хранения, включающими в себя АЦП. На рис. 6.5 изображена структурная схема цифровой системы управления космическим кораблем; операции выборки и хранения представлены одним устройством, как показано на рисунке. Период квантования равен T секунд.

Для удобства сравнения предположим, что параметры системы K_p , K_r и J_v те же самые, что и в непрерывной системе. Запишем передаточную функцию разомкнутой цифровой системы непосредственно по рис. 6.5:

$$G(z) = \frac{C(z)}{E(z)} = \frac{K_p \mathcal{Z} \left[G_h(s) \frac{1}{J_v s^2} \right]}{1 + K_r \mathcal{Z} \left[G_h(s) \frac{1}{J_v s} \right]} \quad (6-7)$$

где $G_h(s)$ – передаточная функция экстраполятора.

Тогда

$$\mathcal{Z} \left[G_h(s) \frac{1}{J_v s^2} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{J_v s^3} \right] = \frac{T^2}{2J_v} \frac{z + 1}{(z - 1)^2} \quad (6-8)$$

$$\mathcal{Z} \left[G_h(s) \frac{1}{J_v s} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{J_v s^2} \right] = \frac{T}{J_v(z - 1)} \quad (6-9)$$

Подставляя (6-8) и (6-9) в (6-7) и производя упрощения, получим

$$G(z) = \frac{T^2 K_p (z + 1)}{2J_v z^2 + (2K_r T - 4J_v)z + 2J_v - 2K_r T} \quad (6-10)$$

Передаточная функция замкнутой цифровой системы управления

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} &= \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \\ &= \frac{T^2 K_p (z + 1)}{2J_v z^2 + (2K_r T - 4J_v + T^2 K_p)z + (2J_v - 2K_r T + T^2 K_p)} \end{aligned} \quad (6-11)$$

Подставляя параметры системы в два последних выражения, имеем

$$G(z) = \frac{1.65 \times 10^6 T^2 (z + 1)}{83644z^2 + (6,34 \times 10^5 T - 167288)z + 83644 - 6,34 \times 10^5 T} \quad (6-12)$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{1.65 \times 10^6 T^2 (z + 1)}{Az^2 + Bz + C} \quad (6-13)$$

где $A = 83644$; $B = 6,34 \cdot 10^5 T - 167288 + 1,65 \cdot 10^6 T^2$; $C = 83644 - 6,34 \cdot 10^5 T + 1,65 \cdot 10^6 T^2$.

Характеристическое уравнение получается путем приравнивания к нулю знаменателя (6-13):

$$Az^2 + Bz + C = 0 \quad (6-14)$$

где A, B и C имеют приведенные выше значения.

Поскольку теперь имеется дополнительный параметр системы в виде периода квантования T , то ее качество зависит от значений K_p, K_r, J_v и T .

Чтобы цифровая система управления была асимптотически устойчива, корни ее характеристического уравнения должны лежать на z -плоскости внутри единичной окружности $|z| = 1$. Очевидно, однако, что цифровая система второго порядка при больших значениях T может быть неустойчива. Применяя к характеристическому уравнению (6-14) критерий устойчивости Джюри, находим диапазон устойчивости по параметру T : $0 \leq T < 0,264$ с.

На рис. 6.6 изображена диаграмма положения корней уравнения (6-14) при изменении T от 0 до ∞ . Эта диаграмма известна как *корневой годограф* [1]. В данном случае корневой годограф построен путем задания значений T и решения уравнения (6-14). Обычный способ построения корневой годографа [1] здесь не может быть применен, поскольку параметр T нелинейно (как T^2) входит в уравнение (6-14).

На рис. 6.7 представлены переходные функции цифровой системы управления для нескольких значений периода квантования T . Отметим, что если период квантования стремится к нулю, то переходная функция цифровой системы стремится к соответствующей характеристике непрерывной системы.

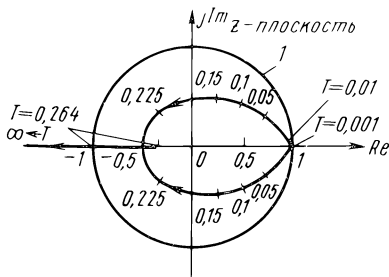


Рис. 6.6. Траектории корней уравнения (6-14) при изменении периода квантования T :

l – единичная окружность

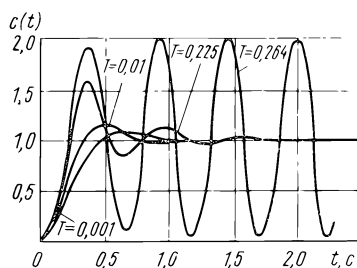


Рис. 6.7. Переходные функции цифровой системы управления, изображенной на рис. 6.5

Качество установившегося режима цифровой системы управления можно определить весьма просто, используя теорему о конечном значении. В случаях когда эта теорема применима, она является самым простым методом оценки установившейся ошибки. Теорема о конечном значении не применима, если замкнутая система неустойчива или же ее выходная переменная не успевает отслеживать изменение входного сигнала, и ошибка неограниченно возрастает.

Установившаяся ошибка цифровой системы управления определяется выражением

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) \quad (6-15)$$

Из рис. 6.5 имеем

$$E(z) = R(z) - C(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)} \quad (6-16)$$

Для единичного ступенчатого воздействия $R(z) = z/(z - 1)$. Подставляя (6-16) в (6-15), имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z)} \quad (6-17)$$

Подставляя $G(z)$ из выражения (6-10) в (6-17), получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = 0 \quad (6-18)$$

поскольку $G(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 1$. Таким образом, цифровая система управления космическим кораблем способна обработать ступенчатый входной сигнал без установившейся ошибки.

Рассмотрим теперь входной сигнал $r(t)$ в виде единичной линейной функции, $r(t) = tu_s(t)$. Она имеет z -преобразование

$$R(z) = \frac{Tz}{(z - 1)^2} \quad (6-19)$$

Установившаяся ошибка системы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z - 1)G(z)} \quad (6-20)$$

Подставляя $G(z)$ из выражения (6-10) в (6-20) и переходя к пределу, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \frac{2K_r + TK_p}{2K_p} \quad (6-21)$$

Таким образом, при линейно-меняющемся входном сигнале установившаяся ошибка цифровой системы постоянна и зависит от K_r , K_p и T . Если положить $T = 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = K_r/K_p \quad (6-22)$$

что в точности равно установившейся ошибке непрерывной системы управления космическим кораблем при единичном линейном входном сигнале.

Из рассмотренного выше простого примера, по результатам анализа непрерывной и цифровой системы управления, можно сделать следующие выводы.

1. При одних и тех же структуре и параметрах системы цифровая система обычно менее устойчива, чем непрерывная. (В гл. 5 был рассмотрен метод переоборудования систем управления на базе ЭВМ и было показано, как выбрать параметры цифровой системы, чтобы она обладала такой же реакцией, как и непрерывная система).

2. Качество цифровой системы зависит от периода квантования T . Его возрастание обычно способствует увеличению выброса переходной функции и в конечном счете может привести к неустойчивости системы.

3. Из корневого годографа (см. рис. 6.6) вытекает еще одна характерная особенность анализа цифровых систем управления. При малых значениях T корни характеристического уравнения на z -плоскости располагаются очень близко к точке $z = 1$. Концентрация доминирующих корней около точки $z = 1$ часто создает две практические сложности при анализе цифровых систем. Во-первых, по положению корней на z -плоскости становится трудно предсказать поведение замкнутой системы. Такие характеристики, как кривые постоянного коэффициента затухания, постоянной частоты и др., определяются неточно, если все корни группируются в одном месте. Во-вторых, проблема точности может возникнуть и при попытке отыскания близких по значению корней с помощью ЭВМ.

6.3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВРЕМЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ И ПОЛОЖЕНИЕМ КОРНЕЙ НА s - И z -ПЛОСКОСТЯХ

В п. 3.3 было установлено соответствие между областями s - и z -плоскостей. В частности, на z -плоскости были построены кривые равных значений фактора затухания, коэффициента затухания и частоты. Эти кривые позволяют предсказать качество цифровой системы управления.

Для непрерывных систем известна связь между положением на s -плоскости корней характеристического уравнения и переходной функцией. Например, комплексно-сопряженные корни, расположенные в левой половине s -плоскости, обуславливают экспоненциально затухающие синусоидальные процессы; корни на отрицательной части действительной оси соответствуют монотонно затухающим процессам; простые сопряженные корни на мнимой оси приводят к возникновению незатухающих гармонических колебаний с постоянной амплитудой. Кратные корни на мнимой оси и корни в правой половине s -плоскости соответствуют расходящимся процессам.

Хотя мы и установили связь между s - и z -плоскостями, однако операция квантования в цифровых системах вызывает эффекты, требующие особого внимания. Если, например, импульсная теорема не выполняется, то эффект смещения полюсов в результате квантования может привести к искажению реакции системы. На рис. 6.8, *а* изображены полюсы передаточной функции непрерывной системы второго порядка, а на рис. 6.8, *б* — свободное движение системы. Если в системе производится квантование с

Рис. 6.8. Полюсы непрерывной системы второго порядка (а) и свободное движение системы (б)

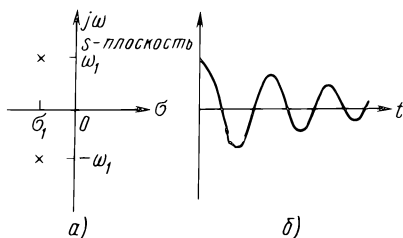
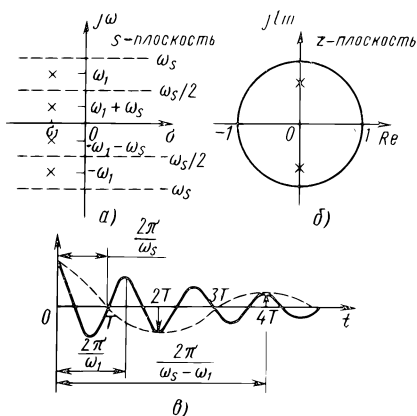


Рис. 6.9. Расположение полюсов на s - и z -плоскостях, иллюстрирующее эффект смещения частоты



частотой ω_s , причем $\omega_s < 2\omega_1$, то эта операция порождает на s -плоскости бесконечное множество полюсов $s = \sigma_1 \pm j\omega_1 + jn\omega_s$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Как показано на рис. 6.9, а, операция квантования смещает полюсы в основную полосу $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$, в результате чего эффект будет таким же, как если бы исходная система имела полюсы $s = \sigma_1 \pm j(\omega_s - \omega_1)$.

Рис. 6.9, б иллюстрирует рассмотренный случай на z -плоскости. На рис. 6.9, в с помощью дискретного сигнала показан эффект смещения частоты, проявляющийся в том, что при наличии прерывания в системе кажущаяся частота колебаний имеет значение $\omega_s - \omega_1$, тогда как в действительности она равна ω_1 .

На рис. 6.10 приведены примеры расположения корней системы второго порядка на s - и z -плоскостях и соответствующие им временные характеристики.

Приведенные выше соображения о связи между временными характеристиками и положением на z -плоскости корней характеристического уравнения относились к системам второго порядка. Однако эти соображения сохраняют силу и для систем более высокого порядка, доминирующие полюсы которых позволяют свести их к эквивалентным системам второго порядка.

6.4. ВЛИЯНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПОЛЮСОВ И НУЛЕЙ НА z -ПЛОСКОСТИ НА МАКСИМАЛЬНОЕ ПЕРЕРЕГУЛИРОВАНИЕ И ВРЕМЯ МАКСИМУМА ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В п. 6.3 была рассмотрена связь между корнями характеристического уравнения на z -плоскости и переходной функцией цифровой системы управления второго порядка. Если характеристическое уравнение имеет комплексные корни, расположенные на z -плоскости внутри единичной окружности, то переходная функция системы будет иметь колебательный характер с положительным затуханием. Вообще, чем ближе эти комплексные корни к единичной окружности, тем более колебательным является переходный процесс. Целесообразно установить связь между положением

полюсов и нулей передаточной функции замкнутой цифровой системы и максимальным перерегулированием и временем максимума T_{\max} ее переходной функции.

Для непрерывной системы управления второго порядка, имеющей в замкнутом состоянии передаточную функцию вида

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6-23)$$

максимум переходной функции и время этого максимума определяются соответственно следующими выражениями [1]:

$$c_{\max} = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (6-24)$$

$$T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (6-25)$$

Для систем, порядок которых выше второго, невозможно получить простые соотношения между c_{\max} , T_{\max} и положением полюсов и нулей передаточной функции. Однако если систему можно охарактеризовать только парой доминирующих полюсов (т.е. полюсов передаточной функции замкнутой системы, которые имеют определяющее значение для переходной функции), а остальные полюсы и нули находятся далеко слева на s -плоскости, то влияние последних на переходную функцию незначительно. При этом условии c_{\max} и T_{\max} можно оценивать выражениями (6-24) и (6-25), соответствующими передаточной функции (6-23). Рассмотрим, например, следующую передаточную функцию системы четвертого порядка:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (6-26)$$

где p_1 и p_2 — действительные константы. Если p_1 и p_2 по крайней мере в 5 раз больше, чем $\zeta\omega_n$, то два полюса в точках $-p_1$ и $-p_2$ будут давать незначительный вклад в переходную функцию, а полюсы

$$s = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{и} \quad s = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

являются доминирующими. Однако просто отбросить члены $(s + p_1)$ и $(s + p_2)$ в выражении (6-26) нельзя, поскольку они оказывают влияние на качество установившегося режима системы.

Для цифровых систем управления задача определения выброса и времени максимума переходной функции по расположению полюсов и нулей является более сложной, так как обычно при использовании метода z -преобразования или уравнения состояния в дискретной форме реакция системы находится только в моменты замыкания.

Возьмем в качестве примера следующую типичную передаточную функцию замкнутой цифровой системы управления второго порядка:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K(z - z_1)}{(z - p_1)(z - \bar{p}_1)} \quad (6-27)$$

где

$$K = \frac{(1 - p_1)(1 - \bar{p}_1)}{(1 - z_1)} \quad (6-28)$$

z_1 — действительный нуль; p_1 и \bar{p}_1 — комплексно-сопряженные полюсы. Мы намеренно рассматриваем здесь действительный нуль z_1 , поскольку большинство непрерывных передаточных функций, не имеющих нулей, при переходе к z -преобразованию будут давать по крайней мере один нуль. Характерным примером может служить выражение (6-11). Также намеренно мы рассматриваем только комплексные полюсы, поскольку устойчивые системы, передаточные функции которых имеют на z -плоскости действительные полюсы, не будут давать перерегулирования.

Если рассматриваемая система подвергается единичному ступенчатому воздействию, то z -преобразование выходной переменной имеет вид

$$C(z) = \frac{zK(z - z_1)}{(z - 1)(z - p_1)(z - \bar{p}_1)} \quad (6-29)$$

Применяя к выражению (6-29) формулу обращения (3-60), получим выходную переменную в моменты замыкания

$$c(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{Kz(z - z_1)}{(z - 1)(z - p_1)(z - \bar{p}_1)} z^{k-1} dz \quad (6-30)$$

где Γ — замкнутый контур, включающий все особенности подынтегрального выражения. Применяя к (6-30) теорему вычетов Коши, запишем выходную последовательность $c(kT)$ в виде

$$c(kT) = 1 + 2 \left| \frac{K(p_1 - z_1)}{(p_1 - 1)(p_1 - \bar{p}_1)} \right| |p_1|^k \cos(k\phi_1 + \theta_1) \quad (6-31)$$

где

$$\phi_1 = \arg(p_1 - z_1) \quad (6-32)$$

$$\theta_1 = \arg(p_1 - z_1) - \arg(p_1 - 1) - \pi/2 \quad (6-33)$$

На рис. 6.11 показано расположение полюсов и нуля функции (6-27).

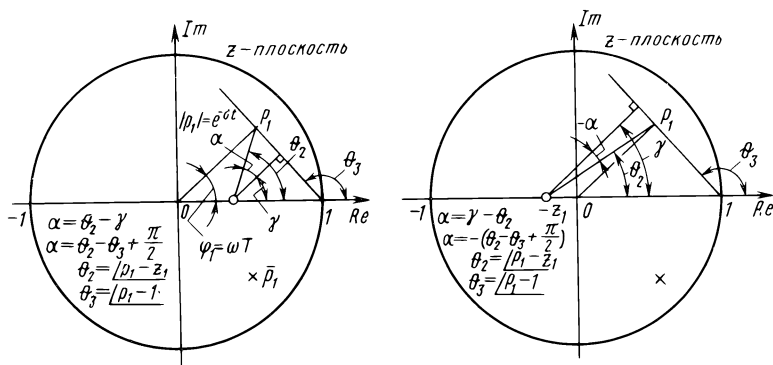


Рис. 6.11. Геометрическая интерпретация α для системы второго порядка с передаточной функцией (6-27)

По рисунку определим угол

$$\pm \alpha = \arg(p_1 - z_1) - \arg(p_1 - 1) + \pi/2 \quad (6-34)$$

где знак перед α выбирается в соответствии с ситуациями, представленными на рис. 6.11. В (6-33) мы видим, что θ_1 связано с α соотношением

$$\theta_1 = \pm \alpha - \pi \quad (6-35)$$

Нетрудно показать также, что между α и нулями и полюсами замкнутой системы имеется следующая связь:

$$|\sec \alpha| = 2 \left| \frac{K(p_1 - z_1)}{(p_1 - 1)(p_1 - \bar{p}_1)} \right| \quad (6-36)$$

где K определяется выражением (6-28). Подставляя (6-35) и (6-36) в (6-31), запишем выходную последовательность системы

$$c(kT) = 1 + |\sec \alpha| \times |p_1|^k \cos(k\phi_1 \pm \alpha - \pi) \quad (6-37)$$

Выражения (6-31) и (6-37) определяют реакцию системы $c(t)$ только в моменты замыкания, и в принципе раз $c(t)$ квантуется, то информация между моментами замыкания теряется. Иными словами, мы не можем восстановить $c(t)$ по $c(kT)$. Однако можно аппроксимировать $c(t)$ функцией, которая проходит через все точки $c(kT)$.

Полагая $t = kT$, запишем

$$|p_1|^k = |p_1|^{t/T} = e^{-\xi \omega_n t} \quad (6-38)$$

$$\phi_1 = \arg(p_1) = \omega_n T = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} T \quad (6-39)$$

Следовательно, непрерывная функция, которая проходит через точки $c(kT)$, имеет вид

$$c(t) = 1 + |\sec \alpha| e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \pm \alpha - \pi) \quad (6-40)$$

Максимальное значение функции $c(t)$ используем теперь для аппроксимации выброса переходной функции цифровой системы управления, имеющей в замкнутом состоянии передаточную функцию (6-27). Максимум $c(t)$ определяется обычным способом, а именно приравниванием к нулю первой производной по времени выражения (6-40), что приводит к следующему соотношению:

$$\operatorname{tg}(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \pm \alpha - \pi) = -\xi / \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (6-41)$$

Поскольку в выражении (6-41) t — время максимума T_{\max} , то

$$T_{\max} = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{-\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \mp \alpha + \pi \right). \quad (6-42)$$

Заметим, что знаки α теперь сменились на обратные.

Подставляя (6-42) в (6-40) и упрощая выражение, найдем максимальное значение

$$c_{\max} = 1 + \sqrt{1 - \xi^2} |\sec \alpha| \exp \left[\frac{-\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{-\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \mp \alpha + \pi \right) \right]. \quad (6-43)$$

Следовательно, максимальное перерегулирование функции $c(t)$, аппроксимирующей $c^*(t)$,

$$\sqrt{1-\xi^2} |\sec \alpha| \exp \left[\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \mp \alpha + \pi \right) \right]. \quad (6.44)$$

Как очевидно из выражения (6.44), максимальное перерегулирование определяется исключительно коэффициентом затухания ξ и углом α (см. рис. 6.11).

На рис. 6.12 представлены кривые максимального перерегулирования в процентах как функции ξ и α . Угол α и его знак определяются по расположению нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы, как показано на рис. 6.11. Значение ξ можно вычислить, используя выражение (6.38), поскольку комплексный полюс p_1 известен. На основании (6.38) запишем

$$|p_1| = e^{-\xi \omega_n T} = \exp \frac{-\xi \phi_1}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (6.45)$$

где угол ϕ_1 выражен в радианах.

Итак, p_1 известно, ϕ_1 определяем из (6.39), после чего ξ вычисляем с помощью соотношения (6.45).

Время максимума T_{\max} находим по формуле (6.42) или в виде

$$T_{\max} = \frac{T}{\phi_1} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \mp \alpha + \pi \right\} \quad (6.46)$$

где знак α противоположен знаку этого угла на рис. 6.11.

На рис. 6.13 приведены кривые для определения T_{\max} , изображенные в масштабе $(T_{\max} \phi_1)/T$ как функция ξ и α .

Следует еще раз подчеркнуть, что временная характеристика (6.40) является близкой аппроксимацией действительной дискретной функции $c^*(t)$ только при достаточно высокой частоте квантования. Вообще, чтобы рассмотренный здесь метод аппроксимации давал приемлемую точность, должна выполняться импульсная теорема. Или с точки зрения расположения полюсов комплексные полюса передаточной функции замкнутой системы p_1 и \bar{p}_1 должны лежать соответственно в первом и четвертом квадрантах z -плоскости.

Как указывалось выше, рассмотренный метод может быть распространен на системы более высокого порядка, имеющие два комплексных доминирующих полюса и нуль, расположенный в любой точке на действительной оси. Остальные нули и полюсы должны находиться на z -плоскости близ начала координат.

Пример 6.1. Рассмотрим цифровую систему управления космическим кораблем (см. рис. 6.5). На рис. 6.7 изображены переходные функции этой системы для нескольких значений периода квантования T . Определим максимальное перерегулирование и время максимума переходной функции, воспользовавшись методом, предложенным в этом параграфе. Преимущество метода заключается в том, что и перерегулирование и время максимума находят без вычисления собственно реакции $c^*(t)$.

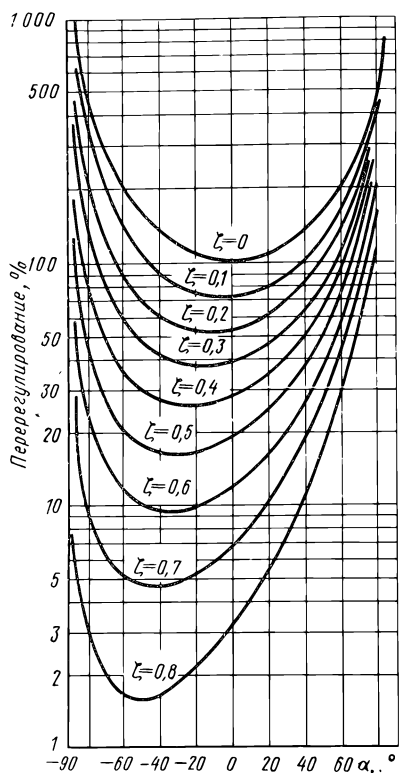


Рис. 6.12. Относительное перерегулирование дискретных систем управления второго порядка

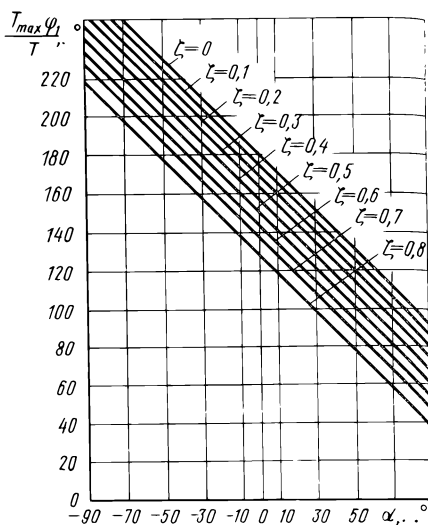


Рис. 6.13. Время максимума переходной функции дискретных систем второго порядка

При $T = 0,225$ с передаточная функция замкнутой системы (6-13) принимает вид

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{83531,25(z+1)}{83644z^2 + 58893,25z + 24525,25} \quad (6-47)$$

Эта функция имеет нуль $z = -1$ и два полюса $z = p_1 = -0,352 + j0,4114$ и $z = \bar{p}_1 = -0,352 - j0,4114$. Их положение на z -плоскости показано на рис. 6.14.

Из рис. 6.14 имеем:

$$a = -40,66^\circ \quad (6-48)$$

и

$$\phi_1 = \omega T = 130,55^\circ = 2,278 \text{ рад}$$

$$|p_1| = 0,54$$

Подставляя значения φ_1 (в радианах) и $|p_1|$ в выражение (6-45), найдем коэффициент затухания

$$\zeta = 0,26$$

Поскольку α и ζ известны, по номограмме (см. рис. 6.12) определяем максимальное перерегулирование. В данном случае интерполяция дает значение, близкое к 50 %. Этот результат очень хорошо согласуется с графиком переходной функции, показанным на рис. 6.7, на котором максимальное перерегулирование чуть больше 50 %.

Теперь рассмотрим, что будет при $T = 0,01$ с. Передаточная функция замкнутой системы (6-13) имеет вид

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{165(z+1)}{83644z^2 - 160783z + 77469} \quad (6-49)$$

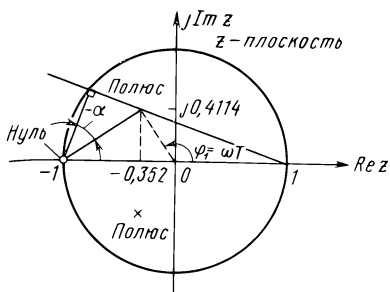


Рис. 6.14. Положение нуля и полюсов передаточной функции (6-47) при $T = 0,225$ с

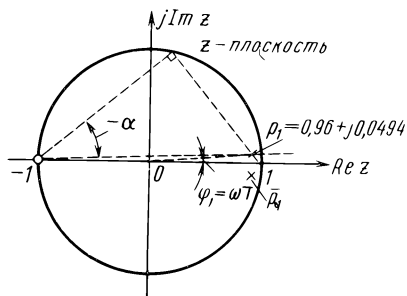


Рис. 6.15. Положение нуля и полюсов передаточной функции (6-47) при $T = 0,01$ с

Эта функция имеет нуль $z = -1$ и два полюса $z = p_1 = 0,96 + j0,0494$ и $z = \bar{p}_1 = 0,96 - j0,0494$. Их положение показано на рис. 6.15, откуда имеем:

$$a = -37,56^\circ$$

и

$$\phi_1 = 2,95^\circ = 0,0514 \text{ рад}$$

$$|p_1| = 0,9613$$

Воспользовавшись соотношением (6-45), найдем коэффициент затухания замкнутой цифровой системы управления

$$\zeta = 0,609$$

Максимальное перерегулирование, найденное с помощью рис. 6.12, составляет примерно 10 %, что очень хорошо согласуется с точным значением, определяемым по переходной функции для $T = 0,01$ с, представленная на рис. 6.7.

Время максимума для двух рассмотренных выше случаев можно вычислить непосредственно по формуле (6-46) или найти с помощью рис. 6.13. Для $T = 0,225$ с. по формуле (6-46) имеем

$$T_{\max} = \frac{0,225}{130,66^\circ} \left\{ \arctg \frac{-0,26}{\sqrt{1 - 0,26^2}} + 40,66^\circ + 180^\circ \right\} = 0,354 \text{ с} \quad (6-50)$$

для $T = 0,01$ с

$$T_{\max} = \frac{0,01}{2,95^\circ} \left\{ \arctg \frac{-0,609}{\sqrt{1 - 0,609^2}} + 37,56^\circ + 180^\circ \right\} = 0,61 \text{ с} \quad (6-51)$$

Те же результаты можно было бы получить, воспользовавшись номограммой, приведенной на рис. 6.13. Они также очень хорошо согласуются с переходными функциями, показанными на рис. 6.7.

6.5. КОРНЕВЫЕ ГОДОГРАФЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Метод корневого годографа на s -плоскости утвердился как полезный инструмент анализа и синтеза непрерывных систем управления. Корневой годограф непрерывной системы управления, по существу, является диаграммой траекторий корней характеристического уравнения как функ-

цией некоторого параметра K , который изменяется от $-\infty$ до ∞ . Корневой годограф дает возможность судить об абсолютной и относительной устойчивости системы управления в зависимости от этого параметра.

Поскольку характеристическое уравнение линейной стационарной цифровой системы управления является рациональным полиномом относительно z , то те же правила, которые были предложены для построения корневых годографов на s -плоскости, могут быть применены и на z -плоскости. В принципе корневой годограф цифровой системы управления можно построить на s -плоскости, воспользовавшись характеристическим уравнением, полученным из полинома в знаменателе передаточной функции замкнутой системы $C^*(s)/R^*(s)$, однако он будет содержать бесконечное число ветвей. Чтобы проиллюстрировать трудности анализа цифровых систем на s -плоскости, рассмотрим импульсную передаточную функцию замкнутой цифровой системы управления, заданную в виде

$$\frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + G^*(s)} \quad (6-52)$$

где $G^*(s)$ — дискретная функция от

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (6-53)$$

Итак,

$$G^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) = \frac{K}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s + jn\omega_s)(s + jn\omega_s + 1)} \quad (6-54)$$

Известно [1], что траектории корней уравнения $1 + G^*(s) = 0$ могут быть построены на основе информации о полюсах и нулях передаточной функции разомкнутой системы $G^*(s)$. В данном случае функция $G^*(s)$ имеет бесконечное число полюсов, как показано на рис. 6.16, *а*. Следовательно, корневой годограф уравнения $1 + G^*(s) = 0$ содержит бесконечное число ветвей, как показано на рис. 6.16, *б*. Ясно, что для цифровых систем управления с более сложными передаточными функциями построение корневых годографов на s -плоскости будет более трудоемким.

Использование z -преобразования отображает бесконечное число полюсов и нулей, а значит, и траекторий корней на s -плоскости в конечное их число на z -плоскости. Для системы, описываемой уравнением (6-52), z -преобразование дает

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \quad (6-55)$$

а корни характеристического уравнения находят путем решения

$$1 + G(z) = 0 \quad (6-56)$$

где в соответствии с $G(s)$ вида (6-53)

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = \frac{K(1 - e^{-T})z}{(z - 1)(z - e^{-T})} \quad (6-57)$$

Теперь траектории корней характеристического уравнения

$$(z - 1)(z - e^{-T}) + K(1 - e^{-T})z = 0 \quad (6-58)$$

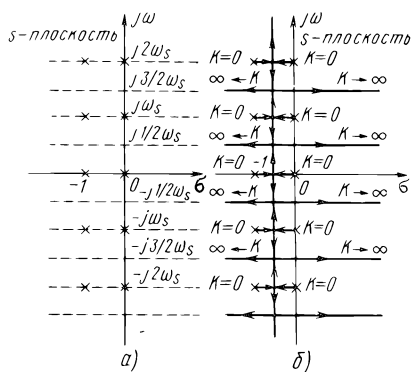


Рис. 6.16. Расположение полюсов $G^*(s)$ и корневой годограф на s -плоскости для цифровой системы управления, описываемой уравнениями (6-52) – (6-54): а – полюсы $G^*(s)$; б – корневой годограф

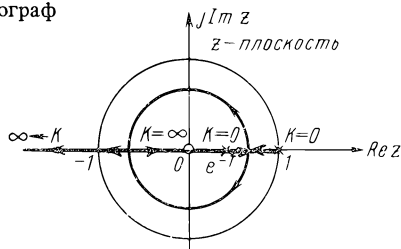


Рис. 6.17. Траектории корней характеристического уравнения (6-58) при изменении K от 0 до ∞

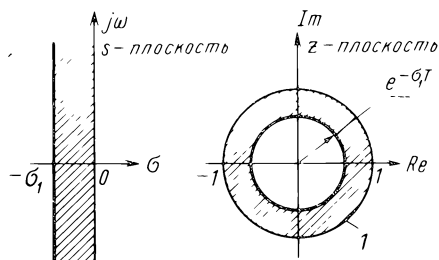
при изменении K от 0 до ∞ выглядят с учетом расположения нулей и полюсов $G(z)$ так, как показано на рис. 6.17. Поскольку уравнение (6-58) имеет второй порядок, то корневой годограф на рис. 6.17 состоит только из двух ветвей.

Предполагая, что читатель знаком с техникой построения корневого годографа, которая рассматривается в учебниках по системам управления [1], здесь мы сконцентрируем внимание на разъяснение значимости корневого годографа на z -плоскости для анализа качества системы.

Если на z -плоскости построен корневой годограф цифровой системы управления, то по траекториям корней можно судить как об абсолютной, так и об относительной устойчивости системы. Условие абсолютной устойчивости требует, чтобы при данной совокупности параметров системы все корни характеристического уравнения лежали на z -плоскости внутри единичной окружности. В то же время расположение корней указывает и на относительную устойчивость. В связи с этим нас интересуют следующие вопросы: Если система устойчива, то насколько она устойчива и как хороша? Удовлетворяет ли качество переходного процесса системы требованиям проектировщика? В частности, мы желаем иметь информацию о некоторых показателях качества таких, как максимальное перерегулирование и время максимума переходной функции, которые тесно связаны с коэффициентом затухания, фактором затухания и собственной частотой колебаний. Таким образом, проблема анализа относительной устойчивости на z -плоскости, по сути дела, сводится к исследованию положения корней характеристического уравнения относительно кривых постоянного фактора затухания, постоянного коэффициента затухания и постоянной частоты. Эти кривые были рассмотрены в п. 3.3. Кривые

Рис. 6.18. Линии постоянного фактора затухания на s - и z -плоскостях:

1 – единичная окружность



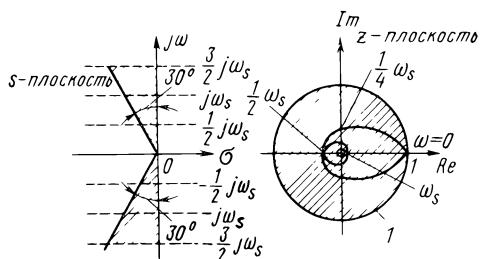


Рис. 6.19. Линии постоянного коэффициента затухания на s - и z -плоскостях для $\zeta = 0,5$:
1 — единичная окружность

координат; радиус окружности, соответствующей фактору затухания σ_1 , равен $e^{-\sigma_1 T}$. Одна из таких кривых и соответствующая ей линия на s -плоскости изображены на рис. 6.18. Если при синтезе требуется, чтобы система имела наименьший фактор затухания σ_1 или наибольшую постоянную времени $1/\sigma_1$, то все корни характеристического уравнения системы должны лежать слева от линии $s = -\sigma_1$ на s -плоскости и соответственно внутри окружности $|z| = e^{-\sigma_1 T}$ ($\sigma_1 > 0$) на z -плоскости, как показано на рис. 6.18.

Линии постоянной частоты являются прямыми, исходящими из начала координат z -плоскости под углами $\theta = \omega T$ рад относительно положительного направления действительной оси.

Кривые постоянного коэффициента затухания на z -плоскости представляют собой семейство логарифмических спиралей, за исключением случаев $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$. Типичные линии постоянного значения ζ для $\zeta = 0,5$ на s - и z -плоскостях изображены на рис. 6.19. Если при синтезе должен быть обеспечен определенный максимальный коэффициент затухания, то все корни характеристического уравнения должны лежать левее линии постоянного значения ζ на s -плоскости или внутри соответствующей логарифмической спирали на z -плоскости.

Поскольку большинство систем управления обладают характеристиками типа фильтра нижних частот, то на практике достаточно использовать только основную полосу s -плоскости. Тем самым предполагается, что удовлетворяются условия импульсной теоремы, т.е. высшая частотная составляющая в системе меньше чем $2\omega_s$. Для этого случая на рис. 6.20 изображены линии постоянного коэффициента затухания для различных зна-

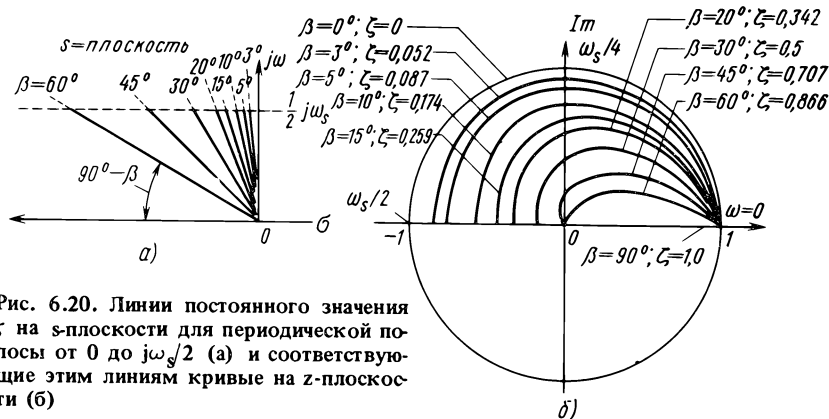


Рис. 6.20. Линии постоянного значения ζ на s -плоскости для периодической полосы от 0 до $j\omega_s/2$ (а) и соответствующие этим линиям кривые на z -плоскости (б)

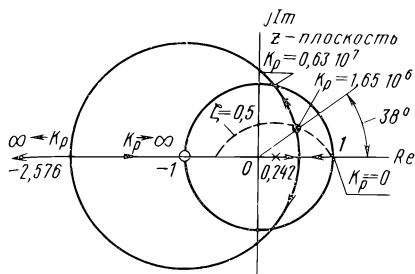


Рис. 6.21. Корневой годограф цифровой системы, изображенной на рис. 6.5

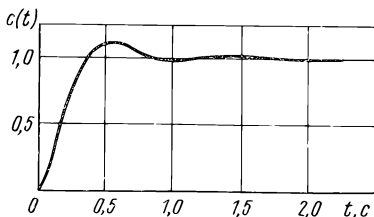


Рис. 6.22. Переходная функция системы, изображенной на рис. 6.5

чений ζ для положительной половины основной полосы на z -плоскости и соответствующие кривые на z -плоскости. Линии постоянного значения ζ для $-\omega_s/2 \leq \omega \leq 0$ являются зеркальным отображением кривых на рис. 6.20 относительно действительной оси.

Относительная устойчивость цифровой системы управления не может быть исследована на z -плоскости простым наложением на корневой годограф линий постоянных значений ζ , σ и ω_n .

Пример 6.2. Рассмотрим систему управления космическим кораблем, изображенную на рис. 6.5. Передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем соответственно заданы выражениями (6-10) и (6-11). Пусть $T = 0,1$ с, $K_r = 3,17 \cdot 10^5$, $J_v = 41822$ и K_p — варьируемый параметр. Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$G(z) = \frac{1,2 \times 10^{-7} K_p (z + 1)}{(z - 1)(z - 0,242)} \quad (6-59)$$

а характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$z^2 + (1,2 \times 10^{-7} K_p - 1,242)z + 0,242 + 1,2 \times 10^{-7} K_p = 0 \quad (6-60)$$

На рис. 6.21 на основании расположения полюсов и нулей $G(z)$ построен корневой годограф системы при изменении K_p от 0 до ∞ . По корневому годографу на z -плоскости находим, что когда траектории корней пересекают единичную окружность, значение $K_p = 6,32 \cdot 10^6$. Это значение является критическим с точки зрения устойчивости. Если в системе желательно иметь относительный коэффициент затухания 0,5, то на рис. 6.21 наносим кривую постоянного значения $\zeta = 0,5$. Пересечение этой кривой с корневым годографом дает желаемое положение корней и соответствующее значение K_p , которое равно $1,65 \cdot 10^6$. Частота ω , соответствующая $K_p = 1,65 \cdot 10^6$, определяется по линии постоянной частоты, расположенной под углом 38° , как показано на рис. 6.21. Таким образом,

$$\omega T = \theta = 38^\circ = 0,66 \text{ рад.}$$

Собственная частота колебаний (при $T = 0,1$ с) определяется как

$$\omega_n = \omega / \sqrt{1 - \zeta^2} = 0,66 / \sqrt{1 - (0,5)^2} = 7,62 \text{ рад/с.} \quad (6-61)$$

Используя значения ζ , ω и расположение нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы, по рис. 6.12 и 6.13 соответственно можно найти максимальное перерегулирование и время максимума переходной функции. Или, используя ЭВМ, можно рассчитать и построить график переходной функции системы для $K_p = 1,65 \cdot 10^6$ (рис. 6.22).

6.6. АНАЛИЗ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ОШИБКИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В п. 6.2 было введено понятие установившейся ошибки цифровой системы управления и исследовано ее поведение. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Сигнал ошибки системы управления можно определить различными способами. Обычно это сигнал, который необходимо как можно быстрее свести к нулю; он не всегда определяется как разность между эталонным входным сигналом и выходной переменной.

Для анализа установившейся ошибки цифровых систем управления можно воспользоваться структурной схемой, представленной на рис. 6.23. В данном случае сигнал $e(t)$ определяется как ошибка, т.е.

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (6-62)$$

Поскольку в цифровой системе трудно описать $e(t)$, то обычно используется дискретный сигнал $e^*(t)$. Установившаяся ошибка в моменты замыкания определяется как

$$e_{уст}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT). \quad (6-63)$$

Воспользовавшись z -преобразованием и теоремой о конечном значении, приходим к выражению

$$e_{уст}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) \quad (6-64)$$

при условии, что функция $(1 - z^{-1})E(z)$ не имеет полюсов на единичной окружности $|z| = 1$ или вне ее.

Установившуюся ошибку между моментами замыкания можно найти с помощью модифицированного z -преобразования и записать

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ 0 \leq m \leq 1}} e(kT, m) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ 0 \leq m \leq 1}} (1 - z^{-1})E(z, m) \quad (6-65)$$

где $E(z, m)$ — модифицированное z -преобразование $e(t)$.

Из теории линейных непрерывных систем управления известно, что установившаяся ошибка зависит от вида приложенного к системе входного эталонного воздействия, а также от параметров системы. Эти свойства характеризуются *коэффициентами ошибки* [1] которые можно использовать также в цифровых системах управления.

Для системы, изображенной на рис. 6.23, z -преобразование сигнала ошибки в виде

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + GH(z)} \quad (6-66)$$

Подставляя последнее выражение в (6-64), получим

$$e_{уст}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + GH(z)}. \quad (6-67)$$

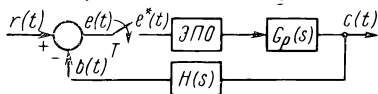


Рис. 6.23. Цифровая система управления

Это выражение показывает, что установившаяся ошибка зависит как от входного эталонного сигнала $R(z)$, так и от передаточной функции разомкнутого контура $GH(z)$. Рассмотрим три основных вида входных сигналов: ступенчатую функцию, линейную функцию и параболическую функцию.

Установившаяся ошибка при ступенчатой входной функции. Пусть входной сигнал системы, показанной на рис. 6.23, является ступенчатой функцией величиной R . z -преобразование $r(t)$ равно

$$R(z) = \frac{Rz}{z - 1} \quad (6-68)$$

Подставляя (6-68) в (6-67), получим

$$e_{уст}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R}{1 + GH(z)} = \frac{R}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)}, \quad (6-69)$$

где

$$GH(z) = (1 - z^{-1})^2 \left[\frac{G_p(s)H(s)}{s} \right] \quad (6-70)$$

Определим коэффициент ошибки по положению как

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) \quad (6-71)$$

Тогда (6-69) примет вид

$$e_{уст}^* = \frac{R}{1 + K_p}. \quad (6-72)$$

Таким образом, чтобы установившаяся ошибка при ступенчатой входной функции равнялась нулю, коэффициент ошибки по положению K_p должен быть бесконечным. Это означает, что передаточная функция $GH(z)$ должна иметь, по крайней мере, один полюс $z = 1$. Следует подчеркнуть, что коэффициент ошибки по положению K_p имеет смысл только при ступенчатой входной функции.

Установившаяся ошибка при линейной входной функции. Для линейной входной функции $r(t) = Rtu_s(t)$ z -преобразование имеет вид

$$R(z) = \frac{RTz}{(z - 1)^2} \quad (6-73)$$

Подставляя (6-73) в (6-67), получим

$$e_{уст}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{RT}{(z - 1)[1 + GH(z)]} = \frac{R}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)}{T} GH(z)}. \quad (6-74)$$

Определим коэффициент ошибки по скорости как

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1)GH(z)] \quad (6-75)$$

тогда (6-74) примет вид

$$e_{уст}^* = \frac{R}{K_v} \quad (6-76)$$

Коэффициент ошибки по скорости K_v имеет смысл только тогда, когда входной сигнал системы представляет собой линейную функцию. Выражение (6-76) действительно только в том случае, если функция, входящая под знак предела в (6-67), не имеет полюсов на единичной окружности $|z| = 1$ или вне ее. Это означает, что замкнутая цифровая система управления должна быть, по крайней мере, асимптотически устойчивой.

Выражение (6-76) показывает следующее: чтобы при линейной входной функции $e_{уст}^*$ равнялась нулю, K_v должен быть равен бесконечности. Как следует из (6-75), это эквивалентно требованию, чтобы $(z - 1)GH(z)$ имело, по крайней мере, один полюс $z = 1$ или $GH(z)$ — два таких полюса.

Установившаяся ошибка при параболической входной функции. Для параболической входной функции $r(t) = Rt^2 u_s(t)/2$ z -преобразование имеет вид

$$R(z) = \frac{RT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \quad (6-77)$$

В соответствии с (6-67) установившаяся ошибка в моменты замыкания определяется как

$$e_{уст}^* = \frac{T^2}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R(z+1)}{(z-1)^2 [1 + GH(z)]}, \quad (6-78)$$

или

$$e_{уст}^* = \frac{R}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{T^2} GH(z)} \quad (6-79)$$

Определим коэффициент ошибки по ускорению как

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 GH(z)] \quad (6-80)$$

Тогда (6-79) примет вид

$$e_{уст}^* = \frac{R}{K_a} \quad (6-81)$$

Аналогично предыдущим случаям коэффициент ошибки по ускорению имеет отношение только к параболической входной функции, а при любых других типах входных сигналов его использовать нельзя.

Приведенный выше анализ показывает, что если эталонный входной сигнал цифровой системы управления является функцией ступенчатого, линейного или параболического типа, то установившаяся ошибка в моменты замыкания зависит соответственно от коэффициентов ошибки по положению, скорости и ускорению:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) \quad (6-82)$$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z) \quad (6-83)$$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z) \quad (6-84)$$

При необходимости аналогичным образом можно распространить понятие коэффициентов ошибки применительно к выходным функциям более высокого порядка.

О влиянии квантования на установившуюся ошибку. Выше мы показали, что квантование обычно отрицательно влияет на переходную функцию и относительную устойчивость системы управления. А как оно влияет на установившуюся ошибку замкнутой системы? Иными словами, если мы имеем непрерывную систему, а затем вводим в нее устройство выборки и хранения, получая тем самым цифровую систему, то каковы будут установившиеся ошибки этих систем при одном и том же типе входного сигнала?

Рассмотрим сначала систему, изображенную на рис. 6.23, считая, что устройство выборки и хранения в ней отсутствует. Для такой непрерывной системы коэффициенты ошибки по положению, скорости и ускорению, соответственно, определяем следующим образом:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_p(s)H(s) \quad (6-85)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_p(s)H(s) \quad (6-86)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G_p(s)H(s) \quad (6-87)$$

В теории управления принято классифицировать непрерывные системы в зависимости от порядка полюса $s = 0$ у передаточной функции разомкнутого контура. Если

$$G_p(s)H(s) = \frac{K(1 + T_a s)(1 + T_b s) \dots (1 + T_m s)}{s^j(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)} \quad (6-88)$$

где через T обозначены ненулевые действительные или комплексные константы, то систему относят в тип j . Так, на основании выражений (6-85), (6-86) и (6-87) можно легко прийти к выводу, что, например, система типа 0 будет давать постоянную установившуюся ошибку при ступенчатой входной функции и бесконечную ошибку при входных сигналах более высокого порядка. Система типа 1 ($j = 1$) будет давать нулевую установившуюся ошибку при ступенчатом входном сигнале, постоянную ошибку при линейном входном сигнале и бесконечную ошибку при любом воздействии более высокого порядка, и т.д. В табл. 6.1 приведены значения коэффициентов ошибки для разных типов непрерывных систем управления.

Таблица 6.1

Тип системы	K_p	K_v	K_a
0	K	0	0
1	∞	K	0
2	∞	∞	K

На основании выражений (6-83) и (6-84) можно было бы сделать вывод, что для цифровых систем управления коэффициенты ошибки K_v и K_a зависят от периода квантования T . Поскольку любая цифровая система предполагает наличие непрерывного управляемого процесса, то можно рассматривать передаточную функцию $G_p(s)H(s)$ вида (6-88). Проведем анализ для случаев $j = 0, 1, 2$.

Система типа 0. Для системы типа 0, когда $j = 0$, выражение (6-88) имеет вид

$$G_p(s)H(s) = \frac{K(1 + T_a s)(1 + T_b s) \dots (1 + T_m s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)} \quad (6-89)$$

причем предполагается, что у этой функции полюсов больше, чем нулей.

Подстановка последнего выражения в (6-70) дает

$$GH(z) = (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left\{ \frac{K(1 + T_a s)(1 + T_b s) \dots (1 + T_m s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)} \right\} \quad (6-90)$$

Раскладывая выражение в фигурных скобках на сумму простых дробей, получим

$$\begin{aligned} GH(z) &= (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left[\frac{K}{s} + \text{члены с ненулевыми полюсами} \right] = \\ &= (1 - z^{-1}) \left[\frac{Kz}{z - 1} + \text{члены, обусловленные} \right. \\ &\quad \left. \text{ненулевыми полюсами} \right]. \end{aligned} \quad (6-91)$$

Важно заметить, что слагаемые, обусловленные ненулевыми полюсами, не содержат в знаменателе член $(z - 1)$. Тогда коэффициент ошибки по положению

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{Kz}{z - 1} = K \quad (6-92)$$

Этот результат показывает, что в случае процесса типа 0 коэффициент ошибки по положению для замкнутой системы с квантователем и фиксатором имеет такое же выражение, как и для непрерывной системы. Следовательно, квантователь и фиксатор не оказывают влияния на установившийся режим систем данного типа.

Подставляя (6-91) в (6-83), получим коэффициент ошибки по скорости

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)GH(z) = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)(1 - z^{-1}) \frac{Kz}{z - 1} = 0 \quad (6-93)$$

Аналогичным образом $K_a = 0$ для систем типа 0.

Система типа 1. Для системы типа 1, когда $j = 1$, выражение (6-70) принимает вид

$$\begin{aligned} GH(z) &= (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left[\frac{K(1 + T_a s)(1 + T_b s) \dots (1 + T_m s)}{s^2(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (1 + T_n s)} \right] = \\ &= (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left[\frac{K}{s^2} + \frac{K_1}{s} + \text{члены с ненулевыми полюсами} \right]. \end{aligned} \quad (6-94)$$

Тогда коэффициент ошибки по положению

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \left[\frac{KTz}{(z - 1)^2} + \frac{K_1 z}{z - 1} + \text{члены, обусловленные ненулевыми полюсами} \right] = \infty \quad (6-95)$$

Коэффициент ошибки по скорости

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)GH(z) = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)(1 - z^{-1}) \left\{ \frac{KTz}{(z - 1)^2} + \frac{K_1 z}{z - 1} \right\} = K \quad (6-96)$$

Нетрудно показать, что $K_a = 0$.

Таким образом, при одной и той же передаточной функции управляемого процесса система типа 1, содержащая квантователь и фиксатор, дает такую же установившуюся ошибку, как и непрерывная система.

Аналогично можно показать, что в случае процесса типа 2 цифровая система управления будет иметь $K_p = \infty$, $K_v = \infty$ и $K_a = K$. Таким образом, значениями коэффициентов ошибки, приведенными в табл. 6.1, можно воспользоваться и для цифровых систем управления со структурой, показанной на рис. 6.23. При раскрытии выражений (6-83) и (6-84) происходит сокращение величины T , поэтому установившаяся ошибка цифровой системы управления не зависит от периода квантования, а определяется исключительно параметрами непрерывной части системы и видом входного воздействия.

Подчеркнем еще раз, что если система спроектирована в целях обработки линейно-меняющегося сигнала, то ее реакция на ступенчатое воздействие перестает быть аperiodической.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, 3rd ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.
2. Kuo, B. C., *Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.
3. Tou J. T. *Digital and Sampled-Data Control Systems*. McGraw-Hill, New York, 1959. [Опубликован перевод: Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. М.: Машиностроение, 1964].
4. Jury, E. I., *Theory and Applications of the z-Transform Method*. John Wiley & Sons, New York, 1964.
5. Ragazzini, J. R., and Franklin, G. F., *Sampled-Data Control Systems*. McGraw-Hill, New York, 1958.
6. Jury E. I. *Sampled-Data Control Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1958. [Опубликован перевод: Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1963].
7. Lindorff, D. P., *Theory of Sampled-Data Control Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1965.
8. Freeman, H., *Discrete-Time Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1965.
9. Monroe, A. J., *Digital Processes For Sampled-Data Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1962.

10. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем. М.: Физматгиз, 1958.
11. Phillips, C. L., "A Note on the Frequency-Response Design Technique for Multirate Digital Controllers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-15, April 1970, pp. 263-264.
12. Phillips, C. L., and Johnson, J. C., "Design of Multirate Controllers," *Proc. Houston Conference on Circuits, Systems, and Computers*, May 1969, pp. 301-309.
13. Pokoski, J. L., and Pierre, D. A., "Deadbeat Response to Parabolic Inputs With Minimum-Squared Error Restrictions on Ramp and Step Responses," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-14, April 1969, pp. 199-200.
14. Pierre, D. A., Lorchirachoonkul, V., and Roos, M. E., "A Performance Limit for a Class of Linear Sampled-Data Control Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, February 1967, pp. 112-113.
15. Light, W. R., and McVey, E. S., "Analysis of Digital Predictive Compensation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-15, October 1970, pp. 604-606.
16. Pracht, C. P., and McVey, E. S., "Near Ideal Digital Predictive Compensation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-15, August 1970, pp. 471-474.

ГЛАВА 7. АНАЛИЗ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

7.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 6 временная характеристика цифровых систем управления оценивалась по расположению нулей и полюсов передаточной функции на z -плоскости. Прямой метод анализа системы во временной области заключается в вычислении ее реакции аналитически или с помощью ЭВМ. Что касается прямого метода синтеза цифровых систем во временной области, то он имеет существенные недостатки. Для примера можно указать на то, что зависимость максимального перерегулирования и времени максимума переходной функции от расположения нулей и полюсов легко устанавливается лишь для систем второго порядка.

В частотной области мы располагаем изобилием графических и графо-аналитических методов анализа и синтеза, применимых к линейным стационарным системам управления практически любой сложности. Все эти методы, в совершенстве разработанные для непрерывных систем, могут быть распространены и на цифровые системы управления. Такие известные методы, как критерий устойчивости Найквиста, диаграмма Никольса и логарифмические частотные характеристики, можно использовать для анализа и синтеза цифровых систем управления без каких-либо изменений.

Сущность частотного метода заключается в том, что о качестве линейной стационарной системы судят по ее установившейся реакции на гармонические сигналы. Используя частотные характеристики, мы можем предсказать или построить временные характеристики системы. Например, параметр полосы пропускания непосредственно указывает, сколь "быстрым" и колебательным будет переходный процесс. Поэтому очень часто вместо задания максимального перерегулирования проектировщик указывает, какой должна быть желаемая полоса пропускания системы.

Известно, что переход от преобразования Лапласа к частотным характеристикам производится путем замены $s = j\omega$; аналогично в области переменной z производится подстановка $z = e^{j\omega T}$. Однако цифровые системы управления обладают рядом специфических особенностей, заставляющих при их анализе отдать предпочтение именно частотным методам. Например, реакция линейной непрерывной системы на гармонический входной сигнал имеет ту же самую частоту, и только в нелинейных системах могут появляться гармоники или субгармоники. Напротив, в линейных цифровых системах квантователь независимо от того, является он реальным или фиктивным, действует как генератор гармоник, поэтому реакция системы на синусоидальный сигнал в принципе может содержать высшие гармоники. Отсюда основное неудобство при исследовании цифровых

систем управления в частотной области заключается в том, что эти высокочастотные компоненты затрудняют построение частотных характеристик.

Исследование цифровых систем управления в частотной области, по сути дела, связано с применением всех известных методов, разработанных для анализа непрерывных систем. Хорошо известны следующие методы:

1. *Годограф Найквиста*, который для передаточной функции $G(s)$ [или $G(z)$] является отображением контура Найквиста на s -плоскости (z -плоскости) на плоскость $G(s)$ [или $G(z)$]. Построив годограф Найквиста для разомкнутой системы и исследовав его положение относительно точки $(-1, j0)$, можно сделать вывод об устойчивости замкнутой системы.

2. *Логарифмические частотные характеристики*, которые являются графическим представлением амплитуды в децибелах и фазового угла передаточной функции (обычно это — передаточная функция разомкнутого контура) в зависимости от частоты ω (или десятичного логарифма частоты). Эти характеристики можно использовать для анализа абсолютной и относительной устойчивости замкнутой системы.

3. *Амплитудно-фазовая диаграмма*, которая строится для разомкнутой системы и связывает значения амплитуды в децибелах с фазовым сдвигом в градусах. С ее помощью также можно определить абсолютную и относительную устойчивость замкнутой системы. Если амплитудно-фазовую диаграмму наложить на диаграмму Никольса [1], то можно получить полную информацию о частотных характеристиках замкнутой системы.

7.2. ГОДОГРАФ НАЙКВИСТА

Критерий Найквиста [1] позволяет графически исследовать устойчивость замкнутой системы по частотному годографу передаточной функции разомкнутого контура, построенному в полярных координатах. Непрерывная система, изображенная на рис. 7.1, *а* имеет в замкнутом состоянии передаточную функцию

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (7-1)$$

Устойчивость системы определяется нулями функции $1 + G(s)H(s)$. Контур Найквиста на s -плоскости выглядит так, как показано на рис. 7.2, *а*. Этот контур состоит из четырех участков и охватывает всю правую половину s -плоскости, исключая начало координат и точки на мнимой оси, где расположены полюсы и нули функции $G(s)H(s)$. Для анализа устойчивости

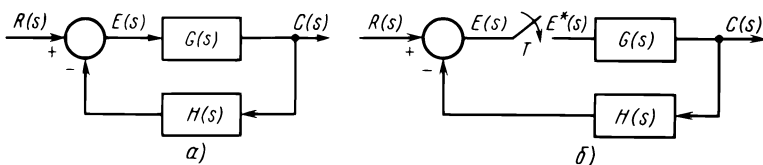


Рис. 7.1. Структурные схемы систем управления:
а — непрерывной; б — цифровой

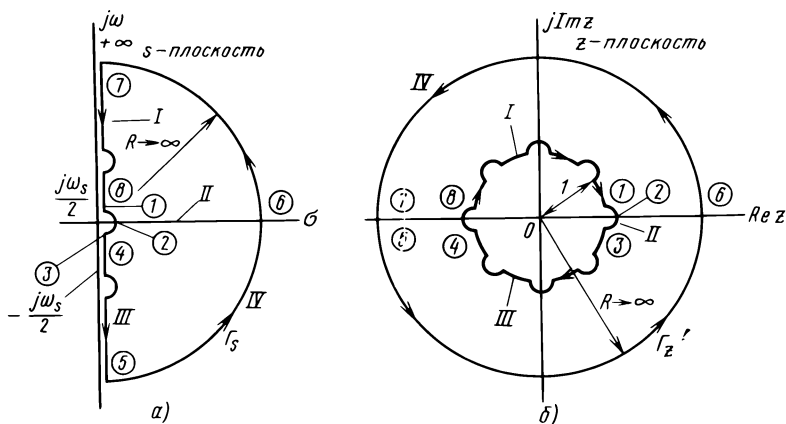


Рис. 7.2. Контуры Найквиста:

а – Γ_s на s -плоскости; б – Γ_z на z -плоскости

замкнутой системы, изображенной на рис. 7.1, а, нужно сначала построить годограф Найквиста для $G(s)H(s)$, который является отображением контура Найквиста Γ_s в s -плоскости на плоскость $G(s)H(s)$, а затем пронаблюдать его поведение относительно точки $(-1, j0)$.

Цифровая система управления, изображенная на рис. 7.1, б, имеет в замкнутом состоянии импульсную передаточную функцию

$$\frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + GH^*(s)} \quad (7-2)$$

Устойчивость замкнутой системы можно определить по годографу Найквиста для $GH^*(s)$. Так как $GH^*(s)$ имеет вид

$$GH^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)H(s + jn\omega_s) \quad (7-3)$$

то построение годографа фактически зависит от свойств произведения $G(s)H(s)$. Можно поступить иначе, записав передаточную функцию (7-2) в z -форме:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad (7-4)$$

и построив годограф Найквиста для $GH(z)$, если использовать контур Найквиста Γ_z на z -плоскости. Контур Γ_z можно получить отображением контура Γ_s на z -плоскость с помощью выражения $z = e^{Ts}$. На рис. 7.2, б показан контур Найквиста Γ_z на z -плоскости; малые полуокружности при $z = 1$ и в других точках контура соответствуют возможным аналогичным полуокружностям на контуре Найквиста в s -плоскости. Большая окружность бесконечного радиуса на z -плоскости соответствует большой полуокружности (участок IV) на s -плоскости. Контур Найквиста на z -плоскости не является непрерывным, ибо, когда при движении по контуру в s -плоскости точка достигает положения 5, соответствующая ей точка на z -плоскости перескакивает с единичной окружности на окружность беско-

нечного радиуса, а в положении 7 происходит обратный скачок. Точное место, где происходит такой скачок, указать невозможно. Однако областью, охватываемой контуром Найквиста Γ_z , является все пространство между двумя окружностями. Для передаточных функций $GH(z)$, которые не имеют полюсов и нулей вне единичной окружности на z -плоскости, достаточно использовать только участок I контура Γ_z , соответствующий участку Γ_s от $s = 0$ до $s = j\infty$.

Теперь приведем формулировку критерия Найквиста для цифровых систем управления и опишем процедуру его применения.

1. На z -плоскости определяется контур Найквиста, как показано на рис. 7.2, б.

2. Годограф Найквиста для $GH^*(s)$ или $GH(z)$ строится в полярных координатах при изменении переменной z вдоль контура Γ_z или переменной s вдоль контура Γ_s .

3. Критерий Найквиста указывает на то, что для устойчивости замкнутой цифровой системы годограф Найквиста $GH(z)$ [или $GH^*(s)$] должен охватывать точку $(-1, j0)$ на плоскости $GH(z)$ [или $GH^*(s)$] столько раз, сколько полюсов $GH(z)$ [или $GH^*(s)$] находится внутри контура Найквиста Γ_z (или Γ_s), причем эти охваты должны совершаться по часовой стрелке.

Иными словами,

$$N = Z - P \quad (7-5)$$

где N — число охватов точки $(-1, j0)$ годографом Найквиста $GH(z)$, причем N берется со знаком плюс при охвате точки $(-1, j0)$ против часовой стрелки и со знаком минус при охвате по часовой стрелке; Z — число нулей функции $1 + GH(z)$, расположенных на z -плоскости вне единичной окружности (или "охватываемых" контуром Найквиста при движении по нему против часовой стрелки); P — число полюсов функции $1 + GH(z)$, расположенных на z -плоскости вне единичной окружности, т.е. охватываемых контуром Найквиста. [Заметим, что полюсы $1 + GH(z)$ совпадают с полюсами $GH(z)$].

Чтобы замкнутая система была устойчива, должно выполняться тождество $Z \equiv 0$, т.е. все корни характеристического уравнения должны лежать внутри единичной окружности. Тогда условие (7-5) принимает вид

$$N = -P \quad (7-6)$$

Если функция $GH(z)$ не имеет полюсов вне единичной окружности (т.е. $P = 0$), это означает, что разомкнутая система устойчива, и критерий Найквиста принимает простейшую форму

$$N = 0 \quad (7-7)$$

Таким образом, если разомкнутая система устойчива и $Z = 0$, то для того, чтобы замкнутая система также была устойчива, годограф Найквиста $GH(z)$ вообще не должен охватывать точку $(-1, j0)$.

Итак, применение критерия Найквиста к цифровым системам управления, по сути, сводится к исследованию поведения годографа Найквиста $GH(z)$ относительно точки $(-1, j0)$. Следовательно, основной задачей является построение этого годографа.

Если критерий устойчивости имеет вид (7-7), то необходимо построить только участок I ($z = e^{j\omega T}$, $0 \leq \omega \leq \infty$) годографа Найквиста.

Участок I годографа Найквиста $GH(z)$ строится на основании выражения

$$GH^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(j\omega + jn\omega_s)H(j\omega + jn\omega_s) \quad (7-8)$$

где ω изменяется от 0 до ∞ . Другим способом тот же годограф можно построить по выражению $GH(z)$, заменяя $z = e^{j\omega T}$ и варьируя ω от 0 до ∞ .

Выражение (7-8) неудобно для построения годографа Найквиста, так как оно содержит бесконечное число членов. Поэтому ниже рассмотрим несколько практических методов построения годографа Найквиста для $GH(z)$.

1. Метод z -преобразования. При гармоническом анализе непрерывных систем в выражении для передаточной функции производится подстановка $s = j\omega$, т.е. на s -плоскости рассматриваются только точки, расположенные на положительном направлении мнимой оси. Для цифровых систем управления соответствующий анализ в частотной области связан с заменой

$$z = e^{j\omega T} \quad (7-9)$$

т.е. на z -плоскости рассматриваются только точки, расположенные на единичной окружности $|z| = 1$. Так, если задана некоторая передаточная функция $G(z)$, то имеет место тождество

$$G(z) = G^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} \quad (7-10)$$

Тогда

$$G(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = G^*(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (7-11)$$

Программа вычисления $G(z)$ по последнему выражению на языке ФОРТ-РАН-IV приведена в п. 7.7.

Пример. 7.1. Пусть цифровая система управления, изображенная на рис. 7.1, б, имеет в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$G(s)H(s) = \frac{1,57}{s(s+1)} \quad (7-12)$$

а частота квантования $\omega_s = 4$ рад/с, что соответствует периоду квантования $T = \pi/2$ с.

z -преобразование выражения $G(s)H(s)$ имеет вид

$$GH(z) = 1,57 \frac{0,792z}{(z-1)(z-0,208)} \quad (7-13)$$

В соответствии с (7-11) частотный годограф $GH(z)$ описывается выражением

$$\begin{aligned} GH(e^{j\omega T}) &= \frac{1,243e^{j\omega T}}{(e^{j\omega T}-1)(e^{j\omega T}-0,208)} = \\ &= \frac{1,243(\cos \omega T + j \sin \omega T)}{(\cos \omega T + j \sin \omega T - 1)(\cos \omega T + j \sin \omega T - 0,208)} \end{aligned} \quad (7-14)$$

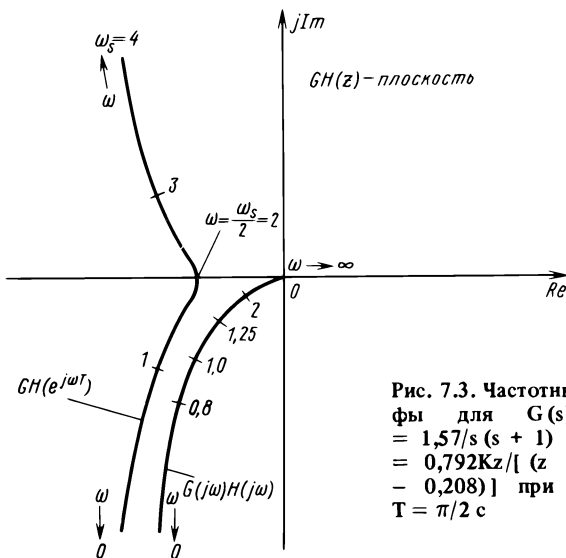


Рис. 7.3. Частотные годографы для $G(s)H(s) = 1,57/s(s+1)$ и $GH(z) = 0,792Kz/[z(z-0,208)]$ при $K = 1,57$, $T = \pi/2$ с

Поскольку полному обходу по единичной окружности соответствует $-n\omega_s/2 \leq \omega \leq n\omega_s/2$, где $n = 1, 2, \dots$, то в указанных интервалах частот годограф $GH(z)$ имеет один и тот же вид. На рис. 7.3 изображен годограф $GH(z)$ при изменении z вдоль единичной окружности. На годографе отмечены только те значения частот, которые соответствуют отрезку оси $j\omega$ на s -плоскости, находящемуся в основной полосе. Влияние квантования на устойчивость замкнутой системы очевидно из годографов Найквиста для $G(s)H(s)$ и $GH(z)$, приведенных на рис. 7.3. Поскольку передаточная функция $G(s)H(s)$ имеет второй порядок, то соответствующий ей частотный годограф не пересекает отрицательное направление действительной оси и непрерывная система управления с такой передаточной функцией всегда будет устойчива в замкнутом состоянии. Для цифровой системы управления годограф $GH(z)$ при $K = 1,57$ пересекает отрицательное направление действительной оси в точке $-0,515$; точка же $(-1, j0)$ находится левее, и годограф $GH(z)$ не охватывает ее. Следовательно, замкнутая цифровая система при $K = 1,57$ и $T = \pi/2$ с является устойчивой. Однако при $K \geq 3,05$ она уже не будет асимптотически устойчивой.

Пример 7.2. Рассмотрим цифровую систему управления, изображенную на рис. 6.5; передаточная функция разомкнутой системы задана выражением (6-59), где $T = 0,1$ с, $K_T = 3,17 \cdot 10^5$, $J_v = 41822$, а K_p – варьируемый параметр. Итак,

$$G(z) = \frac{1,2 \times 10^{-7} K_p (z+1)}{(z-1)(z-0,242)} \quad (7-15)$$

После замены $z = e^{j\omega T}$ в выражении (7-15) вычисляются модуль и фаза функции $G(z)$. На рис. 7.4 изображены годографы Найквиста для $G(z)$ при $K_p = 1,65 \cdot 10^6$; $6,32 \cdot 10^6$ и 10^7 . Когда $K_p = 1,65 \cdot 10^6$, то годограф $G(z)$ при частоте $13,2$ рад/с пересекает отрицательное направление действительной оси в точке $-0,26$. Так как точка $(-1, j0)$ находится левее, то в соответствии с критерием Найквиста замкнутая система асимптотически устойчива. При $K_p = 6,32 \cdot 10^6$ годограф $G(z)$ проходит через точку $(-1, j0)$ и система не является асимптотически устойчивой. Наконец, при $K_p = 10^7$ годограф $G(z)$ охватывает точку $(-1, j0)$ и система неустойчива. Частота, при которой годограф $G(z)$ пересекает отрицательное направление действительной оси, равна значению ω , при котором корневой годограф на z -плоскости пересекает единичную окружность (см. рис. 6.21).

Следует отметить, что при построении годографов (рис. 7.4) рассматриваются только положительные значения ω . Кроме того, каждая кривая соответствует диапа-

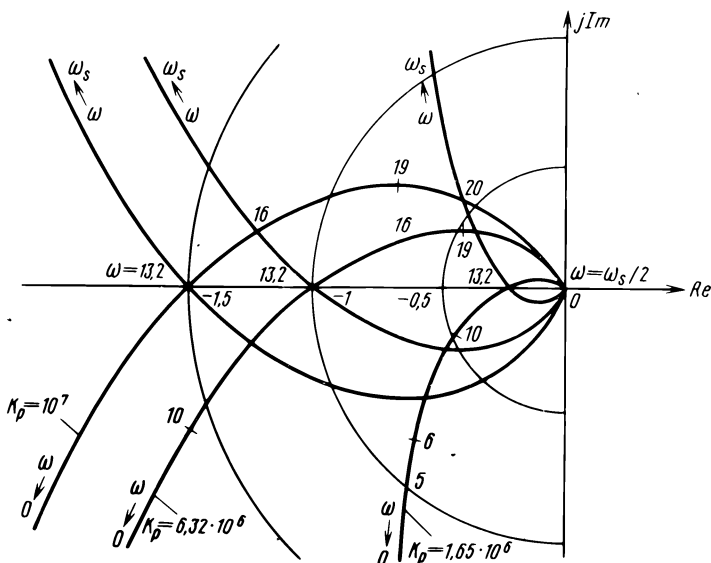


Рис. 7.4. Частотные годографы $G(z)$ для системы, изображенной на рис. 6.5

зону частот $0 \leq \omega \leq \omega_s$, где ω_s – частота квантования. Годограф для $0 \leq \omega \leq \omega_s/2$ является зеркальным отображением относительно действительной оси годографа для $\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s$. Следовательно, годографы повторяются для каждого интервала $n\omega_s \leq \omega \leq (n+1)\omega_s$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Это свойство частотных годографов обусловлено периодичностью полосы z -плоскости и эффектом квантования.

2. Метод бесконечного ряда. Импульсная передаточная функция цифровой системы управления может быть записана в виде

$$GH^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(j\omega + jn\omega_s)H(j\omega + jn\omega_s) \quad (7-16)$$

где в целях анализа в частотной области произведена замена $s = j\omega$. Поскольку большинство систем управления обладают характеристиками типа фильтра нижних частот, то модуль функции $G(j\omega)H(j\omega)$ уменьшается с ростом частоты ω . Поэтому мы можем произвести аппроксимацию бесконечного ряда (7-16) конечным числом членов. При вычислении на ЭВМ можно предусмотреть автоматическое ограничение ряда, когда удовлетворяется принятый критерий ошибки. Иными словами, будем считать

$$GH_N^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N G(j\omega + jn\omega_s)H(j\omega + jn\omega_s) \quad (7-17)$$

где положительное целое N определяется следующим критерием ошибки:

$$|G[j\omega + j(N+1)\omega_s]H[j\omega + j(N+1)\omega_s] + G[j\omega - j(N+1)\omega_s]H[j\omega - j(N+1)\omega_s]| \leq \Delta |GH_N^*(j\omega)|, \quad (7-18)$$

где Δ – наперед заданная малая величина.

Неравенство (7-18) означает, что, если вклад $(N+1)$ -го члена в выражение (7-17) меньше некоторой малой доли (определяемой величиной

Таблица 7.1

N	ω	$ G_{h0}G_N^*(j\omega) $	$\arg G_{h0}G_N^*(j\omega)$, градус
1	0,1571	8,498	— 40,81
1	0,3142	6,120	— 69,96
1	0,4712	4,357	— 90,00
1	0,6283	3,172	—104,7
1	0,7854	2,363	—116,2
1	0,9425	1,794	—125,3
1	1,100	1,384	—132,6
1	1,257	1,081	—138,6
1	1,414	0,8526	—143,2
1	1,571	0,6786	—146,8
3	3,142	0,1301	—125,6
3	4,712	0,1211	—102,9
4	6,283	0,1197	—110,1
4	7,854	0,1118	—121,5
5	9,425	0,1044	—133,5
5	11,00	0,09806	—145,3
5	12,57	0,09357	—157,0
5	14,14	0,09093	—168,5
5	15,71	0,09005	—180,0

Δ) модуля функции для $n = 0, 1, 2, \dots, N$ или равен ей, ряд можно оборвать после $n = N$.

Преимущество данного метода перед методом z -преобразования состоит в том, что отпадает необходимость определения $GH(z)$ по выражению $G(s)H(s)$.

Программа вычислений по формуле (7-17) с использованием критерия ошибки (7-18), записанная на языке ФОРТРАН-IV, приведена в п. 7.7.

В качестве примера данная программа использована для вычисления $G_{h0}G^*(j\omega)$ в соответствии с функцией

$$G_{h0}(s)G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \left[\frac{s^2 + 2s + 10}{s^3 + 5s^2 + 5s + 1} \right] \quad (7-19)$$

В табл. 7.1 приведены результаты вычислений модуля и фазы функции $G_{h0}G^*(j\omega)$ при $T = 0,2$ и $\Delta = 0,01$. В первой графе таблицы указаны значения N , определяющие верхний и нижний пределы суммирования в выражении (7-17) и необходимые для удовлетворения критерия ошибки. Например, если $\omega = 0,1571$ рад/с, то $N = 1$. Это означает, что $G_{h0}G^*(j0,1571)$ аппроксимируется выражением

$$G_{h0} G^*(j0,1571) \cong G_{h0} G_1^*(j0,1571) = G_{h0}(j0,1571)G(j0,1571) + \\ + G_{h0}(j0,1571 + j\omega_s)G(j0,1571 + j\omega_s) + \\ + G_{h0}(j0,1571 - j\omega_s)G(j0,1571 - j\omega_s) \quad (7-20)$$

где $\omega_s = 2\pi/T = 10\pi$ — частота квантования. Ряд обрывается при $N = 1$, так как в соответствии с (7-18)

$$|G_{h0}(j0,1571 + j2\omega_s)G(j0,1571 + j2\omega_s) + \\ + G_{h0}(j0,1571 - j2\omega_s)G(j0,1571 - j2\omega_s)| \leq 0,01 |G_{h0}G_1^*(j0,1571)|. \quad (7-21)$$

Для передаточной функции вида (7-19) N увеличивается с ростом ω . При $\omega = 15,71$ рад/с $N = 5$.

Заметим, что в программе для ЭВМ частота ω наращивается равными долями от $\omega_s/2$ и изменяется до $\omega_s/2$. Это объясняется тем, что частотный годограф $GH^*(j\omega)$ имеет один и тот же вид в диапазонах от $n\omega_s$ до $(n+1)\omega_s$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а его участок от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_s/2$ симметричен участку от $\omega = \omega_s/2$ до $\omega = \omega_s$. Поэтому фаза $GH^*(j\omega)$ при $\omega = n\omega_s/2$ всегда равна целому числу π .

В табл. 7.2 приведены результаты вычислений ряда, аппроксимирующего выражение (7-19), при $T = 0,2$ и $\Delta = 10^{-4}$. Если $\omega = 0,1571$, то N по-прежнему равно единице. Однако при возрастании ω требуется большее число членов, чтобы удовлетворялся критерий ошибки.

3. Метод билинейного преобразования. Для построения частотных характеристик цифровых систем управления можно воспользоваться билинейным преобразованием

$$z = \frac{1 + w}{1 - w} \quad (7-22)$$

Из данного соотношения

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (7-23)$$

При $z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$ выражение (7-23) принимает вид

$$w = j \frac{\sin \omega T}{1 + \cos \omega T} = jtq \left[\frac{\omega T}{2} \right] \quad (7-24)$$

Таким образом, единичная окружность на z -плоскости отображается в мнимую ось комплексной w -плоскости. Область внутри единичной окружности соответствует левой половине w -плоскости, а положительное направление мнимой оси соответствует диапазону частот $n\omega_s \leq \omega \leq (n+1)\omega_s$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Пусть комплексная переменная w имеет вид

$$w = \sigma_w + j\omega_w \quad (7-25)$$

Тогда из (7-24) получаем соотношение

$$\omega_w = tq \left[\frac{\omega T}{2} \right] \quad (7-26)$$

которое устанавливает связь между частотой ω и псевдочастотой ω_w .

N	ω	$ G_{h0} G_N^*(j\omega) $	$\arg G_{h0} G_N^*(j\omega)$, градус
1	0,1571	8,498	— 40,81
2	0,3142	6,120	— 69,96
2	0,4712	4,357	-- 90,00
2	0,6283	3,172	—104,7
3	0,7854	2,364	—116,2
4	0,9425	1,795	—125,3
5	1,100	1,384	—132,6
5	1,257	1,081	—138,5
6	1,414	0,8536	—143,2
7	1,571	0,6797	—146,7
22	3,142	0,1315	—125,4
28	4,712	0,1233	—103,2
32	6,283	0,1219	—110,4
36	7,854	0,1145	—121,8
40	9,425	0,1070	—133,7
43	11,00	0,1009	—145,5
45	12,57	0,09665	—157,1
47	14,14	0,09415	—168,6
47	15,71	0,09333	—180,0

Таким образом, для анализа в частотной области мы можем в передаточной функции заменить переменную z выражением

$$z = \frac{1 + j\omega_w}{1 - j\omega_w} \quad (7-27)$$

и изменять ω_w от нуля до бесконечности. Например, передаточная функция (7-15) с учетом выражения (7-27) после упрощения принимает вид

$$G(j\omega_w) = \frac{1,583 \times 10^{-7} K_p (1 - j\omega_w)}{j\omega_w (1 + j1,636\omega_w)} \quad (7-28)$$

Заметим, что обозначение $G(j\omega_w)$ используется в том смысле, что передаточная функция зависит от $j\omega_w$, и вовсе не означает простой замены z на $j\omega_w$. По полученному выражению $G(j\omega_w)$ можно построить кривые зависимости модуля и фазы $G(j\omega_w)$ от псевдочастоты ω_w , изменяя последнюю от нуля до бесконечности.

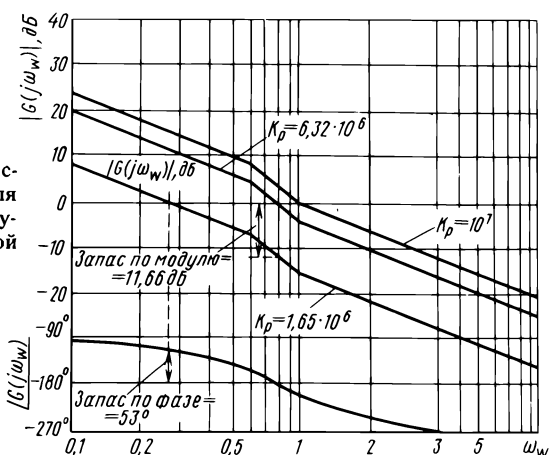
7.3. ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

На первый взгляд, билинейное преобразование не дает никаких преимуществ, если необходимо построить частотный годограф в полярных координатах. Однако с помощью билинейного преобразования передаточная функция приводится к такому виду, что построение логарифмических частотных характеристик практически не встречает затруднений. Например, передаточная функция (7-28) имеет простое выражение, которому соответствуют точки излома амплитудной характеристики $\omega_w = 1$ и $\omega_w = 1/1,636 = 0,611$, и последняя строится достаточно просто [1].

На рис. 7.5 изображены логарифмические частотные характеристики для функции $G(j\omega_w)$, определяемой выражением (7-28), при $K_p = 1,65 \times 10^6$; $6,32 \cdot 10^6$ и 10^7 . Амплитудные характеристики построены с учетом аппроксимации характеристик сомножителей $G(j\omega_w)$ прямолинейными отрезками. Например, амплитудная характеристика члена $(1 - j\omega_w)$, входящего в числитель $G(j\omega_w)$, представляют собой асимптоту с нулевым наклоном при малых значениях ω_w и прямую линию с наклоном $+20$ дБ/дек при больших значениях ω_w . Эти две линии встречаются при $\omega_w = 1,0$. Амплитудная характеристика члена $(1 + j1,636\omega_w)$ в знаменателе $G(j\omega_w)$ представляет собой прямую с нулевым наклоном при малых значениях ω_w и прямую с наклоном -20 дБ/дек при больших значениях ω_w . Эти два отрезка встречаются при частоте $\omega_w = 0,611$. Члену $j\omega_w$ в знаменателе $G(j\omega_w)$ соответствует амплитудная характеристика в виде прямой линии с наклоном -20 дБ/дек, проходящей через точку $\omega_w = 1$ на горизонтальной оси. Сумма этих трех составляющих дает результирующую амплитудную характеристику функции $G(j\omega_w)$. Изменение коэффициента K_p приводит к смещению этой характеристики по вертикали вверх или вниз.

Фазовая характеристика члена $(1 - j\omega_w)$ в числителе $G(j\omega_w)$ изменяется от 0 до -90° в диапазоне $0 \leq \omega_w \leq \infty$, а при $\omega_w = 1$ фазовый сдвиг равен -45° . Аналогично фазовая характеристика члена $(1 + j1,636\omega_w)$ в знаменателе имеет такой же вид, за исключением того, что сдвиг -45° имеет место при $\omega_w = 0,611$. Член $j\omega_w$ в знаменателе дает постоянный фа-

Рис. 7.5. Логарифмические частотные характеристики для функции $G(j\omega_w)$, соответствующей системе, изображенной на рис. 6.5



зовый сдвиг -90° при всех значениях ω_w . Сумма всех этих фазовых характеристик показана на рис. 7.5.

Полезно сравнить эти логарифмические частотные характеристики с частотными годографами в полярных координатах (см. рис. 7.4), построенными для той же самой передаточной функции. Логарифмические характеристики соответствуют диапазону изменения ω_w от 0 до ∞ или при переходе к действительной частоте ω — диапазону от $n\omega_s$ до $(n+1)\omega_s$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Для годографов в полярных координатах частота изменяется от $n\omega_s$ до $(n+1/2)\omega_s$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Участок $G(j\omega)$ от $\omega = (n+1/2)\omega_s$ до $\omega = (n+1)\omega_s$ является зеркальным отображением кривой для $0 \leq \omega \leq (n+1/2)\omega_s$, как показано на рис. 7.4.

7.4. ЗАПАСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ПО МОДУЛЮ И ПО ФАЗЕ

Запас устойчивости по модулю. Для оценки относительной устойчивости систем управления используются такие показатели, как *запас по модулю* и *запас по фазе*. Применительно к цифровым системам управления эти показатели имеют тот же смысл, что и для непрерывных систем. На рис. 7.6 еще раз воспроизведены частотные годографы, ранее построенные на рис. 7.4. Годограф $G(z)$ для $K_p = 1,65 \cdot 10^6$ пересекает отрицательное направление действительной оси в точке $-0,26$. Видно, что, если K_p увеличить до значения $6,32 \cdot 10^6$, т. е. в $1/0,26$ раз, система будет находиться на границе устойчивости. Следовательно, при $K_p = 1,65 \cdot 10^6$ число $1/0,26 = 3,83$ является "коэффициентом безопасности", показывающим, во сколько раз можно увеличивать K_p , сохраняя систему устойчивой. Множитель 3,83 определяется как *запас устойчивости по модулю* в линейном масштабе.

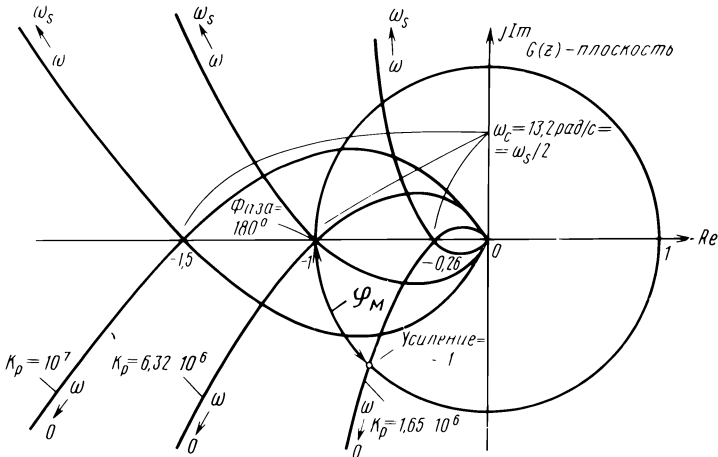


Рис. 7.6. Частотные годографы функции $G(z)$, заданной выражением (7-15)

Обычно запас по модулю выражают в децибелах:

$$20 \lg 3,83 = 11,66 \text{ дБ.} \quad (7-29)$$

Такое представление удобнее, если используются логарифмические частотные характеристики.

На основании данного выше определения запас по модулю (дБ) можно выразить аналитически:

$$\text{Запас по модулю} = 20 \lg \frac{1}{|G(e^{j\omega_c T})|}, \quad (7-30)$$

где $|G(e^{j\omega_c T})|$ – модуль $G(e^{j\omega T})$ при частоте ω_c , соответствующей точке пересечения годографом действительной оси. В этой точке фаза $G(e^{j\omega T})$ равна 180° .

На рис. 7.6 видно, что $G(e^{j\omega_c T}) = -1$ при $K_p = 6,32 \cdot 10^6$. В этом случае запас по модулю $= 20 \lg 1 = 0$,

$$(7-31)$$

замкнутая система находится на границе устойчивости и коэффициент K_p дальше увеличивать нельзя.

При $K_p > 6,32 \cdot 10^6$ $|G(e^{j\omega_c T})| > 1$ запас по модулю в децибелах отрицателен, и система неустойчива. Однако следует соблюдать осторожность, интерпретируя отрицательный запас по модулю как неустойчивость системы. Такой вывод справедлив только для систем, передаточная функция которых в разомкнутом состоянии не имеет полюсов и нулей вне единичной окружности; иначе говоря, вывод относится к системам, для суждения об устойчивости которых достаточно иметь лишь участок I годографа Найквиста.

Запас устойчивости по фазе. Одного запаса по модулю оказывается недостаточно, чтобы судить об относительной устойчивости замкнутой системы. Поскольку коэффициент усиления не является единственным параметром, подверженным изменению, то система может иметь большой запас по модулю и тем не менее быть склонной к неустойчивости в результате изменения параметров, влияющих на фазовый сдвиг. На рис. 7.6 видно, что если годограф для $K_p = 1,65 \cdot 10^6$, сохраняя свою форму, поворачивается по часовой стрелке относительно начала координат, то при повороте на φ_M градусов он может пройти через точку $(-1, j0)$. Угол поворота φ_M называется запасом устойчивости по фазе. Разумеется, физический смысл запаса по фазе следует трактовать только для идеального случая, когда изменение параметров системы вызывает чистый фазовый сдвиг, что на практике возможно лишь в схемах с равномерной полосой пропускания. Вместе с тем чаще всего принято варьировать коэффициент усиления системы, не затрагивая при этом фазового сдвига.

Рассматривая на рис. 7.6 годограф для $K_p = 6,32 \cdot 10^6$, мы видим, что запас по фазе равен нулю, так как годограф проходит через точку $(-1, j0)$. При $K_p > 6,32 \cdot 10^6$ запас по фазе будет отрицателен, что указывает на неустойчивость системы.

Точка, в которой годограф $G(z)$ пересекает единичную окружность, характеризует переход усиления системы через значение, равное единице. Соответствующая этой точке частота называется *частотой среза*.

Из приведенных выше рассуждений можно заключить, что запас по модулю измеряется в точке, где фаза принимает значение -180° , а запас по фазе — в точке, где коэффициент усиления системы равен единице.

Намного проще запасы устойчивости по модулю и по фазе определяются по логарифмическим частотным характеристикам. Используя в качестве примера рис. 7.5, отметим точки перехода амплитудной и фазовой характеристик через 0 дБ и -180° соответственно. Тогда запас по модулю в децибелах равен отрезку между амплитудной характеристикой $G(e^{j\omega T})$ и уровнем 0 дБ при частоте, на которой фаза имеет значение -180° . Запас по фазе измеряется как разность между фазовой характеристикой $G(e^{j\omega T})$ и уровнем -180° на частоте среза. Из построений следует, что если при $K_p = 1,65 \cdot 10^6$ коэффициент усиления K_p увеличить на 11,66 дБ, то замкнутая система будет находиться на границе устойчивости. Точно так же, если, не изменяя амплитудную характеристику, сместить фазовую характеристику вниз на величину, равную запасу по фазе, т. е. на 53° , то переход фазы через -180° произошел бы на той же частоте, при которой усиление системы равно единице, что также соответствует границе устойчивости.

7.5. АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА И ДИАГРАММА НИКОЛЬСА

Еще одним способом представления частотных характеристик является амплитудно-фазовая диаграмма. В этом случае модуль $G(z)$ или $G(j\omega_w)$ изображается как функция фазы того же выражения, а частота ω служит параметром на графике. Эта диаграмма обладает тем преимуществом, что при наложении ее на диаграмму Никольса [1] можно получить информацию о частотных характеристиках замкнутой системы. По амплитудно-фазовой диаграмме легко определить запасы устойчивости по модулю и по фазе, а также полосу пропускания замкнутой системы.

На рис. 7.7 изображены логарифмические частотные характеристики системы, представленной на рис. 6.5, перестроенные в координатах амплитуда — фаза. Для случая $K_p = 1,65 \cdot 10^6$ показано, как по амплитудно-фазовой диаграмме легко определяются запасы устойчивости по модулю и по фазе. Диаграмма Никольса дает информацию о модуле передаточной функции замкнутой системы $C(z)/R(z)$ [см. выражение (7-4)] как функции частоты. По пересечениям характеристики $G(j\omega_w)$ с кривыми диаграммы Никольса можно получить значения $M = |C(j\omega_w)/R(j\omega_w)|$ для различных частот. Кривая диаграммы Никольса, касающаяся характеристики $G(j\omega_w)$, соответствует максимальному значению усиления замкнутой системы M_p , а частота, на которой это происходит, называется резонансной. Из рис. 7.7 следует, что при $K_p = 1,65 \cdot 10^6$ $M_p \approx 1,4$ дБ, или 1,175. Резонансная частота при $\omega_w = 0,35 T = 0,1$ с вычисляется по выражению (7-26):

$$\omega = \frac{2}{T} \arctg \omega_w = 6,73 \text{ рад/с.} \quad (7-32)$$

Для цифровых систем управления простейшая передаточная функция второго порядка обычно содержит в числителе член $(z - z_1)$, к тому же при переходе в частотную область переменная z связана с ω соотношением $z = e^{j\omega T}$. Это осложняет получение простого аналитического выражения типа (7-34), связывающего полосу пропускания с расположением полюсов и нулей функции $C(z)/R(z)$. Однако для непрерывных систем с передаточной функцией

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + T\omega_n^2)s + \omega_n^2} \quad (7-35)$$

существует следующее выражение для полосы пропускания:

$$BW = \left[-\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4\omega_n^4} \right]^{1/2}, \quad (7-36)$$

где

$$a = 4\zeta^2\omega_n^2 + 4\zeta\omega_n^3T - 2\omega_n^2 - \omega_n^4T^2 \quad (7-37)$$

Можно воспользоваться этими результатами, а также w -преобразованием, чтобы получить выражение для полосы пропускания цифровой системы управления второго порядка.

Рассмотрим исходную передаточную функцию замкнутой системы

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K(z - z_1)}{(z - p_1)(z - \bar{p}_1)} \quad (7-38)$$

где z_1 — действительная константа; p_1 и \bar{p}_1 — действительные или комплексно-сопряженные числа. Используя билинейное преобразование (7-22), приведем выражение (7-38) к следующему виду:

$$\frac{C(w)}{R(w)} = \frac{\omega_{wn}^2(1 + T_w w)}{w^2 + (2\zeta_w \omega_{wn} + T_w \omega_{wn}^2)w + \omega_{wn}^2} \quad (7-39)$$

где ω_{wn} , ζ_w и T_w не обязательно имеют какой-то физический смысл, а просто являются рабочими параметрами в области w , с помощью которых выражению придается стандартный вид (7-35). Тогда полоса пропускания в области переменной $w = j\omega_w$, измеренная в единицах ω_w , определяется как

$$(BW)_w = \left[-\frac{a_w}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a_w^2 + 4\omega_{wn}^4} \right]^{1/2}, \quad (7-40)$$

где

$$a_w = 4\zeta_w^2\omega_{wn}^2 + 4\zeta_w\omega_{wn}^3T_w - 2\omega_{wn}^2 - \omega_{wn}^4T_w^2 \quad (7-41)$$

Если по формуле (7-40) найдена полоса пропускания $(BW)_w$, то с помощью соотношения (7-26) можно перейти к полосе пропускания в области действительной частоты

$$BW = \frac{2}{T} \arctg(BW_w) \quad (7-42)$$

Пример 7.3. Рассмотрим еще раз цифровую систему управления, изображенную на рис. 6.5. Передаточная функция разомкнутой системы задана выражением (7-15), а замкнутая система при $K_p = 1,65 \cdot 10^6$ имеет передаточную функцию

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0,198(z+1)}{z^2 - 1,044z + 0,44} \quad (7-43)$$

Требуется определить полосу пропускания замкнутой системы. Подставляя $z = (1+w)/(1-w)$ в выражение (7-43) и упрощая последнее, получим

$$\frac{C(w)}{R(w)} = \frac{0,159(1-w)}{w^2 - 0,451w + 0,159} \quad (7-44)$$

Сравнивая выражения (7-44) и (7-39), имеем $\omega_{wn} = 0,4$; $T_w = -1$; $\xi_w = -0,365$. Тогда по выражениям (7-40) и (7-41) находим

$$(BW)_w = 0,513 \quad (7-45)$$

и в соответствии с (7-42) действительная полоса пропускания равна

$$BW = \frac{2}{T} \arctg 0,513 = 9,48 \text{ рад/с.} \quad (7-46)$$

Полосу пропускания можно легко найти по пересечению амплитудно-фазовой диаграммы для $G(e^{j\omega T})$ с линией, соответствующей $M = -3$ дБ на диаграмме Никольса. Так, для системы, рассмотренной в примере 7.3, w -преобразование $G(z)$ приводит к амплитудно-фазовой диаграмме (см. рис. 7.7). Значение ω_w в точке пересечения $G(j\omega_w)$ с линией $M = -3$ дБ на диаграмме Никольса равно 0,6, что весьма близко к результату (7-45), полученному в примере.

Метод определения полосы пропускания с помощью амплитудно-фазовой диаграммы имеет то преимущество, что он применим к системам любого порядка. Аналитический же метод, связанный с использованием выражений (7-39) — (7-42), применим только к системам второго порядка или к таким системам, которые могут быть аппроксимированы моделью второго порядка.

Как отмечалось в начале этого параграфа, при проектировании систем управления часто выдвигается определенное требование к полосе пропускания. Если задана полоса пропускания замкнутой непрерывной системы, то для ее реализации можно воспользоваться двумя доминирующими корнями характеристического уравнения. Это означает, что динамика системы аппроксимируется передаточной функцией второго порядка вида (7-33). Для систем более высокого порядка все остальные полюсы и нули должны находиться намного левее этих доминирующих корней. Например, если задано BW , то по выражению (7-34) можно определить ξ и ω_n , хотя решение не является единственным. Тогда можно задаться величиной ξ , например равной 0,707, после чего однозначно определяется ω_n .

Для цифровой системы управления при заданном BW эквивалентная полоса пропускания в w -области определяется соотношением

$$(BW)_w = \text{tg} \left[\frac{(BW)T}{2} \right]. \quad (7-47)$$

Тогда на w -плоскости можно указать положение пары доминирующих

корней характеристического уравнения. Если в качестве модели системы используется передаточная функция второго порядка вида (7-39), то по известному значению $(BW)_w$ необходимо определять три неизвестных параметра: ζ_w , ω_{wn} и T_w . Однако по аналогии с непрерывной системой можно принять в качестве модели замкнутой системы передаточную функцию

$$\frac{C(w)}{R(w)} = \frac{\omega_{wn}^2}{w^2 + 2\zeta_w \omega_{wn} w + \omega_{wn}^2} \quad (7-48)$$

которая не имеет доминирующего нуля. Тогда из выражения для полосы пропускания

$$(BW)_w = \omega_{wn} \left[(1 - 2\zeta_w^2) + \sqrt{4\zeta_w^4 - 4\zeta_w^2 + 2} \right]^{1/2} \quad (7-49)$$

можно определить ζ_w и ω_{wn} .

7.7. ПРОГРАММЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ЭВМ

В этом параграфе приведены две программы вычисления на ЭВМ частотных характеристик, соответствующих передаточным функциям $G(z)$ или $G^*(z)$.

Первая программа на языке ФОРТРАН (табл. 7.3) вычисляет значения модуля и фазы $G(z)$ в зависимости от ω при $z=e^{j\omega T}$. Пользователь должен ввести следующие параметры: T — период квантования, с; NP — общее количество вычисляемых точек; J — целое число, определяющее значение частоты $\omega = (\omega_s/2)J/(NP)$; GN — полином в числителе $G(z)$; GD — полином в знаменателе $G(z)$; GZ — выражение $G(z) = GN/GD$.

Таблица 7.3

```

COMPLEX CNT,Z,GZ,GD,GN
REAL GZR,GZI,GZMAG,GZDB,GZPH
REAL T,T,OMEGA,WT
PI=3.14159
PHI=180./PI
WRITE(5,101)
T=0.1
NP=50
DO 1 J=1,NP
  OMEGA=2.*PI/T
  OMEGA=OMEGA*2./FLOAT(J)*PI
  WT=OMEGA*T
  CNT=CMPLX(0.,WT)
  Z=EXP(CMPLX(0.,WT))
  k=1.2
  GN=k.*Z+1.0
  GD=(Z-1.)*(Z-0.242)
  GZ=GN/GD
  GZR=REAL(GZ)
  GZI=IMAG(GZ)
  GZMAG=CABS(GZ)
  GZDB=20.*ALOG10(GZMAG)
  GZPH=RAD2DEG*ATAN2(GZI,GZR)
  WRITE(5,102)OMEGA,GZMAG,GZDB,GZPH
CONTINUE
100 FORMAT(25X,'FREQUENCY RESPONSE')
101 FORMAT(4X,'OMEGA',7X,'GZMAG',7X,'GZDB',7X,'PHASE')
102 FORMAT(1F4E13.2)
STOP
END

```

OMEGA	GMAG	GDG	PHSE
6.283E-01	5.033E+01	3.404E+01	-9.475E+01
1.257E+00	2.508E+01	3.799E+01	-9.949E+01
1.885E+00	1.662E+01	2.441E+01	-1.043E+02
2.513E+00	1.237E+01	2.185E+01	-1.069E+02
3.142E+00	9.746E+00	1.982E+01	-1.135E+02
3.770E+00	8.064E+00	1.813E+01	-1.162E+02
4.398E+00	6.815E+00	1.657E+01	-1.227E+02
5.027E+00	5.868E+00	1.537E+01	-1.273E+02
5.655E+00	5.124E+00	1.419E+01	-1.317E+02
6.283E+00	4.522E+00	1.311E+01	-1.360E+02
6.911E+00	4.025E+00	1.210E+01	-1.403E+02
7.540E+00	3.608E+00	1.114E+01	-1.446E+02
8.168E+00	3.252E+00	1.034E+01	-1.487E+02
8.796E+00	2.945E+00	9.380E+00	-1.538E+02
9.425E+00	2.677E+00	8.552E+00	-1.569E+02
1.005E+01	2.442E+00	7.754E+00	-1.605E+02
1.068E+01	2.233E+00	6.979E+00	-1.647E+02
1.131E+01	2.048E+00	6.332E+00	-1.685E+02
1.194E+01	1.882E+00	5.492E+00	-1.723E+02
1.257E+01	1.732E+00	4.773E+00	-1.760E+02
1.319E+01	1.597E+00	4.067E+00	-1.796E+02
1.382E+01	1.474E+00	3.372E+00	-1.766E+02
1.445E+01	1.363E+00	2.687E+00	-1.732E+02
1.508E+01	1.260E+00	2.009E+00	-1.698E+02
1.571E+01	1.166E+00	1.336E+00	-1.664E+02
1.634E+01	1.080E+00	6.674E-01	-1.630E+02
1.696E+01	1.000E+00	7.864E-05	-1.597E+02
1.759E+01	9.260E-01	-6.676E-01	-1.564E+02
1.822E+01	8.573E-01	-1.333E+00	-1.531E+02
1.885E+01	7.932E-01	-2.012E+00	-1.499E+02
1.948E+01	7.333E-01	-2.694E+00	-1.467E+02
2.011E+01	6.772E-01	-3.386E+00	-1.435E+02
2.073E+01	6.244E-01	-4.090E+00	-1.404E+02
2.136E+01	5.747E-01	-4.812E+00	-1.373E+02
2.199E+01	5.276E-01	-5.554E+00	-1.343E+02
2.262E+01	4.830E-01	-6.322E+00	-1.312E+02
2.325E+01	4.405E-01	-7.122E+00	-1.282E+02
2.388E+01	3.999E-01	-7.960E+00	-1.252E+02
2.450E+01	3.611E-01	-8.848E+00	-1.222E+02
2.513E+01	3.238E-01	-9.795E+00	-1.192E+02
2.576E+01	2.878E-01	-1.082E+01	-1.163E+02
2.639E+01	2.530E-01	-1.194E+01	-1.133E+02
2.702E+01	2.193E-01	-1.318E+01	-1.104E+02
2.765E+01	1.864E-01	-1.459E+01	-1.074E+02
2.827E+01	1.542E-01	-1.624E+01	-1.045E+02
2.890E+01	1.227E-01	-1.823E+01	-1.016E+02
2.953E+01	9.159E-02	-2.076E+01	-9.870E+01
3.016E+01	6.086E-02	-2.431E+01	-9.580E+01
3.079E+01	3.037E-02	-3.035E+01	-9.290E+01
3.142E+01	1.266E-02	-1.179E+02	-9.000E+01

В табл. 7.4 приведены результаты вычислений $|G(z)|$, $|G(z)|$ в децибелах и фазы от $G(z)$, где $z = e^{j\omega T}$, для передаточной функции

$$G(z) = \frac{1,2(z + 1)}{(z - 1)(z - 0,242)} \quad (7-50)$$

при изменении ω до $\omega_s/2$. Период квантования $T = 0,1$ с, поэтому $\omega_s = 2\pi/T = 62,8$ рад/с. Общее число точек $NP = 50$.

Программа, приведенная в табл. 7.5, служит для вычисления $G^*(s)$, где $s = j\omega$, по усеченному бесконечному ряду

$$G^*(j\omega) \cong \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N G(j\omega + jn\omega_s) \quad (7-51)$$

где N — положительное целое число, которое определяется критерием ошибки $DELTA$. Пусть $DELTA$ есть малая величина, например, 10^{-4} .

```

DIMENSION DB(200),PHASE(200)
COMPLEX GFUN,GSTAR,GSTAR1,GSTAT
DELTA=1.E-4
TOP1=2.*3.14159
RAD=180./3.14159
WRITE(5,101)
101 FORMAT(5X,'GSTAR PROGRAM')
T=0.2
WRITE(5,100)T
100 FORMAT(//5X,'T= ',1PE12.5)
WRITE(5,102)
102 FORMAT(3X,'NH',4X,'OMEGA',4X,'MAGNITUDE',6X,'DB',6X,'PHASE',
15X,'REAL PART',2X,'IMAG PART')
OMEGAS=TOP1/T
NP=100
DO 1 J=1,NP
OMEGA=(OMEGAS/2.)*(FLOAT(J)/NP)
GSTAR=GFUN(T,OMEGA)
DO 4 NH=1,1000
OMEGT1=OMEGA+OMEGAS*FLOAT(NH)
OMEGT2=OMEGA-OMEGAS*FLOAT(NH)
GSTAR1=GFUN(T,OMEGT1)+GFUN(T,OMEGT2)
GSTAR=GSTAR+GSTAR1
IF(CABS(GSTAR1).LE.DELTA*CABS(GSTAR))GO TO 5
4 CONTINUE
GO TO 1000
5 CONTINUE
GSTAT=GSTAR/T
GMAG=CABS(GSTAT)
GREAL=REAL(GSTAT)
GIMAG=AIMAG(GSTAT)
GPHASE=RAD*ATAN2(GIMAG,GREAL)
GDB=20.*ALOG10(GMAG)
WRITE(5,103)NH,OMEGA,GMAG,GDB,GPHASE,GREAL,GIMAG
103 FORMAT(' ',I4,1PE11.3)
GO TO 1
1000 WRITE(5,104)
104 FORMAT(5X,'NO CONVERGENCE IN 1000 ITERATIONS')
1 CONTINUE
1001 CALL EXIT
END
COMPLEX FUNCTION GFUN(T,OMEGA)
COMPLEX S,GN,GD
S=CMPLX(0.,OMEGA)
GN=S*S+2.*S+10.
GNH=1.0
GD=S*(S*S*S+5.*S+5.)*S+1.
GFUN=GAIN*(1.-EXP(-S*T))/(S*GD)
RETURN
END

```

Для данной частоты ω присвоим функции $G^*(j\omega)$, вычисляемой по формуле (7-51), обозначение

$$G^*(j\omega) = \text{GSTAR} \quad (7-52)$$

Обозначим также

$$\text{GSTAR1} = G(j\omega + jN\omega_s) + G(j\omega - jN\omega_s) \quad (7-53)$$

Тогда число N , при котором следует оборвать ряд для $G^*(j\omega)$, определяется из условия

$$|\text{GSTAR1}| \leq \text{DELTA} * |\text{GSTAR}| \quad (7-54)$$

Пользователь должен ввести в программу следующие параметры:

T – период квантования;

NP – общее количество вычисляемых точек;

J – целое число, определяющее значение ω ;

DELTA – ошибка (малая величина);

GN – полином в числителе $G(s)$;

$GD = s \times [\text{полином в знаменателе } G(s)]$;

$\text{GFUN} = (1 - e^{-Ts}) \text{GAIN} * GN / (GD)$ (с учетом экстраполятора нулевого порядка);

$GAIN$ — постоянный коэффициент в выражении $G(s)$.

В табл. 7.1 и 7.2 приведены выборочные результаты вычислений по данной программе для передаточной функции (7-19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, 3rd ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
2. Whitbeck, R. F., *Analysis of Digital Flight Control Systems with Flying Qualities Applications*, Vol. I — Executive Summary, Tech. Report AFFDL-TR-78-115, Air Force Flight Dynamics Lab., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Sept. 1978.
3. Whitbeck, R. F., and Hoffmann, L. G., *Analysis of Digital Flight Control Systems with Flying Qualities Applications*, Vol. II — Executive Summary, Tech. Report AFFDL-TR-78-115, Air Force Flight Dynamics Lab., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Sept. 1978.

ГЛАВА 8. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

8.1. ВВЕДЕНИЕ

Понятия управляемости и наблюдаемости, впервые введенные Калманом [2, 3], играют важную роль в современной теории проектирования систем управления. Понятие управляемости можно сформулировать, используя структурную схему, приведенную на рис. 8.1. *Процесс G называется управляемым, если на каждую переменную состояния G можно целенаправленно воздействовать с помощью неограниченного сигнала управления $u(t)$ в течение конечного времени.* Интуитивно понятно, что если некоторая переменная состояния не зависит от управления $u(t)$, то отсутствует возможность требуемого изменения этой переменной с помощью произвольного управляющего воздействия за конечное время. Поэтому эта переменная состояния называется *неуправляемой*, и система в целом также является неуправляемой.

Понятие наблюдаемости является дуальным по отношению к управляемости. *Процесс G называется наблюдаемым, если каждая переменная состояния процесса обуславливает изменение некоторых выходных переменных процесса.* Другими словами, часто требуется определить переменные состояния по результатам изменения входных и выходных сигналов. Например, иногда требуется "оценить" по изменениям входных и выходных сигналов те переменные состояния, которые необходимы для закона управления, но непосредственно не могут быть измерены. Если какое-либо состояние не может быть определено по результатам измерения выходных сигналов, оно называется *ненаблюдаемым* и система является ненаблюдаемой.

Приведенное описание управляемости и наблюдаемости является единым для непрерывных и дискретных систем. Перед введением формальных определений рассмотрим простые примеры, иллюстрирующие эти понятия. На рис. 8.2 изображена диаграмма состояния процесса с двумя переменными состояниями. Поскольку входной сигнал $u(t)$ воздействует только на переменную $x_1(t)$, говорят, что переменная состояния $x_2(t)$ является неуправляемой, а процесс является не полностью управляемым или просто неуправляемым.

На рис. 8.3 изображена диаграмма состояния другого процесса. Очевидно, что переменная состояния $x_2(t)$ никак не связана с выходной переменной $c(t)$. Поэтому, если сигнал $c(t)$ измерен, можно определить переменную $x_1(t)$, поскольку $x_1(t) = c(t)$. Однако по имеющейся информа-

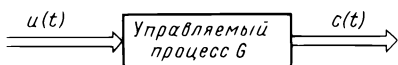


Рис. 8.1. Структурная схема цифрового процесса

Заметим, что полная управляемость подразумевает управляемость для всех начальных состояний. Абсолютная управляемость является более сильным условием, поскольку в дополнение к полной управляемости требует включения в определение всех начальных и всех конечных состояний. Если матрицы $A(k)$, $B(k)$, $D(k)$ и $E(k)$ состоят из аналитических функций аргумента k , тогда полная управляемость также подразумевает абсолютную управляемость (по состоянию или по выходу). Поскольку все матрицы линейной стационарной системы состоят из постоянных коэффициентов, то понятия абсолютной и полной управляемости тождественны.

О п р е д е л е н и е 8.4. Сильная и слабая управляемость. Система называется *сильно управляемой* (в смысле абсолютной, полной управляемости по состоянию или по выходу), если она является управляемой по отношению к каждой управляющей переменной в отдельности, причем все остальные переменные равны нулю. В противном случае система называется *слабо управляемой* или просто управляемой.

8.3. ФОРМЫ ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Т е о р е м а 8.1. Полная управляемость по состоянию. Линейная цифровая система (8-1) является полностью управляемой по состоянию только в том случае, если следующая матрица имеет ранг n

$$Q = [Q_0 \quad Q_1 \quad \dots \quad Q_{N-1}] \quad (n \times Nr) \quad (8-3)$$

где

$$Q_i = \psi(k_N, k_{i+1})B(k_i) \quad (n \times r) \quad (8-4)$$

$$\psi(k_N, k_{i+1}) = A(k_{N-1})A(k_{N-2}) \dots A(k_{i+1}) \quad (n \times n) \quad (8-5)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N-2$$

$$\psi(k_N, k_{i+1}) = I$$

$$i = N-1 \quad (8-6)$$

Доказательство Переходное уравнение состояния имеет вид

$$x(k_N) = \psi(k_N, k_0)x(k_0) + \sum_{i=0}^{N-1} \psi(k_N, k_{i+1})B(k_i)u(k_i) \quad (8-7)$$

или

$$x(k_N) - \psi(k_N, k_0)x(k_0) = \sum_{i=0}^{N-1} \psi(k_N, k_{i+1})B(k_i)u(k_i) \quad (8-8)$$

Левую часть уравнения (8-8) можно представить в виде n -мерного вектора $X(k_N, k_0)$, записав уравнение как

$$X(k_N, k_0) = QU \quad (8-9)$$

где Q — матрица размерности $n \times Nr$, которая определяется соотношениями (8-3) и (8-4); U есть Nr -мерный вектор вида

$$U = \begin{bmatrix} u(k_0) \\ u(k_1) \\ \vdots \\ u(k_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (Nr \times 1) \quad (8-10)$$

В случае полной управляемости по состоянию каждое начальное состояние $x(k_0)$ для некоторого k_0 должно преобразовываться в конечное состояние $x(k_N)$ с помощью неограниченных управлений $u(k_i)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, за конечное $k_N \geq k_0$. Поэтому задача состоит в том, чтобы для заданной матрицы Q и каждого вектора $X(k_N, k_0)$ в n -мерном пространстве состояний определить управления, удовлетворяющие уравнению (8-9). Поскольку (8-9) представляет собой систему из n линейных уравнений, то, как следует из теории, чтобы решение существовало, эти уравнения должны быть линейно независимы. Необходимое и достаточное условие линейной независимости состоит в том, что ранг матрицы Q должен быть равен n . Другими словами, матрица Q должна иметь n линейно независимых столбцов.

Если система (8-1) имеет только один вход $r = 1$, матрица Q имеет размерность $n \times n$; тогда условие полной управляемости по состоянию состоит в том, что матрица Q должна быть невырожденной.

Другой способ доказательства того, что матрица Q имеет ранг n , основан на том, что матрица размерностью $n \times n$

$$QQ' = \sum_{i=0}^{N-1} Q_i Q_i' \quad n \times n \quad (8-11)$$

является невырожденной. Так как Q имеет ранг n , транспонированная матрица Q' имеет тот же ранг. Поэтому QQ' должна иметь также ранг n , или быть невырожденной.

Матрица QQ' , описываемая соотношением (8-11), называется матрицей Грама, или грамианом. Таким образом, иная формулировка теоремы гласит: система (8-1) является полностью управляемой по состоянию только в том случае, если матрица Грама

$$W(k_0, k_N) = QQ' = \sum_{i=0}^{N-1} \psi(k_N, k_{i+1}) B(k_i) B'(k_i) \psi'(k_N, k_{i+1}) \quad (8-12)$$

является невырожденной.

Т е о р е м а 8.2. Полная управляемость по выходу. Линейная цифровая система (8-1) — (8-2) является полностью управляемой по выходу только в том случае, если следующая матрица имеет ранг p :

$$T = [T_0 \quad T_1 \quad \dots \quad T_N] \quad [p \times (N+1)r] \quad (8-13)$$

где

$$T_i = \begin{cases} D(k_N) \psi(k_N, k_{i+1}) B(k_i) & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ E(k_N) & i = N \end{cases} \quad (8-14)$$

Доказательство. Подставляя переходное уравнение состояния (8-7) в уравнение выхода (8-2) при $k_i = k_N$, после упрощения получаем

$$c(k_N) - D(k_N)\psi(k_N, k_0)x(k_0) = \sum_{i=0}^{N-1} D(k_N)\psi(k_N, k_{i+1})B(k_i)u(k_i) + E(k_N)u(k_N) \quad (8-15)$$

Используя соотношение (8-14) и представляя левую часть выражения (8-15) в виде p -мерного вектора $C(k_N, k_0)$, перепишем последнее уравнение:

$$C(k_N, k_0) = \sum_{i=0}^N T_i u(k_i) = TV \quad (8-16)$$

где

$$V = \begin{bmatrix} u(k_0) \\ u(k_1) \\ \vdots \\ u(k_N) \end{bmatrix} \quad (N+1)r \times 1 \quad (8-17)$$

Соотношение (8-16) представляет собой систему из p линейных уравнений, и, чтобы эти уравнения при произвольном начальном состоянии $x(k_0)$, некотором конечном состоянии $c(k_N)$ и заданной матрице T имели решения относительно управлений, матрица T должна иметь ранг p . Иными словами, чтобы система была полностью управляема по выходу, $[p \times (N+1)r]$ -мерная матрица T должна иметь p независимых столбцов.

Кроме того, для полной управляемости по выходу $(p \times p)$ -мерная матрица Грама

$$TT' = \sum_{i=0}^N T_i T_i' \quad (8-18)$$

должна быть невырожденной.

8.4. ТЕОРЕМЫ ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Ниже приведены теоремы об управляемости линейных цифровых стационарных систем. Некоторые теоремы сформулированы без доказательства.

Т е о р е м а 8.3. Полная управляемость по состоянию. Линейная стационарная цифровая система

$$x(k_{i+1}) = Ax(k_i) + Bu(k_i) \quad (8-19)$$

полностью управляема по состоянию только в том случае, если $(n \times Nr)$ -мерная матрица

$$Q = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{N-1}B] \quad (8-20)$$

имеет ранг n или $(n \times n)$ -мерная матрица QQ' является невырожденной.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из условия уп-

правляемости по состоянию для нестационарных систем. В соответствии с выражением (8-4), если A — матрица с постоянными коэффициентами, то

$$Q_i = A^i B \quad (8-21)$$

Заметим, что условие управляемости по состоянию линейных стационарных цифровых систем идентично условиям управляемости стационарных непрерывных систем, для которых A и B являются матрицами коэффициентов. Однако, если цифровая система получена из непрерывной системы с помощью квантования по времени, дискретное уравнение состояния имеет форму

$$x[(k+1)T] = \phi(T)x(kT) + \theta(T)u(kT) \quad (8-22)$$

Тогда цифровая система будет полностью управляема по состоянию только в том случае, если матрица

$$Q = [Q_0 \quad Q_1 \quad \dots \quad Q_{N-1}] \quad (8-23)$$

имеет ранг n , где

$$Q_i = \phi(iT)\theta(T) \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8-24)$$

Т е о р е м а 8.4. Полная управляемость по состоянию. Линейная стационарная цифровая система (8-19) является полностью управляемой по состоянию только в том случае, если $(n \times n)$ -мерная матрица Грама

$$W = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} B B' (A^{N-i-1})' \quad (8-25)$$

является невырожденной, где $N \geq n$.

Эта теорема следует непосредственно из теоремы 8.1 для нестационарного случая.

Т е о р е м а 8.5. Полная управляемость по состоянию. Линейная стационарная цифровая система (8-19) полностью управляема по состоянию только в том случае, если строки $(n \times m)$ -мерной матрицы

$$(zI - A)^{-1} B$$

являются линейно независимыми.

Т е о р е м а 8.6. Полная управляемость по состоянию. Линейная стационарная цифровая система (8-19) является полностью управляемой по состоянию только в том случае, если $[n \times (n+m)]$ -мерная матрица

$$[\lambda I - A : B]$$

имеет ранг n для всех собственных значений λ матрицы A . Если же матрица A является диагональной или представлена в канонической форме Жордана, то строки матрицы $[\lambda I - A : B]$, которые соответствуют последним строкам клеток Жордана для всех собственных значений λ матрицы A , не могут полностью состоять из нулей.

* Символ ":" разделяет матрицы $[\lambda I - A]$ и B в блочной матрице $[\lambda I - A : B]$ — Прим. ред. пер.

Т е о р е м а 8.7. Полная управляемость по выходу. Линейная стационарная цифровая система

$$\mathbf{x}(k_{i+1}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k_i) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k_i) \quad (8-26)$$

$$\mathbf{c}(k_i) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k_i) + \mathbf{E}\mathbf{u}(k_i) \quad (8-27)$$

является полностью управляемой по выходу только в том случае, если следующая матрица имеет ранг p :

$$\mathbf{T} = [\mathbf{D}\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{D}\mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{D}\mathbf{B} \quad \mathbf{E}] \quad (8-28)$$

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теоремы для нестационарного случая, поскольку в выражении (8-13) имеем

$$\mathbf{T}_i = \begin{cases} \mathbf{D}\mathbf{A}^{N-i-1}\mathbf{B} & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ \mathbf{E} & i = N \end{cases} \quad (8-29)$$

Т е о р е м а 8.8. Полная управляемость по состоянию систем с различными собственными значениями. Для стационарной цифровой системы

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (8-30)$$

предположим, что собственные значения λ_i матрицы \mathbf{A} различны, $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим невырожденное преобразование \mathbf{P} , которое преобразует $\mathbf{x}(k)$ в

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(k) \quad (8-31)$$

и удовлетворяет условию

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}[\lambda_i] \quad (8-32)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} \quad (8-33)$$

Новые уравнения состояния имеют вид

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k) \quad (8-34)$$

Система является полностью (абсолютно) управляемой по состоянию только в том случае, если $\mathbf{\Gamma}$ не имеет строк, полностью состоящих из нулей.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица, система уравнений состояния (8-34) является несвязанной. Поэтому, если какая-либо строка $\mathbf{\Gamma}$ целиком состоит из нулей, на соответствующую переменную состояния не будет влиять ни одна из входных переменных, и данное состояние является неуправляемым.

Т е о р е м а 8.9. Полная управляемость по состоянию систем с кратными собственными значениями. Предположим, что цифровая система (8-30) имеет и различные, и кратные собственные значения. Тогда существует невырожденное преобразование \mathbf{P} , которое трансформирует уравнение (8-30) в уравнение состояния (8-34), причем матрица $\mathbf{\Lambda}$ имеет каноническую форму.

ническую форму Жордана. В общем случае Λ будет иметь следующую форму:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (8-35)$$

где λ_1 , λ_2 и λ_3 — различные собственные значения; λ_4 — собственное значение кратности 2. Элементы каждого блока, ограниченного пунктирными линиями, образуют клетки Жордана.

Система является полностью управляемой по состоянию только в том случае, если:

- 1) каждая клетка Жордана соответствует одному простому собственному значению;
- 2) все элементы Γ , которые соответствуют последней строке каждой клетки Жордана, отличны от нуля.

Доказательство. Последняя строка каждой клетки Жордана соответствует уравнению состояния, которое полностью независимо от других уравнений состояния. Поэтому, если элементы соответствующих строк матрицы Γ полностью состоят из нулей, эти состояния будут неуправляемы для любых управляющих переменных. Элементы в строках Γ , которые соответствуют другим строкам клеток Жордана, могут полностью состоять из нулей, так как недиагональные элементы Λ образуют связь между состояниями.

Таким образом, для матрицы Λ , имеющей вид (8-35), в случае полной управляемости по состоянию, первые три строки и последняя строка матрицы Γ не могут целиком состоять из нулей.

8.5. ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАБЛЮДАЕМОСТИ

О п р е д е л е н и е 8.5. Полная наблюдаемость. Линейная цифровая система, описываемая уравнениями (8-1) и (8-2), называется *полностью наблюдаемой*, если для некоторого k_0 состояние $x(k_0)$ может быть определено по известным выходной $y(k)$ и входной $u(k)$ переменным для $k_0 \leq k < k_N$, где k_N — конечное время или шаг.

О п р е д е л е н и е 8.6. Глобальная наблюдаемость. Если система является полностью наблюдаемой для всех k_0 и всех $k_f > k_0$, она называется *глобально наблюдаемой*.

8.6. ТЕОРЕМЫ О НАБЛЮДАЕМОСТИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Т е о р е м а 8.10. Полная наблюдаемость. Линейная цифровая система (8-1) — (8-2) является полностью наблюдаемой только в том случае, если следующая $(n \times pN)$ -мерная матрица имеет ранг n :

$$L(k_0, k_{N-1}) = [D'(k_0) \psi'(k_1, k_0) D'(k_1) \dots \psi'(k_{N-1}, k_0) D'(k_{N-1})] \quad (8-36)$$

или $(n \times n)$ -мерная матрица

$$L(k_0, k_{N-1}) L'(k_0, k_{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} \psi'(k_i, k_0) D'(k_i) D(k_i) \psi(k_i, k_0) \quad (8-37)$$

является невырожденной.

Доказательство. Запишем переходное уравнение состояния в виде

$$x(k_i) = \psi(k_i, k_0) x(k_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \psi(k_i, k_{j+1}) B(k_j) u(k_j) \quad (8-38)$$

где $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Подстановка уравнения (8-38) в уравнение выхода (8-2) дает

$$c(k_i) = D(k_i) \psi(k_i, k_0) x(k_0) + \sum_{j=0}^{i-1} D(k_i) \psi(k_i, k_{j+1}) B(k_j) u(k_j) + E(k_i) u(k_i) \quad (8-39)$$

для $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Когда i проходит значения от 0 до $N-1$, уравнения (8-39) и (8-2) образуют совместно pN линейных алгебраических уравнений, которые могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} c(k_0) \\ c(k_1) \\ \vdots \\ c(k_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(k_0) \\ D(k_1) \psi(k_1, k_0) \\ \vdots \\ D(k_{N-1}) \psi(k_{N-1}, k_0) \end{bmatrix} x(k_0) +$$

$$+ \begin{bmatrix} E(k_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D(k_1) B(k_0) & E(k_1) & 0 & & 0 \\ D(k_2) \psi(k_2, k_1) B(k_0) & D(k_2) B(k_1) & E(k_2) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(k_{N-1}) \psi(k_{N-1}, k_1) B(k_0) & D(k_{N-1}) \psi(k_{N-1}, k_2) B(k_1) & \dots & \dots & E(k_{N-1}) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} u(k_0) \\ u(k_1) \\ u(k_2) \\ \vdots \\ u(k_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (8-40)$$

Чтобы при заданных $c(k_i)$ и $u(k_i)$, $i = 0, \dots, N-1$, из последнего уравнения можно было определить $x(k_0)$, очевидно, что $(pN \times n)$ -мерная матрица

$$L'(k_0, k_{N-1}) = \begin{bmatrix} D(k_0) \\ D(k_1)\psi(k_1, k_0) \\ \vdots \\ D(k_{N-1})\psi(k_{N-1}, k_0) \end{bmatrix} \quad (8-41)$$

должна иметь n независимых строк (предполагается, что $pN \geq n$), или матрица $L(k_0, k_{N-1})$, описываемая выражением (8-36), должна иметь n независимых столбцов, или иметь ранг n .

Если $L(k_0, k_{N-1})$ имеет ранг n , то квадратная $(n \times n)$ -мерная матрица $L(k_0, k_{N-1})L'(k_0, k_{N-1})$ также должна иметь ранг n , откуда следует условие (8-37).

8.7. ТЕОРЕМЫ О НАБЛЮДАЕМОСТИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Т е о р е м а 8.11. Полная наблюдаемость. Линейная стационарная цифровая система

$$x(k_{i+1}) = Ax(k_i) + Bu(k_i) \quad (8-42)$$

$$c(k_i) = Dx(k_i) + Eu(k_i) \quad (8-43)$$

является полностью (абсолютно) наблюдаемой только в том случае, если следующая матрица имеет ранг n :

$$L = [D' \quad A'D' \quad (A')^2D' \quad \dots \quad (A')^{N-1}D'] \quad (n \times Np) \quad (8-44)$$

где n и p – размерности векторов $x(k_i)$ и $c(k_i)$ соответственно.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из доказательства для нестационарного случая. В общем случае информация о $c(k_i)$ и $u(k_i)$ необходима только для $i = 0, 1, \dots, N-1$ или для N интервалов. Если стационарная система является наблюдаемой для некоторого интервала $[k_0, k_N]$, то она также является наблюдаемой на любом другом интервале. Поэтому для стационарных систем полная наблюдаемость подразумевает также глобальную наблюдаемость.

Для импульсных систем, описываемых уравнением состояния вида (8-22), условие полной наблюдаемости состоит в том, что матрица

$$L = [D' \quad \phi(T)'D' \quad \phi(2T)'D' \quad \dots \quad \phi[(N-1)T]'D'] \quad (n \times Np) \quad (8-45)$$

должна иметь ранг n .

Т е о р е м а 8.12. Полная наблюдаемость. Линейная стационарная цифровая система, описываемая уравнениями (8-42) и (8-43), является полностью наблюдаемой только в том случае, если матрица Грама

$$V = \sum_{i=0}^{N-1} (A^{N-i-1})'D'DA^{N-i-1} \quad (8-46)$$

является невырожденной.

Т е о р е м а 8.13. Полная наблюдаемость. Линейная стационарная цифровая система (8-42) — (8-43) является полностью наблюдаемой только в том случае, если столбцы $(p \times n)$ -мерной матрицы

$$D(zI - A)^{-1}$$

линейно независимы. Если A является диагональной матрицей или записана в канонической форме Жордана, то столбцы $D(zI - A)^{-1}$, которые соответствуют первым столбцам каждой клетки Жордана, не должны целиком состоять из нулей.

Т е о р е м а 8.14. Полная наблюдаемость. Линейная стационарная цифровая система (8-42) — (8-43) является полностью наблюдаемой только в том случае, если $[n \times (n + p)]$ -мерная матрица

$$[(\lambda I - A)' : D']$$

имеет ранг n для всех собственных значений λ матрицы A . Если матрица A представлена в диагональной форме или в канонической форме Жордана, то столбцы $[(\lambda I - A)' : D']$, которые соответствуют первым столбцам жордановых клеток, не должны целиком состоять из нулей для всех собственных значений λ матрицы A .

Т е о р е м а 8.15. Полная наблюдаемость систем с различными собственными значениями. Если матрица A цифровой стационарной системы

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8-47)$$

$$c(k) = Dx(k) + Eu(k) \quad (8-48)$$

имеет различные собственные значения, то уравнения динамики с помощью преобразования подобия $x(k) = Py(k)$ трансформируются к виду

$$y(k+1) = \Lambda y(k) + \Gamma u(k) \quad (8-49)$$

$$c(k) = Fy(k) + Eu(k) \quad (8-50)$$

где матрицы Λ и Γ описываются выражениями (8-32) и (8-33) соответственно и

$$F = DP \quad (8-51)$$

Система является полностью наблюдаемой только в том случае, если матрица F не содержит столбцов, полностью состоящих из нулей.

Доказательство этой теоремы основано на том, что поскольку Λ — диагональная матрица, уравнения состояния системы (8-49) не связаны друг с другом. Поэтому, если какой-либо столбец F полностью состоит из нулей, соответствующая переменная состояния не будет наблюдаемой ни по одной из выходных переменных.

Т е о р е м а 8.16. Полная наблюдаемость по состоянию систем с кратными собственными значениями. Если матрица A в уравнениях системы (8-47) — (8-48) имеет кратные собственные значения, то преобразование подобия $x(k) = Py(k)$ преобразует A в жорданову каноническую форму (8-35). Условия полной наблюдаемости состоят в следующем:

1) каждая клетка Жордана соответствует одному кратному собственному значению;

2) все элементы столбцов F , которые соответствуют первым столбцам каждой клетки Жордана, ненулевые.

Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы об управляемости систем с кратными собственными значениями.

8.8. ДУАЛЬНАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ НАБЛЮДАЕМОСТЬЮ И УПРАВЛЯЕМОСТЬЮ

Такая связь между условиями управляемости по состоянию и наблюдаемости существует и для непрерывных, и для линейных цифровых систем.

Предположим, что уравнения динамики линейной цифровой системы (система 1) заданы в виде

$$x(k_{i+1}) = A(k_i)x(k_i) + B(k_i)u(k_i) \quad (8-52)$$

$$c(k_i) = D(k_i)x(k_i) + E(k_i)u(k_i) \quad (8-53)$$

Сопряженная система (система 2) для системы 1 описывается выражениями

$$y(k_{i+1}) = A^*(k_i)y(k_i) + D'(k_i)u(k_i) \quad (8-54)$$

$$z(k_i) = B'(k_i)y(k_i) + E(k_i)u(k_i) \quad (8-55)$$

где

$$A^*(k_i) = [A^{-1}(k_{i+1})]' \quad (8-56)$$

В этом случае определение сопряженной системы несколько иное, чем в п. 4.11, чтобы дуальная связь между управляемостью и наблюдаемостью была однозначной. Предполагается, что $A(k_i)$ является невырожденной для всех $k_i = k_0, k_1, \dots, k_N$.

Пусть переходная матрица состояния для $A(k_i)$ описана соотношениями

$$\psi_1(k_{j+1}, k_1) = \begin{cases} A(k_j)A(k_{j-1}) \dots A(k_1) & k_{j+1} > k_1 \\ I & k_{j+1} = k_1 \end{cases} \quad (8-57)$$

а переходная матрица состояния для $A^*(k_i)$ записана в виде

$$\psi_2(k_j, k_0) = \begin{cases} A^*(k_{j-1})A^*(k_{j-2}) \dots A^*(k_0) & k_j > k_0 \\ I & k_j = k_0 \end{cases} \quad (8-58)$$

Используя (8-56), получим

$$\begin{aligned} \psi_2(k_j, k_0) &= [A^{-1}(k_j)]' [A^{-1}(k_{j-1})]' \dots [A^{-1}(k_1)]' = \\ &= [A^{-1}(k_1)A^{-1}(k_2) \dots A^{-1}(k_j)]' \end{aligned} \quad (8-59)$$

Транспонированная матрица $\Psi_2(k_j, k_0)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_2'(k_j, k_0) &= [A^{-1}(k_1)A^{-1}(k_2) \dots A^{-1}(k_j)] = \\ &= [A(k_j)A(k_{j-1}) \dots A(k_1)]^{-1} = \psi_1(k_1, k_{j+1}) \quad k_{j+1} > k_0 \quad (8-60)\end{aligned}$$

Заметим, что соотношение (8-60) подобно выражению, которое связывает матрицы состояния исходной и сопряженной систем в непрерывном случае.

Дуальная связь между управляемостью по состоянию и наблюдаемостью цифровых систем, т. е. систем 1 и 2, выражается следующим образом.

Система 1. Управляемость по состоянию:

$$[\psi_1(k_N, k_1)B(k_0) \quad \psi_1(k_N, k_2)B(k_1) \quad \dots \quad B(k_{N-1})]$$

Наблюдаемость:

$$[D'(k_0) \quad \psi_1'(k_1, k_0)D'(k_1) \quad \dots \quad \psi_1'(k_{N-1}, k_0)D'(k_{N-1})]$$

Система 2. Наблюдаемость:

$$[B(k_0) \quad \psi_2'(k_1, k_0)B(k_1) \quad \dots \quad \psi_2'(k_{N-1}, k_0)B(k_{N-1})]$$

Управляемость по состоянию:

$$[\psi_2(k_N, k_1)D'(k_0) \quad \psi_2(k_N, k_2)D'(k_1) \quad \dots \quad D'(k_{N-1})]$$

С учетом соотношения (8-60) запишем матрицу наблюдаемости для системы 2

$$\begin{aligned}L_2(k_0, k_{N-1}) &= [B(k_0) \quad \psi_2'(k_1, k_0)B(k_1) \quad \dots \quad \psi_2'(k_{N-1}, k_0)B(k_{N-1})] = \\ &= [B(k_0) \quad \psi_1(k_1, k_2)B(k_1) \quad \dots \quad \psi_1(k_1, k_N)B(k_{N-1})] \quad (8-61)\end{aligned}$$

Поэтому, чтобы матрица $\Psi_1(k_N, k_1)$ была невырожденной, ранг $L_2(k_0, k_{N-1})$ должен совпадать с рангом матрицы

$$\begin{aligned}\psi_1(k_N, k_1)L_2(k_0, k_{N-1}) &= \\ &= [\psi_1(k_N, k_1)B(k_0) \quad \psi_1(k_N, k_2)B(k_1) \quad \dots \quad B(k_{N-1})] \quad (8-62)\end{aligned}$$

Таким образом управляемость по состоянию системы 1 подразумевает наблюдаемость ее модифицированной сопряженной системы, т. е. системы 2. Используя этот подход, можно легко показать, что условие наблюдаемости системы 1 совпадает с условием управляемости по состоянию системы 2.

Полезно выяснить, почему определение сопряженной системы должно быть несколько модифицировано [см. уравнение (8-56)], с тем чтобы установить дуальную связь между управляемостью по состоянию и наблюдаемостью для этих двух систем. Следует заметить, что при определении условия управляемости состояние изменяется от $x(k_0)$ до $x(k_N)$, в то время как при определении наблюдаемости $x(k_0)$ в выражении (8-38) используются только состояния от $x(k_1)$ до $x(k_{N-1})$. Это один из возможных способов объяснения, почему индексы в переходных матрицах состояния этих двух систем отличаются друг от друга.

Для цифровых стационарных систем связь сопряженных систем может определяться обычным образом.

Система 1:

$$\mathbf{x}(k_{i+1}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k_i) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k_i) \quad (8-63)$$

$$\mathbf{c}(k_i) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k_i) + \mathbf{E}\mathbf{u}(k_i) \quad (8-64)$$

Система 2:

$$\mathbf{y}(k_{i+1}) = \mathbf{A}^*\mathbf{y}(k_i) + \mathbf{D}'\mathbf{u}(k_i) \quad (8-65)$$

$$\mathbf{z}(k_i) = \mathbf{B}'\mathbf{y}(k_i) + \mathbf{E}\mathbf{u}(k_i) \quad (8-66)$$

где

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}^{-1})' \quad (8-67)$$

Связь между переходными матрицами состояния этих двух систем выражается соотношением

$$\psi_1(k_i) = [\psi_2^{-1}(k_i)]^{-1} = \sum_{j=1}^i \mathbf{A}^j \quad (8-68)$$

Дуальная связь между управляемостью по состоянию и наблюдаемостью этих систем очевидна.

8.9. СВЯЗЬ МЕЖДУ УПРАВЛЯЕМОСТЬЮ, НАБЛЮДАЕМОСТЬЮ И ПЕРЕДАТОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В классических методах анализа и синтеза систем управления для описания линейных стационарных систем, как правило, используются передаточные функции. Одно из преимуществ их использования состоит в том, что управляемость по состоянию и наблюдаемость непосредственно связаны с минимальным порядком передаточной функции. Следующая теорема устанавливает связь между управляемостью и наблюдаемостью и компенсацией полюсов и нулей в передаточной функции.

Т е о р е м а 8.17. Управляемость, наблюдаемость и передаточные функции. Если в передаточной функции, связывающей входной и выходной сигналы линейной стационарной цифровой системы, имеется компенсация полюсов и нулей, то в зависимости от выбора переменных состояния система является либо неуправляемой по состоянию, либо ненаблюдаемой, либо и той и другой одновременно. Если в передаточной функции отсутствует компенсация нулей и полюсов, систему всегда можно описать уравнениями динамики как полностью управляемую и наблюдаемую.

Доказательство. Предположим, что цифровая система n -го порядка с одним входом и одним выходом и различными собственными значениями описывается уравнениями динамики

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (8-69)$$

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) \quad (8-70)$$

Приведем матрицу \mathbf{A} к диагональному виду с помощью $(n \times n)$ -мерной

матрицы Вандермонда P вида (4-203). Новое уравнение состояния имеет вид

$$y(k+1) = \Lambda y(k) + \Gamma u(k) \quad (8-71)$$

где $\Lambda = P^{-1}AP$. Уравнение выхода преобразуется к виду

$$c(k) = Fy(k) \quad (8-72)$$

где $F = DP$. Векторы состояния $x(k)$ и $y(k)$ связаны соотношением

$$x(k) = Py(k) \quad (8-73)$$

Поскольку матрица Λ является диагональной, i -е ($i = 1, 2, \dots, n$) уравнение системы (8-71) имеет вид

$$y_i(k+1) = \lambda_i y_i(k) + \gamma_i u(k) \quad (8-74)$$

где λ_i — собственное значение матрицы A , γ_i — i -й элемент матрицы Γ . В рассматриваемом случае Γ — $(n \times 1)$ -мерная матрица. Вычисляя z -преобразование от обеих частей уравнения (8-74) и полагая начальные условия нулевыми, получим связь между $Y_i(z)$ и $U(z)$ посредством передаточной функции

$$Y_i(z) = \frac{\gamma_i}{z - \lambda_i} U(z) \quad (8-75)$$

Уравнение (8-72) описывается z -преобразованием

$$C(z) = FY(z) = DPY(z) \quad (8-76)$$

Рассмотрим $(1 \times n)$ -мерную матрицу

$$D = [d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_n] \quad (8-77)$$

Тогда

$$F = DP = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n] \quad (8-78)$$

где

$$f_i = d_1 + d_2 \lambda_i + \dots + d_n \lambda_i^{n-1} \quad (8-79)$$

для $i = 1, 2, \dots, n$. Используя соотношения (8-75) и (8-78), запишем уравнение (8-76) в виде

$$C(z) = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n] \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1}{z - \lambda_1} \\ \frac{\gamma_2}{z - \lambda_2} \\ \vdots \\ \frac{\gamma_n}{z - \lambda_n} \end{bmatrix} U(z) \quad (8-80)$$

или

$$\frac{C(z)}{U(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i \gamma_i}{z - \lambda_i} \quad (8-81)$$

Последнее уравнение представляет собой передаточную функцию системы в форме элементарных слагаемых. Если в передаточной функции (8-81) имеется компенсация полюса и нуля, то соответствующий коэффициент в правой части уравнения должен быть нулевым. Предположим, что сокращается полюс $z = \lambda_j$, тогда

$$f_j \gamma_j = 0$$

Отсюда следует, что либо $f_j = 0$, либо $\gamma_j = 0$, либо и то и другое одновременно. Поскольку γ_j есть j -й элемент матрицы Γ , равенство $\gamma_j = 0$ означает, что система неуправляема. В то же время, если $f_j = 0$, где f_j есть j -й элемент матрицы F , то система ненаблюдаема.

8.10. ЗАВИСИМОСТЬ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ ОТ ПЕРИОДА КВАНТОВАНИЯ

Поскольку в цифровой системе управления присутствуют операции квантования по времени, условие управляемости и наблюдаемости может зависеть от периода квантования T . Для импульсных систем, описываемых уравнениями состояния (8-22), условие управляемости по состоянию заключается в том, что матрица Q (8-23) имеет ранг n . Это означает, что если

$$Q_i = \phi(iT)\theta(T) = Q_j = \phi(jT)\theta(T) \quad (8-82)$$

для $i, j = 1, 2, \dots, N-1, i \neq j$, и $T \neq 0$, то система будет неуправляемой. По аналогии из выражения (8-45) следует, что если

$$\phi(iT)'D' = \phi(jT)'D' \quad (8-83)$$

для $i, j = 1, 2, \dots, N-1, i \neq j$, и $T \neq 0$, то система будет ненаблюдаемой. Поэтому последние два условия приводят к выводу о том, что если для определенного периода квантования

$$\phi(iT) = \phi(jT)$$

для $i, j = 1, 2, \dots, N-1, i \neq j$, то система одновременно неуправляема и ненаблюдаема. В следующем примере рассматривается цифровая система, для которой управляемость и наблюдаемость зависят от периода квантования.

Пример 8.1. Предположим, что передаточная функция линейного процесса описывается выражением

$$G(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (8-84)$$

Очевидно, что непрерывная система является управляемой и наблюдаемой, поскольку в $G(s)$ отсутствует компенсация полюсов и нулей.

Передаточная функция $G(s)$ заменяется следующими уравнениями состояния:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (8-85)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega^2 x_1(t) + u(t) \quad (8-86)$$

Переходная матрица состояния при замене t на T имеет вид

$$\phi(T) = \begin{bmatrix} \cos \omega T & \frac{1}{\omega} \sin \omega T \\ -\omega \sin \omega T & \cos \omega T \end{bmatrix} \quad (8-87)$$

Поскольку $\cos \omega T = \pm 1$ и $\sin \omega T = 0$ при $\omega T = n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, система является неуправляемой и ненаблюдаемой при $\omega = n\pi/T$.

8.11. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ ПРИМЕРЫ

В этом параграфе приведено несколько примеров для иллюстрации применения рассмотренных выше методов проверки управляемости и наблюдаемости.

Пример 8.2. Один из методов проверки линейных систем с различными собственными значениями на управляемость состоит в диагонализации матрицы A и последующем анализе свойств строк матрицы Γ , описываемой выражением (8-33). Однако некоторые матрицы A с кратными собственными значениями также могут быть диагонализированы, поэтому, хотя матрица A является диагональной, а в матрице Γ отсутствуют целиком нулевые строки, это не означает, что система является полностью управляемой. Рассмотрим цифровую систему, описываемую следующими уравнениями:

$$x_1(k+1) = ax_1(k) + b_1 u(k) \quad (8-88)$$

$$x_2(k+1) = ax_2(k) + b_2 u(k) \quad (8-89)$$

$b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Совершенно ясно, что эта система является неуправляемой, хотя A — диагональная матрица, а в матрице $\Gamma = [b_1 \ b_2]$ отсутствуют нулевые строки. Чтобы убедиться в этом, необходимо просто составить матрицу $[\Gamma \ A\Gamma]$ и показать, что она является вырожденной. С физической точки зрения состояния, описываемые уравнениями (8-88) и (8-89), являются несвязанными. Однако, поскольку динамика этих состояний совпадает, невозможно независимо управлять ими с помощью одной входной переменной.

Убедимся в том, что система не является управляемой по состоянию с помощью соответствующих теорем.

(Теорема 8.3):

$$Q = [B \ AB] = \begin{bmatrix} b_1 & ab_1 \\ b_2 & ab_2 \end{bmatrix} \quad (8-90)$$

Поскольку Q является вырожденной матрицей, пара $[A, B]$ неуправляема*.

(Теорема 8.4):

Для $N=2$

$$W = ABB'A' + BB' = \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{bmatrix} (1 + a^2) \quad (8-91)$$

* По определению, пара $[A, B]$ неуправляема, если система $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ не является полностью управляемой. — Прим. ред. пер.

Поскольку W является вырожденной матрицей, пара $[A, B]$ неуправляема.

(Теорема 8.5) :

$$(zI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} z - a & 0 \\ 0 & z - a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{z - a} \\ \frac{b_2}{z - a} \end{bmatrix} \quad (8-92)$$

Поскольку строки матрицы $(zI - A)^{-1}$ линейно зависимы, пара $[A, B]$ неуправляема.

(Теорема 8.6) :

$$[\lambda I - A : B] = \begin{bmatrix} \lambda - a & 0 & : & b_1 \\ 0 & \lambda - a & : & b_2 \end{bmatrix} \quad (8-93)$$

Тогда

$$[\lambda_1 I - A : B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & : & b_1 \\ 0 & 0 & : & b_2 \end{bmatrix} \quad (8-94)$$

$$[\lambda_2 I - A : B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & : & b_1 \\ 0 & 0 & : & b_2 \end{bmatrix} \quad (8-95)$$

Поскольку ранг матриц $[\lambda_1 I - A : B]$ и $[\lambda_2 I - A : B]$ не равен 2, пара $[A, B]$ неуправляема.

Пример 8.3. Рассмотрим линейную цифровую систему управления, входная и выходная переменные которой связаны разностным уравнением

$$c(k+2) + 2c(k+1) + c(k) = u(k+1) + u(k) \quad (8-96)$$

Это разностное уравнение преобразуется в следующие уравнения динамики:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8-97)$$

$$c(k) = Dx(k) \quad (8-98)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = [1 \quad 1]$$

Поскольку матрица

$$Q = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (8-99)$$

является невырожденной, система полностью управляема по состоянию для переменных состояния $x_1(k)$ и $x_2(k)$. Наблюдаемость системы исследуется с помощью матрицы

$$L = [D' \quad A'D'] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (8-100)$$

Поскольку L является вырожденной матрицей, система ненаблюдаема, т. е. не все состояния $x_1(k)$ и $x_2(k)$ могут быть определены по известной выходной переменной $c(0)$ за конечный интервал времени $(0, N)$.

Система, описываемая уравнениями (8-97) и (8-98), является управляемой по выходу, так как матрица

$$T = [DAB \quad DB] = [-1 \quad 1] \quad (8-101)$$

имеет ранг, равный 1.

Отсюда следует, что выбранные переменные состояния, связанные уравнениями (8-97) и (8-98), образуют систему, которая является управляемой по состоянию и по выходу, но ненаблюдаемой.

Переопределим теперь переменные состояния системы таким образом, чтобы уравнения динамики по-прежнему имели вид (8-97) и (8-98), но при других матрицах коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$D = [1 \quad 0]$$

Проводя анализ, подобный проделанному выше, находим, что

$$Q = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ — система неуправляема по состоянию;} \quad (8-102)$$

$$L = [D' \quad AD'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ — система наблюдаема;} \quad (8-103)$$

$$T = [DAB \quad DB] = [1 \quad 1] \text{ — система управляема по выходу.} \quad (8-104)$$

Изменения в свойствах управляемости и наблюдаемости в зависимости от выбора переменных состояния объясняются тем, что в передаточной функции системы (8-96) имеется компенсация полюса и нуля. Управляемость по выходу не зависит от выбора переменных состояния.

Пример 8.4. В этом примере мы рассмотрим некоторые практические вопросы применения критериев управляемости и наблюдаемости. Большинство реальных систем управления технологическими процессами и аэрокосмическими объектами имеют высокий порядок, поэтому применение критериев управляемости и наблюдаемости не будет столь наглядным, как в примерах 8.2 и 8.3.

Цифровая модель динамики космического корабля описывается векторно-матричным уравнением состояния

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8-105)$$

где A и B — соответственно матрицы размерностями 11×11 и 11×1 . Для удобства представим матрицу A в блочном виде следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (8-106)$$

где $A_{11} = 0(5 \times 5)$;

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-107)$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0,176 & 0 & 0 & -85,26 & -2,56 \\ 0 & -134,6 & -1,06 & 0 & 0 \\ 0 & -0,69 & 10,17 & 0 & 0 \\ 0 & 19,9 & -293,0 & 0 & 0 \\ -0,366 & 0 & 0 & -52,86 & -0,168 \\ 6,02 & 0 & 0 & -85,4 & -18,84 \end{bmatrix} \quad (8-108)$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -6,1 & -0,188 & 0 & -0,113 & -0,077 \\ -24,0 & 0 & 0 & 0,02 & 0 & 0 \\ 0,69 & 0 & 0 & 0,304 & 0 & 0 \\ -19,9 & 0 & 0 & -8,76 & 2,0 & 0 \\ 0 & -3,66 & 2,36 & -11,67 & -7,0 & -0,005 \\ 0 & -6,1 & -0,188 & 0 & -0,113 & -0,388 \end{bmatrix} \quad (8-109)$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -7,28 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0,478 \ -7,28]' \quad (8-110)$$

Поскольку система имеет только один вход, исследовать ее управляемость можно с помощью вычисления определителя матрицы размерностью 11×11

$$Q = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{10}B] \quad (8-111)$$

который равен $|Q| = 4,46 \cdot 10^{18}$. Поэтому система полностью управляема по состоянию. Однако при синтезе закона управления с обратной связью по состоянию по заданному расположению собственных значений замкнутой системы возникают определенные вычислительные трудности. Очевидно, некоторые характерные особенности системы не могут быть объяснены только матрицей управляемости (8-111). Для дополнительной проверки управляемости преобразуем матрицу A к диагональному виду с помощью преобразования подобия. Собственные значения матрицы различны и имеют следующий вид:

$$-0,603 \pm j30,15$$

$$-0,0328 \pm j1,76$$

$$-0,0276 \pm j1,36 \\ \pm j1,0$$

$$-0,00056 \pm j0,29$$

$$0$$

Матрица Γ несвязанной системы имеет вид

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -8,16 \times 10^{-2} \\ 1,67 \times 10^{-3} \\ -9,32 \times 10^{-1} \\ 2,99 \times 10^{-2} \\ -1,32 \times 10^{-3} \\ 9,00 \times 10^{-2} \\ -1,76 \times 10^{-1} \\ 1,54 \times 10^{-10} \\ 1,97 \times 10^{-3} \\ -3,19 \\ -2,79 \times 10^{-16} \end{bmatrix} \quad (8-112)$$

Заметим, что теоретически, поскольку матрица Q (8-111) имеет ранг, равный 11, и ни один из элементов Γ не равен нулю, система должна быть полностью управляемой по состоянию. Однако, как следует из выражения (8-112), последний элемент матрицы Γ приблизительно равен нулю и систему можно считать "почти неуправляемой". С практической точки зрения, поскольку элементы Γ отражают связь не связанных между собой состояний с входной переменной, значения этих элементов показывают степень управляемости соответствующих состояний. В рассматриваемом случае последний элемент матрицы Γ соответствует собственному значению матрицы A , равному нулю, и практически невозможно изменить это собственное значение с помощью обратной связи по состоянию.

Таким образом, хотя различные методы анализа управляемости и наблюдаемости кажутся эквивалентными, при решении практических задач благодаря количественным характеристикам системы один метод может оказаться более наглядным, чем другой. В рассматриваемом случае, хотя проверка ранга матрицы Q показывает, что система является полностью управляемой по состоянию, метод, основанный на преобразовании подобия, указывает на трудности в управлении определенными состояниями.

8.12. ТЕОРЕМЫ ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ УПРАВЛЯЕМОСТИ

В гл. 4 были описаны преобразование подобия и преобразование к канонической форме фазовой переменной, которые в определенных случаях облегчают анализ и синтез цифровых систем управления. Рассмотрим влияние этих невырожденных преобразований на свойства управляемости и наблюдаемости. Кроме того, исследуем влияние на управляемость и наблюдаемость обратных связей по состоянию и по выходной переменной.

Т е о р е м а 8.18. Теорема об инвариантности управляемости относительно невырожденного преобразования. Рассмотрим цифровую систему управления n -го порядка

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8-113)$$

в которой пара $[A, B]$ является полностью управляемой. Преобразование $x(k) = Py(k)$, где P — невырожденная матрица, приводит систему (8-113) к виду

$$y(k+1) = Ay(k) + Gu(k) \quad (8-114)$$

где $A = P^{-1}AP$; $G = P^{-1}B$. Тогда пара $[A, G]$ также является управляемой.

Доказательство. Матрица управляемости системы (8-114) имеет вид

$$\begin{aligned} S_1 &= [\Gamma \quad A\Gamma \quad A^2\Gamma \quad \dots \quad A^{n-1}\Gamma] = \\ &= [P^{-1}B \quad P^{-1}AP P^{-1}B \quad (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)P^{-1}B \quad \dots \quad (P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}B] = \\ &= P^{-1}[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] = P^{-1}S \end{aligned} \quad (8-15)$$

где

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (8-116)$$

так как пара $[A, B]$ является управляемой и матрица S имеет ранг n . Таким образом, поскольку P^{-1} является невырожденной матрицей, ранг матриц S_1 и S совпадает, и пара $[A, G]$ полностью управляема.

В действительности приведенная теорема при соответствующем вы-

боре невырожденной матрицы P распространяется на преобразование подобия и преобразование к канонической форме фазовой переменной.

Т е о р е м а 8.19. Теорема об инвариантности наблюдаемости относительно невырожденного преобразования. Рассмотрим цифровую систему управления n -го порядка

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8-117)$$

$$c(k) = Dx(k) \quad (8-118)$$

в которой пара $[A, D]$ является полностью наблюдаемой. Преобразование $x(k) = Py(k)$, где P — невырожденная матрица, приводит систему уравнений к виду

$$y(k+1) = \Lambda y(k) + Gu(k) \quad (8-119)$$

$$c(k) = DPy(k) \quad (8-120)$$

Тогда пара $[\Lambda, DP]$ также является наблюдаемой.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 8-18. Составим матрицу наблюдаемости

$$V_1 = [(DP)' \quad \Lambda'(DP)' \quad (\Lambda^2)'(DP)' \quad \dots \quad (\Lambda^{n-1})'(DP)'] \quad (8-121)$$

Подставляя $\Lambda = P^{-1}AP$ в последнее выражение и упрощая, можно показать, что V_1 имеет ранг, равный n , если пара $[A, D]$ является наблюдаемой.

Т е о р е м а 8.20. Теорема об управляемости замкнутых систем с обратной связью по состоянию. Если цифровая система

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8-122)$$

является полностью управляемой, то замкнутая система, получаемая с помощью обратной связи по состоянию

$$u(k) = r(k) - Gx(k) \quad (8-123)$$

и описываемая уравнением вида

$$x(k+1) = (A - BG)x(k) + Br(k) \quad (8-124)$$

также является полностью управляемой. В то же время, если пара $[A, B]$ неуправляема, не существует матрицы G , которая делает пару $[A - BG, B]$ управляемой. Иными словами, если разомкнутая система является неуправляемой, то она не может быть преобразована в управляемую с помощью обратной связи по состоянию.

Доказательство. Под управляемостью пары $[A, B]$ понимают, что существует управление $u(k)$ на интервале $[0, N]$ такое, что из начального состояния $x(0)$ система переводится в состояние $x(N)$ за конечный интервал времени N . Перепишем уравнение (8-123) в виде

$$r(k) = u(k) + Gx(k) \quad (8-125)$$

Это уравнение описывает управляющее воздействие в замкнутой системе. Таким образом, если существует $u(k)$, которое может перевести систему из $x(0)$ в $x(N)$ за конечное время, то, как следует из выражения

(8-125), $r(k)$ также существует, и замкнутая система также является управляемой.

И, наоборот, если пара $[A, B]$ неуправляема, т. е. не существует управление $u(k)$, которое переводит систему из некоторого состояния $x(0)$ в состояние $x(N)$ за конечное время N , то невозможно найти входную переменную $r(k)$, которая аналогичным образом влияла бы на состояние $x(k)$. В противном случае можно было бы выбрать $u(k)$ вида (8-123) для управления разомкнутой системой.

Т е о р е м а 8.21. Теорема о наблюдаемости замкнутых систем с обратной связью по состоянию. Если система, описываемая уравнениями (8-117) и (8-118), является управляемой и наблюдаемой, то обратная связь по состоянию (8-123) может сделать систему ненаблюдаемой. Другими словами, наблюдаемости разомкнутой и замкнутой систем в случае обратной связи по состоянию не зависят друг от друга.

Следующий пример иллюстрирует зависимость между наблюдаемостью и обратной связью по состоянию.

Пример 8.5. Для системы, описываемой уравнениями (8-117) и (8-118), положим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Можно показать, что пара $[A, B]$ управляема, а пара $[A, D]$ наблюдаема.

Пусть обратная связь по состоянию определяется соотношением

$$u(k) = r(k) - Gx(k) \quad (8-126)$$

где

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \quad (8-127)$$

Тогда замкнутая система описывается уравнением состояния

$$x(k+1) = (A - BG)x(k) + Br(k) \quad (8-128)$$

$$A - BG = \begin{bmatrix} -g_1 & 1 - g_2 \\ -2 - g_1 & -3 - g_2 \end{bmatrix} \quad (8-129)$$

Матрица наблюдаемости замкнутой системы имеет вид

$$V = \begin{bmatrix} D' & (A - BG)'D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3g_1 - 4 \\ 2 & -3g_2 - 5 \end{bmatrix} \quad (8-130)$$

Определитель матрицы V равен

$$|V| = 6g_1 - 3g_2 + 3 \quad (8-131)$$

Поэтому, если g_1 и g_2 выбрать такими, чтобы $|V| = 0$, то замкнутая система будет ненаблюдаемой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kreindler, E., and Sarachik, P. E., "On the Concepts of Controllability and Observability of Linear Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-9, April 1964, pp. 129-136.
2. Kalman, R. E., "Contributions to the Theory of Optimal Control," *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 5, 1960, pp. 102-119.
3. Kalman, R. E., "On the General Theory of Control Systems," *Proc IFAC*, Vol. 1, Butterworths, London, 1961, pp. 481-492.
4. Locatelli, A., and Rinaldi, S., "Controllability versus Sensitivity in Linear Discrete Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-15, April 1970, pp. 254-255.
5. Weiss, L., "Controllability, Realization and Stability of Discrete-Time Systems," *SIAM Journal on Control*, Vol. 10, May 1972, pp. 230-251.
6. Mullis, C. T., "On the Controllability of Discrete Linear Systems with Output Feedback," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-18, December 1973, pp. 608-615.
7. Kwon, W. H., and Pearson, A. E., "On the Stabilization of a Discrete Constant Linear System," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-20, December 1975, pp. 800-801.
8. Hautus, M. L. J., "Controllability and Stabilizability of Sampled Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-17, August 1972, pp. 528-531.
9. Brockett, R. W., "Poles, Zeros, and Feedback: State Space Interpretation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-10, April 1965, pp. 129-135.

ГЛАВА 9. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

9.1. ВВЕДЕНИЕ

При проектировании как цифровых, так и непрерывных систем управления приходится решать, по сути дела, одни и те же задачи. Чаще всего речь идет о процессе, которым нужно управлять таким образом, чтобы его выходные переменные удовлетворяли некоторым заранее установленным критериям качества. Традиционная философия проектирования вначале приводит проектировщика к решению об использовании обратной связи для образования сигнала ошибки между входным и выходным сигналами. Затем выясняется необходимость применения регулятора, который обрабатывал бы сигнал ошибки так, чтобы удовлетворить все требования, предъявляемые к качеству системы. В цифровых системах решение аналогичной задачи отличается большой гибкостью и имеет множество вариантов. Например, при использовании цифровых или дифференциальных датчиков, выходной сигнал которых имеет дискретный характер, система управления объективно является цифровой или дискретной. Возможен также случай, когда проектировщик намеренно включает в состав системы цифровой регулятор. В свою очередь, если цифровой сигнал сглаживается фиксатором, то можно использовать и аналоговый регулятор. Таким образом, когда речь идет о проектировании цифровой системы управления, то существует множество структурных решений, и окончательный выбор полностью находится во власти проектировщика.

В этой главе рассмотрено несколько методов синтеза цифровых систем управления. Одни методы являются традиционными, другие же основаны на описании системы переменными состояниями.

В основе традиционных методов синтеза лежит идея о жестко заданной структуре системы, когда проектировщик с самого начала устанавливает ее конфигурацию, включая управляемый процесс и регулятор. На рис. 9.1–9.4 показаны структурные схемы цифровых систем, наиболее часто встречающиеся на практике. На рис. 9.1 изображена структура цифровой системы с аналоговым регулятором. Квантователь может символизировать то, что информация на входе системы и в канале обратной связи имеет цифровой или импульсный характер вследствие применения цифровых преобразователей. Однако аналоговый регулятор может обрабатывать выходной сигнал квантователя только после его декодирования и сглаживания с помощью фиксатора.

Рис. 9.2 иллюстрирует классический пример цифровой системы управления, в которой цифровой регулятор помещен в прямую цепь.

На рис. 9.3 показан случай, когда аналоговый регулятор находится в цепи местной обратной связи. Схема, показанная на рис. 9.4, отличается

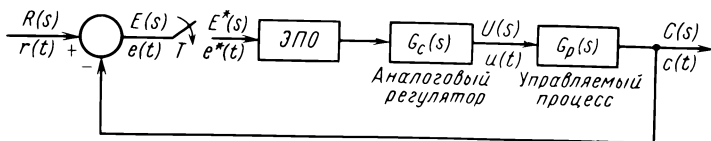


Рис. 9.1. Цифровая система управления с последовательно включенным аналоговым регулятором

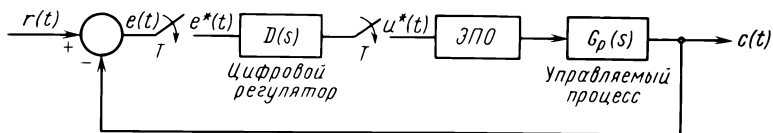


Рис. 9.2. Цифровая система управления с последовательно включенным цифровым регулятором

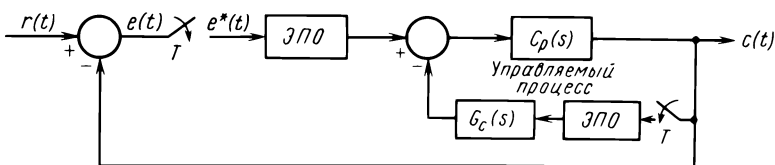


Рис. 9.3. Цифровая система управления с аналоговым регулятором в цепи местной обратной связи

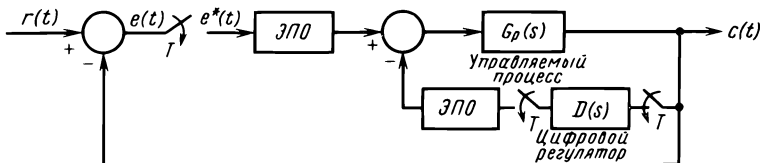


Рис. 9.4. Цифровая система управления с цифровым регулятором в цепи местной обратной связи

от схемы приведенной на рис. 9.3, тем, что аналоговый регулятор в цепи местной обратной связи заменен цифровым.

Мощным средством синтеза систем в пространстве состояний является использование обратной связи по переменным состояниям или по выходу. На рис. 9.5 показана структурная схема многомерной цифровой системы управления с обратной связью по переменным состояниям, причем предполагается, что все эти переменные доступны наблюдению. На практике это условие не всегда выполняется, поэтому необходимо либо использовать наблюдатель, дающий оценку всех или некоторых переменных состояний, либо просто осуществлять обратную связь по выходу. На рис. 9.6 изображена структура многомерной цифровой системы с обратной связью по состоянию и наблюдателем, а на рис. 9.7 — система с обратной связью по выходу. Предполагается, что в системе рис. 9.6 вектор выхода $c(k)$ доступен наблюдению. Выход наблюдателя дает оценку вектора состояния $x(k)$. В системе, показанной на рис. 9.7, выход $c(k)$ непосредственно

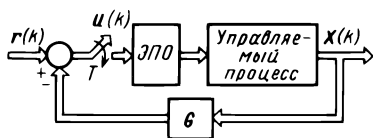


Рис. 9.5. Цифровая система управления с обратной связью по состоянию

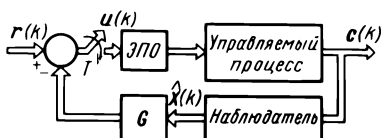


Рис. 9.6. Цифровая система управления с обратной связью по состоянию и наблюдателем

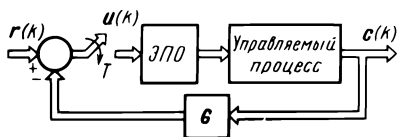


Рис. 9.7. Цифровая система управления с обратной связью по выходу

преобразуется матрицей коэффициентов обратной связи G . Поскольку в общем случае выходных переменных меньше, чем переменных состояния, то с точки зрения синтеза систем обратная связь по выходу менее эффективна, чем обратная связь по состоянию.

9.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ КОРРЕКЦИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛОГОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Рассмотрим синтез цифровой системы управления с аналоговым регулятором, включенным последовательно, как показано на рис. 9.1. Поскольку регулятор расположен между экстраполятором и управляемым процессом, запишем импульсную передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$\frac{C(z)}{E(z)} = z [G_{h0}(s)G_c(s)G_p(s)] = (1 - z^{-1}) z \left[\frac{G_c(s)G_p(s)}{s} \right] \quad (9-1)$$

Целью синтеза является определение физически реализуемой передаточной функции $G_c(s)$ аналогового регулятора, обеспечивающего требуемые показатели качества цифровой системы управления. К сожалению, как следует из выражения (9-1), передаточная функция $G_c(s)$ преобразуется совместно с функцией процесса $G_p(s)$, поэтому нельзя независимо исследовать эффект, производимый регулятором. Ниже рассмотрен метод аппроксимации цифровой системы аналоговой моделью и объяснено, почему его следует применять с осторожностью. Приведен также метод синтеза на основе w -преобразования.

Аппроксимация операции выборки и хранения постоянным запаздыванием. Метод, которым инженер-практик часто пользуется, чтобы аппроксимировать дискретную систему аналоговой моделью, основан на замене устройства выборки и хранения звеном чистого запаздывания. Строго говоря, такая замена не является точной, и к применению этого метода для решения задач синтеза следует относиться с большой осторожностью.

Воспользуемся выражением (2-108) для частотной функции экстраполятора нулевого порядка:

$$G_{h0}(j\omega) = T \frac{\sin \pi(\omega/\omega_s)}{(\omega\pi/\omega_s)} e^{-j\pi(\omega/\omega_s)} \quad (9-2)$$

С учетом этого выражения запишем импульсную передаточную функцию (в частотной области), соответствующую произведению $G_{h0}(s) G_c(s) G_p(s)$, в виде

$$G_{h0} G_c G_p^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{h0}(j\omega + jn\omega_s) G_c(j\omega + jn\omega_s) G_p(j\omega + jn\omega_s) =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T \frac{\sin \frac{\omega + n\omega_s}{2} T}{\frac{\omega + n\omega_s}{2} T} e^{-j(\omega + n\omega_s)T/2} G_c(j\omega + jn\omega_s) G_p(j\omega + jn\omega_s) \quad (9-3)$$

Поскольку в большинстве систем управления $G_p(j\omega)$ имеет свойства фильтра нижних частот, а отношение $\sin 1/2(\omega + n\omega_s)T / [1/2(\omega + n\omega_s)T]$ на низких частотах приблизительно равно единице, то $G_{h0} G_c G_p^*(j\omega)$ можно аппроксимировать только первым членом ряда ($n=0$). Тогда

$$G_{h0} G_c G_p^*(j\omega) \cong G_c(j\omega) G_p(j\omega) e^{-j\omega T/2} \quad (9-4)$$

а это означает, что операция выборки и хранения заменяется чистым запаздыванием, равным половине периода квантования. Полученная таким образом эквивалентная непрерывная система изображена на рис. 9.8. Эффект замены операции выборки и хранения чистым запаздыванием наглядно поясняется с помощью рис. 9.9. Рисунок показывает, что если аппроксимировать выходной сигнал экстраполятора нулевого порядка штриховой кривой, проходящей через середины плоских вершин соответствующих импульсов, то будет получен непрерывный сигнал почти такой же формы, как сигнал на входе квантователя, но сдвинутый в сторону запаздывания на половину периода квантования. Однако следует предупредить, что такой способ аппроксимации не применим к широкому классу импульсных систем управления. Вообще говоря, не ясно, достаточно ли одного члена для аппроксимации бесконечного ряда (9-3), и не вполне

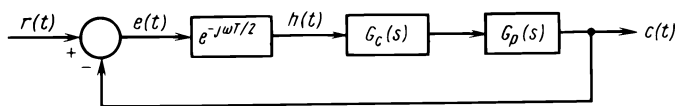


Рис. 9.8. Аппроксимация импульсной системы, изображенной на рис. 9.1, в виде непрерывной системы с запаздыванием

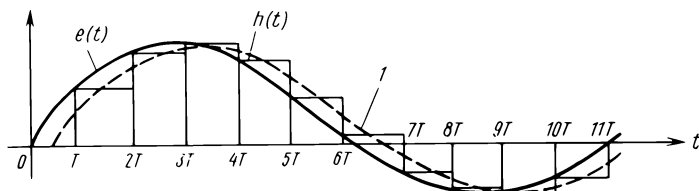


Рис. 9.9. Типичные процессы, иллюстрирующие замену операции выборки и хранения чистым запаздыванием $T/2$:

1 — аппроксимация $h(t)$

понятно, почему аппроксимирующая кривая должна иметь такой вид, как на рис. 9.9. Следовательно, непрерывную систему с запаздыванием (см. рис. 9.8) допустимо использовать в качестве аппроксимации импульсной системы (см. рис. 9.1) только при достаточно малом периоде квантования. В противном случае, если бы все импульсные системы можно было аппроксимировать непрерывными системами с запаздыванием, не было бы необходимости разрабатывать и изучать методы анализа и синтеза цифровых систем управления. Однако если замена УВХ звеном запаздывания является обоснованной, то к эквивалентной системе можно непосредственно применять методы синтеза, разработанные для непрерывных систем управления.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий скрытые опасности, связанные с аппроксимацией УВХ звеном запаздывания.

Пример 9.1. Пусть в системе, изображенной на рис. 9.1, управляемый процесс имеет передаточную функцию

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (9-5)$$

причем $K = 1,57$ и $T = 1,57$ с. Полагая сначала, что регулятор отсутствует, т. е. $G_c(s) = 1$, запишем импульсную передаточную функцию эквивалентной системы с запаздыванием (см. рис. 9.8):

$$G_{h0}G_p^*(s) \cong e^{-Ts/2}G_p(s) \quad (9-6)$$

Подставляя (9-5) в (9-6), получим

$$G_{h0}G_p^*(s) \cong e^{-Ts/2} \frac{K}{s(s+1)} \quad (9-7)$$

Логарифмические частотные характеристики для этой передаточной функции при $K = 1,57$ и $T = 1,57$ с изображены на рис. 9.10. На рисунке видно, что в нескорректированной системе, т. е. при $G_c(s) = 1$, запас по фазе приблизительно равен нулю. Если же не прибегать к аппроксимации УВХ звеном запаздывания и построить точные характеристики для $G_{h0}G_p^*(j\omega)$, то запас по фазе будет составлять около 15° . Таким образом, аппроксимация импульсной системы выражением (9-4) обычно дает пессимистическую оценку устойчивости. Кроме того, истинная фазовая характеристика для $G_{h0}G_p^*(j\omega)$ претерпевает разрыв при $\omega = \omega_s$ (в нашем примере 4 рад/с), так как член $\sin(1/2)(\omega T)/[(1/2)(\omega T)]$ в этой точке меняет знак. Если же пользоваться выражением (9-4), то фазовая характеристика будет непрерывной при всех значениях ω .

Предположим теперь, что при синтезе системы требуется обеспечить запас по фазе не менее 45° . В непрерывной системе для этого можно попытаться использовать регулятор, дающий либо опережение по фазе (фильтр верхних частот), либо отставание по фазе (фильтр нижних частот). На рис. 9.10 видно, что фазовая характеристика $G_{h0}G_p^*(j\omega)$ резко убывает после частоты 1 рад/с, поэтому регулятор с опережением по фазе в данном случае может оказаться неэффективным. Как известно [1], регулятор с опережением по фазе приводит к увеличению частоты среза и, следовательно, дополнительного положительного фазового сдвига может

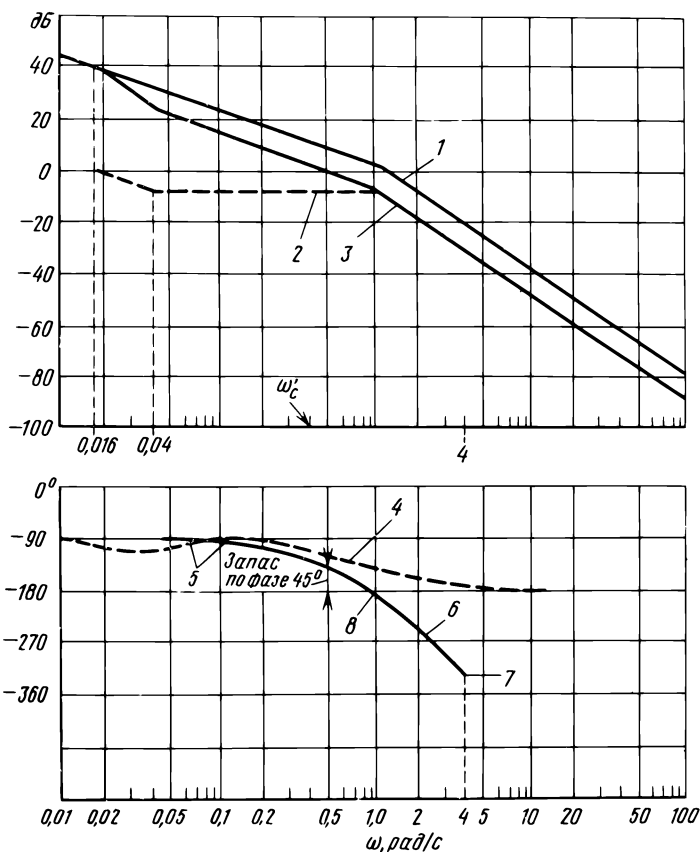


Рис. 9.10. Логарифмические частотные характеристики импульсной системы управления:

1 – амплитудная характеристика $G_{h0}G_p^*(j\omega)$ для нескорректированной системы; 2 – амплитудная характеристика цепи с отставанием по фазе; 3 – амплитудная характеристика $G_{h0}G_cG_p^*(j\omega)$ для скорректированной системы; 4 – фазовая характеристика для $1/[s(s+1)]$; 5 – фазовая характеристика $G_{h0}G_cG_p^*(j\omega)$ для скорректированной системы; 6 – фазовая характеристика нескорректированной системы; 7 – точка разрыва непрерывности фазовой характеристики; 8 – запас по фазе в нескорректированной системе, равный нулю

оказаться недостаточно, чтобы скомпенсировать резкое убывание фазы нескорректированной системы в окрестности новой частоты среза. Поэтому более подходящим для данной системы оказывается регулятор с отставанием по фазе.

Типичный регулятор с отставанием по фазе описывается передаточной функцией

$$G_c(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \tau s} \quad (9-8)$$

где a и τ – константы, причем a всегда меньше единицы. В соответствии с рис. 9.10 запас по фазе 45° можно обеспечить, если изменить частоту сре-

за с 1 на 0,5 рад/с. Поскольку отрицательный фазовый сдвиг, вносимый корректирующим устройством, неизбежно повлияет на результирующую фазовую характеристику скорректированной системы, новую частоту среза следует выбрать немного меньшей, чем 0,5 рад/с, например, $\omega'_c = 0,4$ рад/с. По логарифмическим характеристикам (см. рис. 9.10) находим, что на этой новой частоте среза усиление $G_{h0}G_p^*(j\omega)$ составляет примерно 8 дБ. Следовательно, регулятор на той же частоте должен вносить ослабление сигнала на 8 дБ, что приводит к требованию

$$20 \lg a = -8 \text{ дБ}, \quad (9-9)$$

откуда

$$a = 10^{-8/20} = 10^{-0,4} = 0,4 \quad (9-10)$$

Полученное значение жестко фиксирует расстояние между точками излома амплитудной характеристики регулятора. Для определения точного положения этих изломов, $1/(a\tau)$ и $1/\tau$, необходимо сначала поместить правый излом $\omega = 1/(a\tau)$ в таком месте, чтобы отставание по фазе, создаваемое регулятором на новой частоте среза, было незначительным. Это достигается при условии, что правый излом находится на частоте в 10 раз меньшей, чем новая частота среза, т. е.

$$\frac{1}{a\tau} = \frac{\omega'_c}{10} = \frac{0,4}{10} = 0,04 \text{ рад/с}. \quad (9-11)$$

Тогда сразу определяется и частота, соответствующая левому излому:

$$1/\tau = 0,04a = 0,016 \text{ рад/с}. \quad (9-12)$$

Подставляя найденные значения a и τ в выражение (9.8), получим передаточную функцию регулятора

$$G_c(s) = \frac{1 + 25s}{1 + 62,5s} \quad (9-13)$$

Амплитудная и фазовая характеристики скорректированной системы с передаточной функцией $G_{h0}G_cG_p^*(j\omega)$ изображены на рис. 9.10. Запас по фазе, как и требовалось, равен 45° .

При постановке задачи синтеза мы потребовали, чтобы запас по фазе в скорректированной системе был равен 45° . Этот запас выбран исходя из того, что на практике ему соответствует приемлемая относительная устойчивость систем данного типа. Однако непрерывная система — это всего лишь аппроксимация исходной импульсной системы, поэтому значение запаса по фазе 45° является спорным. Судить о том, насколько хороша спроектированная система, можно только, подставив регулятор с передаточной функцией (9-13) в импульсную систему, приведенную на рис. 9.1, и оценив ее качество.

При $K = 1,57$ передаточная функция разомкнутой импульсной системы с коррекцией принимает вид

$$\mathcal{Z}[G_{h0}(s)G_c(s)G_p(s)] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{0,628(s + 0,04)}{s^2(s + 1)(s + 0,016)}\right] \quad (9-14)$$

или

$$\mathcal{Z}[G_{h0}(s)G_c(s)G_p(s)] = \frac{2,667z^2 - 0,815z - 0,172}{(z-1)(z-0,208)(z-0,984)} \quad (9-15)$$

Замкнутая система имеет передаточную функцию

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{2,667z^2 - 0,815z - 0,172}{z^3 + 0,475z^2 + 0,582z - 0,384} \quad (9-16)$$

Не прибегая к вычислениям, по первому члену в числителе этого выражения сразу можно сказать, что максимальное значение переходной функции будет, по крайней мере, равно 2,667. На рис. 9.11 изображена переходная функция скорректированной импульсной системы. Она, хотя и затухает, имеет сильно выраженный колебательный характер, поэтому в данном случае запас по фазе 45° не может служить адекватным критерием качества системы. Это означает, что аппроксимация УВХ звеном запаздывания может привести к значительным погрешностям при синтезе импульсных систем управления.

Синтез с помощью билинейного преобразования. Выше (см., например, п. 7.2) было введено билинейное преобразование, которое отображает передаточную функцию $G(z)$ цифровой системы управления в новую функцию $G(w)$ комплексной переменной w . Это w -преобразование переводит единичную окружность на z -плоскости в мнимую ось на w -плоскости. Как было показано в гл. 7, для $G(w)$ можно построить логарифмические частотные характеристики, т. е. зависимость амплитуды в децибелах и фазы в градусах от ω_w , являющейся мнимой частью w . Непосредственно по этим кривым можно определить запасы по модулю и по фазе, характеризующие степень устойчивости системы. Амплитудную и фазовую характеристики можно перенести на диаграмму Никольса [1] и получить, таким образом, информацию о резонансном пике, резонансной частоте и полосе пропускания.

Ниже рассмотрим прямой метод синтеза цифровых систем управления с аналоговыми регуляторами, основанный на применении w -преобразования*. Этот метод не связан с какой-либо аппроксимацией УВХ и обладает всеми преимуществами синтеза в частотной области.

Применительно к структурной схеме, приведенной на рис. 9.1, можно предложить следующие основные этапы синтеза.

1. Определяют передаточную функцию системы без коррекции

$$G_{h0}G_p(w) = G_{h0}G_p(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} \quad (9-17)$$

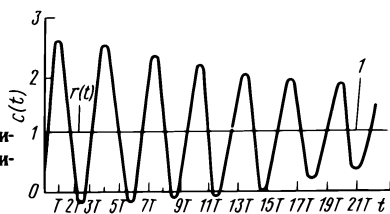


Рис. 9.11. Переходная функция импульсной системы управления, синтезированной в примере 9.1:

1 — установившееся значение $c(t)$

* Синтез цифровых систем можно также производить в w' -области. С w' -преобразованием читатель может познакомиться в работе [4].

2. Полагая $w = j\omega_w$, строят логарифмические частотные характеристики для функции $G_{h0}G_p(w)$ и, если необходимо, амплитудную и фазовую характеристики переносят на диаграмму Никольса. С помощью последней находят запасы устойчивости по модулю и по фазе, резонансный пик, резонансную частоту и полосу пропускания и оценивают динамические свойства нескорректированной системы.

3. Если необходима коррекция системы, то $G_{h0}G_p(w)$ умножают на передаточную функцию последовательного регулятора $G'_c(w)$. Регулятор вводят в целях изменения формы частотных характеристик $G_{h0}G_p(w)$. В соответствии со своей передаточной функцией в w -области он может давать либо опережение по фазе, либо отставание по фазе, либо сочетать в себе и то и другое. Важно отметить, что характеристики типа фильтра нижних или верхних частот в w -области могут и не иметь прямых аналогов в s -области. Поэтому отнесение регулятора к тому или иному типу по виду его передаточной функции $G'_c(w)$ производится исключительно с той целью, чтобы использовать известные представления о влиянии аналогичных регуляторов на коррекцию непрерывных систем в s -области.

По полученной передаточной функции $G'_c(w)G_{h0}G_p(w)$ необходимо сначала перейти к выражению $G_c(s)G_{h0}(s)G_p(s)$, а затем выделить передаточную функцию регулятора $G_c(s)$, поскольку произведение $G_{h0}(s)G_p(s)$ известно.

Одно из важных требований заключается в том, чтобы передаточная функция $G_c(s)$ была физически реализуемой. Кроме того, если возможно, функция $G_c(s)$ должна быть реализована в виде схемы, содержащей только элементы R и C . Отсюда вытекают следующие требования к $G_c(s)$:

а) полюсы функции $G_c(s)$ должны лежать в левой половине s -плоскости и быть простыми и действительными;

б) количество полюсов $G_c(s)$ должно быть больше числа нулей или равно ему. Вообще говоря, нули $G_c(s)$ могут лежать где угодно на s -плоскости. Из (а) следует, что область расположения полюсов $G_c(s)$ ограничена отрицательным направлением действительной оси. Так как полюсы $G_c(s)$ обусловлены полюсами $G'_c(w)$, а отрицательное направление действительной оси на s -плоскости соответствует отрезку $-1 \leq w \leq 0$ на w -плоскости (рис. 9.12), то это означает, что $G'_c(w)$ может иметь только простые действительные полюсы в диапазоне от -1 до 0 .

4. Если найдено $G'_c(w)G_{h0}G_p(w)$, то, чтобы получить выражение $G_c(s)G_{h0}(s)G_p(s)$, надо сделать обратный переход от переменной w к переменной s . Следует отметить, что

$$G'_c(w)G_{h0}G_p(w) = [G_c G_{h0}G_p(z)] \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} \quad (9-18)$$

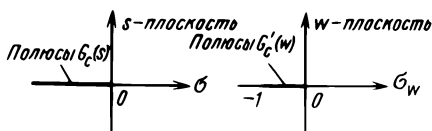
но

$$G'_c(w) \neq \mathfrak{F} [G_c(s)] \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} \quad (9-19)$$

z -преобразование для передаточной функции разомкнутой системы без коррекции имеет вид

$$G_{h0}G_p(z) = (1 - z^{-1}) \mathfrak{F} \left[\frac{G_p(s)}{s} \right] \quad (9-20)$$

рис. 9.12. Расположение полюсов $G_c(s)$ и $G_c(w)$, соответствующее физически реализуемым RC-схемам



Переходя к переменной w , получим

$$G_{h0}G_p(w) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G_p(s)}{s} \right] \bigg|_{z = \frac{1+w}{1-w}} = \frac{2w}{1+w} \mathcal{Z} \left[\frac{G_p(s)}{s} \right] \bigg|_{z = \frac{1+w}{1-w}} \quad (9-21)$$

С учетом последовательного регулятора $G'_c(w)$ запишем передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$G'_c(w)G_{h0}G_p(w) = G_{h0}G_cG_p(w) = \frac{2w}{w+1} \mathcal{Z} \left[\frac{G_c(s)G_p(s)}{s} \right] \bigg|_{z = \frac{1+w}{1-w}} \quad (9-22)$$

или

$$\mathcal{Z} \left[\frac{G_c(s)G_p(s)}{s} \right] \bigg|_{z = \frac{1+w}{1-w}} = \frac{w+1}{2w} G'_c(w)G_{h0}G_p(w) \quad (9-23)$$

Передаточная функция $G_c(s)G_p(s)/s$ получается из выражения (9-23) путем разложения $G'_c(w)G_{h0}G_p(w)$ на сумму элементарных дробей и нахождения соответствующих им оригиналов в области переменной s . Для этой цели можно использовать табл. 9.1, устанавливающую связь между преобразованием Лапласа, z - и w -преобразованиями.

5. Из найденного выражения $G_c(s)G_p(s)/s$ нетрудно получить $G_c(s)$. Однако из-за несоответствия между числом нулей в s - и w -плоскости передаточная функция $G_c(s)$ во многих случаях будет иметь нулей больше, чем полюсов. Чтобы выйти из положения и сделать функцию $G_c(s)$ физически реализуемой, в нее можно добавить один или несколько удаленных полюсов, расположенных на отрицательном направлении действительной оси. Эти добавочные полюсы не должны оказывать сколько-нибудь заметного влияния на показатели качества системы.

Пример 9.2. Решим ту же задачу, что и в примере 9.1, только с помощью билинейного преобразования. Передаточная функция управляемого процесса задана выражением (9-5), где $K = 1,57$; период квантования $T = 1,57$ с.

Передаточная функция разомкнутой системы имеет z -преобразование

$$\mathcal{Z} [G_{h0}(s)G_p(s)] = G_{h0}G_p(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{K}{s^2(s+1)} \right] = \frac{1,22(z+0,598)}{(z-1)(z-0,208)} \quad (9-24)$$

Применяя к этому выражению w -преобразование, получим

$$G_{h0}G_p(w) = G_{h0}G_p(z) \bigg|_{z = \frac{1+w}{1-w}} = \frac{1,232(1+0,251w)(1-w)}{w(1+1,525w)} \quad (9-25)$$

Логарифмические частотные характеристики для $G_{h0}G_p(w)$ изображены на

Преобразование Лапласа $G(s)$	z -преобразование $G(z)$	w -преобразование $G(w)$
$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{w+1}{2w}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{T(1+w)(1-w)}{4w^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2(1+w)(1-w)}{8w^3}$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{1+w}{(1-e^{-aT}) \left[1 + \frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} w \right]}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{(1+w)(1-w)Te^{-aT}}{(1-e^{-aT})^2 \left[1 + \frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} w \right]^2}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\frac{(1+w)(1-w)}{2w \left[1 + \frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} w \right]}$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{1-e^{-aT}}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\frac{T(1-w)(1+w)}{4w^2} - \frac{(1-w)(1+w)}{2aw \left[1 + \frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} w \right]}$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$\frac{(1-w)(1+w) \sin \omega T}{2[(1+w^2) - (1-w^2) \cos \omega T]}$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$	$\frac{w \frac{(1+w)(1-w)e^{-aT} \sin \omega T}{(1+w)^2 - 2(1+w)(1-w)}}{e^{-aT} \cos \omega T + (1-w)e^{-2aT}}$

рис. 9.13. Фазовая характеристика пересекает уровень -180° при частоте $\omega_w = 1$, и нескорректированная система обладает очень малым запасом устойчивости. Чтобы получить запас по фазе 45° , частоту среза нужно сдвинуть в точку $\omega_w = 0,4$, где $|G_{h0}G_p(w)| = 8$ дБ. Для этого амплитудную характеристику в окрестности точки $\omega_w = 0,4$ надо опустить на 8 дБ, не уменьшая при этом коэффициента передачи системы.

Выберем в качестве аналогового регулятора $G'_c(w)$ модель "с отставанием по фазе", т. е.

$$G'_c(w) = \frac{1 + a\tau w}{1 + \tau w} \quad (a < 1) \quad (9-26)$$

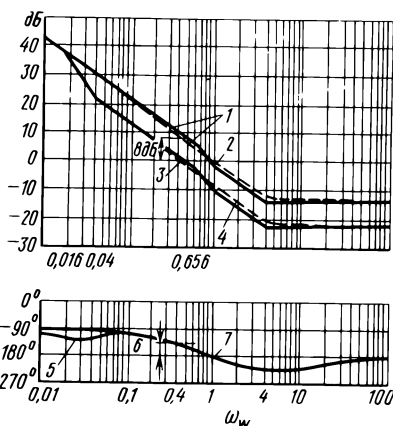
Поскольку требуемое ослабление составляет 8 дБ, то

$$20 \lg a = -8 \text{ дБ},$$

откуда

$$a = 10^{-8/20} = 0,398.$$

Рис. 9.13: Логарифмические частотные характеристики цифровой системы управления: 1 — $|G_{h0}G_P(w)|$ (нескорректированная система); 2 — частота среза; 3 — новая частота среза; 4 — $|G'_c G_{h0} G_P(w)|$ (скорректированная система); 5 — скорректированная фазовая характеристика; 6 — запас по фазе — 45° ; 7 — фазовый сдвиг — 180°



Чтобы отрицательный фазовый сдвиг, вносимый регулятором, незначительно влиял на фазовую характеристику исходной системы, значение $1/(\alpha T)$ должно быть на порядок меньше новой частоты среза. Итак,

$$1/(\alpha T) = 0,04, \text{ или } 1/T = 0,016.$$

Тогда передаточная функция регулятора примет вид

$$G'_c(w) = \frac{1 + 25w}{1 + 62,5w} \quad (9-27)$$

Таким образом,

$$G'_c(w)G_{h0}G_P(w) = \frac{1,232(1 + 0,251w)(1 - w)(1 + 25w)}{w(1 + 1,525w)(1 + 62,5w)} \quad (9-28)$$

Передаточную функцию разомкнутой системы с коррекцией (в z -форме) получим подстановкой $w = (z - 1)/(z + 1)$ в выражение (9-28):

$$G_{h0}G'_cG_P(z) = G'_c(w)G_{h0}G_P(w) \Big|_{w=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,497(z - 0,92)(z + 0,599)}{(z - 0,969)(z - 1)(z - 0,208)} \quad (9-29)$$

Замкнутая скорректированная система имеет передаточную функцию

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_{h0}G'_cG_P(z)}{1 + G_{h0}G'_cG_P(z)} = \frac{0,497z^2 - 0,16z - 0,274}{z^3 - 1,68z^2 + 1,219z - 0,476} \quad (9-30)$$

Переходная функция скорректированной системы изображена на рис. 9.14. Совершенно очевидно, что она намного лучше аналогичной характеристики системы, синтезированной в примере 9.1.

Для завершения процедуры синтеза нам осталось определить передаточную функцию аналогового регулятора $G_c(s)$. На основании выражения (9-23) имеем

$$\mathcal{Z} \left[\frac{G_c(s)G_P(s)}{s} \right] \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \frac{w + 1}{2w} \left[\frac{1,232(1 + 0,251w)(1 - w)(1 + 25w)}{w(1 + 1,525w)(1 + 62,5w)} \right] \quad (9-31)$$

Функцию, стоящую в квадратных скобках в правой части последнего выражения, надо разложить на сумму элементарных дробей. При этом важно учитывать вид передаточной функции $G_P(s)/s$. Поскольку $G_P(s)/s$ имеет два полюса $s = 0$, а в табл. 9.1 функции $G(s) = 1/s^2$ соответствует w -преобразование $G(w)$, содержащее в числителе член $(1 + w)(1 - w)$, то, чтобы сохранить этот член, необходимо раскладывать на элементарные дроби выражение $G'_c(w)G_{h0}G_P(w)/(1 - w)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{G'_c(w)G_{h0}G_P(w)}{1 - w} &= \frac{1,232(1 + 0,251w)(1 + 25w)}{w(1 + 1,525w)(1 + 62,5w)} = \\ &= \frac{0,0807(w + 3,984)(w + 0,04)}{w(w + 0,656)(w + 0,016)} = \frac{1,2313}{w} - \frac{0,3959}{w + 0,656} - \frac{0,7515}{w + 0,016}. \end{aligned} \quad (9-32)$$

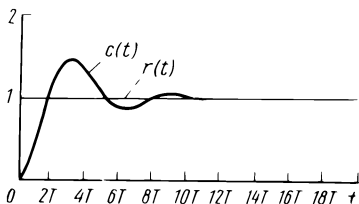


Рис. 9.14. Переходная функция синтезированной системы

Подставляя этот результат в выражение (9-31), получим

$$\mathcal{Z}[G_C(s)G_P(s)/s] \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}} =$$

$$= \frac{1,2313(1+w)(1-w)}{2w^2} - \frac{0,6035(1+w)(1-w)}{2w(1+1,525w)} - \frac{46,97(1+w)(1-w)}{2w(1+62,5w)} \quad (9-33)$$

По табл. 9.1 каждому слагаемому выражения (9-33) подбираем соответствующую пару, в результате чего получаем

$$\frac{G_C(s)G_P(s)}{s} = \frac{1,568}{s} - \frac{0,6035}{s(s+1)} - \frac{2302}{s(s+0,0204)} = \frac{0,032 - 2300s - 2301s^2}{s^2(s+1)(s+0,0204)}, \quad (9-34)$$

откуда

$$G_C(s) = \frac{0,0204 - 1465s - 1465s^2}{s + 0,0204} \quad (9-35)$$

Чтобы $G_C(s)$ была физически реализуемой, добавим в (9-35) удаленный полюс $s = -10$; при этом, чтобы не изменять коэффициент передачи системы, $G_C(s)$ надо умножить на $10/(s+10)$. В итоге получим

$$G_C(s) = \frac{0,204 - 14650s - 14650s^2}{(s+0,0204)(s+10)} \quad (9-36)$$

9.3. КОРРЕКЦИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛОГОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ В ЦЕПИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Качество системы управления можно улучшить также путем включения аналогового регулятора в цепь обратной связи. Например, использование датчика скорости в цепи обратной связи цифровой системы управления космическим кораблем (см. рис. 6.5) в первую очередь имеет целью обеспечить затухание процессов. Задача синтеза может включать в себя определение такого значения коэффициента передачи датчика K_r , при котором система будет обладать требуемыми характеристиками. В общем случае можно считать, что неизвестной и подлежащей определению является передаточная функция $H(s)$ элемента обратной связи.

Чтобы показать, как реализуется коррекция с помощью аналоговых регуляторов в цепи обратной связи, рассмотрим систему, изображенную на рис. 9.15. Разумеется, могут встретиться случаи, когда регуляторы включаются и в прямую цепь и в цепь обратной связи.

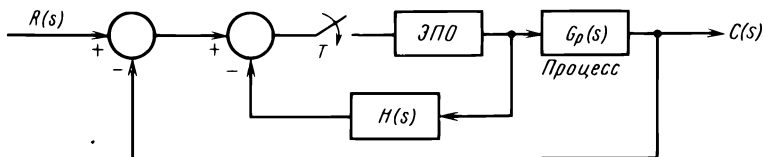


Рис. 9.15. Цифровая система управления с аналоговым регулятором в цепи обратной связи

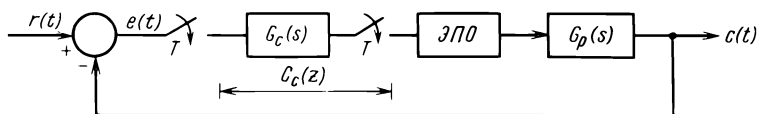


Рис. 9.16. Цифровая система управления с последовательным цифровым регулятором

На рис. 9.16 показана цифровая система управления с цифровым регулятором в прямой цепи. Поскольку передаточная функция цифрового регулятора $G_c(z)$ отделена от экстраполятора и управляемого процесса, то эффекты, обусловленные изменением параметров $G_c(z)$, исследуются очень просто. Будем считать, что для системы, показанной на рис. 9.16, найдена желаемая передаточная функция $G_c(z)$, удовлетворяющая критерию качества этой системы. Покажем, что в системе, приведенной на рис. 9.15, регулятор в цепи обратной связи можно синтезировать, получив соотношение между $H(s)$ и $G_c(s)$, обеспечивающее эквивалентность систем, изображенных на рис. 9.16 и 9.15. Эти системы имеют в замкнутом состоянии передаточные функции соответственно

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_{h0}G_p(z)}{1 + G_c(z)G_{h0}G_p(z)} \quad (9-37)$$

и

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_{h0}G_p(z)}{1 + G_{h0}H(z) + G_{h0}G_p(z)} \quad (9-38)$$

Умножая числитель и знаменатель последнего выражения на $G_c(z)$, получим

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_{h0}G_p(z)}{G_c(z) + G_c(z)G_{h0}H(z) + G_c(z)G_{h0}G_p(z)} \quad (9-39)$$

Сравнивая передаточные функции (9-37) и (9-39), видим, что они будут равны, если выполняется условие

$$1 + G_c(z)G_{h0}G_p(z) = G_c(z) + G_c(z)G_{h0}H(z) + G_c(z)G_{h0}G_p(z) \quad (9-40)$$

Решение этого уравнения относительно $G_{h0}H(z)$ дает

$$G_{h0}H(z) = \frac{1 - G_c(z)}{G_c(z)} \quad (9-41)$$

или

$$\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] = \frac{z}{z-1} \frac{1 - G_c(z)}{G_c(z)} \quad (9-42)$$

Тогда по известной передаточной функции $G_c(z)$ цифрового регулятора в системе (см. рис. 9.16), используя выражение (9-42), можно найти передаточную функцию $H(s)$ для эквивалентной системы (см. рис. 9.15).

Однако при определении $G_c(z)$ важно иметь в виду условие физической реализуемости $H(s)$. Иными словами, встает вопрос, какими должны быть ограничения на $G_c(z)$, чтобы $H(s)$ стала физически реализуемой передаточной функцией. Чтобы передаточная функция была физически ре-

лизуемой, система, описываемая ею, не должна давать реакцию на выходе раньше, чем появится входной сигнал. Это справедливо как для непрерывных, так и для цифровых систем. Если функция $H(s)$ физически реализуемая, то $H(s)/s$ — тоже реализуемая, поэтому разложение $\mathcal{Z}[H(s)/s]$ в степенной ряд не должно содержать положительных степеней z . Пусть $\mathcal{Z}[H(s)/s]$ представлено в виде

$$\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}} \quad (9-43)$$

Эта передаточная функция является физически реализуемой, если $b_0 \neq 0$, а m и n — любые положительные целые числа.

Подставляя (9-43) в (9-42) и решая последнее относительно $G_c(z)$, получим

$$\dot{G}_c(z) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k} + (1 - z^{-1}) \sum_{k=0}^n a_k z^{-k}} \quad (9-44)$$

Таким образом, условие физической реализуемости $H(s)/s$ сводится к требованию, чтобы свободный член полинома в числителе функции $G_c(z)$ был отличен от нуля ($b_0 \neq 0$).

Чтобы $H(s)$ можно было реализовать в виде RC -схемы, все полюсы этой передаточной функции должны быть простыми и лежать на отрицательном направлении действительной оси, исключая начало координат и бесконечность. Нули $H(s)$ могут быть любыми. Тогда $H(s)/s$ можно представить в виде разложения на сумму элементарных дробей:

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{s + s_k} \quad (9-45)$$

где A_0 и A_k — константы; $-s_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) — простые отрицательные полюсы. Запишем z -преобразование $H(s)/s$ в виде

$$\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] = \frac{A_0 z}{z - 1} + \sum_{k=1}^m \frac{A_k z}{z - e^{-s_k T}} \quad (9-46)$$

Оно имеет только один полюс $z = 1$, а все остальные полюсы расположены внутри единичной окружности $|z| = 1$. Из выражения (9-44) следует, что $G_c(z)$ имеет одинаковое число полюсов и нулей. Кроме того, сравнивая выражения (9-43) и (9-44), видим, что полюсы $\mathcal{Z}[H(s)/s]$ обуславливаются нулями $G_c(z)$. Следовательно, для реализуемости $H(s)$ в виде RC -схемы необходимо, во-первых, чтобы $G_c(z)$ имела выражение вида (9-44) с равным числом полюсов и нулей и, во-вторых, чтобы все нули $G_c(z)$ были простыми и лежали на z -плоскости внутри единичной окружности. Никаких ограничений на положение полюсов $G_c(z)$ не существует, поэтому передаточная функция RC -схемы $H(s)$ может быть получена даже из неус-

тойчивой $G_c(z)$, которая удовлетворяет сформулированным выше требованиям. Следующий пример иллюстрирует замену цифрового регулятора эквивалентным аналоговым регулятором в цепи обратной связи (см. рис. 9.15).

Пример 9.3. Пусть в системе, изображенной на рис. 9.16, цифровой регулятор имеет передаточную функцию

$$G_c(z) = \frac{(1 - 0,2z^{-1})(1 - 0,1z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,8z^{-1})} \quad (9-47)$$

В данном случае нас не интересует, как получено выражение $G_c(z)$ и какое влияние оказывает регулятор на систему.

Так как $G_c(z)$ имеет равное количество полюсов и нулей, причем все нули являются простыми и расположены внутри единичной окружности $|z| = 1$, то $H(s)$ можно реализовать в виде RC -схемы. Подставляя (9-47) в (9-42), получим

$$\mathcal{Z} \left[\frac{H(s)}{s} \right] = \frac{-z^{-1} + 0,38z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,2z^{-1})(1 - 0,1z^{-1})} = \frac{-0,86z}{z - 1} - \frac{2,25z}{z - 0,2} + \frac{3,11z}{z - 0,1} \quad (9-48)$$

Далее находим преобразования Лапласа, соответствующие каждому члену выражения (9-48), и получаем (при $T = 1$ с)

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{-0,86}{s} - \frac{2,25}{s + 1,61} + \frac{3,11}{s + 2,3} \quad (9-49)$$

откуда следует

$$H(s) = \frac{-3,53s - 3,18}{(s + 1,61)(s + 2,3)} \quad (9-50)$$

Итак, был рассмотрен метод коррекции цифровых систем с помощью аналоговых регуляторов в цепи обратной связи. Синтез таких регуляторов основан на использовании эквивалентного последовательного цифрового регулятора. Так как передаточная функция цифрового регулятора $G_c(z)$ отделена от передаточной функции процесса $G_{h0}G_p(z)$ квантователем, то синтез $G_c(z)$ производится гораздо проще. Ниже в этой главе рассмотрены методы синтеза цифровых систем управления с цифровыми регуляторами.

9.4. ЦИФРОВОЙ РЕГУЛЯТОР

Наиболее универсальным способом коррекции цифровых систем управления является использование цифрового регулятора. Функцию цифровых регуляторов (контроллеров) могут выполнять импульсные фильтры или микроЭВМ. По сравнению с аналоговым регулятором, цифровой регулятор в состоянии обеспечить гораздо лучшее качество системы управления. Другое преимущество систем с цифровыми регуляторами заключается в том, что алгоритм управления легко может быть изменен сменой программы контроллера, особенно тогда, когда контроллер построен на основе микропроцессора; в аналоговых регуляторах сделать это намного труднее.

Прежде чем заниматься собственно синтезом цифровых регуляторов, остановимся на их физической реализуемости и исполнении. Цифровой ре-

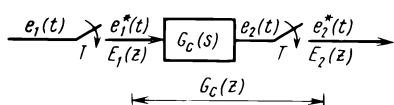


Рис. 9.17. Структурная схема цифрового регулятора

гулятор можно изобразить в виде структурной схемы (рис. 9.17). Входной сигнал регулятора $e_1^*(t)$ является последовательностью чисел $e_1(kT)$, аналитически представляющих собой выборку значений сигнала $e_1(t)$. Цифровой регулятор выполняет определенные линейные преобразования последовательности $e_1(kT)$ и вырабатывает выходную последовательность $e_2(kT)$ в виде квантованного сигнала $e_2^*(t)$. Передаточная функция цифрового регулятора определяется в виде

$$G_c(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} \quad (9-51)$$

Существует множество практических способов реализации цифрового регулятора. Он может представлять собой пассивный четырехполюсник, расположенный между двумя устройствами выборки и хранения. Возможна также реализация цифрового регулятора на основе микроЭВМ. В последнем случае необходимо помнить, что ЭВМ присущи такие лимитирующие факторы, как разрядность, объем памяти и скорость счета. В данной главе, посвященной синтезу цифровых регуляторов, мы не будем учитывать эти факторы. Их влияние рассмотрено в гл. 13. Читатель только должен иметь в виду, что если аналитически определены структура и параметры регулятора, то далеко не всегда точно так же будет выглядеть регулятор, выполненный на реальных элементах.

Физическая реализуемость. При синтезе цифрового регулятора прежде всего требуется, чтобы передаточная функция $G_c(z)$ была физически реализуемой. Функцию $G_c(z)$ можно представить как отношение двух полиномов

$$G_c(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (9-52)$$

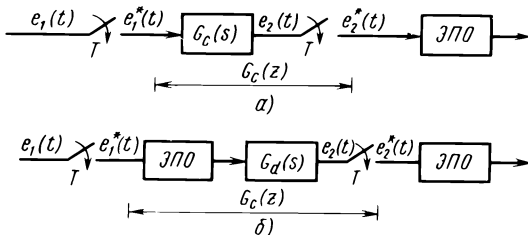
При разложении $G_c(z)$ в ряд по степеням z^{-1} коэффициенты этого ряда характеризуют значения весовой последовательности цифрового регулятора. Коэффициент при члене z^{-k} ($k = 0, 1, 2, \dots$) соответствует значению весовой последовательности при $t = kT$. Чтобы цифровой регулятор был физически реализуемым, разложение $G_c(z)$ в ряд не должно содержать положительных степеней z . Наличие хотя бы одного члена с положительной степенью z означает "упреждение", т. е. показывает, что выходной сигнал опережает входной. Следовательно, чтобы передаточная функция (9-52) была физически реализуемой, порядок ее знаменателя должен быть больше порядка числителя или равен ему, т. е. $n \geq m$.

Если передаточная функция цифрового регулятора имеет одинаковое количество полюсов и нулей, то ее можно представить в виде

$$G_c(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad (9-53)$$

где n и m — любые положительные целые числа. В этом случае чтобы раз-

Рис. 9.18. Реализация цифрового регулятора в виде последовательного импульсного фильтра:
 а – цифровой регулятор; б, – последовательный импульсный фильтр



положение $G_c(z)$ в степенной ряд не имело положительных степеней z , знаменатель не должен содержать множителя z^{-1} , если $b_0 \neq 0$. Следовательно, при $b_0 \neq 0$ условием физической реализуемости $G_c(z)$ является $a_0 \neq 0$.

Реализация цифровых регуляторов в виде импульсных фильтров. Импульсный фильтр – это электрический четырехполюсник, расположенный между двумя устройствами выборки и хранения. Цифровой регулятор может быть реализован в виде *последовательного импульсного фильтра, импульсного фильтра в цепи обратной связи или импульсного фильтра комбинированного типа.*

1. *Последовательный импульсный фильтр.* Реализация цифрового регулятора в виде последовательного импульсного фильтра показана на рис. 9.18. Экстраполиатор нулевого порядка, подключенный к выходу цифрового регулятора, указывает на то, что цифровой сигнал, прежде чем поступить на вход непрерывного процесса, подвергается Ц/А преобразованию. Этот экстраполиатор сохраняется и в структурной схеме последовательного импульсного фильтра, показанного на рис. 9.18, б. Передаточная функция $G_d(s)$, приведенная на рис. 9.18, б, соответствует произвольной электрической цепи; однако из соображений простоты и дешевизны, предпочтение отдается RC -четырёхполюсникам.

На основании рис. 9.18, б имеем

$$G_c(z) = G_{h0} G_d(z) = \mathcal{Z} [G_{h0}(s) G_d(s)] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G_d(s)}{s} \right] \quad (9-54)$$

Тогда

$$\mathcal{Z} \left[\frac{G_d(s)}{s} \right] = \frac{1}{1 - z^{-1}} G_c(z) \quad (9-55)$$

Это соотношение позволяет определить передаточную функцию последовательного импульсного фильтра по заданной передаточной функции цифрового регулятора $G_c(z)$. Если импульсный фильтр реализуется в виде RC -четырёхполюсника, то все полюсы $G_d(s)$ должны быть простыми и должны лежать на отрицательном направлении действительной оси, исключая начало координат и бесконечность. Нули $G_d(s)$ могут занимать произвольное положение на s -плоскости. Пусть $G_d(s)$ представлено в виде разложения на сумму элементарных дробей:

$$\frac{G_d(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s + s_k} \quad (9-56)$$

где A_0 и A_k – константы; s_k ($k = 1, 2, \dots, n$) суть простые отрицательные действительные полюсы, z – преобразование этого выражения

$$\mathcal{Z} \left[\frac{G_d(s)}{s} \right] = \frac{A_0}{1 - z^{-1}} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{1 - e^{-s_k T} z^{-1}} \quad (9-57)$$

имеет простые положительные действительные полюсы внутри единичной окружности и только один полюс $z = 1$. Сравнивая выражения (9-57) и (9-55), легко видеть, что для соответствия $G_d(s)$ RC -четыреполюснику передаточная функция $G_c(z)$ должна обладать следующими свойствами:

- число полюсов $G_c(z)$ должно быть больше числа нулей этой функции или равно ему;
- нули $G_c(z)$ являются произвольными;
- полюсы $G_c(z)$ должны быть простыми, действительными, положительными и меньше единицы.

Ниже приведен пример, иллюстрирующий реализацию цифрового регулятора в виде импульсного RC -фильтра.

Пример 9.4. Задана передаточная функция цифрового регулятора

$$G_c(z) = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 0,2z^{-1}} \quad (9-58)$$

Период квантования $T = 1$ с.

Требуется реализовать $G_c(z)$ в виде последовательного импульсного фильтра в соответствии со структурной схемой на рис. 9.18, б. Поскольку $G_c(z)$ удовлетворяет трем сформулированным выше условиям, то, подставив (9-58) в (9-55), получим

$$\mathcal{Z} \left[\frac{G_d(s)}{s} \right] = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,2z^{-1})} \quad (9-59)$$

Разложим последнее выражение на элементарные дроби:

$$\mathcal{Z} \left[\frac{G_d(s)}{s} \right] = \frac{0,625}{1 - z^{-1}} + \frac{0,375}{1 - 0,2z^{-1}} \quad (9-60)$$

Таким образом,

$$\frac{G_d(s)}{s} = \frac{0,625}{s} + \frac{0,375}{s + 1,61} = \frac{s + 1}{s(s + 1,61)} \quad (9-61)$$

$$G_d(s) = \frac{s + 1}{s + 1,61} \quad (9-62)$$

Передаточная функция (9-62) реализуется в виде RC -четыреполюсника, показанного на рис. 9.19. Импульсный фильтр получим, дополнив эту схему на входе и выходе квантователями и фиксаторами, как показано на рис. 9.18, б.

2. Импульсный фильтр в цепи обратной связи. На рис. 9.20, б показана структурная схема импульсного фильтра, реализующего функции цифрового регулятора. Непрерывная передаточная функция $H(s)$ соответствует электрическому четырехполюснику, предпочтительно RC -схеме. Чтобы передаточные функции обеих систем, изображенных на рис. 9.20, были одинаковы, должно выполняться следующее условие:

$$G_c(z) = \frac{1}{1 + G_{h0}H(z)} \quad (9-63)$$

Рис. 9.19. Схема, реализующая передаточную функцию $G_d(s) = (s + 1)/(s + 1,61)$

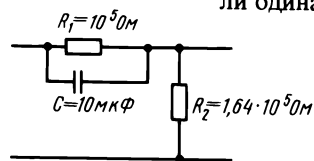
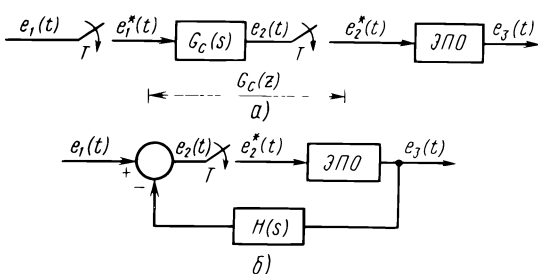


Рис. 9.20. Реализация цифрового регулятора с помощью импульсного фильтра в цепи обратной связи:
 а – цифровой регулятор; б – эквивалентный импульсный фильтр



Таким образом,

$$\mathcal{Z} \left[\frac{H(s)}{s} \right] = \frac{1}{1 - z^{-1}} \left[\frac{1 - G_c(z)}{G_c(z)} \right] \quad (9-64)$$

Отсюда видно, что налицо задача, идентичная случаю коррекции с помощью аналогового регулятора в цепи обратной связи (см. п. 9.3). Действительно, выражение (9-64) имеет тот же вид, что и (9-42). Следовательно можно воспользоваться результатами, полученными выше. Таким образом, чтобы $H(s)$ можно было реализовать в виде RC -четырёхполюсника, передаточная функция цифрового регулятора $G_c(z)$ должна обладать следующими свойствами:

- 1) $G_c(z)$ должна иметь одинаковое число полюсов и нулей;
- 2) полюсы $G_c(z)$ могут быть произвольными;
- 3) нули $G_c(z)$ должны быть простыми, действительными, положительными и должны лежать внутри единичной окружности.

Заметим, что при данной структуре ограничения накладываются на положение нулей, а не полюсов $G_c(z)$. Действительно, функция $H(s)$ может быть реализована в виде RC -четырёхполюсника, даже если $G_c(z)$ имеет полюсы вне единичной окружности и, следовательно, регулятор неустойчив. Пример 9.3 можно рассматривать одновременно как иллюстрацию метода синтеза импульсного фильтра в цепи обратной связи.

3. Импульсный фильтр комбинированного типа. Реализация передаточной функции цифрового регулятора с помощью рассмотренных выше двух типов импульсных фильтров связана с определенными ограничениями. Если передаточная функция цифрового регулятора имеет комплексные полюсы и нули или полюсы и нули, расположенные на единичной окружности или вне ее, то функция не может быть реализована ни с помощью последовательного импульсного фильтра, ни с помощью импульсного фильтра в цепи обратной связи. При последовательной структуре нули передаточной функции $G_c(z)$ могут быть произвольными, а при структуре с обратной связью произвольными являются полюсы $G_c(z)$. Это означает, что определенное сочетание двух типов структурных решений может снять все ограничения на характер полюсов и нулей функции $G_c(z)$, разумеется, за исключением того, что функция $G_c(z)$ должна быть физически реализуемой. Возможны различные варианты таких сочетаний, но мы рассмотрим простой комбинированный импульсный фильтр, изображенный на рис. 9.21. Можно показать, что любая физически реализуемая передаточная функция цифрового регулятора $G_c(z)$ может быть представлена импульс-

рового регулятора $G_c(z)$ выделяются составляющие $G_{cf}(z)$ и $G_{cs}(z)$, рассмотрим $G_c(z)$ следующего вида:

$$G_c(z) = \frac{\overbrace{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,6z^{-1})(1 - 0,8z^{-1})}^{\text{Реализуемые нули}} \underbrace{(1 + 0,2z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})}_{\text{Нереализуемые нули}}}{(1 - 0,2z^{-1})(1 - 0,37z^{-1})(1 - 0,9z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - 0,5z^{-1} + z^{-2})} \quad (9-69)$$

\leftarrow Реализуемые полюсы $\rightarrow \leftarrow$ Нереализуемые полюсы \rightarrow

К *реализуемым* нулям и полюсам относятся такие нули и полюсы $G_c(z)$, которые являются действительными, простыми, положительными и меньшими единицы. Комплексные, неположительные (включая $z = 0$) или кратные нули и полюсы, а также нули и полюсы, расположенные на единичной окружности или вне ее, считаются *нереализуемыми*.

Передаточные функции $G_{cf}(z)$ и $G_{cs}(z)$ образуются в следующем виде:

$$G_{cf}(z) = \frac{\text{Реализуемые нули } G_c(z)}{\text{Нереализуемые полюсы } G_c(z)} = \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,6z^{-1})(1 - 0,8z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0,5z^{-1} + z^{-2})} \quad (9-70)$$

$$G_{cs}(z) = \frac{\text{Нереализуемые нули } G_c(z)}{\text{Реализуемые полюсы } G_c(z)} = \frac{(1 + 0,2z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0,2z^{-1})(1 - 0,37z^{-1})(1 - 0,9z^{-1})} \quad (9-71)$$

Поскольку $G_{cs}(z)$ и $G_{cf}(z)$ теперь удовлетворяют соответствующим требованиям, предъявляемым к передаточным функциям импульсных фильтров, то цифровой регулятор (9-69) может быть реализован в виде комбинированного импульсного фильтра (см. рис. 9.21, б), построенного на RC-элементах.

Рассмотренный выше пример подобран таким образом, что передаточные функции $G_{cf}(z)$ и $G_{cs}(z)$, выделенные из $G_c(z)$, сразу оказываются реализуемыми в виде импульсных фильтров соответствующего типа. Анализ выражения (9-69) показывает, что это возможно лишь тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) число реализуемых полюсов $G_c(z)$ равно числу нереализуемых нулей $G_c(z)$;
- 2) число реализуемых нулей $G_c(z)$ равно числу нереализуемых полюсов $G_c(z)$.

Рассмотрим общий случай, когда сформулированные выше условия не выполняются. Пусть передаточная функция цифрового регулятора имеет вид

$$G_c(z) = \frac{\overbrace{(1 - 0,5z^{-1})(1 + 0,2z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})}^{\text{Реализуемый нуль}} \underbrace{(1 - 0,2z^{-1})(1 - 0,5z^{-1} + z^{-2})}_{\text{Нереализуемые нули}}}{\underbrace{(1 - 0,2z^{-1})(1 - z^{-1})}_{\text{Реализуемый полюс}} \overbrace{(1 - 0,9z^{-1})}^{\text{Нереализуемые полюсы}}} \quad (9-72)$$

Определяем $G_{cf}(z)$ и $G_{cs}(z)$:

$$G_{cf}(z) = \frac{\text{Реализуемый нуль } G_c(z)}{\text{Нереализуемые полюсы } G_c(z)} = \frac{z - 0,5}{(z - 1)(z^2 - 0,5z + 1)}; \quad (9-73)$$

$$G_{cs}(z) = \frac{\text{Нереализуемые нули } G_c(z)}{\text{Реализуемый полюс } G_c(z)} = \frac{(z + 0,2)(z^2 - z + 1)}{z - 0,2}. \quad (9-74)$$

Так как эти передаточные функции имеют неодинаковое количество полюсов и нулей, их нельзя реализовать в виде RC -четырёхполюсников. Чтобы выйти из затруднения, можно изменить вид функций $G_{cf}(z)$ и $G_{cs}(z)$ следующим образом:

$$G_{cf}(z) = \frac{(z - 0,5)(z - a)(z - b)}{(z - 1)(z^2 - 0,5z + 1)} \quad (9-75)$$

$$G_{cs}(z) = \frac{(z + 0,2)(z^2 - z + 1)}{(z - 0,2)(z - a)(z - b)} \quad (9-76)$$

где a и b — действительные числа; $0 < a < 1$; $0 < b < 1$; $a \neq b$; кроме того, a и b не равны другим полюсам и нулям функции $G_c(z)$.

Реализация цифровых регуляторов на ЭВМ. Наиболее универсальным способом построения цифровых регуляторов является использование ЭВМ или цифровых устройств. Применению ЭВМ в качестве контроллеров систем управления отдается предпочтение благодаря таким их преимуществам, как быстроедействие, большой объем памяти и гибкость. Успехи, достигнутые за последние годы в области микроЭВМ, сделали весьма заманчивым их использование в системах управления.

Передаточная функция цифрового регулятора может быть реализована в виде программы ЭВМ. Известны три основных метода программирования: *непосредственное*, *последовательное* и *параллельное*. С аналитической точки зрения эти методы программирования весьма схожи с методами декомпозиции, рассмотренными в гл. 4.

ЭВМ способна выполнять характерные арифметические операции; сложение, умножение, вычитание, запоминание, сдвиг и т. п. Поскольку некоторые микроЭВМ не могут непосредственно перемножать два числа, для этого должна быть написана специальная подпрограмма.

1. Непосредственное программирование. Физически реализуемая дискретная передаточная функция цифрового регулятора может быть записана в виде

$$G_c(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (9-77)$$

где $a_0 \neq 0$, если $b_0 \neq 0$; m и n — положительные целые числа; $E_1(z)$ и $E_2(z)$ — z -преобразования входного и выходного сигналов регулятора соответственно. Чтобы перейти к непосредственному программированию $G_c(z)$, выполним в (9-77) перекрестное умножение, взяв обратное z -преобразование

$$a_0 e_2^*(t) + \sum_{k=1}^n a_k e_2^*(t - kT) = \sum_{k=0}^m b_k e_1^*(t - kT) \quad (9-78)$$

Решение этого уравнения относительно $e_2^*(t)$ дает

$$e_2^*(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^m b_k e_1^*(t - kT) - \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k e_2^*(t - kT) \quad (9-79)$$

Данное выражение показывает, что настоящее значение выходного сигнала $e_2^*(t)$ зависит от настоящего и предшествующих значений входного сигнала $e_1^*(t)$, а также от предшествующих значений выходного сигнала. Чтобы составить программу вычислений по формуле (9-79), необходимы две основные математические операции. Первая операция — это *накопление данных*. В памяти ЭВМ накапливаются предшествующие дискретные значения входного и выходного сигналов, которые затем используются при вычислении $e_2^*(t)$. Вторая операция включает арифметические действия: умножение значений входного и выходного сигналов на постоянные числа, сложение и вычитание.

Положим

$$x^*(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^m b_k e_1^*(t - kT) \quad (9-80)$$

$$y^*(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k e_2^*(t - kT) \quad (9-81)$$

Тогда выражение (9-79) примет вид

$$e_2^*(t) = x^*(t) - y^*(t) \quad (9-82)$$

Непосредственное программирование выражений (9-80) — (9-82) отражено в виде структурной схемы, приведенной на рис. 9.22. Заметим, что накопление данных учитывается элементами задержки сигнала на один период квантования.

Непосредственное программирование по этой схеме требует накопления $n + m$ значений сигналов. При ином подходе к программированию выражения (9-77) можно воспользоваться схемой непосредственной декомпозиции, рассмотренной в гл. 4.

Применяя к выражению (9-77) непосредственную декомпозицию, получим следующие уравнения:

$$E_2(z) = \frac{1}{a_0} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) X(z) \quad (9-83)$$

$$X(z) = \frac{1}{a_0} E_1(z) - \frac{1}{a_0} (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) X(z) \quad (9-84)$$

где $X(z)$ — фиктивная переменная. На рис. 9.23 изображена структурная схема непосредственного программирования с применением декомпозиции. Здесь предполагается, что $n = m$, но схему нетрудно получить и для $n \neq m$. В общем случае количество накопленных значений сигналов (элементов задержки) равно наибольшему из чисел n и m .

2. *Последовательное программирование.* Передаточную функцию $G_c(z)$ можно записать как произведение простейших передаточных функций, каждая из которых реализуется в виде цифровой программы. Тогда программирование $G_c(z)$ можно представить рядом последовательно при-

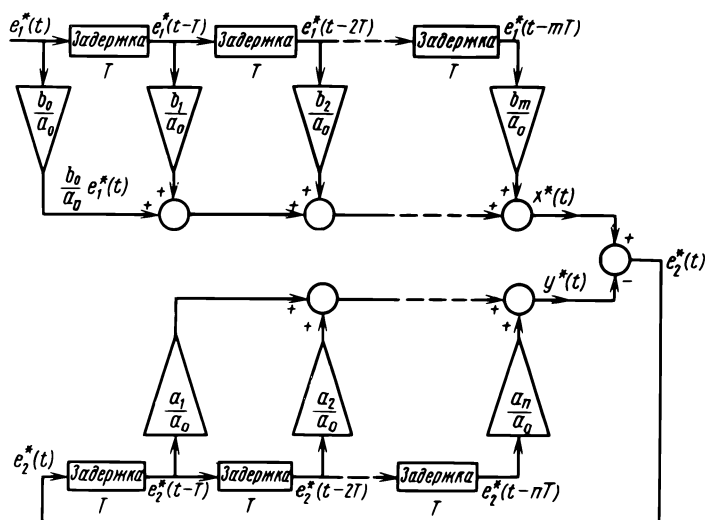


Рис. 9.22. Структурная схема непосредственного программирования $G_c(z)$ по выражению (9-77)

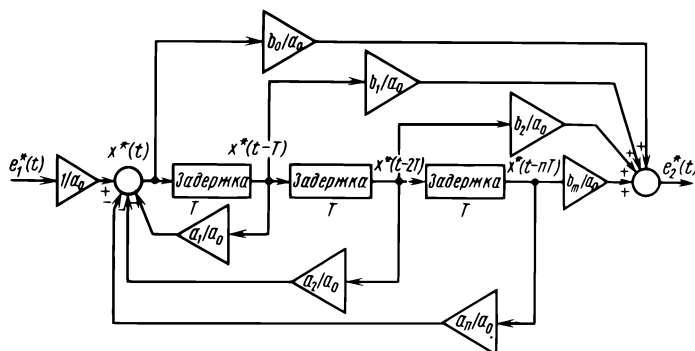


Рис. 9.23. Структурная схема непосредственного программирования $G_c(z)$ по выражению (9-77) с применением декомпозиции, $n = m$

меняемых программ для простых передаточных функций. Запишем (9-77) в виде произведения

$$G_c(z) = \prod_{k=1}^p G_{ck}(z) \quad (9-85)$$

где p – наибольшее из чисел n и m . На рис. 9.24 изображена схема последовательного программирования $G_c(z)$. Вообще передаточные функции

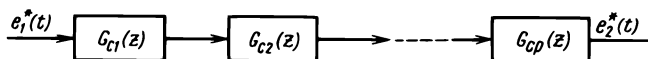


Рис. 9.24. Структурная схема последовательного программирования $G_c(z)$

$G_{ck}(z)$ могут иметь следующий вид в зависимости от полюсов и нулей $G_c(z)$ и соотношения между m и n :

$$(1) \quad G_{ck}(z) = K_k \frac{1 + c_k z^{-1}}{1 + d_k z^{-1}} \quad (\text{действительные полюс и нуль});$$

$$(2) \quad G_{ck}(z) = K_k \frac{1}{1 + d_k z^{-1} + f_k z^{-2}} \quad (\text{два комплексно-сопряженных полюса});$$

$$(3) \quad G_{ck}(z) = K_k \frac{1 + c_k z^{-1}}{1 + d_k z^{-1} + f_k z^{-2}} \quad (\text{один действительный нуль и два комплексно-сопряженных полюса});$$

$$(4) \quad G_{ck}(z) = K_k \frac{1 + g_k z^{-1} + h_k z^{-2}}{1 + d_k z^{-1} + f_k z^{-2}} \quad (\text{комплексно-сопряженные полюсы и нули});$$

$$(5) \quad G_{ck}(z) = K_k (1 + c_k z^{-1}) \quad (\text{действительный нуль, } m > n);$$

$$(6) \quad G_{ck}(z) = K_k (1 + g_k z^{-1} + h_k z^{-2}) \quad (\text{комплексно-сопряженные нули, } m > n);$$

$$(7) \quad G_{ck}(z) = K_k \frac{1 + g_k z^{-1} + h_k z^{-2}}{1 + d_k z^{-1}} \quad (\text{один действительный полюс и два комплексно-сопряженных нуля, } m > n).$$

Все эти передаточные функции могут быть реализованы рассмотренным выше методом непосредственного программирования. Наиболее распространенным является случай (1), соответствующий действительным полюсу и нулю $G_c(z)$. Случай (2) соответствует паре комплексно-сопряженных полюсов $G_c(z)$, а в цифровой программе использование комплексных чисел нежелательно. Случаи (3) – (7) могут иметь и другую форму, в зависимости от соотношения n и m .

3. Параллельное программирование. При параллельном программировании передаточная функция $G_c(z)$ представляется в виде суммы элементарных дробей, соответствующих простейшим передаточным функциям.

В общем случае передаточную функцию $G_c(z)$, заданную выражением (9-77), можно записать в виде

$$G_c(z) = \sum_{k=1}^p G_{ck}(z) \quad (9-86)$$

где p – наибольшее из чисел m и n . В зависимости от характера $G_c(z)$ функции $G_{ck}(z)$ могут иметь следующий вид:

$$G_{ck} = \frac{A_k}{1 + d_k z^{-1}} \quad (\text{простой действительный полюс});$$

$$G_{ck} = \frac{A_k}{(1 + d_k z^{-1})^j} \quad (j = 1, 2, \dots, N; \text{ действительный полюс кратности } N)$$

$$G_{ck} = \frac{A_k(1 + c_k z^{-1})}{(1 + d_k z^{-1} + f_k z^{-2})} \quad (\text{простые — комплексно-сопряженные полюсы});$$

$$G_{ck} = \frac{A_k(1 + c_k z^{-1})}{(1 + d_k z^{-1} + f_k z^{-2})^j} \quad (j = 1, 2, \dots, N; \text{ комплексные полюсы кратности } N);$$

$$G_{ck} = \frac{A_k}{z^j} \quad (j = 1, 2, \dots, N; m-n = N > 0).$$

Каждая из перечисленных здесь передаточных функций опять-таки может быть реализована методом непосредственного программирования. Структурная схема параллельного программирования изображена на рис. 9.25.

Проиллюстрируем на примере все три рассмотренных выше метода программирования.

Пример 9-5. Рассмотрим следующую передаточную функцию цифрового регулятора:

$$\frac{E_2(z)}{E_1(z)} = G_c(z) = \frac{5(1 + 0,25z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,1z^{-1})} \quad (9-87)$$

Физическая реализуемость этой передаточной функции очевидна. Реализуем ее методами непосредственного программирования, последовательного программирования и параллельного программирования.

1. *Непосредственное программирование.* Произведя перекрестное умножение в выражении (9-87), получим

$$(1 - 0,6z^{-1} + 0,05z^{-2})E_2(z) = 5(1 + 0,25z^{-1})E_1(z) \quad (9-88)$$

Возьмем обратное z -преобразование от обеих частей этого уравнения и выразим

$$e_2^*(t) = 5e_1^*(t) + 1,25e_1^*(t - T) + 0,6e_2^*(t - T) - 0,05e_2^*(t - 2T) \quad (9-89)$$

где T — период квантования. Структурная схема непосредственного программирования (9-87) по уравнению (9-89) показана на рис. 9.26.

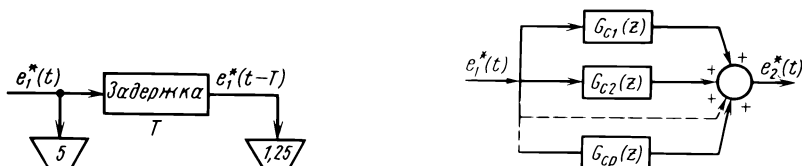


Рис. 9.25. Структурная схема параллельного программирования $G_c(z)$

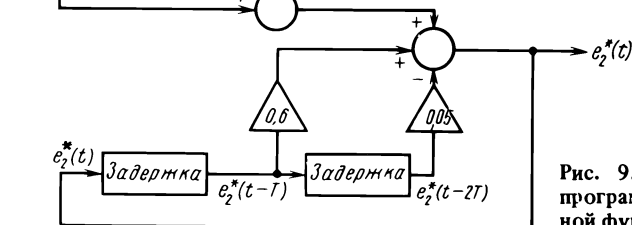


Рис. 9.26. Непосредственное программирование передаточной функции (9-87)

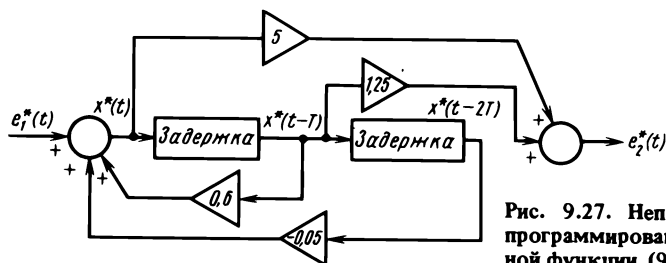


Рис. 9.27. Непосредственное программирование передаточной функции (9-87)

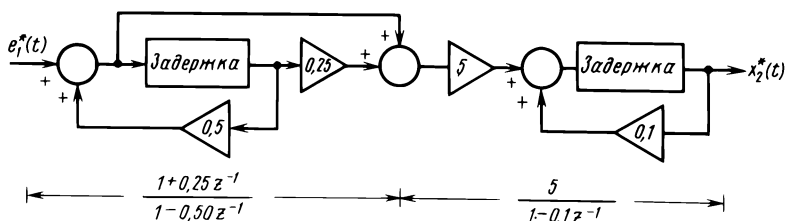


Рис. 9.28. Последовательное программирование передаточной функции (9-87)

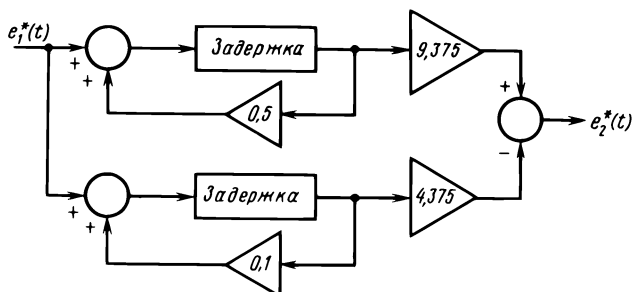


Рис. 9.29. Параллельное программирование передаточной функции (9-87)

Применяя к выражению (9-87) декомпозицию, получим

$$E_2(z) = (5 + 1,25z^{-1})X(z) \quad (9-90)$$

$$X(z) = E_1(z) + 0,6z^{-1}X(z) - 0,05z^{-2}X(z) \quad (9-91)$$

Эти два уравнения реализуются в виде программы, структура которой изображена на рис. 9.27.

2. *Последовательное программирование.* Правую часть выражения (9-87) произвольным образом запишем в виде произведения двух функций:

$$\frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{1 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}} \cdot \frac{5}{1 - 0,1z^{-1}} \quad (9-92)$$

На рис. 9.28 представлена структурная схема программы, соответствующей выражению (9-92).

3. *Параллельное программирование.* Правую часть выражения (9-87) разложим на сумму элементарных дробей

$$\frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{9,375}{1 - 0,5z^{-1}} - \frac{4,375}{1 - 0,1z^{-1}} \quad (9-93)$$

На рис. 9.29 показано, как передаточная функция реализуется в виде параллельного соединения двух программ первого порядка в соответствии с (9-93).

9.5. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ЦИФРОВЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ С ПОМОЩЬЮ БИЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ниже рассмотрено применение частотного метода к синтезу цифровой системы управления с цифровым регулятором. Такая задача решается проще, нежели задача синтеза цифровой системы с аналоговым регулятором, поскольку передаточные функции цифрового регулятора и управляемого процесса разделены квантователем и, следовательно, эффект изменения настройки регулятора можно исследовать с помощью логарифмических частотных характеристик. В соответствии со структурной схемой, изображенной на рис. 9.30, можно сформулировать основные этапы процедуры синтеза.

1. Вычислить z -преобразование $G_{h0}G_p(z)$ для соединения экстраполятора нулевого порядка и управляемого процесса. Воспользовавшись w -преобразованием, $z = (1 + w)/(1 - w)$, получить $G_{h0}G_p(w)$.

2. Построить логарифмические характеристики для $G_{h0}G_p(w)$, отразив зависимость амплитуды (в дБ) и фазы от ω_w . Если необходимо, перенести данные на диаграмму Никольса. По этим кривым определить показатели качества нескорректированной системы: запас по модулю, запас по фазе, полосу пропускания, резонансный пик и резонансную частоту.

3. Если необходима коррекция системы, то ее передаточная функция в разомкнутом состоянии совместно с цифровым регулятором будет иметь выражение $G_c(z)G_{h0}G_p(z)$, или в w -области $G_c(w)G_{h0}G_p(w)$. Передаточная функция цифрового регулятора $G_c(w)$ должна быть найдена таким образом, чтобы удовлетворялись все требования, предъявляемые к качеству системы. При выборе $G_c(w)$ можно применить принцип синтеза непрерывных систем управления, который основан на методе подбора и в известной степени на опыте и творческой фантазии проектировщика.

Так как все действия производятся в w -области, то функция $G_c(w)$ должна быть выбрана таким образом, чтобы соответствующая передаточная функция цифрового регулятора в z -области $G_c(z)$ была физически реализуемой. Пусть $G_c(w)$ имеет вид

$$G_c(w) = \frac{c_m w^m + c_{m-1} w^{m-1} + \dots + c_1 w + c_0}{d_n w^n + d_{n-1} w^{n-1} + \dots + d_1 w + d_0} \quad (9.94)$$

где n и m — положительные целые числа. Выясним, при каких ограничениях на n и m и коэффициенты $G_c(w)$ соответствующая передаточная функция $G_c(z)$, получаемая заменой $w = (z - 1)/(z + 1)$, будет физически реа-

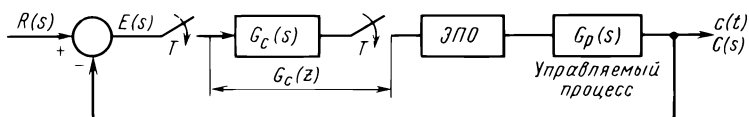


Рис. 9.30. Система управления с цифровым регулятором

лизуемой. Подставив $w = (z - 1)/(z + 1)$ в выражение (9-94), после упрощений получим

$$G_c(z) = \frac{c_m(z-1)^m + c_{m-1}(z-1)^{m-1}(z+1) + \dots + \dots}{d_n(z-1)^n + d_{n-1}(z-1)^{n-1}(z+1) + \dots + \dots} \rightarrow \quad (9-95)$$

$$\leftarrow \dots - \frac{c_1(z-1)(z+1)^{m-1} + c_0(z+1)^m}{d_1(z-1)(z+1)^{n-1} + d_0(z+1)^n} (z+1)^{n-m}$$

Это выражение показывает, что если $G_c(w)$ задана в виде (9-94), то независимо от соотношения m и n функция $G_c(z)$ всегда будет иметь одинаковое количество полюсов и нулей. Это значит, что $G_c(z)$ всегда будет физически реализуемой, если только $G_c(w)$ имеет вид (9-94). Однако, если необходимо, чтобы цифровой регулятор был устойчивым, то все полюсы $G_c(z)$ должны лежать внутри единичной окружности $|z| = 1$ и соответственно все полюсы $G_c(w)$ — в левой половине w -плоскости. Кроме того, из выражения (9-95) следует, что если $m > n$, то $G_c(z)$ будет иметь $m-n$ полюсов $z = -1$, а это есть признак неустойчивости. Следовательно, для получения устойчивого цифрового регулятора необходимо потребовать, чтобы число нулей $G_c(w)$ было не более числа ее полюсов. На практике допустимо иметь неустойчивый цифровой регулятор, лишь бы система в целом оставалась устойчивой, хотя, по возможности, надо стремиться к тому, чтобы система была устойчива и в разомкнутом и в замкнутом состояниях.

4. Если найдена $G_c(w)$, то $G_c(z)$ получают подстановкой $w = (z - 1)/(z + 1)$. Заключительный этап синтеза состоит в реализации $G_c(z)$ одним из методов, рассмотренных в п. 9.4. Если $G_c(z)$ должна быть реализована с помощью микроЭВМ, то проектировщик обязан учитывать при синтезе все ограничения, свойственные ЭВМ.

Проиллюстрируем описанный выше метод синтеза на примере.

Пример. 9.6. Пусть в цифровой системе, изображенной на рис. 9.30, управляемый процесс описывается передаточной функцией

$$G_p(s) = \frac{K}{s(1 + 0,1s)(1 + 0,5s)} \quad (9-96)$$

Период квантования в системе равен 0,5 с. На практике период квантования является одним из параметров системы, который определяется проектировщиком. В данном случае мы предполагаем, что период квантования был выбран ранее по некоторому критерию, не имеющему непосредственного отношения к решаемой здесь задаче. Суть проблемы состоит в синтезе цифрового регулятора с учетом следующих требований к качеству системы:

- коэффициент ошибки по скорости $K_v \geq 3$;
- запас по фазе $\geq 50^\circ$;
- резонансный пик $M_p \leq 1,3$.

Еще раз отметим, что эти требования выбираются из чисто качественных соображений для представления проектировщику возможности произвести синтез, опираясь на известные аналитические методы. В завершение процедуры синтеза необходимо проверить, действительно ли в данной системе достаточно иметь запас по фазе 50° и резонансный пик 1,3.

z-преобразование передаточной функции разомкнутой системы без коррекции (при $T=0,5$ с) имеет вид

$$G_{h0}G_p(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s(1 + 0,1s)(1 + 0,5s)} \right] =$$

$$= \frac{K(0,13z^2 + 0,177z + 0,0077)}{z(z-1)(z-0,368)} = \frac{0,13K(z+1,31)(z+0,045)}{z(z-1)(z-0,368)} \quad (9-97)$$

Пусть коэффициент ошибки по скорости $K_v = 3$, тогда в соответствии с (6-75) имеем

$$K_v = 3 = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)G_{h0}G_p(z)] = 0,99K. \quad (9-98)$$

Таким образом, $K = 3$. Подстановка $z = (1+w)/(1-w)$ и $K = 3$ в (9-97) дает результат

$$G_{h0}G_p(w) = \frac{0,75(1-w)(1+0,9w)(1-0,134w)}{w(1+w)(1+2,17w)} \quad (9-99)$$

На рис. 9.31 изображены логарифмические частотные характеристики для передаточной функции (9-99). По амплитудной и фазовой характеристикам видно, что при $K = 3$ система без коррекции находится почти на границе устойчивости. Запасы устойчивости и по модулю, и по фазе приблизительно равны нулю. Можно показать, что критическое значение K равно 3,3. Чтобы обеспечить запас по фазе 50° , сохраняя коэффициент ошибки по скорости равным 3, предлагается использовать регулятор $G_c(w)$ с отставанием по фазе, так как регулятор с опережением по фазе в данном случае будет неэффективен из-за резкого завала фазовой характеристики после значения -180° .

Выберем передаточную функцию $G_c(w)$ в виде

$$G_c(w) = \frac{1 + a\tau w}{1 + \tau w} \quad (a < 1) \quad (9-100)$$

На рис. 9.31 видно, что для получения запаса по фазе 50° частоту среза системы необходимо сдвинуть из точки $\omega_w = 0,6$ в точку $\omega_w = 0,2$ при условии, что регулятор $G_c(w)$ не окажет существенного влияния на фазовый сдвиг на новой частоте среза. Логарифмические характеристики показывают, что усиление $G_{h0}G_p(w)$ на частоте $\omega_w = 0,2$ приблизительно равно 12 дБ. Следовательно, регулятор $G_c(w)$ должен на этой частоте вносить ослабление 12 дБ. Из таких соображений определяется значение a в выражении (9-100):

$$20 \lg a = -12 \text{ дБ}, \quad (9-101)$$

откуда $a = 0,25$. Чтобы фазовая характеристика $G_c(w)$ не оказывала существенного

влияния на фазовый сдвиг скорректированной системы в точке $\omega_w = 0,2$, выберем частоту, соответствующую правому излому амплитудной характеристики $G_c(w)$, на декаду меньше значения $\omega_w = 0,2$. Таким образом,

$$1/a\tau = 0,02 \quad (9-102)$$

Рис. 9.31. Логарифмические частотные характеристики импульсной системы с цифровым регулятором:

1 – амплитудная характеристика $G_{h0}G_p(w)$ (нескорректированная система); 2 – амплитудная характеристика $G_c(w)G_{h0}G_p(w)$ (система с коррекцией); 3 – фазовая характеристика (без коррекции); 4 – фазовая характеристика (с коррекцией)

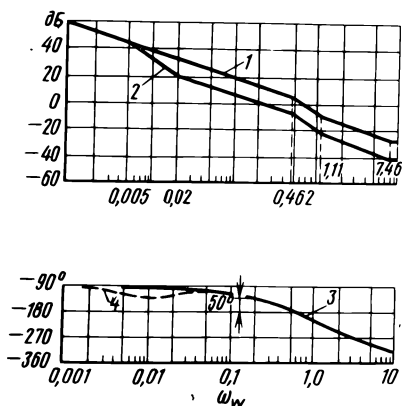


Рис. 9.32. Диаграмма Никольса с перенесенными на нее характеристиками разомкнутой системы:
 1 — $G_{h0}G_p(w)$ (коррекция отсутствует); 2 — $G_c(w)G_{h0} \times \times G_p(w)$ (система с коррекцией)

и, следовательно,

$$1/\tau = 0,005 \quad (9-103)$$

Тогда передаточная функция цифрового регулятора в w -области принимает вид

$$G_c(w) = \frac{1 + 50w}{1 + 200w} \quad (9-104)$$

Передаточная функция разомкнутой скорректированной системы имеет вид

$$G_c(w)G_{h0}G_p(w) = \frac{0,75(1 + 50w)(1 - w)(1 + 0,9w)(1 - 0,134w)}{w(1 + 200w)(1 + w)(1 + 2,17w)} \quad (9-105)$$

Логарифмические частотные характеристики для этой передаточной функции представлены на рис. 9.31. Заметим, что запас по фазе теперь приблизительно равен 50° .

Амплитудные и фазовые характеристики для $G_{h0}G_p(w)$ и $G_c(w)G_{h0}G_p(w)$, перенесенные на диаграмму Никольса, изображены на рис. 9.32. По этим кривым можно получить следующую сравнительную оценку показателей качества скорректированной и нескорректированной систем:

	Нескорректированная система	Скорректированная система
Резонансный пик M_p	Почти ∞	1,2
Резонансная частота		
$\omega_{wr} (\omega_r, \text{рад/с})$	0,6 (2,1)	0,2 (0,8)
Запас по фазе, градус	~ 0	50
Запас по модулю, дБ	~ 0	12
Полоса пропускания	0,9 (3 рад/с)	0,4 (1,5 рад/с)

Передаточная функция $G_c(z)$ получается в результате подстановки $w = (z - 1)/(z + 1)$ в выражение (9-104):

$$G_c(z) = 0,25 \frac{z - 0,96}{z - 0,99} \quad (9-106)$$

Чтобы убедиться в правильности решения задачи синтеза, запишем передаточную функцию замкнутой системы с коррекцией

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_{h0}G_p(z)}{1 + G_c(z)G_{h0}G_p(z)} = \frac{0,0975z^3 + 0,0385z^2 - 0,1211z - 0,0055}{z^4 - 2,2605z^3 + 1,7608z^2 - 0,4854z - 0,0055} \quad (9-107)$$

Эта передаточная функция имеет полюсы $z = -0,0108; 0,9563; 0,6575 + j0,309$ и $0,6575 - j0,309$. Переходная функция системы изображена на рис. 9.33. Максимальное перерегулирование не превышает 19%, что подтверждает правильность выбора запаса по фазе 50° .

Заключительный этап синтеза может включать в себя реализацию $G_c(z)$ каким-

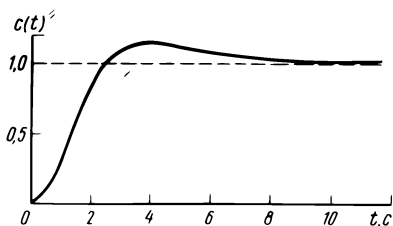


Рис. 9.33. Переходная функция синтезированной системы

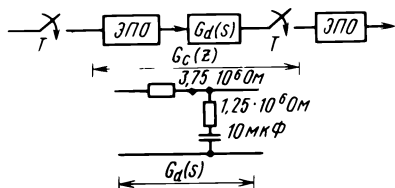


Рис. 9.35. Реализация $G_C(z)$ по передаточной функции (9-106) в виде последовательного импульсного фильтра

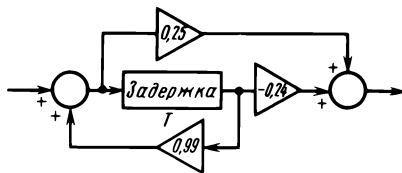


Рис. 9.34. Непосредственная цифровая программа для регулятора $G_C(z)$ с передаточной функцией (9-106)

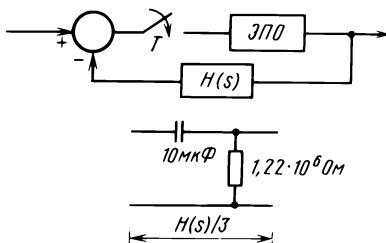


Рис. 9.36. Реализация $G_C(z)$ по передаточной функции (9-106) в виде импульсного фильтра в цепи обратной связи

либо из методов, описанных в п. 9.4. На рис. 9.34 показана реализация $G_C(z)$ в виде непосредственной цифровой программы.

Подставляя (9-106) в (9-55), получим

$$\mathcal{Z} \left[\frac{G_d(s)}{s} \right] = \frac{0,25(1 - 0,96z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0,99z^{-1})} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{0,75}{1 - 0,99z^{-1}} \quad (9-108)$$

Определяя обратное z -преобразование от обеих частей последнего уравнения и разрешая его относительно $G_d(s)$, находим

$$G_d(s) = \frac{1 + 12,5s}{1 + 50s} \quad (9-109)$$

что соответствует реализации $G_C(z)$ в виде последовательного импульсного фильтра. Воспользовавшись выражением (9-64), можно реализовать $G_C(z)$ в виде импульсного фильтра в цепи обратной связи. Для этого случая получим

$$H(s) = \frac{3s}{s + 0,0816} \quad (9-110)$$

На рис. 9.35 показана реализация $G_C(z)$ в виде последовательного импульсного фильтра, а на рис. 9.36 – в виде импульсного фильтра в цепи обратной связи.

9.6. СИНТЕЗ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОРНЕВЫХ ГОДОГРАФОВ НА z -ПЛОСКОСТИ

В гл. 6 был рассмотрен метод корневого годографа применительно к анализу цифровых систем управления. Было показано, что корневые годографы на z -плоскости строятся по тем же самым правилам, что и корневые

вые годографы непрерывных систем на s -плоскости. Однако границей устойчивости на z -плоскости является единичная окружность $|z| = 1$, и это необходимо соответствующим образом учитывать при суждении о качестве системы, в частности об относительной устойчивости, по корням ее характеристического уравнения.

Синтез системы управления методом корневого годографа можно рассматривать, как задачу о размещении ее полюсов на z -плоскости, решаемую экспериментально путем подбора. Иными словами, синтез с помощью корневого годографа по существу состоит в определении параметров системы и регулятора таким образом, чтобы корни характеристического уравнения занимали желаемое положение. Для систем, порядок которых выше третьего, вообще очень трудно установить связь между параметрами регулятора и корнями характеристического уравнения. Кроме того, обычный корневой годограф допускает одновременное изменение только одного параметра. Именно поэтому синтез цифровой системы управления с помощью корневого годографа на z -плоскости является методом подбора. Иначе говоря, проектировщик может поручить ЭВМ вычертить большое количество корневых годографов путем перебора в широком диапазоне возможных значений параметров регулятора, а затем выбрать наилучшее решение. Однако опытный проектировщик может разумным образом сделать первоначальные "прикидки" так, чтобы свести к минимуму количество проб. Поэтому будет полезно исследовать влияние расположения полюсов и нулей цифрового регулятора на качество всей системы и корни ее характеристического уравнения.

Регуляторы с опережением и с отставанием по фазе. Рассмотрим регулятор, описываемый передаточной функцией первого порядка

$$G_c(z) = K_c \frac{z - z_1}{z - p_1} \quad (9-111)$$

где z_1 — действительный нуль; p_1 — действительный полюс. Если цифровой регулятор не должен влиять на качество установившегося режима системы, то полагаем

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_c(z) = 1 \quad (9-112)$$

Тогда K_c в выражении (9-111) принимает значение

$$K_c = \frac{1 - p_1}{1 - z_1} \quad (9-113)$$

В зависимости от соотношения величин z_1 и p_1 можно классифицировать $G_c(z)$ как регулятор типа фильтра нижних частот или типа фильтра верхних частот. Подставляя $z = e^{Ts}$ в (9-111), получим

$$G_c^*(s) = K_c \frac{e^{Ts} - z_1}{e^{Ts} - p_1} \quad (9-114)$$

Очевидно, что $G_c^*(s)$ имеет бесконечное число полюсов и нулей. Однако если рассматривать только полюсы и нули, расположенные в основной полосе s -плоскости, то нуль $G_c^*(s)$

$$s = \frac{1}{T} \ln(z_1) \quad (9-115)$$

а полюс

$$s = \frac{1}{T} \ln(p_1) \quad (9-116)$$

где z_1 и p_1 — действительные числа. Выражение (9-114) в основной полосе s -плоскости аппроксимируется следующей рациональной функцией:

$$G_c^*(s) \cong K_c \frac{s + \frac{1}{T} \ln(z_1)}{s + \frac{1}{T} \ln(p_1)} \quad (9-117)$$

Иной подход состоит в аппроксимации e^{Ts} первыми двумя членами разложения экспоненты в степенной ряд. Тогда запишем (9-114) в виде

$$G_c^*(s) \cong K_c \frac{Ts + 1 - z_1}{Ts + 1 - p_1} \quad (9-118)$$

Этот вариант предпочтительнее, поскольку выражение (9-117) не допускает отрицательных значений p_1 и z_1 . В качестве иллюстрации рассмотрим передаточную функцию цифрового регулятора (9-106):

$$G_c(z) = 0,25 \frac{z - 0,96}{z - 0,99} \quad (9-119)$$

Используя (9-117), имеем

$$G_c^*(s) \cong 0,25 \frac{s + 0,0816}{s + 0,0201} \quad (T = 0,5 \quad c) \quad (9-120)$$

а формула (9-118) дает

$$G_c^*(s) \cong 0,25 \frac{s + 0,08}{s + 0,02} \quad (T = 0,5 \quad c) \quad (9-121)$$

Таким образом, $G_c^*(s)$ можно рассматривать как фильтр нижних частот, поскольку полюс этой функции расположен на s -плоскости, правее ее нуля. Поэтому передаточная функция $G_c(z)$, определяемая выражением (9-119), соответствует регулятору с характеристикой типа фильтра нижних частот. Расположение полюсов и нулей функций (9-121) и (9-119) показано на рис. 9.37, при этом рис. 9.37, б можно рассматривать как типичную картину для цифрового регулятора первого порядка с отставанием по фазе. Необходимо подчеркнуть, что аппроксимация $G_c(z)$ выражением $G_c^*(s)$ сделана исключительно с той целью, чтобы определить, к какому типу относится характеристика фильтра с передаточной функцией $G_c(z)$.

В общем случае регулятор с отставанием по фазе может иметь один

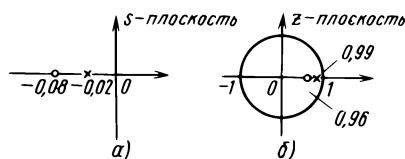


Рис. 9.37. Расположение полюсов и нулей: а — функции $G_c^*(s)$ для регулятора с отставанием по фазе (9-121); б — функции $G_c(z)$ для регулятора с отставанием по фазе (9-119)

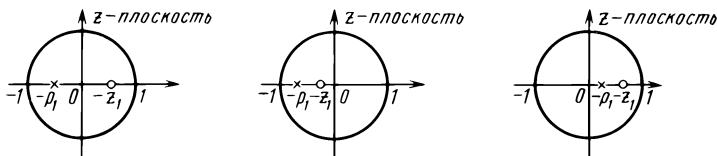


Рис. 9.38. Варианты расположения полюса и нуля функции $G_c(z)$, соответствующей фильтру верхних частот

полюс в правой половине и один ноль в левой половине z -плоскости (оба внутри единичной окружности) либо и полюс, и ноль на отрицательном направлении действительной оси внутри единичной окружности, причем полюс расположен правее нуля. Однако эти ситуации не столь эффективны при стабилизации системы, как расположение типа "диполь", показанное на рис. 9.37.

Аналогичным образом можно показать, что для фильтра верхних частот ноль на z -плоскости всегда находится справа от полюса на отрицательном направлении действительной оси; то же самое справедливо для относительного расположения нуля и полюса $G_c(z)$ на z -плоскости. На рис. 9.38 изображены три возможных варианта расположения нуля и полюса функции $G_c(z)$, соответствующей фильтру верхних частот первого порядка.

Ниже приведены примеры, иллюстрирующие синтез цифровой системы управления на z -плоскости с помощью метода корневого годографа.

Пример 9.7. Возьмем ту же задачу синтеза, что и в примере 9.6. Управляемый процесс описывается передаточной функцией (9-96), а период квантования равен 0,5 с. Поскольку синтез должен быть выполнен на z -плоскости с помощью корневого годографа, то такие критерии качества, как запасы по модулю и по фазе или любые другие показатели, относящиеся к частотной области, уже не могут быть использованы. Пусть требования к качеству системы таковы:

коэффициент ошибки по скорости $K_v \geq 3$;

относительный коэффициент затухания, определяемый доминирующими корнями $\xi \approx 0,707$

Перепишем еще раз передаточную функцию (9-97), соответствующую разомкнутой системе без коррекции:

$$G_{h0}G_p(z) = \frac{0,13K(z + 1,31)(z + 0,045)}{z(z - 1)(z - 0,368)} \quad (9-122)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы получим, приравняв к нулю числитель выражения $1 + G_{h0}G_p(z)$, т. е.

$$z(z - 1)(z - 0,368) + 0,13K(z + 1,31)(z + 0,045) = 0 \quad (9-123)$$

Корневой годограф для этого уравнения изображен на рис. 9.39. Так как для разомкнутой системы ноль $z = -0,045$ расположен очень близко от полюса $z = 0$, то они практически компенсируют друг друга, поэтому корневой годограф определяется в основном полюсами $z = 1$ и $z = 0,368$ и нулем $z = -1,31$. В примере 9.6 было установлено, что для получения $K_v = 3$ коэффициент K должен быть равен 3. Корневой годограф на рис. 9.39 показывает, что критическое значение K равно 3,3. Тогда если выбрать $K = 3$, получим очень малый запас устойчивости.

Решение задачи в частотной области было весьма полезным. Полученный цифровой регулятор (9-119) обладает отставанием по фазе. Кроме того, ноль $z = 0,96$ и полюс $z = 0,99$ расположены очень близко друг к другу, причем оба они находятся в непосредственной близости от точки $z = 1$. И это отнюдь не случайно. Цифровой ре-

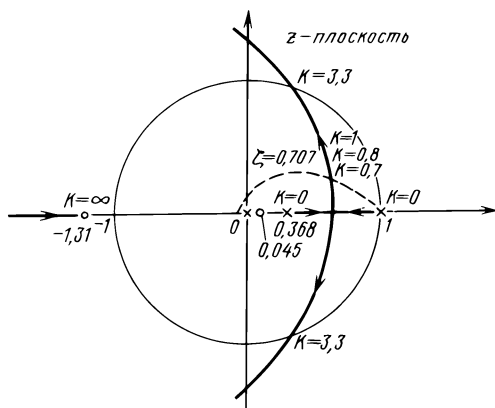


Рис. 9.39. Корневой годограф нескорректированной цифровой системы управления

гулятор с передаточной функцией (9-119) известен как "диполь". Покажем, что аналогичный результат можно получить с помощью метода корневого годографа.

На рис. 9.39 изображена линия постоянного относительного коэффициента затухания для $\zeta = 0,707$. Пересечение корневого годографа с этой линией соответствует $K \approx 0,7$. Задача состоит в том, чтобы найти такой цифровой регулятор, для которого одновре-

менно можно было бы получить $K=3$ и $\zeta=0,707$.

Используем регулятор с передаточной функцией

$$G_c(z) = K_c \frac{z - z_1}{z - p_1} \quad (9-124)$$

где

$$K_c = \frac{1 - p_1}{1 - z_1} \quad (9-125)$$

Наиболее важным условием является то, чтобы значения z_1 и p_1 были близки друг к другу и оба они были также очень близки к 1 (но все же менее 1). Кроме того, z_1 должно быть меньше p_1 , что соответствует регулятору с отставанием по фазе. Выбор такого типа регулятора мотивирован следующими обстоятельствами.

Рис. 9.39 показывает, что требуемое значение относительного коэффициента затухания можно получить, если выбрать $K=0,7$. Это означает, что мы должны, не изменяя формы корневого годографа, изменить только коэффициент усиления системы. Но мы не можем просто уменьшить величину K . Следовательно, необходим такой регулятор, который эффективно увеличивал бы коэффициент усиления разомкнутой системы и в то же время несущественно изменял бы расположение полюсов и нулей замкнутой системы. Всем этим требованиям удовлетворяет регулятор с передаточной функцией (9-124). Поскольку z_1 и p_1 очень близки, то отношение $(z - z_1)/(z - p_1)$ практически равно единице. Таким образом, основной целью $G_c(z)$ является внесение ослабления $K_c = (1 - p_1)/(1 - z_1)$. После того как это установлено, синтез становится чрезвычайно простым, ибо все, что мы должны сделать, — это принять K_c равным отношению $0,7/3,0$, т. е. отношению (коэффициент усиления, необходимый для получения $\zeta = 0,707$) / (коэффициент усиления, необходимый для получения $K_v = 3$). Итак,

$$K_c = \frac{1 - p_1}{1 - z_1} = \frac{0,7}{3,0} \quad (9-126)$$

Однако мы получили одно уравнение с двумя неизвестными. Тогда можно воспользоваться условием $p_1 \approx z_1 \approx 1$ и $z_1 < p_1 < 1$. Выбрав произвольным образом $p_1 = 0,99$ в выражении (9-126), находим $z_1 = 0,957$. Тогда (9-124) принимает вид

$$G_c(z) = 0,233 \frac{z - 0,957}{z - 0,99} \quad (9-127)$$

Так как "диполь" расположен очень близко от точки $z = 1$, то на достаточном удалении от нее корневой годограф практически не изменяет формы, и эффект от

Рис. 9.40. Корневые годографы нескорректированной (НС) и скорректированной (СС) цифровых систем управления

введения "диполя" состоит только в изменении коэффициента усиления системы за счет K_c . На рис. 9.40 показана существенная часть корневых годографов скорректированной и нескорректированной систем. Важно подчеркнуть, что абсолютные величины p_1 и z_1 не имеют значения, поскольку они очень близки к единице. Однако отношение $(1 - p_1)/(1 - z_1)$ является существенным и должно выбираться исходя из величины ослабления, необходимой для получения требуемого затухания. В принципе картина здесь та же самая, что и при синтезе регулятора с отставанием по фазе в примере 9.6, где первый излом амплитудной характеристики регулятора помещался на частоте, намного меньшей желаемой новой частоты среза. Точные значения частот, соответствующих изломам амплитудной характеристики регулятора, не имеют значения, тогда как их отношение равно ослаблению, необходимому для получения требуемого запаса по фазе или по модулю. Следовательно, в этом примере мы могли бы, например, выбрать $p_1 = 0,98$, тогда соответствующее значение z_1 было бы равно 0,9143, а корневой годограф, изображенный на рис. 9.40, не претерпел бы значительных изменений. Передаточная функция цифрового регулятора имела бы вид

$$G_c(z) = 0,233 \frac{z - 0,9143}{z - 0,98} \quad (9-128)$$

где K_c сохраняет прежнее значение.

Пример 9.8. Структурная схема цифровой системы управления изображена на рис. 9.41. Управляемый процесс описывается передаточной функцией

$$G_p(s) = \frac{K}{s^2} \quad (9-129)$$

которая может соответствовать чисто инерционной нагрузке. Передаточная функция разомкнутой системы без коррекции

$$G_{h0}G_p(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{K}{s^3} \right] = \frac{KT^2(z + 1)}{2(z - 1)^2} \quad (9-130)$$

Поскольку T входит множителем в передаточную функцию разомкнутой системы, в данном частном случае метод корневого годографа можно применить для исследования влияния одновременного изменения параметров K и T . На рис. 9.42 изображен корневой годограф системы с передаточной функцией (9-130). Варьируемым параметром является $K' = KT^2$. Очевидно, что без регулятора замкнутая система неустойчива при любых значениях KT^2 .

Так как $G_{h0}G_p(z)$ имеет два полюса $z = 1$, то регулятор с отставанием по фазе,

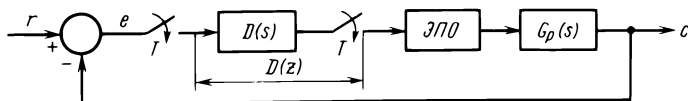
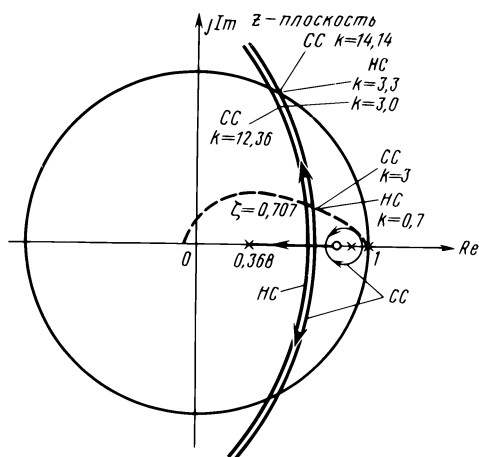


Рис. 9.41. Цифровая система управления



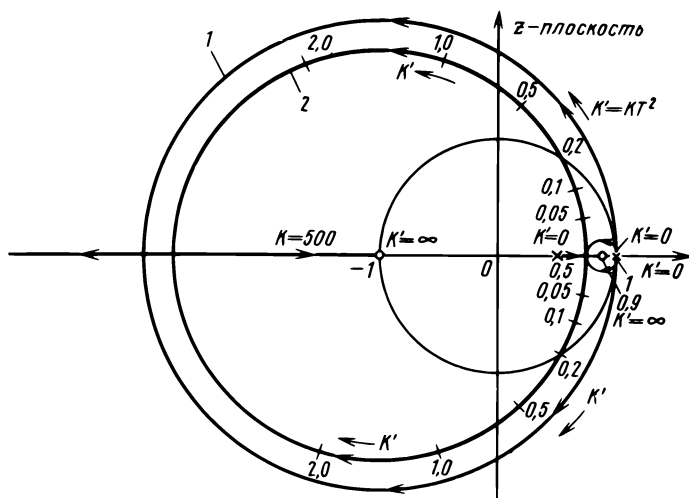


Рис. 9.42. Корневые годографы цифровой системы управления:

1 – без коррекции; 2 – с коррекцией при передаточной функции регулятора $G_c(z) = 5(z - 0,9)/(z - 0,5)$

у которого полюс расположен правее нуля, привел бы к смещению годографа близ точки $z = 1$ еще дальше вправо. Поэтому логичнее будет попытаться использовать регулятор с опережением по фазе. Пусть передаточная функция регулятора имеет вид

$$G_c(z) = K_c \frac{z - z_1}{z - p_1} \quad (9-131)$$

где $z_1 > p_1$ и $K_c = (1 - p_1)/(1 - z_1)$. При выборе значений p_1 и z_1 учтем, что было бы желательно поместить нуль близ двух полюсов $z = 1$ функции $G_{h0}G_p(z)$. На рис. 9.42 изображен корневой годограф скорректированной системы при $z_1 = 0,9$ и $p_1 = 0,5$. Замкнутая система теперь является устойчивой при $KT^2 < 0,2$. Значит, если период квантования $T = 0,1$ с, то критическое значение K равно 20.

Было бы идеальным, если бы нуль z_1 можно было поместить в точке $z = 1$, чтобы скомпенсировать один из полюсов $G_{h0}G_p(z)$. Однако это соответствовало бы $K_c = \infty$.

В рассмотренном примере полюс p_1 произвольно был помещен в точке $z = 0,5$. А как отразилось бы на свойствах системы перемещение p_1 по действительной оси внутри единичной окружности? Очевидно, что p_1 не следует помещать слишком близко к нулю z_1 , иначе регулятор с опережением по фазе не будет достаточно эф-

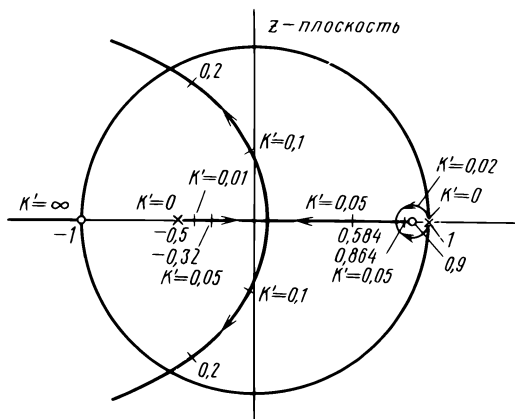


Рис. 9.43. Корневой годограф скорректированной цифровой системы управления при $G_c(z) = 15(z - 0,9)/(z + 0,5)$

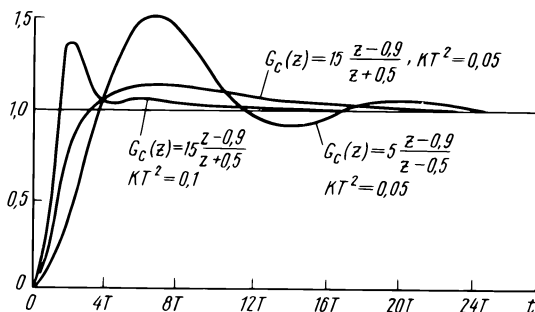


Рис. 9.44. Переходные функции цифровой системы управления

эффективно улучшать условия устойчивости системы. В то же время полюс можно поместить и на отрицательном направлении действительной оси. Это соответствует большему опережению по фазе, так как расстояние между z_1 и p_1 увеличивается. На рис. 9.43 изображен корневой годограф для случая, когда цифровой регулятор имеет передаточную функцию

$$G_c(z) = 15 \frac{z-0.9}{z+0.5} \quad (9-132)$$

Теперь, если $K' = 0.05$, то замкнутая система имеет три действительных полюса: $z = -0.322$; 0.584 и 0.864 . При больших значениях K' , что соответствует двум комплексно-сопряженным корням, собственная частота системы выше, поэтому время нарастания переходной функции будет меньше, чем в случае $p_1 = 0.5$. На рис. 9.44 показаны переходные функции синтезированной системы для двух различных регуляторов и двух значений K' . При регуляторе с передаточной функцией (9-131), где $z_1 = 0.9$ и $p_1 = 0.5$, переходная функция имеет максимальное перерегулирование более 50%, несмотря на то что достигается значение относительного коэффициента затухания $\xi = 0.707$. При регуляторе с передаточной функцией (9-132) и $K'T^2 = K' = 0.05$ переходная функция имеет максимальное перерегулирование всего 15%. При том же регуляторе, но в случае $K' = 0.1$, быстродействие увеличивается, хотя максимальное перерегулирование возрастает до 38%.

Метод контуров корней [1]. Обычно при построении корневого годографа замкнутой системы управления варьируемым параметром считают коэффициент усиления K , а остальные параметры системы полагаются постоянными. Однако часто необходимо исследовать влияние изменения не только коэффициента усиления K , но и других параметров. Для этой цели используется контур корней, который, по сути дела, является корневым годографом, сохраняя все его свойства. Единственное отличие заключается в том, что варьируемым параметром на контуре может быть любой другой параметр системы, кроме коэффициента усиления. Например, при синтезе системы в примере 9.8 был использован цифровой регулятор с опережением по фазе. При решении задачи мы выбрали нуль регулятора $z_1 = 0.9$ и исследовали, как изменится корневой годограф, если полюс поместить сначала в точке $p_1 = 0.5$, а затем в точке -0.5 . Было бы желательно исследовать эффект, связанный с непрерывным изменением p_1 в диапазоне от $-\infty$ до ∞ при постоянстве остальных параметров системы.

Проиллюстрируем метод контуров корней на системе, рассмотренной

в примере 9.8. Передаточная функция разомкнутой системы с цифровым регулятором имеет вид

$$G_c(z) G_{h0} G_p(z) = \frac{1 - p_1}{1 - z_1} \frac{z - z_1}{z - p_1} \frac{KT^2(z + 1)}{2(z - 1)^2} \quad (9-133)$$

Пусть $z_1 = 0,9$ и $KT^2 = 0,05$, тогда

$$G_c(z) G_{h0} G_p(z) = \frac{1 - p_1}{0,1} \frac{z - 0,9}{z - p_1} \frac{0,05(z + 1)}{2(z - 1)^2} \quad (9-134)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы получим, приравнявая нулю числитель выражения $1 + G_c(z) G_{h0} G_p(z)$:

$$(z - p_1)(z - 1)^2 + 0,25(1 - p_1)(z + 1)(z - 0,9) = 0 \quad (9-135)$$

Поскольку это уравнение содержит только один параметр p_1 , то можно воспользоваться правилами построения корневого годографа. Траектории корней уравнения, получаемые при изменении p_1 , называются *контурами корней*. Раскрывая левую часть уравнения (9-135) и группируя члены, содержащие p_1 , получим

$$z^3 - 1,75z^2 + 1,025z - 0,225 - 1,25p_1(z^2 - 1,58z + 0,62) = 0 \quad (9-136)$$

Деление обеих частей последнего уравнения на члены, не содержащие p_1 , дает

$$1 + \frac{-1,25p_1(z^2 - 1,58z + 0,62)}{z^3 - 1,75z^2 + 1,025z - 0,225} = 0 \quad (9-137)$$

Теперь уравнение (9-137) представлено в виде $1 + G_e(z) = 0$, где p_1 входит в $G_e(z)$ как множитель. Это означает, что можно построить контуры корней уравнения (9-136) на основании расположения полюсов и нулей функции $G_e(z)$, которую запишем в виде

$$G_e(z) = \frac{-1,25p_1(z - 0,726)(z - 0,854)}{(z - 0,867)(z - 0,441 + j0,254)(z - 0,441 - j0,254)} \quad (9-138)$$

Контурсы корней уравнения (9-136) при изменении p_1 от $-\infty$ до ∞ изображены на рис. 9.45. Поскольку p_1 принимает все возможные действительные значения, то при $z_1 = 0,9$ эта диаграмма имеет силу для регуляторов как с отставанием, так и с опережением по фазе. Ясно, что для регулятора с отставанием по фазе, когда $p_1 > z_1 = 0,9$, по крайней мере, один из корней характеристического уравнения замкнутой системы находится вне единичной окружности и система неустойчива. Если используется регулятор с опережением по фазе, когда $p_1 < z_1 = 0,9$, диаграмма показывает, что предпочтительнее выбирать отрицательные значения p_1 . Однако p_1 не может быть меньше, чем -1 . В противном случае один из корней снова окажется вне единичной окружности. При отрицательных значениях p_1 один из трех корней всегда будет лежать в интервале между 0,854 и 0,867.

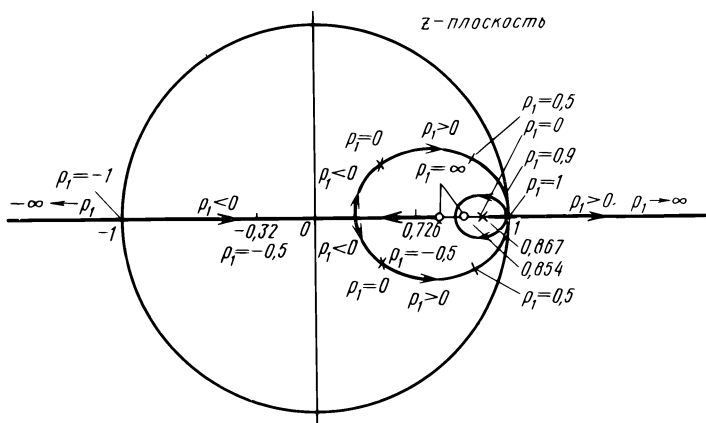


Рис. 9.45. Контурь корней уравнения (9-136)

Синтез на основе взаимной компенсации полюсов и нулей. При синтезе систем управления на s - или z -плоскости имеет смысл попытаться скомпенсировать нежелательные полюсы и нули передаточной функции управляемого процесса полюсами и нулями регулятора и добавить новые, более подходящие, полюсы и нули, чтобы удовлетворить выдвинутым требованиям. Подобный метод часто применяется в системах, где управляемый процесс имеет комплексные полюсы, а к устойчивости предъявляются весьма жесткие требования. На первый взгляд компенсация нежелательных полюсов и добавление новых (желаемых) — это простейший путь решения любой задачи. Однако надо иметь в виду, что для широкого класса задач синтеза коррекция путем компенсации полюсов и нулей далеко не всегда дает удовлетворительное решение. Может оказаться, что полученный регулятор будет слишком сложным или, если нежелательные полюсы процесса расположены на z -плоскости близко от единичной окружности, неидеальная компенсация (что почти всегда имеет место на практике) может сделать систему условно устойчивой. В качестве простой иллюстрации эффекта неидеальной компенсации рассмотрим корневые годографы (рис. 9.46).

На рис. 9.46, *а* показано расположение нулей и полюсов передаточной функции некоторой разомкнутой цифровой системы. Чтобы скомпенсировать

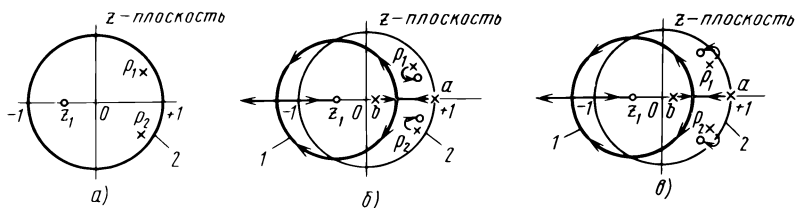


Рис. 9.46. Корневые годографы, иллюстрирующие эффект неидеальной компенсации нежелательных полюсов:

1 — корневой годограф; 2 — единичная окружность

ровать комплексные полюсы p_1 и p_2 и добавить новые полюсы $z = a$ и $z = b$, введем цифровой регулятор с передаточной функцией

$$G_c(z) = K \frac{(z - p_1)(z - p_2)}{(z - a)(z - b)} \quad (9-139)$$

На рис. 9.46,б изображен случай неидеальной компенсации, когда комплексные нули регулятора не в точности равны полюсам p_1 и p_2 управляемого процесса. При таком относительном расположении полюсов и нулей неидеальная компенсация не оказывает отрицательного влияния на качество системы, поскольку полюсы замкнутой системы, находящиеся около p_1 и p_2 , весьма близки к двум нулям регулятора и соответствующей устойчивой системе. Если же полюсы и нули при неидеальной компенсации расположены так, как показано на рис. 9.46,в, то часть ветвей корневого годографа между ними может выйти за пределы единичной окружности. Такая система называется условно устойчивой, потому что она устойчива только при малых и больших значениях коэффициента усиления. Таким образом, применяя данный метод синтеза систем управления, надо иметь в виду, что неидеальной компенсации избежать нельзя, и быть уверенным, что это не отразится на устойчивости системы.

9.7. ЦИФРОВОЙ ПИД-РЕГУЛЯТОР

При синтезе непрерывных систем управления наиболее широко применяются пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы, или ПИД-регуляторы. На рис. 9.47 изображена структурная схема непрерывного ПИД-регулятора, воздействующего на сигнал ошибки $e(t)$. Пропорциональное управление заключается в простом умножении сигнала ошибки на константу K_p ; при интегральном управлении образуется интеграл от $e(t)$, который умножается на коэффициент K_I , а дифференциальное управление связано с формированием сигнала, пропорционального производной по времени от ошибки. Интегральный закон управления применяется для уменьшения установившейся ошибки, тогда как дифференциальный закон управления, обладающий упреждающим действием, применяется для уменьшения перерегулирования. Тот же самый принцип действия ПИД-регулятора может быть использован и при цифровом управлении. В цифровых системах пропорциональное управление реализуется по-прежнему с помощью постоянного коэффициента K_p . Интегрирование и дифференцирование в цифровой форме может быть выполнено различными методами. Например, операция интегрирования K_I/s может быть аппроксимирована в z -форме численным интегрированием по методу трапеций $K_I T(z+1)/[2(z-1)]$. Производная $e(t)$ в момент времени $t = T$ аппроксимируется выражением

$$\left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=T} \cong \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T} \quad (9-140)$$

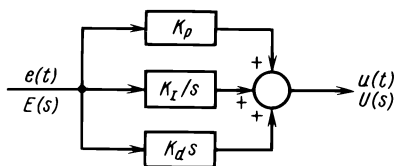


Рис. 9.47. Непрерывный ПИД-регулятор

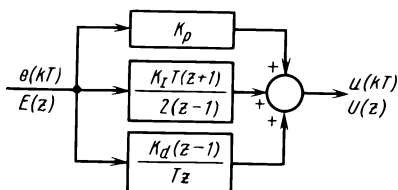


Рис. 9.48. Цифровой ПИД-регулятор

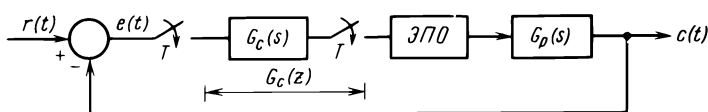


Рис. 9.49. Цифровая система управления с цифровым регулятором

Применяя z -преобразование к обеим частям последнего уравнения, получим передаточную функцию цифрового дифференциатора

$$G_d(z) = K_d \frac{z-1}{Tz} \quad (9-141)$$

где K_d – постоянная дифференцирования.

Полная структурная схема цифрового ПИД-регулятора изображена на рис. 9.48.

Синтез ПИД-регулятора заключается в определении значений K_p , K_I и K_d по заданным требованиям к качеству системы. Синтез может быть выполнен любым из известных методов, рассмотренных в предыдущих параграфах. Для иллюстрации действия и свойств ПИД-регулятора рассмотрим следующий пример.

Пример 9.9. На рис. 9.49 представлена структурная схема цифровой системы управления. Цель синтеза состоит в определении передаточной функции цифрового регулятора так, чтобы система удовлетворяла требуемым критериям качества. Управляемый процесс задан передаточной функцией

$$G_p(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)} \quad (9-142)$$

Разомкнутая система без коррекции имеет передаточную функцию

$$G_{h0}G_p(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{10}{s(s+1)(s+2)}\right] = \frac{0,0453(z+0,904)}{(z-0,905)(z-0,819)} \quad (9-143)$$

где период квантования принят равным 0,1 с. Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0,0453(z+0,904)}{z^2 - 1,679z + 0,782} \quad (9-144)$$

Корни характеристического уравнения равны: $z = 0,84 + j0,278$; $z = 0,84 - j0,278$. Следовательно, система устойчива. Однако при подаче на вход единичной ступенчатой функции установившаяся ошибка системы не равна нулю вследствие того, что передаточная функция разомкнутой системы $G_{h0}G_p(z)$ не имеет хотя бы одного полюса $z = 1$.

При единичной ступенчатой функции установившееся значение выходного сигнала определяется выражением

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c(kT) = \lim_{z=1} (1 - z^{-1})C(z) = \lim_{z=1} \frac{0,0453(z + 0,904)}{z^2 - 1,679z + 0,782} = 0,837 \quad (9-145)$$

Следовательно, установившаяся ошибка системы равна 0,163. Переходная функция системы без коррекции изображена на рис. 9.50.

Для устранения установившейся ошибки введем в закон управления интегральную составляющую. Сначала выберем только пропорционально-интегральный (ПИ) регулятор ($K_d = 0$). Передаточная функция разомкнутой системы с ПИ-регулятором

$$G_c(z)G_{h0}G_p(z) = \frac{(2K_p + K_I T) \left[z + \frac{K_I T - 2K_p}{K_I T + 2K_p} \right]}{2(z - 1)} \frac{0,0453(z + 0,904)}{(z - 0,905)(z - 0,819)} \quad (9-146)$$

Так как K_p и K_I выбираются произвольно, можно синтезировать регулятор таким образом, чтобы его нуль компенсировал один из полюсов передаточной функции процесса. Примем

$$\frac{K_I T - 2K_p}{K_I T + 2K_p} = -0,905 \quad (9-147)$$

Следовательно,

$$K_p/K_I = 1,00263 \quad (9-148)$$

При $K_p = 1$ и $K_I = 0,997$ передаточная функция цифрового регулятора имеет вид

$$G_c(z) = 1,0499 \frac{z - 0,905}{z - 1} \quad (9-149)$$

Передаточная функция разомкнутой системы с коррекцией

$$G_c(z)G_{h0}G_p(z) = \frac{0,0476(z + 0,904)}{(z - 1)(z - 0,819)} \quad (9-150)$$

Поскольку эта передаточная функция имеет полюс $z = 1$, то при ступенчатом входном воздействии установившаяся ошибка замкнутой системы равна нулю. Переходная функция системы с цифровым ПИ-регулятором при $K_p = 1$ и $K_I = 0,997$ приведена на рис. 9.50. Заметим, что, хотя ПИ-регулятор позволил полностью устранить установившуюся ошибку, максимальное перерегулирование возросло до 45%. Максимальное перерегулирование можно уменьшить, увеличив время нарастания. На рис. 9.50 показаны переходные функции системы для двух других сочетаний коэффициентов K_p и K_I .

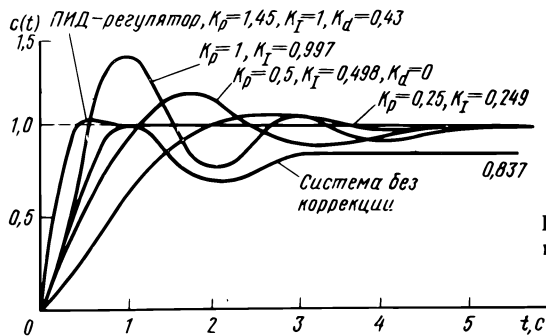


Рис. 9.50. Переходные функции цифровой системы управления

Чтобы исключить установившуюся ошибку и одновременно получить хорошее качество переходного процесса, необходимо использовать ПИД-регулятор. Пусть цифровой ПИД-регулятор описывается передаточной функцией

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_I T(z+1)}{2(z-1)} + \frac{K_d(z-1)}{Tz} =$$

$$= \frac{(K_I T^2 + 2K_d + 2K_p T)z^2 + (K_I T^2 - 2K_p T - 4K_d)z + 2K_d}{2Tz(z-1)} \quad (9-151)$$

Тогда передаточная функция разомкнутой системы с коррекцией будет иметь вид

$$G_c(z)G_{h0}G_p(z) = \frac{(K_I T^2 + 2K_d + 2K_p T)z^2 + (K_I T^2 - 2K_p T - 4K_d)z + 2K_d}{2Tz(z-1)} \times$$

$$\times \frac{0,0453(z+0,904)}{(z-0,905)(z-0,819)} \quad (9-152)$$

Итак, есть три неизвестных параметра K_p , K_I и K_d , которые необходимо определить, исходя из заданных показателей качества.

Потребуем, чтобы коэффициент ошибки по скорости K_v был равен 5 и, кроме того, чтобы два нуля ПИД-регулятора компенсировали два полюса управляемого процесса: $z = 0,905$; $z = 0,819$. Эти условия должны дать три линейно независимых уравнения для определения трех неизвестных параметров ПИД-регулятора.

Воспользуемся выражением для коэффициента ошибки по скорости

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_c(z)G_{h0}G_p(z) = 5K_I \quad (9-153)$$

Интересно, что K_v определяется только коэффициентом K_I и параметрами управляемого процесса и не зависит от K_p и K_d . Так как коэффициент K_v должен быть равен 5, получаем $K_I = 1$.

Выбирая два нуля регулятора так, чтобы они компенсировали полюсы процесса, получим

$$z^2 + \frac{K_I T^2 - 2K_p T - 4K_d}{2K_p T + K_I T^2 + 2K_d} z + \frac{2K_d}{2K_p T + K_I T^2 + 2K_d} = (z-0,905)(z-0,819) \quad (9-154)$$

Поскольку $K_I = 1$ и $T = 0,1$ с, из этого уравнения находим значения $K_p = 1,45$; $K_d = 0,43$. После подстановки параметров регулятора в выражение (9-152) передаточная функция скорректированной разомкнутой системы принимает простой вид:

$$G_c(z)G_{h0}G_p(z) = \frac{0,263(z+0,904)}{z(z-1)} \quad (9-155)$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0,263(z+0,904)}{z^2 - 0,737z + 0,238} \quad (9-156)$$

Корни характеристического уравнения имеют значения $z = 0,369 + j0,319$ и $z = 0,369 - j0,319$. Переходная функция системы с ПИД-регулятором изображена на рис. 9.50. Очевидно, что введение производной в закон управления не только уменьшает перерегулирование, но и сокращает время нарастания. В данном случае перерегулирование составляет около 4%.

9.8. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С АПЕРИОДИЧЕСКИМ ПЕРЕХОДНЫМ ПРОЦЕССОМ

Большая часть систем управления проектируется таким образом, чтобы переходный процесс в них как можно быстрее достигал требуемого значения. Такой класс систем управления называется *системами с минимальным временем переходного процесса*, или *системами, оптимальными по быстродействию* (см. гл. 8). Что касается методов синтеза, рассмотренных в данной главе, то они были ориентированы на получение небольшого максимального перерегулирования и малого времени нарастания переходной функции. Практически все эти методы базируются на опыте, приобретенном при синтезе непрерывных систем управления, где, например, широко используются ПИД-регуляторы и регуляторы с отставанием или опережением по фазе. Однако структура цифрового регулятора обладает значительно большей гибкостью, поэтому возникает необходимость разработать оригинальные методы, отличные от принципов синтеза непрерывных систем управления.

В примере 9.9 с помощью ПИД-регулятора удалось существенно улучшить переходный процесс цифровой системы управления. А нельзя ли сделать его еще лучше? Перепишем передаточную функцию управляемого процесса (9-143):

$$G_{h0}G_p(z) = \frac{0,0453(z + 0,904)}{(z - 0,905)(z - 0,819)} \quad (9-157)$$

Пусть последовательный цифровой регулятор имеет передаточную функцию

$$G_c(z) = \frac{(z - 0,905)(z - 0,819)}{0,0453(z - 1)(z + 0,904)} \quad (9-158)$$

Итак, введение регулятора приводит к компенсации всех полюсов и нулей процесса и появлению нового полюса $z = 1$. Передаточная функция разомкнутой системы с коррекцией приобретает простой вид:

$$G_c(z)G_{h0}G_p(z) = \frac{1}{z - 1} \quad (9-159)$$

Соответствующая ей передаточная функция замкнутой системы

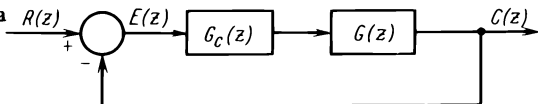
$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{1}{z} \quad (9-160)$$

Тогда при ступенчатом входном воздействии z -преобразование выходного сигнала имеет вид

$$C(z) = \frac{1}{z - 1} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \quad (9-161)$$

Это означает, что выходной сигнал системы $c(kT)$ достигает требуемого установившегося значения за один период квантования и с этого момента сохраняет данное значение. Перерегулирование $c(kT)$ равно нулю. Однако надо иметь в виду, что в действительности о качестве системы следует су-

Рис. 9.51. Цифровая система управления



дить по поведению $c(t)$. В общем случае, хотя $c(kT)$ может иметь малое перерегулирование или вообще не иметь его, действительная реакция $c(t)$ может сопровождаться пульсациями в промежутках между моментами замыкания.

Поскольку период квантования $T=0,1$ с намного меньше постоянных времени управляемого процесса, для данной системы можно ожидать, что $C(z)$ или $c(kT)$ довольно хорошо совпадает с $c(t)$. Поэтому есть надежда, что в системе с цифровым регулятором (9-158) переходная функция достигает установившегося значения, равного единице, за 0,1 с, а в промежутках между моментами замыкания пульсаций не будет или они будут малыми. Такой тип реакции обычно называют *апериодическим переходным процессом*.

Важно подчеркнуть, что апериодический процесс можно получить только в идеальном случае, когда происходит идеальная компенсация полюсов и нулей. На практике неопределенность полюсов и нулей управляемого процесса, возникающая на стадии его описания, и ограничения в реализации передаточной функции регулятора на ЭВМ приводят к тому, что достигнуть идеального апериодического процесса невозможно.

Подойдем теперь к синтезу систем с апериодическим переходным процессом с общих позиций. Рассмотрим структурную схему системы, изображенную на рис. 9.51, где $G(z)$ — передаточная функция управляемого процесса, которая может включать и экстраполиатор нулевого порядка. Если мы получим критерий синтеза систем с апериодическим переходным процессом, будет ясно, что структура системы не обязательно должна быть такой, как показано на рис. 9.51.

Запишем передаточную функцию замкнутой системы:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = M(z) = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)} \quad (9-162)$$

Критерий синтеза характеризуется следующими условиями:

- 1) система должна иметь в моменты замыкания нулевую установившуюся ошибку при определенном входном сигнале;
- 2) длительность переходного процесса, определяемая временем достижения установившегося состояния, должна быть минимальной;
- 3) цифровой регулятор $G_c(z)$ должен быть физически реализуемым.

Разрешая уравнение (9-162) относительно $G_c(z)$, имеем

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{M(z)}{1 - M(z)} \quad (9-163)$$

Запишем z -преобразование сигнала ошибки в виде

$$E(z) = R(z) - C(z) = R(z)[1 - M(z)] = \frac{R(z)}{1 + G_c(z)G(z)} \quad (9-164)$$

Представим z -преобразование входного сигнала в виде функции

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^N} \quad (9-165)$$

где N — положительное целое число; $A(z)$ — полином от переменной z^{-1} , не имеющий нулей $z = 1$. Например, для единичной ступенчатой функции $A(z) = 1$ и $N = 1$; для единичной линейной входной функции $A(z) = Tz^{-1}$ и $N = 2$ и т. д. В общем случае выражение (9-165) соответствует входным сигналам типа t^{N-1} . Приравняем к нулю установившуюся ошибку:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A(z)[1 - M(z)]}{(1 - z^{-1})^N} = 0 \quad (9-166)$$

Поскольку полином $A(z)$ не содержит нулей $z = 1$, то необходимым условием равенства нулю установившейся ошибки является наличие множителя $(1 - z^{-1})^N$ в выражении $1 - M(z)$. Следовательно, последнее должно иметь вид

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^N F(z) \quad (9-167)$$

где $F(z)$ — полином от переменной z^{-1} . Разрешая последнее уравнение относительно $M(z)$, получим

$$M(z) = \frac{z^N - (z - 1)^N F(z)}{z^N} \quad (9-168)$$

Так как $F(z)$ является полиномом от z^{-1} , то она имеет полюсы только $z = 0$. Таким образом, выражение (9-168) показывает, что характеристическое уравнение системы с нулевой установившейся ошибкой имеет вид

$$z^p = 0 \quad (9-169)$$

где p — положительное целое число, причем $p \geq N$.

После подстановки (9-167) в (9-164) z -преобразование ошибки принимает вид

$$E(z) = A(z)F(z) \quad (9-170)$$

Поскольку и $A(z)$ и $F(z)$ являются полиномами от z^{-1} , то $E(z)$, определяемое выражением (9-170), будет иметь *конечное* число членов при разложении его в ряд по отрицательным степеням z . Таким образом, если характеристическое уравнение цифровой системы управления имеет вид (9-169), т. е. все его корни нулевые, то сигнал ошибки будет сводиться к нулю за конечное число периодов квантования.

В общем случае $F(z)$ может иметь вид

$$F(z) = \frac{F_n(z)}{F_d(z)} \quad (9-171)$$

где $F_n(z)$ и $F_d(z)$ — полиномы от z , не содержащие полюсов и нулей $z = 1$ и полюсов, для которых $|z| > 1$. Тогда характеристическое уравнение будет иметь вид

$$z^p F_d(z) = 0 \quad (9-172)$$

Условия физической реализуемости. Выражение (9-168) показывает, что синтез цифровой системы управления с аperiodическим переходным процессом при заданном входном воздействии прежде всего связан с выбором функции $F(z)$. Если по этому выражению установлен вид $M(z)$, то передаточная функция цифрового регулятора находится с помощью (9-163). Однако требование физической реализуемости $G_c(z)$ и тот факт, что $G(z)$ есть передаточная функция реального физического процесса, накладывают ограничения на вид передаточной функции замкнутой системы $M(z)$. В общем случае $G(z)$ и $M(z)$ могут быть представлены разложением в степенной ряд

$$G(z) = g_n z^{-n} + g_{n+1} z^{-n-1} + \dots \quad (9-173)$$

$$M(z) = m_k z^{-k} + m_{k+1} z^{-k-1} + \dots \quad (9-174)$$

где $n \geq 0$ и $k \geq 0$. Подставляя два последних выражения в (9-163), получим

$$G_c(z) = \frac{m_k z^{-k} + m_{k+1} z^{-k-1} + \dots}{(g_n z^{-n} + g_{n+1} z^{-n-1} + \dots)(1 - m_k z^{-k} - m_{k+1} z^{-k-1} - \dots)} =$$

$$= d_{k-n} z^{-(k-n)} + d_{k-n+1} z^{-(k-n+1)} + \dots \quad (9-175)$$

Таким образом, чтобы функция $G_c(z)$ была физически реализуемой, должно выполняться условие $k \geq n$, т. е. низшая степень разложения $M(z)$ в ряд относительно переменной z^{-1} должна быть во всяком случае не меньше аналогичной (нижней) степени полинома $G(z)$. Тогда выбор функции $F(z)$ при заданном входном воздействии должен производиться на основании соотношения (9-167) с учетом сформулированного требования к $M(z)$.

Согласно z -преобразованию входного сигнала (9-165), значение N определяется его видом, т. е. для ступенчатого сигнала $N=1$, для линейного сигнала $N=2$, для параболического сигнала $N=3$ и т. д. Связь между общим видом $M(z)$ и типом входного сигнала, необходимая для получения аperiodического переходного процесса, устанавливается с помощью соотношения (9-168). Эта связь отражена в табл. 9.2.

Анализ табл. 9.2 показывает, что функция $F(z)$ должна содержать, по крайней мере, слагаемое, равное единице, ибо, если такое слагаемое будет иметь $M(z)$, она не будет физически реализуемой. В действительности, ничто не мешает выбрать $F(z) = 1$ для всех входных сигналов типа (9-165). Тогда для трех основных типов входных сигналов, рассмотренных в табл. 9.2, передаточные функции замкнутой системы с аperiodическим переходным процессом будут иметь вид, представленный в табл. 9.3.

Таблица 9.2

Входная функция	N	$M(z)$
Ступенчатая $u_S(t)$	1	$1 - (1 - z^{-1}) F(z)$
Линейная $tu_S(t)$	2	$1 - (1 - z^{-1})^2 F(z)$
Параболическая $t^2 u_S(t)$	3	$1 - (1 - z^{-1})^3 F(z)$

Входной сигнал	$M(z)$
Ступенчатый	z^{-1}
Линейный	$2z^{-1} - z^{-2}$
Параболический	$3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$

Результаты, приведенные в табл. 9.3, показывают, что при ступенчатой входной функции минимальное время установления нулевой ошибки равно одному, при линейной функции — двум, а при параболической — трем периодам квантования.

Как было показано на примере в начале этого параграфа синтез систем с аperiodической реакцией основан на компенсации полюсов и нулей управляемого процесса нулями и полюсами цифрового регулятора и добавлении новых полюсов и нулей в соответствующих местах z -плоскости. Здесь может возникнуть одно затруднение, когда $G(z)$ имеет один нуль или большее число нулей, расположенных на единичной окружности или вне ее, и для компенсации этих нулей потребуются неустойчивый регулятор. Другое затруднение возникает при использовании формулы (9-163), когда $M(z)$ имеет какое-либо из выражений, представленных в табл. 9.3. Поскольку член наивысшей степени в $M(z)$ равен z^{-1} , то $M(z)/[1-M(z)]$ всегда будет иметь число полюсов на единицу больше, чем число нулей. Тогда, чтобы $G_c(z)$ была физически реализуемой передаточной функцией, число полюсов $G(z)$ не должно превышать числа ее нулей более, чем на единицу. Само собой разумеется, функция $G(z)$ не может иметь нулей больше, чем полюсов. Например, при ступенчатом входном сигнале $M(z) = z^{-1}$ и в результате (9-163) на основании (9-163) имеем

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{1}{z-1} \quad (9-176)$$

Отсюда легко получается приведенное выше ограничение на $G(z)$. Итак, мы приходим к выводу, что если $G(z)$ имеет один нуль или более на единичной окружности $|z| = 1$ (или вне ее) или если число ее полюсов более чем на единицу превышает число нулей, то $F(z)$ не может просто равняться 1. Следующий пример как раз иллюстрирует тот случай, когда у $G(z)$ число полюсов превышает число нулей более чем на единицу.

Пример 9.10. Пусть в цифровой системе, изображенной на рис. 9.51, управляемый процесс описывается передаточной функцией

$$G(z) = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} \quad (9-177)$$

Требуется спроектировать цифровой регулятор, обеспечивающий аperiodический переходный процесс при входном сигнале типа единичной ступенчатой функции.

Поскольку передаточная функция $G(z)$ имеет полюсов на два больше, чем нулей, мы не можем выбрать $M(z) = z^{-1}$, так как это приведет к физически нереализуемой функции $G_c(z)$. Попробуем взять $M(z) = z^{-2}$. Тогда из (9-163) имеем

$$G_c(z) = \frac{1 - z^{-1} - z^{-2}}{z^{-2}} \frac{z^{-2}}{1 - z^{-2}} = \frac{1 - z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-2}} \quad (9-178)$$

что соответствует физически реализуемой передаточной функции. В данном случае функция $F(z)$ определяется выражением

$$F(z) = \frac{1 - M(z)}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} \quad (9-179)$$

Можно показать, что в общем случае при заданном входном воздействии, определяющем значение N , минимальное число периодов квантования, необходимое для установления нулевой ошибки, равно $N + M$, где $M + 1$ есть разность между числом полюсов и числом нулей передаточной функции управляемого процесса $G(z)$.

Синтез систем с аperiodической реакцией при наличии полюсов или нулей управляемого процесса на единичной окружности или вне ее. Мы установили, что синтез цифровых систем управления с аperiodической реакцией основан на компенсации полюсов и нулей управляемого процесса нулями и полюсами регулятора. Однако если управляемый процесс имеет полюсы или нули, которые находятся на z -плоскости на единичной окружности или вне ее, то неидеальная компенсация, весьма вероятная на практике, будет приводить к неустойчивости замкнутой системы. Поэтому в подобных случаях и не пытаются прибегать к такой компенсации, а просто накладывают дополнительные ограничения на передаточную функцию замкнутой системы $M(z)$.

Пусть передаточная функция управляемого процесса, представленного на рис. 9.51, имеет вид

$$G(z) = \frac{\prod_{i=1}^K (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^L (1 - p_j z^{-1})} A_g(z) \quad (9-180)$$

где z_i ($i = 1, 2, \dots, K$) и p_j ($j = 1, 2, \dots, L$) есть соответственно нули и полюсы $G(z)$, лежащие на единичной окружности или вне ее, $A_g(z)$ — рациональная функция от z^{-1} , полюсы и нули которой расположены только внутри единичной окружности. Подстановка (9-180) в (9-163) дает

$$G_c(z) = \frac{\prod_{j=1}^L (1 - p_j z^{-1})}{\prod_{i=1}^K (1 - z_i z^{-1})} \frac{M(z)}{A_g(z)[1 - M(z)]} \quad (9-181)$$

Поскольку $G_c(z)$ не может иметь p_j и z_i в качестве своих нулей и полюсов, необходимо предусмотреть их сокращение за счет соответствующих нулей и полюсов функций $1 - M(z)$ и $M(z)$. Иными словами, $M(z)$ должна содержать член

$$\prod_{i=1}^K (1 - z_i z^{-1})$$

а $1 - M(z)$ должна содержать

$$\prod_{j=1}^L (1 - p_j z^{-1})$$

В общем случае $M(z)$ и $1 - M(z)$ имеют следующий вид:

$$M(z) = \prod_{i=1}^K (1 - z_i z^{-1})(M_m z^{-m} + M_{m+1} z^{-m-1} + \dots) \quad (9-182)$$

$$1 - M(z) = \prod_{j=1}^L (1 - p_j z^{-1})(1 - z^{-1})^N (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots) \quad (9-183)$$

где m должно быть больше или равно низшей степени z^{-1} в разложении $G(z)$ в ряд, а целое число N зависит от порядка входного сигнала. Заметим, что если $G(z)$ имеет полюсы $z = 1$, то сомножитель $(1 - z^{-1})$ в выражении $1 - M(z)$ возводится в степень, равную либо порядку полюсов входного сигнала, либо порядку полюсов $z = 1$ функции $G(z)$ в зависимости от того, какой из них выше.

Приведенный ниже пример иллюстрирует синтез цифровой системы, в которой управляемый процесс имеет полюсы или нули вне единичной окружности или на ней.

Пример. 9.11. В системе, изображенной на рис. 9.51, передаточная функция управляемого процесса имеет вид

$$G(z) = \frac{0,000392z^{-1}(1 + 2,78z^{-1})(1 + 0,2z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2(1 - 0,286z^{-1})} \quad (9-184)$$

Требуется спроектировать цифровой регулятор, который при линейном входном воздействии обеспечивал бы минимальное время переходного процесса и нулевую установившуюся ошибку.

Поскольку $G(z)$ имеет нуль $z = -2,78$ вне единичной окружности и два полюса $z = 1$ на единичной окружности, то $M(z)$ и $1 - M(z)$ должны быть выбраны в виде (9-182) и (9-183) соответственно. Таким образом,

$$M(z) = (1 + 2,78z^{-1})(M_1 z^{-1} + M_2 z^{-2}) \quad (9-185)$$

Так как первый член разложения $G(z)$ в ряд равен $0,000392 z^{-1}$, то первый член разложения $M(z)$ в ряд должен быть вида $M_1 z^{-1}$, где M_1 — коэффициент, подлежащий определению. В случае линейной входной функции выражение $1 - M(z)$ должно содержать множитель $(1 - z^{-1})^2$, а также множитель, соответствующий всем полюсам $G(z)$, расположенным на единичной окружности или вне ее. Так как $G(z)$ имеет два полюса $z = 1$, то наличие члена $(1 - z^{-1})^2$ в выражении $1 - M(z)$ достаточно, чтобы удовлетворить обоим требованиям. Поэтому $1 - M(z)$ следует выбрать в виде

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^2 F(z) = (1 - z^{-1})^2 (1 + a_1 z^{-1}) \quad (9-186)$$

где для получения аperiодической реакции и одновременно физически реализуемой функции $G_c(z)$ в выражении $1 - M(z)$ должен присутствовать постоянный член, равный 1, ибо $a_1 \neq 0$. Поскольку $M(z)$ теперь имеет минимальный порядок, равный 3, то переходный процесс будет заканчиваться за три периода квантования, что для данной системы является наименьшим возможным временем установления. Из табл. 9.3 следует, что если бы функция $G(z)$ не имела полюсов или нулей на единичной окружности или вне ее, то минимальное время установления при линейном входном сигнале было бы равно двум периодам квантования. Из-за наличия у $G(z)$ нуля $z = -2,78$ функцию $F(z)$ уже нельзя выбирать равной 1, и время установления увеличивается на один период квантования. Вообще, чем больше нулей и полюсов $G(z)$ находится на единичной окружности или вне ее, тем больше будет минимальное время установления аperiодического переходного процесса.

Теперь получим три независимых уравнения относительно трех неизвестных M_1 , M_2 и a_1 . Подстановка (9-185) в (9-186) дает следующее уравнение:

$$M_1 z^{-1} + (2,78M_1 + M_2)z^{-2} + 2,78M_2 z^{-3} = (2 - a_1)z^{-1} + (2a_1 - 1)z^{-2} - a_1 z^{-3}. \quad (9-187)$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих членах в обеих частях последнего уравнения, получим

$$M_1 = 2 - a_1 \quad (9-188)$$

$$2,78M_1 + M_2 = 2a_1 - 1 \quad (9-189)$$

$$2,78M_2 = -a_1 \quad (9-190)$$

Решение этих уравнений дает следующие коэффициенты: $M_1 = 0,723$; $M_2 = -0,46$; $a_1 = 1,277$.

Замкнутая система имеет передаточную функцию

$$M(z) = 0,723z^{-1} + 1,554z^{-2} - 1,277z^{-3} = \frac{0,723z^2 + 1,554z - 1,277}{z^3} \quad (9-191)$$

При линейной входной функции с единичным наклоном z -преобразование выходного сигнала имеет вид

$$C(z) = M(z) \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = 0,05(0,723z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5} + \dots) \quad (9-192)$$

Реакция на выходе системы в моменты замыкания показана на рис. 9.52, а. Если на вход подана единичная ступенчатая функция, то z -преобразование выходного сигнала имеет вид

$$C(z) = M(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} = 0,723z^{-1} + 2,277z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots \quad (9-193)$$

Таким образом, переходная функция системы имеет максимальное перерегулирование 127,7%, как показано на рис. 9.52, б.

Подстановка выражений (9-191) и (9-184) в (9-163) дает передаточную функцию цифрового регулятора

$$G_c(z) = \frac{1840(1 - 0,286z^{-1})(1 - 0,636z^{-1})}{(1 + 0,2z^{-1})(1 + 1,277z^{-1})} \quad (9-194)$$

Примечания к синтезу систем с аperiodическим переходным процессом. Хотя при синтезе системы с аperiodическим переходным процессом мы получаем систему, обладающую "идеальной" реакцией на определенный тип входного сигнала, в действительности она оказывается "настроенной" исключительно на этот сигнал, а по отношению к входным сигналам иного вида будет иметь гораздо худшее или неприемлемое качество. Так, в примере 9.11 система проектировалась в расчете на линейно меняющийся входной сигнал. Выходной сигнал становится равен входному и затем отслеживает его без ошибки спустя три периода квантования. Однако если на ту же самую систему действует единичная ступенчатая функция, то максимальное значение выходного сигнала равно 2,277, т. е. перерегулирование достигает 127,7%.

Другая проблема возникает в связи с наличием кратного полюса у передаточной функции замкнутой системы $M(z)$, поскольку характеристическое уравнение имеет вид $z^N = 0$. Можно показать, что чувствительность кратного корня характеристического уравнения к изменению ка-

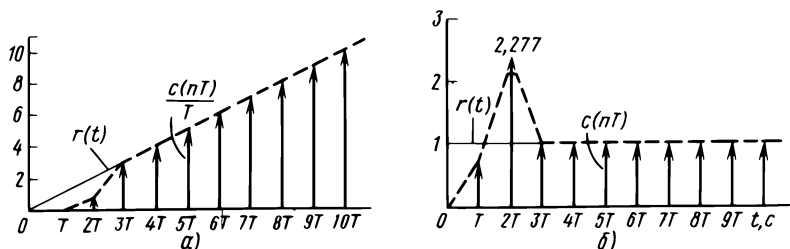


Рис. 9.52. Реакции системы на линейную и ступенчатую функции при $T = 0,05$ с

кого-либо параметра системы теоретически равна бесконечности. Чувствительность корней характеристического уравнения цифровой системы управления по отношению к малому изменению параметра системы k определяется как

$$S_k^z = \frac{dz/z}{dk/k} = \frac{dz}{dk} \frac{k}{z} \quad (9-195)$$

Пусть характеристическое уравнение имеет вид

$$P(z) + kQ(z) = 0 \quad (9-196)$$

где k — произвольный параметр системы; $P(z)$ и $Q(z)$ — полиномы от z , причем параметр k в них не входит. Если k получает малое приращение Δk , то уравнение (9-196) будет иметь вид

$$P(z) + (k + \Delta k)Q(z) = 0 \quad (9-197)$$

Разделив обе части последнего уравнения на $P(z) + kQ(z)$, получим

$$1 + \frac{\Delta k Q(z)}{P(z) + kQ(z)} = 0 \quad (9-198)$$

или

$$1 + \Delta k B(z) = 0 \quad (9-199)$$

где

$$B(z) = \frac{Q(z)}{P(z) + kQ(z)} \quad (9-200)$$

Заметим, что знаменатель $B(z)$ представляет собой исходное характеристическое уравнение. Предположим, что уравнение (9-196) имеет корень z_i кратности $n > 1$. Раскладывая $B(z)$ на элементарные дроби в окрестности z_i , имеем

$$B(z) \cong \frac{A_i}{(z - z_i)^n} = \frac{A_i}{(\Delta z)^n} \quad (9-201)$$

Подстановка (9-201) в (9-199) дает

$$1 + \frac{\Delta k A_i}{(\Delta z)^n} \cong 0 \quad (9-202)$$

откуда получаем

$$\frac{\Delta k}{\Delta z} = \frac{-(\Delta z)^{n-1}}{A_i} \quad (9-203)$$

Далее, переходя в обеих частях выражения (9-203) к пределу при $\Delta k \rightarrow 0$ и $\Delta z \rightarrow 0$, имеем

$$\lim_{\substack{\Delta k \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\Delta k}{\Delta z} = \frac{dk}{dz} = \lim_{\substack{\Delta k \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{-(\Delta z)^{n-1}}{A_i} = 0 \quad (9-204)$$

Таким образом, мы показали, что в случае кратного корня характеристического уравнения $dk/dz = 0$, а это по формуле (9-195) соответствует $S_k^z = \infty$. Полученный результат говорит о том, что система с апериодическим переходным процессом очень чувствительна к изменению параметров.

Синтез с использованием специального весового коэффициента. Как уже подчеркивалось, система, синтезируемая для получения апериодической реакции на определенный входной сигнал, не обладает удовлетворительным качеством при других типах входного сигнала. Можно воспользоваться таким общим методом синтеза, который приводил бы к системе с достаточно хорошей реакцией на различные типы входного сигнала. Конечно, ни одна из этих реакций уже не будет апериодической, и метод, в основе которого лежит идея об апериодическом характере переходного процесса, используется здесь лишь благодаря хорошо отработанной процедуре синтеза.

Синтез осуществляется путем введения *весового коэффициента* s в желаемую передаточную функцию замкнутой системы $M(z)$. Модифицируем функцию $1 - M(z)$, разделив ее на $(1 - cz^{-1})$:

$$1 - M_w(z) = \frac{1 - M(z)}{1 - cz^{-1}} \quad (9-205)$$

Так как s теперь является полюсом функции $M_w(z)$, то следует ограничить область его значений диапазоном от -1 до $+1$, чтобы $M_w(z)$ соответствовала устойчивой системе. Когда в знаменатель функции $1 - M(z)$ вводится весовой коэффициент s , характеристическое уравнение скорректированной системы уже не может иметь вид $z^N = 0$, и ошибка не будет сводиться к нулю за конечное время. Однако при использовании весового коэффициента достигаются лучшие показатели качества по отношению сразу к нескольким входным сигналам разного вида, а чувствительность характеристик системы к изменению параметров уменьшается. Выбором необходимого значения s можно уменьшить максимальное перерегулирование при обработке системой ступенчатого воздействия, если эта система проектировалась в расчете на линейный входной сигнал, и при этом обеспечить вхождение переходного процесса в зону допустимых отклонений за приемлемый интервал времени. Использование весового коэффициента при синтезе цифровых систем управления иллюстрируется следующим примером.

Пример 9.12. Управляемый процесс задан передаточной функцией

$$G(z) = \frac{0,005z^{-1}(1 - 0,9z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0,905z^{-1})} \quad (9-206)$$

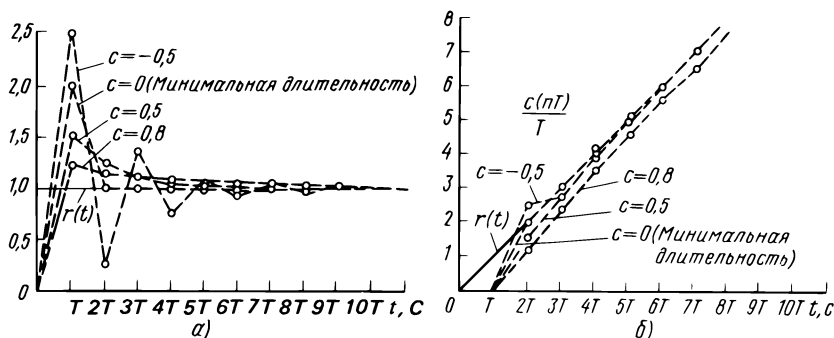


Рис. 9.53. Реакции системы на ступенчатый и линейный входные сигналы

При единичном линейном входном сигнале аperiодическая реакция достигается, если замкнутая система имеет передаточную функцию (см. табл. 9.2):

$$M(z) = 2z^{-1} - z^{-2} \quad (9-207)$$

Реакции такой системы на единичные ступенчатый и линейный сигналы при $c = 0$ изображены на рис. 9.53, а и б соответственно.

Заметим, что реакция системы на линейный сигнал устанавливается равной входному воздействию за два периода квантования. В то же время реакция на ступенчатый сигнал имеет перерегулирование 100%.

Теперь воспользуемся соотношением (9-205) :

$$1 - M_w(z) = \frac{1 - M(z)}{1 - cz^{-1}} = \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 - cz^{-1}} \quad (9-208)$$

откуда

$$M_w(z) = \frac{(2 - c)z^{-1} - z^{-2}}{1 - cz^{-1}} \quad (9-209)$$

Чтобы проиллюстрировать влияние весового коэффициента c и способствовать выбору его оптимального значения, на рис. 9.53, а и б изображены реакции системы в моменты замыкания соответственно на ступенчатый и линейный сигналы для различных значений c в диапазоне от -1 до 1 . На рисунке видно, что при отрицательных значениях c у реакции системы на ступенчатый сигнал перерегулирование становится еще больше. При $c = 0,8$ перерегулирование составляет всего 20%, но при этом переходные процессы, вызванные и ступенчатым и линейным воздействиями, устанавливаются очень медленно. По-видимому, в данном случае наилучшее компромиссное значение $c = 0,5$.

9.9. СИНТЕЗ ПО ЗАДАННОМУ РАСПОЛОЖЕНИЮ ПОЛЮСОВ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ (СЛУЧАЙ ЕДИНСТВЕННОГО УПРАВЛЯЮЩЕГО СИГНАЛА)

В гл. 4 был рассмотрен метод синтеза цифровой системы управления при единственном входном воздействии с помощью обратной связи по состоянию. Путем преобразования к канонической форме фазовой переменной было показано, что в системе

$$\mathbf{x}[(k + 1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}u(kT) \quad (9-210)$$

при формировании управляющего сигнала с помощью обратной связи по состоянию

$$u(kT) = -Gx(kT) \quad (9-211)$$

где G — матрица коэффициентов обратной связи размерностью $i \times n$, собственные значения матрицы $A-BG$ могут быть выбраны произвольным образом тогда и только тогда, когда пара матриц $[A, B]$ полностью управляема. Собственно говоря, это положение справедливо и для системы с несколькими управляющими сигналами, если только она является управляемой.

В гл. 4 синтез системы по заданному расположению полюсов с помощью обратной связи по состоянию базировался на использовании канонической формы фазовой переменной. В этом параграфе предложены более общие методы решения этой задачи для систем с единственным управляющим сигналом. Сначала докажем некоторые функциональные соотношения, используемые как математический аппарат синтеза. Введем следующие определения:

$$T_o(z) = -G(zI - A)^{-1}B \quad \begin{array}{l} \text{— матрица преобразования сигнала} \\ \text{управления в разомкнутой системе;} \end{array} \quad (9-212)$$

$$T_c(z) = -G(zI - A + BG)^{-1}B \quad \begin{array}{l} \text{— матрица преобразования сигнала} \\ \text{управления в замкнутой системе;} \end{array} \quad (9-213)$$

$$T(z) = I - T_o(z) \quad \begin{array}{l} \text{— разностная матрица сигнала уп-} \\ \text{равления;} \end{array} \quad (9-214)$$

$$\Delta_o(z) = |zI - A| \quad \begin{array}{l} \text{— характеристическое уравнение мат-} \\ \text{рицы } A \text{ (разомкнутой системы);} \end{array} \quad (9-215)$$

$$\Delta_c(z) = |zI - A + BG| \quad \begin{array}{l} \text{— характеристическое уравнение мат-} \\ \text{рицы } A-BG \text{ (замкнутой системы);} \end{array} \quad (9-216)$$

$$\Delta(z) = |I - T_o(z)| = |T(z)|. \quad (9-217)$$

В этих выражениях I обозначает единичную матрицу соответствующей размерности.

Сначала покажем, что

$$\Delta(z) = \frac{\Delta_c(z)}{\Delta_o(z)} \quad (9-218)$$

Для этого запишем

$$zI - A + BG = (zI - A)[I + (zI - A)^{-1}BG] \quad (9-219)$$

Вычисляя определители обеих частей последнего уравнения, получим

$$\Delta_c(z) = |zI - A + BG| = \Delta_o(z)|I + (zI - A)^{-1}BG| \quad (9-220)$$

Поскольку

$$|I + (zI - A)^{-1}BG| = |I + BG(zI - A)^{-1}| = |I + G(zI - A)^{-1}B| \quad (9-221)$$

где единичные матрицы имеют различные размерности, выражение (9-220) принимает вид

$$\Delta_c(z) = \Delta_o(z)\Delta(z) \quad (9-222)$$

Таким образом, соотношение (9-218) доказано.

Важную роль играет следующее функциональное соотношение:

$$T_0(z) = T(z)T_c(z) \quad (9-223)$$

или

$$G(zI - A)^{-1}B = [I + G(zI - A)^{-1}B]G(zI - A + BG)^{-1}B \quad (9-224)$$

Применяя операцию обращения матриц к обеим частям уравнения (9-219), получим

$$(zI - A + BG)^{-1} = [I + (zI - A)^{-1}BG]^{-1}(zI - A)^{-1} \quad (9-225)$$

Умножение обеих частей уравнения (9-225) слева на $I + (zI - A)^{-1}BG$ дает

$$[I + (zI - A)^{-1}BG](zI - A + BG)^{-1} = (zI - A)^{-1} \quad (9-226)$$

Теперь умножая обе части (9-226) слева на G и справа на B , получим

$$G[I + (zI - A)^{-1}BG](zI - A + BG)^{-1}B = G(zI - A)^{-1}B \quad (9-227)$$

Последнее выражение запишем иначе:

$$[I + G(zI - A)^{-1}B]G(zI - A + BG)^{-1}B = G(zI - A)^{-1}B \quad (9-228)$$

Таким образом, соотношение (9-223) доказано.

Последнее необходимое нам соотношение получим, используя выражения (9-218) и (9-225). Запишем (9-214) в виде

$$T(z) = I + G(zI - A)^{-1}B = I + G \frac{\text{Adj}(zI - A)B}{\Delta_0(z)} \quad (9-229)$$

где $\text{Adj}(zI - A)$ — матрица, присоединенная к матрице $zI - A$.

Пусть

$$k(z) = [\text{Adj}(zI - A)]B \quad (n \times 1) \quad (9-230)$$

Тогда (9-229) примет вид

$$T(z) = \frac{\Delta_0(z) + Gk(z)}{\Delta_0(z)} = \Delta(z) \quad (9-231)$$

откуда следует, что $T(z)$ есть скалярная функция.

Используя выражение (9-218), приведем последнее соотношение к виду

$$Gk(z) = \Delta_c(z) - \Delta_0(z) \quad (9-232)$$

Таким образом, если известны $k(z)$, $\Delta_c(z)$ и $\Delta_0(z)$, то из (9-232) мы можем найти решение для матрицы коэффициентов обратной связи G в случае, когда пара матриц $[A, B]$ полностью управляема.

Из уравнения (9-232) можно получить два выражения для матрицы G . Положим

$$\Delta_c(z) = z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_2 z + a_1 \quad (9-233)$$

$$\Delta_0(z) = z^n + a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_2 z + a_1 \quad (9-234)$$

Выразим $k(z)$ из уравнения (4-247):

$$k(z) = [\text{Adj}(zI - A)]B = \sum_{j=1}^n z^{j-1} \sum_{i=j}^n a_{i+1} A^{i-j} B \quad (9-235)$$

Тогда (9-232) примет вид

$$G \sum_{j=1}^n z^{j-1} \sum_{i=j}^n a_{i+1} A^{i-j} B = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_{i+1}) z^i \quad (9-236)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z в обеих частях последнего уравнения, получим

$$\begin{aligned} G(a_{n+1} B) &= a_n - a_n & (a_{n+1} &= 1) \\ G(a_n + a_{n+1} A)B &= a_{n-1} - a_{n-1} \\ &\vdots \\ G \sum_{i=2}^n a_{i+1} A^{i-2} B &= a_2 - a_2 \\ G \sum_{i=1}^n a_{i+1} A^{i-1} B &= a_1 - a_1 \end{aligned} \quad (9-237)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_n & a_{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B' \\ B'A' \\ B'(A')^2 \\ \vdots \\ B'(A')^{n-1} \end{bmatrix} G' = \begin{bmatrix} a_n - a_n \\ a_{n-1} - a_{n-1} \\ a_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (9-238)$$

Обозначим

$$M = \begin{bmatrix} a_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_n & a_{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \end{bmatrix} \quad (9-239)$$

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (9-240)$$

$$a = [a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_1]' \quad (9-241)$$

$$a = [a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_1]' \quad (9-242)$$

Тогда запишем уравнение (9-238) как

$$\mathbf{MS}'\mathbf{G}' = \mathbf{a} - \mathbf{a} \quad (9-243)$$

Из последнего уравнения находим решение для \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = [(\mathbf{MS}')^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{a})]' \quad (9-244) *$$

Так как \mathbf{M} есть треугольная матрица, содержащая единицы на главной диагонали, то она не является вырожденной. Поэтому, чтобы существовало решение для \mathbf{G} , определяемое формулой (9-244), матрица управляемости \mathbf{S} должна иметь ранг n , или, что то же самое, пара матриц $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ должна быть управляемой.

Матрица обратной связи \mathbf{G} в выражении (9-244) представлена как функция коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы α_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Другое выражение для \mathbf{G} может быть получено через желаемые собственные значения замкнутой системы. Пусть среди этих собственных значений $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$ — различные, а все остальные являются кратными. Тогда

$$\Delta_c(z_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9-245)$$

и, следовательно, из выражения (9-232) вытекает

$$\mathbf{G}\mathbf{k}(z_i) = -\Delta_0(z_i) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9-246)$$

Обозначим

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}(z_i) \quad (9-247)$$

$$\Delta_0(z_i) = \Delta_{0i} \quad (9-248)$$

для $i = 1, 2, \dots, m$; тогда (9-246) примет вид

$$\mathbf{G}\mathbf{k}_i = -\Delta_{0i} \quad (9-249)$$

В случае собственного значения кратности q продифференцируем обе части выражения (9-232) по z и, полагая $z = z_{m+j}$, $j = 1, 2, \dots, q$, получим

$$\mathbf{G}\mathbf{k}_{m+j} = -\Delta_{m+j} \quad (9-250)$$

где

$$\mathbf{k}_{m+j} = \left. \frac{d^j}{dz^j} \mathbf{k}(z) \right|_{z=z_{m+j}} \quad (j = 1, 2, \dots, q) \quad (9-251)$$

$$\Delta_{m+j} = \left. \frac{d^j}{dz^j} \Delta_0(z) \right|_{z=z_{m+j}} \quad (j = 1, 2, \dots, q) \quad (9-252)$$

Для всех n собственных значений имеем

$$\mathbf{G}[\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2 \quad \dots \quad \mathbf{k}_n] = -[\Delta_{01} \quad \Delta_{02} \quad \dots \quad \Delta_{0n}] \quad (9-253)$$

* Более простое выражение для \mathbf{G} может быть записано через собственные значения замкнутой системы, если \mathbf{A} и \mathbf{B} представлены в канонической форме фазовой переменной.

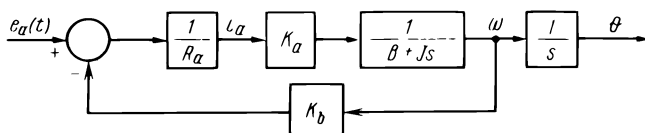


Рис. 9.54. Структурная схема двигателя постоянного тока

Тогда

$$\mathbf{G} = -[\Delta_{01} \quad \Delta_{02} \quad \dots \quad \Delta_{0n}] \mathbf{K}^{-1} \quad (9-254)$$

где

$$\mathbf{K} = [\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2 \quad \dots \quad \mathbf{k}_n] \quad (9-255)$$

Если пара матриц $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ управляема, то решение для \mathbf{G} , определяемое формулой (9-254), существует; при том же условии существует и матрица \mathbf{K}^{-1} .

Пример 9.13. Этот пример имеет целью проиллюстрировать синтез цифровой системы управления с заданным расположением полюсов и обратной связью по состоянию. Управляемый процесс задан в виде двигателя постоянного тока, структурная схема которого изображена на рис. 9.54. Электродвигатель предназначен для управления чисто инерционной нагрузкой таким образом, чтобы любые ненулевые начальные значения тока якоря i_a и угловой скорости нагрузки ω сводились к нулю за минимально возможное время. Система такого типа относится к известному классу систем управления, называемых стабилизаторами. Электродвигатель характеризуется следующими параметрами.

Сопротивление якоря
Индуктивность якоря
Постоянная вращающего момента
Постоянная противоЭДС
Момент инерции двигателя и нагрузки
Коэффициент вязкого трения

$R_a = 1$ Ом
 L_a — незначительная
 $K_a = 0,345$ Н · м/А
 $K_b = 0,367$ В/(рад · с⁻¹)
 $J = 1,41 \cdot 10^{-3}$ кг · м²
 $B = 0,25$ Н · м/(рад · с⁻¹)

Все параметры даны в системе единиц СИ и согласованы друг с другом. На рис. 9.55 приведена диаграмма состояния двигателя. Входной переменной является напряжение якоря $e_a(t)$. Из диаграммы очевидно, что переменными состояния являются $\theta(t)$ и $\omega(t)$. Запишем уравнения состояния электродвигателя в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (9-256)$$

где

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (9-257)$$

$$u(t) = e_a(t) \quad (9-258)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{(BR_a + K_a K_b)}{JR_a} \end{bmatrix} \quad (9-259)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_a}{JR_a} \end{bmatrix} \quad (9-260)$$

Подстановка параметров двигателя в матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} дает:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -267,19 \end{bmatrix} \quad (9-261)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 244,68 \end{bmatrix} \quad (9-262)$$

Введем обратную связь по состоянию, реализовав ее с помощью датчиков углового перемещения θ и скорости ω . Управление осуществляется через квантователь и фиксатор, т. е.

$$u(kT) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(kT) \quad (9-263)$$

где

$$\mathbf{G} = [g_1 \quad g_2] \quad (9-264)$$

а период квантования $T=0,005$ с.

Задачей синтеза является определение g_1 и g_2 таким образом, чтобы замкнутая цифровая система управления имела собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Важно подчеркнуть, что собственные значения замкнутой цифровой системы являются собственными значениями матрицы $\Phi(T) - \Theta(T)\mathbf{G}$, где

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T} \quad (9-265)$$

$$\theta(T) = \int_0^T \phi(\lambda) \mathbf{B} d\lambda \quad (9-266)$$

Переходная матрица состояния $\Phi(T)$ для $T=0,005$ с выражается через матрицу \mathbf{A} вида (9-261), т. е.

$$\Phi(T) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \Big|_{t=T=0,005} = \begin{bmatrix} 1 & 0,00276 \\ 0 & 0,263 \end{bmatrix} \quad (9-267)$$

$$\theta(T) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} s^{-1}] \Big|_{t=T=0,005} = \begin{bmatrix} 0,00205 \\ 0,675 \end{bmatrix} \quad (9-268)$$

Теперь, когда управляемый процесс дискретизирован, запишем уравнения состояния в разностной форме

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \theta(T)u(kT) \quad (9-269)$$

где $\Phi(T)$ и $\Theta(T)$ заданы выражениями (9-267) и (9-268) соответственно. Обратная связь по состоянию описывается уравнением

$$u(kT) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(kT) \quad (9-270)$$

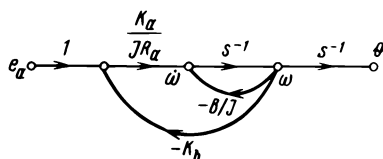


Рис. 9.55. Диаграмма состояния двигателя постоянного тока, соответствующая структурной схеме (см. рис. 9.54)

Характеристическое уравнение разомкнутой системы, или матрицы $\Phi(T)$,

$$\Delta_0(z) = |zI - \Phi(T)| = \begin{vmatrix} z - 1 & -0,00276 \\ 0 & z - 0,263 \end{vmatrix} = z^2 - 1,263z + 0,263 = 0 \quad (9-271)$$

Так как пара матриц $[\Phi(T), \Theta(T)]$ полностью управляема, то с помощью обратной связи по состоянию собственные значения матрицы $\Phi(T) - \Theta(T)G$ можно задать произвольным образом. Пусть желаемое характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\Delta_c(z) = z^2 = 0 \quad (9-272)$$

В соответствии с уравнением (9-230) запишем

$$K(z) = \text{Adj}[zI - \Phi(T)] \cdot \theta(T) = \begin{bmatrix} 0,00205z + 0,00132 \\ 0,675(z - 1) \end{bmatrix} \quad (9-273)$$

Матрицу обратной связи определим из соотношения (9-254)

$$G = -[\Delta_{01} \quad \Delta_{02}]K^{-1} \quad (9-274)$$

где

$$\Delta_{01} = \Delta_0(z) \Big|_{z=0} = 0,263 \quad (9-275)$$

$$\Delta_{02} = \frac{d}{dz} \Delta_0(z) \Big|_{z=0} = (2z - 1,263) \Big|_{z=0} = -1,263 \quad (9-276)$$

$$K = [k_1 \quad k_2]$$

где

$$k_1 = \text{Adj}[zI - \Phi(T)] \cdot \theta(T) \Big|_{z=0} = \begin{bmatrix} 0,001323 \\ -0,675 \end{bmatrix} \quad (9-277)$$

$$k_2 = \frac{d}{dz} \text{Adj}[zI - \Phi(T)] \cdot \theta(T) \Big|_{z=0} = \begin{bmatrix} 0,00205 \\ 0,675 \end{bmatrix} \quad (9-278)$$

Подставляя выражения (9-275) – (9-278) в (9-274), получим

$$G = [296,3 \quad 0,970] \quad (9-279)$$

Подставляя матрицу коэффициентов обратной связи и управление $u(kT)$ в (9-269), получим уравнение состояния замкнутой системы:

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,395 & 0,00078 \\ -200 & -0,392 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} \quad (9-280)$$

Решение последнего уравнения в z -области имеет вид

$$X(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} + 0,395z^{-2} & 0,00078z^{-2} \\ -200z^{-2} & z^{-1} - 0,392z^{-2} \end{bmatrix} x(0) \quad (9-281)$$

Таким образом, поскольку оба собственных значения замкнутой системы расположены в точке $z = 0$, в спроектированной системе с обратной связью по состоянию свободное движение имеет апериодический характер. Как следует из выражения (9-281),

при любых начальных условиях для $x_1(kT)$ и $x_2(kT)$ процесс переводится в нулевое состояние за два периода квантования.

Матрицу обратной связи G можно найти и другим методом, используя соотношения (9-244).

9.10. СИНТЕЗ ПО ЗАДАННОМУ РАСПОЛОЖЕНИЮ ПОЛЮСОВ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ (СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ УПРАВЛЯЮЩИХ СИГНАЛОВ)

Метод синтеза систем с одним входным сигналом по заданному расположению полюсов с небольшим изменением можно распространить и на системы с несколькими входными сигналами. Рассмотрим систему

$$x[(k+1)T] = Ax(kT) + Bu(kT) \quad (9-282)$$

где $x(kT)$ — n -мерный вектор; $u(kT)$ — r -мерный вектор. Предполагается, что пара матриц $[A, B]$ полностью управляема. Задача ставится следующим образом: найти такую матрицу $G(r \times n)$, чтобы при управлении

$$u(kT) = -Gx(kT) \quad (9-283)$$

собственные значения матрицы $A - BG$ размещались в произвольно заданных точках на z -плоскости.

Представим себе систему с одним входом

$$x[(k+1)T] = Ax(kT) + B^*u(kT) \quad (9-284)$$

и определим матрицу B^* размерностью $n \times 1$ как

$$B^* = Bw \quad (9-285)$$

где w имеет размерность $r \times 1$. Матрица w должна быть выбрана так, чтобы пара $[A, B^*]$ была управляема. Тогда с помощью обратной связи

$$u(kT) = -G^*x(kT) \quad (9-286)$$

можно разместить собственные значения матрицы $A - B^*G^*$ в тех же точках, что и собственные значения матрицы $A - BG$. Следовательно, задача сводится к синтезу обратной связи по состоянию для системы с одним входом, описываемой уравнением (9-284). Если будет найдена матрица обратной связи G^* , то G определится выражением

$$G = wG^* \quad (9-287)$$

поскольку $BG = B^*G^*$.

Очевидно, что в общем случае матрица w не является единственной. Требуется только, чтобы она удовлетворяла условию управляемости пары матриц $[A, Bw]$. Матрицу коэффициентов обратной связи G^* для одномерной модели можно определить, используя либо соотношение (9-244), либо формулу (9-254).

Пример 9.14. Рассмотрим цифровую систему управления с несколькими входами

$$x[(k+1)T] = Ax(kT) + Bu(kT) \quad (9-288)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9-289)$$

Пара матриц $[A, B]$ является управляемой. Задача состоит в определении матрицы G так, чтобы при наличии обратной связи по состоянию

$$u(kT) = -Gx(kT) \quad (9-290)$$

собственные значения замкнутой системы располагались в точках $z_1 = 0,1$ и $z_2 = 0,2$. Обозначим

$$B^* = Bw = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (9-291)$$

Пара матриц $[A, B^*]$ должна быть управляемой, поэтому потребуем, чтобы $[B^* \ AB^*]$ была невырожденной матрицей, т. е.

$$|B^* \ AB^*| = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & -w_1 - 2w_2 \end{vmatrix} = -(w_1 + w_2)^2 \neq 0 \quad (9-292)$$

или $w_1 \neq -w_2$.

Сначала найдем матрицу обратной связи G^* для системы с одним входом, воспользовавшись формулой (9-254):

$$G^* = -[\Delta_{01} \ \Delta_{02}]K^{-1} \quad (9-293)$$

где

$$\Delta_{01} = |zI - A|_{z=0,1} = 1,21 \quad (9-294)$$

$$\Delta_{02} = |zI - A|_{z=0,2} = 1,44 \quad (9-295)$$

$$k(z) = \text{Adj}(zI - A) \cdot B^* = \text{Adj} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 1 & z+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(z+2) + w_2 \\ -w_1 + w_2 z \end{bmatrix} \quad (9-296)$$

Тогда

$$k_1 = k(z_1) = \begin{bmatrix} 2,1w_1 + w_2 \\ -w_1 + 0,1w_2 \end{bmatrix} \quad (9-297)$$

$$k_2 = k(z_2) = \begin{bmatrix} 2,2w_1 + w_2 \\ -w_1 + 0,2w_2 \end{bmatrix} \quad (9-298)$$

$$K = [k_1 \ k_2] = \begin{bmatrix} 2,1w_1 + w_2 & 2,2w_1 + w_2 \\ -w_1 + 0,1w_2 & -w_1 + 0,2w_2 \end{bmatrix} \quad (9-299)$$

Анализируя выражение (9-299), можно показать, что K будет невырожденной матрицей, если выполняется условие (9-292). Выберем произвольно $w = [1 \ 1]^T$, т. е. условие $w_1 \neq -w_2$ выполняется. Тогда

$$K = \begin{bmatrix} 3,1 & 3,2 \\ -0,9 & -0,8 \end{bmatrix} \quad (9-300)$$

Подставляя выражения (9-294), (9-295) и (9-300) в (9-293), получим

$$G^* = -[0,82 \quad 1,48] \quad (9-301)$$

Матрица обратной связи для системы с несколькими входами находится по формуле (9-287):

$$G = wG^* = - \begin{bmatrix} 0,82 & 1,48 \\ 0,82 & 1,48 \end{bmatrix} \quad (9-302)$$

Теперь нетрудно показать, что

$$|zI - A + B^*G^*| = |zI - A + BG| = z^2 - 0,3z + 0,02 \quad (9-303)$$

причем корни этого уравнения имеют желаемые значения $z_1 = 0,1$ и $z_2 = 0,2$.

Другой способ определения G^* предполагает использование выражения (9-244). В данном случае

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (9-304)$$

$$S = [B^* \quad AB^*] = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & -w_1 - 2w_2 \end{bmatrix} \quad (9-305)$$

При условии, что собственные значения замкнутой системы равны 0,1 и 0,2, имеем

$$a = [-0,3 \quad 0,02]' \quad (9-306)$$

Кроме того,

$$a = [2 \quad 1]' \quad (9-307)$$

Тогда выражение (9-244) дает результат

$$G^* = [(MS')^{-1}(a - a)]' = \frac{1}{(w_1 + w_2)^2} [-2,3w_1 - 0,98w_2 \quad -3,62w_1 - 2,3w_2] \quad (9-308)$$

откуда следует, что w_1 не может быть равно $-w_2$. Выбрав, как и выше $w_1 = w_2 = 1$, получим

$$G^* = -[0,82 \quad 1,48] \quad (9-309)$$

т. е. тот же самый ответ, что и в выражении (9-301).

Взвешенная обратная связь. Рассмотренный выше метод показывает, что при синтезе систем по заданному расположению полюсов систему с несколькими входами можно заменить "эквивалентной" системой с одним входом. Две системы считаются "эквивалентными" только в том смысле, что они имеют одинаковые собственные значения.

Матрица w , используемая для преобразования системы с несколькими входами в систему с одним входом, обладает одним ограничением, а именно: последняя система должна быть управляемой. Матрицу w можно выбрать произвольным образом, однако на практике мы можем наложить и другие полезные ограничения на выбор ее элементов. Так как w умножается на вектор входа $u(kT)$, то смысл w заключается в том, что ее элементы придают различные веса обратным связям от переменных состояния к управляющим воздействиям. Например, если выбрать $w_1 = 2w_2$, то это значит, что влияние обратных связей на u_1 будет в 2 раза сильнее, чем на u_2 .

9.11. СИНТЕЗ ПО ЗАДАННОМУ РАСПОЛОЖЕНИЮ ПОЛЮСОВ С ПОМОЩЬЮ НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ ИЛИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ

На практике не все переменные состояния доступны для измерения. По экономическим соображениям может оказаться нецелесообразным осуществлять обратную связь по всем переменным состояниям, особенно в системах высокого порядка. Поэтому необходимо рассмотреть способ реализации заданного расположения полюсов в случае неполной обратной связи по состоянию или обратной связи по выходу.

Неполная обратная связь по состоянию. Рассмотрим цифровую систему управления

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \quad (9-310)$$

где $\mathbf{x}(kT)$ — n -мерный вектор; $\mathbf{u}(kT)$ — r -мерный вектор. Обратная связь по состоянию описывается уравнением

$$\mathbf{u}(kT) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(kT) \quad (9-311)$$

Предположим, что отсутствует обратная связь по $x_i(kT)$, где i может иметь одно или несколько значений от 1 до n . Это означает, что соответствующие столбцы матрицы \mathbf{G} должны состоять из нулей. Используя процедуру синтеза, рассмотренную в п. 9.10, положим

$$\mathbf{G} = \mathbf{w}\mathbf{G}^* \quad (9-312)$$

где \mathbf{w} имеет размерность $r \times 1$, а \mathbf{G}^* — размерность $1 \times r$. Матрица \mathbf{w} должна быть выбрана так, чтобы пара $[\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{w}]$ была полностью управляемой. При неполной обратной связи столбцы \mathbf{G}^* , которые соответствуют нулевым столбцам \mathbf{G} , также должны быть нулевыми. Поскольку матрица обратной связи \mathbf{G}^* для эквивалентной системы с одним входом связана с собственными значениями замкнутой системы, параметрами системы и матрицей \mathbf{w} соотношением

$$\mathbf{G}^* = -[\Delta_{01} \quad \Delta_{02} \quad \dots \quad \Delta_{0n}] \mathbf{K}^{-1} \quad (9-313)$$

причем один или большее число столбцов матрицы \mathbf{G}^* вынужденно являются нулевыми, то это накладывает ограничения на желаемые собственные значения замкнутой системы. Синтез цифровой системы управления с неполной обратной связью по состоянию иллюстрируется следующим примером.

Пример 9.15. Рассмотрим систему

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \quad (9-314)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Обратная связь по состоянию определяется уравнением

$$\mathbf{u}(kT) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(kT) \quad (9-315)$$

где

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2] \quad (9-316)$$

Сначала предположим, что обратная связь осуществляется только по переменной $x_1(kT)$, т. е. $g_2 = 0$. Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$|zI - A + BG| = z^2 + (g_1 + 2)z + (1 + 3g_1) = 0. \quad (9-317)$$

Поскольку мы имеем только один параметр g_1 , то два собственных значения замкнутой системы не могут быть заданы произвольно. Разделив обе части уравнения (9-317) на члены, не содержащие g_1 , получим

$$1 + \frac{g_1(z+3)}{z^2 + 2z + 1} = 0 \quad (9-318)$$

Траектории корней уравнения (9-317), построенные на основании расположения полюсов и нулей функции $(z+3)/(z^2+2z+1)$, изображены на рис. 9.56, а. Заметим, что при положительных значениях g_1 оба корня находятся вне единичной окружности, а при отрицательных один корень всегда остается слева от точки -1 на z -плоскости. Следовательно, если обратная связь осуществляется только по переменной $x_1(kT)$, то замкнутая система при любых значениях g_1 будет неустойчива.

Теперь рассмотрим случай, когда обратная связь осуществляется только по переменной $x_2(kT)$, т. е.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & g_2 \end{bmatrix} \quad (9-319)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$|zI - A + BG| = z^2 + (g_2 + 2)z + (1 - g_2) = 0 \quad (9-320)$$

Траектории корней последнего уравнения построены с помощью соотношения

$$1 + \frac{g_2(z-1)}{z^2 + 2z + 1} = 0 \quad (9-321)$$

и изображены на рис. 9.56, б. В этом случае при отрицательных значениях g_2 оба корня уравнения (9-320) находятся вне единичной окружности, а при положительных один корень всегда остается слева от точки -1 на z -плоскости. Таким образом, при единственном входном (управляющем) воздействии с помощью неполной обратной связи по состоянию не только невозможно реализовать заданные собственные значения замкнутой системы, но и нельзя обеспечивать ее устойчивость.

Изменим структуру системы, взяв матрицу B в виде

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В этом случае матрица обратной связи

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

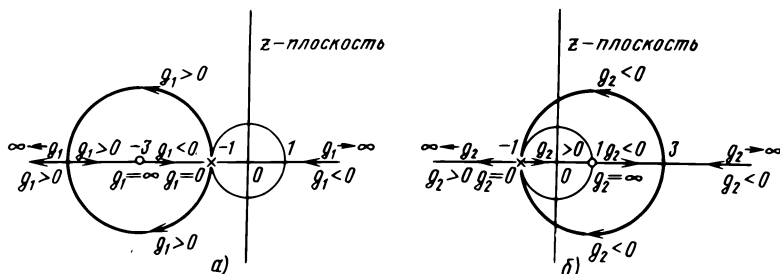


Рис. 9.56. Корневые годографы системы

Тогда

$$|zI - A + BG| = z^2 + (2 + g_{11} + g_{22})z + g_{11}(2 + g_{22}) + (1 - g_{12})(1 + g_{21}) = 0 \quad (9-322)$$

Если отсутствует обратная связь по $x_1(kT)$, то $g_{11} = g_{21} = 0$ и уравнение (9-322) принимает вид

$$z^2 + (2 + g_{22})z + (1 - g_{12}) = 0 \quad (9-323)$$

Так как в этом уравнении имеются два независимых параметра g_{12} и g_{22} , то два собственных значения матрицы $A - BG$ можно задать произвольным образом. Аналогично при $g_{12} = g_{22} = 0$ имеем

$$z^2 + (2 + g_{11})z + 2g_{11} + 1 + g_{21} = 0 \quad (9-324)$$

Опять-таки, собственные значения можно задать произвольно выбором коэффициентов g_{11} и g_{21} .

Обратная связь по выходу. Поскольку выходные сигналы системы всегда доступны измерению, их можно через постоянные коэффициенты завести обратно на вход и использовать для целей управления. Таким образом, обратную связь по выходу можно считать альтернативой неполной обратной связи по состоянию.

Рассмотрим систему

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \quad (9-325)$$

$$\mathbf{c}(kT) = \mathbf{D}\mathbf{x}(kT) \quad (9-326)$$

где $\mathbf{x}(kT)$, $\mathbf{u}(kT)$ и $\mathbf{c}(kT)$ — векторы размерностью n , r и p соответственно. Обратная связь по выходу определяется как

$$\mathbf{u}(kT) = -\mathbf{G}\mathbf{c}(kT) \quad (9-327)$$

где \mathbf{G} — матрица обратной связи по выходу размерностью $r \times p$. Целью синтеза является определение такой матрицы \mathbf{G} , при которой будут получены желаемые собственные значения замкнутой системы. Однако, поскольку в общем случае $p \leq r \leq n$, не все n собственных значений могут быть заданы произвольно. Покажем, что число собственных значений, которые могут быть заданы произвольно, зависит от рангов матриц \mathbf{D} и \mathbf{B} .

При синтезе системы с обратной связью по выходу можно воспользоваться тем же методом, что и в случае обратной связи по состоянию. Рассмотрим сначала случай единственного входного воздействия. Подставляя выражение (9-326) в (9-327), а затем в (9-325), получим

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{D})\mathbf{x}(kT) \quad (9-328)$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению замкнутой системы с обратной связью по состоянию, в котором роль матрицы обратной связи играет произведение $\mathbf{G}\mathbf{D}$. Поэтому, если пара матриц $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ является полностью управляемой, решение для $\mathbf{G}\mathbf{D}$ можно сразу получить, используя соотношение (9-244) или (9-254):

$$\mathbf{G}\mathbf{D} = [(\mathbf{M}\mathbf{S}')^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{a})]' \quad (9-329)$$

или

$$\mathbf{G}\mathbf{D} = -[\Delta_{01} \quad \Delta_{02} \quad \dots \quad \Delta_{0n}] \mathbf{K}^{-1} \quad (9-330)$$

Однако в общем случае матрицы **D** и **DK** не являются квадратными, поэтому выразить **G** непосредственно из двух последних уравнений не представляется возможным.

При единственном входном воздействии **G** имеет размерность $1 \times p$, **D** — $p \times n$, а **B** — $n \times 1$, поэтому **GD** всегда представляет собой матрицу-строку размерностью $1 \times n$. Матрица **D** содержит p элементов, но только m из них соответствуют независимым параметрам, которые могут быть использованы для синтеза (здесь m — ранг матрицы **G**, причем $m \leq p$). Например, если

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

то ранг этой матрицы равен 2. Если при этом $\mathbf{G} = [g_1 \ g_2 \ g_3]$, то

$$\mathbf{GD} = [g_1 \ g_2 \ 2g_2]$$

т. е. матрица **GD** имеет только два независимых параметра. Это означает, что с помощью обратной связи по выходу могут быть произвольно заданы лишь два из трех собственных значений системы. В случае единственного входного воздействия, если ранг матрицы **D** равен n , т. е. порядку системы, обратная связь по выходу дает тот же результат, что и полная обратная связь по состоянию, а именно, если пара **[A, B]** управляема, то все собственные значения могут быть заданы произвольным образом.

Для систем с несколькими входами **B** имеет размерность $n \times r$, тогда образуется матрица

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}\mathbf{w} \quad (9-331)$$

где **w** имеет размерность $r \times 1$ и содержит r параметров, а значит, **B*** имеет размерность $n \times 1$. Аналогично

$$\mathbf{G} = \mathbf{w}\mathbf{G}^* \quad (9-332)$$

где

$$\mathbf{G}^* = [g_1^* \ g_2^* \ \dots \ g_n^*] \quad (1 \times n) \quad (9-333)$$

Тогда

$$\mathbf{BGD} = \mathbf{BwG}^*\mathbf{D} = \mathbf{B}^*\mathbf{G}^*\mathbf{D} \quad (9-334)$$

и характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BGD}| = |z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}^*\mathbf{G}^*\mathbf{D}| = 0 \quad (9-335)$$

Матрицу **G*D** можно определить, используя соотношение (9-244) или (9-254).

В отличие от случая с единственным входным воздействием, решение для коэффициентов обратной связи по выходу теперь зависит от рангов матриц **D** и **B**. В общем случае, если ранг матрицы **D** больше ранга матрицы **B** или равен ему, элементы матрицы **w** могут быть выбраны произвольно, разумеется, при условии управляемости пары **[A, B]**. Однако при ран-

ге **B**, большем ранга матрицы **D**, уже нельзя произвольно выбирать все элементы матрицы **w**, если требуется получить максимальное число заданных собственных значений замкнутой системы. При синтезе систем с обратной связью по состоянию такой проблемы не возникает, так как ранг **D** (**D** — единичная матрица размерностью *n*) всегда равен *n*, а ранг **B** не может быть больше *n*. Следующий пример иллюстрирует синтез обратной связи по выходу и упомянутые выше ограничения.

Пример 9.16. Дана цифровая система управления, описываемая следующими уравнениями динамики:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}u(kT) \quad (9-336)$$

$$\mathbf{c}(kT) = \mathbf{D}\mathbf{x}(kT) \quad (9-337)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Требуется определить матрицу коэффициентов **G** таким образом, чтобы с помощью обратной связи по выходу

$$u(kT) = -\mathbf{G}\mathbf{c}(kT) \quad (9-338)$$

можно было получить заданные собственные значения матрицы **A-BGD**. Так как ранг **D** равен 2, и ранг **B** также равен 2, то произвольно могут быть заданы максимум два собственных значения. Пусть эти собственные значения таковы: $z_1 = 0,1$ и $z_2 = 0,2$.

Характеристическое уравнение для матрицы **A**

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| = z^3 + 1 \quad (9-339)$$

Тогда

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9-340)$$

В соответствии с выражением (9-331)

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9-341)$$

Поскольку ранг матрицы **B** равен 2, то **B*** имеет два независимых параметра w_1 и w_2 . Матрица управляемости для пары **[A, B*]**

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B}^* \quad \mathbf{A}\mathbf{B}^* \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}^*] = \begin{bmatrix} w_2 & w_1 & 0 \\ w_1 & 0 & -w_2 \\ 0 & -w_2 & -w_1 \end{bmatrix} \quad (9-342)$$

Матрица **S** невырождена, если $w_1^3 - w_2^3 \neq 0$.

Пусть

$$\mathbf{G}^* = [g_1^* \quad g_2^*] \quad (9-343)$$

Тогда

$$G^*D = [g_1^* + g_2^* \quad g_2^* \quad 0] \quad (9-344)$$

Поскольку ранг D равен 2, то матрица G^*D имеет два независимых параметра g_1^* и g_2^* . Воспользовавшись формулой (9-329), где G заменено на G^* , запишем

$$G^*D = [(MS')^{-1}(a - a)]' \quad (9-345)$$

или

$$\begin{bmatrix} g_1^* + g_2^* \\ g_2^* \\ 0 \end{bmatrix}' = \frac{1}{w_1^3 - w_2^3} \begin{bmatrix} -w_2^2 a_3 + a_2 w_1^2 - w_1 w_2 (a_1 - 1) \\ a_3 w_1^2 - w_1 w_2 a_2 + w_2^2 (a_1 - 1) \\ -w_1 w_2 a_3 + a_2 w_2^2 - w_1^2 (a_1 - 1) \end{bmatrix}' \quad (9-346)$$

Последняя строка в (9-346) дает ограничение в виде уравнения

$$-w_1 w_2 a_3 + a_2 w_2^2 - w_1^2 (a_1 - 1) = 0 \quad (9-347)$$

Поскольку только два из трех собственных значений или аналогично два из трех коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы могут быть заданы произвольно, то, хотя w_1 и w_2 могут быть любыми (при условии $w_1^3 \neq w_2^3$), они должны быть выбраны так, чтобы третье собственное значение соответствовало устойчивой системе. Это требование устойчивости накладывает дополнительные ограничения на выбор w_1 и w_2 . Например, необходимым условием устойчивости замкнутой системы является неравенство $|\alpha_1| < 1$. Из (9-347) следует также, что w_2 не может равняться нулю.

Чтобы $z = 0,1$ и $z = 0,2$ были корнями характеристического уравнения

$$z^3 + a_3 z^2 + a_2 z + a_1 = 0 \quad (9-348)$$

должны удовлетворяться следующие два уравнения:

$$a_2 + 0,3a_3 + 0,07 = 0 \quad (9-349)$$

$$a_1 - 0,02a_3 - 0,006 = 0 \quad (9-350)$$

Решая последние два уравнения совместно с уравнением (9-347), находим

$$a_1 = \frac{0,02w_1^2 + 0,0004w_2^2 + 0,006w_1w_2}{0,3w_2^2 + w_1w_2 + 0,02w_1^2} \quad (9-351)$$

$$a_2 = \frac{-0,2996w_1^2 - 0,07w_1w_2}{0,3w_2^2 + w_1w_2 + 0,02w_1^2} \quad (9-352)$$

$$a_3 = \frac{0,994w_1^2 - 0,07w_2^2}{0,3w_2^2 + w_1w_2 + 0,02w_1^2} \quad (9-353)$$

Полагая $w_1 = 0$ и $w_2 = 1$, получим $\alpha_1 = 0,001333$; $\alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = -0,23333$. При таких коэффициентах уравнение (9-348) дает следующие три корня: $z_1 = 0,1$; $z_2 = 0,2$; $z_3 = -0,06667$. Таким образом, при выборе w_1 и w_2 третий корень, который не может быть задан произвольно, оказывается равным $-0,06667$, и замкнутая система устойчива. Разумеется, существуют и другие комбинации w_1 и w_2 , соответствующие устойчивой системе с корнями $z = 0,1$ и $z = 0,2$.

Подставляя значения $w_1 = 0$ и $w_2 = 1$, а также найденные α_1 , α_2 и α_3 в выражении (9-346), получим

$$\begin{bmatrix} g_1^* + g_2^* \\ g_2^* \\ 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_3 \\ -a_1 + 1 \\ -a_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -0,23333 \\ 0,99866 \\ 0 \end{bmatrix}' \quad (9-354)$$

Запишем матрицу обратной связи G^* в виде

$$G^* = [-1.232 \quad 0.99866] \quad (9-355)$$

Матрица обратной связи

$$G = wG^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} G^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1,232 & 0,99866 \end{bmatrix} \quad (9-356)$$

Пример 9.17. Рассмотрим систему из примера 9.16, за исключением того, что

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-357)$$

т. е. ранг этой матрицы равен 1. Это означает, что матрица

$$G^*D = [g_1^* + g_2^* \quad 0 \quad 0] \quad (9-358)$$

имеет только один независимый параметр $g_1^* + g_2^*$. В этом случае выражение (9-346) выглядит так:

$$\begin{bmatrix} g_1^* + g_2^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{w_1^3 - w_2^3} \begin{bmatrix} -w_2^2 a_3 + a_2 w_1^2 - w_1 w_2 (a_1 - 1) \\ a_3 w_1^2 - w_1 w_2 a_2 + w_2^2 (a_1 - 1) \\ -w_1 w_2 a_3 + a_2 w_2^2 - w_1^2 (a_1 - 1) \end{bmatrix} \quad (9-359)$$

Так как две последние строки выражения (9-359) должны равняться нулю, то можно выбрать произвольно либо w_1 , либо w_2 , но не оба сразу. Тогда

$$a_3 w_1^2 - w_1 w_2 a_2 + w_2^2 (a_1 - 1) = 0 \quad (9-360)$$

$$-w_1 w_2 a_3 + a_2 w_2^2 - w_1^2 (a_1 - 1) = 0 \quad (9-361)$$

Чтобы замкнутая система имела два собственных значения $z_1 = 0,1$ и $z_2 = 0,2$, должны удовлетворяться также уравнения (9-349) и (9-350). Эти два уравнения вместе с (9-360) и (9-361) образуют систему из четырех уравнений с пятью неизвестными α_1 , α_2 , α_3 , w_1 и w_2 . Поэтому только одна из этих неизвестных может быть задана произвольно. К сожалению, w_1 и w_2 нелинейно входят в уравнения, что обуславливает сложность их решения. В данном случае проще использовать метод "грубой силы", записав

$$|zI - A + BGD| = z^3 + (g_{21} + g_{22})z^2 + (g_{11} + g_{12})z + 1 = 0 \quad (9-362)$$

Следовательно, ясно, что только два из трех коэффициентов последнего уравнения могут быть заданы произвольно. Поскольку свободный член в уравнении равен 1, то при данной матрице D систему нельзя сделать устойчивой, используя обратную связь по выходу.

9.12. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО СОСТОЯНИЮ И ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ВЫХОДУ

Рассмотренные выше методы синтеза с использованием обратной связи по состоянию и обратной связи по выходу применяются при проектировании цифровых систем стабилизации. Соответствующим выбором собственных значений замкнутой системы можно обеспечить заданный характер свободного движения переменных состояния. Если же проекти-

руется система, предназначенная для отслеживания определенного входного сигнала, то обратная связь по состоянию и по выходу должна быть организована несколько иначе. Поскольку обратная связь по состоянию и по выходу не повышает порядок системы, то в общем случае нет гарантии, что выходные переменные или переменные состояния системы в установившемся режиме будут отслеживать входной сигнал.

В соответствии с традиционным методом синтеза, в промышленности широко применяется ПИД-регулятор, обеспечивающий требуемое поведение управляемого процесса в переходном и установившемся режимах. Синтез системы управления с цифровым ПИД-регулятором был рассмотрен в 9.7. Поскольку ПИД-регулятор всегда повышает порядок системы (в предположении, что не происходит компенсации имеющихся полюсов и нулей), а обратная связь по состоянию или по выходу через постоянные коэффициенты не изменяет его, то и результаты управления в этих случаях будут не эквивалентны. Можно сказать, что с помощью обратной связи по состоянию или по выходу через постоянные коэффициенты нельзя достигнуть той же цели управления, что и с помощью ПИД-регулятора или какого-либо иного динамического регулятора.

В этом параграфе рассматривается метод синтеза, сочетающий обратную связь по переменным состояния и обратную связь по выходу, осуществляемую с помощью динамического регулятора. В частности, регулятор может выполнять операцию интегрирования в цифровой форме.

Рассмотрим цифровую систему управления, описываемую следующими уравнениями динамики:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}\mathbf{w} \quad (9-363)$$

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}\mathbf{u}(k) + \mathbf{H}\mathbf{w} \quad (9-364)$$

где $\mathbf{x}(k)$ — n -мерный вектор (состояние); $\mathbf{u}(k)$ — r -мерный вектор (вход); $\mathbf{c}(k)$ — p -мерный вектор (выход); \mathbf{w} — q -мерный вектор (возмущение). Размерность матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{F} и \mathbf{H} определяется количеством соответствующих переменных. Вектор возмущения \mathbf{w} предполагается постоянным. В качестве компонентов вектора \mathbf{w} могут фигурировать также входные воздействия, в соответствии с которыми должно меняться состояние системы или ее выход. Компоненты вектора \mathbf{w} , играющие роль возмущений, в общем случае неизвестны, хотя их значения предполагаются постоянными.

Цель синтеза цифровой системы управления, описываемой уравнениями (9-363) и (9-364), можно сформулировать следующим образом: найти такое управление $\mathbf{u}(k)$, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) \quad (9-365)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{c}(k) = \mathbf{0} \quad (9-366)$$

Условие (9-365) эквивалентно требованию асимптотической устойчивости системы, а условие (9-366) предполагает стабилизацию выходных переменных системы. Вектор выхода $\mathbf{c}(k)$ не обязательно должен включать в себя только выходные переменные системы. В действительности, констру-

ируя надлежащим образом вектор $\mathbf{c}(k)$, можно сформулировать большое количество задач стабилизации и слежения.

Образует векторы приращения состояния и управления

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{c}(k) \end{bmatrix} \quad (n+p) \times 1 \quad (9-367)$$

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{u}(k+1) - \mathbf{u}(k) \quad (9-368)$$

Тогда в соответствии с (9-367)

$$\mathbf{y}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+2) - \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{c}(k+1) \end{bmatrix} \quad (9-369)$$

Из уравнений (9-363) и (9-364) имеем

$$\mathbf{x}(k+2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) + \mathbf{F}\mathbf{w} \quad (9-370)$$

$$\mathbf{c}(k+1) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{E}\mathbf{u}(k+1) + \mathbf{H}\mathbf{w} \quad (9-371)$$

Сформируем вектор разности между $\mathbf{y}(k+1)$ и $\mathbf{y}(k)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}[\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)] + \mathbf{B}[\mathbf{u}(k+1) - \mathbf{u}(k)] - [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)] \\ \mathbf{D}[\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)] + \mathbf{E}[\mathbf{u}(k+1) - \mathbf{u}(k)] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{y}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (9-372)$$

где \mathbf{I}_n — единичная матрица размерностью $n \times n$.

Преобразуя уравнение (9-372), запишем его в виде

$$\mathbf{y}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \mathbf{y}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) \quad (9-373)$$

Таким образом, цель синтеза, определяемая условиями (9-365) и (9-366), эквивалентна переводу системы с уравнением (9-373) из любого начального состояния $\mathbf{y}(0)$ в состояние $\mathbf{y}(k) \rightarrow \mathbf{0}$ при $k \rightarrow \infty$.

Условия управляемости. Для достижения сформулированной выше цели управления прежде всего необходимо исследовать управляемость системы, описываемой уравнением (9-373).

Обозначим

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Тогда запишем уравнение (9-373) в виде

$$\mathbf{y}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{y}(k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k) \quad (9-374)$$

Чтобы пара матриц $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ была полностью управляемой, необходимо и достаточно обеспечить матрице

$$[\lambda \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}} : \hat{\mathbf{B}}]$$

размерностью $(n + p) \times (n + p + r)$ ранг $(n + p)$ при значениях λ , равных каждому из собственных значений матрицы \hat{A} . Итак,

$$[\lambda I - \hat{A} : \hat{B}] = \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & 0 & B \\ -D & (\lambda - 1)I_m & E \end{bmatrix} \quad (9-375)$$

где I_m — единичная матрица размерностью $m \times m$. Из последнего уравнения следует, что \hat{A} имеет, по крайней мере, p собственных значений $\lambda = 1$. Если $\lambda = 1$, то (9-375) принимает вид

$$[\lambda I - \hat{A} : \hat{B}] = \begin{bmatrix} I_n - A & 0 & B \\ -D & 0 & E \end{bmatrix} \quad (9-376)$$

Если $\lambda \neq 1$, то ранг $(\lambda - 1)I_m$ равен p , и, чтобы матрица $[\lambda I_n - \hat{A} : \hat{B}]$ имела ранг $n + p$, матрица $[\lambda I_n - A : B]$ должна иметь ранг n , в предположении, что пара $[A, B]$ управляема. Таким образом, пара матриц $[A, B]$ будет управляемой, если:

1) управляема пара $[A, B]$ и

2) матрица $\begin{bmatrix} A - I_n & B \\ D & E \end{bmatrix}$ имеет ранг $n + p$. (9-377)

В результате условие управляемости системы в приращениях (9-374) выражено через матрицы коэффициентов исходной системы.

Теперь предположим, что вектор управления $v(k)$ образуется с помощью обратной связи по состоянию, т. е.

$$v(k) = -Gy(k) \quad (9-378)$$

где G — матрица обратной связи размерностью $r \times (n + p)$, элементы которой представляют собой постоянные коэффициенты.

Учитывая выражения для $v(k)$ и $y(k)$, запишем (9-378) в виде

$$v(k) = u(k + 1) - u(k) = -G_1 [x(k + 1) - x(k)] - G_2 c(k) \quad (9-379)$$

где матрица G_1 имеет размерность $r \times n$, а матрица G_2 — размерность $r \times p$.

Вычисляя z -преобразование от обеих частей уравнения (9-379), после упрощений получим

$$U(z) = -G_1 X(z) - \frac{1}{z - 1} G_2 C(z) \quad (9-380)$$

Смысл последнего уравнения состоит в том, что управление $u(k)$ получается в виде комбинации обратной связи по состоянию через постоянные коэффициенты и динамической обратной связи по выходу. Передаточную функцию $1/(z - 1)$ можно рассматривать как цифровую аппроксимацию операции интегрирования. На рис. 9.57 изображена структурная схема замкнутой системы.

Пример 9.18. Рассмотрим цифровую систему управления

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k) + w_2 \quad (9-381)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

w_2 – постоянное возмущение, величина которого неизвестна. Требуется синтезировать такую схему управления, при которой:

1) переменная x_1 при $k \rightarrow \infty$ становилась бы равной входному эталонному сигналу $r = w_1$;

2) замкнутая система имела бы заданные собственные значения.

Образуем выходную переменную как

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{x}_1(k) \quad (9-382)$$

Тогда необходимо, чтобы $c(k)$ стремилась к нулю при $k \rightarrow \infty$. Используя уравнение выхода (9-364), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Очевидно, что пара матриц $[A, B]$ полностью управляема, и матрица

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-383)$$

имеет ранг, равный 3. Следовательно, полностью управляемой является и пара $[A, \hat{B}]$, где

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Запишем управление в z -области, определяемое уравнением (9-380), в виде

$$U(z) = -g_1 X_1(z) - g_2 X_2(z) - \frac{g_3}{z-1} C(z) \quad (9-384)$$

где g_1, g_2 и g_3 – постоянные коэффициенты обратной связи. Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$|zI - \hat{A} + \hat{B}G| = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 \\ 1 + g_1 & z + g_2 & g_3 \\ 1 & 0 & z - 1 \end{vmatrix} = z^3 + (g_2 - 1)z^2 + \quad (9-385)$$

$$+ (1 + g_1 - g_2)z - (1 + g_1 + g_3) = 0$$

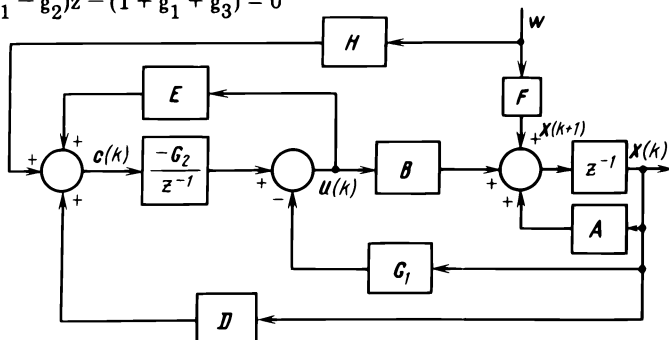


Рис. 9.57. Структурная схема замкнутой цифровой системы управления с динамическим регулятором и обратной связью по состоянию

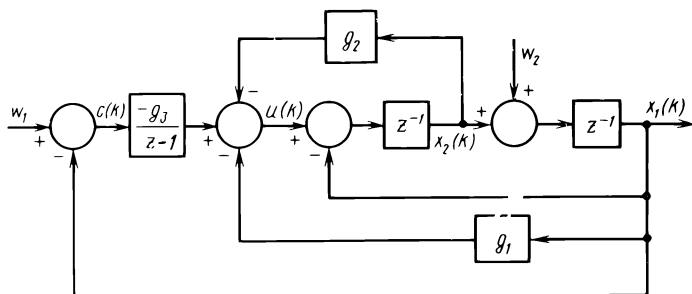


Рис. 9.58. Структурная схема замкнутой цифровой системы управления

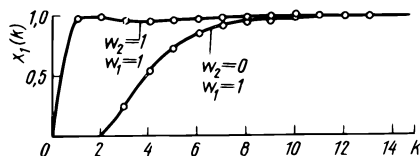


Рис. 9.59. Переходные процессы $x_1(k)$ для системы

Зададимся собственными значениями замкнутой системы $z = 0,5$; $0,3 + j0,3$ и $0,3 - j0,3$. Тогда характеристическое уравнение будет иметь вид

$$z^3 - 1,1z^2 + 0,48z - 0,09 = 0. \quad (9-386)$$

Приравнявая коэффициенты уравнений (9-385) и (9-386), получим $g_1 = -0,62$; $g_2 = -0,1$; $g_3 = -0,29$.

На рис. 9.58 изображена структурная схема замкнутой системы, откуда следуют z -преобразования переменных $x_1(k)$ и $x_2(k)$:

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{-z-2}{z-1} g_3 & z^{-1}(1 + g_2 z^{-1}) \\ \frac{-z^{-1}}{z-1} g_3 & -z^{-2} - g_1 z^{-2} + \frac{g_3}{z-1} z^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} \quad (9-387)$$

где

$$\Delta = 1 + g_2 z^{-1} + z^{-2} + g_1 z^{-2} - \frac{g_3 z^{-2}}{z-1} \quad (9-388)$$

Применяя к обеим частям уравнения (9-387) теорему z -преобразования о конечном значении функции, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1 - w_2 \end{bmatrix} \quad (9-389)$$

Следовательно, конечное значение $x_1(k)$, как и требовалось, равно входному сигналу w_1 .

На рис. 9.59 показаны переходные процессы для $x_1(k)$ при $w_1 = 1$ и двух значениях возмущения w_2 . Эти реакции определены только в дискретные моменты времени, но изображены в виде плавных кривых, проходящих через отдельные точки. Если возмущение равно нулю, то реакция $x_1(k)$ имеет запаздывание, равное двум периодам квантования, и стремится к значению входного эталонного сигнала $w_1 = r = 1$ без перерегулирования. Если $w_2 = 1$ (это значение выбрано совершенно произвольно), то переходный процесс $x_1(k)$ достигает установившегося значения гораздо быстрее. Однако этот результат лучше, чем у процесса при $w_2 = 0$, только потому, что w_2 имеет наиболее благоприятное значение $w_2 = 1$. Если w_2 будет иметь какие-либо другие значения, то переходный процесс не будет таким удачным.

9.13. РЕАЛИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

При синтезе систем управления с обратной связью по состоянию часто возникает затруднение, связанное с тем, что не все переменные состояния доступны для измерения. Кроме того, в системах высокого порядка для реализации обратной связи по состоянию необходимо иметь большое число преобразователей для измерения переменных состояния, что удорожает проектирование. В гл. 12 будет показано, что если управляемый процесс является наблюдаемым, то можно построить "наблюдатель", который, используя информацию о входном и выходном сигналах, вырабатывает группу "восстанавливаемых" переменных состояния. Эти восстанавливаемые переменные, являющиеся оценками действительных переменных состояния, используются затем в качестве сигналов обратной связи для управления процессом.

В традиционных методах синтеза обычно применяется обратная связь по выходу. Это совершенно естественно, так как выходной сигнал всегда доступен для измерения. Для этих методов характерно также то, что структура регулятора выбирается априори уже в самом начале проектирования. В этом параграфе рассмотрен метод, предоставляющий возможность эквивалентной замены обратной связи по состоянию последовательным регулятором или регулятором в цепи обратной связи. В общем смысле такой эквивалентный регулятор можно рассматривать как *динамический наблюдатель-регулятор* системы.

Рассмотрим цифровую систему, описываемую уравнениями

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (9-390)$$

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}\mathbf{u}(k) \quad (9-391)$$

где $\mathbf{x}(k)$ — n -мерный вектор; $\mathbf{c}(k)$ — q -мерный вектор, $\mathbf{u}(k)$ — p -мерный вектор; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} и \mathbf{E} — матрицы коэффициентов соответствующей размерности.

Пусть управление осуществляется с помощью обратной связи по состоянию, так что

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \quad (9-392)$$

где \mathbf{G} — матрица коэффициентов обратной связи размерностью $p \times q$.

Задача состоит в аппроксимации цифровой системы управления с обратной связью по состоянию (рис. 9.60) системой (рис. 9.61) с регулятором в цепи обратной связи, использующим в качестве входного сигнала

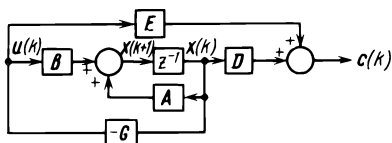


Рис. 9.60. Цифровая система управления с обратной связью по состоянию

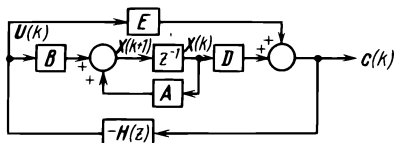


Рис. 9.61. Цифровая система управления с динамическим регулятором в цепи обратной связи по выходу

выход системы $c(k)$. Пусть соотношение вход-выход такого регулятора задано уравнением

$$U(z) = -H(z)C(z) \quad (9-393)$$

где $H(z)$ — матричная передаточная функция. Представим $H(z)$ в виде

$$H(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) & \dots & H_{1q}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) & \dots & H_{2q}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{p1}(z) & H_{p2}(z) & \dots & H_{pq}(z) \end{bmatrix} \quad (p \times q) \quad (9-394)$$

Пусть $H_{ij}(z)$ ($i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, q$) есть передаточная функция m -го порядка:

$$H_{ij}(z) = \frac{K_{ij}(z^m + a_{ij1}z^{m-1} + a_{ij2}z^{m-2} + \dots + a_{ijm})}{z^m + \beta_{ij1}z^{m-1} + \beta_{ij2}z^{m-2} + \dots + \beta_{ijm}} \quad (9-395)$$

Раскладывая $H_{ij}(z)$ в ряд Лорана, получим

$$H_{ij}(z) = K_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} d_{ijk} z^{-k} \quad (9-396)$$

где

$$d_{ij0} = 1$$

$$d_{ij1} = a_{ij1} - \beta_{ij1} \quad (9-397)$$

.....

$$d_{ijk} = a_{ijk} - \beta_{ijk} - \sum_{v=1}^{k-1} \beta_{k-v} d_{ijv} \quad (k > 1)$$

При условии, что бесконечный ряд сходится, ограничимся в разложении $H_{ij}(z)$ m членами:

$$H_{ij}(z) \cong K_{ij} \sum_{k=0}^{m-1} d_{ijk} z^{-k} \quad (9-398)$$

Смысл выражений (9-393) и (9-398) заключается в том, что управление $u(k)$ формируется из выхода $c(k)$ и всех его предшествующих значений до $c(k - m + 1)$, где m пока не известно. Обозначим

$$H_{ijm}(z) = K_{ij} \sum_{k=0}^{m-1} d_{ijk} z^{-k} \quad (9-399)$$

Подставив это выражение, являющееся аппроксимацией $H_{ij}(z)$, в уравнение (9-393), получим

$$\begin{aligned}
 U(z) \cong & \begin{bmatrix} K_{11}[d_{110} \dots d_{11(m-1)}] & K_{12}[d_{120} \dots d_{12(m-1)}] & \dots & K_{1q}[d_{1q0} \dots d_{1q(m-1)}] \\ K_{21}[d_{210} \dots d_{21(m-1)}] & K_{22}[d_{220} \dots d_{22(m-1)}] & \dots & K_{2q}[d_{2q0} \dots d_{2q(m-1)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{p1}[d_{p10} \dots d_{p1(m-1)}] & K_{p2}[d_{p20} \dots d_{p2(m-1)}] & \dots & K_{pq}[d_{pq0} \dots d_{pq(m-1)}] \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} C_1(z) \\ z^{-1}C_1(z) \\ \vdots \\ z^{-m+1}C_1(z) \\ C_2(z) \\ z^{-1}C_2(z) \\ \vdots \\ z^{-m+1}C_2(z) \\ \vdots \\ C_q(z) \\ z^{-1}C_q(z) \\ \vdots \\ z^{-m+1}C_q(z) \end{bmatrix} \\
 & \quad (9.400) \\
 \text{После перегруппировки элементов последнего уравнения запишем} \\
 U(z) \cong & \begin{bmatrix} [K_{11}d_{110} \dots K_{1q}d_{1q0}] & [K_{11}d_{111} \dots K_{1q}d_{1q1}] & \dots & [K_{11}d_{11(m-1)} \dots K_{1q}d_{1q(m-1)}] \\ [K_{21}d_{210} \dots K_{2q}d_{2q0}] & [K_{21}d_{211} \dots K_{2q}d_{2q1}] & \dots & [K_{21}d_{21(m-1)} \dots K_{2q}d_{2q(m-1)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K_{p1}d_{p10} \dots K_{pq}d_{pq0}] & [K_{p1}d_{p11} \dots K_{pq}d_{pq1}] & \dots & [K_{p1}d_{p1(m-1)} \dots K_{pq}d_{pq(m-1)}] \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} C(z) \\ z^{-1}C(z) \\ z^{-2}C(z) \\ \vdots \\ z^{-m+1}C(z) \end{bmatrix} \\
 & \quad (9.401)
 \end{aligned}$$

Последнему уравнению соответствует уравнение во временной области

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{c}(k) \\ \mathbf{c}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{c}(k-m+1) \end{bmatrix} \quad (9-402)$$

где \mathbf{P} — матрица коэффициентов размерностью $p \times qm$ [см. уравнение (9-401)].

Подставив (9-392) в (9-391), получим

$$\mathbf{c}(k) = (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G})\mathbf{x}(k) \quad (9-403)$$

Тогда

$$\mathbf{c}(k-1) = (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G})\mathbf{x}(k-1) \quad (9-404)$$

На основании уравнения (9-390) запишем

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{x}(k-1) \quad (9-405)$$

Из этого уравнения выразим

$$\mathbf{x}(k-1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{x}(k) \quad (9-406)$$

Теперь подставим это выражение в (9-404):

$$\mathbf{c}(k-1) = (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{x}(k) \quad (9-407)$$

Применяя последовательно эту процедуру, можно записать следующие соотношения:

$$\mathbf{c}(k-2) = (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^{-2}\mathbf{x}(k) \quad (9-408)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{c}(k-m+1) = (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^{-m+1}\mathbf{x}(k) \quad (9-409)$$

Подставляя выражения (9-403) и (9-407)–(9-409) в уравнение (9-402), получим уравнение обратной связи по состоянию

$$\mathbf{u}(k) \cong -\mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G} \\ (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^{-1} \\ (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^{-2} \\ \vdots \\ (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^{-m+1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \quad (9-410)$$

$(p \times qm) \qquad (qm \times n) \qquad (n \times 1)$

Теперь, сравнивая уравнения (9-410) и (9-392), имеем

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G} \\ (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^{-1} \\ (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^{-2} \\ \vdots \\ (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{G})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^{-m+1} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \quad (9-411)$$

$(p \times qm) \qquad = \qquad (qm \times n) \qquad (p \times n)$

Чтобы матрица \mathbf{P} была решением уравнения (9-411), qm должно равняться n , т. е. $m = n/q$. Это означает, что n/q должно быть целым, и разложение $H_{ij}(z)$ в ряд должно быть ограничено $m = n/q$ членами. Решая уравнение (9-411) относительно \mathbf{P} , получим

$$\mathbf{P} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{D} - \mathbf{EG} \\ (\mathbf{D} - \mathbf{EG})(\mathbf{A} - \mathbf{BG})^{-1} \\ (\mathbf{D} - \mathbf{EG})(\mathbf{A} - \mathbf{BG})^{-2} \\ \vdots \\ (\mathbf{D} - \mathbf{EG})(\mathbf{A} - \mathbf{BG})^{-m+1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (9-412)$$

при условии, что указанная обратная матрица существует.

Поскольку матрица \mathbf{P} имеет размерность $p \times qm$, то она содержит (pqm) неизвестных. Система (9-410) состоит лишь из pn уравнений. Поэтому $p(qm - n)$ элементов матрицы \mathbf{P} могут быть заданы произвольно. Следует также заметить, что, определив элементы матрицы \mathbf{P} , получим только значения коэффициентов K_{ij} и d_{ijk} в выражении (9-398). Затем необходимо будет найти коэффициенты передаточных функций (9-395) с помощью уравнений (9-397). Вообще говоря, неизвестных получается больше, чем уравнений (9-397). Поэтому в идеальном случае просто можно положить

$$d_{ij0} = 1 \quad (9-413)$$

$$d_{ijk} = a_{ijk} \quad k \geq 1 \quad (9-414)$$

а все β_{ijk} считать равными нулю для $k = 1, 2, \dots, q$. Однако, чтобы передаточные функции $H_{ijm}(z)$ были физически реализуемыми, они не должны иметь нулей больше, чем полюсов. Следовательно, значения β_{ijk} , $k = 1, 2, \dots, q$, должны быть заданы таким образом, чтобы они не оказывали заметного влияния на динамику системы в целом. Это условие аналогично классическому случаю, когда нули передаточной функции регулятора $H_{ijm}(z)$ синтезируются исходя из заданных динамических свойств системы, а полюсы выбираются так, чтобы они не оказывали существенного влияния на качество системы. В цифровых системах управления полюсы $H_{ijm}(z)$ должны располагаться близ начала координат z -плоскости.

Ниже рассмотрена реализация обратной связи по состоянию в одномерной системе с помощью динамического регулятора в цепи обратной связи.

Одномерные системы. Будем считать, что цифровая система управления, описываемая уравнениями (9-390) – (9-392), имеет один вход и один выход, т. е. $p = q = 1$. Тогда запишем матрицу коэффициентов обратной связи.

$$\mathbf{G} = [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_n] \quad (1 \times n) \quad (9-415)$$

Динамический регулятор в цепи обратной связи описывается скалярной передаточной функцией

$$H(z) = \frac{K(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n)}{(1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_n z^n)} \quad (9-416)$$

Разложение $H(z)$ в ряд Лорана из n членов имеет вид

$$H_n(z) = K(1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_{n-1} z^{-n+1}) \quad (9-417)$$

где

$$d_k = a_k - \beta_k - \sum_{v=1}^{k-1} \beta_{k-v} d_v \quad (9-418)$$

для $k = 1, 2, \dots, n-1$. Уравнение (9-412) дает результат

$$P = K[1 \quad d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_{n-1}] = G \begin{bmatrix} D - EG \\ (D - EG)(A - BG)^{-1} \\ (D - EG)(A - BG)^{-2} \\ \vdots \\ (D - EG)(A - BG)^{-n+1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (9-419)$$

Эквивалентный последовательный регулятор в прямой цепи. Метод синтеза, изложенный в п. 9.12, основан на том, что динамический регулятор $H(z)$ помещается в цепь обратной связи, как показано на рис. 9.61. Если эталонный входной сигнал $r(k)$ равен нулю, т. е. система проектируется как стабилизатор, то не имеет значения, где помещается динамический регулятор: в прямой цепи или в цепи обратной связи. Однако, когда система проектируется в целях слежения за входным сигналом $r(k)$, может оказаться желательным поместить динамический регулятор в прямую цепь, как показано на рис. 9.62. Можно показать, что для одномерной системы эквивалентный последовательный регулятор в прямой цепи будет иметь передаточную функцию

$$G_c(z) = \frac{1}{1 + D(zI - A)^{-1}B[H(z) - I]} \quad (9-420)$$

Пример 9-19. На рис. 9.63 изображена диаграмма состояния цифровой системы управления с обратной связью по состоянию. Коэффициенты обратной связи выбраны так, чтобы собственные значения замкнутой системы были равны $0,5 + j0,5$ и $0,5 - j0,5$.

Матрицы коэффициентов для процесса имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,368 & 1,368 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$D = [0,264 \quad 0,368] \quad E = 0$$

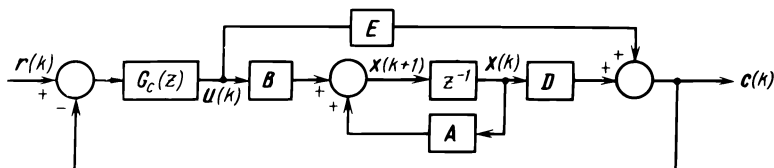


Рис. 9.62. Цифровая система управления с последовательным динамическим регулятором

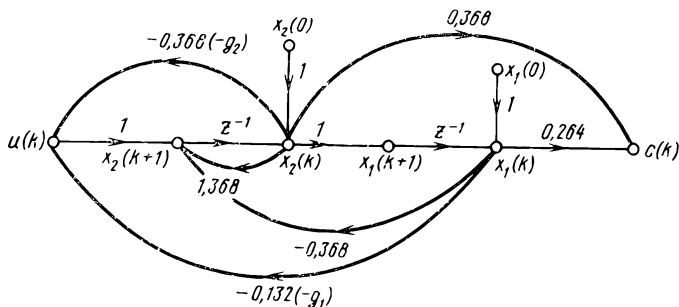


Рис. 9.63. Диаграмма состояния цифровой системы управления с обратной связью по состоянию

Матрица коэффициентов обратной связи

$$G = [0,132 \quad 0,368]$$

Эквивалентный динамический регулятор в цепи обратной связи описывается передаточной функцией

$$H(z) = K \frac{z + a_1}{z + \beta_1} \approx K(1 + d_1 z^{-1}) \quad (9-421)$$

Уравнение (9-419) дает

$$\begin{aligned} P = K[1 \quad d_1] &= G \begin{bmatrix} D \\ D(A - BG)^{-1} \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= [0,132 \quad 0,368] \begin{bmatrix} 0,264 & 0,368 \\ 0,896 & -0,528 \end{bmatrix}^{-1} = 0,8514[1 \quad -0,1216] \end{aligned} \quad (9-422)$$

Таким образом, $K = 0,8514$ и $d_1 = -0,1216$.

Чтобы динамический регулятор был физически реализуемым, зададимся произвольным значением β_1 , которое намного меньше, чем d_1 . Пусть $\beta_1 = 0,0005$, тогда

$$a_1 = d_1 + \beta_1 = -0,1211 \quad (9-423)$$

Передаточная функция динамического регулятора в цепи обратной связи имеет вид

$$H(z) = 0,8514z(z - 0,1211) / (z + 0,0005). \quad (9-424)$$

Диаграмма состояния замкнутой системы с динамическим регулятором изображена на рис. 9.64.

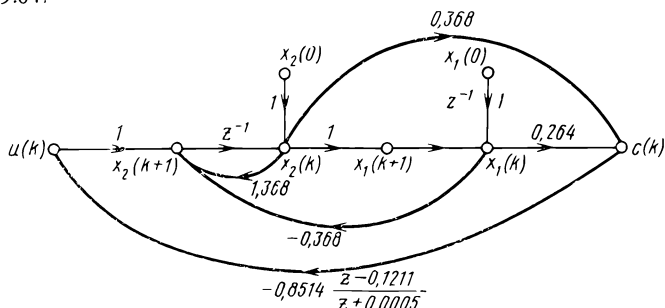


Рис. 9.64. Цифровая система управления с динамическим регулятором, эквивалентная системе, приведенной на рис. 9.63

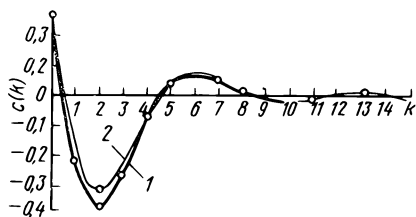


Рис. 9.65. Переходные процессы систем, изображенных на рис. 9.63 и 9.64:

1 — динамический регулятор; 2 — обратная связь по состоянию

Теперь сравним характеристики и показатели качества двух систем, изображенных на рис. 9.63 и 9.64. Характеристическое уравнение системы с обратной связью по состоянию имеет вид

$$|zI - A + BG| = z^2 - z + 0,5 = 0 \quad (9-425)$$

Это уравнение имеет корни $z = 0,5 + j0,5$ и $z = 0,5 - j0,5$, что и требовалось. Характеристическое уравнение системы с динамическим регулятором в цепи обратной связи по выходу имеет вид

$$z^3 - 1,05418z^2 + 0,554143z - 0,027034 = 0. \quad (9-426)$$

Корни последнего уравнения равны: $z = 0,0541$, $z = 0,5 + j0,5$ и $0,5 - j0,5$. Таким образом, хотя применение вместо обратной связи по состоянию динамического регулятора повышает порядок системы до третьего, доминирующие корни характеристического уравнения занимают требуемое положение, т. е. $z = 0,5 \pm j0,5$. Корень $z = 0,0541$, расположенный на z -плоскости очень близко к началу координат, не влияет существенно на динамику системы.

Будем считать, что начальное состояние характеризуется значениями $x_1(0) = 1$ и $x_2(0) = 0$. Из рис. 9.63 имеем

$$C(z) = \frac{0,264z^2 - 0,448z}{z^2 - z + 0,5} x_1(0) \quad (9-427)$$

Переходный процесс для $c(k)$ изображен на рис. 9.65. На основании рис. 9.64 z -преобразование выходной переменной системы с динамическим регулятором при тех же начальных условиях получается в виде

$$C(z) = \frac{0,264z^3 - 0,496444z^2 - 0,000248z}{z^3 - 1,05418z^2 + 0,554143z - 0,027034} x_1(0). \quad (9-428)$$

Переходный процесс для $c(k)$, соответствующий последнему уравнению, изображен на рис. 9.65. Сравнивая два переходных процесса, видим, что система с динамическим регулятором дает большее перерегулирование, но обе кривые вообще расположены очень близко друг к другу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davison, E. J., "On Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-15, June 1970, pp. 348-351.
2. Wonham, W. M., "On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, December 1976, pp. 660-665.
3. Smith, H. W. and Davison, E. J., "Design of Industrial Regulations," *Proc. IEE (London)*, Vol. 119, No. 8, August 1972, pp. 1210-1216.
4. Whitbeck, R. F. and Hofmann, L. G., "Digital Control Law Synthesis in the w' Domain," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 1, No. 5, September-October 1978, pp. 319-326.

ГЛАВА 10. СИНТЕЗ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

10.1. ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА

При проектировании большого класса оптимальных систем управления ставится цель обеспечить минимум или максимум критерия качества, который задается в виде

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \mathbf{u}(k), k] \quad (10-1)$$

где $F[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \mathbf{u}(k), k]$ – дифференцируемая скалярная функция.

Отыскание максимума или минимума критерия качества J производится при наличии ограничения в виде равенства

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (10-2)$$

которое является уравнением состояния системы, наряду с другими ограничениями в виде равенств и неравенств. В уравнении (10-2) вектор $\mathbf{x}(k)$ имеет размерность n , а вектор $\mathbf{u}(k)$ – размерность p .

Большинство методов проектирования оптимальных систем основано на вариационном исчислении. Согласно принципу вариации задача нахождения минимума функции при наличии ограничений в виде равенств решается путем добавления ограничения на эту функцию.

Определим вектор $\lambda(k+1)$ размерностью $n \times 1$ как множитель Лагранжа. Критерий качества J (10-1) преобразуется к расширенному критерию

$$J_c = \sum_{k=0}^{N-1} F[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \mathbf{u}(k), k] + \langle \lambda(k+1), [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k)] \rangle \quad (10-3)$$

где символ $\langle \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов.

В теории вариационного исчисления доказывается, что нахождение минимума или максимума функционала J при условии (10-2) эквивалентно отысканию минимума или максимума функционала J_c без ограничений.

Пусть $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{x}(k+1)$, $\mathbf{u}(k)$ и $\lambda(k+1)$ имеют различные вариации:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^\circ(k) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(k) \quad (10-4)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}^\circ(k+1) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(k+1) \quad (10-5)$$

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}^\circ(k) + \delta \boldsymbol{\mu}(k) \quad (10-6)$$

$$\lambda(k+1) = \lambda^\circ(k+1) + \gamma \boldsymbol{\omega}(k+1) \quad (10-7)$$

где $\mathbf{x}^\circ(k)$, $\mathbf{x}^\circ(k+1)$, $\mathbf{u}^\circ(k)$ и $\lambda^\circ(k+1)$ – векторы, соответствующие оптимальным траекториям; $\boldsymbol{\eta}(k)$, $\boldsymbol{\mu}(k)$ и $\boldsymbol{\omega}(k)$ – произвольные векторные переменные.

Подстановка соотношений (10-4) – (10-7) в выражение (10-3) дает

$$J_c = \sum_{k=0}^{N-1} F[\mathbf{x}^\circ(k) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(k), \mathbf{x}^\circ(k+1) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(k+1), \mathbf{u}^\circ(k) + \delta \boldsymbol{\mu}(k), k] + \\ + \langle \lambda^\circ(k+1) + \gamma \boldsymbol{\omega}(k+1), \mathbf{x}^\circ(k+1) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(k+1) - \\ - f[\mathbf{x}^\circ(k) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(k), \mathbf{u}^\circ(k) + \delta \boldsymbol{\mu}(k), k] \rangle \quad (10-8)$$

Упростив запись, выразим J_c в виде

$$J_c = \sum_{k=0}^{N-1} F_c[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \lambda(k+1), \mathbf{u}(k), k] \quad (10-9)$$

Раскладывая F_c в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{x}^\circ(k)$, $\mathbf{x}^\circ(k+1)$, $\lambda^\circ(k+1)$, $\mathbf{u}^\circ(k)$, получим

$$F_c[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \lambda(k+1), \mathbf{u}(k), k] = \\ = F_c[\mathbf{x}^\circ(k), \mathbf{x}^\circ(k+1), \lambda^\circ(k+1), \mathbf{u}^\circ(k), k] + \langle \epsilon \boldsymbol{\eta}(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle + \\ + \langle \epsilon \boldsymbol{\eta}(k+1), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k+1)} \rangle + \langle \gamma \boldsymbol{\omega}(k+1), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \lambda^\circ(k+1)} \rangle + \\ + \langle \delta \boldsymbol{\mu}(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \mathbf{u}^\circ(k)} \rangle + \quad \text{члены высшего порядка,} \quad (10-10)$$

где

$$F_c^\circ(k) = F_c[\mathbf{x}^\circ(k), \mathbf{x}^\circ(k+1), \lambda^\circ(k+1), \mathbf{u}^\circ(k), k] \quad (10-11)$$

Чтобы критерий J_c имел минимум, необходимо выполнить следующие условия:

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=\delta=\gamma=0} = 0 \quad (10-12)$$

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \gamma} \right|_{\epsilon=\delta=\gamma=0} = 0 \quad (10-13)$$

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \delta} \right|_{\epsilon=\delta=\gamma=0} = 0 \quad (10-14)$$

Подставляя разложение в ряд Тейлора для F_c в выражение (10-9) и учитывая необходимые условия существования минимума J_c [см. уравнения (10-12) – (10-14)], получаем

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\langle \boldsymbol{\eta}(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle + \langle \boldsymbol{\eta}(k+1), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k+1)} \rangle \right] = 0 \quad (10-15)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle \boldsymbol{\omega}(k+1), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \lambda^\circ(k+1)} \rangle = 0 \quad (10-16)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle \boldsymbol{\mu}(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \mathbf{u}^\circ(k)} \rangle = 0 \quad (10-17)$$

Уравнение (10-15) может быть записано как

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle &= - \sum_{k=1}^N \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle = \\ &= - \sum_{k=0}^{N-1} \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle + \\ &+ \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle \Big|_{k=0} - \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle \Big|_{k=N} \end{aligned} \quad (10-18)$$

где

$$F_c^\circ(k-1) = F_c[\mathbf{x}^\circ(k-1), \mathbf{x}^\circ(k), \lambda^\circ(k), \mathbf{u}^\circ(k-1), k-1] \quad (10-19)$$

Преобразовав уравнение (10-18), получим

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} + \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle + \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle \Big|_{k=0}^{k=N} = 0 \quad (10-20)$$

Согласно основной лемме вариационного исчисления, уравнение (10-20) удовлетворяется для любого $\eta(k)$, если выполняются следующие равенства:

$$\frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} + \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} = 0 \quad (10-21)$$

$$\langle \eta(k), \frac{\partial F_c^\circ(k-1)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle \Big|_{k=0}^{k=N} = 0 \quad (10-22)$$

Смысл основной леммы заключается в том, что для произвольного $\eta(k)$ уравнение (10-20) может удовлетворяться только при одном условии: каждый член уравнения должен быть равен нулю.

Уравнение (10-21) называется *дискретным уравнением Эйлера-Лагранжа*, оно является необходимым условием существования экстремума (максимума или минимума) критерия качества J_c . Уравнение (10-22) известно как *условие трансверсальности*, или граничное условие, которое необходимо для решения дифференциальных уравнений в частных производных (10-21).

Учитывая два дополнительных условия (10-16) и (10-17), для произвольных $\mu(k)$ и $\omega(k+1)$ получим

$$\frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \lambda_i^\circ(k+1)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10-23)$$

$$\frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial u_j^\circ(k)} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (10-24)$$

Уравнение (10-23) ведет к выражению

$$\mathbf{x}^\circ(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}^\circ(k), \mathbf{u}^\circ(k), k] \quad (10-25)$$

которое означает, что уравнение оптимальной траектории должно удовлет-

ворять уравнению состояния. Уравнение (10-24) для $F_c^o(k)$ определяет оптимальное управление $u^o(k)$ через $\lambda^o(k+1)$.

Для большинства задач проектирования задается начальное состояние $x(0)$. Следовательно, возмущение $x(k)$ при $k=0$ равно нулю, так как $x(0)$ зафиксировано, т. е. $\eta(0) = 0$. Условие трансверсальности (10-22) сводится к условию

$$\left. \langle \eta(k), \frac{\partial F_c^o(k-1)}{\partial x^o(k)} \rangle \right|_{k=N} = 0 \quad (10-26)$$

Большинство задач оптимального управления классифицируют в соответствии с граничными условиями в крайних точках. Например, если $x(N)$ задано, то этот случай называется задачей проектирования *с закрепленными крайними точками*. Если значение $x(N)$ не определено или принадлежит некоторой области цели, то мы имеем задачу *со свободными крайними точками*. Условие трансверсальности (10-26) необходимо использовать в соответствии со следующими граничными условиями в крайних точках:

Задача с закрепленными крайними точками: $x(N)$ — фиксировано, $\eta(N) = 0$; тогда производная

$$\left. \frac{\partial F_c^o(k-1)}{\partial x^o(k)} \right|_{k=N}$$

имеет произвольное значение и для решения уравнения (10-21) нет необходимости в условии трансверсальности.

Задача со свободными крайними точками: $x(N)$ — не фиксировано (свободно), $\eta(N) \neq 0$. Тогда

$$\left. \frac{\partial F_c^o(k-1)}{\partial x^o(k)} \right|_{k=N} = 0 \quad (10-27)$$

что является условием трансверсальности, необходимым для решения уравнения (10-21).

Во многих случаях одни элементы вектора $x(N)$ фиксированы, а другие свободны, тогда рассмотренные выше условия трансверсальности могут быть применены соответственно.

Следующий пример иллюстрирует применение вариационного исчисления и дискретного уравнения Эйлера–Лагранжа для целей синтеза цифровых систем управления.

Пример 10.1. Найдем оптимальное управление $u^o(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$, минимизирующее критерий качества

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{10} [x^2(k) + 2u^2(k)] \quad (10-28)$$

при ограничении в виде равенства

$$x(k+1) = x(k) + 2u(k) \quad (10-29)$$

для следующих случаев.

А. Начальное состояние $x(0) = 1$, конечное $x(11) = 0$.

Б. Начальное состояние $x(0) = 1$, конечное состояние $x(11)$ не фиксировано.

Решение. А. Запишем расширенный критерий качества в виде

$$J_c = \sum_{k=0}^{10} F_c[x(k), u(k)] \quad (10-30)$$

где

$$F_c[x(k), u(k)] = \frac{1}{2} [x^2(k) + 2u^2(k)] + \lambda(k+1)[x(k+1) - x(k) - 2u(k)] = F_c(k) \quad (10-31)$$

Используя уравнение (10-21), определим дискретное уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\lambda^\circ(k+1) - \lambda^\circ(k) - x^\circ(k) = 0 \quad (10-32)$$

Из выражения (10-23) следует

$$\frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial \lambda^\circ(k+1)} = x^\circ(k+1) - x^\circ(k) - 2u^\circ(k) = 0 \quad (10-33)$$

что является ограничением в виде равенства или уравнением состояния (10-29) при условиях оптимума. Оптимальное управление определяется из выражения (10-24):

$$\frac{\partial F_c^\circ(k)}{\partial u^\circ(k)} = 2u^\circ(k) - 2\lambda^\circ(k+1) = 0 \quad (10-34)$$

Следовательно,

$$u^\circ(k) = \lambda^\circ(k+1) \quad (10-35)$$

После подстановки выражения (10-35) в (10-33) уравнения (10-32) и (10-33) образуют систему из двух разностных уравнений первого порядка, решение которой определяет $\lambda^\circ(k+1)$. Поскольку $x(0)$ и $x(11)$ заданы, в рассматриваемом случае эти значения определяют граничные условия для решения уравнений (10-32) и (10-33) и применять условие трансверсальности (10-26) нет необходимости.

Система из двух разностных уравнений имеет вид

$$\lambda^\circ(k+1) - \lambda^\circ(k) - x^\circ(k) = 0 \quad (10-36)$$

$$x^\circ(k+1) - 2\lambda^\circ(k+1) - x^\circ(k) = 0 \quad (10-37)$$

при условии $x(0) = 1$ и $x(11) = 0$. Эти уравнения можно решить методом z-преобразования или методом переходных состояний. Решения имеют вид

$$x^\circ(k) = 0,289[2,732 + 2\lambda^\circ(0)](3,732)^k + 0,289[0,732 - 2\lambda^\circ(0)](0,268)^k \quad (10-38)$$

$$\lambda^\circ(k) = [0,289 + 0,211\lambda^\circ(0)](3,732)^k + [-0,289 + 0,789\lambda^\circ(0)](0,268)^k \quad (10-39)$$

Начальное значение $\lambda^\circ(k)$ может быть найдено подстановкой $x^\circ(11) = 0$ в выражение (10-38):

$$\lambda^\circ(0) = -1,366 \quad (10-40)$$

Тогда оптимальная траектория $x^\circ(k)$ описывается как

$$x^\circ(k) = (0,268)^k \quad (10-41)$$

а оптимальное управление

$$u^\circ(k) = -2,732(0,268)^{k+1} = -0,732x^\circ(k) \quad (10-42)$$

При $k = 11$, $x^\circ(11)$ должно быть равно нулю; однако применение численных методов дает в этом случае ошибку $(0,268)^{11} = 5,1 \cdot 10^{-7}$.

Б. Когда $x(0) = 1$, а $x(11)$ нефиксировано, необходимо использовать условие трансверсальности

$$\left. \frac{\partial F_c^0(k-1)}{\partial x^0(k)} \right|_{k=11} = 0 \quad (10-43)$$

Последнее условие ведет к равенству:

$$\lambda^0(11) = 0 \quad (10-44)$$

Подставляя условие (10-44) в уравнение (10-39), получим $\lambda^0(0) = -1,366$. Это такой же результат, как и в выражениях (10-41) и (10-42).

Одинаковый результат при свободной и закрепленной конечных точках $x^0(11)$ объясняется тем, что критерий качества включает ограничение на $x(k)$, которое заставляет $x(k)$ быстро стремиться к нулю. В общем случае, когда $x^0(N)$ не фиксировано, оно может достигнуть любого конечного значения.

Итак, метод вариационного исчисления требует решения дискретного уравнения Эйлера–Лагранжа. Однако для системы n -го порядка порядок уравнения Эйлера–Лагранжа равен $2n$. Это означает, что решение уравнения Эйлера–Лагранжа является довольно сложной процедурой.

Хотя управляемость и не упоминалась в связи с применением дискретного уравнения Эйлера–Лагранжа к синтезу систем, однако очевидно, что если задано $x(N)$, где N – конечное целое число, то система должна быть управляемой по состоянию.

10.2. ДИСКРЕТНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА (МИНИМУМА)

Принцип максимума (или минимума) Понтрягина является мощным методом получения оптимального решения для широкого класса непрерывных систем управления. Принцип максимума базируется на вариационном исчислении, но процедура решения более изящная, чем при использовании уравнения Эйлера–Лагранжа. Для расчета цифровых систем управления можно применить дискретный принцип максимума. Строго говоря, применение дискретного принципа максимума требует исследования условия выпуклости системы. Материал, представленный в этом параграфе, ограничен практическим использованием метода, поэтому строгие математические выкладки сведены к минимуму.

Задача проектирования может быть сформулирована следующим образом.

Найти оптимальное уравнение $u^0(k)$ на интервале $[0, N]$, минимизирующее критерий качества

$$J = G[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), u(k), k] \quad (10-45)$$

при ограничении, заданном в виде равенства

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \quad (10-46)$$

Член $G[x(N), N]$ в выражении (10-45) является терминальной составляющей критерия качества. Эта составляющая необходима как ограничение на конечное состояние только в случае, если $x(N)$ не является закрепленной точкой.

По аналогии с множителем Лагранжа определим n -мерный дополнительный вектор $p(k)$. Тогда задача оптимизации эквивалентна минимизации

$$J_c = G[\mathbf{x}(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} \left[F[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] - \right. \\ \left. - \langle \mathbf{p}(k+1), [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k)] \rangle \right] \quad (10-47)$$

Определим как гамильтониан скалярную функцию

$$H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{p}(k+1), k] = F[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] - \\ - \langle \mathbf{p}(k+1), \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \rangle \quad (10-48)$$

При задании гамильтониана таким образом он соответствует задаче дискретного принципа максимума. Для дискретного принципа минимума гамильтониан определяется в виде

$$H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{p}(k+1), k] = F[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] + \\ + \langle \mathbf{p}(k+1), \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \rangle \quad (10-49)$$

Как будет показано ниже, принцип максимума основан на том, что гамильтониан имеет максимум вдоль оптимальной траектории, и наоборот, для принципа минимума гамильтониан имеет минимум.

Подставляя выражение (10-49) для гамильтониана в соотношение (10-47), получим

$$J_c = G[\mathbf{x}(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} \left[H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{p}(k+1), k] - \right. \\ \left. - \langle \mathbf{p}(k+1), \mathbf{x}(k+1) \rangle \right] \quad (10-50)$$

что соответствует принципу минимума.

Пусть $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{x}(k+1)$ и $\mathbf{u}(k)$ имеют следующие вариации:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^o(k) + \epsilon \eta(k) \quad (n \times 1) \quad (10-51)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}^o(k+1) + \epsilon \eta(k+1) \quad (n \times 1) \quad (10-52)$$

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}^o(k) + \delta \mu(k) \quad (p \times 1) \quad (10-53)$$

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{p}^o(k+1) + \gamma \omega(k+1) \quad (n \times 1) \quad (10-54)$$

Тогда выражение (10-50) можно записать как

$$J_c = G[\mathbf{x}^o(N) + \epsilon \eta(N), N] + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} H[\mathbf{x}^o(k) + \epsilon \eta(k), \mathbf{u}^o(k) + \delta \mu(k), \mathbf{p}^o(k+1) + \gamma \omega(k+1), k] - \\ - \langle \mathbf{p}^o(k+1) + \gamma \omega(k+1), \mathbf{x}^o(k+1) + \epsilon \eta(k+1) \rangle \quad (10-55)$$

Раскладывая $G[\mathbf{x}(N), N]$ в ряд Тейлора в окрестности точки $G[\mathbf{x}^o(N), N]$ получим

$$G[\mathbf{x}(N), N] = G[\mathbf{x}^o(N), N] + \epsilon \langle \eta(N), \frac{\partial G^o(N)}{\partial \mathbf{x}^o(N)} \rangle + \dots \quad (10-56)$$

Аналогично раскладываем $H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{p}(k+1), k]$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{x}^o(k)$, $\mathbf{u}^o(k)$, $\mathbf{p}^o(k+1)$ и $\mathbf{x}^o(k+1)$:

$$H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{p}(k+1), k] = H[\mathbf{x}^\circ(k), \mathbf{u}^\circ(k), \mathbf{p}^\circ(k+1), k] + \\ + \epsilon \langle \eta(k), \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle + \delta \langle \mu(k), \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{u}^\circ(k)} \rangle + \gamma \langle \omega(k+1), \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{p}^\circ(k+1)} \rangle + \dots, \quad (10-57)$$

где

$$H^\circ(k) = H[\mathbf{x}^\circ(k), \mathbf{u}^\circ(k), \mathbf{p}^\circ(k+1), k] \quad (10-58)$$

Подставляя в выражение (10-55) разложения в ряд Тейлора для $G[\mathbf{x}(N), N]$ и $H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{p}(k+1), k]$ и учитывая следующие необходимые условия минимума J_c :

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=\delta=\gamma=0} = 0 \quad (10-59)$$

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \delta} \right|_{\epsilon=\delta=\gamma=0} = 0 \quad (10-60)$$

$$\left. \frac{\partial J_c}{\partial \gamma} \right|_{\epsilon=\delta=\gamma=0} = 0 \quad (10-61)$$

получим

$$\langle \eta(N), \frac{\partial G^\circ(N)}{\partial \mathbf{x}^\circ(N)} \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \langle \eta(k), \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} \rangle - \sum_{k=0}^{N-1} \langle \mathbf{p}^\circ(k+1), \eta(k+1) \rangle = 0 \quad (10-62)$$

$$\langle \mu(k), \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{u}^\circ(k)} \rangle = 0 \quad (10-63)$$

$$\langle \omega(k+1), \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{p}^\circ(k+1)} - \mathbf{x}^\circ(k+1) \rangle = 0 \quad (10-64)$$

Из уравнения (10-64) следует

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{p}^\circ(k+1)} = \mathbf{x}^\circ(k+1) \quad (10-65)$$

что является исходным уравнением состояния (10-46). Из уравнения (10-63) следует

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{u}^\circ(k)} = 0 \quad (10-66)$$

что соответствует экстремуму гамильтониана по оптимальному управлению вдоль оптимальной траектории.

Последний член в левой части уравнения (10-62) можно записать как

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle \mathbf{p}^\circ(k+1), \eta(k+1) \rangle = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{p}^\circ(k), \eta(k) \rangle = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \langle \mathbf{p}^\circ(k), \eta(k) \rangle + \langle \mathbf{p}^\circ(N), \eta(N) \rangle - \langle \mathbf{p}^\circ(0), \eta(0) \rangle \quad (10-67)$$

Так как $x(0)$ задано и $\eta(0) = 0$, тогда уравнение (10-67) примет вид

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle p^\circ(k+1), \eta(k+1) \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle p^\circ(k), \eta(k) \rangle + \langle p^\circ(N), \eta(N) \rangle \quad (10-68)$$

После подстановки последнего уравнения в (10-62) и преобразований получим

$$\langle \frac{\partial G^\circ(N)}{\partial x^\circ(N)} - p^\circ(N), \eta(N) \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \langle \frac{\partial H^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} - p^\circ(k), \eta(k) \rangle = 0 \quad (10-69)$$

Так как вариации независимы, уравнение (10-69) удовлетворяется только при условии, что

$$\frac{\partial G^\circ(N)}{\partial x^\circ(N)} = p^\circ(N) \quad (10-70)$$

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} = p^\circ(k) \quad (10-71)$$

Итак, чтобы критерий качества J_c достигал экстремума, необходимо выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial x^\circ(k)} = p^\circ(k) \quad (10-72)$$

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial p^\circ(k+1)} = x^\circ(k+1) \quad (10-73)$$

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial u^\circ(k)} = 0 \quad (10-74)$$

$$\frac{\partial G^\circ(N)}{\partial x^\circ(N)} = p^\circ(N) \quad (10-75)$$

Уравнения (10-72) и (10-73) дают $2n$ разностных уравнений первого порядка, которые называются *каноническими уравнениями состояния*. Уравнение (10-74) определяет оптимальное управление $u^\circ(k)$, а уравнение (10-75) дает условие трансверсальности, которое необходимо использовать, когда $x(N)$ является незакрепленной точкой. Если некоторые элементы вектора $x(N)$ определены, то соответствующее условие трансверсальности для $p^\circ(N)$ не используется.

Следующий пример иллюстрирует применение дискретного принципа минимума к проектированию цифровой системы управления.

Пример 10.2. Найти оптимальное управление $u^\circ(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$, минимизирующее критерий качества

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{10} [x^2(k) + 2u^2(k)] \quad (10-76)$$

при наличии ограничения в виде равенства

$$x(k+1) = x(k) + 2u(k) \quad (10-77)$$

Начальное состояние $x(0) = 1$, конечное $x(11) = 0$. Заметим, что эта задача совпадает с задачей А из примера 10.1.

Первым шагом синтеза с использованием дискретного принципа минимума является определение гамильтониана. В соответствии с выражением (10-49)

$$H[x(k), u(k), p(k+1)] = \frac{1}{2} [x^2(k) + 2u^2(k)] + p(k+1)[x(k) + 2u(k)] \quad (10-78)$$

Канонические уравнения состояния можно получить из уравнений (10-72) и (10-73). Они имеют вид

$$p^\circ(k+1) - p^\circ(k) = -x^\circ(k) \quad (10-79)$$

$$x^\circ(k+1) - x^\circ(k) = 2u^\circ(k) \quad (10-80)$$

Из уравнения (10-74) найдем оптимальное управление

$$u^\circ(k) = -p^\circ(k+1) \quad (10-81)$$

Так как конечная точка $x(11)$ закреплена, в условии трансверсальности (10-75) нет необходимости.

Решения уравнений (10-79) – (10-81) имеет вид:

$$x^\circ(k) = 0.289[2.732 - 2p^\circ(0)](3.732)^k + 0.289[0.732 + 2p^\circ(0)](0.268)^k \quad (10-82)$$

$$p^\circ(k) = [-0.289 + 0.211p^\circ(0)](3.732)^k + [0.289 + 0.789p^\circ(0)](0.268)^k \quad (10-83)$$

Эти уравнения схожи с выражениями (10-38) и (10-39) и отличаются несколькими знаками. Подстановка $x^\circ(11) = 0$ в формулу (10-82) дает результат $p^\circ(0) = 1,366$. Следовательно,

$$x^\circ(k) = (0,268)^k$$

$$u^\circ(k) = -2,732(0,268)^{k+1}$$

Решение совпадает с результатами, полученными в примере 10.1 (задача Б).

Теперь, считая $x(11)$ свободной крайней точкой, добавим к критерию качества (10-76) дополнительную терминальную составляющую

$$J = \frac{1}{2} x^2(11) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{10} [x^2(k) + 2u^2(k)] \quad (10-84)$$

Условие трансверсальности (10-75) дает

$$x^\circ(11) = p^\circ(11) \quad (10-85)$$

Тогда из формул (10-82) и (10-83) при $k = 11$ следует, что $p^\circ(0) = 1,366$. Для $x^\circ(k)$ и $u^\circ(k)$ получается тот же результат, что и в предыдущем случае.

Необходимо подчеркнуть, что решение задачи оптимизации по критерию минимума с использованием критерия качества с терминальной составляющей при свободной крайней точке может дать результат, отличный от результата, полученного при решении методом вариационного исчисления.

10.3. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ ЭНЕРГИИ

Проблема проектирования оптимальной по быстродействию системы может быть сформулирована как задача перевода процесса из состояния $x(0)$ в состояние $x(N)$ за минимальное время. При этом управление подчиняется ограничению $|u(kT)| \leq U$. В этом параграфе будет рассмотрен синтез оптимальной по быстродействию системы с квадратичным ограничением на управление. Процедура решения основана на использовании дискретного принципа минимума. Полученные результаты будут использованы в гл. 11 при проектировании линейного цифрового регулятора. Задача формулируется следующим образом.

Пусть задана цифровая система

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (10-86)$$

где $\mathbf{x}(k)$ имеет размерность $n \times 1$, $\mathbf{u}(k)$ — размерность $p \times 1$; \mathbf{A} — невырожденная матрица. Предполагается, что пара $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ полностью управляема. Требуется найти оптимальное управление $\mathbf{u}^\circ(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, которое переводит процесс из начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в конечное $\mathbf{x}(N) = 0$ при условии ограничения на управление

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{u}'(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) = \text{минимум}, \quad (10-87)$$

где \mathbf{R} — симметрическая и положительно-определенная матрица.

Критерий качества вида (10-87) является квадратичной формой и в данном случае отражает энергетические ограничения в проектируемой системе. Следовательно, критерий качества J вида (10-87) является альтернативным, хотя и не эквивалентным ограничением на управление $\mathbf{u}(k)$.

Решение задачи начинаем с нахождения гамильтониана

$$H[\mathbf{x}(k), \mathbf{p}(k+1), \mathbf{u}(k)] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(k), \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \rangle + \langle \mathbf{p}(k+1), \mathbf{x}(k+1) \rangle \quad (10-88)$$

Чтобы J имел минимум, необходимо выполнить следующие условия:

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} = \mathbf{p}^\circ(k) = \mathbf{A}' \mathbf{p}^\circ(k+1) \quad (10-89)$$

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{p}^\circ(k+1)} = \mathbf{x}^\circ(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}^\circ(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}^\circ(k) \quad (10-90)$$

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{u}^\circ(k)} = \mathbf{R} \mathbf{u}^\circ(k) + \mathbf{B}' \mathbf{p}^\circ(k+1) = 0, \quad (10-91)$$

где

$$H^\circ(k) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^\circ(k), \mathbf{R} \mathbf{u}^\circ(k) \rangle + \langle \mathbf{p}^\circ(k+1), \mathbf{A} \mathbf{x}^\circ(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}^\circ(k) \rangle \quad (10-92)$$

Так как $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{x}(N)$ фиксированы, в условии трансверсальности нет необходимости.

Оптимальное управление определяется из уравнения (10-91)

$$\mathbf{u}^\circ(k) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{p}^\circ(k+1) \quad (10-93)$$

где обратная матрица \mathbf{R}^{-1} существует, поскольку \mathbf{R} — положительно-определенная матрица

В рассматриваемом случае уравнение (10-89), определяющее дополнительный вектор $\mathbf{p}^\circ(k)$, не зависит от переменной состояния $\mathbf{x}(k)$. Тогда получаем решение

$$\mathbf{p}^\circ(k) = (\mathbf{A}^{-k})' \mathbf{p}^\circ(0) \quad (10-94)$$

где предполагается существование матрицы, обратной матрице \mathbf{A} .

Подстановка выражения (10-93) в уравнение (10-90) дает

$$\mathbf{x}^\circ(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}^\circ(k) - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{p}^\circ(k+1) \quad (10-95)$$

Решение уравнения (10-95) имеет вид

$$\mathbf{x}^0(N) = \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) - \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-k-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' (\mathbf{A}^{-1})' \mathbf{p}^0(k) \quad (10-96)$$

Полагая $\mathbf{x}^0(N) = 0$ и решая последнее уравнение относительно $\mathbf{x}(0)$ с использованием (10-94), получим

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{-k-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' (\mathbf{A}^{-k-1})' \mathbf{p}^0(0) \quad (10-97)$$

Отметим, что

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{-k-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' (\mathbf{A}^{-k-1})' = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{S}_k \mathbf{S}_k' \quad (10-98)$$

является матрицей управляемости, если \mathbf{R} — единичная матрица [см. уравнение (8-11)]. Для любой неединичной матрицы \mathbf{R} , которая является симметрической и положительно-определенной, положим

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{K} \mathbf{K}' \quad (10-99)$$

где \mathbf{K} — матрица размерностью $p \times p$. Тогда в выражении (10-98)

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}^{-k-1} \mathbf{B} \mathbf{K} \quad (10-100)$$

Так как \mathbf{R} — симметрическая и положительно-определенная матрица, \mathbf{R}^{-1} имеет те же свойства. Уравнение (10-99) имеет единственное решение симметрическую и положительно-определенную матрицу \mathbf{K} , так как это уравнение является простой формой нелинейного матричного уравнения Риккати

$$\mathbf{K} \Theta \mathbf{Q}^{-1} \Theta' \mathbf{K}' - \mathbf{K} \Phi - \Phi' \mathbf{K} - \mathbf{R}^{-1} = 0 \quad (10-101)$$

при $\Theta = \mathbf{I}$, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}$ и $\Phi = 0$.

Матрица \mathbf{W} размерностью $n \times n$ в уравнении (10-98) является невырожденной, если матрица

$$[\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{K} \quad \mathbf{A}^{-2} \mathbf{B} \mathbf{K} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{-N} \mathbf{B} \mathbf{K}] \quad (n \times pN) \quad (10-102)$$

имеет ранг n . Последняя матрица может быть записана в виде

$$[\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{-2} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{-N} \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{K} & & & \\ & \mathbf{K} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (10-103)$$

(pN × pN)

Ранг матрицы (10-102) тот же, что и ранг матрицы $[\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{-2} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{-N} \mathbf{B}]$ или матрицы $[\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B}]$, так как \mathbf{K} — положительно-определенная матрица. Следовательно, если пара $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ полностью управляема, то и пара $[\mathbf{A}, \mathbf{B} \mathbf{K}]$ также полностью управляема.

Мы установили, что если пара $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ полностью управляема, то \mathbf{W} — невырожденная матрица. Из выражения (10-97) получим

$$\mathbf{p}^0(0) = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x}(0) \quad (10-104)$$

Оптимальное управление может быть выражено через начальное состояние $x(0)$. Из уравнения (10-93) следует, что

$$u^{\circ}(k) = -R^{-1}B'(A^{-1})'p(k) = -R^{-1}B'(A^{-1})'(A^{-k})'p(0) \quad (10-105)$$

Тогда

$$u^{\circ}(k) = -R^{-1}B'(A^{-k-1})'W^{-1}x(0) \quad (10-106)$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (10-87), после упрощений получим оптимальный критерий качества в виде

$$J^{\circ} = \frac{1}{2} x'(0)W^{-1}x(0) \quad (10-107)$$

Ценность этого результата заключается в том, что оптимальный критерий качества зависит от начального состояния $x(0)$. Поскольку W зависит только от заданных A , B и R , то выражение (10-107) показывает, что при фиксированной верхней границе J° для $x(0)$ может быть определена область управляемых состояний. Другими словами, выражение (10-107) определяет область в пространстве состояний для $x(0)$, из которой обеспечивается перевод в $x(N) = 0$ для заданных N и J° .

Пример 10.3. Задана цифровая система

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (10-108)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & -0,2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Необходимо определить следующее.

А. Найти постоянную матрицу коэффициентов обратной связи по состоянию G , такую, что $u(k) = -Gx(k)$ переведет процесс из любого состояния $x(0)$ в $x(N) = 0$ за $N = 2$. Определить оптимальное управление $u^{\circ}(k)$ для $k = 0, 1$ и оптимальную траекторию состояний $x^{\circ}(k)$ при $x(0) = [1 \ 1]'$ и $x^{\circ}(2) = 2$.

Б. Управление имеет ограничение $|u(k)| \leq 1$. Определить область управляемых состояний для $x(0)$ на плоскости состояний для $N \leq 2$ и $x(N) = 0$.

В. Найти оптимальное управление $u^{\circ}(k)$, которое переведет процесс из начального состояния $x(0) = [1 \ 1]'$ в $x(2) = 0$ и одновременно удовлетворит критерию

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u^2(k) = \text{минимум} \quad (10-109)$$

Определить оптимальную траекторию $x^{\circ}(k)$ и оптимальное значение J .

Г. Определить область управляемых состояний для $x(0)$ на плоскости состояний для $N = 2$ при $x(N) = 0$ и $J \leq 1$; J задано выражением (10-109). Повторить решение для $J \leq 0,25$.

Решение. А. Положив $x(2) = 0$ в решении уравнения (10-108), можно показать, что оптимальное управление имеет вид

$$u^{\circ}(k) = -[1 \ 0][A^{-1}B \ A^{-2}B]^{-1}x(k) \quad (10-110)$$

Следовательно,

$$u^{\circ}(k) = [0,5 \ 0,2]x(k) \quad (10-111)$$

Оптимальная матрица обратной связи по состоянию имеет вид

$$G = [-0,5 \ -0,2] \quad (10-112)$$

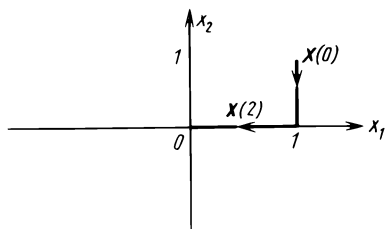


Рис. 10.1. Оптимальная траектория состояний

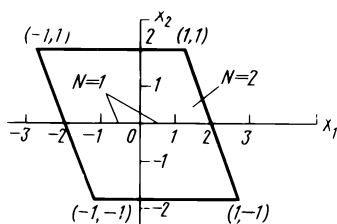


Рис. 10.2. Область управляемых состояний

Для заданного начального состояния может быть получено следующее решение

$$u^o(0) = 0,7 \quad x^o(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u^o(1) = 0,5 \quad x^o(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Оптимальная траектория состояний показана на рис. 10.1.

Б. Управление при ограничении $|u(k)| \leq 1$. Для $N=2$ уравнение переходных состояний запишем в виде

$$x(2) = A^2 x(0) + ABu(0) + Bu(1) = 0 \quad (10-113)$$

Для $x(0)$ из последнего уравнения получим

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 & -0,8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} \quad (10-114)$$

Вершины области управляемых состояний находим подстановкой четырех возможных комбинаций $u(k) = +1$ и $u(k) = -1$ в уравнение (10-114). При этом получим следующие результаты:

$$u(0) = u(1) = 1 \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad u(0) = -u(1) = 1 \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2,8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$u(0) = u(1) = -1 \quad x(0) = \begin{bmatrix} -1,2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad -u(0) = u(1) = 1 \quad x(0) = \begin{bmatrix} -2,8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Выпуклый многоугольник с этими четырьмя вершинами показан на рис. 10.2.

В. Для критерия качества (10-109) $R = 1$. Матрица W определяется с помощью выражения (10-98) для $N=2$:

$$W = A^{-1}BB'(A^{-1})' + A^{-2}BB'(A^{-2})' = \begin{bmatrix} 4,64 & -1,6 \\ -1,6 & 4 \end{bmatrix} \quad (10-115)$$

Оптимальное управление определяется уравнением (10-106):

$$u^o(k) = -B'(A^{-k-1})'W^{-1}x(0) \quad (10-116)$$

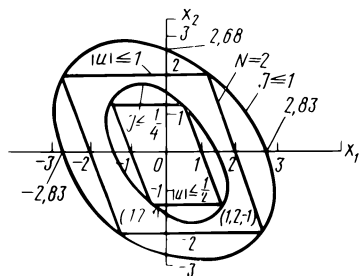


Рис. 10.3. Области управляемых состояний

Следовательно, $u^{\circ}(0) = 0,7$ и $u^{\circ}(1) = 0,5$. Заметим, что данное решение идентично решению части (А). Это объясняется тем, что поскольку N меньше или равно 2, решение для системы второго порядка в случае $X(N) = 0$ является единственным.

Оптимальный критерий качества

$$J^{\circ} = \frac{1}{2} x'(0)W^{-1}x(0) = 0,37 \quad (10-117)$$

Г. Для $J \leq 1$ получим

$$\frac{1}{2} x'(0)W^{-1}x(0) \leq 1 \quad (10-118)$$

или

$$0,125x_1^2(0) + 0,1x_1(0)x_2(0) + 0,145x_2^2(0) \leq 1 \quad (10-119)$$

Последнее выражение описывает эллипс в плоскости состояний. Области управляемых состояний для $J \leq 1$ и для $J \leq 0,25$ показаны на рис. 10.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rozoner, L. I., "The Maximum Principle of L. S. Pontryagin in Optimal System Theory," *Automation and Remote Control*, Parts I, II, III, Vol. 20, 1959.
2. Chang, S. S. L., "Digitized Maximum Principle," *Proc IRE*, Vol. 48, December 1960, pp. 2030-2031.
3. Бутковский А. Г. О необходимых и достаточных условиях оптимальности для импульсных систем управления. – *Автоматика и телемеханика*, 1963, т. 24, 8, с. 1056–1064.
4. Katz, S., "A Discrete Version of Pontryagin's Maximum Principle," *J. Electron. Control*, Vol. 13, No. 2, 1962, pp. 179-184.
5. Halkin, H., "Optimal Control for Systems Described by Difference Equations," *Advances in Control Systems*, Chapter 4, C. T. Leondes, ed., Academic Press, New York, 1964.
6. Sage, A. P., *Optimum System Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968.

ГЛАВА 11. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА

11.1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из современных методов проектирования оптимальных систем управления, который находит широкое практическое применение, является метод синтеза линейного регулятора. При постановке задачи входные воздействия предполагаются нулевыми, а целью проектирования является поддержание состояний или выходных переменных вблизи положения равновесия. Условие нулевых входных воздействий не является строгим ограничением при проектировании, поскольку для результирующей системы гарантируется устойчивость (на бесконечном интервале времени) и заданное затухание, так что на практике качество системы будет удовлетворительным, даже если входные воздействия отличны от нуля.

В дальнейшем вначале будет определен критерий качества для линейного непрерывного процесса с квантованием по времени, а затем — для полностью цифрового процесса.

Задача синтеза линейного цифрового регулятора может быть сформулирована следующим образом.

Пусть задана линейная система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (11-1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — $(n \times 1)$ -мерный вектор состояния; $\mathbf{u}(t)$ — $(p \times 1)$ -мерный вектор управления, который удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (11-2)$$

Требуется найти оптимальное управление $\mathbf{u}^0(kT)$ для $k = 1, 2, \dots, N-1$, которое минимизирует квадратичный критерий качества

$$J = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(t_f), \mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}\mathbf{u}(t) \rangle] dt \quad (11-3)$$

где $t_f = NT$; \mathbf{S} и \mathbf{Q} — симметрические положительно-полуопределенные матрицы $(n \times n)$; \mathbf{R} — симметрическая положительно-определенная матрица $(p \times p)$.

Прежде всего приведем систему (11-1) к дискретному виду, переходя к разностному уравнению

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \phi(T)\mathbf{x}(kT) + \theta(T)\mathbf{u}(kT) \quad (11-4)$$

где

$$\phi(T) = e^{\mathbf{A}T} \quad (11-5)$$

$$\theta(T) = \int_0^T \phi(T-\tau)\mathbf{B}d\tau \quad (11-6)$$

Критерий качества (11-3) также запишем в дискретном виде

$$J_N = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(NT), \mathbf{S}\mathbf{x}(NT) \rangle + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kT}^{(k+1)T} [\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{R}\mathbf{u}(t) \rangle] dt \quad (11-7)$$

Переходное уравнение состояния для системы (11-1) при $t \geq kT$ имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t - kT)\mathbf{x}(kT) + \theta(t - kT)\mathbf{u}(kT) \quad (11-8)$$

Тогда

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}'(kT)\phi'(t - kT) + \mathbf{u}'(kT)\theta'(t - kT) \quad (11-9)$$

Подстановка выражений (11-2), (11-8) и (11-9) в (11-7) дает

$$J_N = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(NT)\mathbf{S}\mathbf{x}(NT) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}'(kT)\hat{\mathbf{Q}}(T)\mathbf{x}(kT) + 2\mathbf{x}'(kT)\mathbf{M}(T)\mathbf{u}(kT) + \mathbf{u}'(kT)\hat{\mathbf{R}}(T)\mathbf{u}(kT)]$$

(11-10)

где

$$\hat{\mathbf{Q}}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \phi'(t - kT)\mathbf{Q}\phi(t - kT)dt \quad (11-11)$$

$$\mathbf{M}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \phi'(t - kT)\mathbf{Q}\theta(t - kT)dt \quad (11-12)$$

$$\hat{\mathbf{R}}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} [\theta'(t - kT)\mathbf{Q}\theta(t - kT) + \mathbf{R}]dt \quad (11-13)$$

С учетом свойств матриц \mathbf{Q} и \mathbf{R} ясно, что $\hat{\mathbf{Q}}(T)$ является симметрической и положительно-полуопределенной; $\hat{\mathbf{R}}(T)$ является симметрической и положительно-определенной. Однако относительно матрицы $\mathbf{M}(T)$ ничего сказать нельзя.

Теперь задача состоит в том, чтобы для заданной цифровой системы (11-4) определить оптимальное управление, которое минимизирует критерий качества (11-10).

В общем случае цифровая система может быть описана уравнением состояния типа (11-4) с самого начала, так что нет особого смысла в таком сложном критерии качества, как (11-10), тем более не ясно, из каких соображений должна выбираться матрица \mathbf{M} . Более естественно рассматривать следующий квадратичный критерий качества:

$$J_N = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(N), \mathbf{S}\mathbf{x}(N) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\langle \mathbf{x}(k), \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) \rangle + \langle \mathbf{u}(k), \mathbf{R}\mathbf{u}(k) \rangle] \quad (11-14)$$

где \mathbf{Q} и \mathbf{R} – весовые матрицы с определенными ранее свойствами, а период квантования T опущен для упрощения записи.

11.2. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОГО ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА (ЗАДАЧА С КОНЕЧНЫМ ИНТЕРВАЛОМ ВРЕМЕНИ)

Задача построения линейного цифрового регулятора, сформулированная в п. 11.1, может быть решена с использованием дискретного принципа максимума.

Цифровой процесс управления описывается уравнением

$$\mathbf{x}(k+1) = \phi \mathbf{x}(k) + \theta \mathbf{u}(k) \quad (11-15)$$

при заданном $\mathbf{x}(0)$. Цель проектирования состоит в определении $\mathbf{u}^\circ(k)$ которое минимизирует критерий качества

$$J_N = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(N), \mathbf{S}\mathbf{x}(N) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\langle \mathbf{x}(k), \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{x}(k) \rangle + \langle \mathbf{x}(k), 2\mathbf{M}\mathbf{u}(k) \rangle + \langle \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{R}}\mathbf{u}(k) \rangle] \quad (11-16)$$

Запишем гамильтониан

$$H(k) = H[\mathbf{x}(k), \mathbf{p}(k+1), \mathbf{u}(k)] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(k), \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{x}(k) \rangle + \langle \mathbf{x}(k), \mathbf{M}\mathbf{u}(k) \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{R}}\mathbf{u}(k) \rangle + \langle \mathbf{p}(k+1), \phi \mathbf{x}(k) + \theta \mathbf{u}(k) \rangle \quad (11-17)$$

Необходимые условия существования экстремума для J_N имеют вид

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{x}^\circ(k)} = \mathbf{p}^\circ(k) = \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{x}^\circ(k) + \phi' \mathbf{p}^\circ(k+1) + \mathbf{M}\mathbf{u}^\circ(k) \quad (11-18)$$

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{p}^\circ(k+1)} = \mathbf{x}^\circ(k+1) = \phi \mathbf{x}^\circ(k) + \theta \mathbf{u}^\circ(k) \quad (11-19)$$

$$\frac{\partial H^\circ(k)}{\partial \mathbf{u}^\circ(k)} = \mathbf{M}'\mathbf{x}^\circ(k) + \hat{\mathbf{R}}\mathbf{u}^\circ(k) + \theta' \mathbf{p}^\circ(k+1) = \mathbf{0} \quad (11-20)$$

Поскольку в рассматриваемом случае значение $\mathbf{x}^\circ(N)$ не задано, учтем условие трансверсальности

$$\frac{\partial G[\mathbf{x}(N), N]}{\partial \mathbf{x}(N)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(N)} \left[\frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(N), \mathbf{S}\mathbf{x}(N) \rangle \right] = \mathbf{S}\mathbf{x}(N) = \mathbf{p}(N) \quad (11-21)$$

Оптимальное управление находим из соотношения (11-20) :

$$\mathbf{u}^\circ(k) = -\hat{\mathbf{R}}^{-1} [\theta' \mathbf{p}^\circ(k+1) + \mathbf{M}'\mathbf{x}^\circ(k)] \quad (11-22)$$

Подставляя последнее выражение в (11-18) и (11-19), получим канонические уравнения состояния

$$\mathbf{x}^\circ(k+1) = (\phi - \theta \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{M}')\mathbf{x}^\circ(k) - \theta \hat{\mathbf{R}}^{-1} \theta' \mathbf{p}^\circ(k+1) \quad (11-23)$$

$$(\phi' - \mathbf{M} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \theta') \mathbf{p}^\circ(k+1) = \mathbf{p}^\circ(k) - (\hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{M} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{M}')\mathbf{x}^\circ(k) \quad (11-24)$$

Они представляют собой $2n$ разностных уравнений, которые должны быть решены при известных граничных условиях $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{p}^\circ(N) = \mathbf{S}\mathbf{x}^\circ(N)$. Заметим, что уравнения (11-23) и (11-24) связаны через $\mathbf{x}^\circ(k)$ и $\mathbf{p}^\circ(k)$.

Они являются более общими по сравнению с уравнениями (10-89) и (10-90), которые получены для простого критерия качества. Поскольку в уравнение (10-89) не входит $x^0(k)$, его можно решать независимо.

Подобный метод не подходит для решения связанных канонических уравнений состояния (11-23) и (11-24). Однако можно показать, что искомое решение имеет вид

$$p(k) = K(k)x(k) \quad (11-25)$$

где $K(k)$ — $(n \times n)$ -мерная матрица с неизвестными свойствами за исключением того, что при $k = N$, как следует из выражения (11-21),

$$K(N) = S \quad (11-26)$$

Подставляя выражение (11-25) в (11-23) и перегруппировывая члены, получим

$$x^0(k+1) = [I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} (\phi - \theta \hat{R}^{-1} M') x^0(k) \quad (11-27)$$

где предполагается, что матрица $[I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]$ имеет обратную матрицу. Аналогично, подставляя (11-25) в уравнение (11-24), имеем

$$(\phi' - M \hat{R}^{-1} \theta') K(k+1) x^0(k+1) = [K(k) - \hat{Q} + M \hat{R}^{-1} M'] x^0(k) \quad (11-28)$$

Теперь подставим выражение (11-27) в (11-28). В результате получим

$$\begin{aligned} (\phi' - M \hat{R}^{-1} \theta') K(k+1) [I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} (\phi - \theta \hat{R}^{-1} M') x^0(k) = \\ = [K(k) - \hat{Q} + M \hat{R}^{-1} M'] x^0(k) \end{aligned} \quad (11-29)$$

Для любого $x^0(k)$ должно выполняться следующее соотношение:

$$\begin{aligned} (\phi' - M \hat{R}^{-1} \theta') K(k+1) [I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} (\phi - \theta \hat{R}^{-1} M') = \\ = K(k) - \hat{Q} + M \hat{R}^{-1} M' \end{aligned} \quad (11-30)$$

Это нелинейное матричное разностное уравнение относительно $K(k)$ называется *дискретным уравнением Риккати*. Матрица $K(k)$ размерностью $n \times n$ известна как *коэффициент Риккати*. Граничное условие для уравнения Риккати задается выражением (11-26). В общем случае уравнение (11-30) состоит из n^2 скалярных уравнений с тем же числом неизвестных элементов матрицы $K(k)$. Однако в дальнейшем будет показано, что матрица $K(k)$ симметрична, так что имеется только $n(n+1)/2$ неизвестных.

Оптимальное управление определяется в результате подстановки выражения (11-25) в (11-22). Таким образом, получим

$$\begin{aligned} u^0(k) = -[I + \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1) \theta]^{-1} \hat{R}^{-1} [\theta' K(k+1) \phi + M'] x^0(k) = \\ = -[\hat{R} + \theta' K(k+1) \theta]^{-1} [\theta' K(k+1) \phi + M'] x^0(k) \end{aligned} \quad (11-31)$$

т. е. уравнение представлено в форме обратной связи по состоянию.

Если $M = 0$, $\hat{Q} = Q$ и $\hat{R} = R$, уравнение Риккати принимает вид

$$\phi' K(k+1) [I + \theta R^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} \phi + Q = K(k) \quad (11-32)$$

Соответствующее оптимальное управление задается выражением

$$u^0(k) = -[R + \theta' K(k+1) \theta]^{-1} \theta' K(k+1) \phi x^0(k) \quad (11-33)$$

Перед обсуждением различных методов решения уравнения Риккати рассмотрим важные свойства этого уравнения и коэффициента Риккати $K(k)$.

Уравнение Риккати вида (11-30) представлено в одной из многих эквивалентных форм, каждая из которых удовлетворяет оптимальному синтезу линейного дискретного регулятора. Как правило, специальная форма уравнения Риккати лучше всего подходит для данной цели.

Покажем вначале, что уравнение (11-30) эквивалентно следующей форме:

$$K(k) = \phi' K(k+1) \phi + \hat{Q} - \\ - [\theta' K(k+1) \phi + M']' [\hat{R} + \theta' K(k+1) \theta]^{-1} [\theta' K(k+1) \phi + M'] \quad (11-34)$$

Эквивалентность двух уравнений (11-30) и (11-34) неочевидна. Чтобы показать это, докажем следующее тождество:

$$K(k+1) [I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} = \\ = K(k+1) - K(k+1) \theta [\hat{R} + \theta' K(k+1) \theta]^{-1} \theta' K(k+1) \quad (11-35)$$

Введем обозначение

$$P = K(k+1) [I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)]^{-1} \quad (11-36)$$

Умножая справа обе части последнего выражения на $[I + \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1)] \theta$, получим

$$P \theta \hat{R}^{-1} [\hat{R} + \theta' K(k+1) \theta] = K(k+1) \theta \quad (11-37)$$

Теперь умножим обе части выражения (11-37) справа на $[\hat{R} + \theta' K(k+1) \theta]^{-1} \theta' K(k+1)$. Результат имеет вид

$$P \theta \hat{R}^{-1} \theta' K(k+1) = K(k+1) \theta [\hat{R} + \theta' K(k+1) \theta]^{-1} \theta' K(k+1) \quad (11-38)$$

Соотношение (11-36) показывает, что левая часть последнего выражения равна $K(k+1) - P$. Таким образом, запишем (11-38) в следующем виде:

$$P = K(k+1) - K(k+1) \theta [\hat{R} + \theta' K(k+1) \theta]^{-1} \theta' K(k+1) \quad (11-39)$$

Сравнение выражений (11-39) и (11-36) однозначно доказывает тождество (11-35). Подставляя соотношение (11-35) в (11-30), получим

$$K(k) - \hat{Q} + MR^{-1}M' = (\phi' - MR^{-1}\theta') [K(k+1) - \\ - K(k+1) \theta [\hat{R} + \theta' K(k+1) \theta]^{-1} \theta' K(k+1)] (\phi - \theta \hat{R}^{-1} M') \quad (11-40)$$

Последнее выражение может рассматриваться как еще одна форма дискретного уравнения Риккати. Преобразуем уравнение (11-40), чтобы показать его эквивалентность уравнению (11-34).

Перемножение членов в уравнении (11-40) дает

$$K(k) - \hat{Q} + MR^{-1}M' = (\phi' - MR^{-1}\theta') [K(k+1) \phi - K(k+1) \theta \hat{R}^{-1} M'] - \\ - (\phi' - MR^{-1}\theta') K(k+1) \theta [\hat{R} + \theta' K(k+1) \theta]^{-1} \theta' K(k+1) (\phi - \theta \hat{R}^{-1} M') \quad (11-41)$$

$$K(k) - \hat{Q} + MR^{-1}M' = \phi' K(k+1) \phi - \phi' K(k+1) \theta \hat{R}^{-1} M' - MR^{-1} \theta' K(k+1) \phi +$$

$$+ \mathbf{M}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\theta'\mathbf{K}(k+1)\theta\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{M}' - [\phi'\mathbf{K}(k+1)\theta - \mathbf{M}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\theta'\mathbf{K}(k+1)\theta] \times \\ \times [\hat{\mathbf{R}} + \theta'\mathbf{K}(k+1)\theta]^{-1} [\theta'\mathbf{K}(k+1)\phi - \theta'\mathbf{K}(k+1)\theta\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{M}'] \quad (11-42)$$

Запишем последний член в скобках уравнения (11-42) в виде

$$\theta'\mathbf{K}(k+1)\phi - \theta'\mathbf{K}(k+1)\theta\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{M}' = \theta'\mathbf{K}(k+1)\phi - \\ - [\hat{\mathbf{R}} + \theta'\mathbf{K}(k+1)\theta] \hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{M}' + \mathbf{M}' \quad (11-43)$$

Подставляя правую часть уравнения (11-43) в соотношение (11-42) получим

$$\mathbf{K}(k) - \hat{\mathbf{Q}} + \mathbf{M}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{M}' = \phi'\mathbf{K}(k+1)\phi - \phi'\mathbf{K}(k+1)\theta\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{M}' - \\ - \mathbf{M}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\theta'\mathbf{K}(k+1)\phi + \mathbf{M}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\theta'\mathbf{K}(k+1)\theta\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{M}' - \phi'\mathbf{K}(k+1)\theta[\hat{\mathbf{R}} + \\ + \theta'\mathbf{K}(k+1)\theta]^{-1} \times [\mathbf{M}' + \theta'\mathbf{K}(k+1)\phi] + \phi'\mathbf{K}(k+1)\theta\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{M}' - \\ - \mathbf{M}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\theta'\mathbf{K}(k+1)\theta\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{M}' + \mathbf{M}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\theta'\mathbf{K}(k+1)\theta[\hat{\mathbf{R}} + \\ + \theta'\mathbf{K}(k+1)\theta]^{-1} [\mathbf{M}' + \theta'\mathbf{K}(k+1)\phi] \quad (11-44)$$

После сокращения подобных членов и преобразования последнего члена уравнение (11-44) принимает вид

$$\mathbf{K}(k) - \hat{\mathbf{Q}} + \mathbf{M}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{M}' = \phi'\mathbf{K}(k+1)\phi - \mathbf{M}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\theta'\mathbf{K}(k+1)\phi - \\ - \mathbf{K}(k+1)\theta[\hat{\mathbf{R}} + \theta'\mathbf{K}(k+1)\theta]^{-1} [\mathbf{M}' + \theta'\mathbf{K}(k+1)\phi] + \\ + \mathbf{M}\hat{\mathbf{R}}^{-1}[\theta'\mathbf{K}(k+1)\theta + \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}][\hat{\mathbf{R}} + \theta'\mathbf{K}(k+1)\theta]^{-1} [\mathbf{M}' + \theta'\mathbf{K}(k+1)\phi] \quad (11-45)$$

Упрощая последнее выражение, окончательно получим

$$\mathbf{K}(k) = \phi'\mathbf{K}(k+1)\phi + \hat{\mathbf{Q}} - [\theta'\mathbf{K}'(k+1)\phi + \mathbf{M}']' [\hat{\mathbf{R}} + \theta'\mathbf{K}(k+1)\theta]^{-1} \times \\ \times [\theta'\mathbf{K}(k+1)\phi + \mathbf{M}'] \quad (11-46)$$

что полностью идентично уравнению (11-34).

Следующие теоремы касаются свойств коэффициента Риккати $\mathbf{K}(k)$.

Т о р е м а 11.1. $\mathbf{K}(k)$ есть симметрическая матрица.

Доказательство. Транспонируя обе части уравнения Риккати (11-46), получим

$$\mathbf{K}'(k) = \phi'\mathbf{K}'(k+1)\phi + \hat{\mathbf{Q}} - \\ - [\theta'\mathbf{K}(k+1)\phi + \mathbf{M}']' [\hat{\mathbf{R}} + \theta'\mathbf{K}'(k+1)\theta]^{-1} [\phi'\mathbf{K}(k+1)\theta + \mathbf{M}]' = \\ = \phi'\mathbf{K}'(k+1)\phi + \hat{\mathbf{Q}} - \\ - [\theta'\mathbf{K}(k+1)\phi + \mathbf{M}']' [\hat{\mathbf{R}} + \theta'\mathbf{K}'(k+1)\theta]^{-1} [\theta'\mathbf{K}'(k+1)\phi + \mathbf{M}'] \quad (11-47)$$

Поскольку уравнения (11-46) и (11-47) идентичны за исключением того, что $\mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{K}(k+1)$ заменены на $\mathbf{K}'(k)$ и $\mathbf{K}'(k+1)$ соответственно, они должны иметь одно и то же решение. Поэтому

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{K}'(k) \quad (11-48)$$

Т е о р е м а 11.2. Критерий качества J_N (11-16) определен для интер-

вала времени $[0, N]$, или для последовательности из N шагов, если время не является независимой переменной. Определим через $J_{N-i}[\mathbf{x}(i)]$ критерий качества на интервале от i до N , или на последних $N - i$ шагах, т. е.

$$J_{N-i}[\mathbf{x}(i)] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(N), \mathbf{S}\mathbf{x}(N) \rangle + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} [\langle \mathbf{x}(k), \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{x}(k) \rangle + \langle \mathbf{x}(k), 2\mathbf{M}\mathbf{u}(k) \rangle + \langle \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{R}}\mathbf{u}(k) \rangle] \quad (11-49)$$

Если $i = 0$,

$$J_N[\mathbf{x}(0)] = J_N \quad (11-50)$$

Если $i = N$,

$$J_0[\mathbf{x}(N)] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}(N), \mathbf{S}\mathbf{x}(N) \rangle \quad (11-51)$$

Последнее выражение представляет собой критерий качества только на последнем шаге.

Теорема утверждает, что

$$\min_{\mathbf{u}(i)} J_{N-i}[\mathbf{x}(i)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(i) \mathbf{K}(i) \mathbf{x}(i) \quad (11-52)$$

где $\mathbf{K}(i)$ — матричный коэффициент Риккати.

Доказательство этой теоремы приведены в п. 11.4 в процессе вывода уравнения Риккати на основании принципа оптимальности.

Т е о р е м а 11.3. Коэффициент Риккати $\mathbf{K}(k)$ положительно определен для $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

Доказательство. Поскольку критерий качества J_N является квадратичной формой, он неотрицателен. С учетом выражения (11.52) коэффициент $\mathbf{K}(k)$ должен быть неотрицателен.

Замечания относительно управляемости, наблюдаемости и устойчивости. Для задачи линейного цифрового регулятора с конечным интервалом времени (N — конечно) не требовалось, чтобы процесс был управляемым, наблюдаемым или даже устойчивым. Показатель качества J_N может иметь конечное значение при конечном N , даже если неуправляемое состояние неустойчиво. Цель синтеза с использованием квадратичного критерия качества состоит в перемещении системы из произвольного начального состояния $\mathbf{x}(0)$ как можно ближе к состоянию равновесия (к началу координат), но само конечное состояние $\mathbf{x}(N)$ не определено. Поэтому для конечных N устойчивость не является обязательной.

11.3. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОГО ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА (ЗАДАЧА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНТЕРВАЛОМ ВРЕМЕНИ)

Для бесконечного интервала времени, или бесконечного числа шагов $N = \infty$, критерий качества (11-16) принимает вид:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\langle \mathbf{x}(k), \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{x}(k) \rangle + \langle \mathbf{x}(k), 2\mathbf{M}\mathbf{u}(k) \rangle + \langle \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{R}}\mathbf{u}(k) \rangle] \quad (11-53)$$

В этом случае терминальная составляющая в критерии отсутствует, поскольку при бесконечном увеличении N конечное состояние $x(N)$ должно стремиться к нулю (положению равновесия), так что в терминальном ограничении больше нет необходимости.

Важное требование при синтезе линейного регулятора на бесконечном интервале времени состоит в том, что замкнутая система должна быть асимптотически устойчивой. Система, описываемая уравнением (11-15), должна удовлетворять следующим условиям:

1) пара $[\Phi, \Theta]$ должна быть либо полностью управляемой, либо стабилизируемой с помощью обратной связи по состоянию (необходимое условие);

2) пара $[\Phi, D]$ должна быть полностью наблюдаемой, где D — матрица размерностью $n \times n$, причем $DD' = Q$ (достаточное условие).

Тогда решение задачи синтеза линейного цифрового регулятора на бесконечном интервале времени может быть получено путем подстановки $k \rightarrow \infty$. При $N \rightarrow \infty$ матричный коэффициент Риккати $K(k)$ становится постоянной матрицей, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K(k) = K \quad (10-54)$$

Заменяя в уравнении (11-34) $K(k+1)$ и $K(k)$ на K , получим установившееся уравнение Риккати

$$K = \Phi'K\Phi + \hat{Q} - (\Phi'K\Theta + M)(\hat{R} + \Theta'K\Theta)^{-1}(\Theta'K\Phi + M') \quad (11-55)$$

которое часто называют *алгебраическим уравнением Риккати*.

На основании (11-31) оптимальное управление имеет вид

$$u^0(k) = -(\hat{R} + \Theta'K\Theta)^{-1}(\Theta'K\Phi + M')x^0(k) \quad (11-56)$$

В этом случае матрица обратной связи

$$G = (\hat{R} + \Theta'K\Theta)^{-1}(\Theta'K\Phi + M') \quad (11-57)$$

является постоянной.

Оптимальное значение критерия качества для $N = \infty$ непосредственно следует из выражения (11-52):

$$J_\infty^0 = \frac{1}{2} x'(0)Kx(0) \quad (11-58)$$

Условия управляемости, стабилизируемости и наблюдаемости, введенные выше в пунктах (1) и (2), требуют дальнейшего обсуждения.

Для регулятора на бесконечном интервале времени необходимо, чтобы процесс (11-15) был либо управляемым, либо стабилизируемым с помощью обратной связи по состоянию. Управляемость является более сильным требованием, поскольку неуправляемая система, тем не менее может быть стабилизируемой, если неуправляемые состояния устойчивы. Однако тот факт, что система (11-15) является управляемой или стабилизируемой, еще не означает асимптотической устойчивости замкнутой системы, спроектированной на основе теории линейного оптимального ре-

гулятора. Оказывается, что условие наблюдаемости, сформулированное в пункте (2), также должно выполняться. Поэтому управляемость и стабилизируемость являются необходимыми условиями, в то время как наблюдаемость пары $[\Phi, D]$ служит достаточным условием. Следующие пример и теоремы являются дальнейшим развитием положений, вытекающих из требований управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости.

Пример 11.1. Рассмотрим цифровой процесс первого порядка

$$x(k+1) = x(k) + u(k) \quad (11-59)$$

Очевидно, что процесс является управляемым, неустойчивым, но стабилизируемым. При стационарной обратной связи по состоянию $u(k) = -Gx(k)$ замкнутая система является асимптотически устойчивой, если $|1 - G| < 1$.

Для синтеза линейного регулятора на бесконечном интервале времени выберем следующий критерий качества:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} u^2(k) \quad (11-60)$$

В рассматриваемом случае $\Phi = 1$, $\Theta = 1$, $\hat{Q} = 0$, $M = 0$ и $\hat{R} = 1$. Оптимальное управление (11-56), которое минимизирует J , принимает простой вид:

$$u^0(k) = -\frac{K}{1+K} x^0(k) \quad (11-61)$$

где K — постоянный скалярный коэффициент Риккати, который является решением уравнения Риккати [см. уравнение (11-55)]:

$$K = K - \frac{K^2}{1+K} \quad (11-62)$$

Последнее уравнение имеет решение $K = 0$. Поэтому $u^0(k) = 0$ для всех k , и замкнутая система не является асимптотически устойчивой.

В рассматриваемом случае при синтезе линейного оптимального регулятора не была получена асимптотически устойчивая система в связи с тем, что $Q = 0$, т. е. переменная состояния не входит в критерий качества. Более того, данное состояние неустойчиво. Чтобы обеспечить контроль с помощью J за всеми состояниями, достаточно условия положительной определенности матрицы \hat{Q} . Однако в общем случае можно потребовать, чтобы пара $[\Phi, D]$ была полностью наблюдаемой, где матрица D удовлетворяет условию $DD' = \hat{Q}$. Конечно, если \hat{Q} положительно-определенная, всегда можно найти квадратную матрицу D , поэтому пара $[\Phi, D]$ всегда наблюдаема, или имеет ранг n при любой матрице Φ .

Чтобы убедиться, насколько важна наблюдаемость пары $[\Phi, D]$ при учете состояний в критерии качества J , рассмотрим только однородное переходное уравнение состояния

$$x(k) = \phi(k)x(0) \quad (11-63)$$

и выберем критерий качества в виде

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x'(k) \hat{Q} x(k) \quad (11-64)$$

Подстановка уравнения (11-63) в (11-64) дает

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x'(0) \phi'(k) \hat{Q} \phi(k) x(0) \quad (11-65)$$

Из гл. 8 известно, что состояние $x(0)$ будет наблюдаемо с помощью J , если матрица

$$\sum_{k=0}^{\infty} \phi'(k) \hat{Q} \phi(k)$$

является невырожденной или положительно-определенной. Поэтому, полагая $\mathbf{D}\mathbf{D}' = \hat{Q}$, приходим к выводу, что пара $[\Phi, \mathbf{D}]$ должна быть наблюдаемой.

Т е о р е м а 11.4. Если в критерии качества

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [x'(k) \mathbf{Q} x(k) + u'(k) \mathbf{R} u(k)] \quad (11-66)$$

обе матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{R} положительно-определенные, то и матрица \mathbf{K} положительно-определенная.

Доказательство. Поскольку J – квадратичная форма, при положительно-определенных \mathbf{Q} и \mathbf{R} критерий качества J также положителен. Так как J и \mathbf{K} связаны соотношением (11-58), то и \mathbf{K} , в свою очередь, положительно-определенная.

Т е о р е м а 11.5. Если критерий качества цифровой системы (11-15) имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [x'(k) \mathbf{Q} x(k) + u'(k) \mathbf{R} u(k)] \quad (11-67)$$

где \mathbf{Q} и \mathbf{R} одновременно положительно-определенные, то оптимальное управление, минимизирующее J ,

$$u^o(k) = -(\mathbf{R} + \theta' \mathbf{K} \theta)^{-1} \theta' \mathbf{K} \phi x^o(k) \quad (11-68)$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы

$$x^o(k+1) = [\phi - \theta(\mathbf{R} + \theta' \mathbf{K} \theta)^{-1} \theta' \mathbf{K} \phi] x^o(k) \quad (11-69)$$

Доказательство. Как следует из теоремы 11.4, если обе матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{R} положительно-определенные, \mathbf{K} также положительно-определенная. Рассмотрим положительно-определенную функцию Ляпунова

$$V[x(k)] = \frac{1}{2} x'(k) \mathbf{K} x(k) \quad (11-70)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta V[x(k)] &= V[x(k+1)] - V[x(k)] = \\ &= \frac{1}{2} x'(k+1) \mathbf{K} x(k+1) - \frac{1}{2} x'(k) \mathbf{K} x(k) \end{aligned} \quad (11-71)$$

Подстановка уравнения (11-69) в (11-71) дает

$$\begin{aligned} \Delta V[x(k)] &= \frac{1}{2} x'(k) [\phi' \mathbf{K} \phi - \phi' \mathbf{K} \theta (\mathbf{R} + \theta' \mathbf{K} \theta)^{-1} \theta' \mathbf{K} \phi + \\ &+ \phi' \mathbf{K} \theta (\mathbf{R} + \theta' \mathbf{K} \theta)^{-1} \theta' \mathbf{K} \theta (\mathbf{R} + \theta' \mathbf{K} \theta)^{-1} \theta' \mathbf{K} \phi - \\ &- \phi' \mathbf{K} \theta (\mathbf{R} + \theta' \mathbf{K} \theta)^{-1} \theta' \mathbf{K} \phi - \mathbf{K}] x(k) \end{aligned} \quad (11-72)$$

Для рассматриваемого случая уравнение Риккати имеет вид

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q} + \phi' \mathbf{K} \phi - \phi' \mathbf{K} \theta (\mathbf{R} + \theta' \mathbf{K} \theta)^{-1} \theta' \mathbf{K} \phi \quad (11-73)$$

Используя уравнение (11-73), упростим соотношение (11-72):

$$\Delta V[\mathbf{x}(k)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(k) \left[-\mathbf{Q} - \phi' \mathbf{K} \theta (\mathbf{R} + \theta' \mathbf{K} \theta)^{-1} \theta' \mathbf{K} [\phi - \theta (\mathbf{R} + \theta' \mathbf{K} \theta)^{-1} \theta' \mathbf{K} \phi] \right] \mathbf{x}(k) \quad (11-74)$$

Поскольку обе матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{K} положительно-определенные выражение внутри скобок в правой части соотношения (11-74) отрицательно-определенное. Поэтому $\Delta V[\mathbf{x}(k)]$ — отрицательная величина, и в соответствии с теоремой устойчивости Ляпунова система (11-69) асимптотически устойчива.

11.4. ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Синтез линейного оптимального цифрового регулятора, рассмотренный в предыдущих параграфах, может проводиться на основе принципа оптимальности. Процедура синтеза, в которой использован принцип оптимальности, называется также методом динамического программирования. Сформулируем вначале принцип оптимальности.

Принцип оптимальности. Оптимальная стратегия управления обладает тем свойством, что каковы бы ни были начальное состояние и управление на начальных шагах, дальнейшее управление должно быть оптимально по отношению к состоянию, являющемуся следствием предшествующего управления. Другими словами, любая стратегия управления, которая оптимальна на интервале $[i, N]$, обязательно является оптимальной на интервале $[i+1, N]$ для $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Сформулируем еще раз задачу синтеза линейного оптимального цифрового регулятора.

Найти оптимальное управление $\mathbf{u}^0(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, такое, чтобы

$$J_N = G[\mathbf{x}(N)] + \sum_{k=0}^{N-1} F_k[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] = \text{минимум}, \quad (11-75)$$

где

$$G[\mathbf{x}(N)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(N) \hat{\mathbf{S}} \mathbf{x}(N) \quad (11-76)$$

$$F_k[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(k) \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}'(k) \mathbf{M} \mathbf{u}(k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}'(k) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{u}(k) \quad (11-77)$$

при условии ограничения $\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Theta \mathbf{u}(k)$ и при заданном $\mathbf{x}(0)$.

Обозначим через $J_{N-i}[\mathbf{x}(i)]$ критерий качества на интервале $[i, N]$, т. е. на последних $N-i$ интервалах, или шагах. Тогда

$$J_{N-i}[\mathbf{x}(i)] = G[\mathbf{x}(N)] + \sum_{k=i}^{N-1} F_k[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (11-78)$$

Пусть минимальное значение $J_{N-i}[\mathbf{x}(i)]$ описывается выражением

$$f_{N-i}[\mathbf{x}(i)] = \min_{\mathbf{u}(i)} J_{N-i}[\mathbf{x}(i)] \quad (11-79)$$

При $i = N$ последнее выражение представляет собой критерий качества, или выигрыш на последнем (нулевом) шаге, который есть не что иное, как терминальная составляющая. Поэтому

$$f_0[\mathbf{x}(N)] = G[\mathbf{x}(N)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) \quad (11-80)$$

При $i = N - 1$ получаем одношаговый процесс, или процесс с одним интервалом управления, который совпадает с последним шагом. Тогда оптимальное значение критерия качества

$$\begin{aligned} f_1[\mathbf{x}(N-1)] &= \min_{\mathbf{u}(N-1)} J_1[\mathbf{x}(N-1)] = \\ &= \min_{\mathbf{u}(N-1)} [G[\mathbf{x}(N)] + F_{N-1}[\mathbf{x}(N-1), \mathbf{u}(N-1)]] \end{aligned} \quad (11-81)$$

Подставляя соотношение (11-77) и соотношение

$$G[\mathbf{x}(N)] = \frac{1}{2} [\phi \mathbf{x}(N-1) + \theta \mathbf{u}(N-1)]' \mathbf{S} [\phi \mathbf{x}(N-1) + \theta \mathbf{u}(N-1)] \quad (11-82)$$

в (11-81) и упрощая, получим

$$\begin{aligned} f_1[\mathbf{x}(N-1)] &= \min_{\mathbf{u}(N-1)} \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}'(N-1) (\hat{\mathbf{Q}} + \phi' \mathbf{S} \phi) \mathbf{x}(N-1) + \right. \\ &+ \mathbf{x}'(N-1) (\mathbf{M} + \frac{1}{2} \phi' \mathbf{S} \theta) \mathbf{u}(N-1) + \frac{1}{2} \mathbf{u}'(N-1) \theta' \mathbf{S} \phi \mathbf{x}(N-1) + \\ &\left. + \frac{1}{2} \mathbf{u}'(N-1) (\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{S} \theta) \mathbf{u}(N-1) \right] = \min_{\mathbf{u}(N-1)} J_1[\mathbf{x}(N-1)] \end{aligned} \quad (11-83)$$

Запишем условие минимума $J_1[\mathbf{x}(N-1)]$:

$$\frac{\partial J_1[\mathbf{x}(N-1)]}{\partial \mathbf{u}(N-1)} = 0 \quad (11-84)$$

В результате получим

$$[(\mathbf{M} + \frac{1}{2} \phi' \mathbf{S} \theta)' + \frac{1}{2} \theta' \mathbf{S} \phi] \mathbf{x}^0(N-1) + (\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{S} \theta) \mathbf{u}^0(N-1) = 0 \quad (11-85)$$

Таким образом, оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{u}^0(N-1) = -(\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{S} \theta)^{-1} (\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{S} \phi) \mathbf{x}^0(N-1) \quad (11-86)$$

Заметим, что полученный результат совпадает с выражением (11-31) при замене $k = N - 1$. Подставив теперь выражение (11-86) в (11-83) для $\mathbf{x}(N-1)$, после упрощений найдем

$$\begin{aligned} f_1[\mathbf{x}(N-1)] &= \frac{1}{2} \mathbf{x}'(N-1) [\hat{\mathbf{Q}} + \phi' \mathbf{S} \phi - \\ &- (\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{S} \phi)' (\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{S} \theta)^{-1} (\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{S} \phi)] \mathbf{x}(N-1) \end{aligned} \quad (11-87)$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{K}(N) = \mathbf{S} \quad (11-88)$$

$$\mathbf{K}(N-1) = \hat{\mathbf{Q}} + \phi' \mathbf{S} \phi - (\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{S} \phi)' (\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{S} \theta)^{-1} (\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{S} \phi) \quad (11-89)$$

Заметим, что соотношение (11-89) совпадает с уравнением Риккати (11-34) при $k = N-1$.

Оптимальные значения выигрыша в соответствии с выражениями (11-80) и (11-81) принимают вид

$$f_0[\mathbf{x}(N)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(N) \mathbf{K}(N) \mathbf{x}(N) \quad (11-90)$$

$$f_1[\mathbf{x}(N-1)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(N-1) \mathbf{K}(N-1) \mathbf{x}(N-1) \quad (11-91)$$

Продолжая этот процесс, положим $i = N-2$, т. е. рассмотрим задачу оптимизации, которая состоит из двух (последних) шагов. Запишем оптимальное значение критерия качества для двухшагового процесса

$$f_2[\mathbf{x}(N-2)] = \min_{\substack{\mathbf{u}(N-2) \\ \mathbf{u}(N-1)}} J_2[\mathbf{x}(N-2)] = \min_{\substack{\mathbf{u}(N-2) \\ \mathbf{u}(N-1)}} \left[F_{N-2}[\mathbf{x}(N-2), \mathbf{u}(N-2)] + F_{N-1}[\mathbf{x}(N-1), \mathbf{u}(N-1)] + G[\mathbf{x}(N)] \right] \quad (11-92)$$

В соответствии с принципом оптимальности, для того чтобы двухшаговый процесс был оптимальным независимо от стратегии управления на первом шаге, последний шаг должен быть оптимальным сам по себе. Поэтому запишем соотношение (11-92) в виде

$$f_2[\mathbf{x}(N-2)] = \min_{\mathbf{u}(N-2)} \left[F_{N-2}[\mathbf{x}(N-2), \mathbf{u}(N-2)] + f_1[\mathbf{x}(N-1)] \right] \quad (11-93)$$

где $f_1[\mathbf{x}(N-1)]$ — оптимальный выигрыш на последнем шаге, описываемый выражением (11-91). Подставляя соотношения

$$F_{N-2}[\mathbf{x}(N-2), \mathbf{u}(N-2)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(N-2) \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x}(N-2) + \mathbf{x}'(N-2) \mathbf{M} \mathbf{u}(N-2) + \frac{1}{2} \mathbf{u}'(N-2) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{u}(N-2) \quad (11-94)$$

$$f_1[\mathbf{x}(N-1)] = \frac{1}{2} [\phi \mathbf{x}(N-2) + \theta \mathbf{u}(N-2)]' \mathbf{K}(N-1) [\phi \mathbf{x}(N-2) + \theta \mathbf{u}(N-2)] \quad (11-95)$$

в выражение (11-93), переобозначая члены и учитывая

$$\frac{\partial J_2[\mathbf{x}(N-2)]}{\partial \mathbf{u}(N-2)} = 0 \quad (11-96)$$

можно показать, что оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{u}^0(N-2) = -[\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{K}(N-1) \theta]^{-1} [\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{K}(N-1) \phi] \mathbf{x}^0(N-2); \quad (11-97)$$

$$f_2[\mathbf{x}(N-2)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(N-2) \left[\hat{\mathbf{Q}} + \phi' \mathbf{K}(N-1) \phi - [\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{K}(N-1) \phi]' [\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{K}(N-1) \theta]^{-1} [\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{K}(N-1) \phi] \right] \mathbf{x}(N-2) \quad (11-98)$$

С учетом

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(N-2) &= \hat{\mathbf{Q}} + \phi' \mathbf{K}(N-1) \phi - \\ &- [\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{K}(N-1) \phi]' [\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{K}(N-1) \theta]^{-1} [\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{K}(N-1) \phi] \end{aligned} \quad (11-99)$$

запишем соотношение (11-98) в компактном виде

$$\mathbf{f}_2[\mathbf{x}(N-2)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(N-2) \mathbf{K}(N-2) \mathbf{x}(N-2) \quad (11-100)$$

Продолжая процесс, методом индукции можно показать, что в общем случае

$$\mathbf{f}_{N-i}[\mathbf{x}(i)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(i) \mathbf{K}(i) \mathbf{x}(i) \quad (11-101)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(i) &= \hat{\mathbf{Q}} + \phi' \mathbf{K}(i+1) \phi - \\ &- [\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{K}(i+1) \phi]' [\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{K}(i+1) \theta]^{-1} [\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{K}(i+1) \phi] \end{aligned} \quad (11-102)$$

Оптимальное управление описывается соотношением

$$\mathbf{u}^0(i) = -[\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{K}(i+1) \theta]^{-1} [\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{K}(i+1) \phi] \mathbf{x}^0(i) \quad (11-103)$$

Таким образом, мы вывели уравнение Риккати на основании принципа оптимальности. Данный метод решения называется также динамическим программированием.

При использовании этого метода не требуется, чтобы матрица $\hat{\mathbf{R}}$ была положительно-определенная, поскольку отсутствует вычисление $\hat{\mathbf{R}}^{-1}$. Более того, $\hat{\mathbf{R}}$ может быть нулевой матрицей. Однако матрица $\hat{\mathbf{R}} + \Theta' \mathbf{K}(i+1) \Theta$ должна иметь обратную матрицу.

Для бесконечного интервала времени или бесконечного числа шагов $N = \infty$ по аналогии с результатами, полученными в предыдущих параграфах, $\mathbf{K}(i)$ заменим \mathbf{K} , и соотношения (11-101) – (11-103) принимают вид, совпадающий с соотношениями (11-58), (11-55) и (11-56) соответственно.

11. 5. РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Количество опубликованных работ, посвященных решению и свойствам уравнения Риккати, может, по-видимому, составить целую книгу. В общем случае решить алгебраическое уравнение Риккати (11-55) труднее, чем разностное уравнение (11-102).

Разностное уравнение Риккати, как правило, решают с помощью одного из следующих методов: численных, рекуррентного и метода собственных значений и собственных векторов.

Численные методы подразумевают итеративное решение нелинейного разностного уравнения Риккати. Рекуррентный метод и метод собственных значений и собственных векторов рассмотрены ниже.

Рекуррентный метод решения уравнения Риккати. Метод динамического программирования, описанный в п. 11.4, в общем виде представляет собой метод рекуррентного решения задач оптимального управления.

Рассмотрим матрицу коэффициентов усиления обратной связи линейного оптимального цифрового регулятора

$$\mathbf{G}(i) = [\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{K}(i+1) \theta]^{-1} [\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{K}(i+1) \phi] \quad (11-104)$$

Запишем оптимальное управление (11-103) в виде

$$\mathbf{u}^{\circ}(i) = -\mathbf{G}(i) \mathbf{x}^{\circ}(i) \quad (11-105)$$

Аналогично упростим уравнение Риккати (11-102)

$$\mathbf{K}(i) = \hat{\mathbf{Q}} + \phi' \mathbf{K}(i+1) \phi - [\mathbf{M}' + \theta' \mathbf{K}(i+1) \phi]' \mathbf{G}(i) \quad (11-106)$$

Уравнения (11-104) и (11-106) рекуррентно решаются в обратном направлении, начиная с граничного условия $\mathbf{K}(N) = \mathbf{S}$.

В качестве альтернативы можно использовать уравнение Риккати вида (11-30). С учетом

$$\mathbf{H}(k+1) = \mathbf{K}(k+1) [\mathbf{I} + \theta \hat{\mathbf{R}}^{-1} \theta' \mathbf{K}(k+1)]^{-1} \quad (11-107)$$

уравнение (11-30) можно записать в виде

$$\mathbf{K}(k) = (\phi' - \mathbf{M} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \theta') \mathbf{H}(k+1) (\phi - \theta \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{M}') + \hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{M} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{M}' \quad (11-108)$$

Как и ранее, эти два уравнения можно рекуррентно решать в обратном направлении, начиная с граничного условия $\mathbf{K}(N) = \mathbf{S}$.

Уравнения (11-107) и (11-108) обладают тем положительным свойством, что член $\mathbf{K}(k+1)$ содержится только в выражении для $\mathbf{H}(k+1)$. Однако преимущество рекуррентного метода, основанного на использовании уравнений (11-104) и (11-106), состоит в том, что матрица обратной связи определяется непосредственно из уравнения (11-104).

Пример 11.2. Предположим, что цифровой процесс первого порядка описывается уравнением

$$x(k+1) = x(k) + u(k) \quad (11-109)$$

причем $x(0) = x_0$. Цель синтеза состоит в определении такого оптимального управления $u^{\circ}(k)$, $k=0, 1, 2, \dots, 9$, которое минимизирует следующий критерий качества:

$$J_{10} = \frac{1}{2} [10x^2(10)] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 [x^2(k) + u^2(k)] \quad (11-110)$$

В рассматриваемой задаче $S=10$, $\hat{Q}=1$, $\hat{R}=1$, $M=0$ и $\Phi=\Theta=1$. Уравнение Риккати получается при подстановке этих параметров в соотношение (11-106):

$$\mathbf{K}(i) = 1 + \mathbf{K}(i+1) - \mathbf{K}(i+1) \mathbf{G}(i) \quad (11-111)$$

где

$$\mathbf{G}(i) = \frac{\mathbf{K}(i+1)}{1 + \mathbf{K}(i+1)} \quad (11-112)$$

Оптимальное управление имеет вид

$$u^{\circ}(i) = -\mathbf{G}(i) x^{\circ}(i) \quad (11-113)$$

Уравнения (11-111) и (11-112) решаются рекуррентно, начиная с граничного условия $\mathbf{K}(10) = S=10$. Результаты представлены в табл. 11.1.

i	$K(i)$	$G(i)$
0	1,6180	0,6180
1	1,6180	0,6180
2	1,6180	0,6180
3	1,6180	0,6180
4	1,6180	0,6180
5	1,6182	0,6182
6	1,6188	0,6188
7	1,6236	0,6236
8	1,6562	0,6562
9	1,9091	0,9091
10	10	0

Подставляя оптимальное управление в уравнение (11-104), можно показать, что оптимальная траектория $x(k)$ описывается соотношением

$$x^{\circ}(k) = \prod_{i=0}^{k-1} [1 - G(i)] x_0 \quad (11-114)$$

при $k = 0, 1, \dots, 10$. Для любого значения x_0 отличного от нуля, $x^{\circ}(k)$ быстро сходится к нулю при возрастании k .

Пример 11.3. Цифровой процесс второго порядка описывается уравнением состояния

$$x(k+1) = \phi x(k) + \theta u(k) \quad (11-115)$$

где

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11-116)$$

Для заданного $x(0) = [1 \ 1]'$ найти оптимальное управление $u(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 7$, которое минимизирует критерий качества

$$J_8 = \sum_{k=0}^7 [x_1^2(k) + u^2(k)] \quad (11-117)$$

В этой задаче $M = 0$, $\hat{R} = 2$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11-118)$$

При подстановке этих параметров в соотношение (11-106) получим уравнение Риккати

$$K(i) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} K(i+1) \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} G(i) \right] \quad (11-119)$$

Оптимальное управление имеет вид

$$u^{\circ}(i) = -G(i)x^{\circ}(i) \quad (11-120)$$

где на основании выражения (11-104)

$$G(i) = \left[2 + [0 \quad 1]K(i+1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} [0 \quad 1]K(i+1) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11-121)$$

Начиная с граничного условия

$$K(8) = S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11-122)$$

рекуррентное решение уравнений (11-119) и (11-121) дает:

$$\begin{aligned} K(7) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & G(7) &= [0 \quad 0] \\ K(6) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & G(6) &= [0 \quad 0] \\ K(5) &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & G(5) &= [-0,5 \quad 0,5] \\ K(4) &= \begin{bmatrix} 3,2 & -0,8 \\ -0,8 & 3,2 \end{bmatrix} & G(4) &= [-0,6 \quad 0,4] \\ K(3) &= \begin{bmatrix} 3,23 & -0,922 \\ -0,922 & 3,69 \end{bmatrix} & G(3) &= [-0,615 \quad 0,462] \\ K(2) &= \begin{bmatrix} 3,297 & -0,973 \\ -0,973 & 3,729 \end{bmatrix} & G(2) &= [-0,651 \quad 0,481] \\ K(1) &= \begin{bmatrix} 3,301 & -0,962 \\ -0,962 & 3,75 \end{bmatrix} & G(1) &= [-0,652 \quad 0,485] \\ K(0) &= \begin{bmatrix} 3,305 & -0,97 \\ -0,97 & 3,777 \end{bmatrix} & G(0) &= [-0,6538 \quad 0,486] \end{aligned}$$

Оптимальное управление и оптимальные траектории вычисляются путем подстановки коэффициентов усиления обратной связи в уравнения (11-120) и (11-115). Результаты представлены в табл. 11.2.

Для больших значений N можно показать, что коэффициент Риккати стремится к установившемуся значению

$$K = \begin{bmatrix} 3,308 & -0,972 \\ -0,972 & 3,780 \end{bmatrix} \quad (11-123)$$

а постоянная матрица коэффициентов усиления обратной связи имеет вид

$$G = [-0,654 \quad 0,486]$$

При $N=8$ решения рассматриваемой задачи управления на конечном интервале времени уже достигли этих значений. Однако в общем случае с помощью рекуррентного метода даже при использовании достаточно больших значений N можно только приближаться к установившимся решениям. В рассматриваемом случае, поскольку пара

i	$u^{\circ}(i)$	$x_1^{\circ}(i)$	$x_2^{\circ}(i)$
0	0,1678	1	1
1	0,5708	1	0,1678
2	0,235	0,1678	-0,2614
3	-0,071	-0,2614	-0,1942
4	-0,115	-0,1942	-0,0038
5	0,0358	-0,0038	0,0754
6	0	0,0754	0,115
7	0	0,115	0,0396
8	0	0,0396	-0,0754

$[\Phi, \Theta]$ полностью управляема и можно найти такую матрицу D размерностью 2×2 , что $DD' = Q$, и пара $[\Phi, D]$ является наблюдаемой, замкнутая система при $N = \infty$ будет асимптотически устойчивой.

Метод собственных значений и собственных векторов. Нелинейное разностное уравнение Риккати (11-102) можно решить с использованием метода собственных значений и собственных векторов. Метод дает замкнутую форму решения для коэффициента Риккати, а решение алгебраического уравнения Риккати может быть получено с помощью предельного перехода.

Перепишем канонические уравнения состояния (11-23) и (11-24) в следующем виде:

$$\dot{x}^{\circ}(k+1) = \Omega x^{\circ}(k) - \theta \hat{R}^{-1} \theta' p^{\circ}(k+1) \quad (11-124)$$

$$p^{\circ}(k) = \Gamma x^{\circ}(k) + \Omega' p^{\circ}(k+1) \quad (11-125)$$

где

$$\Omega = \phi - \theta \hat{R}^{-1} M' \quad (11-126)$$

$$\Gamma = \hat{Q} - M \hat{R}^{-1} M' \quad (11-127)$$

Определяя $x^{\circ}(k)$ из уравнения (11-124) и записывая канонические уравнения состояния в векторно-матричной форме, получим

$$\begin{bmatrix} x^{\circ}(k) \\ p^{\circ}(k) \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x^{\circ}(k+1) \\ p^{\circ}(k+1) \end{bmatrix} \quad (11-128)$$

где

$$V = \begin{bmatrix} \Omega^{-1} & \Omega^{-1} \theta \hat{R}^{-1} \theta' \\ \Gamma \Omega^{-1} & \Omega' + \Gamma \Omega^{-1} \theta \hat{R}^{-1} \theta' \end{bmatrix} \quad (11-129)$$

Уравнение (11-128) представляет собой $2n$ разностных уравнений в обратном времени с граничными условиями $x(0) = x_0$ и $p(N) = Sx(N)$.

Важное свойство матрицы V состоит в том, что величины, обратные каждому собственному значению, также являются собственными значениями. Это можно показать на примере собственного значения λ матрицы V и соответствующего собственного вектора h . Воспользуемся определением собственного вектора:

$$Vh = \lambda h \quad (11-130)$$

Разделим h на части так, чтобы последнее уравнение приняло вид

$$\begin{bmatrix} \Omega^{-1} & \Omega^{-1}\theta\hat{R}^{-1}\theta' \\ \Gamma\Omega^{-1} & \Omega' + \Gamma\Omega^{-1}\theta\hat{R}^{-1}\theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (11-131)$$

Запишем определитель матрицы V

$$\begin{aligned} \Delta &= |\Omega^{-1}(\Omega' + \Gamma\Omega^{-1}\theta\hat{R}^{-1}\theta') - \Omega^{-1}\Gamma\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1}\theta\hat{R}^{-1}\theta'| = \\ &= |\Omega^{-1}\Omega' + \Omega^{-1}\Gamma\Omega^{-1}\theta\hat{R}^{-1}\theta' - \Omega^{-1}\Gamma\Omega^{-1}\theta\hat{R}^{-1}\theta'| = \\ &= |\Omega^{-1}\Omega'| = |\Omega^{-1}||\Omega'| = 1 \end{aligned} \quad (11-132)$$

Таким образом, определитель V равен единице.

Вычисляя матрицу, обратную V , и затем транспонируя ее, получим следующий результат:

$$(V^{-1})' \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix} \quad (11-133)$$

Смысл последнего уравнения состоит в том, что λ является собственным значением и матрицы $(V^{-1})'$, и матрицы V^{-1} . Поэтому $1/\lambda$ есть собственное значение матрицы V . Это также означает, что n собственных значений V расположены внутри единичной окружности и n — вне ее. Введем невырожденное преобразование

$$\begin{bmatrix} x^o(k) \\ p^o(k) \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} q(k) \\ r(k) \end{bmatrix} \quad (11-134)$$

где W имеет форму

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \quad (11-135)$$

и обладает тем свойством, что

$$W^{-1}VW = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (11-136)$$

При различных собственных значениях Λ имеет вид диагональной матрицы с элементами λ_i по главной диагонали, где λ_i — собственные значения матрицы V , которые расположены вне единичной окружности. При комплексно сопряженных собственных значениях V матрица Λ представляется

в модальной форме. Пусть, например, λ_1 и λ_2 — действительные собственные значения матрицы V , которые расположены вне единичной окружности, тогда запишем соотношение (11-136) в виде

$$W^{-1}VW = \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda & 0 \\ \hline 0 & \Lambda^{-1} \end{array} \right] \quad (11-137)$$

Если матрица V имеет комплексно-сопряженные собственные значения $\sigma_1 + j\omega_1$ и $\sigma_1 - j\omega_1$, расположенные вне единичной окружности, тогда соотношение (11-136) принимает вид

$$W^{-1}VW = \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma_1 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sigma_2 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & \sigma_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda & 0 \\ \hline 0 & \Lambda^{-1} \end{array} \right] \quad (11-138)$$

где

$$\sigma_2 - j\omega_2 = \frac{1}{\sigma_1 + j\omega_1}. \quad (11-139)$$

Конечно, если матрица V имеет и действительные, и комплексные собственные значения, следует использовать комбинацию соотношений (11-137) и (11-138).

Записывая теперь выражение (11-134) в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ \mathbf{r}(k) \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\circ(k) \\ \mathbf{p}^\circ(k) \end{bmatrix}$$

и используя соотношение (11-128), получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ \mathbf{r}(k) \end{bmatrix} = W^{-1}VW \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k+1) \\ \mathbf{r}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k+1) \\ \mathbf{r}(k+1) \end{bmatrix} \quad (11-140)$$

Рекуррентное решение последнего уравнения в обратном времени с граничным условием $[\mathbf{q}(N) \mathbf{r}(N)]'$ дает

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}(N-k) \\ \mathbf{r}(N-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^k & 0 \\ 0 & \Lambda^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(N) \\ \mathbf{r}(N) \end{bmatrix} \quad (11-141)$$

Приведем выражение (11-141) к виду

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}(N) \\ \mathbf{r}(N-k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^{-k} & 0 \\ 0 & \Lambda^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(N-k) \\ \mathbf{r}(N) \end{bmatrix} \quad (11-142)$$

Пусть $r(N)$ и $q(N)$ связаны соотношением

$$\mathbf{r}(N) = \mathbf{U}\mathbf{q}(N) \quad (11-143)$$

где \mathbf{U} — матрица размерностью $n \times n$. Подставляя соотношение (11-143) в выражение (11-142) и (11-134), для $k = N$ получим

$$\mathbf{U} = -(\mathbf{W}_{22} - \mathbf{S}\mathbf{W}_{12})^{-1}(\mathbf{W}_{21} - \mathbf{S}\mathbf{W}_{11}) \quad (11-144)$$

$$\mathbf{r}(N-k) = \Lambda^{-k}\mathbf{U}\Lambda^{-k}\mathbf{q}(N-k) \quad (11-145)$$

Обозначая

$$\mathbf{H}(k) = \Lambda^{-k}\mathbf{U}\Lambda^{-k} \quad (11-146)$$

запишем выражение (11-145) в виде

$$\mathbf{r}(N-k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{q}(N-k) \quad (11-147)$$

Подставляя теперь выражение (11-147) в (11-134), можно показать, что справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{x}(N-k) = [\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{12}\mathbf{H}(k)]\mathbf{q}(N-k) \quad (11-148)$$

$$\mathbf{p}(N-k) = \mathbf{K}(N-k)\mathbf{x}(N-k) = [\mathbf{W}_{21} + \mathbf{W}_{22}\mathbf{H}(k)]\mathbf{q}(N-k) \quad (11-149)$$

Сравнивая два последних соотношения, запишем коэффициент Риккати следующим образом:

$$\mathbf{K}(N-k) = [\mathbf{W}_{21} + \mathbf{W}_{22}\mathbf{H}(k)][\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{12}\mathbf{H}(k)]^{-1} \quad (11-150)$$

Хотя выражение (11-150) дает решение разностного уравнения Риккати в замкнутой форме, в общем случае из-за трудности вычисления матрицы \mathbf{W} и собственных значений \mathbf{V} метод собственных значений и собственных векторов не имеет очевидных преимуществ перед рекуррентным методом. Однако рассматриваемый метод приводит к непосредственному решению алгебраического уравнения Риккати для задачи с бесконечным интервалом времени.

Вводя замену переменных $i = N-k$, вместо $\mathbf{K}(N-k)$ получим $\mathbf{K}(i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, т. е. коэффициент Риккати, использованный в предыдущих параграфах. Запишем постоянный коэффициент Риккати в виде

$$\mathbf{K} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{K}(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{K}(N-k) \quad (11-151)$$

Поскольку

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{H}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda^{-k}\mathbf{U}\Lambda^{-k} = 0 \quad (11-152)$$

из выражения (11-150) получаем

$$\mathbf{K} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{K}(N-k) = \mathbf{W}_{21}\mathbf{W}_{11}^{-1} \quad (11-153)$$

Пример 11.4. Рассмотрим снова систему первого порядка из примера 11.2. С помощью метода собственных значений и собственных векторов необходимо решить задачу с конечным интервалом времени, кроме того, задачу для $N=\infty$.

Подставляя параметры системы в выражение (11-129), получим

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (11-154)$$

Собственные значения матрицы V равны: $\lambda_1 = 2,618$ и $\lambda_2 = 1/\lambda_1 = 0,382$. Запишем матрицу

$$W^{-1}VW = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,618 & 0 \\ 0 & 0,382 \end{bmatrix} \quad (11-155)$$

Поскольку матрица W обеспечивает преобразование подобия, столбцами W являются собственные векторы V . Поэтому

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,618 & -0,618 \end{bmatrix} \quad (11-156)$$

Из соотношения (11-144) следует

$$U = -(-0,618 - 10)^{-1}(1,618 - 10) = -0,789 \quad (11-157)$$

а выражение (11-146) дает

$$H(k) = \Lambda^{-k} U \Lambda^{-k} = -0,789(0,382)^{2k} \quad (11-158)$$

Коэффициент Риккати для задачи с конечным интервалом времени

$$K(N-k) = [1,618 - 0,618(-0,789)(0,382)^{2k}] [1 - 0,789(0,382)^{2k}]^{-1} \quad (11-159)$$

или

$$K(i) = [1,618 + 0,488(0,382)^{2(N-i)}] [1 - 0,789(0,382)^{2(N-i)}]^{-1} \quad (11-160)$$

Легко показать, что этот результат совпадает с тем, который был получен в примере 11.2 для $N=10$.

Для $N = \infty$ постоянный коэффициент Риккати описывается выражением (11-153):

$$K = W_{21} W_{11}^{-1} = 1,618 \quad (11-161)$$

Пример 11.5. Полезно рассмотреть возможности метода собственных значений и собственных векторов применительно к системам более высокого порядка. Вернемся к системе второго порядка из примера 11.3.

Запишем матрицу

$$V = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad (11-162)$$

Собственные значения матрицы V равны: $\lambda_1 = \sigma_1 \pm j\omega_1 = 0,743 \pm j1,529$ и $\lambda_2 = 1/\lambda_1 = \sigma_2 \pm j\omega_2 = 0,257 \pm j0,529$. Эти собственные значения образуют комплексно-сопряженные пары, одна из которых расположена вне единичной окружности, а другая – внутри нее. Для рассматриваемого случая имеем

$$W^{-1}VW = \left| \begin{array}{c|c} \Lambda & 0 \\ \hline 0 & \Lambda^{-1} \end{array} \right| = \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma_1 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sigma_2 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & \sigma_2 \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 0,743 & 1,529 & 0 & 0 \\ -1,529 & 0,743 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0,257 & -0,529 \\ 0 & 0 & 0,529 & 0,257 \end{array} \right] \quad (11-163)$$

Известно, что при данной матрице коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 + j\omega_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 - j\omega_1 \end{bmatrix} \quad (11-164)$$

собственные векторы которой обозначены через $\alpha_1 + j\beta_1$ и $\alpha_1 - j\beta_1$, собственные векторы модальной формы

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{bmatrix} \quad (11-165)$$

равны α_1 и β_1 . Для матрицы модальной формы (11-138) находим матрицу W с использованием действительных и мнимых частей собственных векторов, соответствующих собственным значениям матрицы $W^{-1}VW$. Отсюда

$$W = [\alpha_1 \mid \beta_1 \mid \alpha_2 \mid \beta_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0,318 & -0,053 & 0 & -0,5 \\ 0,053 & -0,182 & -0,765 & -0,371 \\ \hline 1 & 0 & -0,743 & 0,529 \\ -0,107 & -0,636 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (11-166)$$

где $\alpha_1 + j\beta_1$ и $\alpha_2 + j\beta_2$ — собственные векторы $\sigma_1 + j\omega_1$ и $\sigma_2 + j\omega_2$ соответственно.

На основании выражения (11-144) получим

$$U = \begin{bmatrix} 0,108 & 0,635 \\ -0,174 & 0,894 \end{bmatrix} \quad (11-167)$$

а $H(k)$ опишем соотношением (11-146). Тогда нестационарный коэффициент Риккати $K(N-k)$ определяется на основании соотношения (11-150). Очевидно, что процесс решения требует громоздких операций с матрицами и даже для системы второго порядка необходима ЭВМ.

Решение задачи с бесконечным интервалом времени легко находится из выражения (11-153). Поэтому для $N=\infty$ имеем

$$K = W_{21}W_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,107 & -0,636 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,318 & -0,053 \\ 0,053 & -0,182 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3,308 & -0,972 \\ -0,972 & 3,780 \end{bmatrix} \quad (11-168)$$

что совпадает с результатом, полученным рекуррентным методом [см. уравнение (11-123)]. Подчеркнем еще раз, что замкнутая система при $N = \infty$ будет асимптотически устойчивой.

11.6. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПЕРИОДУ КВАНТОВАНИЯ

Специфические свойства дискретного уравнения Риккати требуют анализа чувствительности системы с оптимальным цифровым регулятором по отношению к периоду квантования T , если модель системы описывается уравнениями (11-1) и (11-2). Знание чувствительности по отношению к периоду квантования дает возможность приблизительно определить постоянный коэффициент Риккати K для задачи линейного регулятора на бесконечном интервале времени по известному коэффициенту для непрерывной системы, т. е. при $T = 0$. В итоге оказывается возможным приблизительно вычислять матрицу коэффициентов усиления обратной связи G оптимального линейного цифрового регулятора через матрицу обратной связи непрерывного оптимального линейного регулятора. Заметим, что исследование чувствительности к периоду квантования применительно к синтезу оптимального линейного цифрового регулятора позволило решить задачу переоборудования систем управления на базе ЭВМ, описанную в гл. 5. Поэтому в данном параграфе мы вновь вернемся к этой задаче, но с других позиций.

Обратимся к постановке задачи синтеза линейного цифрового регулятора, содержащейся в уравнениях (11-1) — (11-3). В п. 11.2 было показано, что оптимальный цифровой закон управления имеет вид [см. уравнение (11-31)]

$$\begin{aligned} u^0(k) &= -[\hat{R} + \theta'K(k+1)\theta]^{-1}[\theta'K(k+1)\phi + M']x^0(k) = \\ &= -G(k)x^0(k) \end{aligned} \quad (11-169)$$

где $K(k)$ — положительно-полуопределенное решение уравнения Риккати [см. уравнение (11-34)]:

$$\begin{aligned} K(k) &= \phi'K(k+1)\phi + \hat{Q} - \\ &- [\theta'K(k+1)\phi + M']'[\hat{R} + \theta'K(k+1)\theta]^{-1}[\theta'K(k+1)\phi + M'] \end{aligned} \quad (11-170)$$

с граничным условием $K(t_f) = S$.

Прибавим и вычтем $K(k+1)$, а затем разделим обе части последнего уравнения на T и после преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{K(k+1) - K(k)}{T} + \frac{\phi'K(k+1)\phi - K(k+1) + \hat{Q}}{T} = \\ = \left[\frac{M + \phi'K(k+1)\theta}{T} \right] \left[\frac{\hat{R} + \theta'K(k+1)\theta}{T} \right]^{-1} \left[\frac{\theta'K(k+1)\phi + M'}{T} \right] \end{aligned} \quad (11-171)$$

Можно показать, что при уменьшении периода квантования до нуля уравнение (11-171) принимает вид

$$\dot{K}(t) = A'K(t) + K(t)A + Q = K(t)BR^{-1}B'K(t) \quad (11-172)$$

Это уравнение известно как дифференциальное уравнение Риккати для непрерывного линейного оптимального регулятора, где $\mathbf{K}(t)$ – коэффициент Риккати. Оно соответствует непрерывному управляющему воздействию $\mathbf{u}(t)$ в системе (11-1).

Для бесконечного интервала времени $t_f = \infty$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{K}(k + 1) = \mathbf{K}(T) \quad (11-173)$$

где для обозначения установившегося значения коэффициента Риккати вместо \mathbf{K} используется $\mathbf{K}(T)$, чтобы показать зависимость коэффициента от T . Для бесконечного интервала времени уравнение (11-171) превращается в алгебраическое уравнение Риккати

$$\frac{\phi' \mathbf{K}(T) \phi - \mathbf{K}(T) + \hat{\mathbf{Q}}}{T} = \left[\frac{\mathbf{M} + \phi' \mathbf{K}(T) \theta}{T} \right] \left[\frac{\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{K}(T) \theta}{T} \right]^{-1} \left[\frac{\theta' \mathbf{K}(T) \phi + \mathbf{M}'}{T} \right] \quad (11-174)$$

При стремлении T к нулю последнее уравнение принимает вид

$$\mathbf{K}(0)\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{K}(0) + \mathbf{Q} = \mathbf{K}(0)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{K}(0) \quad (11-175)$$

где

$$\mathbf{K}(0) = \lim_{T \rightarrow 0} \mathbf{K}(T) \quad (11-176)$$

является также установившимся решением дифференциального уравнения Риккати (11-172).

Из этого следует, что оптимальная матрица обратной связи цифрового регулятора на бесконечном интервале времени может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{G}(T) = \left[\frac{\hat{\mathbf{R}} + \theta' \mathbf{K}(T) \theta}{T} \right]^{-1} \left[\frac{\theta' \mathbf{K}(T) \phi + \mathbf{M}'}{T} \right] \quad (11-177)$$

При $T = 0$ соответствующая оптимальная матрица обратной связи для непрерывного регулятора имеет вид

$$\mathbf{G}(0) = \lim_{T \rightarrow 0} \mathbf{G}(T) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) \quad (11-178)$$

Анализ чувствительности матрицы коэффициентов Риккати по отношению к периоду квантования. Разложим установившееся решение уравнения Риккати $\mathbf{K}(T)$ в ряд Тейлора в окрестности $T = 0$:

$$\mathbf{K}(T) = \mathbf{K}(0) + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{S}_i^K \frac{T^i}{i!} \quad (11-179)$$

где

$$\mathbf{S}_i^K = \left. \frac{\partial^i \mathbf{K}(T)}{\partial T^i} \right|_{T=0} \quad (11-180)$$

определяется как чувствительность $\mathbf{K}(T)$ i -го порядка по отношению к периоду квантования. Предполагается, что бесконечный ряд (11-179) сходится на интервале $[0, T_c]$. В большинстве практических задач для аппроксимации $\mathbf{K}(T)$ допустимо использовать только несколько членов ряда. В

дальнейшем определяются чувствительности $K(T)$ первого и второго порядка. Для упрощения обозначений подразумевается, что все частные производные вычисляются при $T=0$.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$X(T) = \frac{\phi' K(T) \phi - K(T) + \hat{Q}}{T} \quad (11-181)$$

$$X(0) = \lim_{T \rightarrow 0} X(T) = K(0)A + A'K(0) + Q \quad (11-182)$$

$$Y(T) = \frac{M + \phi' K(T) \theta}{T} \quad (11-183)$$

$$Y(0) = \lim_{T \rightarrow 0} Y(T) = K(0)B \quad (11-184)$$

$$Z(T) = \frac{\hat{R} + \theta' K(T) \theta}{T} \quad (11-185)$$

$$Z(0) = R \quad (11-186)$$

С учетом этого оптимальный коэффициент усиления обратной связи (11-177) имеет простой вид

$$G(T) = Z^{-1}(T)Y'(T) \quad (11-187)$$

а дискретное уравнение Риккати (11-174) описывается выражением

$$X(T) = Y(T)Z^{-1}(T)Y'(T) = Y(T)G(T) \quad (11-188)$$

Для определения чувствительностей первого порядка выражения (11-187) и (11-188) дифференцируются по T и затем определяются значения производных при $T=0$. В результате получим

$$\frac{\partial G(T)}{\partial T} = R^{-1} \frac{\partial Y'(T)}{\partial T} - R^{-1} \frac{\partial Z(T)}{\partial T} R^{-1} B'K(0) \quad (11-189)$$

$$\frac{\partial X(T)}{\partial T} = K(0)B \frac{\partial G(T)}{\partial T} + \frac{\partial Y(T)}{\partial T} R^{-1} B'K(0) \quad (11-190)$$

где $\partial^i G(T)/\partial T^i$ — i -я производная от $G(T)$ по T , вычисленная при $T=0$; она называется чувствительностью $G(T)$ i -го порядка по отношению к периоду квантования.

Частные производные от $X(T)$, $Y(T)$ и $Z(T)$ по T можно найти соответственно из выражений (11-181), (11-183) и (11-185) с использованием разложения $\Phi = e^{AT}$ в соотношениях (11-6), (11-11) — (11-13) в бесконечный ряд при отбрасывании членов выше третьего порядка по T . При этом получаются следующие результаты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(T)}{\partial T} &= A' \frac{\partial K(T)}{\partial T} + \frac{\partial K(T)}{\partial T} A + \frac{1}{2} A'K(0)BR^{-1}B'K(0) + \\ &+ \frac{1}{2} K(0)BR^{-1}B'K(0)A \end{aligned} \quad (11-191)$$

$$\frac{\partial Y(T)}{\partial T} = \frac{\partial K(T)}{\partial T} B + \frac{1}{2} [A'K(0) + K(0)BR^{-1}B'K(0)]B \quad (11-192)$$

$$\frac{\partial Z(T)}{\partial T} = B'K(0)B \quad (11-193)$$

Подставив выражения (11-192) и (11-193) в (11-189), после упрощения получим

$$\frac{\partial \mathbf{G}(T)}{\partial T} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \frac{\partial \mathbf{K}(T)}{\partial T} + \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] \quad (11-194)$$

В свою очередь, подставив выражения (11-191), (11-192) и (11-194) в (11-190), после упрощения получим следующее соотношение:

$$[\mathbf{A}' - \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] \frac{\partial \mathbf{K}(T)}{\partial T} + \frac{\partial \mathbf{K}(T)}{\partial T} [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] = \mathbf{0} \quad (11-195)$$

которое известно как уравнение Ляпунова. Поскольку $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)$ является матрицей коэффициентов замкнутой непрерывной системы с линейным оптимальным регулятором, которая асимптотически устойчива, то отсюда следует, что единственное решение уравнения (11-195) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{K}(T)}{\partial T} = \mathbf{0} \quad (11-196)$$

Поэтому из выражения (11-194) находим

$$\frac{\partial \mathbf{G}(T)}{\partial T} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] \quad (11-197)$$

Уравнение (11-196) также позволяет получить интересный результат, касающийся чувствительности критерия качества по отношению к T при малых значениях T . Выражение (11-58) дает оптимальное значение критерия качества для цифрового регулятора с бесконечным интервалом времени. Перепишем его в следующем виде:

$$J_{\infty}^{\circ} = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(0) \mathbf{K}(T) \mathbf{x}(0) \quad (11-198)$$

Отсюда

$$\left. \frac{\partial J_{\infty}^{\circ}}{\partial T} \right|_{T=0} = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(0) \frac{\partial \mathbf{K}(T)}{\partial T} \mathbf{x}(0) = 0 \quad (11-199)$$

т. е. оптимальное значение критерия качества J_{∞}° при малых T нечувствительно к вариации T .

Для определения чувствительностей второго порядка необходимо вычислить производные второго порядка от $\mathbf{G}(T)$, $\mathbf{X}(T)$, $\mathbf{Y}(T)$ и $\mathbf{Z}(T)$. Эти производные описываются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{X}(T)}{\partial T^2} = & \mathbf{A}' \frac{\partial^2 \mathbf{K}(T)}{\partial T^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{K}(T)}{\partial T^2} \mathbf{A} + \frac{1}{3} (\mathbf{A}')^2 [\mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) + \\ & + \frac{1}{3} \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] \mathbf{A}^2 + \frac{2}{3} \mathbf{A}' \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) \mathbf{A} \end{aligned} \quad (11-200)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}(T)}{\partial T^2} = & \frac{\partial^2 \mathbf{K}(T)}{\partial T^2} \mathbf{B} + \frac{1}{3} (\mathbf{A}')^2 \mathbf{K}(0) \mathbf{B} + \frac{2}{3} \mathbf{A}' \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) \mathbf{B} + \\ & + \frac{1}{3} \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) \mathbf{A} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (11-201)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{Z}(T)}{\partial T^2} = \frac{1}{3} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) \mathbf{A} \mathbf{B} + \frac{1}{3} \mathbf{B}' \mathbf{A}' \mathbf{K}(0) \mathbf{B} + \frac{2}{3} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \quad (11-202)$$

Дифференцирование выражений (11-189) и (11-190) по T дает

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}(T)}{\partial T^2} = \mathbf{R}^{-1} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{Y}'(T)}{\partial T^2} - 2 \frac{\partial \mathbf{Z}(T)}{\partial T} \frac{\partial \mathbf{G}(T)}{\partial T} - \frac{\partial^2 \mathbf{Z}(T)}{\partial T^2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) \right] \quad (11-203)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{X}(T)}{\partial T^2} = 2 \frac{\partial \mathbf{Y}(T)}{\partial T} \frac{\partial \mathbf{G}(T)}{\partial T} + \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{G}(T)}{\partial T^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{Y}(T)}{\partial T^2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) \quad (11-204)$$

Следует напомнить, что все производные вычисляются при $T=0$.

Подставим выражения (11-193), (11-197) и (11-202) в (11-203) и после упрощения получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}(T)}{\partial T^2} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \frac{\partial^2 \mathbf{K}(T)}{\partial T^2} + \frac{1}{3} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)]^2 \quad (11-205)$$

Аналогично можно показать, что $\partial^2 \mathbf{K}(T)/\partial T^2$ является решением уравнения Ляпунова:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}' - \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}'] \frac{\partial^2 \mathbf{K}(T)}{\partial T^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{K}(T)}{\partial T^2} [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] + \\ & + \frac{1}{6} [\mathbf{A}' - \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}'] [\mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] = 0 \end{aligned} \quad (11-206)$$

Поскольку третий член последнего уравнения всегда положительно-полуопределенный, решение $\partial^2 \mathbf{K}(T)/\partial T^2$ является единственным и положительно-полуопределенным.

Очевидно, что количество вычислений при определении чувствительностей третьего и более высоких порядков становится чрезмерным, поэтому соответствующие результаты не приводим. Тем более, что аппроксимация второго порядка как правило обеспечивает необходимую точность.

Уравнение (11-206) можно решать с использованием других эквивалентных форм. Предположим, что $\partial^2 \mathbf{K}(T)/\partial T^2$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{K}(T)}{\partial T^2} = [\mathbf{A}' - \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}'] \frac{\Pi}{6} [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] \quad (11-207)$$

В этом случае Π должно быть единственным положительно-полуопределенным решением уравнения

$$[\mathbf{A}' - \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}'] \Pi + \Pi [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] + \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) = 0 \quad (11-208)$$

Преобразуем уравнение (11-175) к виду

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}' - \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}'] \mathbf{K}(0) + \mathbf{K}(0) [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] + \\ & + \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0) + \mathbf{Q} = 0 \end{aligned} \quad (11-209)$$

Вычитание уравнения (11-208) из (11-204) дает

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}' - \mathbf{K}(0) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}'] [\mathbf{K}(0) - \Pi] + [\mathbf{K}(0) - \\ & - \Pi] [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{K}(0)] + \mathbf{Q} = 0 \end{aligned} \quad (11-210)$$

Единственное положительно-полуопределенное решение уравнения (11-210), $\mathbf{K}(0) - \Pi$, позволяет определить $\partial^2 \mathbf{K}(T)/\partial T^2$ из уравнения (11-207).

Анализ чувствительности матрицы обратной связи по отношению к периоду квантования. Наилучшая аппроксимация $K(T)$, получаемая при использовании конечного числа членов (двух) в (11-179), может использоваться в выражении (11-177) для приближенного вычисления оптимальной матрицы обратной связи $G(T)$. При аппроксимации второго порядка $G(T)$ описывается соотношением

$$G(T) = \left[\frac{\hat{R} + \theta' \left[K(0) + \frac{\partial^2 K(T)}{\partial T^2} \frac{T^2}{2} \right] \theta}{T} \right]^{-1} \left[\frac{M' + \theta' \left[K(0) + \frac{\partial^2 K(T)}{\partial T^2} \frac{T^2}{2} \right] \phi}{T} \right] \quad (11-211)$$

Другой способ состоит в разложении $G(T)$ в ряд Тейлора в окрестности $T=0$

$$G(T) = G(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^i G(T)}{\partial T^i} \frac{T^i}{i!} \quad (11-212)$$

где $G(0)$ описывается выражением (11-178), а первая и вторая производные $G(T)$ – соотношениями (11-197) и (11-205) соответственно.

Пример 11.6. Предположим, что процесс второго порядка описывается уравнениями состояния

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (11-213)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11-214)$$

Задача состоит в определении дискретного оптимального управления $u(t) = u(kT)$, $k=0, 1, 2, \dots$, которое минимизирует критерий качества

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[x_1(t) - x_2(t) \right]^2 + x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t) dt \quad (11-215)$$

В соответствии с обозначениями, используемыми в выражении (11-3), определим следующие весовые матрицы:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11-216)$$

Период квантования вначале не задается, так как его влияние на характеристики линейного оптимального цифрового регулятора и составляет предмет исследования.

Поскольку процесс (11-213) является управляемым (и стабилизируемым) и пара $[A, B]$ наблюдаема, где $BB' = Q$, задача синтеза линейного непрерывного регулятора, где для $T=0$, имеет асимптотически устойчивое решение. Матрица коэффициентов для дискретного процесса $\Phi(T) = e^{AT} = I$, и

$$\theta(T) = \int_0^T \phi(\lambda) B d\lambda = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (11-217)$$

Поэтому дискретная система

$$x[(k+1)T] = \phi(T)x(kT) + \theta(T)u(kT) \quad (11-218)$$

полностью управляема, и так как матрица \hat{R} , описываемая выражением (11-13),

невырождена, пара $[\Phi, D]$ для любой матрицы $DD' = Q'$ является наблюдаемой. Таким образом, задача синтеза линейного оптимального цифрового регулятора для системы (11-218) имеет асимптотически устойчивое решение.

Обычно эта задача решается с помощью записи дискретного уравнения Риккати (11-30) или (11-34) и определения из него $K(T)$. Тогда оптимальное управление описывается выражением (11-56). Поскольку в рассматриваемом случае период квантования T не задан, было бы трудно решить уравнение Риккати как рекуррентным методом, так и методом собственных значений и собственных векторов.

Решим задачу с использованием метода, описанного в этом параграфе. Так как нам потребуются матрицы $K(0)$ и $G(0)$, необходимо вначале решить задачу синтеза оптимального линейного непрерывного регулятора. Уравнение Риккати в этом случае имеет вид (11-175) и при подстановке параметров системы упрощается следующим образом:

$$K^2(0) = Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (11-219)$$

Отсюда

$$K(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (11-220)$$

Оптимальный коэффициент усиления обратной связи определяется выражением (11-178), откуда получаем

$$G(0) = R^{-1}B'K(0) = K(0) \quad (11-221)$$

Чувствительность $K(T)$ первого порядка по отношению к периоду квантования всегда равна нулю. Чувствительность второго порядка $\partial^2 K(T)/\partial T^2$ определяется с помощью решения уравнения (11-210) для Π , которое принимает вид

$$-2K^2(0) + 2K(0)\Pi + Q = 0 \quad (11-222)$$

Из уравнения (11-222) имеем

$$\Pi = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (11-223)$$

Подстановка Π в выражение (11-207) дает

$$\frac{\partial^2 K(T)}{\partial T^2} = \frac{1}{6} K(0)\Pi K(0) = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 + 3\sqrt{3} & 1 - 3\sqrt{3} \\ 1 - 3\sqrt{3} & 1 + 3\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (11-224)$$

Таким образом, аппроксимация второго порядка для $K(T)$ имеет вид

$$K(T) \cong K(0) + \frac{T^2}{2} \frac{\partial^2 K(T)}{\partial T^2} = \begin{bmatrix} e_1 + e_2 & e_1 - e_2 \\ e_1 - e_2 & e_1 + e_2 \end{bmatrix} \quad (11-225)$$

где

$$e_1 = \frac{1}{2} + \frac{T^2}{48} \quad (11-226)$$

$$e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}T^2}{16} \quad (11-227)$$

Решая уравнение Риккати (11-174), можно показать, что точное значение коэффициента Риккати

$$K(T) = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & d_1 - d_2 \\ d_1 - d_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \quad (11-228)$$

где

$$d_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{T^2}{12} \right]^{1/2}, \quad (11-229)$$

$$d_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} T^2}{8} \quad (11-230)$$

Подставляя приближенное выражение для $K(T)$ (11-225) в соотношение (11-177), получим (после длинных матричных преобразований)

$$G(T) \cong \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_1 + f_2 & f_1 - f_2 \\ f_1 - f_2 & f_1 + f_2 \end{bmatrix} \quad (11-231)$$

где

$$f_1 = \frac{24 + 12T + T^2}{24 + 24T + 8T^2 + T^3} \quad (11-232)$$

$$f_2 = \frac{8\sqrt{3} + 12T + \sqrt{3} T^2}{8 + 8\sqrt{3} T + 8T^2 + \sqrt{3} T^3} \quad (11-233)$$

Другой способ состоит в аппроксимации $G(T)$ первыми тремя членами ряда (11-212). Из выражения (11-221) следует, что $G(0) = K(0)$. Чувствительность $G(T)$ первого порядка определяется выражением (11-194):

$$\frac{\partial G(T)}{\partial T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (11-234)$$

Чувствительность $G(T)$ второго порядка определяется из соотношения (11-205):

$$\frac{\partial^2 G(T)}{\partial T^2} = \frac{5}{24} \begin{bmatrix} 1 + 3\sqrt{3} & 1 - 3\sqrt{3} \\ 1 - 3\sqrt{3} & 1 + 3\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (11-235)$$

Таким образом, аппроксимация $G(T)$ конечным числом членов ряда дает

$$\begin{aligned} G(T) &\cong G(0) + T \frac{\partial G(T)}{\partial T} + \frac{T^2}{2!} \frac{\partial^2 G(T)}{\partial T^2} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + T + \frac{5T^2}{48} (1 + 3\sqrt{3}) & \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{T}{2} + \frac{5T^2}{48} (1 - 3\sqrt{3}) \\ \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{T}{2} + \frac{5T^2}{48} (1 - 3\sqrt{3}) & \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + T + \frac{5T^2}{48} (1 + 3\sqrt{3}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11-236)$$

Точное значение матрицы обратной связи определяется с помощью подстановки точного выражения для $K(T)$ (11-228) в соотношение (11-177). В результате получим

$$G(T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & g_1 - g_2 \\ g_1 - g_2 & g_1 + g_2 \end{bmatrix} \quad (11-237)$$

где

$$g_1 = \frac{\left[1 + \frac{T^2}{12} \right]^{1/2} + \frac{T}{2}}{1 + T \left[1 + \frac{T^2}{12} \right]^{1/2} + \frac{T^2}{3}} \quad (11-238)$$

$$g_2 = \frac{\sqrt{3} \left[1 + \frac{T^2}{4} \right]^{1/2} + \frac{3T}{2}}{1 + \sqrt{3} T \left[1 + \frac{T^2}{4} \right]^{1/2} + T^2} \quad (11-239)$$

Чувствительность к периоду квантования и переоборудование систем управления на базе ЭВМ. Возникновение задачи переоборудования систем управления на базе ЭВМ, рассмотренной в гл. 5, явилось следствием анализа чувствительности коэффициента Риккати и оптимальной матрицы обратной связи по отношению к периоду квантования. В гл. 5 задача переоборудования на базе ЭВМ решалась с помощью последовательного сравнения в моменты квантования переходных процессов по состоянию в непрерывной и дискретной системах. Метод, рассмотренный в п. 11.5, непосредственно приводит к иному способу решения задачи переоборудования систем управления, основанному на чувствительности к периоду квантования.

С использованием обозначений, принятых в этой главе, проблема переоборудования систем управления на базе ЭВМ может быть сформулирована следующим образом: имеется непрерывная система (11-1) с оптимальным законом управления

$$u(t) = -G(0)x(t) \quad (11-240)$$

который минимизирует критерий качества (11-3) при $t_f = \infty$. Оптимальная матрица коэффициентов усиления обратной связи описывается выражением (11-178), а именно:

$$G(0) = R^{-1} B' K(0) \quad (11-241)$$

где $K(0)$ — положительно-полуопределенное решение уравнения Риккати (11-175).

Приближенно опишем рассматриваемую систему (11-1) цифровой моделью, в которой управляющее воздействие $u(t)$ формируется устройством выборки и хранения:

$$u(t) = u(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (11-242)$$

Задача состоит в определении оптимального закона управления с обратной связью по состоянию

$$u(kT) = -G(T)x(kT) \quad (11-243)$$

который минимизирует дискретный показатель качества (11-7) при $N = \infty$.

Сформулируем кратко результаты, приведенные в п. 11.5. Разложим коэффициент обратной связи цифровой системы в ряд Тейлора в окрестности $T=0$ и с учетом только первых трех членов получим

$$G(T) = G(0) + T \frac{\partial G(T)}{\partial T} + \frac{T^2}{2!} \frac{\partial^2 G(T)}{\partial T^2} \quad (11-244)$$

где $G(0)$ описывается выражением (11-241). Из соотношений (11-194) и (11-205) соответственно находим

$$\frac{\partial G(T)}{\partial T} = \frac{1}{2} G(0)[A - BG(0)] \quad (11-245)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}(T)}{\partial T^2} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}' \frac{\partial^2 \mathbf{K}(T)}{\partial T^2} + \frac{1}{3} \mathbf{G}(0) [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{G}(0)]^2 \quad (11-246)$$

где $\partial^2 \mathbf{K}(T)/\partial T^2$ определяется из уравнения (11-206).

Сравнивая эти результаты с результатами, полученными в гл. 5, отметим, что первые два члена ряда Тейлора для $\mathbf{G}(T)$ в обоих случаях совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dorato, P., and Levis, A. H., "Optimal Linear Regulator: The Discrete-Time Case," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-16, December 1971, pp. 613-620.
2. Kleinman, D. L., "Stabilizing A Discrete, Constant, Linear System With Application to Iterative Methods for Solving the Riccati Equation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-19, June 1974, pp. 252-254.
3. Vaughan, D. R., "A Nonrecursive Algebraic Solution for the Discrete Riccati Equation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-15, October 1970, pp. 597-599.
4. Howerton, R. D., "A New Solution of the Discrete Algebraic Riccati Equation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-19, February 1974, pp. 90-92.
5. Lainiotis, D. G., "Discrete Riccati Equation Solutions: Partitioned Algorithms," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-20, August 1975, pp. 555-556.
6. Molinari, B. P., "The Stabilizing Solution of the Discrete Algebraic Riccati Equation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-20, June 1975, pp. 396-399.
7. Molinari, B. P., "The Stabilizing Solution of the Algebraic Riccati Equation," *SIAM Journal on Control*, Vol. 11, May 1973, pp. 262-271.
8. Payne, H. J., and Silverman, L. M., "On the Discrete Time Algebraic Riccati Equation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-18, June 1973, pp. 226-234.
9. Caines, P. E., and Mayne, D. Q., "On the Discrete-Time Matrix Riccati Equation of Optimal Control," *International J. on Control*, Vol. 12, November 1970, pp. 785-794.
10. Hewer, G. A., "An Iterative Technique for the Computation of the Steady-State Gains For the Discrete Optimal Regulator," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-16, August 1971, pp. 382-384.
11. Hewer, G. A., "Analysis of a Discrete Matrix Riccati Equation of Linear Control and Kalman Filtering," *J. Math. Analysis and Applications*, Vol. 42, April 1973, pp. 226-236.
12. Cadzow, J. A., "Nilpotency Property of the Discrete Regulator," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-13, December 1968, pp. 734-735.

ГЛАВА 12. ЦИФРОВОЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ СОСТОЯНИЯ

12.1. ВВЕДЕНИЕ

Значительная часть теории оптимального управления цифровыми системами базируется на использовании обратной связи по переменным состояниям. К сожалению, на практике не все переменные состояния доступны для измерения, и, как правило, измеряются только выходные переменные системы. Поэтому, если требуется обратная связь по всем переменным состояниям и не все они доступны для измерения, необходимо "восстанавливать" эти состояния по информации, содержащейся во входных и выходных переменных. Подсистема, которая осуществляет восстановление переменных состояния, основанное на измерениях входных и выходных переменных, называется *наблюдателем состояния*, или просто *наблюдателем*. На рис. 12.1 изображена структурная схема цифровой системы управления с наблюдателем состояния. Восстановленный вектор состояния $x_e(k)$ используется для формирования управляющего воздействия $u(k)$ с помощью матрицы обратной связи G . Из рис. 12.1 следует, что управляющее воздействие описывается соотношением

$$u(k) = E r(k) - G x_e(k) \quad (12-1)$$

Выясним вначале условия, определяющие возможность построения наблюдателя. Следующая теорема показывает, что проектирование цифрового наблюдателя состояния тесно связано с критерием наблюдаемости.

Т е о р е м а 12.1. Рассмотрим линейную цифровую систему, которая описывается следующими уравнениями динамики:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (12-2)$$

$$c(k) = Dx(k) \quad (12-3)$$

где $x(k)$, $u(k)$ и $c(k)$ — соответственно n , p и q -мерные векторы. Предполагается, что матрица A является невырожденной. Вектор состояния $x(k)$ может быть определен как линейная комбинация выходной $c(k)$, вход-

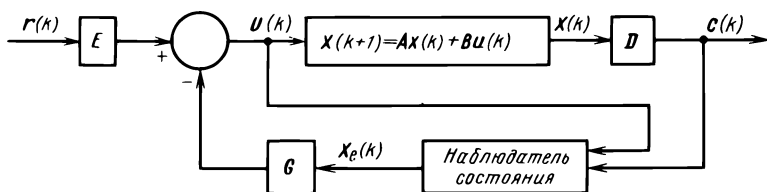


Рис. 12.1. Линейная цифровая система с наблюдателем и обратной связью по состоянию

ной $u(k)$ и предшествующих значений этих переменных, если цифровая система полностью наблюдаема.

Доказательство. Уравнение (12-2) может быть записано в виде

$$x(k-1) = A^{-1}x(k) - A^{-1}Bu(k-1) \quad (k \geq 1) \quad (12-4)$$

В общем случае

$$x(k-n) = A^{-1}x(k-n+1) - A^{-1}Bu(k-n) \quad (k \geq n) \quad (12-5)$$

В соответствии с (12-3) запишем

$$c(k-1) = Dx(k-1) \quad (k \geq 1) \quad (12-6)$$

Подстановка уравнения (12-4) в (12-6) дает

$$c(k-1) = DA^{-1}x(k) - DA^{-1}Bu(k-1) \quad (k \geq 1) \quad (12-7)$$

По аналогии

$$\begin{aligned} c(k-2) &= Dx(k-2) = \\ &= DA^{-2}x(k) - DA^{-2}Bu(k-1) - DA^{-1}Bu(k-2) \end{aligned} \quad (12-8)$$

Продолжая эту процедуру, получаем

$$c(k-N) = DA^{-N}x(k) - \sum_{i=1}^N DA^{-N+i-1}Bu(k-i) \quad (k \geq N) \quad (12-9)$$

Запишем эти уравнения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} c(k-1) \\ c(k-2) \\ \vdots \\ c(k-N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DA^{-1} \\ DA^{-2} \\ \vdots \\ DA^{-N} \end{bmatrix} x(k) - \begin{bmatrix} DA^{-1}B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ DA^{-2}B & DA^{-1}B & 0 & \dots & 0 \\ DA^{-3}B & DA^{-2}B & DA^{-1}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ DA^{-N}B & DA^{-N+1} & DA^{-N+2} & \dots & DA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ u(k-3) \\ \vdots \\ u(k-N) \end{bmatrix} \quad (12-10)$$

Данное матричное уравнение содержит Nq уравнений с n неизвестными компонентами вектора состояния $x(k)$. При $Nq \geq n$ известных управляющих воздействиях и выходных переменных вектор $x(k)$ может быть найден из уравнения (12-10), если матрица

$$[DA^{-1} \quad DA^{-2} \quad \dots \quad DA^{-N}]' \quad (Nq \times n) \quad (12-11)$$

имеет ранг n . Очевидно, что ограничение на ранг матрицы (12-11) совпадает с критерием наблюдаемости пары $[A, D]$ для $N = n$.

При определенных условиях уравнение (12-10) имеет единственное решение относительно вектора состояния $x(k)$. Если $Nq = n$, матрица (12-11) становится квадратной и, если она невырождена, вектор $x(k)$ может быть определен для $k \geq N$ с помощью измерения N предшествующих значений выходной и входной переменных.

12.2. СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ ПОЛНОГО ПОРЯДКА

Наблюдатель состояния, изображенный на рис. 12.1, должен проектироваться таким образом, чтобы восстанавливаемое состояние $x_e(k)$ было как можно ближе к действительному состоянию $x(k)$. Существует много способов проектирования цифровых наблюдателей состояния и, как правило, несколько способов определения близости $x_e(k)$ и $x(k)$. Можно предположить, что наблюдатель состояния описывается такими же уравнениями состояния, как и исходная система. Однако в структуре наблюдателя, использующего $u(k)$ и $c(k)$ в качестве входных переменных, должна быть предусмотрена возможность автоматической минимизации отклонения $x(k)$ от $x_e(k)$.

Проектирование цифрового наблюдателя состояния, описываемое ниже, аналогично проектированию наблюдателя для непрерывных систем.

Поскольку $x(k)$ не может измеряться непосредственно, нельзя сравнивать $x_e(k)$ и $x(k)$. Вместо этого можно сравнивать $c_e(k)$ и $c(k)$, где

$$c_e(k) = D x_e(k) \quad (12-12)$$

На рис. 12.2 представлена логическая структура цифрового наблюдателя состояния, основанная на предшествующих рассуждениях. Наблюдатель представляет собой замкнутую систему управления с матрицей обратной связи G_e . Задача проектирования состоит в нахождении такой матрицы G_e , чтобы отклонение $c_e(k)$ от $c(k)$ уменьшалось как можно быстрее.

Уравнение состояния замкнутого наблюдателя имеет вид

$$x_e(k+1) = (A - G_e D) x_e(k) + B u(k) + G_e c(k) \quad (12-13)$$

где матрицы A , B и D совпадают с матрицами в уравнениях (12-2) и (12-3), а G_e — матрица обратной связи размерностью $n \times q$. Если переменная $c_e(k)$ равна $c(k)$, уравнение (12-13) принимает вид

$$x_e(k+1) = A x_e(k) + B u(k) \quad (12-14)$$

который идентичен уравнению состояния исходной системы.

Объединяя структурные схемы наблюдателя состояния (12-2) и цифровой системы управления (12-1), получим комбинированную систему, представленную на рис. 12.3.

Поскольку $c(k)$ и $x(k)$ связаны соотношением (12-3), перепишем уравнение (12-13):

$$x_e(k+1) = A x_e(k) + B u(k) + G_e D [x(k) - x_e(k)] \quad (12-15)$$

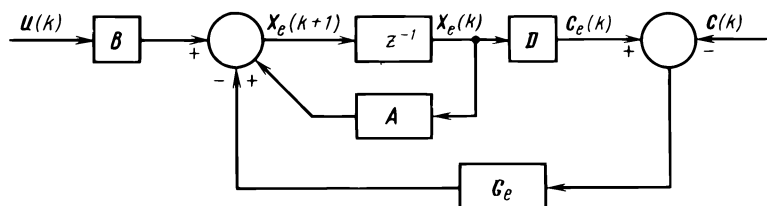


Рис. 12.2. Цифровой наблюдатель состояния с обратной связью

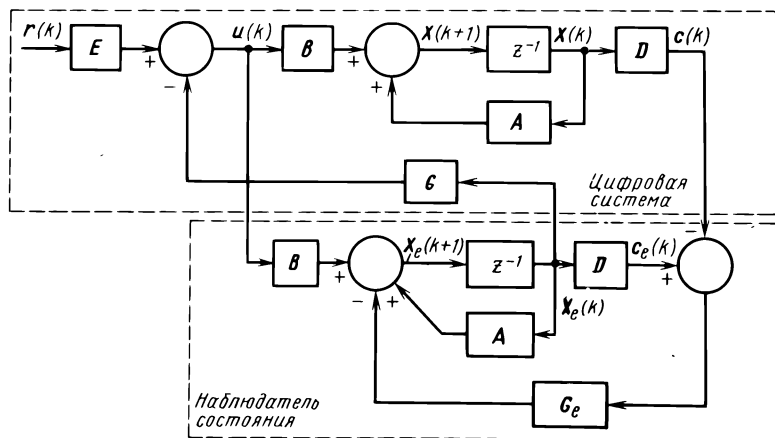


Рис. 12.3. Цифровая система управления с наблюдателем

Смысл этого уравнения состоит в том, что если совпадают начальные состояния $x(0)$ и $x_e(0)$, уравнение (12-15) идентично уравнению (12-14), а значит, реакция наблюдателя совпадает с реакцией исходной системы. Поэтому проектирование наблюдателя имеет смысл, когда начальные условия для $x(k)$ и $x_e(k)$ различны.

Вычитая уравнение (12-15) из (12-2), получим следующее выражение:

$$x(k+1) - x_e(k+1) = (A - G_e D)[x(k) - x_e(k)] \quad (12-16)$$

которое можно рассматривать как однородное разностное уравнение состояния линейной цифровой системы с матрицей коэффициентов $A - G_e D$. Один из способов обеспечения быстрой сходимости $x_e(k)$ к $x(k)$ состоит в определении матрицы G_e из условия соответствующего размещения собственных значений $A - G_e D$ на z -плоскости. На основании методики проектирования по заданным собственным значениям, описанной в гл. 4, элементы G_e должны выбираться таким образом, чтобы траектория свободного движения системы (12-16) стремилась к нулю как можно быстрее.

Поскольку собственные значения матриц $A - G_e D$ и $(A - G_e D)' = A' - D' G_e'$ совпадают, то, как следует из п. 4.13, условие произвольного размещения собственных значений $A - G_e D$ состоит в том, чтобы пара $[A', D']$ была полностью управляемой. Так как управляемость $[A', D']$ эквивалента полной наблюдаемости $[A, D]$, выполнение этого условия будет гарантировать не только существование наблюдателя состояния, но и возможность произвольного размещения его собственных значений.

Следующий пример иллюстрирует процедуру синтеза наблюдателя состояния по заданным собственным значениям.

Пример 12.1. Рассмотрим цифровой процесс из примера 11.3 с уравнениями состояния

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (12-17)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Пусть уравнение выхода имеет вид

$$c(k) = Dx(k) \quad (12-18)$$

где

$$D = [2 \quad 0] \quad (12-19)$$

Необходимо спроектировать цифровой наблюдатель, который восстанавливает состояния $x_1(k)$ и $x_2(k)$ по выходной переменной $c(k)$.

Цифровой наблюдатель имеет структурную схему, изображенную на рис. 12.2. Характеристическое уравнение наблюдателя описывается соотношением

$$|\lambda I - A + G_e D| = 0 \quad (12-20)$$

или

$$\lambda^2 + (2g_{e1} - 1)\lambda + 1 + 2g_{e2} - 2g_{e1} = 0 \quad (12-21)$$

где g_{e1} и g_{e2} — элементы матрицы обратной связи G_e размерностью 2×1 . Спроектируем наблюдатель, имеющий апериодическую реакцию, при которой $x_e(k)$ достигает значения $x(k)$ за два периода квантования. Для апериодической реакции наблюдателя необходимо, чтобы характеристическое уравнение имело вид

$$\lambda^2 = 0 \quad (12-22)$$

Таким образом, из уравнения (12-21) следует, что $g_{e1} = 0,5$ и $g_{e2} = 0$. Соответствующая матрица коэффициентов для замкнутого наблюдателя имеет вид

$$A - G_e D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12-23)$$

Для $u(k) = 0$ запишем уравнения состояния наблюдателя

$$x_e(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x_e(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) \quad (12-24)$$

Зададим произвольно начальные состояния системы и наблюдателя

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_e(0) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Решим итерационно уравнения (12-17) и (12-24), начиная с заданных начальных состояний. Истинные состояния $x_1(k)$, $x_2(k)$ и восстановленные состояния $x_{e1}(k)$, $x_{e2}(k)$ представлены на рис. 12.4. Восстановленные состояния достигают значений действительных состояний самое большое за два периода квантования.

Замкнутая система управления с наблюдателем. В проведенном синтезе цифрового наблюдателя предполагалось, что система управления является разомкнутой, т. е. $G = 0$ (см. рис. 12.3). Для общего случая, представленного на рис. 12.3, запишем уравнения состояния следующим образом:

$$x(k+1) = Ax(k) - BGx_e(k) + BEr(k) \quad (12-25)$$

$$x_e(k+1) = (A - BG - G_e D)x_e(k) + G_e Dx(k) + BEr(k) \quad (12-26)$$

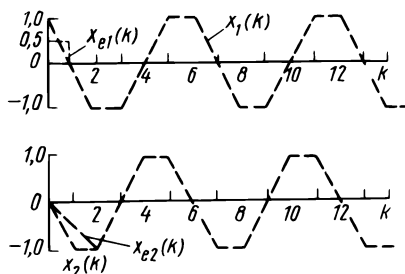


Рис. 12.4. Изменения состояния цифровой системы и наблюдателя

Исследуем влияние начальных состояний и взаимное влияние этих двух систем с помощью z -преобразования уравнений (12-25) и (12-26). После переобозначения членов уравнения имеют вид

$$(zI - A)X(z) = zx(0) + \mathbf{BER}(z) - \mathbf{BGX}_e(z) \quad (12-27)$$

$$(zI - A + \mathbf{BG} + \mathbf{G}_e \mathbf{D})\mathbf{X}_e(z) = zx_e(0) + \mathbf{G}_e \mathbf{D}X(z) + \mathbf{BER}(z) \quad (12-28)$$

Вычитая (12-28) из (12-27), при $x(0) = x_e(0)$ получим:

$$(zI - A + \mathbf{G}_e \mathbf{D})X(z) = (zI - A + \mathbf{G}_e \mathbf{D})\mathbf{X}_e(z) \quad (12-29)$$

Таким образом,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_e(k) \quad (12-30)$$

и уравнение (12-27) принимает вид

$$(zI - A + \mathbf{BG})X(z) = zx(0) + \mathbf{BER}(z) \quad (12-31)$$

Этот результат показывает, что при $x(0) = x_e(0)$ динамика исходной системы не зависит от динамики наблюдателя. Однако в общем случае переходный процесс исходной системы при $x(0) \neq x_e(0)$ будет определяться наблюдателем.

Вычитая уравнение (12-26) из (12-25), получим

$$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_e(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}_e \mathbf{D})[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_e(k)] \quad (12-32)$$

откуда видно, что при заданных \mathbf{A} и \mathbf{D} свободное движение $\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_e(k)$ зависит только от \mathbf{G}_e . Поэтому проектирование наблюдателя для системы с матрицей обратной связи по состоянию \mathbf{G} может по-прежнему выполняться на основе размещения собственных значений $\mathbf{A} - \mathbf{G}_e \mathbf{D}$. Единственное отличие состоит в том, что при $x(0) \neq x_e(0)$ на реакцию системы $\mathbf{x}(k)$ будет влиять динамика наблюдателя из-за наличия обратной связи по $x_e(k)$ через матрицу \mathbf{G} . В следующем примере рассмотрены характеристики системы совместно с наблюдателем из примера 12.1 с учетом обратной связи по состоянию.

Пример 12.2. Рассмотрим цифровой процесс из примера 12.1 с оптимальной матрицей коэффициентов обратной связи, полученной в примере 11.3:

$$\mathbf{G} = [-0.654 \quad 0.486] \quad (12-33)$$

Найденная в примере 12.1 матрица коэффициентов обратной связи цифрового наблюдателя, обеспечивающая аperiodическую реакцию $\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_e(k)$, имеет вид

$$\mathbf{G}_e = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12-34)$$

Таким образом, для $r(k) = 0$ запишем с учетом (12-25) и (12-26) уравнение состояния цифровой системы с обратной связью и наблюдателем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{G} \\ \mathbf{G}_e\mathbf{D} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G} - \mathbf{G}_e\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_e(k) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0.654 & -0.486 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -0.346 & 0.514 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_e(k) \end{bmatrix} \quad (12-35)$$

На рис. 12.5 представлены изменения переменных состояния $x_1(k)$ и $x_2(k)$ при $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_e(0)$, что эквивалентно отсутствию наблюдателя. Процесс в исходной системе с наблюдателем также представлен на рис. 12.5. Как было показано выше, динамика наблюдателя оказывает влияние на переходный процесс системы. При выбранных начальных состояниях $\mathbf{x}_e(k)$ принимает значение $\mathbf{x}(k)$ после двух периодов квантования.

Синтез с помощью сопряженной канонической формы фазовой переменной. Поскольку синтез наблюдателя, представленный выше основан на размещении собственных значений замкнутого наблюдателя, то для этой цели можно использовать преобразование к канонической форме фазовой переменной, описанное в п. 4.13. Рассмотрим только системы с одним входом и выходом.

Сформулируем снова задачу синтеза наблюдателя. Состояния, которые необходимо восстановить, описываются уравнением состояния

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (12-36)$$

где $\mathbf{x}(k)$ — n -мерный вектор; $u(k)$ — скалярная входная переменная. Управляющее воздействие определяется с помощью обратной связи по состоянию, $u(k) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(k)$, а уравнение выхода имеет вид

$$c(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) \quad (12-37)$$

где $c(k)$ — скалярная выходная переменная; \mathbf{D} — матрица размерностью $1 \times n$. Динамика наблюдателя описывается соотношением [см. уравнение (12-13)]

$$\mathbf{x}_e(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}_e\mathbf{D})\mathbf{x}_e(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{G}_e c(k) \quad (12-38)$$

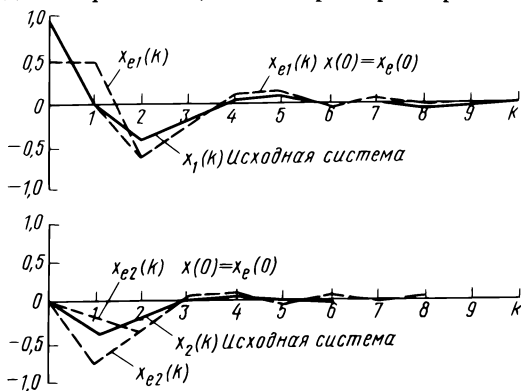


Рис. 12.5. Переходные процессы в цифровой замкнутой системе с наблюдателем

Исходная замкнутая система представлена уравнением

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{x}(k) \quad (12-39)$$

Известно, что если пара $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ полностью управляема, то собственные значения $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}$ могут располагаться произвольно с помощью соответствующего выбора элементов матрицы обратной связи \mathbf{G} . В п. 4.16 было показано, что если пара $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ управляема, \mathbf{A} и \mathbf{B} могут быть преобразованы в каноническую форму фазовой переменной вида (4-295) и (4-296). Тогда каждый из элементов матрицы обратной связи зависит только от одного коэффициента характеристического уравнения. Как следует из уравнения (12-38), при синтезе наблюдателя по заданным собственным значениям возникает подобная задача. В этом случае собственные значения $\mathbf{A} - \mathbf{G}_e\mathbf{D}$ должны быть размещены определенным образом с помощью соответствующего выбора элементов матрицы обратной связи \mathbf{G}_e . Поскольку собственные значения $\mathbf{A} - \mathbf{G}_e\mathbf{D}$ совпадают с собственными значениями $(\mathbf{A} - \mathbf{G}_e\mathbf{D})' = \mathbf{A}' - \mathbf{D}'\mathbf{G}_e'$, можно провести параллель между системой с матрицами коэффициентов $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{G}$ и системой с матрицами $\mathbf{A}', \mathbf{D}', \mathbf{G}_e'$. Заметим, что предпосылкой произвольного задания собственных значений наблюдателя является полная управляемость пары $[\mathbf{A}', \mathbf{D}']$, что эквивалентно наблюдаемости $[\mathbf{A}, \mathbf{D}]$, т. е. требованию, которое было сформулировано в п. 12.1.

Вначале нужно преобразовать уравнения наблюдателя к так называемой *сопряженной канонической форме фазовой переменной*. Необходимость этого преобразования вызвана тем, что представление матрицы коэффициентов в форме $\mathbf{A}' - \mathbf{D}'\mathbf{G}_e'$ позволяет выделить элементы матрицы обратной связи в коэффициентах характеристического уравнения. Эта матрица соответствует системе с уравнением состояния вида

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}'\mathbf{y}(k) + \mathbf{D}'\mathbf{v}(k) \quad (12-40)$$

где

$$\mathbf{v}(k) = -\mathbf{G}_e'\mathbf{y}(k) \quad (12-41)$$

$$\mathbf{y}(k+1) = (\mathbf{A}' - \mathbf{D}'\mathbf{G}_e')\mathbf{y}(k) \quad (12-42)$$

Необходимо преобразовать уравнения наблюдателя (12-38) в следующую форму:

$$\mathbf{y}_e(k+1) = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{K}_e\mathbf{D}_1)\mathbf{y}_e(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_e\mathbf{c}(k) \quad (12-43)$$

где \mathbf{A}_1 имеет размерность $n \times n$, $\mathbf{K}_e, \mathbf{B}_1$ — размерность $n \times 1$, \mathbf{D}_1 — размерность $1 \times n$. В общем случае $\mathbf{u}(k)$ не обязательно должна быть скалярной входной переменной, поскольку матрица \mathbf{B}_1 не будет входить в уравнения, используемые при синтезе. Искомое преобразование имеет вид

$$\mathbf{y}_e(k) = \mathbf{P}\mathbf{x}_e(k) \quad (12-44)$$

где \mathbf{P} — невырожденная матрица. Тогда

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{P}\mathbf{G}_e = [\mathbf{k}_{e1} \quad \mathbf{k}_{e2} \quad \dots \quad \mathbf{k}_{en}]' \quad (12-45)$$

$$D_1 = DP^{-1} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \quad (12-46)$$

$$B_1 = PB \quad (12-47)$$

и

$$A_1 = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (12-48)$$

Таким образом, система с матрицами коэффициентов A_1 и B_1 представляет собой сопряженную каноническую форму фазовой переменной, поскольку эти матрицы являются соответственно транспонированными матрицами A и B канонической формы фазовой переменной. Окончательно имеем

$$A_1 - K_e D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n - k_{e1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} - k_{e2} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} - k_{e3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 - k_{en} \end{bmatrix} \quad (12-49)$$

Характеристическое уравнение преобразованного наблюдателя, описываемого уравнением (12-43), имеет вид

$$|\lambda I - A_1 + K_e D_1| = \lambda^n + (a_1 + k_{en})\lambda^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + k_{e2})\lambda + (a_n + k_{e1}) = 0 \quad (12-50)$$

Поэтому все элементы матрицы обратной связи K_e содержатся только в соответствующих коэффициентах характеристического уравнения.

Для определения матрицы P положим

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (12-51)$$

где P_i — матрица-строка размерностью $1 \times n, i = 1, 2, \dots, n$. Подставляя выражение (12-51) в (12-48), получим

$$A_1 P = PA = \begin{bmatrix} -a_n P_n \\ P_1 - a_{n-1} P_n \\ P_2 - a_{n-2} P_n \\ \vdots \\ P_{n-1} - a_1 P_n \end{bmatrix} \quad (12-52)$$

Из соотношения (12-46) следует, что

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{P} = \mathbf{D} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \mathbf{P} = \mathbf{P}_n \quad (12-53)$$

Тогда уравнение (12-52) принимает вид

$$\begin{bmatrix} -a_n \mathbf{D} \\ \mathbf{P}_1 - a_{n-1} \mathbf{D} \\ \mathbf{P}_2 - a_{n-2} \mathbf{D} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n-1} - a_1 \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{P}_2 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (12-54)$$

Из последнего уравнения получаем

$$\mathbf{P}_{n-1} = a_1 \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (12-55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n-2} &= a_2 \mathbf{D} + \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{A} = \\ &= a_2 \mathbf{D} + a_1 \mathbf{D} \mathbf{A} + \mathbf{D} \mathbf{A}^2 \end{aligned} \quad (12-56)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \mathbf{P}_2 &= a_{n-2} \mathbf{D} + a_{n-3} \mathbf{D} \mathbf{A} + \dots + a_1 \mathbf{D} \mathbf{A}^{n-3} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{n-2} \end{aligned} \quad (12-57)$$

$$\mathbf{P}_1 = a_{n-1} \mathbf{D} + a_{n-2} \mathbf{D} \mathbf{A} + \dots + a_1 \mathbf{D} \mathbf{A}^{n-2} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{n-1} \quad (12-58)$$

Объединив соотношения (12-53) и (12-55)–(12-58), запишем матрицу \mathbf{P} в виде

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{D} \mathbf{A} \\ \mathbf{D} \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{D} \mathbf{A}^{n-2} \\ \mathbf{D} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (12-59)$$

Следует подчеркнуть, что коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_{n-1} определяют последним столбцом матрицы \mathbf{A}_1 [см. уравнение (12-48)]. Однако еще более важно, что эти коэффициенты находят из характеристического уравнения матрицы \mathbf{A} , которое имеет форму

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (12-60)$$

Описанный метод сопряженной канонической формы фазовой переменной можно применять к системам с несколькими выходами. Предпо-

ложим, что в уравнении (12-37) $s(k)$ теперь есть q -мерный вектор, а D — матрица размерностью $q \times n$. Поскольку изменение переменных состояния наблюдаемой системы не влияет отрицательно на ее наблюдаемость, можно преобразовать уравнения состояния к следующей форме:

$$y(k+1) = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_q \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_q \end{bmatrix} u(k) \quad (12-61)$$

где все $A_i, i = 1, 2, \dots, q$, представлены в сопряженной канонической форме фазовой переменной (12-48). Уравнение выхода преобразуется к виду

$$c(k) = \begin{bmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_q \end{bmatrix} y(k) \quad (12-62)$$

где $D_i, i = 1, 2, \dots, q$, представлены в форме матрицы-строки (12-46).

Используем задачу синтеза наблюдателя из примера 12-2 для иллюстрации метода сопряженной канонической формы фазовой переменной.

Пример 12.3. Для цифрового процесса, описанного в примерах 12.1 и 12.2, запишем характеристическое уравнение матрицы A :

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad (12-63)$$

Сравнивая уравнения (12-60) и (12-63), видим, что $a_1 = -1$ и $a_2 = 1$. Сопряженная каноническая форма фазовой переменной для A имеет вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12-64)$$

Для аperiodической реакции $x_e(k) - x(k)$ из уравнения (12-50) находим

$$k_{e2} = -a_1 = 1$$

$$k_{e1} = -a_2 = -1$$

Таким образом,

$$K_e = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12-65)$$

Матрица преобразования P определяется из соотношения (12-59)

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ DA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (12-66)$$

Матрица обратной связи наблюдателя находится с использованием (12-45) :

$$\mathbf{G}_e = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12-67)$$

что совпадает с результатом, полученным выше [см. уравнение (12-34)] .

12.3. СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

В предыдущих параграфах рассматривалась методика синтеза наблюдателя полного порядка. Другими словами, порядки наблюдателя и системы совпадали. В общем случае, поскольку q выходных переменных являются линейными комбинациями n переменных состояния, необходимо восстанавливать не более $n - q$ состояний. Эта идея реализуется в наблюдателе пониженного порядка. Так как в системе, описанной в примере 12-1, $c(k) = 2x_1(k)$, фактически можно определить $x_1(k)$ непосредственно по результату измерения $c(k)$ без какого-либо наблюдателя. В этом случае необходим наблюдатель только первого порядка. Однако следует отметить, что при определении q переменных состояния непосредственно по выходу системы имеется меньше возможностей в обеспечении требуемой динамики наблюдателя пониженного порядка.

Принцип действия наблюдателя пониженного порядка иллюстрируется структурной схемой на рис. 12.6. Этот наблюдатель имеет порядок, равный $n - q$. Компоненты n -мерного вектора состояния $x_e(k)$ образуются из $n - q$ восстанавливаемых состояний в виде вектора $w_e(k)$ и q -мерного вектора выхода $c(k)$.

Наблюдатель пониженного порядка может быть спроектирован с использованием принципа преобразования к сопряженной канонической форме фазовой переменной. Рассмотрим вначале систему с одним выходом и одним входом:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (12-68)$$

$$c(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) \quad (12-69)$$

которая является управляемой и наблюдаемой. Система преобразуется к сопряженной канонической форме фазовой переменной

$$y(k+1) = \mathbf{A}_1 y(k) + \mathbf{B}_1 u(k) \quad (12-70)$$

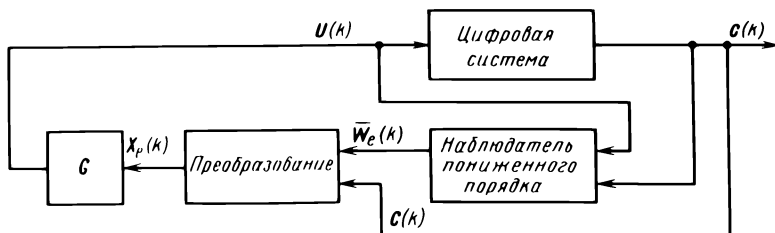


Рис. 12.6. Цифровая система с наблюдателем пониженного порядка

где $A_1 = PAP^{-1}$ описывается выражением (12-48), а $B_1 = PB$. Уравнение выхода преобразуется к виду

$$c(k) = D_1 y(k) \quad (12-71)$$

где

$$y(k) = Px(k)$$

$$D_1 = DP^{-1} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \quad (1 \times n) \quad (12-72)$$

Наблюдатель полного порядка для системы (12-68) и (12-69) описывается уравнением

$$x_e(k+1) = (A - G_e D)x_e(k) + Bu(k) + G_e c(k) \quad (12-73)$$

где G_e — $(n \times 1)$ -мерная матрица обратной связи наблюдателя. Наблюдатель полного порядка для системы, представленной в сопряженной канонической форме фазовой переменной (12-70) и (12-71), описывается уравнением

$$y_e(k+1) = (A_1 - K_e D_1)y_e(k) + B_1 u(k) + K_e c(k) \quad (12-74)$$

где K_e — $(n \times 1)$ -мерная матрица обратной связи наблюдателя. Поскольку D_1 имеет форму, удовлетворяющую соотношению (12-72), это означает, что $c(k) = y_n(k)$, так что необходимость в восстановлении $y_n(k)$ отпадает. Чтобы восстановить оставшиеся $(n-1)$ состояний $y(k)$ и иметь возможность произвольно размещать собственные значения, положим

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad (12-75)$$

Тогда

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12-76)$$

Заметим, что $QQ^{-1} = I$ (единичная матрица).

Положим

$$A_2 = QA_1Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} & -a_1 a_{n-1} - a_n + a_1 a_{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & -a_{n-2} & -a_1 a_{n-2} - a_{n-1} + a_1 a_{n-2} \\ 0 & 1 & \dots & -a_{n-3} & -a_1 a_{n-3} - a_{n-2} + a_1 a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -a_1 & -a_1^2 - a_2 + a_1 a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 + a_1 \end{bmatrix} \quad (12-77)$$

Преобразуем теперь систему с переменными состояния $y(k)$ к следующей системе

$$w(k+1) = A_2 w(k) + B_2 u(k) \quad (12-78)$$

$$c(k) = D_2 w(k) \quad (12-79)$$

где $w(k) = Qy(k)$.

Матрица A_2 определяется соотношением (12-77), а $B_2 = QB_1$, и

$$D_2 = D_1 Q^{-1} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \quad (12-80)$$

Наблюдатель, восстанавливающий $w(k)$, имеет форму

$$w_e(k+1) = A_2 w_e(k) + B_2 u(k) + L_e D_2 [w(k) - w_e(k)] \quad (12-81)$$

Поскольку D_2 описывается соотношением (12-80), получаем $c(k) = w_n(k)$, т. е. n -я компонента вектора состояния $w(k)$ является выходной переменной, так что ее не нужно восстанавливать. Поэтому $w_{en}(k) = w_n(k)$ и

$$L_e D_2 [w(k) - w_e(k)] = 0 \quad (12-82)$$

Уравнение (12-81) принимает вид

$$w_e(k+1) = A_2 w_e(k) + B_2 u(k) \quad (12-83)$$

Теперь основная цель состоит в преобразовании наблюдателя (12-81) в наблюдатель $(n-1)$ -го порядка с возможностью в то же время произвольно располагать его собственные значения. Уравнение (12-83) представим в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_e(k+1) \\ \vdots \\ w_{en}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & \vdots & E_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots & -a_1 + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_e(k) \\ \vdots \\ c(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_2 \\ \vdots \\ b_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (12-84)$$

Таким образом, наблюдатель $(n-1)$ -го порядка описывается уравнением

$$\bar{w}_e(k+1) = \bar{A}_2 \bar{w}_e(k) + E_2 c(k) + \bar{B}_2 u(k) \quad (12-85)$$

где

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (12-86)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} -a_1 a_{n-1} - a_n + a_1 a_{n-1} \\ -a_1 a_{n-2} - a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + a_{n-1} \\ \vdots \\ -a_1^2 - a_2 + a_1 a_1 \end{bmatrix} \quad (12-87)$$

и $\bar{B}_2 - [(n-1) \times 1]$ -мерная матрица.

Поскольку матрица \bar{A}_2 представлена в сопряженной канонической форме фазовой переменной, ее последний столбец состоит из коэффициентов характеристического уравнения:

$$|\lambda I - \bar{A}_2| = \lambda^{n-1} + a_1 \lambda^{n-2} + a_2 \lambda^{n-3} + \dots + a_{n-2} \lambda + a_{n-1} = 0 \quad (12-88)$$

Если восстанавливаемый вектор пониженного порядка $\bar{w}_e(k)$ определен, то $w_e(k)$ описывается соотношением

$$w_e(k) = \begin{bmatrix} \bar{w}_e(k) \\ c(k) \end{bmatrix} \quad (12-89)$$

Тогда

$$x_e(k) = (QP)^{-1} w_e(k) \quad (12-90)$$

что представляет собой искомое преобразование, которое показано на рис. 12.6.

Эффективность наблюдателя пониженного порядка анализируем далее путем сравнения восстановленного состояния $w_e(k)$ с действительным состоянием $w(k)$. Вычитая уравнение (12-83) из (12-78), получим

$$w(k+1) - w_e(k+1) = A_2 [w(k) - w_e(k)] \quad (12-91)$$

Поскольку $w_n(k) = c(k) = w_{en}(k)$, последнее соотношение преобразуется к виду

$$\bar{w}(k+1) - \bar{w}_e(k+1) = \bar{A}_2 [\bar{w}(k) - \bar{w}_e(k)] \quad (12-92)$$

Таким образом, динамика приближения $\bar{w}_e(k)$ к $\bar{w}(k)$ определяется собственными значениями матрицы \bar{A}_2 . Поскольку преобразование (12-90) не является динамическим и $w_{en}(k) = c(k)$, процесс восстановления $(n-1)$ переменных состояния вектора $x(k)$ также зависит от собственных значений \bar{A}_2 .

Пример 12.4. Рассмотрим еще раз цифровой процесс, описанный в примере 12-1. Предположим вначале, что система является разомкнутой. Уравнение состояния имеет вид

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (12-93)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Уравнение выхода удовлетворяет соотношению

$$c(k) = Dx(k) = [2 \quad 0]x(k) \quad (12-94)$$

Задача состоит в синтезе наблюдателя первого порядка для рассматриваемой системы. Матрица P , преобразующая A в сопряженную каноническую форму фазовой переменной, описывается выражением (12-66). Запишем матрицу A_2 [см. уравнение (12-77)] для системы второго порядка в виде

$$A_2 = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_1^2 - a_2 + a_1 a_1 \\ 1 & -a_1 + a_1 \end{bmatrix} \quad (12-95)$$

где a_1 и a_2 - коэффициенты характеристического уравнения матрицы A , т. е.

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad (12-96)$$

Таким образом, в соответствии с уравнением (12-60) $a_1 = -1$ и $a_2 = 1$. Коэффициент α_1 берется из характеристического уравнения матрицы \bar{A}_2 , которое имеет вид

$$\lambda + a_1 = 0 \quad (12-97)$$

Преобразованный наблюдатель пониженного порядка описывается соотношениями

$$\bar{w}_e(k+1) = \bar{A}_2 \bar{w}_e(k) + E_2 c(k) + \bar{B}_2 u(k) \quad (12-98)$$

и

$$w_e(k) = [\bar{w}_e(k) \quad c(k)]' \quad (12-99)$$

$$\bar{A}_2 = -a_1$$

$$E_2 = -a_1^2 - a_2 + a_1 a_1 = -a_1^2 - a_1 - 1$$

$$\bar{B}_2 = 2$$

Чтобы получить аperiодический переходный процесс для ошибки наблюдателя, положим коэффициент α_1 равным нулю. Уравнение (12-98) примет вид

$$\bar{w}_e(k+1) = -c(k) + 2u(k) \quad (12-100)$$

Диаграмма состояния для системы с наблюдателем первого порядка представлена на рис. 12.7. Для произвольных начальных состояний $x(0)$ и $\bar{w}_e(0)$ можно показать, что $x_e(k)$ принимает значение x при $k \geq 1$. Для $x(0) = [1 \quad 0]'$, $w_e(0) = 0,5$ и $u(k) = 0$ при всех k в табл. 12.1 представлены значения переменных состояния системы для $k \leq 5$.

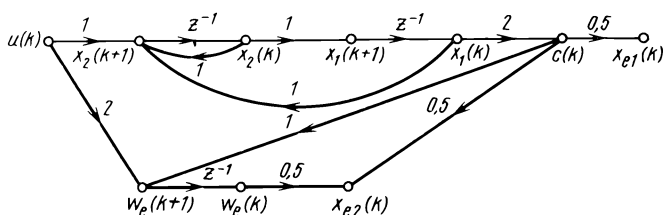


Рис. 12.7. Наблюдатель пониженного порядка и разомкнутая цифровая система

Таблица 12.1

Функция	k					
	0	1	2	3	4	5
$x_1(k)$	1	0	-1	-1	0	1
$x_{e1}(k)$	1	0	-1	-1	0	1
$x_2(k)$	0	-1	-1	0	1	1
$x_{e2}(k)$	1,25	-1	-1	0	1	1
$\bar{w}_e(k)$	0,50	-2	0	2	2	0
$c(k)$	2	0	-2	-2	0	2

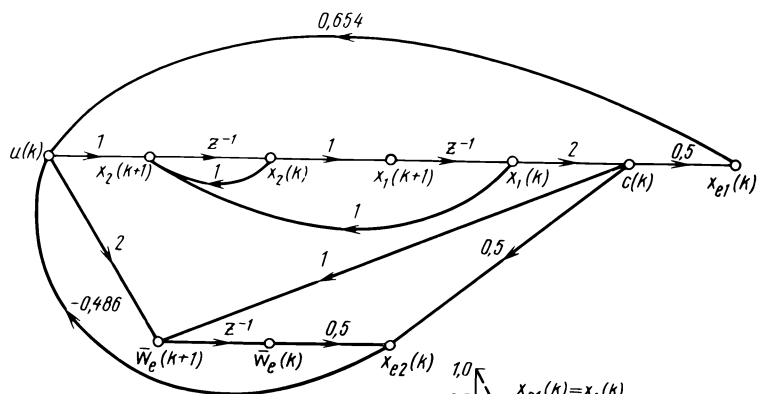


Рис. 12.8. Наблюдатель пониженного порядка и замкнутая цифровая система

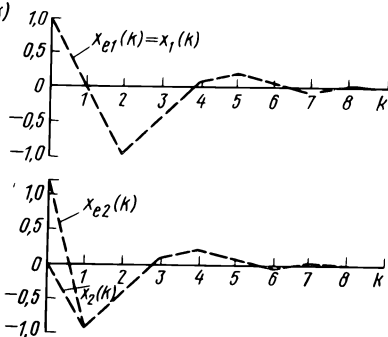


Рис. 12.9. Переходные процессы в цифровой замкнутой системе с наблюдателем состояния пониженного порядка

В замкнутой системе $u(k) = -Gx_e(k)$, где матрица обратной связи G описывается выражением (12-33). Подставляя соотношения (12-99), (12-90) и выражение для управления в уравнение (12-100), получим

$$\begin{aligned} \bar{w}_e(k+1) &= -c(k) - 2Gx_e(k) = \\ &= -2x_1(k) + [1,308 \quad -0,972] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ 0,5\bar{w}_e(k) + x_1(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12-101)$$

или

$$\bar{w}_e(k+1) = -1,664x_1(k) - 0,486\bar{w}_e(k) \quad (12-102)$$

Уравнения состояния цифровой системы (12-93) с учетом обратной связи по состоянию имеют вид

$$x_1(k+1) = x_2(k) \quad (12-103)$$

$$x_2(k+1) = -0,832x_1(k) + x_2(k) - 0,243\bar{w}_e(k) \quad (12-104)$$

На рис. 12.8 представлена диаграмма состояния замкнутой системы с наблюдателем первого порядка.

Чтобы получить переходные процессы для $x(k)$ и $\bar{w}_e(k)$, $k=1, 2, \dots$, необходимо решить уравнения (12-102) – (12-104) при заданных начальных условиях $x(0) = [1 \ 0]'$ и $\bar{w}_e(0) = 0,5$. Восстановленные состояния $x_e(k)$ определяются из выражения (12-90), а именно:

$$x_e(k) = (QP)^{-1}\bar{w}_e(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ 0,5\bar{w}_e(k) + x_1(k) \end{bmatrix} \quad (12-105)$$

Таким образом, в данной системе $x_{e1}(k)$ совпадает с $x_1(k)$, а единственным состоянием, которое восстанавливается наблюдателем первого порядка, является $x_2(k)$.

На рис. 12.9 представлены переходные процессы для $x(k)$ и $x_e(k)$ в замкнутой системе. Отметим, что, поскольку синтезированный апериодический наблюдатель имеет первый порядок, $x_e(k)$ принимает значение $x(k)$ за один период квантования. Однако, сравнивая переходные процессы, представленные на рис. 12.9, с процессами в системе с наблюдателем полного порядка (рис. 12.5), можно заметить, что использование наблюдателя пониженного порядка приводит к увеличению перерегулирования в замкнутой системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tse, E., and Athans, M., "Optimal Minimal-Order Observer-Estimators For Discrete Linear Time-Varying Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-15, August 1970, pp. 416-426.
2. Luenberger, D. G., "An Introduction to Observers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-16, December 1971, pp. 596-602.
3. Leondes, C. T., and Novak, L. M., "Reduced-Order Observers for Linear Discrete-Time Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-19, February 1974, pp. 42-46.

ГЛАВА 13. МИКРОПРОЦЕССОРЫ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

13.1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих главах были рассмотрены математические основы анализа и проектирования цифровых систем управления: метод z -преобразования и метод пространства состояний. Во всех случаях выбор периода квантования определялся или импульсной теоремой, или устойчивостью и общими показателями качества цифровой системы управления. Параметры цифрового регулятора и другие параметры системы выбирались аналитически с точки зрения их физической реализуемости и качества система. Однако цифровым системам управления присущи физические ограничения, определяемые дискретными процессами и элементами, которые отсутствуют в аналоговых или непрерывных системах. Например, период квантования в цифровых системах управления задается таймером и зависит от скорости выполнения процессором арифметических операций и инструкций. Если в качестве вычислительного устройства используется микропроцессор, то скорость выполнения программы относительно мала. Следовательно, аппаратное обеспечение цифровой системы управления накладывает ограничения на частоту квантования.

Другими ограничениями при проектировании цифровой системы управления является конечная длина слова. Это означает, что не все числа могут быть реализованы в процессоре. Длина слова в большинстве микропроцессоров равна только 8 бит.

Из гл. 2 известно, что слово из 8 бит обеспечит только $2^8 = 256$ уровней разрешения. Этот эффект известен также как квантование по уровню. В предыдущих главах при решении конкретных задач проектирования для параметров цифрового регулятора получались значения 0,995 ; 1,316 и т. д. Эти числа не могут быть точно реализованы в микропроцессоре с длиной слова 8 бит поэтому необходимо изучить эффекты квантования по уровню и учитывать их в процессе проектирования. Хотя аналитическое проектирование цифровой системы довольно легко обеспечивает аperiодический переходный процесс, на практике все определяется возможностями конкретного оборудования.

В этой главе будут рассмотрены примеры программирования микропроцессора, продемонстрированы все ограничения, вызванные конечной длиной слова, квантованием по уровню и конечной скоростью выполнения вычислительных операций.

Общие сведения об архитектуре микропроцессорных систем и их программировании можно получить из справочной литературы и учебников, что полезно сделать до ознакомления с последующим материалом этой книги.

13.2. МИКРОПРОЦЕССОР КАК УПРАВЛЯЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим некоторые аспекты программирования реальной системы на основе микропроцессорного устройства. Возможный вариант использования микропроцессора (МП) в качестве регулятора показан на рис. 13.1. В этом случае объект управления представлен двигателем постоянного тока (ДПТ), нагрузкой и усилителем мощности (УМ). Аналоговый объект и микропроцессор связаны через аналого-цифровой (АЦП) и цифроаналоговый (ЦАП) преобразователи. Таким образом, вся система должна рассматриваться как цифровая система управления с периодом квантования T секунд.

Пусть целью управления этой системы с двигателем постоянного тока является поддержание скорости нагрузки $\omega(t)$ постоянной, равной значению задаваемой скорости ω_d . Тогда ошибка между задаваемой скоростью и скоростью нагрузки определяется как

$$e(t) = \omega_d - \omega(t) \quad (13-1)$$

На входе микропроцессора действует дискретный сигнал ошибки $e(kT)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а сигнал на выходе микропроцессора обозначим $u(kT)$.

Предположим, что микропроцессор должен совершать цифровые вычисления для реализации пропорционально-интегрального (ПИ-) регулятора, описываемого в непрерывной форме как

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t) dt \quad (13-2)$$

Интеграл в последнем выражении может быть записан в виде

$$x(t) = \int_{t_0}^t [\omega_d - \omega(\tau)] d\tau + x(t_0) \quad (13-3)$$

где t_0 — начальный момент времени; $x(t_0)$ — начальное значение $x(t)$. Для вычисления интеграла могут быть использованы различные методы. Будем использовать метод трапеций и положим $t = kT$, $t_0 = (k-1)T$. Тогда определенный интеграл в выражении (13-3) записывается как

$$\int_{(k-1)T}^{kT} [\omega_d - \omega(t)] dt \cong \omega_d T - \frac{T}{2} \{ \dot{\omega}(kT) + \dot{\omega}[(k-1)T] \} \quad (13-4)$$

для $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, значение интеграла в последнем выраже-

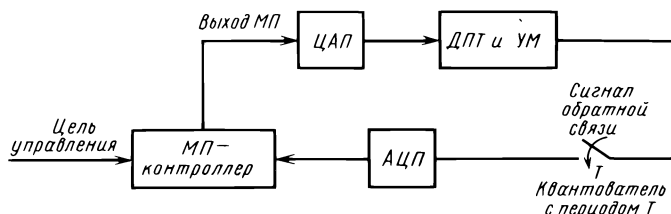


Рис. 13.1. Структурная схема микропроцессорной системы управления двигателем постоянного тока

IN DATA	; ВВЕСТИ ОМЕГА(КТ) ЧЕРЕЗ ПОРТ ВВОДА 3
MOV D,A	; ЗАГРУЗИТЬ ОМЕГА(КТ) В РЕГИСТР D
LDA WD	; ЗАГРУЗИТЬ ЗНАЧЕНИЕ ОМЕГАD В АККУМУЛЯТОР
SUB D	; ВЫЧИСЛИТЬ ОМЕГАD-ОМЕГА(КТ)
CALL DIVIDE2	; ВЫЗВАТЬ ПОДПРОГРАММУ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ; $KP \# \langle \text{ОМЕГАD} - \text{ОМЕГА(КТ)} \rangle, KD=0,5$
MOV C,A	; ЗАГРУЗИТЬ РЕЗУЛЬТАТ В РЕГИСТР C
LDA WOLD	; ЗАГРУЗИТЬ ЗНАЧЕНИЕ ОМЕГА((K-1)*T) В ; АККУМУЛЯТОР
MOV B,A	; ЗАГРУЗИТЬ В РЕГИСТР B
MOV A,D	; ПЕРЕСЛАТЬ ПОСЛЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ОМЕГА(КТ)
STA WOLD	; ЗАМЕНИТЬ ЗАГРУЖЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ОМЕГА(КТ) ; ПОСЛЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ
ADD B	; ВЫЧИСЛИТЬ $\text{ОМЕГА(КТ)} - \text{ОМЕГА}((K-1)*T)$
CALL DIVIDE2	; ВЫЗВАТЬ ПОДПРОГРАММУ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ; $T * \langle \text{ОМЕГА(КТ)} - \text{ОМЕГА}((K-1)*T) \rangle / 2, T=1$
MOV B,A	; ЗАГРУЗИТЬ РЕЗУЛЬТАТ В РЕГИСТР B
LDA WD	; ЗАГРУЗИТЬ В АККУМУЛЯТОР ОМЕГАD
SUB B	; ВЫЧИСЛИТЬ $\text{ОМЕГАD} * T - T * \langle \text{ОМЕГА(КТ)} +$; $+ \text{ОМЕГА}((K-1)*T) \rangle / 2$
MOV B,A	; ЗАГРУЗИТЬ РЕЗУЛЬТАТ В РЕГИСТР B
LDA XOLD	; ЗАГРУЗИТЬ X(КТ) В АККУМУЛЯТОР
ADD B	; ВЫЧИСЛИТЬ $\text{ОМЕГАD} * T - T * \langle \text{ОМЕГА(КТ)} +$; $+ \text{ОМЕГА}((K-1)*T) \rangle / 2 + X(КТ) = X((K+1)*T)$
STA XOLD	; ЗАМЕНИТЬ ЗАГРУЖЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ X(КТ) ; ЗНАЧЕНИЕМ $X((K+1)*T)$
CALL MULTIPLY4	; ВЫЧИСЛИТЬ $KI * X((K+1)*T), KI=4$
ADD C	; ВЫЧИСЛИТЬ $U((K+1)*T) =$; $KP \# \langle \text{ОМЕГАD} - \text{ОМЕГА(КТ)} \rangle + KI * X((K+1)*T)$
DIVIDE2: JM NEGATIVE	
ORA A	
RAR	
RET	
NEGATIVE: STC	
RAR	
RET	
MULTIPLY4: ORA A	
RAL	
ORA A	
RAL	
RET	
WOLD:	DB 0
WD:	DB 25
XOLD:	DB 0

Рис. 13.3. Программа на языке ассемблера в системе команд "Интел 8080" для реализации ПИ-регулятора

целей. Во-первых, импульс поступает на шину прерываний микропроцессора, что приводит к остановке рабочей программы и выполнению программы прерывания, которая в данном случае будет программой вывода следующего значения управления $u[(k+1)T]$. Это управление передается в ЦАП, выходной сигнал которого управляет УМ. Во-вторых, импульс времени от таймера поступает на шину управления АЦП. Этот импульс управляет устройством выборки и хранения АЦП, при этом мгновенная скорость двигателя $\omega(t)$ квантуется и фиксируется в течение одного периода квантования. Затем АЦП преобразует это значение $\omega(kT)$ в N разрядов двоичного кода. Для этого процесса, как описано в гл. 2, требуется конечное время. Следовательно, АЦП должен сообщить микропроцессору через шину готовности данных о том, что дискретные данные преобразованы. Шина готовности данных может быть также соединена с шиной прерываний микропроцессора. Второе прерывание приводит к тому, что в процессор вводится значение $\omega(kT)$, и он вычисляет следующее значение управления, т. е. $u[(k+1)T]$. После того как управление вычислено, микропроцессор ждет следующего прерывания от таймера для вывода управления при $t = (k+1)T$.

На рис. 13.3 приведена основная программа для реализации ПИ-регулятора в системе команд микропроцессора "Интел 8080". Для простоты положим $K_p = 1/2$ и $K_I = 4$, оба числа с основанием 2. Период прерывания выбран равным 1 с. Как показано на рис. 13.2, данные от АЦП представлены дискретными значениями $\omega(t)$ при $t = kT, \omega(kT)$.

Хотя в предыдущем примере был рассмотрен ПИ-регулятор, в общем случае не трудно ввести операцию дифференцирования, реализовав, таким образом, ПИД-регулятор. Одним из общепринятых методов численного дифференцирования является метод обратной разности.

Пусть $\dot{x}(t)$ является производной по времени функции $x(t)$, тогда $\dot{x}(t)$ численно может быть представлена как

$$\dot{x}(t) \cong \frac{x(kT) - x[(k-1)T]}{T} \quad (13-7)$$

где T — период квантования, с.

Рассмотрение вопросов программирования микропроцессоров, приведенное ниже, имеет целью познакомить читателя с некоторыми методами, используемыми при проектировании системы прямого микропроцессорного управления. Приведенный пример показывает, что управление двигателем постоянного тока с помощью ПИ-регулятора реализовано микропроцессорной программой. На начальной стадии решения задачи ПИ-регулятор описывается дифференциальным уравнением. Последнее записывается с применением одного из приближенных численных методов в дискретной форме для моментов выборки и затем программируется на языке микропроцессора. Как вариант (и это довольно распространенный случай в практике систем управления) цифровой регулятор может быть описан передаточной функцией в области z , $D(z)$. При подготовке программы для микропроцессора сначала необходимо преобразовать $D(z)$ с помощью одного из методов, рассмотренных в гл. 4. Затем микропроцессорная программа может быть получена из диаграммы состояния или из уравнений состояния, которые описывают цифровой регулятор.

13.3. ОГРАНИЧЕНИЯ МИКРОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Аналитическое и теоретическое исследования цифровых систем управления, проводимые в этой книге, предполагают, что ЭВМ рассматривается без физических ограничений. Известно что в физических системах и элементах имеются практические ограничения, такие, как насыщение, зона нечувствительности, гистерезис и др., которые оказывают существенное влияние на качество систем управления. При использовании микропроцессора проектировщик системы должен принять во внимание конечную длину слова и временные задержки, возникающие при выполнении рабочих инструкций. Как конечная длина слова микропроцессора влияет на качество системы управления, так нелинейность квантователя и временные задержки влияют на выбор цифрового закона управления — все эти вопросы будут изучены ниже.

Представляемый материал даст возможность читателю почувствовать, какой круг вопросов возникает при внедрении микропроцессорных систем управления, и что можно сделать с этими неизбежными трудностями.

13.4. ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ СЛОВА НА УПРАВЛЯЕМОСТЬ И РАСПОЛОЖЕНИЕ ПОЛЮСОВ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Так как микропроцессоры оперируют с ограниченной длиной слова, то, вообще говоря, сигналы на входе и выходе микропроцессора будут усеченными или квантованными; параметры закона управления будут округлены при реализации последнего в процессоре с помощью рабочей программы. Следовательно, необходимо исследовать влияние этих эффектов на качество системы, когда параметры системы могут быть реализованы только конечным набором чисел.

В гл. 9 был рассмотрен метод синтеза цифровых систем управления по расположению полюсов замкнутой системы. Синтезируемыми параметрами являются коэффициенты обратной связи по состоянию или по выходу. Было показано, что при синтезе по заданному расположению полюсов, если система полностью управляема, полюсы замкнутой системы могут быть расположены произвольно. Однако, если коэффициенты обратной связи не представляют произвольного набора чисел, это означает, что полюсы замкнутой системы не могут принадлежать открытой области. Другими словами, если параметры обратной связи могут быть реализованы только конечным набором чисел, то любое начальное состояние может быть приведено только к ограниченному числу конечных состояний за конечное время. Следовательно, уместно заметить, что в строгом смысле определения управляемости цифровая система не может быть управляемой, если она оперирует со словом конечной длины при наличии квантования, она не может быть управляемой. Однако с практической точки зрения, если уровни квантования малы, не следует обращать чрезмерное внимание на проблемы управляемости. Гораздо важнее то, что ограничение на значения параметров системы приводит к ошибкам системы и проблемам

устойчивости, которые являются прямым следствием квантования по амплитуде.

Для исследования эффекта квантования управляющего входа рассмотрим систему

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (13-8)$$

где $u(k)$ — скалярный вход. Предположим, что $u(k)$ ограничено квантовым набором величин, т. е.

$$u(k) = n_k q \quad (13-9)$$

где $n_k = 0, 1, 2, \dots$; q — шаг квантования по уровню.

Решение уравнения (13-8) есть

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-k-1} \mathbf{B} u(k) \quad (13-10)$$

Подстановка выражения (13-9) в (13-10) дает

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) + q \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-k-1} \mathbf{B} n_k \quad (13-11)$$

Так как $u(k)$ ограничено определенными уровнями $n_k q$, то конечное состояние $\mathbf{x}(N)$ является параметрической функцией целых чисел n_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Если пара $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ управляема, то $\mathbf{x}(0)$ может быть переведено в любую точку $\mathbf{x}(N)$ в пространстве состояний только в том случае, если $u(k)$ может быть выбрано из континуума значений. Однако так как $u(k)$ ограничено квантованными значениями, то $\mathbf{x}(N)$ также ограничено. Следующий пример иллюстрирует проблему управляемости, обусловленную эффектом квантования в цифровых системах управления.

Пример 13.1. Рассмотрим цифровую систему управления, описываемую уравнениями состояния

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (13-12)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

а $u(k)$ подвергается квантованию по амплитуде с шагом квантования q . Переходное уравнение состояния для системы (13-12) есть

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-k-1} \mathbf{B} u(k) \quad (13-13)$$

где

$$\mathbf{A}^N = \begin{bmatrix} (-1)^{N+1}(N-1) & (-1)^{N+1}N \\ (-1)^N N & (-1)^N(N+1) \end{bmatrix} \quad (13-14)$$

Так как пара $[\mathbf{B}, \mathbf{AB}]$ полностью управляема, вектор $\mathbf{A}^{N-k-1}\mathbf{B}$ можно выразить в виде линейной комбинации двух векторов \mathbf{B} и \mathbf{AB} . Для рассматриваемого случая можно показать, что

$$\mathbf{A}^{N-k-1}\mathbf{B} = (-1)^{N-k-2}[(N-k-2)\mathbf{B} + (N-k-1)\mathbf{AB}] \quad (13-15)$$

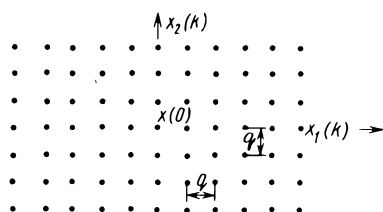


Рис. 13.4. Реализуемые состояния $x_1(k)$ и $x_2(k)$ при квантовании по амплитуде состояний и управлений

Поскольку вектор $A^{N-k-1}B$ линейно и интегрально зависит от B и AB , можно записать выражение (13-13) как

$$x(N) = A^N x(0) + n_1 q B + n_2 q AB = A^N x(0) + n_1 q \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + n_2 q \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (13-16)$$

где n_1 и n_2 — целые числа, а q — шаг квантования.

Выражение (13-16) показывает, что в любой момент замыкания $k = N$ величины $x_1(N)$ и $x_2(N)$ могут принимать только дискретный набор значений. Для любого заданного начального состояния $x(0)$ набор достижимых состояний $x_1(k)$ и $x_2(k)$ расположен через интервалы q в плоскости (x_1, x_2) , как показано на рис. 13.4.

Когда параметры обратной связи по состоянию или обратной связи по выходу реализуются на микропроцессоре, они являются квантованными по уровню. Это означает, что если синтез проводится по расположению полюсов, то полюсы замкнутой системы не могут быть расположены на z -плоскости чисто произвольно. Влияние квантования на расположение полюсов иллюстрирует следующий пример.

Пример 13.2. Рассмотрим цифровую систему

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (13-17)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u(k) = -Gx(k) \quad (13-18)$$

$$G = [g_1 \quad g_2] \quad (13-19)$$

Значения g_1 и g_2 квантованы с шагом q . Запишем характеристическое уравнение замкнутой системы как

$$|zI - A + BG| = z^2 + g_2 z + g_1 = (z - r_1)(z - r_2) = 0 \quad (13-20)$$

где r_1 и r_2 — собственные значения замкнутой системы. Тогда

$$G = [g_1 \quad g_2] = [r_1 r_2 \quad -(r_1 + r_2)] \quad (13-21)$$

На рис. 13.5 показана область устойчивости в плоскости параметров g_1, g_2 для случая представления коэффициентов обратной связи g_1 и g_2 в форме с фиксированной запятой и длиной слова 3 бит. В этом случае шаг квантования

$$q = 2^{-3} = 1/8 \quad (13-22)$$

Реализуемые значения g_1 и g_2 обозначены точками, причем показаны только значения, соответствующие устойчивой замкнутой системе.

Полезно исследовать реализуемость полюсов замкнутой системы при квантовании g_1 и g_2 . Пусть корни уравнения (13-20) представлены в полярных координатах

$$z_1 = re^{j\theta} \quad (13-23)$$

$$z_2 = re^{-j\theta} \quad (13-24)$$

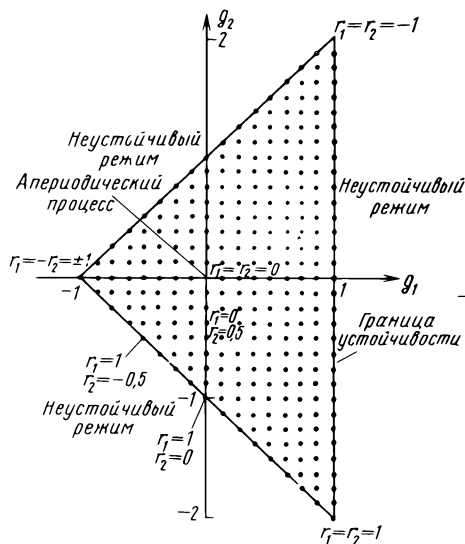


Рис. 13.5. Квантование коэффициентов обратной связи g_1 и g_2 на плоскости параметров

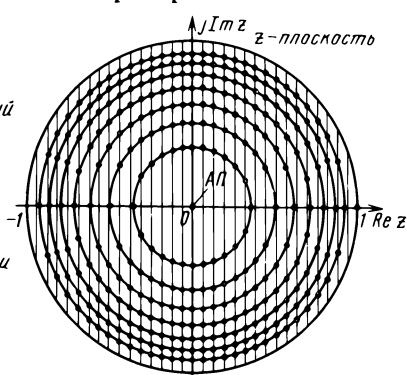


Рис. 13.6. Траектории на z -плоскости, соответствующие реализуемым полюсам при квантовании коэффициентов обратной связи g_1 и g_2 : $AΠ$ – аperiодический процесс

Характеристическое уравнение (13-20) можно записать

$$z^2 - 2r \cos \theta z + r^2 = 0 \quad (13-25)$$

Тогда

$$r = \pm \sqrt{g_1} \quad (13-26)$$

Таким образом, квантование g_1 с шагом q приводит к тому, что корни располагаются на концентрических окружностях в z -плоскости. Центр этих окружностей расположен в начале координат, а радиусы равны соответственно $0, \sqrt{q}, \sqrt{2q}, \dots$. Эти окружности показаны на рис. 13.6 для $q = 1/8$.

Так как действительная часть корней равна $r \cos \theta$, квантование g_2 ($= -2r \cos \theta$) эквивалентно ограничению действительной части корней конечным набором значений. Обозначим действительную часть корней как σ , тогда

$$\sigma = r \cos \theta = -g_2/2 \quad (13-27)$$

Точки пересечения окружностей с вертикальными линиями соответствуют реализуемым полюсам при квантовании g_1 и g_2 .

13.5. ЗАПАЗДЫВАНИЕ В МИКРОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Кроме того, что микропроцессоры оперируют со словами конечной длины, они являются относительно "медленными" вычислительными устройствами. Во многих случаях, которые не требуют обработки информации в реальном времени, скорость вычислительных операций не играет существенного значения. Однако для систем управления режим реального времени часто является необходимым, и временные задержки, связанные с обработкой информации, могут оказывать существенное влияние на характеристики системы. Прежде всего важно определить длительность этих задержек, чтобы аналитически исследовать их влияние на систему. Два вопроса немедленно возникают в связи с временными задержками в

системах управления. Во-первых, если скорость счета в процессоре мала, то будет ли достаточно времени, чтобы выполнить все необходимые вычисления, предписываемые алгоритмом управления. И, во-вторых, как повлияет временная задержка на устойчивость замкнутой системы.

Временные задержки, связанные с вычислительной процедурой микропроцессора, могут быть определены из анализа программы, реализующей закон управления, с учетом подпрограмм, которые могут быть вызваны из любого пакета функциональных задач. Каждая программа состоит из набора инструкций, которые требуют для своего выполнения определенного количества машинных циклов. В свою очередь каждый машинный цикл требует определенного количества машинных состояний. Время выполнения микропроцессором конкретной инструкции прямо пропорционально общему числу машинных состояний, через которые должен пройти микропроцессор при выполнении этой инструкции. Например, для микропроцессора "Интел 8080" каждое состояние равно 500 нс. Это означает, что за секунду процессор проходит через 2 млн. состояний. Такая скорость может показаться чрезвычайно высокой, однако для выполнения даже простой программы могут потребоваться тысячи машинных состояний.

Информация о количестве машинных состояний, необходимых для выполнения конкретной инструкции, может быть найдена в справочниках по эксплуатации микропроцессора. Учитывая эти данные, нетрудно определить общее время, необходимое для выполнения программы, и время, необходимое для достижения определенного этапа в вычислительной процедуре; для этого просматривают всю программу от инструкции к инструкции, суммируя количество машинных состояний или время их выполнения.

Для иллюстрации ниже приведены типичные затраты времени при выполнении различных вычислительных процедур микропроцессором "Интел 8080", которые показывают, что суммирование и умножение чисел с плавающей запятой требует значительного времени.

Задание	Время выполнения, мкс
Суммирование чисел с плавающей запятой	18,5 — 202,5
Умножение чисел с плавающей запятой.	63,5 — 446
Преобразование чисел с плавающей запятой к виду с фиксированной запятой	25 — 109

На рис. 13.7 показана программа, реализующая ПИД-регулятор в микропроцессоре "Интел 8080". Слева от текста программы указано время, необходимое для выполнения каждой инструкции, поэтому можно оценить общее время выполнения программы для микропроцессора "Интел 8080". В данном случае временная задержка равна приблизительно 2 мс. Важно подчеркнуть, что в общем случае временная задержка является случайной величиной. Один набор входных данных программы может потребовать выполнения микропроцессором определенного набора инструкций и циклов, в то время как другие входные данные могут изменить набор инструкций и, возможно, циклов. Следовательно, число состояний, требуемых для выполнения вычислительной процедуры, может изменять-

		DACA EQU 08H	.ОПРЕДЕЛЕНИЕ	ВЫВОД
		CNTRA EQU 07H	.ПОРТОВ	ВВОДА X1
		CNTRB EQU 0FH		ВВОДА X2
		CMD EQU 88H		
		SPWT EQU 07EH	.ОПРЕДЕЛЕНИЕ	ТАЙМЕР
		CURT EQU 07EH	.НАЧАЛА	АЦП
		CNRT EQU 07EH	.ПОДПРОГРАММ	ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧИСЕЛ ПЗ В ФЗ
		FADD EQU 05EH		СУММИРОВАНИЕ ЧИСЕЛ С ПЗ
		FMULT EQU 05EH		УМНОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ С ПЗ
		ORG 2000H		
	KP:	DW 2	.ЗНАЧЕКИ	
	KI:	DW 2	.ПАМЯТИ	
	KD:	DW 2	.ДЛЯ	
	X1:	DW 2	.CONSTANT	
	X2:	DW 2		
	Z:	DW 2		
	T:	DW 2		
	U:	DW 2		
	S:	DW 2		
		ORG 2012H	.ГЛАВНАЯ ПРОГРАММА	
		MUI A,CMD		
		OUT CNTRA		
		OUT CNTRB		
ВРЕМЯ	LP:	CALL SPWT	.ОЖИДАНИЕ СЛЕДУЮЩЕГО ЗАМЫКАНИЯ	
ВЫПОЛНЕНИЯ, мкс		CALL CURT	.ВЫПОЛНЕНИЕ ПОДПРОГРАММЫ АЦП	
2.5		MOV H,B		
3.5		MUI L,0H		
8		SHLD X1	.ЗАГРУЗИТЬ X1 В ПАМЯТЬ	
2.5		MOV H,C		
8		SHLD X2	.ЗАГРУЗИТЬ X2 В ПАМЯТЬ	
8		LDHL KP		
2.5		MOV B,H		
2.5		MOV C,L		
8		LDHL X1		
2		XCHG		
446+10		CALL FMULT		
2.5		MOV H,B		
2.5		MOV L,C	.УМНОЖИТЬ KP*X1 И	
8		SHLD T	.ЗАГРУЗИТЬ РЕЗУЛЬТАТ В T	
8		LDHL Z		
2.5		MOV B,H		
2.5		MOV C,L		
8		LDHL KI		
2		XCHG		
446+10		CALL FMULT	.УМНОЖИТЬ KI*Z	
8		LDHL T	.T=KP*X1+KI*Z	
2		XCHG		
202.5+10		CALL FADD		
2.5		MOV H,B		
2.5		MOV L,C		
8		SHLD T		
8		LDHL X2		
2.5		MOV B,H		
2.5		MOV C,L		
8		LDHL ID		
2		XCHG		
446+10		CALL FMULT		
8		LDHL T		
2		XCHG		
202.5+10		CALL FADD		
2.5		MOV H,B		
2.5		MOV L,C		
8		SHLD U	.СЛОЖИТЬ KI*X2 С СОДЕРЖИМЫМ T	
109+10		CALL CNRT	.И ЗАГРУЗИТЬ РЕЗУЛЬТАТ В U	
2.5		MOV A,B		
5		OUT DACA	.ПРЕОБРАЗОВАНИЕ U ИЗ ФОРМЫ С	
			.ПОДВАНУШЕЙ ЗАПЯТОЙ В ФОРМУ С	
			.ФИКСИРОВАННОЙ ЗАПЯТОЙ И ВЫВОД	
			.В ПОРТ DACA	
			.ПОДГОТОВКА ДАННЫХ ДЛЯ	
			.СЛЕДУЮЩЕГО ШАГА	
		LDHL S		
		MOV B,H		
		MOV C,L		
		MUI A,0H		
		SUB B		
		MOV B,A		
		LDHL I1		
		XCHG		
		CALL FADD		
		LDHL Z		
		XCHG		
		CALL FADD	.Z*(K+1)=Z*(K)+C*(K)-S	
		MOV H,B		
		MOV L,C		
		SHLD Z		
		JMP LP	.ВОЗВРАТ В НАЧАЛО ПРОГРАММЫ	
			.ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ	
			.СЛЕДУЮЩЕГО ШАГА	
		END		

Рис. 13.7. Простая программа ПИД-регулятора для МП "Интерел 8080"

ся в зависимости от входных данных и используемых подпрограмм, что приведет к максимальной и минимальной оценкам общего времени вычислительной процедуры.

Для пояснения случайного характера временной задержки рассмотрим случай сложения двух чисел с плавающей запятой. Прежде всего необходимо определить, какое из двух чисел имеет больший порядок. После этого меньшее число преобразуется к виду с тем же порядком. Это преобразование может потребовать различного времени, и после его выполнения числа могут быть сложены. Очевидно, что два числа с одинаковым порядком можно сложить быстрее, чем два числа, для которых необходимо преобразование порядка. Более того, для сложения двух чисел с большой разностью в порядках, может потребоваться еще большее время. Вместе с тем, если одно из чисел есть нуль, то может быть реализован досрочный выход из программы, на что потребуются минимальное время по сравнению со временем в рассмотренных выше случаях.

В общем на действия с числами, представленными в форме с фиксированной запятой, требуется меньше процессорного времени, поэтому такой форме представления чисел отдается предпочтение при практической реализации цифрового регулятора. Например, типичное время сложения чисел с фиксированной запятой равно 2 мкс.

Итак, временные задержки определяются выполнением рабочей программы. Поскольку большинство микропроцессоров являются "медленными" цифровыми устройствами, при моделировании цифрового регулятора этими задержками пренебрегать нельзя. Хорошо известно, что временные задержки обычно оказывают неблагоприятное влияние на характеристику замкнутых систем как аналоговых, так и цифровых, поэтому ясно, что они обязательно должны быть учтены при проектировании цифровых систем управления.

13.6. ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ ПО УРОВНЮ.

НАИМЕНЬШИЙ ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ ОШИБКИ КВАНТОВАНИЯ

В предыдущих параграфах этой главы эффекты квантования по уровню и конечной длине слова изучались с точки зрения синтеза систем по расположению полюсов и их управляемости. В общем случае непосредственное влияние квантования на цифровую систему можно выразить двумя понятиями: "точность" и "устойчивость". Ниже будет исследовано влияние эффектов квантования на установившуюся ошибку системы.

Структурная схема квантователя по уровню и его статическая характеристика, представленная на рис. 13.8. Штриховой линией показана желаемая статическая характеристика квантователя. Заметим, что амплитуда входного сигнала $r(t)$ может принимать любое значение, а величина выходного сигнала $y(t)$ может принимать только дискретные значения, ближайшие к значениям $r(t)$. Характеристика (см. рис. 13.8) имеет одинаковые уровни квантования, поэтому когда значение входного сигнала лежит между $-q/2$ и $q/2$, то выходной сигнал равен нулю; в интервале меж-

Рис. 13.8. Квантователь по уровню и его статическая характеристика

ду $q/2$ и $3q/2$ выходной сигнал равен q и т. д. Как было показано в гл. 2, соотношение между шагом квантования q и длиной слова имеет вид

$$q = 2^{-N} \text{МЗЧ}, \quad (13-28)$$

где N — число двоичных битов или длина слова, а МЗЧ представляет собой полный масштаб входного сигнала. Ошибка квантования равна $q/2$ или

$$\frac{q}{2} = 2^{-N-1} \text{МЗЧ}. \quad (13-29)$$

На рис. 13.8 видно, что квантователь является нелинейным устройством. Следовательно, математический анализ эффектов квантования в цифровой системе управления достаточно сложен.

Квантование по уровню в замкнутых системах в общем случае может вызвать появление установившейся ошибки и незатухающих колебаний (предельный цикл). Проиллюстрируем это на простых примерах.

Рассмотрим замкнутые цифровые системы (рис. 13.9). Эффектами квантования здесь можно пренебречь. Единственным отличием в системах является знак обратной связи: для системы, изображенной на рис. 13.9, а он отрицательный, а на рис. 13.9, б — положительный. Можно доказать, что обе системы асимптотически устойчивы. При $r(k) = 0$ z -преобразование для выхода системы, показанной на рис. 13.9, а, можно записать как

$$C(z) = \frac{z}{z + 0,5} c(0) \quad (13-30)$$

а для системы, приведенной на рис. 13.9, б, выразить как

$$C(z) = \frac{z}{z - 0,5} c(0) \quad (13-31)$$

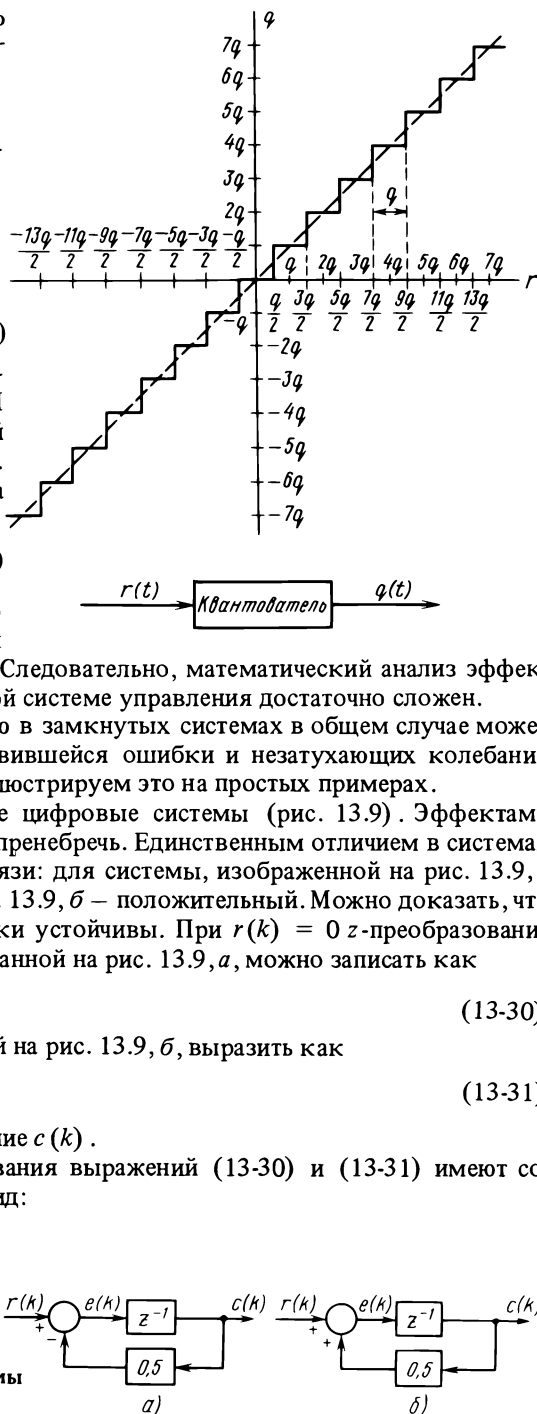
где $c(0)$ — начальное значение $c(k)$.

Обратные z -преобразования выражений (13-30) и (13-31) имеют соответственно следующий вид:

$$c(k) = (0,5)^k \cos k\pi \cdot c(0) \quad (13-32)$$

$$c(k) = (0,5)^k c(0) \quad (13-33)$$

Рис. 13.9. Две цифровые системы управления



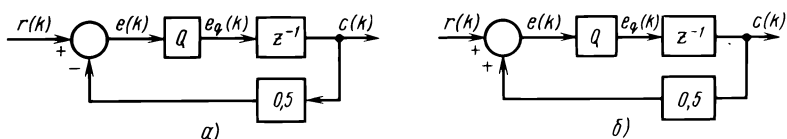


Рис. 13.10. Две цифровые системы управления с квантователями по уровню

Следовательно, в обоих случаях переходный процесс, обусловленный начальным значением $c(0)$, стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

На рис. 13.10 показаны те же две цифровые системы, но с квантователями по уровню в каждом контуре. Предположим, что длина слова равна 4 бит, тогда шаг квантования по уровню определяется как $q = 2^{-4} = 0,0625$. Характеристика квантователя вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} e_q(k) &= 0 & -q/2 < e(k) < q/2 \\ e_q(k) &= nq & nq - q/2 \leq e(k) < nq + q/2 & (n \geq 1) \\ e_q(k) &= -nq & -nq - q/2 < e(k) \leq -nq + q/2 & (n \leq -1) \end{aligned}$$

Для системы с отрицательной обратной связью (рис. 13.10, а) значения выходного сигнала $c(k)$ при $r(k) = 0$ и $c(0) = 0,58$ представлены в табл. 13.1. В этом случае на выходе устанавливаются колебания с амплитудой $\pm q$ и периодом 2. Для системы с положительной обратной связью (рис. 13.10, б) значения выходного сигнала при тех же начальных условиях приведены в табл. 13.2.

Заметим, что в этом случае при возрастании k система имеет установившуюся ошибку q .

На практике как установившаяся ошибка, так и предельные циклы являются нежелательными, поэтому их стремятся сделать по возможности минимальными.

Наименьший верхний предел установившейся ошибки вследствие квантования по уровню можно оценить, заменив квантователь эквивалентным источником шума. Расчет предельных циклов является нелиней-

Таблица 13.1

k	c(k)	e(k)	$e_q(k)$
0	0,58000	-0,29000	-0,31250
1	-0,31250	0,15625	0,18750
2	0,18750	-0,09375	-0,12500
3	-0,12500	0,06250	0,06250
4	0,06250	-0,03125	-0,06250
5	-0,06250	0,03125	0,06250
6	0,06250	-0,03125	-0,06250
7	-0,06250	0,03125	0,06250

k	$c(k)$	$e(k)$	$e_q(k)$
0	0,58000	0,29000	0,31250
1	0,31250	0,15625	0,18750
2	0,18750	0,09375	0,12500
3	0,12500	0,06250	0,06250
4	0,06250	0,03125	0,06250
5	0,06250	0,03125	0,06250
6	0,06250	0,03125	0,06250
7	0,06250	0,03125	0,06250

ной задачей, которая может быть решена, например, методом дискретной описывающей функции [19] .

Так как ошибка квантованного сигнала имеет наименьший верхний предел $\pm q/2$, то "наихудшая" ошибка в цифровой системе управления вследствие квантования по уровню может быть определена при замене квантователя внешним источником шума с амплитудой сигнала $\pm q/2$. Для определения наименьшего верхнего предела установившейся ошибки вследствие квантования по уровню цифровая система (см. рис. 13.10, б) может быть представлена в эквивалентном виде (рис. 13.11) .

По рис. 13.11 при $r(k) = 0$ можно получить установившееся значение $c(k)$ в виде

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} c(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \zeta(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \frac{(\pm q/2)z}{z - 1} = \pm q \end{aligned} \quad (13-34)$$

Следовательно, в этом случае наименьший верхний предел ошибки, предсказанный по эквивалентной системе с источником шума совпадает с расчетным значением для нелинейной системы. Однако, если применить этот метод к системе (см. рис. 13.10, а), то верхний предел ошибки квантования для $c(k)$, полученный из эквивалентной схемы, будет равен $\pm q/3$. Выше было показано, что система имеет предельный цикл, и амплитуда колебаний изменяется от $-q$ до $+q$. Следовательно, можно сказать, что анализ ошибки квантования с помощью эквивалентных источников шума не позволяет предсказать появление предельного цикла в системе. В общем случае для проектируемой цифровой системы необходимо исследовать как установившуюся ошибку, так и характеристики предельного цикла.

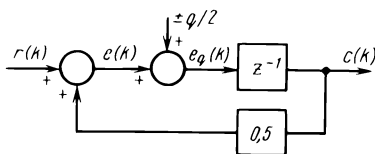


Рис. 13.11. Схема цифровой системы управления с квантователем для определения наименьшего верхнего предела установившейся ошибки

Метод пространства состояний. Для анализа наименьшего верхнего предела ошибки квантования по уровню в системе могут быть использованы метод пространства состояний или метод z -преобразования. Пусть уравнение динамики цифровой системы без квантования по уровню имеют вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (13-35)$$

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}\mathbf{u}(k) \quad (13-36)$$

где $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$ и $\mathbf{c}(k)$ — соответственно n -, r - и p -мерные векторы. Предположим, что система имеет m квантователей по уровню, которые преобразуют сигналы в системе. Уровни квантования этих m квантователей обозначим как q_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Как было показано выше, m квантователей можно заменить входными сигналами с амплитудами $\pm q_i/2$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда цифровая система управления будет описываться следующими уравнениями динамики:

$$\mathbf{x}_q(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_q(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}\mathbf{q} \quad (13-37)$$

$$\mathbf{c}_q(k) = \mathbf{D}\mathbf{x}_q(k) + \mathbf{E}\mathbf{u}(k) + \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (13-38)$$

где $\mathbf{x}_q(k)$ — вектор состояния размерностью $n \times 1$; $\mathbf{c}_q(k)$ — вектор выхода размерностью $p \times 1$; \mathbf{F} — матрица размерностью $n \times m$, учитывающая связь между $\mathbf{x}_q(k+1)$ и эквивалентными источниками шумов; \mathbf{G} — матрица размерностью $p \times m$, представляющая собой зависимость $\mathbf{c}_q(k)$ от \mathbf{q} , где \mathbf{q} — вектор вида

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \pm q_1/2 \\ \pm q_2/2 \\ \vdots \\ \pm q_m/2 \end{bmatrix} \quad (13-39)$$

Обозначим ошибку квантования по уровню в векторе состояния на k -м шаге выборки как $\mathbf{e}_x(k)$, тогда

$$\mathbf{e}_x(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_q(k) \quad (13-40)$$

Вычитая уравнение (13-37) из (13-35), получим

$$\mathbf{e}_x(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{e}_x(k) - \mathbf{F}\mathbf{q} \quad (13-41)$$

Аналогично разность между уравнениями (13-36) и (13-38)

$$\mathbf{e}_c(k) = \mathbf{c}(k) - \mathbf{c}_q(k) = \mathbf{D}\mathbf{e}_x(k) - \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (13-42)$$

где $\mathbf{e}_c(k)$ — ошибка квантования по уровню в выходном сигнале $\mathbf{c}_q(k)$ на k -м шаге выборки.

Решение уравнения (13-41) при $k = N$ есть

$$\mathbf{e}_x(N) = \mathbf{A}^N \mathbf{e}_x(0) - \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-k-1} \mathbf{F}\mathbf{q} \quad (13-43)$$

где i -й элемент $\mathbf{e}_x(N)$ можно записать как

$$e_{xi}(N) = P_i A^N e_x(0) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} P_i A^{N-k-1} F_j \left[\pm \frac{q_j}{2} \right] \quad (13-44)$$

$i = 1, 2, \dots, n$, где F_j представляет собой j -й столбец матрицы F .

Для асимптотически устойчивой системы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A^N = 0 \quad (13-45)$$

Наименьший верхний предел установившейся ошибки квантования для i -го состояния есть

$$\left| \lim_{N \rightarrow \infty} e_{xi}(N) \right| = \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} P_i A^{N-k-1} F_j \frac{q_j}{2} \right| \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13-46)$$

Аналогично наименьший верхний предел установившейся ошибки квантования для i -го выхода может быть получен из уравнения (13-42):

$$\left| \lim_{N \rightarrow \infty} e_{ci}(N) \right| = \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=0}^{N-1} D_i A^{N-k-1} F_j - g_{ij} \right] \frac{q_j}{2} \right| \quad (13-47)$$

где D_i — матрица размерностью $1 \times n$, сформированная из i -й строки матрицы D ; g_{ij} — ij -й элемент матрицы G ; $i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, m$.

Метод z -преобразования. Метод определения наименьшего верхнего предела ошибки квантования на основе теории z -преобразований проще, чем при использовании метода пространства состояний. Переходя к z -преобразованиям в обеих частях уравнения (13-41) и решая его относительно $E_x(z)$, получим

$$E_x(z) = (zI - A)^{-1} e_x(0) - (zI - A)^{-1} F q \frac{z}{z-1} \quad (13-48)$$

Тогда i -й элемент матрицы $E_x(z)$ можно записать как

$$E_{xi}(z) = P_i (zI - A)^{-1} e_x(0) - \sum_{j=1}^m P_i (zI - A)^{-1} F_j \frac{\pm q_j}{2} \frac{z}{z-1} \quad (13-49)$$

Наименьший верхний предел ошибки квантования для i -го состояния

$$\left| \lim_{N \rightarrow \infty} e_{xi}(N) \right| = \left| \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E_{xi}(z) \right| = \left| \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{j=1}^m P_i (zI - A)^{-1} F_j \frac{q_j}{2} \right| \quad (13-50)$$

Аналогично для выхода

$$\left| \lim_{N \rightarrow \infty} e_{ci}(N) \right| = \left| \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{j=1}^m \left[D_i (zI - A)^{-1} F_j - g_{ij} \right] \frac{q_j}{2} \right| \quad (13-51)$$

Следующий пример иллюстрирует методику анализа наименьшего верхнего предела ошибки квантования.

Пример 13.3. Цифровой регулятор в системе управления обычно реализуется в виде программы, поэтому округление чисел необходимо учитывать с помощью эк-

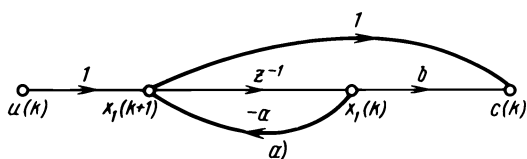


Рис. 13.12. Диаграммы состояния цифровой системы управления

вивалентных квантователей по уровню. Рассмотрим типовой цифровой регулятор первого порядка с передаточной функцией

$$D(z) = \frac{C(z)}{U(z)} = \frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad (a < 1) \quad (13-52)$$

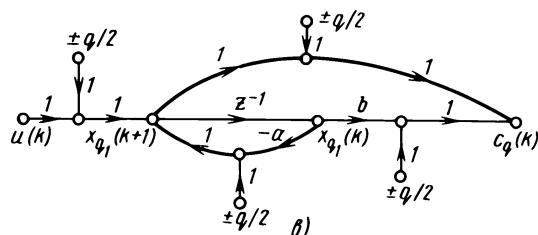
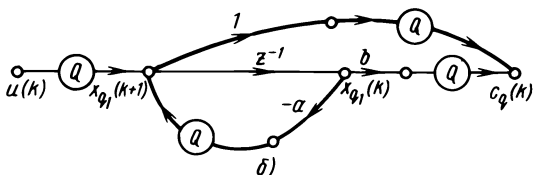


Диаграмма состояний регулятора показана на рис. 13.12, а, а на рис. 13.12, б представлена модель регулятора с учетом квантователей. Диаграмма состояний, на которой квантователи заменены ветвями с единичным коэффициентом передачи и внешними источниками с амплитудой сигналов $\pm q/2$, показана на рис. 13.12, в. Пред-

полагается, что все четыре квантователя имеют одинаковый шаг квантования по уровню.

Без учета квантования запишем уравнения динамики регулятора непосредственно на основе рис. 13.12, а:

$$x_1(k+1) = -ax_1(k) + u(k) \quad (13-53)$$

$$c(k) = (b-a)x_1(k) + u(k) \quad (13-54)$$

Для системы с квантователями уравнения динамики могут быть представлены в виде

$$x_{q1}(k+1) = -ax_{q1}(k) + u(k) \pm q \quad (13-55)$$

$$c_q(k) = (b-a)x_{q1}(k) + u(k) \pm 2q \quad (13-56)$$

Наименьший предел верхний ошибки квантования для переменной состояния $x_1(k)$ определяется как

$$e_x(k) = x_1(k) - x_{q1}(k) \quad (13-57)$$

Из уравнений (13-53) и (13-55) получим

$$e_x(k+1) = -ae_x(k) \pm q \quad (13-58)$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$e_x(N) = (-a)^N e_x(0) + \sum_{k=0}^{N-1} (-a)^{N-k-1} (\pm q) \quad (13-59)$$

Модуль установившегося значения

$$\left| \lim_{N \rightarrow \infty} e_x(N) \right| = \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} (-a)^{N-k-1} (\pm q) \right| = \frac{q}{1+a} \quad (13-60)$$

Наименьший верхний предел ошибки квантования для выхода может быть получен из уравнений (13-54) и (13-56) :

$$e_c(N) = c(N) - c_q(N) = (b - a)e_x(N) \pm 2q \quad (13-61)$$

Следовательно, модуль установившегося значения

$$\left| \lim_{N \rightarrow \infty} e_c(N) \right| = \frac{(b - a)q}{1 + a} + 2q = \frac{2 + a + b}{1 + a} q \quad (13-62)$$

Анализ на основе метода z -преобразования проводится на основе определения z -преобразований $x_1(k)$ и $x_{q1}(k)$ как функций эквивалентных источников сигналов, показанных на рис. 13.12. Тогда

$$E_x(z) = X_1(z) - X_{q1}(z) = \frac{-z^{-1}}{1 + az^{-1}} \frac{\pm qz}{z - 1} \quad (13-63)$$

Начальными условиями в выражении (13-63) можно пренебречь, так они не влияют на установившуюся ошибку. Следовательно,

$$\left| \lim_{N \rightarrow \infty} e_x(N) \right| = \left| \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E_x(z) \right| = \frac{q}{1 + a} \quad (13-64)$$

что согласуется с результатом (13-60) .

Аналогично наименьший верхний предел ошибки квантования для выходного сигнала системы может быть получен при определении его z -преобразования:

$$E_c(z) = C(z) - C_q(z) = \left[\frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}} + 1 \right] \frac{\pm qz}{z - 1} \quad (13-65)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \lim_{N \rightarrow \infty} e_c(N) \right| &= \left| \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E_c(z) \right| = \left| \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}} + 1 \right] q \right| = \\ &= \frac{2 + a + b}{1 + a} q \end{aligned} \quad (13-66)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tou J. T. Digital and Sampled-Data Control Systems. McGraw-Hill, New York. 1959. (Опубликован перевод: Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1964).
2. Johnson, G. W., "Upper Bound on Dynamic Quantization Error in Digital Control Systems via the Direct Methods of Liapunov," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-10, October 1965, pp. 439-448.
3. Sage, A. P., and Burt, R. W., "Optimum Design and Error Analysis of Digital Integrators for Discrete System Simulation," *AFIPS Proc.*, Vol. 27, Part 1, 1965, pp. 903-914.
4. Smith, F. W., "System Laplace-Transform Estimation From Sampled-Data," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-13, February 1968, pp. 37-44.
5. Katzenelson, J., "On Errors Introduced by Combined Sampling and Quantization," *IRE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-7, April 1962, pp. 58-68.
6. Kramer, R., "Effect of Quantization on Feedback Systems With Stochastic Inputs," *Report No. 7849-R-9*, M.I.T. Electronic Systems Lab., June 1959.
7. Kramer, R., "Effects of Quantization on Feedback Systems With Stochastic Inputs," *IRE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-6, September 1961, pp. 292-305.
8. Greaves, C. J., and Cadzow, J. A., "The Optimal Discrete Filter Corresponding to a Given Analog Filter," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, June 1967, pp. 304-307.
9. Brule, J. D., "Polynomial Extrapolation of Sampled Data With an Analog Computer," *IRE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-7, January 1962, pp. 76-77.
10. Monroe, A. J., *Digital Processes For Sampled Data Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1962.
11. Knowles, J. B., and Edwards, R., "Finite Word-length Effects in Multirate Direct Digital Control Systems," *Proc. IEE*, Vol. 112, December 1965, pp. 76-84.
12. Phillips, C. L., "Instabilities Caused by Floating-Point Arithmetic Quantization," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-17, April 1972, pp. 242-243.
13. Divieti, L. D., Rossi, C. M., Schmid, R. M., and Verschkin, A. E., "A Note on Computing Quantization Errors in Digital Control Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, October 1967, pp. 622-623.
14. Slaughter, J. B., "Quantization Errors in Digital Control Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-9, January 1964, pp. 70-74.
15. Bertram, J. E., "The Effects of Quantization in Sampled-Feedback Systems," *Trans. AIEE (Applications and Industry)*, Vol. 77, September 1958, pp. 177-181.
16. Johnson, G. W., "Upper Bound on Dynamic Quantization Error in Digital Control Systems Via The Direct Method of Liapunov," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-10, October 1965, pp. 439-448.
17. Curry, E. E., "The Analysis of Round-Off and Truncation Errors in a Hybrid Control System," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, October 1967, pp. 601-604.
18. Kuo, B. C., and Tal, J., ed., *Incremental Motion Control, Vol. I, DC Motors And Control Systems*, SRL Publishing Company, Champaign, Ill., 1978.
19. Kuo, B. C., "The z-Transform Describing Function for Nonlinear Sampled-Data Control Systems," *Proc. of I. R. E.*, 43, No. 5, May 1960, pp. 941-942.
20. *Intel 8080 Microcomputer Systems User's Manual*, Intel Corporation, Santa Clara, Calif., September 1975.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976.
2. Цыпкин Я. З., Попков Ю. С. Теория нелинейных импульсных систем. М. Наука, 1973.
3. Иванов В. А., Ющенко А. С. Теория дискретных систем автоматического управления. М.: Наука, 1983.
4. Артвик Б. А. Сопряжение МикроЭВМ с внешними устройствами. М.: Машиностроение, 1983.
5. Балашов Е. П., Пузанков Д. В. Микропроцессоры и микропроцессорные системы. М.: Радио и связь, 1981.
6. Григорьев В. Л. Программное обеспечение микропроцессорных систем. М.: Энергоатомиздат, 1983.

Производственное издание

Бенджамен С. Куо

ТЕОРИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Редактор *Д. П. Бут*
Художественный редактор *С. Н. Голубев*
Обложка художника *С. Н. Орлова*
Технический редактор *О. В. Чеботарева*
Корректоры *Л. В. Тарасова* и *Н. В. Давыдова*
ИБ № 4874

Сдано в набор 25.09.85. Подписано в печать 03.09.86.	Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная № 2.	Гарнитура Пресс Роман. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 28.00.	Усл. кр.-отт. 28,00. Уч.-изд. л. 30,50.
Тираж 13 000 экз.	Заказ 161 Цена 2 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение",
107076, Москва, Строминский пер., 4

Отпечатано в Ленинградской типографии № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения "Техническая книга" им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10, с оригинал-макета, изготовленного в издательстве "Машиностроение" на наборно-пишущих машинах

