

Новая
Университетская
Библиотека

ОСНОВЫ
МЕТРОЛО-
ГИИ

Н.С. ПРОНКИН

**ОСНОВЫ
МЕТРОЛОГИИ**
практикум
по метрологии
и измерениям



УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



Н.С. Пронкин

ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ

ПРАКТИКУМ ПО МЕТРОЛОГИИ И ИЗМЕРЕНИЯМ

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по образованию в области ядерных физики и технологий
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по направлению
«Ядерная физика и технологии» и специальностям
«Физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника»,
«Ядерные реакторы и энергетические установки»,
«Электроника и автоматика физических установок»*



Москва
Логос
2007

УДК 389(075)
ББК 30.10я7
П81

Серия основана в 2003 году

Рецензенты

Е.Д. Кохов, доктор технических наук,
Н.Н. Блинов, доктор технических наук, профессор,
О.В. Гаркуша, кандидат физико-математических наук

Пронкин Н.С.

П81 Основы метрологии: практикум по метрологии и измерениям: учеб. пособие для вузов. — М.: Логос; Университетская книга, 2007. — 392 с. — (Новая университетская библиотека).
ISBN 978-5-98704-267-4

Приводятся различные примеры и задачи по основным теоретическим разделам метрологии как учения об измерении любых физических величин. Поскольку метрология широко применяется во всех областях промышленности и науки, решение задач помогает разобраться в физической сущности процессов измерения и правильно интерпретировать их результаты.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Ядерная физика и технологии» и специальностям «Физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника», «Ядерные реакторы и энергетические установки», «Электроника и автоматика физических установок». Может использоваться в учебном процессе по широкому кругу направлений и специальностей техники и технологий, связанных с приборостроением, электротехникой, автоматикой и электроникой. Представляет интерес для широкого круга специалистов, занимающихся вопросами измерения, самостоятельно изучающих метрологию.

УДК 389(075)
ББК 30.10я7

ISBN 978-5-98704-267-4

© Пронкин Н.С., 2006
© Университетская книга, 2006
© Логос, 2007



ПРЕДИСЛОВИЕ



Метрология занимает особое место среди технических наук, поскольку, с одной стороны, она впитала и впитывает самые последние научные достижения и это выражается в совершенстве ее эталонной базы и способов обработки результатов измерений, а с другой — она способствует развитию технических наук, поскольку совершенствование метрологии измерений приводит к получению новых достоверных научных результатов. Метрология уже давно стала наукой, без знания которой не может обойтись ни один специалист, занимающийся как разработкой, изготовлением и эксплуатацией различных технических средств, так и вопросами менеджмента, статистики, экономики, культуры и т.д.

Знакомство с метрологией и изучение ее основных положений часто бывает затруднено, так как у изучающего нет возможности для практического освоения полученных знаний. Известно, что быстрое и успешное познание любого теоретического материала происходит, если его изучение сопровождается практическими занятиями: выполнением лабораторных работ, метрологическим практикумом, решением задач, разбором примеров, ответами на контрольные вопросы (коллоквиум, собеседование, защита выполненного задания). Однако материал практического характера в учебниках (пособиях, методических материалах) по метрологии, как правило, представлен неравномерно (одна-две задачи) либо не представлен вовсе. Часто при попытке разобраться с возникшей практической проблемой, привлекая другие учебники, наталкиваются на трудности, связанные с разным характером изложения материала, другими таблицами и другими обозначениями переменных. Кроме того, мало задач и примеров сопровождается подробным решением с получением окончательного численного результата.

Настоящий сборник написан в качестве дополнения к курсам, читаемым в технических вузах по метрологии, и преследует цель восполнить пробел, имеющий место в литературе по вопросу практического освоения метрологии.

В сборнике собраны примеры и задачи по всем основным теоретическим разделам метрологии как учения об измерении. Автор попытался систематизировать материал, разбросанный по разным учебникам и публикациям, а также привести его в соответствие с вновь введенным документом по терминологии РМГ 29-99 [2]. Тот материал, который не укладывался в рамки примеров и задач, представлен в виде контрольных вопросов, ответы на которые помогают раскрыть существо некоторых понятий и определений.

Следует отметить, что одна из характерных тенденций современной практической метрологии — стремление максимально приблизить оценку погрешности измерений к ее действительному значению, но так, чтобы она оставалась в вероятностном смысле «оценкой сверху». Автор при представлении примеров стремился придерживаться этой тенденции. Почти все примеры доведены до окончательного численного результата, и при изложении решений автор стремился раскрыть физическую сущность проводимых математических операций. С этой целью некоторые примеры сопровождаются соответствующими примечаниями, поясняющими процесс решения, а также полученный результат. Кроме того, разбор примеров приводится довольно подробно, с таким расчетом, чтобы математические выкладки не затеняли их физической сущности.

В настоящее время для расчета средств измерения (СИ) и оценки составляющих погрешности измерения широко используются программные средства персональных компьютеров, позволяющие быстро и многовариантно обработать результаты измерений. Однако для лучшего понимания механизма расчетов «изнутри», приближений и ограничений, используемых при компьютерных расчетах, полезным является предварительное изучение конкретных примеров и тренировка в решении метрологических задач.

Материал сборника изложен следующим образом. В начале каждой главы приводится необходимый теоретический материал, в основном формулы и соотношения, необходимые для решения примеров данной главы. Однако этот материал является вспомогательным и для полного понимания процесса решения целесообразно предварительное изучение курса метрологии по одному из пособий [1, 3–5], материалов ГОСТ 8.009–84 [6], а также РМГ 29-99 [2]. По главам материал сборника представлен следующим образом.

В главе 1 приведены основные понятия метрологии, необходимые для дальнейшего изложения. Существо вопросов, важных по мнению автора для понимания метрологии, раскрыто в виде контрольных вопросов, на которые приведены подробные ответы.

Поскольку характеристики распределений измеряемых величин и случайных погрешностей измерений имеют большое значение при обработке и представлении результатов измерений, глава 2 целиком посвящена разбору примеров по функциям распределения случайных величин (погрешностей, результатов измерений).

Теоретический материал и примеры точечных и интервальных оценок результатов измерений приведены в главе 3. В этой же главе приведены примеры влияния погрешности измерения на ошибки первого и второго рода и рассмотрены результаты измерений с точки зрения проверки статистических гипотез.

Систематические погрешности измерения, являющиеся «детерминированными» погрешностями в соответствии с их определением, представляют, как правило, наибольшую трудность при их обнаружении и учете в результате измерения. В главе 4 приводятся примеры по основным статистическим методам, позволяющим обнаружить изменяющиеся систематические погрешности, а также способы учета их неисключенных составляющих.

Обработка результатов измерений представлена в трех главах. В главе 5, посвященной обработке прямых равноточных измерений, большое внимание уделяется методам проверки нормальности распределений результатов измерений. Это важный момент в обработке результатов, поскольку большинство формул и соотношений в метрологии получены в предположении нормальности распределений. В этой главе приведен также материал по обработке неравноточных измерений. Глава 6 целиком посвящена наиболее распространенным на практике измерениям, которые подвергаются математической обработке, а именно косвенным измерениям. Получение правильных оценок результатов измерений и особенно интервальных оценок для косвенных измерений является иногда не простой задачей. Обработка результатов совместных и совокупных измерений представлена в главе 7. Для получения оптимального результата измерения в основном используется метод наименьших квадратов, нашедший наибольшее распространение при решении задач подобного типа как для линейных, так и для нелинейных функций.

В главе 8 приведены основные теоретические соотношения для расчета статических погрешностей (основной и дополнительной погрешностей) СИ и критерии существенности составляющих погрешностей СИ на основе материала ГОСТ 8.009–84. Примеры для расчеты статических погрешностей СИ представлены в главе 9 на основе расчетов усилителей с непосредственной связью и импульсных усилителей для данного типа (вида) усилителей и для

индивидуальных экземпляров усилителей в реальных условиях эксплуатации. Этот материал до сих пор, на наш взгляд, актуален, несмотря на то, что использование ЭВМ во многом сняло проблемы нестабильности измерительной аппаратуры. Однако чувствительные элементы (датчики), воспринимающие непосредственно изменения измеряемой физической величины, как правило, имеют на выходе аналоговый сигнал тока или напряжения, уровень которого недостаточен для непосредственной обработки его ЭВМ, и требуется усиление аналогового сигнала (иногда в сотни и тысячи раз) для того, чтобы он был пригоден для преобразования с помощью аналого-цифрового преобразователя в цифровой.

В главе 10 приводятся теория и примеры расчета полных и частных динамических характеристик СИ, а также примеры и задачи расчета динамических погрешностей при наличии на входе СИ различных видов сигналов: детерминированных, импульсных и случайных.

Глава 11 посвящена разработке моделей СИ и анализу составляющих погрешностей СИ на основе этих моделей (разд. 11.1). Другие разделы главы (11.2–11.5) посвящены анализу возникновения погрешностей разного вида на примерах работы различных преобразователей, приборов и систем, работа которых основана на использовании свойств проникающего ионизирующего излучения. Сложность преобразования радиационного сигнала позволяет показать разнообразие источников возникновения основной, дополнительной, динамической погрешностей СИ и ряда составляющих методической погрешности измерения. Этот материал не вполне соответствует общему содержанию сборника. Однако, по мнению автора, который более 20 лет занимался разработкой и внедрением СИ в производство, детальное знание источников возникновения погрешностей, их поведения при изменении условий эксплуатации необходимо для создания СИ высокого качества. Читатели, которые не занимаются разработкой и эксплуатацией подобных СИ, могут без ущерба для усвоения основного материала опустить изучение разд. 11.2–11.5. В целом сборник составлен таким образом, что, зная основы метрологии, можно начинать чтение и изучение материалов с любой главы сборника.

При составлении сборника, кроме примеров и задач, разработанных самим автором, использованы отечественные и иностранные источники. В списке литературы помимо этих источников приведена литература, которая может быть полезной при изучении метрологии и измерительной техники. Содержание сборника направлено на освоение материала с помощью разбора примеров,

поэтому в сборнике приведено сравнительно мало задач. Для удобства изучения примеров и задач в приложении приведены справочные таблицы.

Автор выражает благодарность рецензентам: доктору технических наук, Главному метрологу ГП «Московский завод полиметаллов» с 1995 по 2004 г. Евгению Дмитриевичу Кохову, вице-президенту Ассоциации медицинских физиков России, доктору технических наук, профессору Николаю Николаевичу Блинову, доценту кафедры «Электротехника» МИФИ, кандидату физико-математических наук Олегу Владимировичу Гаркуше, взявшим на себя нелегкий труд прочтения книги и высказывания ряда полезных замечаний.

Автор также будет благодарен всем, приславшим свои замечания и предложения по ошибкам и опечаткам, а также за предложения по улучшению содержания настоящего сборника.



КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕТРОЛОГИИ

1.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОНЯТИЯ МЕТРОЛОГИИ

Метрология определяется как учение об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности.

Измерениям подвергается *физическая величина (ФВ)* — одно из свойств физического объекта (физической системы, явления или процесса), общее в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них. Например, плотностью характеризуют многие твердые и жидкие вещества и материалы, хотя каждый из образцов материалов и веществ имеет свое конкретное значение плотности. Следует различать истинное и действительное значения ФВ. *Истинное значение ФВ* — значение, которое идеальным образом характеризует в качественном и количественном отношении соответствующую ФВ. *Действительное значение ФВ* — значение, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него. Из приведенных определений видно, что истинное значение ФВ является неким теоретическим пределом значения ФВ, к которому можно приближаться сколь угодно близко по мере совершенствования методов измерения, но которое на сегодняшний момент времени заменяется действительным значением.

Любое измерение характеризуется *погрешностью* — отклонением результата измерения от действительного значения измеряемой величины или *точностью измерения* как одной из характеристик *качества измерения*, отражающей близость к нулю погрешности результата измерения. (Отметим, что понятие точности измерения часто используется на практике для качественных сравнительных оценок, хотя количественные показатели точности обычно не применяются.)

Одной из основных задач метрологии является обеспечение *единства измерений* — такого состояния измерений, которое характеризуется тем, что их результаты выражаются в узаконенных единицах, размеры которых в установленных пределах равны размерам единиц, воспроизводимых первичными эталонами, а погрешности результатов измерений известны и с заданной вероятностью не выходят за установленные пределы. Технические средства, предназначенные для измерений, имеющие нормированные метрологические характеристики, воспроизводящие и (или) хранящие единицы ФВ, размер которых принимают неизменным (в пределах установленной погрешности) в течение известного интервала времени, называются *средствами измерений* (СИ).

Следует отметить, что в основе любого измерительного процесса лежит одна и та же процедура — *сравнение измеряемой ФВ с известной, принятой за единицу*.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерение — совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу ФВ, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины. Например, сравнение показания линейки с размерами какой-либо детали. В данном случае линейка является «хранителем» единицы ФВ.

По характеру влияния длительности переходных процессов СИ на результат измерения измерения делятся на статические и динамические. *Статические измерения* — это измерения ФВ, принимаемой в соответствии с конкретной измерительной задачей за неизменную на протяжении времени измерения.

Динамические измерения — это измерения изменяющейся по размеру ФВ. Особенно это касается тех ФВ, которые изменяются в процессе измерения (непрерывное, дискретное, скачкообразное изменения). Однако даже измерение постоянной во времени ФВ, если время переходного процесса в СИ оказывается сравнимым со временем измерения, может быть отнесено к динамическим. Например, измерение массы на рычажных весах в момент времени, когда положение стрелки весов еще не успокоилось, или измерение амплитуды сигнала в течение времени переходного процесса СИ. Таким образом, к динамическим измерениям относят такие, при которых необходим учет динамической погрешности.

Измерения различаются по способу получения результатов измерения на прямые, косвенные, совместные и совокупные.

Прямые измерения — измерения, при которых искомое значение ФВ находят непосредственно из опытных данных. Формула

прямых измерений $Q = x$, где Q — истинное (действительное) значение; x — измеренное значение ФВ. К прямым измерениям относятся измерение длины с помощью линейки или штангенциркуля, измерение массы на весах и т.д.

Косвенные измерения — это измерения, при которых осуществляется определение искомого значения ФВ на основании результатов прямых измерений других ФВ, функционально связанных с искомой величиной. Формула косвенных измерений $Q = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$, где x_1, x_2, \dots, x_m — величины, измеренные прямыми методами. Примерами косвенных измерений являются: определение объема тела с помощью измерения его сторон, длины пройденного пути по скорости и времени, силы взаимодействия электрических зарядов по их величине и расстоянию между ними и т.д.

Совместные измерения — это проводимые одновременно измерения двух или нескольких *неодноименных* величин для определения зависимости между ними. Например, определение коэффициентов, связывающих зависимость сопротивления полупроводникового материала от температуры или зависимость увеличения длины стержня от силы растяжения, определение коэффициентов линейного поглощения гамма-излучения в веществе и др.

Совокупные измерения — это проводимые одновременно измерения нескольких *одноименных* величин, при которых искомые значения величин определяют путем решения системы уравнений, получаемых при измерении этих величин в различных сочетаниях. Типичным примером совокупных измерений является определение номинальных масс отдельных гирь по образцовой массе какой-либо гири.

По условиям, определяющим точность результата, различают измерения *лабораторные* (измерения максимально возможной точности, контрольно-поверочные измерения) и *технические* (измерения, проводимые на практике и выполняемые по методикам, разработанным заранее до проведения измерений). Это наиболее массовый вид измерений.

Классификация измерений по другим признакам приведена в [1].

1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Математически погрешность измерения Δ определяется как разность между истинным значением ФВ Q и результатом измерения x :

$$\Delta = Q - x. \quad (1.1)$$

При проведении измерений явно проявляются два вида погрешности в общей погрешности измерения — это случайная и систематическая составляющие погрешности.

Случайная погрешность (δ) — составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях, проведенных с одинаковой тщательностью, одной и той же ФВ. Случайные погрешности при определении их в разные моменты времени оказываются независимыми друг от друга.

Систематическая погрешность (Δ_s) — составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же ФВ. По характеру проявления систематические погрешности разделяются на *постоянные* и *переменные*, изменяющиеся во времени. Переменные погрешности могут быть *прогрессирующие* и *периодические*.

На фоне случайных и систематических погрешностей иногда появляется *грубая погрешность* — *промах*. Это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда. Математическая обработка результатов измерения позволяет установить непричастность промахов к случайным погрешностям.

Следует отметить, что случайные погрешности невозможно устранить, их можно только уменьшить, увеличив число измерений. Систематические погрешности можно частично исключить, изучив их поведение во времени. Грубые погрешности можно исключить, исследуя поведение результатов измерения и ход систематических погрешностей со временем.

По причинам возникновения погрешности измерения разделяют на погрешность метода измерения, инструментальную и субъективную погрешности измерения.

Методическая погрешность (Δ_m) — это составляющая систематической погрешности измерения, возникающая из-за несовершенства принятого метода измерения. Эта погрешность, в основном, проявляется как систематическая погрешность, но иногда может проявляться как случайная методическая погрешность, например погрешность, обусловленная влиянием повторной установки объекта измерения на измерительную позицию, влиянием дискретности измеряемой ФВ и др. Более подробно на конкретных примерах методические погрешности рассмотрены в разд. 1.4. и гл. 11.

Инструментальная погрешность измерения ($\Delta_{инс}$) — это составляющая погрешности измерения, обусловленная погрешностью применяемого СИ. Например, инструментальная погрешность может быть обусловлена нелинейностью преобразования сигнала, ограниченностью динамического диапазона, инерционностью СИ, условиями эксплуатации, в том числе влиянием окружающей тем-

пературы, уровнем электромагнитных помех, влиянием электронных шумов, колебанием напряжения в электрической сети и т.д. на метрологические характеристики СИ.

Субъективная погрешность измерения ($\Delta_{\text{суб}}$) — это составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная индивидуальными особенностями оператора. Например, при отсчитывании показаний СИ в аналоговом виде большое значение имеет правильное расположение оператора по отношению к показывающему устройству.

Общая (результатирующая) погрешность измерения определяется «суммарной» погрешностью

$$\Delta = \Delta_{\text{м}} * \Delta_{\text{инс}} * \Delta_{\text{суб}}, \quad (1.2)$$

где значок * обозначает объединение составляющих погрешностей измерения (алгебраическое, геометрическое и др.)

1.4. МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

Отличительной особенностью методических погрешностей является их индивидуальность, связанная не только с применением данного метода или физического принципа, но и с конкретным воплощением этого метода измерения. Эта погрешность обычно не указывается в нормативной документации. Однако в ней могут быть приведены особенности (указания) применения данного СИ, позволяющие снизить или устранить некоторые составляющие методической погрешности.

Можно указать характерные причины, приводящие к их появлению:

- отличие принятой модели объекта измерения от модели, описывающей свойство, которое определяется путем измерения;
- влияние *неинформативных*¹ параметров объекта измерения, которые могут учитываться моделью объекта измерения;
- влияние способов применения СИ;
- влияние алгоритмов (формул), по которым производится вычисление результатов измерений;
- влияние правильности выбранной модели градуировки СИ с помощью рабочих эталонов или стандартных образцов.

Рассмотрим примеры проявления различных методических погрешностей.

¹ Неинформативный параметр объекта измерения — параметр объекта измерения, влияющий на показания СИ, но не подлежащий измерению в соответствии с поставленной задачей.

Пример 1.1. Измерение плотности ρ пористого тела сложной формы производится косвенным методом в два приема: сначала на рычажных весах измеряется масса тела m , а затем его объем путем погружения тела в сосуд с жидкостью и измерения объема вытесненной телом жидкости. Поскольку поверхность тела имеет поры (или шероховатости), а жидкость, используемая в эксперименте, смачивает (заполняет) поверхностные поры, то измеренный объем тела будет несколько меньше ($V - V_{\text{пор}}$), чем реальный V .

Абсолютная методическая погрешность будет равна

$$\Delta\rho_m = \frac{m}{V} - \frac{m}{V - V_{\text{пор}}} = \rho \frac{V_{\text{пор}}}{V - V_{\text{пор}}} - \rho \frac{V_{\text{пор}}}{V}.$$

По-видимому, для снижения этой методической погрешности целесообразно использовать жидкость, которая не обладает эффектом смачивания вещества этого тела.

Пример 1.2. Таблетки ядерного топлива (диаметр около 10 мм, высота от 10 до 20 мм) перед загрузкой их в цилиндрическую оболочку тепловыделяющего элемента подвергаются контролю по плотности. Для того чтобы измерение плотности не зависело от разброса размеров таблеток как по диаметру, так и по высоте, используют хордовый метод просвечивания таблетки тонким пучком ионизирующего гамма-излучения. При этом таблетку устанавливают на призмы, расстояние между которыми — хорда Δ меньше диаметра таблетки. Плотность ρ определяется по зависимости поглощения среднего числа частиц гамма-излучения, прошедшего через измеряемый объект N , от плотности: $N = N_0 \exp(-\mu\rho\Delta)$, где μ — массовый коэффициент поглощения излучения веществом, зависящий от энергии гамма-излучения и состава вещества.

Методическая погрешность при этом определяется прежде всего неравномерностью распределения топлива по объему таблетки, поскольку при хордовом методе контролируется около 20% всего объема таблетки. Кроме того, замена нелинейной зависимости $\rho = f(N)$ линейной также приводит к появлению дополнительной методической погрешности, которую при хорошей аппроксимации можно сделать несущественной.

Пример 1.3. Для измерения толщины деталей из изоляционного материала емкостным методом используется формула емкости плоского конденсатора $C = \epsilon_0 \epsilon S/d$, где ϵ_0 — абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума; ϵ — диэлектрическая проницаемость материала детали; S и d — площадь и толщина детали.

Методическая погрешность при этом может быть обусловлена неоднородностью материала и отклонением действительного зна-

чения диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon$ от номинального ϵ_N или принятого при расчете модели измерения. Относительная методическая погрешность будет равна $\delta_M = \Delta\epsilon/\epsilon_N$.

Непостоянство (нестабильность) площади в этой модели измерения толщины является источником дополнительной методической погрешности из-за изменения неинформативного параметра — площади.

Пример 1.4. Кондуктометрический метод основан на зависимости электропроводимости веществ от их состава и концентрации отдельных компонентов. Поскольку при этом измеряется общая электропроводимость, то присутствие в измеряемом веществе наряду с измеряемым веществом каких-либо других компонентов или растворенных газов вносит методическую погрешность.

Этот метод также широко используется для определения влажности пористых тел и газов. Электропроводимость капиллярно-пористых веществ резко возрастает с увеличением влажности из-за растворения в воде электролитов, входящих в состав этих веществ. Методическая погрешность возникает при этом вследствие неравномерности распределения влаги по объему, а также из-за поляризации измеряемого объема, поверхностного сопротивления и др.

Пример 1.5. Работа нейтронных влагомеров основана на том, что нейтроны особенно сильно поглощаются водородосодержащими веществами. Поэтому применение нейтронных влагомеров для сред с повышенной и переменной концентрацией водородосодержащих компонентов приводит к появлению значительной методической погрешности.

Пример 1.6. Метод акустической локации используется для измерения размеров и расстояний от единиц миллиметров до нескольких километров. В зависимости от длины акустической волны он применяется для гидролокации глубины морей и океанов, поиска косяков рыб, толщины объектов, поиска трещин в деталях и т.д.

Методическая погрешность для этого метода обусловлена сильной зависимостью скорости распространения акустической волны (в частности, ультразвука) от вида и свойств среды распространения, ее температуры и давления на разных участках прохождения падающей и отраженной волн.

Пример 1.7. Для определения диаметра цилиндрических тел часто используется метод обкатывания поверхности круглого тела. Диаметр определяется по формуле $D = L/\pi$, где L — длина окружности.

Методическая погрешность при этом может быть обусловлена отклонением формы сечения тела от правильного круга (сечение может иметь форму эллипса).

Пример 1.8. Измерение мощности, выделяемой током, протекающим через сопротивление R_n , при косвенном измерении напряжения и тока всегда содержит методическую погрешность. Эта погрешность определяется соотношением между внутренними сопротивлениями вольтметра R_V и амперметра R_A и измеряемым сопротивлением R_n , и только при $R_V = \infty$ и $R_A = 0$ методическая погрешность независимо от способа подключения приборов к измеряемому сопротивлению будет равна нулю.

Пример 1.9. Термоэлектрические и терморезистивные контактные методы измерения температуры характеризуются рядом общих методических погрешностей, обусловленных прежде всего:

- недостаточным тепловым контактом между преобразователем и объектом контроля;
- теплообменным излучением между термопреобразователем и окружающими его телами;
- паразитным теплообменом между объектом и окружающей средой.

Пример 1.10. Для измерения шероховатости поверхностей используются контактные индуктивные (индуктосины) и емкостные преобразователи. Это подвижные (подпружиненные) щупы, которые прижимаются к исследуемой поверхности с определенным небольшим усилием. При движении изделия вертикальное перемещение верхнего штока щупа изменяет индуктивность катушки или емкость первичного преобразователя. Сигнал первичного преобразователя оказывается пропорциональным вертикальному перемещению.

Методическая погрешность этого метода обусловлена прежде всего конечными размерами диаметра головки щупа и возможностью деформации (царапания) изделия. Щуп не должен быть очень тонким и слишком широким, чтобы сглаживать реальные шероховатости. Размер щупа должен соответствовать характеристикам измеряемой шероховатости.

1.5. МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Средство измерения имеет свои *метрологические характеристики* (МХ), которые характеризуют одно из свойств СИ, влияющих на результат измерений и его погрешность. Перечень важнейших

МХ нормируется ГОСТ 8.009–84 «Нормирование и использование метрологических характеристик средств измерений» [6]. Метрологические характеристики позволяют оценить применимость СИ для той или иной задачи и сравнить СИ между собой.

Нормированию подлежит следующий комплекс МХ:

1) характеристики, предназначенные для определения результатов измерения, в том числе функция преобразования, цена деления, вид выходного кода, число разрядов кода, цена единицы наименьшего разряда кода;

2) характеристики погрешности СИ, в том числе характеристики систематической и случайной составляющих погрешности, значение основной и дополнительной погрешностей СИ, статистические характеристики погрешности СИ;

3) характеристики чувствительности СИ к влияющим величинам, в том числе функции влияния $\psi(\xi)$ и изменения $\varepsilon(\xi)$ значений МХ СИ, вызванные изменениями влияющих величин ξ в установленных пределах;

4) динамические характеристики (ДХ) СИ, в том числе полные и частные.

5) характеристики СИ, отражающие их способность влиять на инструментальную составляющую погрешности измерений вследствие взаимодействия СИ с любым из подключенных к их входу или выходу компонентов (объектов).

6) неинформативные параметры выходного сигнала СИ.

1.6. ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Погрешность СИ — разность между показанием СИ и действительным значением измеряемой ФВ. По характеру изменения погрешности со временем можно выделить систематическую и случайную погрешности СИ. Определения этих погрешностей подобны определениям, приведенным для погрешности измерения.

Влияющая величина — ФВ, не являющаяся измеряемой данным СИ, но оказывающая влияние на размер измеряемой величины и (или) результат измерений.

Нормальные условия измерения — условия измерения, характеризующие совокупностью значений или областей значений влияющих величин, при которых изменением результата измерений пренебрегают вследствие малости. Нормальные условия измерений устанавливаются в нормативных документах на СИ конкретного типа или при их поверке (калибровке). Нормальные условия характеризуются, как правило, небольшими изменениями влияющих величин.

Рабочие условия измерения — условия измерений, при которых значения влияющих величин находятся в пределах рабочих областей, в которых, в свою очередь, нормируют дополнительную погрешность или изменение показаний СИ. Например, рабочая область температур окружающей среды от -60 до $+60^{\circ}\text{C}$, изменения напряжения в сети от 180 до 230 В.

Следует подчеркнуть, что нормальные и рабочие условия применения СИ определяются документацией на СИ (стандартами, техническими условиями) и зависят от вида СИ и условий его применения. Различают четыре составляющих инструментальной погрешности СИ:

1. Погрешность, обусловленная неидеальностью собственных свойств СИ, т.е. отличием действительной функции преобразования СИ в нормальных условиях от номинальной функции преобразования. Эта составляющая погрешности называется *основной погрешностью СИ*.

2. Погрешность, обусловленная реакцией СИ на изменения внешних влияющих величин и неинформативных параметров входного сигнала относительно их нормальных значений. Эта составляющая зависит как от свойств СИ, так и от изменений влияющих величин и называется *дополнительной погрешностью СИ*.

3. Погрешность, обусловленная реакцией СИ на скорость (частоту) изменения входного сигнала. Эта составляющая, определяющая динамическую погрешность измерений, зависит как от динамических свойств СИ, так и от частотного спектра входного сигнала и называется *динамической погрешностью СИ*.

4. Погрешность, обусловленная взаимодействием СИ и объекта измерений. Подключение СИ к объекту измерений во многих случаях приводит к изменению значений измеряемой ФВ относительно того значения, которое имела измеряемая величина до подключения СИ к объекту измерений и определение которого является целью измерений. Эта составляющая зависит от свойств СИ и объекта измерений и называется *погрешностью взаимодействия*.

Примечания. 1. Погрешность взаимодействия в ГОСТ 8.009–84 определяется как погрешность, обусловленная взаимодействием СИ и объекта измерения. Однако погрешность взаимодействия СИ может иметь место и при подключении СИ к другому СИ, например в измерительной системе. Такая возможность рассматривается в методическом материале по применению ГОСТ 8.009–84.

2. В РМГ 29-99 [2] не введено понятия «погрешность взаимодействия», хотя имеются определения основной, дополнительной и динамической погрешностей СИ. Погрешность взаимодействия в соответствии с этим документом может быть отнесена к дополнительной погрешности. Действительно, взаимодействие СИ по входу или выходу с другими объектами или СИ влияет на МХ основного СИ через какие-то влияющие величины, например изменение поля излучения в области

чувствительной области СИ (датчика). Погрешность взаимодействия может быть отнесена также к методической погрешности, поскольку выбранный метод взаимодействия СИ с объектом измерения может вносить дополнительную погрешность.

1.7. МОДЕЛИ ПОГРЕШНОСТЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Принимается [6], что модели инструментальной погрешности СИ определенного типа в реальных условиях применения могут иметь один из двух видов.

Модель I

$$\Delta_{СИ I} = \Delta_{0s} * \overset{\circ}{\Delta}_0 * \overset{\circ}{\Delta}_{0H} * \sum_{i=1}^I \Delta_{Ci} * \Delta_{dyn}, \quad (1.3)$$

где Δ_{0s} , $\overset{\circ}{\Delta}_0$ — систематическая и случайная составляющие основной погрешности СИ соответственно; $\overset{\circ}{\Delta}_{0H}$ — случайная составляющая основной погрешности, обусловленной гистерезисом;

$\sum_{i=1}^I \Delta_{Ci}$ — объединение дополнительных погрешностей Δ_{Ci} СИ, обусловленных влиянием влияющих величин, в том числе влиянием взаимодействия СИ с другими объектами и неинформативных параметров входного сигнала СИ (далее влияющих величин); I — число дополнительных погрешностей; Δ_{dyn} — динамическая погрешность.

Для этой модели расчет погрешности состоит в *статистическом* объединении всех *существенных* составляющих погрешностей, т.е. в вычислении точечных и интервальных оценок, которые характеризуются определенной вероятностью, отличной от единицы.

Модель II

$$\Delta_{СИ II} = \Delta_0 * \sum_{i=1}^I \Delta_{Ci} * \Delta_{dyn}, \quad (1.4)$$

где Δ_0 — основная погрешность СИ *без разделения* ее на составляющие, как в модели I. Модель II применима только для СИ таких типов, у которых случайная составляющая основной погрешности может считаться несущественной (пренебрежимо малой). Для этой модели метод расчета погрешности заключается в *арифметическом суммировании модулей наибольших возможных значений* всех существенных составляющих инструментальной погрешности измерений. Эти наибольшие возможные значения представляют собой границы интервалов, в которых соответствующие составляющие находятся с вероятностью, равной единице, т.е. представляют собой пределы допустимых погрешностей (консервативная оценка).

Такая оценка погрешности, принятая для модели II, приводит к существенному ужесточению требований к МХ СИ, что может быть применимо только к наиболее ответственным измерениям, связанным, например, с безопасностью людей.

1.8. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕТРОЛОГИИ В ВОПРОСАХ, ОТВЕТАХ И ПРИМЕРАХ

Материал этого раздела изложен в форме вопросов и ответов, позволяющих в дополнение к разд. 1.1–1.3 представить основные понятия и положения метрологии.

1. *Вопрос.* На основе каких понятий строится метрология как наука об измерении?

Ответ. Исходными понятиями метрологии, составляющими основу ее логического построения, являются: понятия натурального ряда однородных ФВ, шкалы реперов, единиц измерения ФВ, функционального преобразования и измерительного преобразователя. В этих понятиях заключена вся процедура осуществления измерения и этапы преобразования измеряемой величины в форму, пригодную для восприятия оператором (человеком). В ряде прямых измерений могут отсутствовать этапы функционального преобразования и измерительного преобразователя.

Пример 1.11. Измеряется температура в помещении в градусах Цельсия с помощью спиртового термометра. Указать, какие этапы преобразования в соответствии с исходными понятиями метрологии осуществляются для получения результата измерения.

Измеряемой ФВ является температура, которая характеризуется понятиями больше и меньше или теплее и холоднее. Таким образом температуру в различных точках окружающей среды можно характеризовать натуральным рядом температур окружающей среды (или различных физических объектов), например в порядке ее возрастания.

Для того чтобы привязать температуру в помещении к понятным значениям температур окружающего нас физического мира, используют различные шкалы, и прежде всего шкалы, которые задаются с помощью некоторых реперных значений. Для измерения температуры в помещении используются две реперные точки Международной практической шкалы температур: температурная точка равновесия между жидкой и парообразной фазами воды (точка кипения воды, соответствующая 100°C) и температурная точка, соответствующая равновесию между твердой, жидкой и парообразной фазами воды (тройная точка воды). Этот температурный

интервал между реперными точками делится на 100 и таким образом устанавливается единица температуры — один градус Цельсия (1°C).

В качестве единицы измерения в настоящем примере взят один градус Цельсия — единица температуры системы единиц SI, разрешенная к применению в рамках этой системы наряду с основной единицей температуры — кельвином (в системе SI принято, что $1\text{ K} = 1^{\circ}\text{C}$).

При измерении температуры спиртовым термометром используется функциональное преобразование: зависимость температурного расширения спирта в термометре при увеличении температуры окружающей среды. Увеличение размеров столбика спирта привязывается с помощью ряда контрольных точек (как правило в начале, конце и в середине шкалы) к известным (реперным) значениям температуры. Промежуточные точки получают путем равномерного разбиения интервалов между реперными точками.

Измерительным преобразователем в этом измерении является термометр — герметично запаянная трубка со спиртом и шкала с нанесенными делениями, которым в результате градуировки присвоены определенные значения температуры в единицах градуса Цельсия.

Пример 1.12. Измеряется температура объекта в градусах Цельсия в помещении с помощью термопары. Указать, какие этапы преобразования в соответствии с исходными понятиями метрологии осуществляются для получения результата измерения.

Функциональное преобразование в этом примере представляет собой зависимость контактной разности потенциалов, возникающей в месте соединения двух проводников, изготовленных из разных материалов, от температуры этого соединения. Роль измерительного преобразователя выполняет термопара, осуществляющая преобразование температуры в напряжение, пропорциональное температуре.

2. *Вопрос.* В чем суть процесса измерений?

Ответ. В основе любого измерения или измерительного процесса лежит сравнение измеряемой ФВ с известной величиной, принятой за единицу.

Пример 1.13. Объясните процесс измерения на примере измерения длины.

При прямом измерении длины «единица длины» заложена в делениях измерительной линейки или штангенциркуля, нанесенных на эти СИ. Цена деления на них, как правило, соответствует 10^{-3} основной единицы длины — метра, т.е. миллиметру.

Пример 1.14. Объясните процесс измерения на примере измерения электрического напряжения.

При измерениях напряжения на участке электрической цепи с помощью вольтметра «единица» измерения заложена в шкале прибора, которая проградуирована с помощью более точных СИ в единицах, пропорциональных основной единице измерения напряжения — вольту.

3. Вопрос. Что такое единство измерений и как оно практически обеспечивается?

Ответ. Обеспечение единства измерений является основной задачей метрологии, можно сказать, главной задачей, поскольку единство измерения — это тот стержень, на который нанизываются все другие задачи метрологии. Определение понятия единства измерений приведено в разд. 1.1, из которого видно, что:

— результат измерения должен выражаться в узаконенных единицах — в единицах той системы единиц, которая в настоящее время принята компетентным органом в стране (в России в настоящее время принята международная система единиц SI);

— в стране должна существовать система эталонов, которые должны воспроизводить основные единицы системы SI и поверочные схемы, обеспечивающие передачу размеров основных единиц к эталонам более низких разрядов и рабочим СИ;

— для каждого эталона и рабочего СИ должны быть определены погрешности воспроизведения единицы измерения с заданной вероятностью;

— результаты измерений с заданной вероятностью должны быть представлены в некотором доверительном интервале относительно действительного значения ФВ.

Практически единство измерений в стране обеспечивается разветвленной системой метрологической службы, призванной не только выполнять работы по обеспечению единства измерений, но и осуществлять метрологический надзор и контроль за выполнением действующих нормативных документов.

Пример 1.15. Что дает обеспечение единства измерений?

Обеспечение единства измерений позволяет сравнивать результаты измерений, полученных разными коллективами ученых в разное время, в разных местах и проведенных в разных условиях, и доверять этим результатам. Взаимное признание результатов измерений (например, между разными странами) позволяет осуществлять торговые операции.

4. Вопрос. Что такое эталоны и их роль в метрологии?

Ответ. Эталоны в метрологии можно разделить на эталоны основных и не основных единиц ФВ. Эталон ФВ — это СИ (или

комплекс СИ), предназначенное для воспроизведения и (или) хранения единицы и передачи ее размера нижестоящим по поверочной схеме СИ и утвержденное в качестве эталона в установленном порядке. Эталон в метрологии является высшим звеном в передаче размеров единиц и наиболее близко соответствует по своим точностным характеристикам действительному значению ФВ. Точность эталонов и их совершенство определяет в значительной степени состояние метрологии в стране.

Эталонная база в России имеет в своем составе 116 государственных эталонов и более 300 вторичных, адаптированных в европейскую и мировую системы эталонов.

Пример 1.16. *Эталон массы* (1 кг) — платиноиридиевая мера, соответствующая «эталону Архива», находящемуся в г. Севре. В настоящее время это единственный невоспроизводимый эталон в системе SI. Эталоны массы хранятся в специальных помещениях с определенными климатическими условиями. Воспроизводимость эталона массы составляет $2 \cdot 10^{-9}$.

Пример 1.17. *Эталон тока* (1 А) — измерительная установка с источником напряжения на эффекте Джозефсона и прецизионном сопротивлении (эталоне сопротивления). «Эталонный» ток определяется законом Ома. Вторая измерительная установка состоит из источника напряжения и прецизионной емкости (эталонной). В этой установке «эталонный» ток определяется как ток заряда известной емкости за определенное время. Среднеквадратическое отклонение погрешности аттестации эталона тока при токе 1 А составляет $5 \cdot 10^{-8}$ А, неисключенная систематическая погрешность — $2 \cdot 10^{-7}$ А.

Пример 1.18. *Эталон сопротивления* (1 Ом) — измерительная установка, состоящая из 10 манганиновых мер электрического сопротивления с номинальным значением 1 Ом, мостовой измерительной установки для передачи размеров единицы вторичным эталонам и набора переходных мер в диапазоне от 10^{-3} до 10^9 Ом. Среднеарифметическое значение электрического сопротивления, воспроизводимого установкой, составляет 1,00000024 Ом. Среднеквадратическое отклонение результатов измерений $3 \cdot 10^{-8}$ Ом.

5. Вопрос. Какими свойствами должны обладать эталоны?

Ответ. Эталоны должны обладать по крайней мере следующими свойствами: неизменностью, воспроизводимостью и сличаемостью.

Неизменность — свойство эталона удерживать неизменными размер воспроизводимой им единицы в течение длительного времени, при этом все изменения, зависящие от внешних условий, должны быть определяемыми.

Воспроизводимость — возможность воспроизведения единицы ФВ с наименьшей погрешностью в соответствии с достигнутым уровнем развития науки и техники.

Сличаемость — возможность сличения (сравнения) с эталоном других СИ, нижестоящих по поверочной схеме, с наивысшей точностью.

6. *Вопрос.* Что такое поверочные схемы, как они классифицируются и какую роль они выполняют в обеспечении единства измерений?

Ответ. Поверочная схема (ПС) — *нормативный документ*, устанавливающий соподчинение СИ, участвующих в передаче размера единицы от эталона рабочим СИ (с указанием методов и погрешности при передаче). Различают государственные и локальные ПС. *Государственная ПС* — это схема, распространяющаяся на все СИ данной ФВ в стране. *Локальная ПС* — это схема, распространяющаяся на СИ данной ФВ, применяемые в регионе, отрасли, ведомстве или на отдельном предприятии (в организации).

Поверочные схемы с эталонами и рабочими эталонами различных разрядов, отвечающие всем необходимым метрологическим требованиям, являются основой обеспечения единства измерений в стране, а также при взаимодействии с другими странами, если при этом требуется проверка соответствия реальных характеристик поставляемой продукции характеристикам, заявленным в сопроводительной документации на продукцию, или подтверждение какого-либо научного, технического или спортивного достижения и т.д.

Пример 1.19. Государственная поверочная схема передачи времени и частоты состоит из государственного первичного эталона частоты, основанного на излучении атома цезия-133, водородного генератора и кварцевого генератора частоты.

Локальная поверочная схема может начинаться с кварцевого генератора (рабочий эталон соответствующего разряда, например 1-го разряда), обладающего наивысшей точностью для предприятия (организации, научного учреждения и т.д.), в котором действует данная ПС. Любую ПС возглавляет СИ, обладающее для данной ПС наивысшей точностью или наименьшей погрешностью.

7. *Вопрос.* В чем отличие стандартного образца от эталона?

Ответ. *Стандартный образец (СО)* — образец вещества (материала) с установленными в результате метрологической аттестации значениями одной или более величин, характеризующими свойство или состав этого вещества (материала). Различают *стандартные*

образцы свойства и стандартные образцы состава. Стандартные образцы свойства веществ и материалов по метрологическому назначению выполняют роль *однозначных мер.*

Как видно из сравнений определений стандартного образца и эталона единицы, стандартный образец отражает некоторое свойство объекта или его физико-химический состав, а эталон единицы воспроизводит с максимальной точностью единицу ФВ. Тем не менее, как и эталоны, стандартные образцы могут применяться в качестве рабочих эталонов с присвоением им соответствующих разрядов по государственной поверочной схеме.

Пример 1.20. Стандартные образцы могут быть образцами шероховатости поверхности, плотности керамических изделий, влажности почвы, химического состава уранового топлива, внешнего вида изделия и т.д.

8. *Вопрос.* Что такое образцовые СИ и рабочие эталоны?

Ответ. В соответствии с РМГ 29-99 термин «образцовое СИ», ранее используемый в поверочных схемах, должен быть заменен на рабочие эталоны соответствующего разряда.

9. *Вопрос.* Что такое единица измерения ФВ и на основе каких единиц ФВ строится система SI?

Ответ. Это — физическая величина фиксированного размера, которой условно присвоено значение, равное единице, и которая применяется для количественного выражения однородных с ней ФВ. Группы единиц измерения образуют различные системы единиц.

Система SI строится на основе следующих основных единиц: метр (м), килограмм (кг), секунда (с), ампер (А), кельвин (К), моль (моль), кандела (кд).

10. *Вопрос.* Укажите основные преимущества международной системы единиц SI в сравнении с прежними системами единиц?

Ответ. Можно перечислить следующие преимущества международной системы единиц SI по сравнению с ранее используемыми системами:

— универсальность, т.е. охват всех отраслей науки, техники, народного хозяйства;

— унификация единиц для всех видов измерений (например, единицы энергии и работы имеют одно наименование джоуль вместо ранее используемых в других системах килограмм-сила-метр, эрг, калория, электрон-вольт и т.д.);

— практическое удобство применения основных и производных единиц;

— ясное и четкое разграничение единицы массы и силы (сила — ньютон, масса — килограмм);

— упрощение записи уравнений и формул из-за отсутствия в них переводных коэффициентов, в частности принятие формы записи диэлектрической и магнитной постоянных с использованием множителей $(4\pi)^{-1}$ и 4π ;

— когерентность, т.е. соотношение между дольными и кратными единицами в системе пропорционально десяти в целой степени (положительной или отрицательной);

— образование производных единиц из основных единиц без переходных коэффициентов.

Среди достоинств системы СИ необходимо выделить два главных, которые на протяжении многих десятилетий не позволяли создать простую и удобную систему единиц. Это, во-первых, четкое разделение понятий массы и веса. В качестве основной единицы в СИ принята масса в 1 кг, а сила, в том числе вес тела, является производной единицей. Сила в 1 Н соответствует ускорению 1 м/с^2 , которое приобретает (развивает) тело массой 1 кг под действием этой силы. Во-вторых, принятие формы записи диэлектрической и магнитной постоянных с использованием коэффициентов 4π и $(4\pi)^{-1}$, а также принятие соответствующей размерности для этих постоянных фарад на метр (Ф/м) и генри на метр (Гн/м).

11. Вопрос. В чем состоит понятие размерности ФВ?

Размерность ФВ — это выражение в форме степенного одночлена, составленного из произведений символов *основных ФВ* в различных степенях и отражающего связь данной ФВ с физическими величинами, принятыми в данной системе величин за основные с коэффициентом пропорциональности, равным 1. Степени символов основных величин, входящих в одночлен, в зависимости от связи рассматриваемой ФВ с основными могут быть целыми, дробными, положительными и отрицательными.

Пример 1.21. Если обозначить размерности длины L , массы M , времени T , силы электрического тока I , температуры θ , то размерность ФВ в общем виде можно представить как

$$\dim Q = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\eta \theta^\lambda \dots,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \lambda$ — показатели степени символов основных величин (в этом примере для упрощения не приведены обозначения размерности силы света и моля). Тогда удельный вес, равный 1 Н/м^3 , имеет размерность $ML^{-2}T^{-2} = \text{кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-2}$, сила в 1 Н — размерность $LMT^{-2} = \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$, напряженность магнитного поля в 1 А/м — размерность $L^{-1}I$, температурный градиент 1 К/м — размерность $L^{-1}\theta$, электрическая проводимость в 1 См (сименс) — размерность $L^{-2}M^{-1}T^3I^2 = \text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$.

Пример 1.22. Образовать производные единицы силы, давления, работы, мощности, электрических напряжения, сопротивления и проводимости.

1. Сила $F = ma$, где a — ускорение, с которым движется тело массой m . Так как размерность ускорения $\dim a = LT^{-2}$, $[a] = \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$, а размерность массы $\dim m = M$, $[m] = \text{кг}$, то размерность силы будет равна $\dim F = LMT^{-2}$, $[F] = \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} = \text{Н}$ и имеет специальное название: ньютон (Н).

2. Давление p определяется силой F , действующей при равномерной нагрузке на единицу поверхности S : $p = F/S$. Поэтому $\dim p = L^{-1}MT^{-2}$, $[p] = \text{м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$. Эта единица называется паскаль: $\text{Па} = \text{м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$.

3. Работа A , совершаемая в направлении силы F , определяется по формуле $A = Fl$, где l — путь, пройденный телом. Следовательно, размерность $\dim A = L^2MT^{-2}$, а $[A] = \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$. Такая единица называется джоуль (Дж): $\text{Дж} = \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$.

4. Мощность P — это работа, совершаемая в единицу времени. Поэтому $\dim P = L^2MT^{-3}$, а $[P] = \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$. Эта единица называется ватт (Вт): $\text{Вт} = \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$.

5. Если электрическое напряжение U определить через мощность P и силу постоянного электрического тока I ($U = P/I$), то размерность $\dim U = L^2MT^{-3}I^{-1}$ и $[U] = \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$. Единица электрического напряжения называется вольт (В): $\text{В} = \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$.

6. На основании закона Ома ($R = U/I$) размерность электрического сопротивления $\dim R = L^2MT^{-3}I^{-2}$. Отсюда $[R] = \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$. Эта единица называется ом (Ом): $\text{Ом} = \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$.

7. Электрическая проводимость G — величина обратная электрическому сопротивлению R . Поэтому размерность проводимости $\dim G = L^{-2}M^{-1}T^3I^2$, а $[G] = \text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$. Единица электрической проводимости называется сименс (См): $\text{См} = \text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$.

12. *Вопрос.* Все ли эталоны основных единиц ФВ реализованы в соответствии с их определением в системе СИ?

Ответ. Из семи основных единиц международной системы единиц СИ для пяти единиц (метр, килограмм, секунда, кельвин и кандела) эталоны единиц реализованы в соответствии с их определением (ГОСТ 8.417–81).

Эталон единицы тока — ампер — реализован с использованием стабильного и воспроизводимого источника электрического потенциала, основанного на эффекте Джозефсона. Определение единицы тока сформулировано в соответствии с законом Ампера о силе взаимодействия двух параллельных проводников. Эталон моля до сих пор не создан.

13. *Вопрос.* Что такое «1 метр», «1 килограмм», «1 секунда», «1 кельвин», «1 ампер» и «1 кандела» в системе единиц SI? Каким образом выбраны эти единицы?

Ответ. Рассмотрим примеры появления исходных величин основных единиц системы SI.

Пример 1.23. Исходная величина «метра» появилась как величина, равная $0,25 \cdot 10^{-7}$ длины дуги Парижского меридиана, на основе которой в 1799 г. изготовлена концевая мера в *1 метр*, названная «метром Архива». Этот «метр Архива», хранящийся в г. Севре, в конечном итоге послужил основой для привязки к размерам длины волны излучения, создаваемого источником света за время, равное $1/c$ доли секунды, где c — скорость света в вакууме.

Пример 1.24. Один килограмм появился как масса одного литра воды при температуре 4°C , соответствующей наибольшей плотности воды. Точное определение массы 1 дм^3 (или объема, равного одному литру) позволило изготовить прототип килограмма в виде платинового цилиндра, который в 1872 г. приняли в качестве исходного «эталоны Архива» массы — один килограмм (точно). На основе этого «эталоны Архива», хранящегося в г. Севре, изготовлены копии, которые переданы в другие страны. В этих странах международные прототипы килограмма являются государственными первичными эталонами массы.

Пример 1.25. Одна секунда определяется как $1/86\,400$ часть солнечных средних суток, которые, в свою очередь, являются солнечными истинными сутками, усредненными за год. Определенная таким образом секунда как единица шкалы всемирного времени не совсем совпадает со шкалой атомного времени, используемой в системе SI. В России шкала равномерного атомного времени ведется с 13 часов 1 января 1964 г. всемирного времени. Эти шкалы со временем расходятся. Постоянно производится корректировка (подстройка) атомного времени — примерно один-два раза в год, не допуская расхождения более 0,9 с.

Пример 1.26. Вначале силу электрического тока измеряли, используя закон Фарадея. Первый эталон силы электрического тока — ампер, принятый Международным конгрессом электриков в 1893 г., определил ампер как неизменяющийся ток, который, проходя через стандартный водный раствор азотнокислого серебра, выделяет $0,0011180$ г серебра в 1 с. В 1948 г. было принято определение ампера, основанное на законе Ампера, в настоящее время принятое в системе SI. Однако реализация эталона сильно отличалась от опре-

деления в системе SI, хотя в эталонной установке расчетно-экспериментальным путем реализовывался закон Ампера. В этом эталоне измерялась сила втягивания одной катушки с током в другую катушку.

В 1991 г. (ГОСТ 8.022–91) сила электрического тока определяется законом Ома и не соответствует определению единицы силы тока, приводимому в системе SI.

Пример 1.27. При разработке термодинамической шкалы температур один кельвин приравнивали одному градусу Цельсия ($1 \text{ K} = 1^\circ\text{C}$). Один градус Цельсия был определен Цельсием в 1742 г. как $1/100$ между точкой кипения воды (100°C) и точкой таяния льда (0°C). Один кельвин как единица термодинамической температуры в системе SI определяется как $1/273,16$ термодинамической температуры тройной точки воды. Заметим, что точка таяния льда отличается от тройной точки воды на $0,01 \text{ K}$.

Пример 1.28. Единица силы света — кандела — заменила ранее используемую единицу силы света «свеча», которая, как и кандела, характеризовала энергию излучения платины, разогретой до температуры 1773°C ($2064,6 \text{ K}$) в заданном направлении. При этом частота излучения платины $540 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$ соответствует длине волны $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$, при которой человеческий глаз обладает максимальной чувствительностью.

14. *Вопрос.* В чем особенности проведения технических измерений?

Технические измерения являются наиболее массовым видом измерений, осуществляемых на производстве. При проведении этих измерений используется специально разработанный для этого вида измерений документ «Методика выполнения измерений», в котором определен порядок проведения измерения и приведены заранее установленные оценки погрешности измерений. Этот же документ содержит правила вычисления погрешности данного вида измерения на данной установке, или приборе, или измерительной системе и указания о периодичности метрологической аттестации.

15. *Вопрос.* С помощью каких нормативных документов осуществляется метрологическое обеспечение в стране?

Ответ. К нормативным документам, регулирующим деятельность, связанную с метрологическим обеспечением измерений, прежде всего относятся: Государственные стандарты (ГОСТ Р); Межгосударственные стандарты (ГОСТ); Отраслевые стандарты (ОСТ); Стандарты научно-технических, инженерных обществ

и других общественных объединений (СТО); Стандарты предприятий (СТП). Система стандартов должна отвечать требованиям гармонизации стандарта, т.е. содержание стандарта должно соответствовать другим стандартам и прежде всего государственным.

К нормативным документам относятся также различные правила и рекомендации по стандартизации, метрологии, сертификации и аккредитации, а также методические инструкции и руководящие документы по применению стандартов.

Технические условия (ТУ) — нормативный документ, устанавливающий технические требования, которым должна удовлетворять продукция, процесс или услуга. Технические условия, как правило, разрабатываются на конкретную продукцию (изделие, СИ, услугу) и утверждаются предприятием-разработчиком.

16. *Вопрос.* Что такое технические регламенты, вводимые в практику нормативного регулирования Федеральным законом от 27.11.2003 г. №184-ФЗ?

Технический регламент — документ, который принят международным договором Российской Федерации, ратифицированным в порядке, установленном законодательством Российской Федерации, или федеральным законом, или указом Президента Российской Федерации, постановлением Правительства Российской Федерации, и устанавливает обязательные для применения и исполнения требования к объектам технического регулирования (продукции, в том числе зданиям, строениям и сооружениям, процессам производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации и утилизации). Этот документ содержит также ссылки на соответствующие стандарты, технические условия и другие документы.

Технические регламенты:

— устанавливают минимальные требования по безопасности с учетом степени риска причинения вреда;

— не могут служить препятствием предпринимательской деятельности в большей степени, чем это минимально необходимо для достижения целей;

— не должны содержать требования к конструкции и исполнению, за исключением случаев, направленных на достижение целей.

Технические регламенты могут быть двух видов: общие (требования обязательны для всех видов продукции, процессов производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации и утилизации) и специальные (требованиями учитываются технологические и иные особенности отдельных видов продукции, процессов производства и т.д.)



ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

2.1.1. Интегральные и дифференциальные функции распределения и их основные характеристики

Интегральной функцией результатов измерений называется зависимость вероятности того, что результат измерения x_i в i -м опыте окажется меньше некоторого текущего значения x (рис. 2.1, а):

$$F(x) = P\{x_i \leq x\} = P\{-\infty < x_i \leq x\}.$$

Интегральная функция $F(x)$ — неубывающая непрерывная функция, асимптотически стремящаяся к нулю при $x \rightarrow -\infty$ и к единице при $x \rightarrow \infty$. Непрерывность функции $F(x)$ понимается таким образом, что результат измерения может принять любое значение, но с вероятностью, близкой к нулю. На самом деле реальная функция $F(x)$ имеет ступенчатый вид, так как любое средство измерения (СИ) имеет порог чувствительности, определяющий минимальное изменение измеряемой величины, которое СИ в состоянии надежно зарегистрировать.

Случайную погрешность δ можно рассматривать как случайную величину и ее поведение также описывать интегральной функцией распределения. *Интегральной функцией распределения погрешности* δ называется зависимость вероятности того, что погрешность в i -м измерении $x_i - Q$ будет меньше, чем погрешность $x - Q$. Получается эта функция путем переноса начала координат в точку $x = Q$ (рис. 2.2, а):

$$F(\delta) = P\{\delta_i \leq \delta\} = P\{x_i - Q \leq x - Q\} = P\{x_i \leq x\}.$$

Наибольшее распространение получили как более наглядные дифференциальные функции распределения результатов измерений $p(x)$ и погрешностей $p(\delta)$, являющиеся производными от интегральных функций:

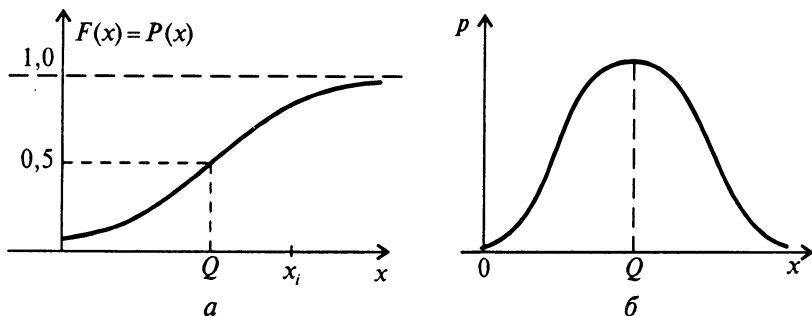


Рис. 2.1. Интегральная (а) и дифференциальная (б) функции распределения результатов измерения

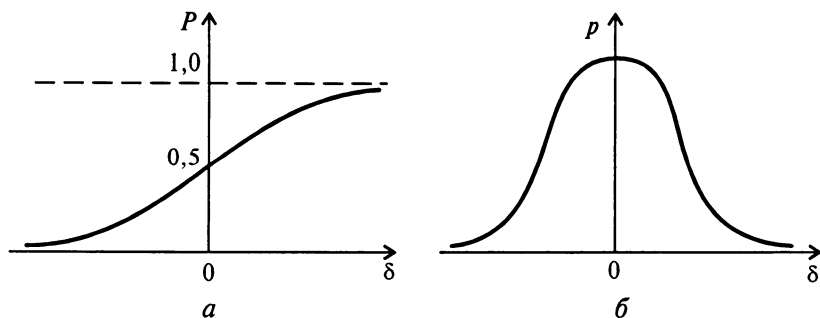


Рис. 2.2. Интегральная (а) и дифференциальная (б) функции распределения погрешности измерения

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad p(\delta) = \frac{dF(\delta)}{d\delta}. \quad (2.1)$$

Обычно максимум дифференциальной функции распределения (или плотности распределения) совпадает (при отсутствии систематической погрешности) с истинным значением ФВ, поэтому дифференциальная функция распределения является более наглядной (рис. 2.1, б и рис. 2.2, б). Поскольку функция $P(\delta)$ безразмерна, то размерность $p(\delta) = [1/\delta]$, где $[\delta]$ — размерность измеряемой величины.

Дифференциальные функции позволяют определить вероятность попадания погрешности или результата измерения в заданный интервал:

$$\begin{aligned}
P(\delta_1 < \delta \leq \delta_2) &= \int_{\delta_1}^{\delta_2} p(\delta) d\delta = P(-\infty < \delta \leq \delta_2) - \\
&- P(-\infty < \delta \leq \delta_1) = \int_{-\infty}^{\delta_2} p(\delta) d\delta - \int_{-\infty}^{\delta_1} p(\delta) d\delta; \\
P(x_1 < x \leq x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = P(-\infty < x \leq x_2) - \\
&- P(-\infty < x \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Очевидны также следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx &= P(-\infty < x < \infty) = 1; \\
\int_{-\infty}^{\infty} p(\delta) d\delta &= P(-\infty < \delta < \infty) = 1.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Обычно результаты измерений характеризуют функционалами от функций распределения и значениями погрешности в некотором доверительном интервале. Наиболее широко для оценки результатов измерения используют первые и вторые начальные и центральные моменты.

Начальным моментом r -го порядка функции распределения называется интеграл вида

$$\alpha_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r p(x) dx = M[x^r],$$

представляющий собой математическое ожидание x^r . Нулевой начальный момент равен единице (по определению $p(x)$):

$$\alpha_0[x] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1.$$

Первый начальный момент определяет центр тяжести под кривой $p(x)$ и называется математическим ожиданием:

$$\alpha_1[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = m_x, \tag{2.4}$$

второй начальный момент

$$\alpha_2[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \tag{2.5}$$

характеризует рассеяние результатов измерения.

Центральным моментом r -го порядка функции распределения называется интеграл вида

$$\mu_r[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^r p(x) dx = M[(x - m_x)^r],$$

представляющий собой математическое ожидание величины $(x - m_x)^r$. Нулевой центральный момент $\mu_0[x] = 1$, а первый центральный момент $\mu_1[x] = 0$. Второй центральный момент

$$\mu_2[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx = M[(x - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 p(\delta) d\delta = D[x] \quad (2.6)$$

совпадает со вторым начальным моментом при $m_x = 0$, имеет специальное название — *дисперсия*, играет большую роль в теории погрешностей.

Дисперсия имеет размерность квадрата измеряемой величины, что не всегда удобно на практике. Чаше используют среднеквадратическое отклонение (СКО) результатов измерения

$$\sigma_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{D[\delta]} = \sigma_\delta = \sigma. \quad (2.7)$$

Математическое ожидание и дисперсия — наиболее часто используемые моменты распределения результатов измерения, поскольку позволяют оценить значение измеряемой величины и степень рассеивания результатов измерения около математического ожидания.

Примечание. В соответствии с п. 9.14 РМГ 29-99 допускается при обработке результатов измерений для характеристики случайной погрешности вместо родового термина среднеквадратической погрешности (СКП) использовать термин «среднеквадратическое отклонение».

Для более детальной характеристики распределений используют также моменты более высокого порядка. Так, центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения, а четвертого порядка — плосковершинность распределения [3–5].

Существует много функций распределения вероятности случайных величин [8], некоторые из которых приведены в табл. П1. Наиболее распространенными в теории погрешностей являются нормальное и равномерное распределения. Приведем характеристики этих распределений:

Симметричное равномерное распределение постоянно в диапазоне от $-\alpha$ до α и равно нулю при всех других изменениях аргумента (рис. 2.3, а):

$$p(\delta) = \begin{cases} 0, & -\infty < \delta < -\alpha, \\ 1/2\alpha, & -\alpha \leq \delta \leq \alpha, \\ 0, & \alpha < \delta < \infty. \end{cases} \quad (2.8)$$

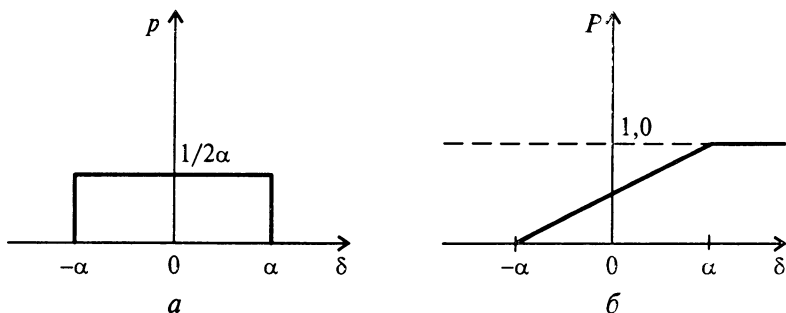


Рис. 2.3. Симметричное равномерное распределение погрешности измерения

Это распределение погрешности имеет место, например, из-за зазоров в механизмах, обусловленных допусками, из-за дискретности уровней квантования в аналого-цифровых преобразователях, из-за дискретности шкал при снятии показаний со стрелочного прибора и т.д. Интегральная функция распределения имеет вид линейной функции (рис. 2.3, б)

$$P(\delta) = \int_{-\infty}^{\delta} p(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & -\infty < \delta < -\alpha, \\ (\delta + \alpha)/2\alpha, & -\alpha \leq \delta \leq \alpha, \\ 1, & \alpha < \delta < \infty. \end{cases} \quad (2.9)$$

Нормальное распределение встречается довольно часто, поскольку к нему, согласно центральной предельной теореме теории вероятности, приводит большое количество одновременно малых воздействий, пусть даже имеющих произвольные распределения погрешности. Дифференциальные функции распределения результатов измерений и случайной погрешности имеют вид (рис. 2.4)

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]; \quad (2.10)$$

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma_\delta \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\delta^2}{2\sigma_\delta^2} \right]. \quad (2.11)$$

Если переместить начало координат $p(x)$ в точку $x = m_x$, то получим функцию распределения погрешности $p(\delta)$ и $\sigma_x = \sigma_\delta = \sigma$. Как видно из (2.10) и (2.11), нормальная функция распределения полностью характеризуется дисперсией, которая показывает рассеиваемость результатов измерений, обусловленных случайной погрешностью. Вероятность попадания результатов измерения в некоторый заданный интервал (x_1, x_2) в соответствии с (2.2):

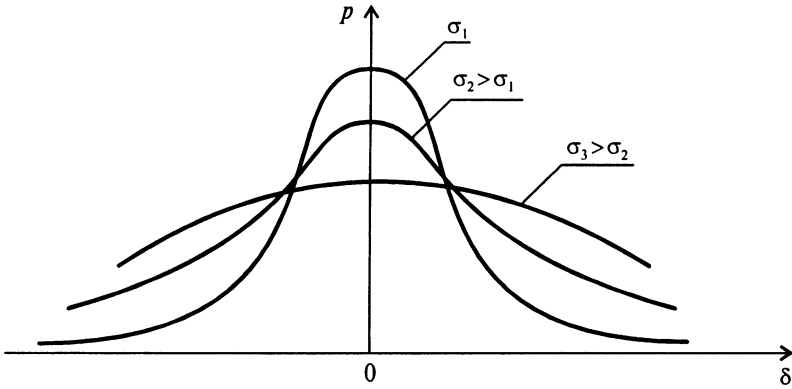


Рис. 2.4. Нормальное распределение погрешности измерения при различных среднеквадратических отклонениях

$$P(x_1 < x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \quad (2.12)$$

Этот интеграл не выражается в элементарных функциях, и его вычисляют с помощью таблиц. Для упрощения формы записи и приведения ее к виду, удобному для пользования таблицами, осуществляют замену переменных:

$$\frac{x - m_x}{\sigma} = t; \quad \frac{x_1 - m_x}{\sigma} = t_1; \quad \frac{x_2 - m_x}{\sigma} = t_2. \quad (2.13)$$

При этом получают следующее выражение для вероятности (2.12):

$$\begin{aligned} P(x_1 < x \leq x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{t_2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt - \int_{-\infty}^{t_1} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right] = \Phi(t_2) - \Phi(t_1). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Дифференциальная функция распределения

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (2.15)$$

является нормированной функцией распределения погрешности (табл. П2). Для вычисления вероятности используют табулированные значения *интеграла вероятности* (табл. П3, П4):

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (2.16)$$

В силу симметрии распределения и равенства площади под кривой распределения единице

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z) \text{ и } \Phi(-z) = 1 - \Phi(z). \quad (2.17)$$

Вероятность попадания результатов измерения (или погрешностей) в симметричный интервал $\pm z$:

$$P(-z < \delta \leq z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = \Phi(z) - 1 + \Phi(z) = 2\Phi(z) - 1. \quad (2.18)$$

Другие распределения и их основные характеристики приведены в табл. П1.

Часто для определения вероятности (2.12) используют табулированные значения функции Лапласа [4–7]:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

2.1.2. Преобразование функций распределения вероятности

Если две случайные величины, например результаты измерений (или погрешности измерения), связаны между собой непрерывной функцией $y=f(x)$, то плотность вероятности распределения случайной величины y [7, 8]:

$$\psi(y) = p(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = p[g(y)] \left| g'(y) \right|, \quad (2.19)$$

где $x=g(y)$ — функция, обратная функции $y=f(x)$.

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины $y=f(x)$ можно определить по формулам

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y\psi(y) dy; \quad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 \psi(y) dy \quad (2.20)$$

или с помощью более простых для вычисления формул

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx; \quad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - m_y]^2 p(x) dx.$$

Подобные преобразования бывают довольно сложными, и поэтому иногда ограничиваются вычислением математического ожидания и дисперсии функции, используя для этого соответствующие формулы для косвенных измерений (см. гл. 6).

Часто возникает необходимость получения распределения плотности вероятности суммы погрешностей измерения двух и более независимых ФВ. Результирующая плотность вероятности двух

случайных погрешностей может быть определена с помощью интеграла свертки

$$p(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\delta_1) p_2(\delta - \delta_1) d\delta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\delta - \delta_2) p_2(\delta_2) d\delta_2, \quad (2.21)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$, $p_1(\delta_1)$, $p_2(\delta_2)$ — функции плотности вероятности распределения погрешностей δ_1 и δ_2 . Заметим, что всегда для независимых случайных величин математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, дисперсия суммы равна сумме дисперсий.

Большие возможности в получении ряда характеристик распределения случайных величин имеет аппарат характеристических функций.

Характеристической функцией $\theta_x(u)$ случайной величины x называется математическое ожидание величины e^{jux} и для непрерывной функции распределения плотности $p(x)$ определяется как

$$\theta_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} p(x) dx. \quad (2.22)$$

Это преобразование при изменении знака у показателя экспоненты совпадает с определением спектральной функции (прямое преобразование Фурье), что допускает использование таблиц Фурье или Лапласа с учетом пределов интегрирования.

Зная характеристическую функцию, плотность вероятности можно определить по формуле

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_x(u) e^{-jux} du. \quad (2.23)$$

Одним из важных свойств характеристической функции является то, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых. Таким образом, при получении суммарной плотности вероятности, например $p(\delta)$, операцию свертки функций плотности вероятности $p_1(\delta_1)$ и $p_2(\delta_2)$, т.е. интегрирования в соответствии с формулой (2.21), можно заменить умножением характеристических функций соответствующих распределений

$$\theta_\delta(u) = \theta_{\delta_1}(u) \theta_{\delta_2}(u). \quad (2.24)$$

Характеристическая функция нормального распределения плотности вероятности погрешности измерения будет равна

$$\theta_\delta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) \exp(j\delta u) d\delta = \exp\left(-\frac{\sigma^2 u^2}{2}\right). \quad (2.25)$$

В случае наложения n результатов измерения со случайными погрешностями, распределенными по нормальному закону, результирующая характеристическая функция будет равна произведению $\theta_{\delta}(u) = \theta_{\delta_1}(u) \theta_{\delta_2}(u) \theta_{\delta_3}(u) \dots \theta_{\delta_n}(u)$, а результирующая нормальная плотность вероятности будет иметь дисперсию, равную сумме дисперсий наложенных процессов $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_n^2$.

Для определения моментов (начального или центрального) случайной величины x необходимо вычислить r -ю производную от характеристической функции по параметру u и положить $u = 0$:

$$m_r[x] = \frac{1}{j^r} \frac{d^r \theta(ju)}{du^r} \Big|_{u=0}. \quad (2.26)$$

Формула (2.26) позволяет вычислить математическое ожидание, дисперсию и другие моменты, не зная аналитической зависимости $p(x)$ или $F(x)$.

Пример 2.1. Для равномерного распределения результатов измерения, заключенных между значениями a и b , определить математическое ожидание и дисперсию ($a > 0$, $b > 0$, $b > a$).

Решение. Поскольку по определению (см. формулу (2.3))

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, \text{ то для равномерного распределения можно записать } \int_a^b p_0 dx = 1. \text{ Тогда}$$

$$p_0 = 1/(b - a). \quad (1)$$

Математическое ожидание в соответствии с формулой (2.4) будет равно

$$\begin{aligned} M[x] &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{b+a}{2} = m_x. \end{aligned} \quad (2)$$

Для расчета дисперсии результатов преобразуем исходную формулу (2.6), определяющую дисперсию результатов измерения:

$$\begin{aligned} D[x] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x m_x p(x) dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} m_x^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - 2 m_x m_x + (m_x)^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - m_x^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - m_x^2. \quad (3)$$

Определим первое слагаемое в формуле (3)

$$\int_a^b x^2 p(x) dx = p_0 \int_a^b x^2 dx = p_0 \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{p_0}{3} (b^3 - a^3) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3},$$

а затем дисперсию и СКО

$$D[x] = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad (4)$$

$$\sigma[x] = \sqrt{D[x]} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (5)$$

Пример 2.2. Погрешность измерения δ имеет равномерное распределение от $-c$ до c и симметрична относительно начала координат. Определить математическое ожидание погрешности, дисперсию и СКО погрешности от среднего значения. Подсчитать СКО погрешности при $c = 0,1$ мм.

Решение. Используя формулы (1) и (3) из примера 2.1, при $a = -c$ и $b = c$ получаем

$$p_0 = 1/2c, \quad M[\delta] = 0, \quad D[\delta] = c^2/3, \quad \sigma[\delta] = c/\sqrt{3} = 0,058 \text{ мм.}$$

Пример 2.3. Погрешность δ измерения напряжения распределена по симметричному закону Симпсона (треугольный закон) в интервале от $a = -1$ мВ до $b = 3$ мВ (см. табл. П1).

Определить систематическую погрешность, СКО результатов измерения, вероятность того, что измеряемое напряжение превысит истинное значение более чем на 2 мВ, а также вероятность того, что исправленный результат измерения не превысит $|1$ мВ|.

Решение. 1. Запишем распределение плотности вероятности для погрешности. Для этого определим вначале его максимум, используя условие нормировки, в соответствии с которым площадь под кривой распределения должна быть равна единице. Поскольку распределение представляет собой равнобедренный треугольник (симметричное распределение Симпсона) с основанием, равным $b - a = 4$ мВ, то его высота p_0 , определенная из формулы для площади треугольника $0,5p_0(b - a) = 1$, будет равна $p_0 = 0,5 \text{ мВ}^{-1}$ при $\delta = 1$ мВ.

2. Используя сведения из аналитической геометрии, можно записать для левой стороны треугольника (рис. 2.5):

$$\frac{p(\delta) - p(\delta_1)}{p(\delta_2) - p(\delta_1)} = \frac{\delta - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1}. \quad (1)$$

Подставляя в (1) $p(\delta_1) = 0$, $\delta_1 = -1$, $p(\delta_2) = 0,5$, $\delta_2 = 1$, получаем $p(\delta) = 0,25(\delta + 1)$. Аналогично можно получить выражение для правой стороны треугольника $p(\delta) = -0,25(\delta - 3)$. Аналитическое выражение для рассматриваемого распределения будет иметь вид

$$p(\delta) = \begin{cases} p_1(\delta) = 0,25(\delta + 1), & -1 \leq \delta \leq 1, \\ p_2(\delta) = -0,25(\delta - 3), & 1 \leq \delta \leq 3, \\ p_3(\delta) = p_4(\delta) = 0, & \delta < -1, \delta > 3. \end{cases} \quad (2)$$

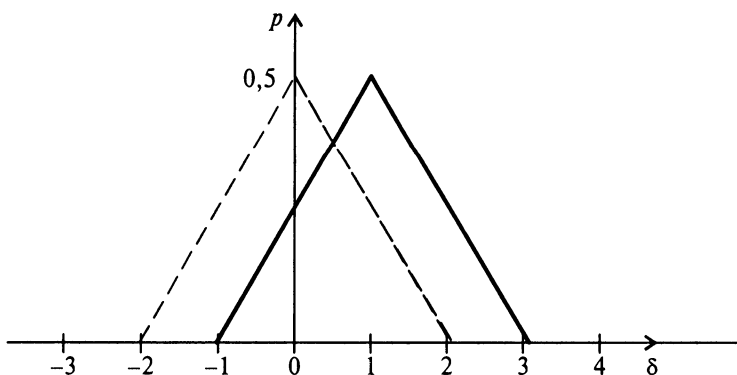


Рис. 2.5. Треугольное распределение (Симпсона) погрешности измерения: смещенное на величину систематической погрешности (сплошная) и симметричное (штриховая)

3. Используя (2), определяем систематическую погрешность, которая при симметричном распределении соответствует математическому ожиданию погрешности

$$\begin{aligned} \Delta_s &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta p(\delta) d\delta = \int_{-1}^1 \delta p_1(\delta) d\delta + \int_1^3 \delta p_2(\delta) d\delta = \\ &= \int_{-1}^1 0,25\delta(\delta + 1) d\delta + \int_1^3 \delta(-0,25)(\delta - 3) d\delta = 1 \text{ мВ}. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что систематическая погрешность фактически была уже выявлена при определении координаты максимума распределения.

4. Для исправленных результатов измерения, т.е. для результатов измерения смещенных на величину систематической погрешности (3), получим следующее распределение плотности вероятности погрешности измерения (рис. 2.5):

$$p^*(\delta) = \begin{cases} p_1(\delta) = 0,25(\delta + 2), & -2 \leq \delta \leq 0, \\ p_2(\delta) = 0,25(\delta - 2), & 0 \leq \delta \leq 2, \\ p_3(\delta) = p_4(\delta) = 0, & |\delta| > 2. \end{cases} \quad (4)$$

5. Используя (4), по формуле (2.6) вычислим дисперсию и СКП:

$$\begin{aligned} D[\delta] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 p^*(\delta) d\delta = \int_{-2}^0 \delta^2 p_1(\delta) d\delta + \int_0^2 \delta^2 p_2(\delta) d\delta = \\ &= 2 \int_{-2}^0 \delta^2 p_1(\delta) d\delta = \frac{2}{3} = 0,66 \text{ мВ}^2; \\ \sigma[\delta] &= \sqrt{D[\delta]} = \sqrt{2/3} = 0,82 \text{ мВ}. \end{aligned}$$

6. Определим вероятность того, что погрешность *исправленных* результатов измерения не превысит по модулю 1 мВ. Поскольку распределение симметрично, то эта вероятность будет равна

$$P(|\delta| < 1 \text{ мВ}) = 2 \int_0^1 p_2^*(\delta) d\delta = 2 \int_0^1 \left(-\frac{1}{4}\right)(\delta - 2) d\delta = 0,75.$$

7. Определим вероятность того, что *неисправленный* результат измерения напряжения превысит истинное значение напряжения более чем на 2 мВ:

$$P = \int_2^3 p_2(\delta) d\delta = \int_2^3 \left(-\frac{1}{4}\right)(\delta - 3) d\delta = 0,125.$$

Пример 2.4. Погрешность результатов измерения распределена по нормальному закону с СКО, равным $\sigma = 4$ мА. Записать усеченный нормальный закон распределения погрешности, если предел допускаемой погрешности составляет $\Delta_p = \pm 12$ мВ.

Решение. Аналитическое выражение для усеченного закона найдем из условия нормирования (2.3) площади под кривой нормального распределения:

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) d\delta = \frac{A}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta_p}^{\Delta_p} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) d\delta = 1.$$

Переходя к нормализованному представлению функции распределения при $t = \delta/\sigma$, $dt = d\delta/\sigma$ и используя данные табл. ПЗ при $t_p = \Delta_p/\sigma = \pm 3$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = A \cdot 0,997 = 1,$$

откуда $A = 1/0,997$.

Таким образом, распределение будет иметь вид

$$p(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{0,997\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) & \text{при } |\delta| \leq 12 \text{ мВ,} \\ 0 & \text{при } |\delta| > 12 \text{ мВ.} \end{cases}$$

Пример 2.5. Допустим, что случайная погрешность δ имеет χ^2 -распределение плотности вероятности в виде

$$p(\delta) = \delta^{0,5n-1} e^{-0,5\delta} / 2^{0,5n} \Gamma(0,5n), \quad 0 < \delta < \infty.$$

Определить математическое ожидание и СКО.

Решение. В соответствии с определением математического ожидания (см. табл. П14)

$$\begin{aligned} M[\delta] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta p(\delta) d\delta = \int_0^{\infty} \delta^{0,5n} e^{-0,5\delta} \frac{1}{2^{0,5n} \Gamma(0,5n)} d\delta = \\ &= \frac{1}{2^{0,5n} \Gamma(0,5n)} \frac{\Gamma(0,5n+1)}{0,5^{0,5n+1}} = n. \end{aligned}$$

Дисперсию определим по формуле (3) примера 2.1. Для этого вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \delta^2 p(\delta) d\delta &= \frac{1}{2^{0,5n} \Gamma(0,5n)} \int_0^{\infty} \delta^{0,5n+1} e^{-0,5\delta} d\delta = \frac{1}{2^{0,5n} \Gamma(0,5n)} \frac{\Gamma(0,5n+1)}{0,5^{0,5n+2}} = \\ &= n(n+2). \end{aligned}$$

Тогда $D[\delta] = n(n+2) - n^2 = 2n$.

Пример 2.6. Плотность вероятности погрешности измерения физической величины имеет вид $p(\delta) = \alpha e^{-\beta|\delta|}$, где α и β — постоянные величины, а δ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Определить соотношение, которому должны удовлетворять постоянные α и β , интегральную функцию распределения погрешности, представить графически интегральную и дифференциальную функции распределения погрешности измерения при $\beta = 2$.

Решение. Для нахождения соотношения между параметрами α и β воспользуемся условием нормировки для плотности вероятности, в соответствии с которым площадь под кривой плотности вероятности должна равняться единице (2.3). Поскольку переменная δ представлена модулем, то для вычисления площади разобьем интеграл на две части — при $\delta > 0$ и $\delta < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\delta) d\delta = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\beta\delta} d\delta + \int_{-\infty}^0 \alpha e^{\beta\delta} d\delta = \frac{2\alpha}{\beta} = 1,$$

откуда получаем $2\alpha = \beta$. Определим интегральную функцию. В соответствии с ее определением $F(z) = \int_{-\infty}^z p(\delta) d\delta$. Этот интеграл также вычислим отдельно для области положительного и отрицательного изменения аргумента δ :

$$F(z) = \int_{-\infty}^z \alpha e^{\beta\delta} d\delta = \frac{1}{2} e^{\beta z} \quad \text{при } \delta < 0,$$

$$F(z) = \frac{1}{2} + \int_0^z \alpha e^{-\beta\delta} d\delta = 1 - \frac{1}{2} e^{-\beta z} \quad \text{при } \delta > 0.$$

При $\beta = 2$, $\alpha = 1$ $p(\delta) = \exp(-2|\delta|)$, и тогда интегральная функция будет иметь вид

$$F(z) = \begin{cases} 0,5e^{2z}, & z \leq 0, \\ 0,5(1 - e^{-2z}), & z > 0. \end{cases}$$

Дифференциальная и интегральная функции распределения погрешности измерения представлены на рис. 2.6.

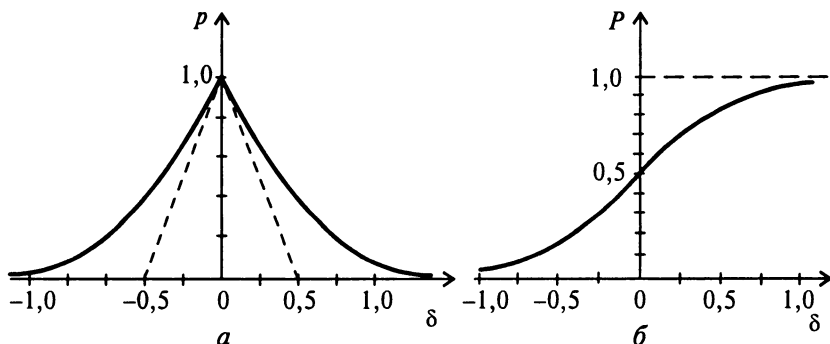


Рис. 2.6. Дифференциальная (а) и интегральная (б) функции распределения примера 2.6

Пример 2.7. Интегральная функция распределения результатов измерения $F(x)$ представлена на рис. 2.7. Определить аналитическое выражение для $F(x)$, вероятность того, что ФВ примет значения от 3,5 до 4,5, а также построить график плотности распределения $p(x)$.

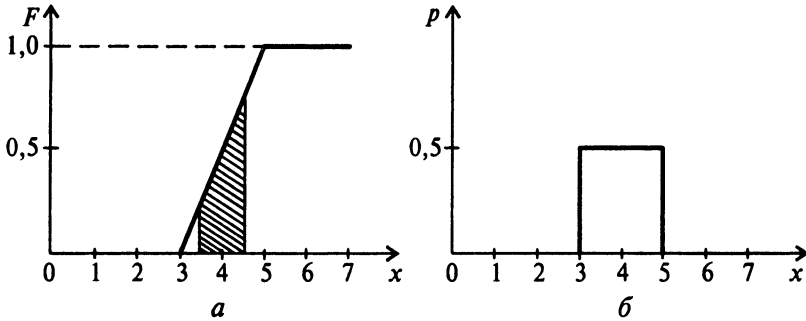


Рис. 2.7. Интегральная (а) и дифференциальная (б) функции распределения примера 2.7

Решение. 1. Как видно из графического представления функции $F(x)$ на рис 2.7, она равна нулю при $x \leq 3$ и единице при $x \geq 5$. Для определения функции в диапазоне от $x_1=3$ до $x_2=5$ запишем аналитическое уравнение прямой между точками с координатами $x_1 = 3, y_1 = 0$ и $x_2 = 5, y_2 = 1$ в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

преобразовав которое, получим

$$y = F(x) = 0,5(x - 3).$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ 0,5(x - 3), & 3 \leq x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

2. Поскольку в соответствии с определением функция плотности вероятности $p(x) = dF(x)/dx$, то получим

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ 0,5, & 3 < x < 5, \\ 0, & x \geq 5. \end{cases}$$

3. Вероятность попадания результата измерения в интервал от 3,5 до 4,5 равна площади, заключенной между этими значениями на графике $p(x)$, или разности $F(4,5) - F(3,5) = 0,75 - 0,25 = 0,5$ (рис. 2.7).

Пример 2.8. Абсолютное значение погрешности измерения равномерно распределено в интервале от -1 до 1 . Причем на границах этого интервала, т.е. в точках $\delta = \pm 1$, вероятность равна $0,25$.

Определить функции дифференциального и интегрального распределения вероятности погрешности, а также вероятность того, что погрешность попадет в интервал от $-0,5$ до $0,5$.

Решение. По условию нормировки вероятность $P(-1 \leq \delta \leq 1) = P(-1) + P(-1 < \delta < 1) + P(1) = 1$, откуда $P(-1 < \delta < 1) = 1 - 2 \cdot 0,25 = 0,5$. Плотность вероятности $p(-1 < \delta < 1) = 0,5/2 = 0,25$. Таким образом,

$$p(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta < -1, \\ 0,25, & \delta = -1, \\ 0,25, & -1 < \delta < 1, \\ 0,25, & \delta = 1, \\ 0, & \delta > 1. \end{cases}$$

Из условия задачи видно, что интегральная функция имеет скачки в точках $\delta = \pm 1$, равные $0,25$. Определим зависимость интегральной функции в диапазоне от -1 до 1 :

$$F(\delta) = P(\delta = -1) + \int_{-1}^{\delta} 0,25 dz = 0,25 + 0,25(\delta + 1) = 0,25(\delta + 2).$$

На рис 2.8 представлены дифференциальная и интегральная функции распределения вероятности погрешности $F(\delta)$. Вероятность попадания результатов измерения в интервал от $-0,5$ до $0,5$ будет равна $P(0,5 < \delta < 0,5) = F(0,5) - F(-0,5) = 0,25$.

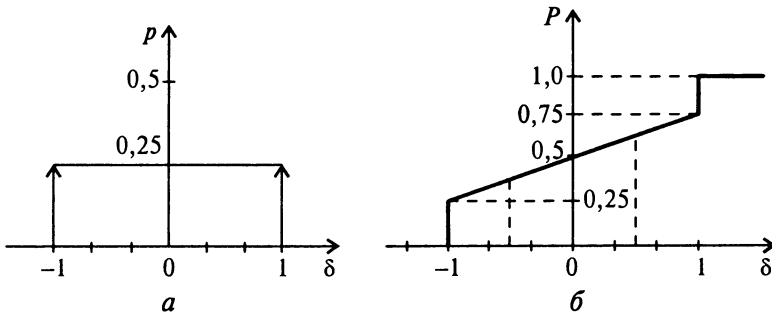


Рис. 2.8. Дифференциальная (а) и интегральная (б) функции распределения примера 2.8

Пример 2.9. Плотность вероятности результатов измерения ФВ соответствует распределению Лапласа с математическим ожиданием m_x

$$p(x) = 0,5\lambda e^{-\lambda|x-m_x|} \text{ при } \lambda > 0.$$

Определить дисперсию случайной погрешности результатов измерения.

Решение. Поскольку распределение симметрично относительно своего математического ожидания, то вычислим дисперсию погрешности с помощью соотношения (2.6) (см. табл. П14):

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 p(\delta) d\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 0,5\lambda e^{-\lambda|\delta|} d\delta = 0,5\lambda \int_{-\infty}^0 \delta^2 e^{\lambda\delta} d\delta + 0,5\lambda \int_0^{\infty} \delta^2 e^{-\lambda\delta} d\delta = \\ &= 0,5\lambda \int_0^{\infty} y^2 e^{-\lambda y} dy - 0,5\lambda \int_0^{\infty} \delta^2 e^{-\lambda\delta} d\delta = \lambda \int_0^{\infty} \delta^2 e^{-\lambda\delta} d\delta = \lambda \frac{\Gamma(3)}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

После третьего равенства в интеграле произведена замена переменных $y = -\delta$, а затем изменены пределы интегрирования. Таким образом, дисперсия равна $2/\lambda^2$.

Пример 2.10. Известно, что результаты измерений ФВ x распределены равномерно в интервале от x_1 до x_2 , т.е. $p(x) = 1/(x_2 - x_1)$. Найти функцию распределения функции плотности вероятности величины y , которая функционально связана с величиной x линейной зависимостью $y = f(x) = ax + b$. Найти также математическое ожидание и дисперсию величины y .

Решение. В соответствии с (2.19) найдем обратную функцию и ее производную

$$x = g(y) = \frac{y - b}{a}; \quad g'(y) = \frac{1}{a}.$$

Получим искомую функцию распределения вероятности величины y

$$\psi(y) = \frac{1}{|a|} p\left(\frac{y - b}{a}\right), \quad |a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Определим математическое ожидание и дисперсию величины y по формулам (2.20) при $a > 0$, сначала воспользовавшись найденной функцией $\psi(y)$:

$$\begin{aligned} m_y &= \int_{-\infty}^{\infty} y\psi(y)dy = \int_{y_1}^{y_2} y \frac{1}{a} \frac{1}{x_2 - x_1} dy = \frac{1}{a(x_2 - x_1)} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y_1=ax_1+b}^{y_2=ax_2+b} = \frac{a(x_2 + x_1)}{2} + b; \\ \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 \psi(y) dy = \int_{y_1}^{y_2} y^2 \psi(y) - m_y^2 = \int_{y_1}^{y_2} y^2 \frac{1}{a(x_2 - x_1)} dy - m_y^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a(x_2 - x_1)} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{ax_1+b}^{ax_2+b} - \left[\frac{a(x_2 + x_1)}{2} + b \right]^2 = \frac{a^2(x_1 + x_2)^2}{12}.$$

Второй путь вычисления математического ожидания и дисперсии (см. (2.20)) без вычисления функции распределения $\psi(y)$ менее трудоемок:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} (ax + b) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left[a \frac{x^2}{2} + bx \right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \frac{a(x_2 + x_1)}{2} + b;$$

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - m_y]^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 p(x) dx - m_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)^2 \times$$

$$\times \frac{1}{x_2 - x_1} dx - m_y^2 = \frac{1}{x_2 - x_1} \left[a \frac{x^3}{3} + bx^2 \right]_{x_1}^{x_2} - m_y^2 = \frac{a^2(x_2 - x_1)^2}{12};$$

$$\sigma_y = \frac{a(x_2 - x_1)}{2\sqrt{3}}.$$

Заметим, что этот пример приведен для иллюстрации применения формул (2.19) и (2.20). Для вычисления математического ожидания и дисперсии при линейной функциональной зависимости можно также воспользоваться основными правилами для их вычисления, получив результаты более простым способом [7]:

$$m_y = M[y] = M[ax + b] = M[ax] + M[b] = aM[x] + b = a \frac{x_2 + x_1}{2} + b;$$

$$\sigma_y^2 = D[y] = M[y - m_x]^2 = M \left[(ax + b) - \left(a \frac{x_1 + x_2}{2} - b \right) \right]^2 =$$

$$= M \left[a^2 x^2 \right] - M \left[a^2 x(x_1 + x_2) \right] + M \left[a^2 \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right] =$$

$$= a^2 \left\{ M[x^2] - (x_1 + x_2)M[x] + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right\} =$$

$$= a^2 \left[\frac{x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2}{3} - \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right] = a^2 \frac{(x_1 - x_2)^2}{12}.$$

При вычислении учтено, что

$$M[x^2] = D[x] = \int_{x_1}^{x_2} x^2 p(x) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{x^3}{3} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{3(x_2 - x_1)};$$

$$M[x] = m_x = 0,5(x_1 + x_2) + b.$$

Пример 2.11. Погрешность измерения амплитуды сигнала распределена по нормальному закону с плотностью вероятности

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < \delta < \infty.$$

Этот сигнал подвергается преобразованию в квадратичном детекторе $y = \delta^2$. Определить распределение случайной погрешности после квадратичного детектора.

Решение. В соответствии с (2.19) искомая плотность вероятности будет иметь вид

$$p(y) = p(\delta) \left| \frac{d\delta}{dy} \right| = p(\delta) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, распределение случайной погрешности на выходе детектора равно

$$p(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{2y^2}{\sigma_y^2}\right), \quad y > 0,$$

$$p(y) = 0, \quad y < 0,$$

где $\sigma_y = 2\sigma\sqrt{y}$.

Пример 2.12. Результаты измерения ФВ x равномерно распределены в диапазоне от $-\alpha$ до α и связаны с другой ФВ y соотношением $y = a + bx$, где $b > 0$. Найти распределение плотности вероятности ФВ случайной величины y .

Решение. Плотность вероятности результатов измерения x имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha}, & -\alpha \leq x \leq \alpha, \\ 0, & x < -\alpha, \quad x > \alpha. \end{cases}$$

Используя результаты, полученные в примере 2.10, и соотношение (2.19), получаем

$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha b}, & a - b\alpha \leq y \leq a + b\alpha, \\ 0, & y < a - b\alpha, \quad y > a + b\alpha. \end{cases}$$

Пример 2.13. Случайная погрешность измерения имеет нормальное распределение

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right).$$

Найти распределение погрешности измерения ФВ, функционально связанной с погрешностью линейной зависимостью $\eta = a + b\delta$, $b > 0$.

Решение. В соответствии с (2.19) определим обратную функцию $\delta = (\eta - a)/b$ и производную $d\delta/d\eta = 1/b$, а затем искомую функцию плотности вероятности

$$\psi(\eta) = p(\delta) \left| \frac{d\delta}{d\eta} \right| = \frac{1}{b\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\eta - a)^2}{2\sigma^2 b^2}\right],$$

где математическое ожидание $m_\eta = a$ ($m_\delta = 0$), а дисперсия $\sigma_y^2 = b^2\sigma^2$.

Пример 2.14. Результаты измерения имеют нормальное распределение с математическим ожиданием m_x и СКО, равным σ . Найти распределение плотности вероятности ФВ, связанной с измеренной соотношением $y = a + bx$, $b > 0$.

Решение. Используя результаты примеров 2.10 и 2.13, получаем

$$\psi(y) = \frac{1}{b\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(\frac{y-a}{b} - m_x\right)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{b\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[y - (a + bm_x)]^2}{2(\sigma b)^2}\right\},$$

где математическое ожидание случайной величины y равно $m_y = a + bm_x$, а среднеквадратическое отклонение $\sigma_y = b\sigma$.

Пример 2.15. Измерения длины изделия короткой линейкой производятся в два этапа. При этом погрешность измерения представляет собой сумму двух погрешностей, имеющих равномерное распределение плотности вероятности в диапазоне $\pm\alpha$. Определить распределение суммарной погрешности измерения длины и диапазон ее изменения.

Решение. Плотность вероятности суммарного распределения погрешности вычисляют, используя интеграл свертки (2.21):

$$\psi(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\delta_1) p_2(\eta - \delta_1) d\delta_1, \quad \eta = \delta_1 + \delta_2,$$

$$\text{где } p_1(\delta_1) = \begin{cases} 1/2\alpha, & |\delta_1| \leq \alpha, \\ 0, & |\delta_1| > \alpha, \end{cases} \quad p_2(\delta_2) = \begin{cases} 1/2\alpha, & |\delta_2| \leq \alpha, \\ 0, & |\delta_2| > \alpha. \end{cases}$$

Области интегрирования показаны на рис. 2.9, а. По оси δ_1 области интегрирования соответствуют $\pm\alpha$, так как только в этой области функция $p_1(\delta_1)$ не равна нулю. Область, в которой функция $p_2(\delta_2)$ не равна нулю, расположена между граничными прямыми в координатах δ_1 и η : $\eta - \alpha = \delta_1$ и $\eta + \alpha = \delta_1$. Проведа интегрирование, получим

$$\psi_1(\eta > 0) = \int_{\eta-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{2\alpha} d\delta_1 = \frac{1}{4\alpha^2} d\delta_1 \Big|_{\eta-\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{4\alpha^2} (2\alpha - \eta),$$

$$\psi_2(\eta < 0) = \int_{-\alpha}^{\eta+\alpha} \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{2\alpha} d\delta_1 = \frac{1}{4\alpha^2} d\delta_1 \Big|_{-\alpha}^{\eta+\alpha} = \frac{1}{4\alpha^2} (2\alpha + \eta).$$

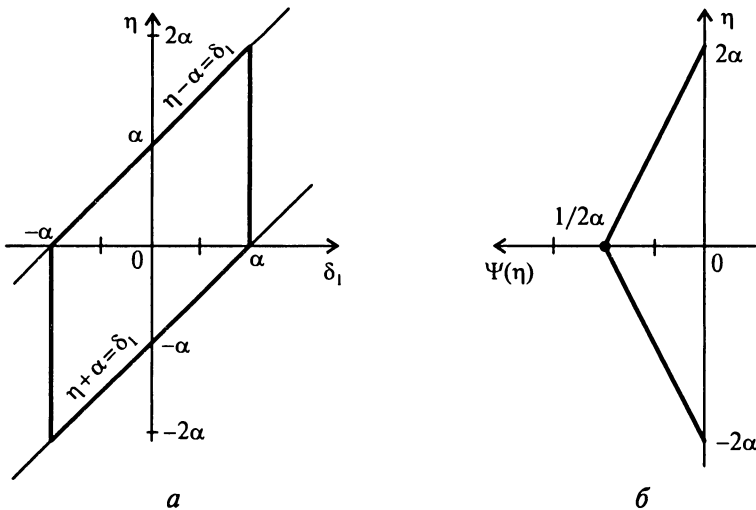


Рис. 2.9. Области интегрирования при наложении двух одинаковых распределений (а) и результирующее распределение (б) плотности вероятности $\psi(\eta)$

Таким образом, свертка двух равномерных распределений с одинаковыми пределами изменения погрешностей приводит к треугольному закону распределения вероятности суммарной случайной погрешности (рис. 2.9, б). При этом область изменения погрешности η находится в пределах $\pm 2\alpha$, а при $\eta = 0$ $\psi(\eta) = 1/2\alpha$:

$$\psi(\eta) = \begin{cases} -\frac{1}{4\alpha^2}(\eta - 2\alpha), & 0 \leq \eta \leq 2\alpha, \\ \frac{1}{4\alpha^2}(\eta + 2\alpha), & -2\alpha \leq \eta \leq 0, \\ 0, & \eta < -2\alpha, \eta > 2\alpha. \end{cases}$$

Пример 2.16. Погрешность измерения представляет собой сумму двух погрешностей, имеющих равномерное распределение плотности вероятности в диапазоне $\pm\alpha$ и $\pm\beta$, причем $\beta > \alpha$.

Определить распределение суммарной погрешности измерения и диапазон ее изменения. Рассмотреть случаи, когда $\alpha = \beta$ и $\beta < \alpha$.

Решение. Плотность вероятности суммарного распределения погрешности вычисляется, используя интеграл свертки (2.21)

$$\psi(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\delta_1) p_2(\eta - \delta_1) d\delta_1, \quad \eta = \delta_1 + \delta_2,$$

где

$$p_1(\delta_1) = \begin{cases} 1/2\alpha, & |\delta_1| \leq \alpha, \\ 0, & |\delta_1| > \alpha, \end{cases} \quad p_2(\delta_2) = \begin{cases} 1/2\beta, & |\delta_2| \leq \beta, \\ 0, & |\delta_2| > \beta. \end{cases}$$

Области интегрирования показаны на рис. 2.10, а. По оси δ_1 области интегрирования соответствуют $\pm\alpha$, так как только в этой области функция $p_1(\delta_1)$ не равна нулю. Область, в которой функция $p_2(\delta_2)$ не равна нулю, расположена между граничными прямыми в координатах δ_1 и δ_2 : $\eta - \beta = \delta_1$ и $\eta + \beta = \delta_2$. Проведя интегрирование, получим

$$\psi_1(\eta > 0) = \psi_2(\eta < 0) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{2\beta} dx = \frac{1}{4\alpha\beta} x \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2\beta},$$

$$\psi_3(\eta > \beta - \alpha) = \int_{\eta-\beta}^{\alpha} \frac{1}{4\alpha\beta} dx = \frac{1}{4\alpha\beta} x \Big|_{\eta-\beta}^{\alpha} = -\frac{1}{4\alpha\beta} [\eta - (\alpha + \beta)],$$

$$\psi_4(\eta < \alpha - \beta) = \int_{-\alpha}^{\eta+\beta} \frac{1}{4\alpha\beta} dx = \frac{1}{4\alpha\beta} x \Big|_{-\alpha}^{\eta+\beta} = \frac{1}{4\alpha\beta} [\eta + (\alpha + \beta)].$$

Результирующая плотность вероятности суммарной погрешности имеет вид трапеции (на рис. 2.10, б) высотой $1/2\beta$ с нижним основанием, равным $2(\alpha + \beta)$, и верхним основанием, равным $2(\beta - \alpha)$.

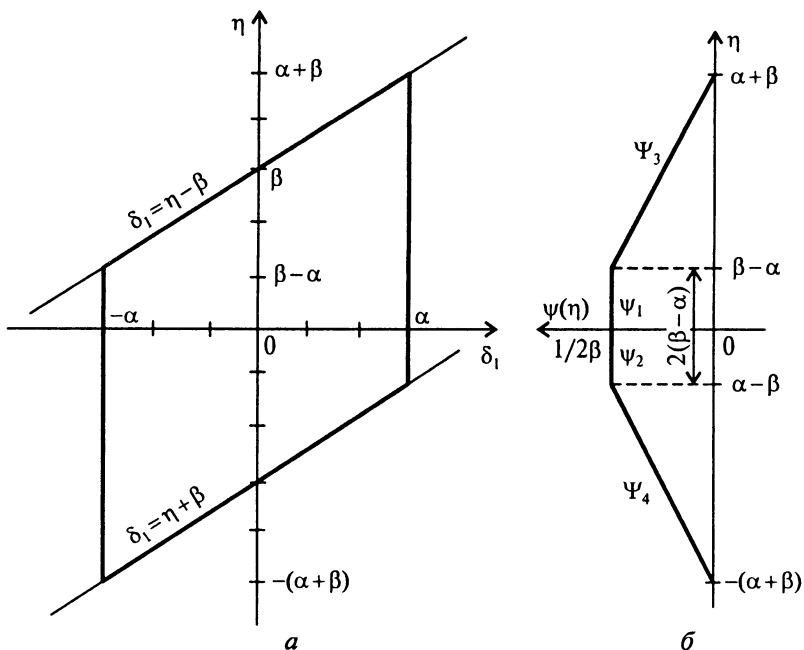


Рис. 2.10. Области интегрирования при наложении двух равномерных распределений с основаниями $\pm\alpha$ и $\pm\beta$ при $\beta > \alpha$ (а) и результирующее распределение (б) плотности вероятности $\psi(\eta)$

При $\alpha = \beta$ распределение плотности вероятности из трапеции преобразуется в равнобедренный треугольник с основанием, равным 4α , и высотой $1/2\alpha$. Диапазон изменения суммарной погрешности $\pm 2\alpha$ (см. пример 2.15).

При $\alpha > \beta$ из-за симметрии задачи распределение плотности вероятности будет иметь также вид трапеции, но высотой $1/2\alpha$ и верхним основанием $2(\alpha - \beta)$.

Пример 2.17. Суммарная плотность вероятности двух случайных равномерно распределенных погрешностей измерения имеет вид треугольника с основанием $\pm\alpha$ и высотой $1/\alpha$ (рис. 2.11, а). Найти результирующее распределение погрешности измерения, если указанная выше суммарная погрешность складывается с третьей случайной погрешностью, имеющей равномерное распределение в диапазоне $\pm\alpha$ (рис. 2.11, б).

Решение. Для нахождения результирующего распределения $\psi(\eta) = \psi(\delta_1 + \delta_2)$ (композиции) воспользуемся интегралом свертки (2.21), где

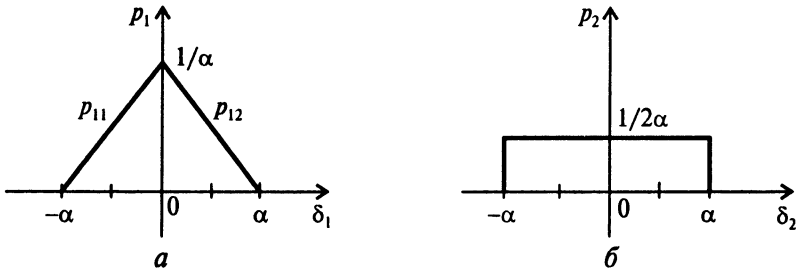


Рис. 2.11. Треугольное распределение Симпсона, полученное наложением двух одинаковых равномерных распределений (а), и равномерное распределение, суммируемое с распределением Симпсона (б) в примере 2.17

$$p_1(\delta_1) = \begin{cases} p_{11} = a\delta_1 + b, & -\alpha \leq \delta_1 \leq 0, \\ p_{12} = -a\delta_1 + b, & 0 \leq \delta_1 \leq \alpha, \\ 0, & |\delta_1| > \alpha; \end{cases} \quad p_2(\delta_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha}, & |\delta_2| \leq \alpha, \\ 0, & |\delta_2| > \alpha. \end{cases}$$

Из условия нормировки площади треугольного распределения, т.е. равенства ее единице, получим $a = 1/\alpha^2$, $b = 1/\alpha$. Тогда

$$p_{11}(\delta_1) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} + 1 \right), \quad p_{12}(\delta_1) = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} - 1 \right).$$

Области интегрирования показаны на рис. 2.12, а. По оси δ_1 области интегрирования соответствуют $\pm\alpha$, так как только в этой области функция $p_1(\delta_1)$ не равна нулю. Область, в которой функция $p_2(\delta_2)$ не равна нулю, расположена между граничными прямыми в координатах δ_1 и η : $\eta - \alpha = \delta_1$ и $\eta + \alpha = \delta_1$. При интегрировании область изменения δ_1 от $-\alpha$ до α разбивается на две области: от $-\alpha$ до 0, в которой $p_{11} = a\delta_1 + b$, и от 0 до α , в которой $p_{12} = -a\delta_1 + b$. Проведя интегрирование, получим следующие составляющие результирующего распределения $\psi(\eta)$:

$$\begin{aligned} \psi_1(0 \leq \eta \leq \alpha) &= \int_{\eta-\alpha}^0 \frac{1}{2\alpha} p_{11}(\delta_1) d\delta_1 + \int_0^{\alpha} \frac{1}{2\alpha} p_{12}(\delta_1) d\delta_1 = \\ &= \int_{\eta-\alpha}^0 \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} + 1 \right) d\delta_1 + \int_0^{\alpha} \frac{1}{2\alpha^2} \left(-\frac{\delta_1}{\alpha} + 1 \right) d\delta_1 = \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left(-\frac{\eta^2}{2\alpha^2} + 1 \right) = -\frac{1}{4\alpha^3} \eta^2 + \frac{1}{2\alpha}, \\ \psi_2(\alpha < \eta < 2\alpha) &= \int_{\eta-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2\alpha} p_{12}(\delta_1) d\delta_1 + \int_{\eta-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2\alpha^2} \left(-\frac{\delta_1}{\alpha} + 1 \right) d\delta_1 = \\ &= \frac{1}{4\alpha^3} \eta^2 - \frac{1}{\alpha^2} \eta + \frac{1}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3(-\alpha \leq \eta \leq 0) &= \int_{-\alpha}^0 \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} + 1 \right) d\delta_1 + \int_0^{\eta+\alpha} \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{\alpha} \left(-\frac{\delta_1}{\alpha} + 1 \right) d\delta_1 = \\ &= -\frac{1}{4\alpha^3} \eta^2 + \frac{1}{2\alpha}, \\ \psi_4(-2\alpha < \eta < -\alpha) &= \int_{-\alpha}^{\eta+\alpha} \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} + 1 \right) d\alpha = \frac{1}{4\alpha^3} \eta^2 + \frac{1}{\alpha^2} \eta + \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

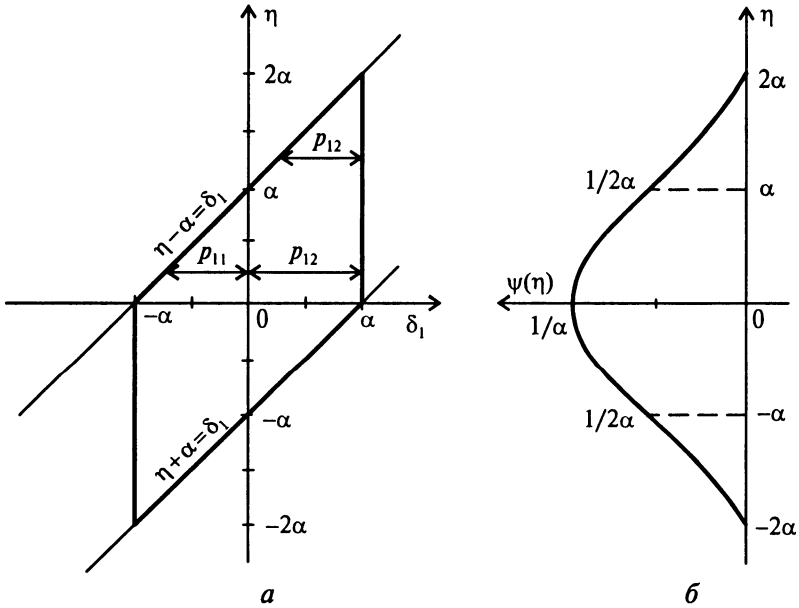


Рис. 2.12. Области интегрирования при наложении распределений, приведенных на рис. 2.11 (а), и результирующее распределение (б) плотности вероятности $\psi(\eta)$

Результирующее распределение (рис. 2.12, б), состоящее из суперпозиции трех равномерно распределенных распределений уже напоминает нормальное распределение, к которому согласно предельной теореме теории вероятности должно стремиться распределение, представляющее собой суперпозицию большого количества «не нормальных» распределений.

Пример 2.18. Масса груза измеряется по частям — сначала измеряется одна его часть, а затем другая. Известно, что результаты измерения и погрешности измерения распределены по нормальным законам с дисперсиями σ_1 и σ_2 . Получить распределение плотности вероятности суммарной погрешности измерения общей массы груза $\psi(\eta)$.

Решение: По условиям задачи суммируемые распределения имеют вид

$$p_1(\delta_1) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma_1^2}\right) \text{ и } p_2(\delta_2) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_2^2}{2\sigma_2^2}\right).$$

Используя интеграл свертки (2.20), получаем

$$\psi(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\delta_1) p_2(\eta - \delta_1) d\delta_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\delta_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(\eta - \delta_1)^2}{2\sigma_2^2}\right] d\delta_1.$$

Преобразовав показатель степени к виду

$$\begin{aligned} -\frac{\delta_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(\eta - \delta_1)^2}{2\sigma_2^2} &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left[\sigma_1^2 - \frac{2\eta\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \delta_1 + \frac{\eta^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right] = \\ &= -\frac{\sigma^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left[\left(\delta_1 - \frac{\eta\sigma_1^2}{\sigma^2} \right) + \left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} \right) \frac{\eta^2\sigma_1^2}{\sigma^2} \right] = -\frac{\sigma^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(\sigma_1^2 - \eta \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2, \end{aligned}$$

где $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$, и используя табличное значение интеграла (см. табл. П11, П14), получим

$$\begin{aligned} \psi(\eta) &= \frac{2}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right] \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(\delta_1 - \frac{\eta\sigma_1^2}{\sigma^2} \right)^2\right] d\delta_1 = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, свертка двух нормальных распределений плотности вероятности приводит также к нормальному распределению с дисперсией, равной сумме дисперсий этих распределений.

Пример 2.19. Используя аппарат характеристических функций, получить распределение плотности вероятности суммы двух погрешностей $\psi(\eta)$, каждая из которых имеет нормальное распределение вероятностей с дисперсиями, равными σ_1 и σ_2 соответственно.

Решение. Используя преобразование (2.22), получаем характеристические функции для первого и второго нормального распределений в виде (см. табл. П14)

$$\theta_1(u) = \exp\left(-\frac{u^2\sigma_1^2}{2}\right) \text{ и } \theta_2(u) = \exp\left(-\frac{u^2\sigma_2^2}{2}\right).$$

Характеристическая функция суммарного распределения равна произведению функций (2.24) $\theta(u) = \theta_1(u) \theta_2(u)$. Обратное преобразование Фурье от характеристической функции позволяет получить распределение плотности вероятности суммы двух погрешностей измерения (при $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2$):

$$p(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) \exp(-j\eta u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \exp(-j\eta u) du\right] = \\ = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right).$$

Пример 2.20. Для равномерного закона распределения результатов измерения, заключенных между значениями ± 1 , определить характеристическую функцию и, используя соотношение (2.26), первый и второй моменты распределения.

Решение. Используя преобразование (2.22) или табличное значение (табл. П14) при $\alpha = -1$ и $\beta = 1$, получаем следующее выражение для характеристической функции:

$$\theta(ju) = \frac{e^{ju} - e^{-ju}}{2ju} = \frac{\cos u + j\sin u - \cos u + j\sin u}{2ju} = \frac{\sin u}{u}.$$

Определим с помощью соотношения (2.26) первый центральный момент, вычислив первую производную

$$\mu_1[x] = \frac{1}{j} \frac{d\theta(ju)}{du} = \frac{1}{j} \frac{(\cos u)u - \sin u}{u^2} \approx \frac{1}{j} \frac{u(1 - u^2/2) - (u - u^3/6)}{u^2} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0.$$

При вычислении использовались разложения $\sin u$ и $\cos u$ в ряд Тейлора вблизи нуля.

Определим с помощью соотношения (2.26) второй центральный момент, также воспользовавшись для получения результата разложением $\sin u$ и $\cos u$ в ряд Тейлора вблизи нуля:

$$\mu_2[x] = \frac{1}{j^2} \frac{d^2\theta(ju)}{du^2} = \frac{u^2 \sin u + 2u \cos u - 2 \sin u}{u^3} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{1}{3}.$$

Поскольку первый центральный момент равен нулю, то второй центральный момент равен дисперсии.

2.2. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

Задача 2.1. Результаты измерений соответствуют плотности вероятности в виде распределения Эрланга:

$$p(x) = \frac{1}{2a^3} x^2 e^{-x/a}, \quad 0 < x < \infty.$$

Найти математическое ожидание и СКО результатов измерений.

Ответ. $M[x] = 3a$; $\sigma = \sqrt{D[x]} = a\sqrt{3}$.

Задача 2.2. Результаты измерений подчиняются гамма-распределению с плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 < x < \infty.$$

Найти математическое ожидание и СКО результатов измерений.

Ответ. $M[x] = \alpha/\beta$, $\sigma = \sqrt{D[x]} = \sqrt{a}/\beta$.

Задача 2.3. Результаты измерений подчиняются χ -распределению с плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{x^{n-1} e^{-0,5x^2}}{2^{0,5n-1} \Gamma(0,5n)}, \quad 0 < x < \infty.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию результатов измерений.

Ответ. $M[x] = \sqrt{2} \frac{\Gamma[0,5(n+1)]}{\Gamma(0,5n)}$, $D[x] = n - \{M[x]\}^2$.

Задача 2.4. Плотность вероятности случайной величины x имеет распределение Лапласа:

$$p(x) = (0,5\lambda) \exp(-\lambda |x|), \quad \lambda > 0.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию величины x .

Ответ. $m_x = 0$, $D_x = 2/\lambda^2$.

Задача 2.5. Сообщение передается квантованными по амплитуде импульсами с шагом квантования 1 В, погрешность которого равномерно распределена в пределах интервала квантования с нулевым средним значением. Определить дисперсию (мощность шума квантования) погрешности квантования.

Ответ. $D = \sigma^2 = (1/12) \text{ В}^2$.

Задача 2.6. При измерении напряжения переменного тока $u(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ вольтметром, проградуированным в эффективных значениях, стрелка вольтметра из-за наличия помех равномерно колеблется между значениями u_1 и u_2 . Определить среднее значение m_u показаний вольтметра и относительную погрешность $\delta = \sigma_u/m_u$ измерения амплитуды напряжения $u(t)$, где σ_u — СКО напряжения от среднего значения.

Ответ. $m_u = \frac{u_1 + u_2}{2}$, $\delta = \frac{\sigma_u}{m_u} = \frac{u_1 - u_2}{(u_1 + u_2)\sqrt{3}}$.

Задача 2.7. Определить математическое ожидание и дисперсию сигнала синусоидальной формы $x = A \sin(\omega t + \varphi)$, у которого фаза φ является случайной величиной, изменяющейся равномерно от $\varphi_1 = -\pi/2$ до $\varphi_2 = 3\pi/2$, ω и t — неслучайные величины.

Ответ. $m_x = 0$, $D_x = A^2/2$.

Задача 2.8. Случайная величина φ равномерно распределена в интервале от 0 до 2π . Определить математическое ожидание и дисперсию величины $x = A \cos^2(\omega t + \varphi)$, ω и t — неслучайные величины.

Ответ: $m_x = A/2$, $D_x = A^2/8$.

Задача 2.9. Распределение случайной погрешности измерения дальности до неподвижного объекта подчинено нормальному закону распределения плотности вероятности с математическим ожиданием $m_\delta = 5$ м (систематическая погрешность) и дисперсией 100 м^2 . Определить вероятность P того, что измеренное значение дальности отклонится от истинного не более чем на 15 м.

Ответ. $P = 0,82$.

Задача 2.10. На пороговое устройство воздействует случайный сигнал с плотностью вероятности (закон Релея) $p(x) = (x/\sigma^2) \times \exp(-x^2/2\sigma^2)$, $x > 0$. Определить вероятность P регистрации сигнала, если пороговое устройство срабатывает при превышении порога устройства, равного 2 В.

Ответ. $P = \exp(-2/\sigma^2)$.

Задача 2.11. Случайная величина x , распределенная равномерно в диапазоне $-a < x \leq a$, подвергается квадратичному преобразованию $y = x^2$. Определить дифференциальную и интегральную функции распределения $p(y)$ и $F(y)$.

Ответ. $p(y) = \begin{cases} 1/2\sqrt{y}, & 0 < y \leq a^2, \\ 0, & y \leq 0, y > a^2; \end{cases} \quad F(y) = \begin{cases} \sqrt{y}/a, & 0 < y \leq a^2, \\ 0, & y < 0, y > a^2. \end{cases}$

Задача 2.12. Случайная величина x подчинена равномерному закону в интервале от 0 до 2. Определить математическое ожидание и дисперсию величины $y = 6x^2$.

Ответ. $m_y = 8$, $D_y = 51,2$.

Задача 2.13. Случайная величина x с плотностью вероятности $p(x) = (x/\sigma^2) \exp(-x^2/2\sigma^2)$, $x > 0$ подвергается преобразованию $y = \sigma/x$. Определить плотность вероятности для случайной величины y .

Ответ. $p(y) = (1/y^3) \exp(-1/2y^2)$.

Задача 2.14. Случайная величина x распределена равномерно в интервале от a до b , $0 < a \leq x \leq b$. Определить плотность вероятности случайной величины $y = x^2$.

Ответ. $p(y) = \frac{1}{2(b-a)\sqrt{y}}, \quad a^2 < y < b^2.$

Задача 2.15. Получить распределение плотности вероятности суммы трех погрешностей $\psi(\eta)$, каждая из которых равномерно распределена в диапазоне $\pm\alpha$, и представить графически результирующее распределение.

Ответ.

$$\psi(\eta) = \begin{cases} \psi_1(\eta) = -\frac{1}{8\alpha^3}\eta^2 + \frac{3}{8\alpha}, & -\alpha \leq \eta \leq \alpha, \\ \psi_2(\eta) = \frac{1}{16\alpha^3}\eta^2 - \frac{3}{8\alpha^2} + \frac{9}{16\alpha}, & \alpha \leq \eta \leq 3\alpha, \\ \psi_3(\eta) = \frac{1}{16\alpha^3}\eta^2 + \frac{3}{8\alpha^2}\eta + \frac{9}{16\alpha}, & -3\alpha \leq \eta \leq -\alpha, \\ \psi_4(\eta) = 0, & \eta > 3\alpha, \quad \eta < -3\alpha. \end{cases}$$

Задача 2.16. Результаты измерений x равномерно распределены в интервале от $-\beta$ до β . Определить характеристическую функцию $\theta(ju)$ случайной величины x .

Ответ. $\theta(ju) = \sin(u\beta)/u\beta.$

Задача 2.17. Найти плотность вероятности $p(x)$, если характеристическая функция ее имеет вид $\theta(ju) = 1/(1 + u^2)$.

Ответ. $p(x) = 0,5 \exp(-|a|).$

Задача 2.18. Определить характеристическую функцию $\theta(ju)$ случайной величины x , плотность вероятности которой равна

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Ответ. $\theta(ju) = \exp\left(jum_x - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right).$

Задача 2.19. В результате суперпозиции трех равномерных распределений в диапазоне ± 1 получена характеристическая функция $(\sin u/u)^3$. Определить математическое ожидание и дисперсию суммарного распределения величины η .

Ответ. $\mu_1[\eta] = 0, \quad \mu_2[\eta] = 1.$



ТОЧЕЧНЫЕ И ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

3.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

3.1.1. Точечные оценки

Определение точного значения математического ожидания и дисперсии (и соответственно СКО) возможно только при бесконечном числе измерений или при наличии так называемой генеральной совокупности данных

$$m_x = M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \quad \text{или} \quad m_x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p^*(x); \quad (3.1)$$

$$\sigma_x^2 = D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p^*(x) dx \quad \text{или} \quad \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_x)^2 p^*(x_i), \quad (3.2)$$

где $p^*(x_i)$ — вероятность появления результата измерения x_i в интервале значений от x_i до x_{i+1} при дискретном распределении результатов измерения. При отсутствии систематической погрешности принимается, что математическое ожидание $m_x = Q$, где Q — истинное (действительное) значение измеряемой ФВ.

В результате измерительного эксперимента получают некоторую выборку из генеральной совокупности данных — ограниченное число значений x_i , и по этой выборке оценивают значения математического ожидания и дисперсии. Пригодность оценок, полученных с помощью ограниченного числа измерений, проверяют с помощью ряда статистических критериев, таких как состоятельность, несмещенность и эффективность.

Состоятельная оценка — это оценка, которая сходится при увеличении числа измерений к своему пределу по вероятности.

Оценка называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру.

Эффективной называется оценка, дисперсия которой меньше дисперсии любой другой оценки данного параметра.

Установлено [3], что всем вышеуказанным критериям удовлетворяют точечные оценки.

Формулы для вычисления точечных оценок результатов измерений:

оценка истинного значения — среднее арифметическое значение измеряемой величины из n единичных результатов

$$\tilde{m}_x = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (3.3)$$

оценка СКО — средняя квадратическая погрешность результатов единичных измерений в ряду n единичных измерений

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_x = S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad (3.4)$$

оценка средней квадратической погрешности результатов измерения среднего арифметического

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.5)$$

Точечными называются оценки, выражаемые одним числом, а поскольку они представлены ограниченным числом данных (результатов измерений), случайно выбранных (полученных) в результате измерительной процедуры, то эти оценки также называются *выборочными*.

3.1.2. Оценки с помощью доверительных интервалов

Более полный и надежный способ оценивания измеренной ФВ заключается в определении интервала (а не только точечного значения), в котором с заданной степенью достоверности будет находиться значение оцениваемого параметра. Поскольку увеличение числа измерений повышает уверенность в получении правильного результата, доверительные интервалы сужаются, при этом сохраняется вероятность нахождения истинного значения внутри него. Доверительные границы результатов измерений определяются как наибольшее и наименьшее значения результатов измерений, ограничивающие интервал, внутри которого с заданной вероятностью находится искомое (истинное) значение результата измерений.

• Полагая, что результаты измерения не содержат систематической погрешности, вероятность нахождения действительного значения измеряемой ФВ при получении единичного результата

измерения x в интервале от $x_1 = x - t_p \sigma$ до $x_2 = x + t_p \sigma$ при заранее известном СКО σ будет равна (см. (2.2) и (2.14) при $|t_1| = |t_2| = t_p$)

$$P(x - t_p \sigma < Q \leq x + t_p \sigma) = \Phi(t_p) - \Phi(-t_p) = 2\Phi(t_p) - 1. \quad (3.6)$$

Для абсолютной погрешности $\delta = |x - m_x| = |x - Q|$ вероятность попадания погрешности единичного результата измерения в интервал $\pm t_p \sigma$ будет равна

$$P(|\delta| < t_p \sigma) = 2\Phi(t_p) - 1. \quad (3.7)$$

• Если проведено n измерений, СКО заранее известно, то вероятность нахождения действительного значения измеряемой ФВ в доверительном интервале от x_1 до x_2 будет равна (табл. ПЗ и П4)

$$P\left(\bar{x} - t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < Q \leq \bar{x} + t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t_p) - 1, \quad (3.8)$$

где $t_p = |\bar{x} - m_x| / \sigma_{\bar{x}}$. Видно, что доверительный интервал сузился в \sqrt{n} раз при той же вероятности, что и в предыдущем примере.

Аналогично (3.7) записывается вероятность P нахождения погрешности измерения среднего $\delta = |\bar{x} - Q|$ в заданном интервале

$$P\left(|\delta| < t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t_p) - 1. \quad (3.9)$$

Половина доверительного интервала называется *доверительной границей*, и результат измерения представляется в виде

$$Q = \bar{x} \pm t_p \sigma_{\bar{x}} \text{ при } P = \dots\%. \quad (3.10)$$

• Если произведено небольшое (ограниченное) число измерений, а сами измерения (предположительно) распределены нормально, то вероятность нахождения действительного значения измеряемой ФВ в доверительном интервале (при неизвестном СКО) будет определяться распределением Стьюдента (рис. 3.1)

$$P\left[(\bar{x} - t_p S_{\bar{x}}) \leq Q < (\bar{x} + t_p S_{\bar{x}})\right] = 2 \int_0^{t_p} S(t, k) dt, \quad (3.11)$$

где $S_{\bar{x}}$ определяется по формуле (3.5); $S(t, k)$ — дифференциальная функция распределения Стьюдента, зависящая от параметра $t_p = (\bar{x} - Q) / S_{\bar{x}}$ и числа степеней свободы $k = n - 1$ (см. табл. П5 и П6). Для погрешности измерения можно написать следующее соотношение:

$$P(|\bar{x} - Q| < t_p S_{\bar{x}}) = P\{|\delta| < t_p S_{\bar{x}}\} = 2 \int_0^{t_p} S(t, k) dt. \quad (3.12)$$

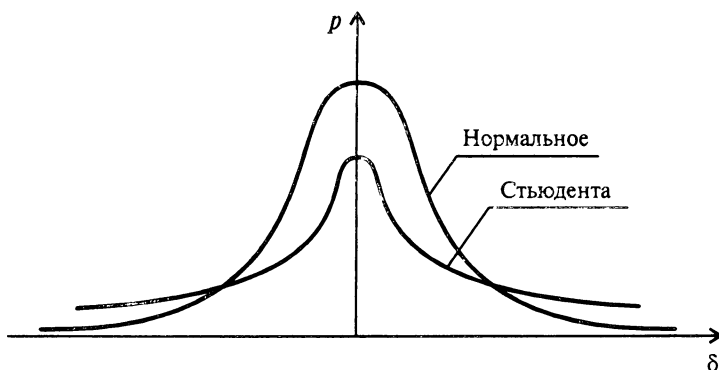


Рис. 3.1. Нормальное распределение и распределение Стьюдента

Результат измерения записывается в виде

$$Q = \bar{x} \pm t_p S_{\bar{x}} \text{ при } P = \dots\% \quad (3.13)$$

Практически при $n > 20$ распределение Стьюдента переходит в нормальное и для оценки попадания результатов измерения можно использовать функции (2.10)–(2.15) и табл. ПЗ и П4.

3.1.3. Оценки с помощью неравенства Чебышева

Зная дисперсию или СКО, можно с помощью неравенства Чебышева оценить вероятность непревышения погрешности δ заданного значения $\varepsilon > \delta$. При этом нет необходимости знать вид распределения погрешности. Неравенство Чебышева можно записать двояко [3, 7]:

$$P\{|\delta| < \varepsilon\} \geq 1 - (\sigma/\varepsilon)^2 \text{ или } P\{|\delta| > \varepsilon\} < (\sigma/\varepsilon)^2, \quad (3.14)$$

где $|\delta| = |x - m_x|$ — погрешность однократного измерения. Первое соотношение (3.14) определяет вероятность непревышения случайной погрешности некоего наперед заданного значения ε , а второе — вероятность превышения погрешности ε .

3.1.4. Интервальные оценки дисперсии

Так же как и математическое ожидание, оценка дисперсии определяется с какой-то доверительной вероятностью в области истинного значения дисперсии. Если известно (или предполагается довольно точно), что результаты измерения распределены по нормальному закону, то плотность вероятности величины

$$\chi_k^2 = \chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_{\bar{x}}^2}{\sigma_{\bar{x}}^2} \quad (3.15)$$

распределяется по закону Пирсона с $k = n - 1$ степенями свободы (рис. 3.2).

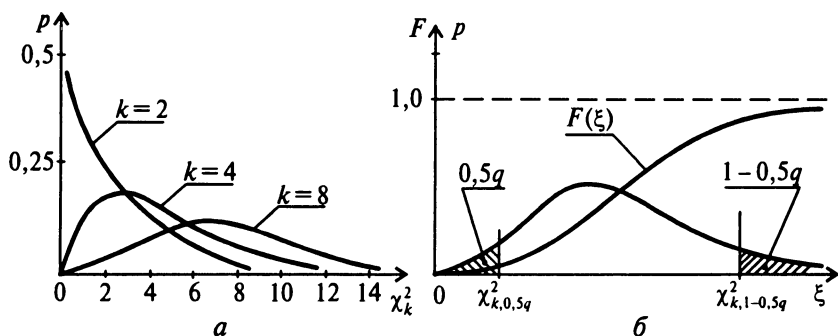


Рис. 3.2. Дифференциальное (а) и интегральное (б) распределения Пирсона

Интегральная функция распределения Пирсона определяется как вероятность того, что все значения дроби (3.15) будут меньше или равны некоторому заданному значению $\chi_{k,P}^2$:

$$F(\chi_{k,P}^2) = P\left[\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} \leq \chi_{k,P}^2\right] = \int_0^{\chi_{k,P}^2} p(\chi_k^2) d\chi_k^2 = \int_0^{\chi_{k,P}^2} p(\xi) d\xi. \quad (3.16)$$

Значения этой вероятности табулированы (табл. П7), и дифференциальная функция распределения зависит только от k . С помощью этой таблицы определяют доверительные границы попадания результатов оценки дисперсии с заданной вероятностью.

Вначале, задаваясь некой малой вероятностью с q -уровнем значимости, определяют вероятность того, что отношение (3.15) не вышло за пределы $0,5q$ как малых, так и больших значений ξ (рис. 3.2, б):

$$F(\chi_{k,0.5q}^2) = 0,5q; \quad F(\chi_{k,1-0.5q}^2) = 1 - 0,5q. \quad (3.17)$$

Затем определяют доверительный интервал для СКО в виде

$$P\left[\frac{S_x \sqrt{n-1}}{\chi_{k,0.5q}} > \sigma \geq \frac{S_x \sqrt{n-1}}{\chi_{k,1-0.5q}}\right] = 1 - q. \quad (3.18)$$

Неравенство в квадратных скобках означает, что истинное значение СКО результатов измерений σ с вероятностью $P = 1 - q$ лежит между значениями S_1 и S_2 , которые соответственно равны

$$S_1 = \frac{S_x \sqrt{n-1}}{\chi_{k,0.5q}}; \quad S_2 = \frac{S_x \sqrt{n-1}}{\chi_{k,1-0.5q}}. \quad (3.19)$$

При $k > 30$ для определения границ доверительных интервалов можно использовать приближенные формулы для вычисления χ [3]

$$\chi_{k,0,5q} = \sqrt{k - 0,5} - t_{0,5q} / \sqrt{2}, \quad \chi_{k,1-0,5q} = \sqrt{k - 0,5} + t_{1-0,5q} / \sqrt{2}, \quad (3.20)$$

где t_p определяется из условия $\Phi(t_p) = P$ по таблицам нормального распределения (табл. П3 и П4). Иногда проводят одностороннюю оценку доверительной вероятности дисперсии — только сверху. При этом определяют границу $\chi_{k-1,P}^2$, которую СКО не превысит с заданной вероятностью P .

Пример 3.1. Проведено $n = 7$ измерений постоянной физической величины x_n , результаты которых представлены в таблице:

Измерение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Результат измерения	5,65	5,37	5,48	5,71	5,44	5,50	5,46
$x_i - \bar{x}$	0,134	-0,146	-0,036	0,194	-0,076	-0,016	-0,056

Определить: 1) оценку действительного значения ФВ; 2) оценку СКО результата измерения; 3) записать результат измерения; 4) с уровнем значимости $q = 0,1$ оценить истинное значение СКО.

Решение. 1. Оценка действительного значения ФВ определим по формуле (3.3):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Подставив измеренные значения в эту формулу, получим

$$\bar{x} = \frac{1}{7} (5,65 + 5,37 + 5,48 + 5,71 + 5,44 + 5,50 + 5,46) = \frac{38,61}{7} = 5,516.$$

2. Для определения оценки СКО результата измерений воспользуемся формулой (3.5):

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Используя промежуточные вычисления, приведенные в таблице, получаем

$$\begin{aligned} S_{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{1}{7 \cdot 6} (179,56 + 213,16 + 12,96 + 376,36 + 57,76 + 2,56 + 31,36) \cdot 10^{-4}} = \\ &= \sqrt{\frac{873,72}{42} \cdot 10^{-4}} = 4,56 \cdot 10^{-2} = 0,0456. \end{aligned}$$

3. Полагая, что результаты измерения подчиняются нормальному закону распределения, запишем вероятность того, что истинное значение лежит в интервале $\bar{x} \pm S_{\bar{x}}$, т.е. при $t_p = 1$. По табл. П5 при числе степеней свободы $k = n - 1 = 6$ и $t_p = 1$ находим $P = 0,65$. После округления результата измерения до трех значащих цифр результат измерения $Q = 5,52 \pm 0,05$ при $P = 0,65$.

4. Получим интервальные оценки для истинного значения СКО результатов измерения. Для этого по табл. П7 при числе степеней свободы $k = n - 1 = 6$, $q_1 = 0,5q = 0,05$ и $q_2 = 1 - 0,5q = 0,95$ находим значения $\chi_{6;0,05}^2 = 1,625$; $\chi_{6;0,95}^2 = 12,592$. По формуле (3.19) найдем границы интервалов, предварительно определив $S_x = S_{\bar{x}} \sqrt{n} = 0,0456 \sqrt{7} = 0,12$:

$$S_1 = \frac{S_x \sqrt{n-1}}{\chi_{6;0,05}} = \frac{0,12 \sqrt{6}}{\sqrt{1,635}} = \frac{2,449 \cdot 0,12}{1,278} = 0,2299,$$

$$S_2 = \frac{S_x \sqrt{n-1}}{\chi_{6;0,95}} = \frac{0,12 \sqrt{6}}{\sqrt{12,392}} = \frac{2,449 \cdot 0,12}{3,52} = 0,08348.$$

Таким образом, истинное значение СКО с вероятностью $P = 0,9$ находится в интервале от 0,08 до 0,23.

Пример 3.2. Радиоприемные устройства (РПУ), выпускаемые серийно на заводе, характеризуются порогом чувствительности x_{Π} в некотором диапазоне принимаемых частот. Дисперсия результатов измерений, распределенных по нормальному закону, большой партии РПУ известна и составляет 100 мкВ² (СКО $\sigma = 10$ мкВ). Измерение порога чувствительности x_{Π} одного из образцов РПУ из серийной партии изделий дало результат $x_{\Pi} = 100$ мкВ. Определить доверительный интервал, в котором находится действительное значение порога чувствительности с вероятностью 0,9, полагая, что систематическая погрешность отсутствует.

Решение. Поскольку распределение значений порога чувствительности РПУ нормально и дисперсия этого распределения известна, то определим симметричный доверительный интервал по формуле (3.7), используя данные табл. П3 или П4:

$$\Phi(t_p) = \frac{1+P}{2} = \frac{1+0,9}{2} = 0,95.$$

По табл. П4 находим $t_p = 1,6449$ при $\Phi(t_p) = 0,95$. Таким образом, доверительная граница $t_p \sigma = 1,6449 \cdot 10 \approx 16,45$ мкВ и искомый доверительный интервал будет равен $100 - 16,45 \leq Q_{\Pi} < 100 + 16,45$.

Тогда с учетом округления можно записать $P(83,5 \text{ мкВ} \leq Q_{\text{п}} < 116,5 \text{ мкВ}) = 0,9$, где $Q_{\text{п}}$ — действительное значение порога чувствительности.

Пример 3.3. В условиях предыдущего примера для уточнения действительного значения порога $Q_{\text{п}}$ отобрали партию из 9 РПУ. Среднее арифметическое значение порога чувствительности, определенное по результатам измерения порога этой партии, оказалось равным $\bar{x}_{\text{п}} = 100 \text{ мкВ}$. Определить доверительный интервал, в котором находится действительное значение порога чувствительности с вероятностью 0,9.

Решение. Поскольку число измерений $n = 9$, то СКО среднего $\bar{x}_{\text{п}}$ будет в \sqrt{n} меньше, т.е. $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 10/3 = 3,33 \text{ мкВ}$. В соответствии с (3.8) найдем доверительную границу случайного отклонения результатов измерения среднего $\bar{x}_{\text{п}}$: $t_p \sigma_{\bar{x}} = 1,6449 \cdot 3,33 = 5,483 \text{ мкВ} \approx 5,5 \text{ мкВ}$. Таким образом, доверительный интервал для действительного значения $Q_{\text{п}}$ можно записать в виде

$$P(94,5 \text{ мкВ} \leq Q_{\text{п}} < 105,5 \text{ мкВ}) = 0,9.$$

При той же доверительной вероятности, что и в предыдущем примере, доверительный интервал стал уже и позволяет с большей точностью оценить действительное значение порога чувствительности.

Пример 3.4. В условиях примера 3.2 установлено, что номинальное значение порога чувствительности $x_{\text{п}0} = 95 \text{ мкВ}$. Полагая, что номинальное значение в отсутствие систематической погрешности является действительным значением порога для данного типа РПУ, определить вероятность того, что пороги чувствительности конкретных РПУ будут находиться в доверительном интервале от 85 до 105 мкВ, т.е. в интервале с доверительными границами 10 мкВ.

Решение. Поскольку СКО результатов измерений известно и равно $\sigma_{\text{п}} = 10 \text{ мкВ}$, то $t_p = \pm 1$. Используя соотношение (3.6) или (3.7), а также данные табл. ПЗ, вычисляем

$$P(85 \leq x_{\text{п}} < 105) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 1,6826 - 1 = 0,6826 \approx 0,68$$

либо

$$P(85 \leq x_{\text{п}} < 105) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0,8413 - 0,1587 = 0,6826 \approx 0,68.$$

Пример 3.5. Результат измерения тока, полученный с помощью амперметра, содержит случайную погрешность, распределенную по нормальному закону. СКО тока $\sigma_I = 4 \text{ мА}$; систематическая

погрешность $\Delta_s = 0$. Определить вероятность того, что погрешность превысит по абсолютному значению 12 мА.

Решение. Поскольку систематическая погрешность по условию задачи равна нулю, нормальное (дифференциальное) распределение погрешности симметрично относительно начала координат. Для определения искомой вероятности необходимо вычислить площади «хвостов» нормального распределения при $|z| > \Delta/\sigma_f = 12 \text{ мА}/4 \text{ мА} = 3$ (рис. 3.3). Для этого воспользуемся интегральной функцией нормированного нормального распределения (табл. П3). Поскольку функция дифференциального распределения симметрична относительно оси ординат, то искомая вероятность будет равна площади $P = 2\Phi(-3) = 2 \cdot 0,00135 = 0,0027$.

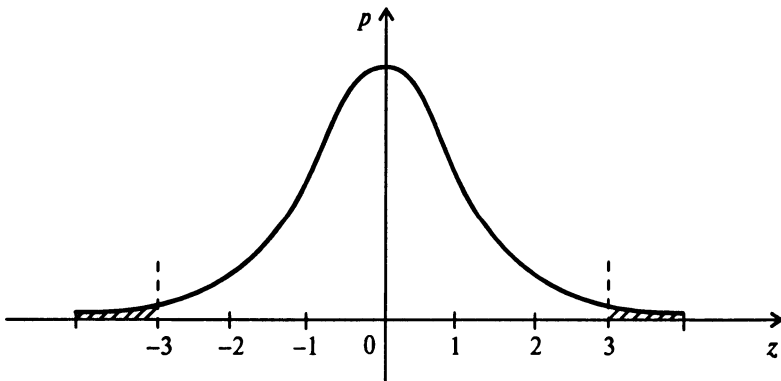


Рис. 3.3. Распределение показаний амперметра в примере 3.5

Искомая вероятность может быть определена также с помощью вычисления площадей обоих «хвостов» дифференциального распределения: $P = [1 - \Phi(3)] + \Phi(-3) = 1 - 0,99865 + 0,00135 = 0,0027$ или, используя симметрию кривой, последнее выражение можно преобразовать к виду $P = 1 - \Phi(3) + 1 - \Phi(3) = 2[1 - \Phi(3)] = 2[1 - 0,99865] = 0,0027$. Заметим, что вероятность того, что погрешность показаний амперметра не превысит 12 мА, составит $1 - 0,0027 = 0,9973$.

Таким образом вероятность того, что погрешность показаний амперметра не превысит по абсолютному значению 12 мА, составит 0,0027.

Пример 3.6. Погрешность измерения напряжения вольтметром распределена по нормальному закону. Систематическая погрешность равна нулю, а СКО результатов измерения составляет $\sigma_U = 60$ мВ. Определить вероятности того, что результат измерения

отличается от истинного значения напряжения более чем на $\Delta_1 = 144$ мВ и $\Delta_2 = 120$ мВ.

Решение. Определим

$$z_1 = \frac{\Delta_1}{\sigma_U} = \frac{144 \text{ мВ}}{60 \text{ мВ}} = 2,4 \text{ и } z_2 = \frac{120 \text{ мВ}}{60 \text{ мВ}} = 2,0.$$

Тогда

$$P_1 = 2\Phi(-2,4) = 2 \cdot 0,0082 = 0,0164 \text{ и } P_2 = 2\Phi(-2,0) = 2 \cdot 0,0228 = 0,0456.$$

Таким образом, вероятности того, что результаты измерения напряжения будут отличаться от истинного значения более чем на 144 и 120 мВ, будут составлять $P_1 = 0,0164$ и $P_2 = 0,0456$ соответственно.

Пример 3.7. Случайная погрешность измерения дальности до неподвижного объекта подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m_\delta = 5$ м и СКО $\sigma = 10$ м. Определить вероятность того, что отклонения от истинного значения дальности не превышает $|\delta|$.

Решение. Систематическая погрешность измерения равна 5 м. Таким образом, распределение погрешности измерения нормальное, сдвинуто по оси δ на 5 м вправо (рис. 3.4). Определение вероятности того, что измеренное значение дальности отклонится от истинного значения не более чем на 15 м сводится к вычислению вероятности попадания случайной величины (погрешности измерения) на интервал от -15 до 15 м.

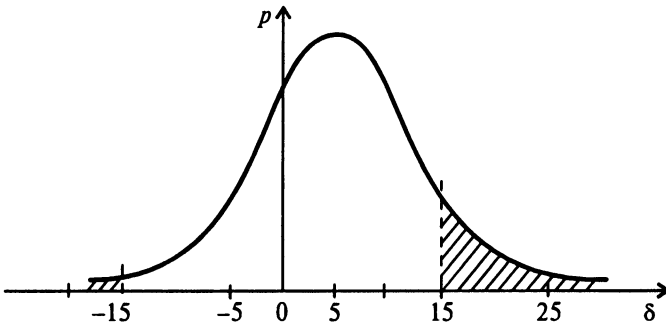


Рис. 3.4. Распределение погрешности попадания в цель в примере 3.7

Используя формулы (2.13), (3.7) и значения $\Phi(z)$ из табл. ПЗ, получаем

$$P(|\delta| < 15) = \Phi\left(\frac{15-5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-15-5}{10}\right) = \Phi(1) - \Phi(2) = \Phi(1) - [1 - \Phi(2)] \approx 0,82.$$

Таким образом, вероятность того, что погрешность отклонения от истинного значения не превысит по модулю 15 м, составляет 0,82.

Пример 3.8. По результатам пяти измерений была определена длина стержня $\bar{L} = 15,785$ мм и оценка СКО $S_{\bar{L}} = 0,005$ мм. Предполагается, что распределение результатов измерения соответствует нормальному закону. Определить вероятность того, что истинное значение длины стержня Q отличается от среднего арифметического из $n = 5$ измерений не более чем на 0,01 мм.

Решение. Поскольку распределение результатов измерения соответствует нормальному закону распределения, то используем для оценки искомой вероятности при ограниченном числе измерений распределение Стьюдента. Найдем параметр

$$t_p = \frac{\bar{L} - Q}{S_{\bar{L}}} = \frac{0,010}{0,005} = 2$$

и число степеней свободы $k = n - 1 = 5 - 1 = 4$. По данным табл. Пб при $t_p = 2$ и $k = 4$ получим $P = 0,8838$.

Таким образом, вероятность того, что истинное значение длины стержня отличается от среднего арифметического из пяти измерений не больше чем на 0,01 мм, составляет 0,8838. Этот результат можно записать следующим образом:

$$P \left\{ \left| \bar{L} - Q \right| < 0,01 \right\} = 0,8838 \text{ (88,4\%)} \text{ или } Q = (15,785 \pm 0,010) \text{ мм}$$

при $P = 88,4\%$.

Пример 3.9. Для условий предыдущего примера ($\bar{L} = 15,785$ мм, $n = 5$, $S_{\bar{L}} = 0,005$ мм) найти доверительные границы того, что результаты измерений находятся в них с доверительной вероятностью $P = 0,99$.

Решение. Для определения доверительных границ воспользуемся табл. П5. При $k = 4$, $P = 0,99$ найдем $t_p = 4,604$. Следовательно, $t_p S_{\bar{L}} = 4,604 \cdot 0,005 = 0,023$ мм.

Таким образом, истинная длина $Q = (15,785 \pm 0,023)$ мм при $P = 0,99$ (99%).

Пример 3.10. В условиях нормального распределения найдено, что среднее арифметическое результатов измерений и их СКО соответственно равны $\bar{x} = 24,022$; $S_x = 0,012$. Число измерений $n = 9$. Определить вероятность того, что истинное значение Q лежит в интервале от 24,014 до 24,030.

Решение. Найдем СКО среднего значения по формуле

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{0,012}{3} = 0,004$$

и число степеней свободы $k = n - 1 = 9 - 1 = 8$. Поскольку интервалы симметричны относительно среднего значения, то величину t_p определим из соотношения

$$t_p = \frac{24,030 - 24,014}{2 \cdot 0,004} = 2.$$

По табл. П6 при $t_p = 2$, $k = 8$ найдем вероятность $P = 0,9194$.

Таким образом, вероятность того, что истинное значение лежит в интервале от 24,014 до 24,030, равна 0,9194.

Пример 3.11. В условиях нормального распределения найдено, что среднее арифметическое результатов измерений и их СКО соответственно равны $\bar{x} = 24,022$ и $S_x = 0,012$. Число измерений $n = 9$. Определить вероятность того, что истинное значение Q меньше 24,014.

Решение. Используя результаты решения предыдущей задачи, получаем, что вероятность P_1 попадания истинного значения измеряемой величины в симметричный доверительный интервал от 24,014 до 24,030 будет равна 0,9194. Тогда искомая вероятность (рис. 3.5)

$$P\{Q < 24,014\} = \frac{1 - P}{2} = \frac{1 - 0,9194}{2} = 0,04.$$

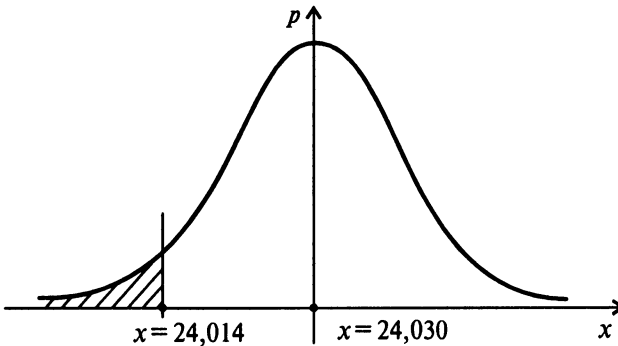


Рис. 3.5. Распределение результатов измерений в примере 3.11

Пример 3.12. В условиях предыдущего примера определить вероятность того, что истинное значение Q лежит в интервале от $x_1 = 24,014$ до $x_2 = 24,038$.

Решение. Вначале проверим симметричность доверительного интервала

$$\bar{x} - x_1 = 24,022 - 24,014 = t_{P_1} \sigma_{\bar{x}} = 0,008;$$

$$x_2 - \bar{x} = 24,038 - 24,022 = t_{P_2} \sigma_{\bar{x}} = 0,016.$$

Поскольку интервал не симметричен ($t_{P_1} \neq t_{P_2}$), то для определения искомой вероятности построим для каждой из доверительных границ симметричные доверительные интервалы и определим 0,5 вероятности попадания Q в эти интервалы. Затем сложим эти половинные вероятности:

$$\begin{aligned} P &= 0,5 \left[P_1(\bar{x} - t_{P_1} \sigma_{\bar{x}} \leq Q < \bar{x} + t_{P_1} \sigma_{\bar{x}}) + P_2(\bar{x} - t_{P_2} \sigma_{\bar{x}} \leq Q < t_{P_2} \sigma_{\bar{x}}) \right] = \\ &= 0,5 \left[2\Phi(t_{P_1}) - 1 + 2\Phi(t_{P_2}) - 1 \right] = \Phi(t_{P_1}) + \Phi(t_{P_2}) - 1 = \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) - 1 = 0,8413 + 0,9773 - 1 = 0,8186 \approx 0,82. \end{aligned}$$

Пример 3.13. Обработка ряда нормально распределенных измерений длины изделия дала следующие результаты:

среднее арифметическое (оценка истинной длины) $\bar{x} = 38,464$ мм при числе измерений, равном шести;

среднеквадратическое отклонение (оценка СКО) $S_{\bar{x}} = 0,036$ мм.

Определить границу интервала, при которой вероятность нахождения истинного значения длины изделия меньше этой границы была бы равна $P = 0,95$.

Решение. Поскольку вероятность $P > 0,5$, то искомая граница x_2 находится правее среднего значения \bar{x} . Таким образом, искомая граница $x_2 > \bar{x}$, доверительный интервал находится от $-\infty$ до x_2 .

Для того чтобы воспользоваться данными, приведенными в табл. П5 или П6, необходимо вначале определить вероятность P_1 попадания истинного значения величины в симметричный интервал $|x_2 - \bar{x}| = |x_1 - \bar{x}| = t_P S_{\bar{x}}$. Очевидно, что вероятности P и P_1 связаны между собой соотношением $P = P_1(t_P; k) + 0,5(1 - P_1)$. Из этого соотношения получим $P_1 = 2P - 1 = 1,9 - 1,0 = 0,9$. Из табл. П5 определим при $k = 5$ $P_1 = 0,9$, $t_P = 2,0$. Получим искомое значение $x_2 = \bar{x} + t_P S_{\bar{x}} = 38,464 + 2 \cdot 0,036 = 38,536$ мм.

Вероятность того, что длина изделия будет менее 38,536 мм, равна 0,95.

Пример 3.14. Оценить вероятность того, что измеренное значение сопротивления R превышает истинное значение более чем на 2 Ом, если СКО $\sigma = 0,2$ Ом. Закон распределения неизвестен.

Решение. Для определения искомой вероятности воспользуемся неравенством Чебышева (3.14), которое дает оценку отклонения от истинного значения при неизвестном распределении

$$P\{|\delta| > \varepsilon\} < \sigma^2/\varepsilon^2,$$

где $\delta = R - R_Q$ — отклонение истинного значения сопротивления R_Q от измеренного значения R , равное 2 Ом. Подставляя все значения в неравенство Чебышева, получаем

$$P\{|\delta| > 2\} < 0,16/4 = 0,04.$$

Пример 3.15. Непосредственный расчет оценок результатов измерений среднего арифметического и выборочной дисперсии (или СКО) по формулам (3.3)–(3.5) часто бывает весьма громоздким, если экспериментальных данных много. Можно существенно упростить расчеты с помощью линейного преобразования результатов измерения в виде

$$x_i = c + hu; \quad u_i = \frac{x_i - c}{h}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1)$$

За начало отсчета c выбирается некоторое значение между наибольшим и наименьшим значениями x_i , а единица масштаба h — так, чтобы значения x_i выражались целыми числами. Произведя замену в (3.3) и (3.4), получим следующие расчетные формулы:

$$\bar{x} = c + h\bar{u}, \quad S_x = h\sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (u_i^2) - n(\bar{u})^2 \right]}, \quad \bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i. \quad (2)$$

Рассмотрим пример. Значения ФВ, полученные в результате $n = 20$ измерений, а также результаты обработки этих измерений при $c = 4,780$ и $h = 0,001$ приведены в таблице:

№ п/п	x_i	u_i	u_i^2	№ п/п	x_i	u_i	u_i^2
1	4,764	-16	256	11	4,778	-2	4
2	4,764	-16	256	12	4,779	-1	1
3	4,767	-13	169	13	4,781	1	1
4	4,769	-11	121	14	4,782	2	4
5	4,771	-9	81	15	4,789	9	81
6	4,772	-8	64	16	4,789	9	81
7	4,772	-8	64	17	4,791	11	121
8	4,774	-6	36	18	4,791	11	121
9	4,775	-5	25	19	4,792	12	144
10	4,776	-4	16	20	4,795	15	225
						-29	1871

Необходимо, используя приведенные данные измерений, определить доверительный интервал для действительного значения ФВ с вероятностью 0,99.

Решение. Применяя формулы (1) и (2), получаем

$$\bar{u} = \frac{-29}{20} = -1,45; \quad \bar{x} = 4,780 - 0,00145 = 4,77855; \quad n(\bar{u})^2 = 20 \cdot (1,45)^2 = 42,0;$$

$$S_x = 0,001 \sqrt{\frac{1871 - 42}{19}} = 0,00981; \quad S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{0,00981}{\sqrt{20}} = 0,00219.$$

Для нормально распределенных результатов средних значений по табл. П5 при числе степеней свободы $k = 19$ и доверительной вероятности $P = 0,99$ получим $t_p = 2,861$.

Доверительные границы будут иметь значения:

$$\bar{x} - t_p S_{\bar{x}} = 4,77855 - 2,861 \cdot 0,00219 = 4,77855 - 0,00626 = 4,77229,$$

$$\bar{x} + t_p S_{\bar{x}} = 4,77855 + 2,861 \cdot 0,00219 = 4,77855 + 0,00626 = 4,78481.$$

Таким образом, действительное значение ФВ с вероятностью $P = 0,99$ находится в доверительном интервале $4,77 < Q < 4,78$.

Пример 3.16. По результатам $n = 20$ измерений получили следующие результаты измерения длины стержня $\bar{l} = 18,9078$ мм, $S_1 = 0,0025$ мм. Определить доверительные интервалы для дисперсии случайной погрешности при доверительной вероятности $P = 1 - q = 0,9$.

Решение: Из табл. П7 (см. (3.15)–(3.17)) для $0,5q = 0,05$ и $1 - 0,5q = 0,95$ и $k = 19$ находим: $\chi_{19;0,05}^2 = 10,117$; $\chi_{19;0,95}^2 = 30,144$ и соответственно $\chi_1 = \chi_{19;0,05} = 3,18$; $\chi_2 = \chi_{19;0,95} = 5,49$. Используя соотношение (3.19), получаем

$$\sigma_1 = \frac{0,0025 \sqrt{19}}{3,18} = 0,0034 \text{ мм}, \quad \sigma_2 = \frac{0,0025 \sqrt{19}}{5,49} = 0,0020 \text{ мм}. \quad (1)$$

Таким образом, истинное значение СКО лежит в интервале от 0,0020 до 0,0034 мм с вероятностью 90%. Если, например, число измерений увеличено до $n = 42$, можно воспользоваться формулами (3.20) для приближенного вычисления доверительных границ СКО. Из табл. П4 находим

$$t_{0,5q} = t_{0,05} = -1,6449; \quad t_{1-0,5q} = t_{0,95} = +1,6449.$$

Тогда в соответствии с (3.20) при $k = n - 1 = 41$ получим

$$\chi_{41;0,05} = \sqrt{41 - \frac{1}{2}} - \frac{1,6449}{\sqrt{2}} = 5,2; \quad \chi_{41;0,95} = \sqrt{41 - \frac{1}{2}} + \frac{1,6449}{\sqrt{2}} = 7,52.$$

Границы доверительного интервала в соответствии с (3.19) равны

$$\sigma_1 = \frac{0,0025\sqrt{42-1}}{5,2} = 0,0031 \text{ мм}, \quad \sigma_2 = \frac{0,0025\sqrt{42-1}}{7,52} = 0,0021 \text{ мм}. \quad (2)$$

Сравнение полученных результатов (1) и (2) показывает, что с увеличением числа измерений границы доверительного интервала сузились при одной и той же доверительной вероятности $P = 0,9$.

Пример 3.17. В условиях нормального распределения случайных погрешностей получены следующие данные: число измерений $n = 4$, СКО результата измерений $S_x = 0,008$ мм. Определить вероятность того, что истинное значение СКО больше $0,010$ мм.

Решение. Определим параметр $\chi_{k;P}^2$ при $\sigma_x = 0,010$ мм, числе степеней свободы $k = 3$ и $S_x = 0,008$ мм. Подставив указанные переменные в (3.15), получим $\chi_{k;P}^2 = 1,92$. Это соответствует вероятности (табл. П7) $P \approx 0,4$.

Таким образом, с вероятностью примерно $0,4$ истинное значение СКО будет меньше $0,01$ мм и с вероятностью $0,6$ будет больше $0,01$ мм.

Пример 3.18. В условиях нормального распределения случайных погрешностей получены следующие данные: число измерений $n = 30$, СКО результата измерений $S_x = 0,002$ мм. Определить значение S_q , при котором с уровнем значимости $q = 0,01$ (или с вероятностью $0,99$) истинное значение СКО может быть меньше S_q , т.е. провести одностороннюю оценку истинного значения СКО сверху.

Решение. В соответствии с формулой (3.18) определим верхнюю границу превышения СКО. Найдем $\chi_{k;P}^2$ при $k = n - 1 = 29$, $q = 0,01$: $\chi_{29;0,01}^2 = 14,256$. Таким образом, истинное значение СКО с вероятностью $0,99$ по результатам 30 измерений не должна превышать

$$S_q = \frac{0,002\sqrt{29}}{3,775} = 0,00285 \text{ мм или } \sigma < 0,0028 \text{ мм}.$$

3.1.5. Проверка статистических гипотез и ошибки первого и второго рода

Оценивание характеристик результатов измерений тесно связано с проверкой гипотез, поскольку всегда возникает вопрос, насколько достоверна (правдоподобна) полученная оценка. Обус-

ловлено это тем, что получаемые оценки (точечные, интервальные, оценки однородности двух групп измерений, оценки вида распределения результатов измерений и т.д.) основываются на статистической выборке — ограниченном числе измерений.

При проверке гипотез подвергается испытанию некоторая гипотеза H_0 по сравнению с одной или несколькими *альтернативными гипотезами* H_1, H_2, \dots , которые явно формулируются или подразумеваются. Например, гипотезой H_0 может быть утверждение, что математическое ожидание $m_x = 10,0$, по альтернативной гипотезе $H_1 m_x > 10,0$, а по $H_2 m_x < 10,0$.

При проверке гипотез можно различать ошибки двух типов.

Ошибка первого рода — это ошибка, возникающая (имеющая место), когда гипотеза H_0 верна, но она отвергается.

Ошибка второго рода — это ошибка, возникающая, когда гипотеза H_0 неверна (т.е. полагается, что верна альтернативная гипотеза H_1), но принимается.

Для принятия некоторого решения относительно гипотезы H_0 и получения выборки (результатов измерения) задаются *уровнем значимости* q (наиболее употребительны уровни значимости $q = 0,05; 0,02; 0,01; 0,001$), который и определяет вероятность ошибки первого рода. Уровню значимости соответствует доверительная вероятность $P = 1 - q$. По этой вероятности, используя гипотезу о распределении оценки, находят квантильные границы, как правило, симметричные (двусторонние), соответствующие вероятности $0,5q$ и $1 - 0,5q$: $x_{0,5q}$ и $x_{1-0,5q}$. Эти числа (границы) называются *критическими значениями гипотезы*. Значения x , меньшие $x_{0,5q}$ и большие $x_{1-0,5q}$, образуют критическую область или область непринятия гипотезы (рис. 3.6). Если найденное по выборке значение x_0 попадает между $x_{0,5q}$ и $x_{1-0,5q}$, то *гипотеза допускает такое значение в качестве случайного, и поэтому нет оснований ее отвергать*. Если же найденное значение x_0 попадает в критическую область, то по данной гипотезе оно является практически невозможным. Но так как оно все-таки появилось, отвергается гипотеза H_0 .

Вероятность ошибки второго рода β зависит от характера проверяемой гипотезы, способов ее проверки и многих других причин, которые усложняют ее определение. Как правило, увеличение ошибки первого рода уменьшает ошибку второго рода, т.е. чем выше уровень значимости q , тем меньше вероятность β . *Мощность критерия* оценивается вероятностью $1 - \beta$, которая определяет вероятность принятия правильного решения, когда в действительности гипотеза является ложной. Площадь под кривой вероятности,

соответствующей альтернативной гипотезе H_1 , влево от $x_{1-0,5q}$ равна вероятности ошибки второго рода β , а вправо от $x_{1-0,5q}$ — мощности критерия (рис. 3.6).

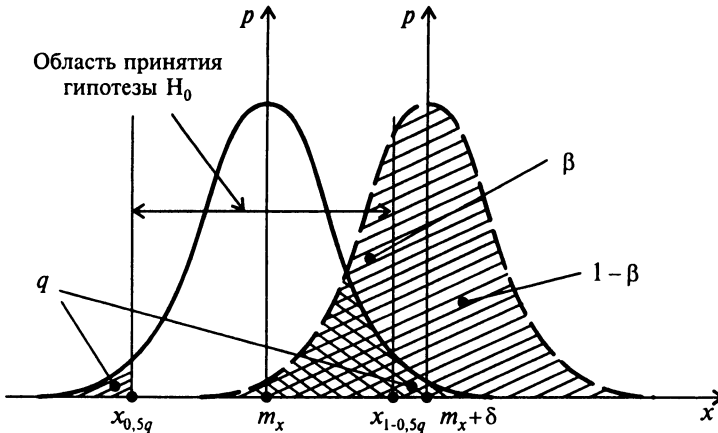


Рис. 3.6. Ошибки первого и второго рода

Следует заметить, что размытие кривых распределений измеряемых величин (плотность вероятности) часто обусловлено не только погрешностью измерений, но и разбросом измеряемых физических величин (объектов, явлений, процессов и т.д.). Это особенно важно при контроле качества продукции, когда при принятии решения о годности или браке продукции необходимо учитывать не только технологический разброс продукции, но и погрешность, с которой измеряется контролируемый параметр продукта или изделия [12, 16, 33, 34].

Пример 3.19. Рассмотрим проверку гипотезы относительно среднего. Предположим, что математическое ожидание напряжения в электрической цепи составляет $m_U = 6,8$ В. В результате $n = 9$ измерений напряжения в этой же цепи получено среднее значение $\bar{U} = 6,5$ В при дисперсии $S_U^2 = 0,25$ В².

Проверим гипотезу H_0 , состоящую в том, что математическое ожидание случайной переменной U , имеющей нормальное распределение, по-прежнему равно 6,8 В. При этом альтернативная гипотеза H_1 состоит в том, что $m_U \neq 6,8$ В.

Решение. Выберем уровень значимости принятия гипотезы H_0 , равный $q = 0,1$. Тогда для двустороннего симметричного критерия гипотеза H_0 ($m_U = 6,8$ В) принимается, если $|\bar{U} - m_U| < t_{1-0,5q} S_{\bar{x}}$. В противном случае гипотеза H_0 отвергается и принимается H_1 .

Вычисляя $S_{\bar{x}} = S_x / \sqrt{n} = 0,50/3 = 0,167$, при числе степеней свободы $k = n - 1 = 8$ по табл. П5 находим $t_{1-0,5q} = 1,86$ и $t_{1-0,5q} S_{\bar{x}} = 1,86 \cdot 0,167 = 0,31$. Сравнение m_x и \bar{U} показывает, что $|6,50 - 6,80| = 0,30 < 0,31$.

Следовательно, гипотеза H_0 принимается с уровнем значимости $q = 0,1$ (ошибка первого рода). Область принятия гипотезы находится между напряжением 6,19 и 7,81 В. Область непринятия гипотезы H_0 соответствует напряжениям более 7,81 В и менее 6,19 В.

Ошибку второго рода в задачах подобного типа (гипотеза относительно среднего) определяют с помощью оперативной характеристики, представляющей собой зависимость ошибки второго рода от разницы (расстояния) между математическим ожиданием, соответствующим гипотезе H_0 , и математическими ожиданиями альтернативных гипотез. Как правило, это сеть кривых, каждая из которых соответствует определенному числу измерений (выборке) при заданной ошибке первого рода [12].

Продолжим анализ влияния уровня значимости (ошибки первого рода) и числа измерений на принятие гипотезы о среднем.

1. Для проверки гипотезы H_0 выберем теперь уровень значимости $q = 0,05$. Тогда при прежних исходных данных получим $t_{1-0,5q} S_{\bar{x}} = t_{0,975} S_{\bar{x}} = 2,306 \cdot 0,167 = 0,39 > 0,30$. Таким образом, при уровне значимости 0,05 (или доверительной вероятности $P = 0,95$) гипотеза H_0 также принимается (рис. 3.7). Если и далее увеличить доверительную вероятность (уменьшить уровень значимости), то гипотеза H_0 будет принята с еще большей «уверенностью». Так, с доверительной вероятностью $P \approx 1$ почти любая исходная гипотеза о величине m_U будет принята, но практически на всей оси абсцисс. Значимость принятия гипотезы H_0 при этом будет ничтожно мала.

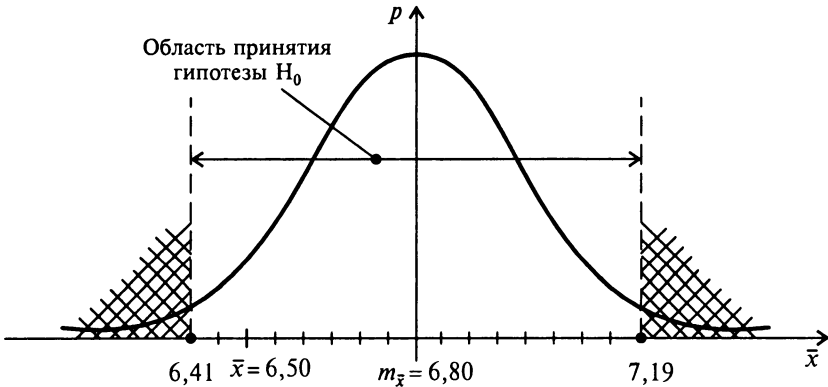


Рис. 3.7. Области принятия и непринятия гипотезы H_0 о математическом ожидании

2. Для проверки гипотезы H_0 выберем теперь уровень значимости $q = 0,2$. Тогда при прежних исходных данных получим, что $t_{1-0,5q} S_{\bar{x}} = t_{0,9} S_{\bar{x}} = 1,383 \cdot 0,167 = 0,23 < 0,30$. Таким образом, при уровне значимости 0,2 (или доверительной вероятности $P = 0,8$) гипотеза H_0 не принимается, поскольку предполагаемое значение m_U выходит за доверительные границы.

3. Увеличим число измерений до $n = 41$ при сохранении дисперсии результатов измерений $S_U^2 = 0,25 \text{ В}^2$. Поскольку количество измерений стало больше, то экспериментальной оценке $\bar{U} = 6,5 \text{ В}$ можно доверять больше, и, скорее всего, наша гипотеза о $m_U = 6,8 \text{ В}$ окажется более сомнительной. Действительно, поскольку при $n = 41$ $S_{\bar{x}} = S_x / \sqrt{n} = 0,50/6,4 = 0,078$, то даже при уровне значимости $q = 0,05$ получим $t_{1-0,5q} S_{\bar{x}} = t_{0,975} S_{\bar{x}} = 2,021 \cdot 0,078 = 0,16 < 0,30$. Таким образом, гипотеза H_0 (о равенстве математического ожидания 6,8 В) оказывается уже неприемлемой.

Пример 3.20. Пусть некое вещество загрязнено вредной примесью. Необходимо найти возможный верхний предел содержания вредной примеси в веществе по следующим результатам анализов содержания примеси в 100 кг вещества (%): $x_i = 0,18; 0,12; 0,14; 0,15$ при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Решение. По формулам (3.3) и (3.4) определим среднее содержание примеси $\bar{x} = 0,147$ и СКО результата измерений $S_x = 0,025$. Поскольку число измерений равно четырем, то в соответствии с (3.5) $S_{\bar{x}} = 0,125$.

По числу степеней свободы $k = n - 1 = 3$, уровню значимости для одностороннего критерия $q = 1 - P = 0,05$, определим по табл. П5 $t_{0,90} = 2,353$. Тогда возможный верхний предел содержания примеси в веществе с вероятностью 0,95 будет равен

$$m_x \leq 0,147 + 2,353 \cdot 0,025 = 0,176 \approx 0,18.$$

С точки зрения принятия статистических гипотез, этот результат можно трактовать следующим образом: при гипотезе H_0 о среднем содержании примеси, равном 0,15%, и уровне значимости этой гипотезы $q = 0,05$ допустимо наличие примеси в веществе до 0,18%.

Пример 3. 21. Вещество считается «чистым», если в нем содержится не менее 99% основного вещества (ОВ). Требуется проверить гипотезу статистической значимости различия между паспортными данными и следующих результатов трех определений содержания ОВ в партии вещества (%): 98,0; 97,3; 97,5. Кроме того, следует отметить, что со временем ОВ подвержено разложению и его содержание со временем уменьшается, например при хранении на

складе или при длительном его перемещении к месту использования от изготовителя к потребителю.

Решение. Используя (3.3)–(3.5), получим среднее значение и СКО для трех измерений ОБ: $\bar{x} = 97,6$ и $S_x = 0,32$, а также $S_{\bar{x}} = 0,20$. В качестве нулевой рассмотрим гипотезу H_0 : математическое ожидание ОБ в веществе $m_x = 0,99$. При этом исследуемое вещество считается доброкачественным. Альтернативная гипотеза $m_x \neq 0,99$. Гипотезу H_0 рассмотрим при уровне значимости $q = 0,05$. Учитывая, что концентрация ОБ со временем может только уменьшаться, то оценку полученного в результате измерения среднего содержания ОБ в веществе проведем с помощью одностороннего критерия

$$\bar{x} \leq m_x - t_{1-p} S_{\bar{x}} = 99 - 2,92 \cdot 0,2 = 99 - 0,59 = 98,4.$$

В этом соотношении $t_{1-0,9} = 2,92$ найдено по табл. П5 (критерий односторонний). Поскольку $\bar{x} = 97,6$ и его значение меньше критического значения 98,4, то нельзя признать имеющуюся партию вещества годной.

Пример 3.22. Производство выпускает керамические изделия, плотность которых из-за нестабильности технологического процесса равномерно распределена от $\rho_1 = 10$ г/см³ до $\rho_2 = 11$ г/см³. Годными считаются изделия, плотность которых равна или превышает порог разбраковки $\rho_{п0} = 10,4$ г/см³. Таким образом, гипотеза H_0 состоит в том, что годные изделия имеют плотность $\rho \geq \rho_{п0}$, альтернативная гипотеза H_1 — в том, что плотность изделий $\rho < \rho_{п0}$.

Определить ошибки первого и второго рода, если при разбраковке изделий по плотности на годные и бракованные установлен порог $\rho_{п0}$ и погрешность измерения плотности распределена равномерно с плотностью вероятности $1/2\Delta_0 = 5$ см³/г ($\Delta_0 = 0,1$ г/см³). Систематическая погрешность отсутствует.

Решение. Если бы погрешность измерения была равна нулю, то ошибки первого и второго рода отсутствовали в данной схеме контроля (рис. 3.8). Доли годных и бракованных изделий были бы равны: $\delta_r = (\rho_2 - \rho_{п0})/(\rho_2 - \rho_1)$ и $\Delta_6 = (\rho_{п0} - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$. Полагая, что плотность вероятности технологического распределения изделий равна $p_p = 1/(\rho_2 - \rho_1)$, запишем вероятности для ошибок первого (признание годных изделий бракованными) и второго (признание бракованных изделий годными) рода

$$q = P_{\Gamma \rightarrow 6} = \int_{\rho_{п0}}^{\rho_{п0} + \Delta_0} p_p \left(\int_{\rho - \Delta_0}^{\rho_{п0}} \frac{1}{2\Delta_0} d\Delta \right) d\rho = \int_{\rho_{п0}}^{\rho_{п0} + \Delta_0} \frac{p_p}{2\Delta_0} (\rho_{п0} - \rho + \Delta_0) d\rho = \frac{p_p \Delta_0}{4};$$

$$\beta = P_{6 \rightarrow \Gamma} = \int_{\rho_{п0} - \Delta_0}^{\rho_{п0}} p_p \left(\int_{\rho_{п0}}^{\rho + \Delta_0} \frac{1}{2\Delta_0} d\Delta \right) d\rho = \frac{p_p \Delta_0}{4}.$$

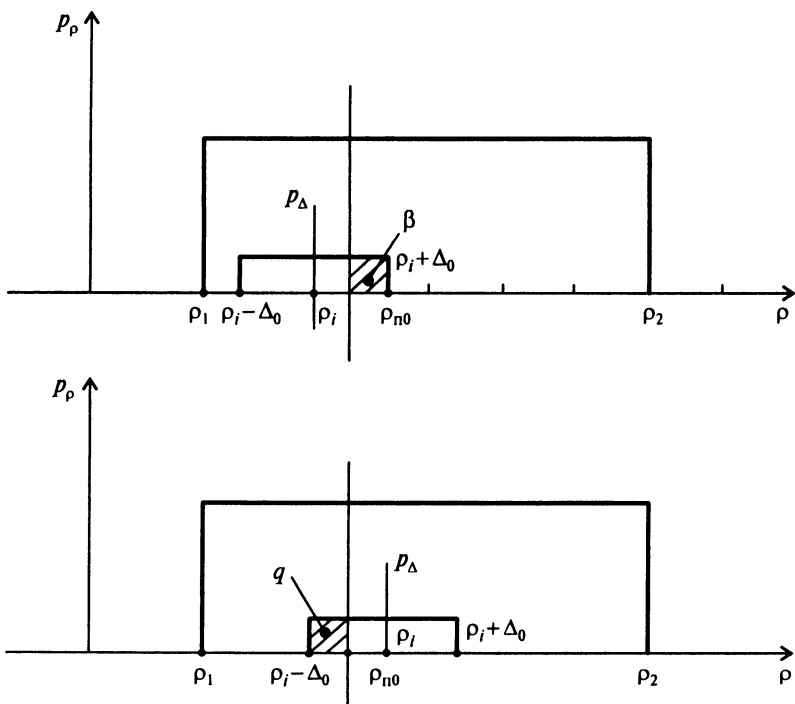


Рис. 3.8. Появление ошибок первого и второго рода при разбраковке изделий (ρ_{n0} — порог разбраковки, $\pm\Delta_0$ — пределы погрешности средства измерения, ρ_i — текущее значение плотности изделия)

Из-за симметричности погрешности и технологического распределения плотности изделий и $\Delta_0 < (\rho_{n0} - \rho_1)$ ошибки первого и второго рода получились равные. Подстановка численных значений в полученные соотношения дает следующее значение $q = \beta = 0,025$.

Следует заметить, что порог разбраковки (критерий принятия решений, критерий значимости) для уменьшения ошибки второго рода обычно выбирается отличным от ρ_{n0} . Например при $\rho_{n1} = \rho_{n0} + \Delta_0$ (при сохранении остальных условий примера) ошибка второго рода $\beta = 0$, т.е. при этом пороге разбраковки негодные (бракованные) изделия не будут попадать в годные. Это естественно удовлетворит потребителя продукции. Однако при этом ошибка первого рода, т.е. отнесение годных изделий к бракованным, возрастет до $q = 0,1$, что, в свою очередь, ухудшит экономические показатели производства. Поэтому правильный выбор стратегии контроля (установление компромиссного порога разбраковки, установление двух порогов, использование последовательного анализа «сомнительных» изделий и т.д.) является важной задачей метрологов производства [12, 16].

В подобных задачах наиболее кардинальным решением является, как правило, использование СИ, обладающих малой погрешностью, и методик измерений, позволяющих снизить погрешность измерения.

Пример 3.23. Средство измерений, предназначенное для регистрации сигнала амплитудой S_0 , характеризуется погрешностью, имеющей нормальное распределение и мощность σ^2 и обусловленной шумом системы. Таким образом в отсутствие сигнала на входе СИ действует нормальный шум, создающий случайную погрешность, плотность вероятности амплитуд которого равна

$$p_{\text{ш}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

При наличии сигнала плотность вероятности амплитуд с учетом наложения на сигнал шума будет равна

$$p_{\text{с+ш}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - S_0)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Принимается решение о наличии сигнала (гипотеза H_0), если измеренное значение $x \geq x_{\text{п}} = S_0/2$, и об отсутствии сигнала (гипотеза H_1), если $x < S_0/2$. Определить ошибки первого и второго рода при принятии решения о регистрации сигнала.

Решение. Определим ошибку первого рода, когда на входе СИ имеется сигнал (рис. 3.9)

$$q = \int_{-\infty}^{S_0/2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - S_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 1 - \Phi\left(\frac{S_0}{2\sigma}\right). \quad (1)$$

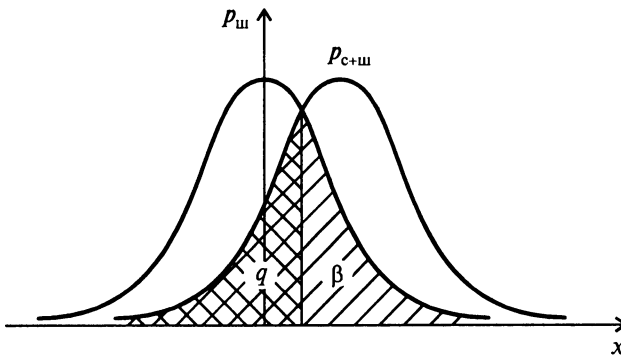


Рис. 3.9. Ошибки первого и второго рода при приеме зашумленного сигнала

Ошибку второго рода определим как вероятность признания наличия сигнала, в то время как он отсутствует:

$$\beta = \int_{S_0/2}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1 - \Phi\left(\frac{S_0}{2\sigma}\right). \quad (2)$$

Как видно из (1) и (2) при выбранном критерии принятия решения ошибки первого и второго рода равны. Например, при $\sigma = S_0/4$ $q = \beta = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,97725 \approx 0,03$.

Увеличение уровня принятия решения о наличии сигнала (гипотеза H_0) приведет к уменьшению ошибки второго рода β и увеличению ошибки первого рода q .

3.2. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

Задача 3.1. В условиях нормального распределения погрешности измерения получены следующие оценки результатов измерения: средняя арифметическая длина стержня $\bar{x} = 13,043$ мм и ее СКО $S_{\bar{x}} = 0,028$ мм. Число измерений $n = 4$. Определить вероятность $P\{13,113 > Q \geq 12,973\}$

Ответ. Вероятность попадания истинного значения измеренной длины стержня в интервале от 12,973 до 13,113 мм равна 0,9122, или 91,22%.

Задача 3.2. Для условий предыдущей задачи ($\bar{x} = 13,043$ мм, $S_{\bar{x}} = 0,028$ мм, число измерений $n = 4$) определить вероятность того, что истинное значение измеряемой величины может быть больше 13,086.

Ответ: $P\{Q > 13,086\} = 0,113$.

Задача 3.3. В условиях нормального распределения измерений получены следующие оценки измеряемой длины: $\bar{x} = 94,238$ мм, $S_{\bar{x}} = 0,048$ мм, число измерений $n = 16$. Определить вероятность того, что истинное значение измеряемой величины будет больше 94,217.

Ответ. $P\{Q > 94,217\} = 0,95$.

Задача 3.4. При условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что истинное значение измеряемой длины будет находиться в интервале от $x_1 = 94,202$ до $x_2 = 94,274$.

Ответ. $P\{94,202 < Q \leq 94,274\} = 0,99$.

Задача 3.5. В условиях нормального распределения измерений получены следующие оценки измеряемой величины: $\bar{x} = 94,238$ мм,

$S_{\bar{x}} = 0,016$ мм. Определить интервал, в котором может находиться истинное значение величины Q с вероятностью 0,9360, если число измерений равно 16.

Ответ. Истинное значение Q будет находиться в интервале от 94,214 до 94,262 с вероятностью 0,936.

Задача 3.6. Обработка результатов измерения длины изделия дала следующие результаты: $\bar{x} = 76,386$ мм, $S_{\bar{x}} = 0,015$ мм, число измерений $n = 9$. Определить вероятность того, что истинное значение Q не превысит 76,376 мм.

Ответ. Вероятность того, что истинное значение длины не превысит 76,376 мм, будет равна $P\{Q < 76,376\} = 0,04$.

Задача 3.7. Обработка результатов измерения длины изделия дала следующие результаты: $\bar{x} = 81,730$ мм, $S_{\bar{x}} = 0,008$ мм, число измерений $n = 4$. Определить вероятность того, что истинное значение Q будет находиться между $x_1 = 81,720$ мм и $x_2 = 81,740$ мм.

Ответ. $P\{81,720 \leq Q < 81,740\} = 0,7$.

Задача 3.8. Оценить вероятность того, что x не отличается от своего истинного значения на $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$, если распределение результатов измерения подчиняется нормальному закону.

Ответ. $P\{|\delta| < \sigma\} \approx 0,68$; $P\{|\delta| < 2\sigma\} \approx 0,955$; $P\{|\delta| < 3\sigma\} \approx 0,997$.

Задача 3.9. Оценить вероятность того, что сопротивление R отличается от своего истинного значения R_0 не более чем на $\varepsilon = 1$ Ом, если СКО равно $\sigma = 0,4$ Ом. Закон распределения неизвестен. Сравнить полученную оценку вероятности с оценкой при нормальном распределении сопротивлений около истинного значения.

Ответ. $P\{|R - R_0| > \varepsilon\} < 0,16$.

Задача 3.10. В условиях нормального распределения случайных погрешностей получены следующие данные: число измерений $n = 4$, СКО результата измерений $S_{\bar{x}} = 0,004$ мм. Определить доверительный интервал для СКО результатов измерений при уровнях значимости $q_1 = 0,2$ и $q_2 = 0,02$.

Ответ. 1. При уровне значимости $q_1 = 0,2$ истинное значение СКО лежит в интервале $0,0055$ мм $< \sigma < 0,0181$ мм с вероятностью 80%.

2. При уровне значимости $q_2 = 0,02$ истинное значение СКО лежит в интервале $0,0041$ мм $< \sigma < 0,0406$ мм с вероятностью 98%.

Задача 3.11. В условиях примера 3.23 определить ошибки первого и второго рода при принятии решения о регистрации сигнала, если порог принятия решения $x_{\text{п}} = 2S_0/3$.

Ответ. Ошибки первого и второго рода соответственно равны $q = 0,1$, $\beta = 0,004$.



СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

4.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

4.1.1. Суммирование неисключенных систематических погрешностей

Результаты измерений, полученные при наличии систематических погрешностей, называются неисправленными. Систематические погрешности, оставшиеся после введения поправок, называются неисключенными систематическими погрешностями.

Неисключенная систематическая погрешность характеризуется ее границами. Границы неисключенной систематической погрешности θ результата измерения вычисляют путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей. При равномерном распределении неисключенных систематических погрешностей границы погрешности, соответствующие *доверительной вероятности* P , вычисляют по формуле

$$\theta(P) = \pm k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2}, \quad (4.1)$$

где θ_i — граница i -й неисключенной систематической погрешности; k — коэффициент, определяемый доверительной вероятностью. Этот коэффициент принимают равным 0,95 при доверительной вероятности $P=0,9$, равным 1,1 при $P=0,95$ и 1,4 при $P=0,99$. В формуле (4.1) общая погрешность рассматривается как композиция квазислучайных погрешностей с равномерным распределением.

При числе суммируемых распределений $m \leq 4$ коэффициент k находят по табл. П15 или графику $k = k(m, l)$, где l — параметр, учитывающий различие в размерах границ суммируемых погрешностей. В ряде работ [5, 9, 10] рекомендуется при $m \leq 3$ сравнивать результат, полученный с помощью формулы (4.1), с оценкой границ по формуле

$$\theta^* = \pm \sum_{i=1}^m |\theta_i|. \quad (4.2)$$

При $\theta^* > \theta$ в качестве оценки границ рекомендуется использовать θ^* , которая определяет границы при вероятности $P=1$ (см. примечание к табл. П15).

Пример 4.1. Пусть при сложении двух деталей имеют место неисключенные систематические погрешности, распределенные равновероятно в интервалах $\pm\theta_1$ и $\pm\theta_2$ соответственно. Тогда в соответствии с (4.2) суммарное распределение систематической погрешности будет иметь границы $\pm(\theta_1 + \theta_2)$, которые определяют доверительную вероятность $P=1$. При $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$ суммарная граница будет равна $2\theta_0$. Этот же результат можно получить с помощью формулы (4.1). Для этого по табл. П15 при $P=1$ и $m=2$ находим $k=1,414$. Подставляя эти значения в формулу (4.1), получаем искомую границу суммы двух равных систематических погрешностей, имеющих равномерное распределение:

$$\theta(P=1) = 1,414 \sqrt{2\theta_0^2} = 2\theta_0.$$

Если, например, $\theta_2 = 3\theta_1 = 3\theta_0$, то по табл. П15 при $P=1$, $l=3$ находим $k=1,265$. Подстановка этих значений в формулу (4.1) дает

$$\theta(P=1) = 1,265 \sqrt{(1+9)\theta_0^2} = 1,265 \cdot 3,162\theta_0 = 4\theta_0.$$

Этот же результат можно получить, используя формулу (4.2).

Для определения границ при доверительной вероятности, меньшей единицы, необходимо знать функцию вероятностного распределения суммарной погрешности. Подобные распределения получены в примерах 2.14–2.16.

Пример 4.2. Определить коэффициент k в формуле (4.1) для неисключенной систематической погрешности, имеющий равномерное распределение при симметричных границах $\theta_0 = \pm 1$, т.е. определить коэффициент k при $m=1$.

Решение. Формула для определения систематической погрешности с заданной вероятностью P будет иметь вид $\theta(P) = \pm k\theta_0$. Поскольку общая площадь под распределением плотности вероятности равна единице и граница распределения также равна единице, то в данном примере $k=P$. Например, при доверительной вероятности $P=0,95$ $k=0,95$ и $\theta(P)=0,95$. Результаты соответствия доверительных границ и вероятности P приведены в таблице:

Доверительная вероятность P	0,5	0,75	0,9	0,95	0,98	0,99	1
k	0,5	0,75	0,9	0,95	0,98	0,99	1
$\theta(P)$ при $\theta_0 = \pm a$	0,5a	0,75a	0,9a	0,95a	0,98a	0,99a	a

Пример 4.3. Определить коэффициент k в формуле (4.1) для неисключенной систематической погрешности, представляющей собой суперпозицию двух составляющих погрешностей, имеющих равномерное распределение при симметричных границах $\theta_0 = \pm 1$, т.е. определить коэффициент k при $m = 2$.

Решение. Известно, что сложение двух одинаковых равномерных распределений приводит к треугольному распределению Симпсона. Для решения примера воспользуемся результатами, полученными ранее в примере 2.3. Запишем формулу для вероятности

$$P = 2 \int_0^{\theta^*(P)} \left(-\frac{1}{4}\right) (\delta - 2) d\delta = \frac{4\theta^*(P) - [\theta^*(P)]^2}{4}. \quad (1)$$

Решая уравнение (1) относительно $\theta^*(P)$, получаем

$$\theta^*(P) = 2\left(1 - \sqrt{1 - P}\right). \quad (2)$$

Результаты вычислений доверительной границы $\theta^*(P)$ по формуле (2) приведены в таблице. В этой же таблице (четвертая строка) приведены результаты вычислений, полученные с помощью формулы (4.1), где значение коэффициента k взято из табл. П15 (третья строка таблицы). Например, используя формулу (4.1) и учитывая, что $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0 = 1$ при $P = 0,95$, получаем $\theta(0,95) = 1,101\sqrt{2} = 1,554$, а границы этого распределения равны $\pm 2\theta_0 = 2$ (при $\theta_0 = 1$).

Доверительная вероятность P	0,5	0,75	0,9	0,95	0,98	0,99	1
$\theta^*(P)$ из формулы (2)	0,586	1	1,38	1,55	1,72	1,84	2
Коэффициент k из табл. П15			0,967	1,101	1,218	1,276	1,414
$\theta(P)$ из формулы (4.1)			1,37	1,55	1,72	1,80	2

Видно, что значения $\theta^*(P)$ и $\theta(P)$ при различных P практически совпадают.

Пример 4.4. Пусть при сложении четырех деталей имеют место систематические погрешности, каждая из которых распределена равномерно в интервале $\pm\theta_0$. Определить доверительный интервал для суммарной погрешности измерения длины изделия, состоящего из четырех деталей, при вероятности $P = 0,99$.

Решение. При доверительной вероятности $P=0,99$ в соответствии с соотношением (4.1) границы суммарной погрешности будут равны $\theta(P=0,99) = \pm 1,4 \sqrt{4\theta_0^2} = \pm 2,8\theta_0$.

Пример 4.5. Определить доверительные границы при вероятности $P=0,99$ композиции трех неисключенных систематических погрешностей, имеющих симметричное равномерное распределение при границах $\theta_1 = \pm 0,08$, $\theta_2 = \pm 0,05$ и $\theta_3 = \pm 0,03$.

Решение. В соответствии с методикой определения коэффициента k в формуле (4.1), предложенной в МИ 2083-90 [15], определим коэффициенты $l_1 = \theta_1/\theta_2 = 0,08/0,05 = 1,6$ и $l_2 = \theta_2/\theta_3 = 0,05/0,03 = 1,67$, а затем $k_1 = k(l_1, m) = k(1,6; 3) \approx 1,4$; $k_2 = k(l_2, m) = k(1,67; 3) \approx 1,4$ и $k = \max(k_1, k_2) \approx 1,4$. Затем по формуле (4.1) вычислим

$$\theta(P=0,99) = 1,4 \sqrt{(64 + 25 + 9) \cdot 10^{-4}} = 1,4 \cdot 10^{-2} \cdot 9,9 \approx 0,14.$$

Пример 4.6. Известно, что предел суперпозиции трех неисключенных систематических погрешностей составляет 0,04. Определить границы этих погрешностей при доверительной вероятности $P=0,9$, полагая, что границы суммируемых погрешностей одинаковы.

Решение. Поскольку предел погрешности соответствует вероятности $P=1$, то, используя формулу (4.1) и значение коэффициентов в этой формуле из табл. П15 при $P=1$ ($k_1 = 1,732$) и $P=0,9$ ($k_{0,9} = 0,958$), можно получить следующие соотношения для определения границ результирующей погрешности при $P=0,9$:

$$\theta(P=1) = 1,732 \sqrt{\sum_{i=1}^3 \theta_i^2} = 0,04; \quad (1)$$

$$\theta(P=0,9) = 0,958 \sqrt{\sum_{i=1}^3 \theta_i^2}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим $\theta(P=0,9) = (0,958/1,732) \cdot 0,04 = 0,022$.

Пример 4.7. Используя аппарат характеристических функций, вычислить дисперсию и СКО суперпозиции $m \leq 5$ равномерных распределений с границами, равными единице $\theta_i = 1$.

Решение. Используя соотношение (2.25), а также результаты, полученные в примере 2.20 и задаче 2.19, определим дисперсию и СКО суперпозиции равномерных распределений. Результаты вычислений приведены в таблице.

Число суммируемых распределений m	1	2	3	4	5
Суммарная дисперсия	1/3	2/3	1	4/3	5/3
Суммарное СКО	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{2/3}$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{5/3}$

Из таблицы видно, что при суммировании равномерных распределений дисперсии складываются пропорционально числу составляющих. Однако доверительный интервал суммарного распределения при заданной (или известной) вероятности может быть определен только после тщательного исследования результирующей функции распределения плотности вероятности [9–11]. Подобные вычисления для самых простых распределений приведены в примерах 4.2 и 4.3.

Пример 4.8. Получить выражение для определения доверительных границ при большом числе m суммируемых систематических погрешностей, распределенных равномерно и имеющих границы $\pm\theta_i$.

Решение. Полагая, что погрешности являются независимыми квазислучайными величинами, суммарная дисперсия и СКО при сложении m равномерно распределенных погрешностей с границами $\pm\theta_i$ будут равны

$$S_{\theta}^2 = \sum_{i=1}^m S_{\theta_i}^2 = \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m \theta_i^2, \quad S_{\theta} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2}.$$

Доверительный интервал суммарной погрешности при большом числе слагаемых, когда результирующее распределение можно считать нормальным в силу центральной предельной теоремы теории вероятности, можно определить по формуле (4.1):

$$\theta(P) = \pm t_{0,5q} S_{\theta} = \pm \frac{t_{0,5q}}{\sqrt{3}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2} = \pm k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2},$$

где $\theta(P)$ — доверительный интервал для суммы неисключенных систематических погрешностей при доверительной вероятности P или уровне значимости $q = 1 - P$; $|t_{0,5q}| = |t_{1-0,5q}|$ — соответствующие доверительной вероятности P квантили, которые определяются по таблицам нормального распределения, например табл. П4. Найдем коэффициент $k_{0,9}$, соответствующий доверительной вероятности $P = 0,9$. Из табл. П4 квантили, соответствующие этой доверительной вероятности, $|t_{0,05}| = |t_{0,95}| = 1,6449$. При этом $k_{0,9} = t_{0,5q} / \sqrt{3} =$

$= 1,6449 \cdot 0,578 = 0,95$. Дальнейшие расчеты позволяют получить $k_{0,98}(|t_{0,01}| = |t_{0,99}| = 2,3267) = 1,35$, а также $k_{0,95} = 1,13$ и $k_{0,99} = 1,49$.

Эти результаты целесообразно сравнить с результатами, приведенными в табл. П15, полученными суммированием четырех одинаковых распределений, а также с коэффициентами, рекомендованными в [2] для использования в формуле (4.1):

Источники сравнения значений коэффициента k	Значения коэффициента k для различной доверительной вероятности P				
	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
Аппроксимация суммарного распределения — нормальным (пример 4.8)	0,95	1,13	1,35	1,49	1,90
По табл. П15 при числе суммируемых распределений $m = 4$	0,946	1,120	1,301	1,410	2,000 при $P = 1$
Рекомендации РМГ-99 [2], а также [9,11]	0,95	1,10		1,40	

Из таблицы видно, что наибольшее расхождение в коэффициенте k между данными первой и второй строки 6,4% наблюдается при доверительной вероятности $P = 0,99$. По данным табл. П15 расхождение увеличивается при $m < 4$. Суммарная граница при вероятности $P = 1$ ($l = 1$) и m от 2 до 4, как видно из табл. П15, также хорошо определяются по формуле (4.1).

Рассмотренные примеры показывают, что при определении доверительных границ суммы (композиции) неисключенных систематических погрешностей $\theta(P)$, распределение которых принимается равномерным, целесообразно применять формулу (4.1), используя для определения поправочного коэффициента k табл. П15 и график $k = k(l, m)$.

Пример 4.9. Погрешность измерения δ распределена по равномерному закону от $a = -2$ мВ до $b = 4$ мВ. Определить систематическую погрешность, СКП результатов измерения, а также вероятность того, что погрешность отрицательна. Записать исправленное распределение погрешности.

Решение. Используя результаты примера 2.1 при $a = -2$ мВ и $b = 4$ мВ, получаем

$$p_0 = (1/6) \text{ мВ}^{-1}; \quad M[\delta] = 1 \text{ мВ}; \quad D[\delta] = 3 \text{ мВ}^2; \quad \sigma[\delta] = 1,73 \text{ мВ}.$$

Из приведенных расчетов видно, что систематическая погрешность равна $\Delta_s = M[x] = 1$ мВ. Вероятность того, что погрешность находится в диапазоне от -2 до 0 мВ, равна

$$P(-2 \leq \delta \leq 0) = \int_{-2}^0 p_0 d\delta = \frac{1}{6} \delta \Big|_{-2}^0 = \frac{1}{3}.$$

Исправленное распределение погрешности

$$p(\delta) = \begin{cases} 1/6, & -3 \leq \delta \leq 3, \\ 0, & \delta < -3, \delta > 3. \end{cases}$$

Пример 4.10. Результат измерения мощности содержит случайную погрешность, распределенную по нормальному закону с СКО $\sigma = 100$ мВт. Показания содержат систематическую погрешность $\Delta_s = 50$ мВт. Определить вероятность того, что неисправленный результат измерения превысит истинное значение мощности.

Решение. Максимум распределения погрешности измерения из-за наличия систематической погрешности смещен вправо по оси абсцисс на 50 мВ. Искомая вероятность будет соответствовать площади под кривой распределения, расположенной правее оси ординат, которая при $z = -50/100 = -0,5$ будет равна (см. табл. П2) $P = 1 - \Phi(-0,5) = 1 - 0,308 = 0,69$.

Таким образом, вероятность того, что неисправленный результат измерения превысит истинное значение мощности, равна 0,69.

4.1.2. Статистические методы обнаружения систематических погрешностей (методы Аббе, Фишера и Стьюдента)

Если систематическая погрешность постоянна и дисперсия неисправленных результатов соответствует дисперсии исправленных, то постоянные систематические погрешности не влияют на случайные отклонения от среднего значения и никакая математическая обработка не позволяет их обнаружить. Определение этих погрешностей возможно только при проверке СИ с помощью более точных СИ или эталонов. Разность в показаниях поверяемого СИ и более точной меры равна искомой систематической погрешности.

Для обнаружения переменных систематических погрешностей используют статистические методы. Для этого исследуемые результаты измерений разбивают на ряд групп (либо эти группы уже имеются) и исследуют их на однородность среднего и дисперсии. При этом удается определить отклонение результатов измерений от среднего, а также тенденции этих отклонений (критерии Аббе, Фишера, Вилкоксона и другие методы).

Метод Аббе. Этот метод обнаружения систематических погрешностей, также называемый способом последовательных разностей, используется для обнаружения случайных (переменных) изменений

центра распределения результатов измерения. В нем используется тот факт, что дисперсию результатов измерений можно оценить двумя способами: обычным (3.4)

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (4.3)$$

и с помощью вычисления суммы квадратов последовательных (в порядке проведения измерений) разностей $(x_{i+1} - x_i)^2$

$$S_d^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2. \quad (4.4)$$

Если в процессе измерений систематическая погрешность смещала среднее арифметическое, то будет иметь место неравенство $S_x^2 > S_d^2$. Отношение $v = S_d^2/S_x^2$ является критерием для обнаружения систематических смещений среднего арифметического результатов измерений. Критическая область этого критерия определяется как $P(v < v_q) = q$, где q — уровень значимости, $q = 1 - P$; P — доверительная вероятность. Считают, что среднее арифметическое имеет смещение, если $v < v_q$. Значения v_q в зависимости от уровня значимости q ($q = 0,001; 0,01; 0,05$) и числа измерений приведены в табл. П8.

Метод Аббе можно применять и для обнаружения монотонных смещений между результатами измерений в разных группах.

Метод Фишера. Этот метод (дисперсионный метод) более чувствителен к изменению средних, и его целесообразно использовать, когда многократные измерения проводятся в течение длительного времени, а сами измерения равноточные. Сущность метода состоит в следующем.

После проведения N измерений их разбивают на L групп по n_j результатам измерений в каждой группе ($L > 3$), но так, чтобы выполнялось равенство $N = \sum_{j=1}^L n_j$. Затем анализируют изменение дисперсий в каждой из групп измерений по сравнению со средним рассеиванием измерений внутри каждой из групп.

Находят оценку внутригрупповой дисперсии (среднее рассеивание внутри групп)

$$S_{\text{вр}}^2 = \frac{1}{N-L} \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = \frac{1}{N-L} \sum_{j=1}^L (n_j - 1) S_j^2 = \frac{\sum_{j=1}^L k_j S_j^2}{\sum_{j=1}^L k_j}, \quad (4.5)$$

где $\bar{x}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$ — среднее результатов измерений в j -й группе; x_{ij} — результат i -го измерения в j -й группе; S_j^2 — рассеяние (дисперсия) внутри каждой j -й группы; $\sum_{j=1}^L k_j = N - L$. Заметим, что

формула (4.5) представлена в трех равноценных вариантах, поскольку это облегчает ее использование в последующих примерах.

Если результаты измерений содержат систематическую погрешность, то это прежде всего сказывается на изменении среднего арифметического \bar{x}_j каких-либо групп измерений. На дисперсии результатов измерений это должно сказаться слабо, если, конечно, измерения отдельных групп не слишком продолжительны. Следовательно, результат (4.5) целесообразно сравнить с межгрупповой дисперсией

$$S_{\text{мг}}^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{j=1}^L n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2, \quad (4.6)$$

где $\bar{\bar{x}} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \bar{x}_j = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ — среднее результатов измерений.

Дисперсия (4.6) отражает влияние систематического различия между группами измерений.

Критерием оценки наличия систематических погрешностей является дисперсионный критерий Фишера

$$F = S_{\text{мг}}^2 / S_{\text{вг}}^2. \quad (4.7)$$

Значения F_q для различных уровней значимости q , числа измерений N и числа групп L приведены в табл. П10 при степенях свободы $k_1 = L - 1$, $k_2 = N - L$. Если полученное значение критерия Фишера F больше F_q (при заданных q , N , L), то гипотеза об отсутствии систематических смещений результатов измерений по группам отвергается, т.е. считается, что смещение среднего обусловлено систематической погрешностью. В табл. П10 приведены значения $F_{q=1-p}$, соответствующие интегральной функции F -распределения от 0 до F_q .

При числе групп менее трех используют другие методы оценки равенства математических ожиданий в группах [3, 9, 10].

Метод Стьюдента. Если необходимо установить наличие смещения в средних для двух групп (серий) измерений (при этом метод Фишера не применим) и число данных в каждой из групп невелико (менее 30), то для проверки гипотезы о равенстве средних вычисляется величина

$$t_{1-2} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1)S_{x_1}^2 + (n_2 - 1)S_{x_2}^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}. \quad (4.8)$$

Далее, задаваясь определенным уровнем значимости q или доверительной вероятностью $P = 1 - q$, по табл. П5 и П6 при числе степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$ находят соответствующее значение t_p , и если $t_{1-2} < t_p$, то гипотеза о равенстве средних (математических ожиданий) принимается. Этой оценкой можно пользоваться и для большего числа групп, попарно проверяя их однородность [3].

4.1.3. Проверка равнорассеянности групп измерений

Все рассмотренные выше критерии применимы, если априори выполняются два условия: распределение результатов измерений нормально и результаты измерений в группах равнорассеяны, т.е. дисперсии (или СКО) групп измерений можно считать одинаковыми. Для проверки допустимости различия между оценками дисперсий групп измерений используется критерий Фишера (F -распределение) и критерий Бартлетта.

Критерий Фишера. Поскольку с помощью критерия Фишера можно сравнить только дисперсии двух групп измерений, то, как правило, дисперсии всех групп измерений располагают в вариационный ряд в порядке их возрастания. Затем сравнивают первую и последнюю дисперсию в этом ряду, т.е. наименьшую S_1^2 и наибольшую дисперсии S_L^2 . Различие оценок дисперсий считается допустимым, если выполняется условие

$$P \left\{ \frac{S_L^2}{S_1^2} < F_q \right\} = 1 - q. \quad (4.9)$$

Число степеней свободы для S_L равно $k_L = n_L - 1$, для S_1 оно равно $k_1 = n_1 - 1$. Причем n_L и n_1 — число измерений в группе с наибольшей и наименьшей дисперсией соответственно. Верхние предельные значения F_q в зависимости от числа степеней свободы k_L и k_1 определяются для заданной (выбранной) вероятности P или уровня значимости $q = 1 - P$. Уровень значимости q находят

по таблицам Фишера (табл. П10). Для других уровней значимости критические точки можно найти в таблицах, приведенных в работах [9,12]. Иногда проводят двустороннюю оценку отношения (4.9) [9, 10].

Критерий Бартлетта [9]. С помощью критерия Бартлетта можно определить допустимость рассеяния оценок дисперсий для числа групп измерений $L \geq 3$ и числа измерений в каждой группе $n_j \geq 3$. Для проведения указанной проверки вначале вычисляют оценки дисперсий всех групп от S_1^2 до S_L^2 (4.3), а затем среднее значение оценок дисперсии

$$S_{\text{ср}}^2 = \frac{1}{N-L} \sum_{j=1}^L S_j^2 (n_j - 1), \quad (4.10)$$

где $N = \sum_{j=1}^L n_j$; S_j^2 — дисперсия j -й группы измерений. Затем находят значение χ^2 по формуле

$$\chi^2 = \frac{2,303}{C} \left[(N-L) \lg S_{\text{ср}}^2 - \sum_{j=1}^L (n_j - 1) \lg S_j^2 \right] = \frac{B}{C}, \quad (4.11)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(L-1)} \left(\sum_{j=1}^L \frac{1}{n_j - 1} - \frac{1}{N-L} \right). \quad (4.12)$$

Далее, задаваясь некоторой доверительной вероятностью P , определяют верхний предел χ_{max}^2 по распределению χ^2 (табл. П7) с $L-1$ степенями свободы при $q(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 1 - P$. Если выполняется неравенство $\chi^2 < \chi_{\text{max}}^2$, то различия между оценками дисперсий групп допустимы. Если во всех группах число измерений $n_i \geq 30$, то $C = 1$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение критериев Аббе, Бартлетта и Фишера [9,3].

Пример 4.11. При определении приведенной площади поршня грузопоршневого барометра путем его сличения с эталонным ртутным барометром было произведено $N = 50$ измерений, представленных $L = 10$ группами по 5 измерений в каждой. Полученные данные приведены в табл. 1. Требуется установить, присутствует ли в результатах измерений значимая систематическая погрешность, а также найти приведенную площадь и оценку СКО полученного значения.

Таблица 1

Номер групп	Измеренные значения площади поршня, см ²					\bar{x}_j
	2	3	4	5	6	
1	1,001288	...240	...294	...292	...248	1,001272
2	245	206	201	263	236	230
3	217	211	264	221	267	236
4	230	275	292	238	248	257
5	258	209	256	259	215	239
6	214	253	250	191	211	224
7	225	235	189	233	192	215
8	241	271	270	233	218	247
9	255	296	301	245	249	269
10	286	244	232	246	289	259
Совокупное среднее \bar{x}						1,001245

Решение. Совокупное среднее значение групп, которое принимается в качестве приведенной площади поршня, вычислим как среднее всех результатов измерений по формуле

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^L n_j} \sum_{j=1}^L n_j \bar{x}_j = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \bar{x}_j = 1,001245,$$

где \bar{x}_j — среднее арифметическое значение в j -й группе; L — число групп; n_j — число измерений в j -й группе.

Чтобы убедиться в том, что это является оценкой истинного значения приведенной площади поршня, проверим статистическую подконтрольность полученных данных.

1. Вначале проверим, являются ли оценки дисперсий групп оценками одной и той же дисперсии. Применим для этого критерий Бартлетта.

Используя результаты вычисления дисперсии, приведенные в столбце 9 табл. 2, по формуле (4.10) определим среднее значение дисперсии, которое при равном числе данных в группе упрощается:

$$S_{\text{ср}}^2 = \sum_{j=1}^L S_j^2 / L = 661,7 \text{ (см. нижнюю строку столбца 9).}$$

Таблица 2

Номер группы	$\sum_{i=1}^5 (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \cdot 10^{-12}$	$S_j^2 \cdot 10^{-12}$	$\lg S_j^2$	$(\bar{x}_j - \bar{x}) \cdot 10^{-6}$	$(\bar{x}_j - \bar{x})^2 \cdot 10^{-12}$	$(\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j) \cdot 10^{-6}$	$(\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j) \cdot 10^{-12}$
1	8	9	10	11	12	13	14
1	2740	685	10,8357	+27	729	-42	1761
2	2767	692	8401	-15	225	+6	36
3	2956	739	8986	-9	81	-	-
4	2720	680	8325	+12	144	+21	441
5	2526	632	8000	-6	36	-18	324
6	2875	719	8567	-21	441	-15	225
7	2029	507	7050	-30	900	-9	81
8	2178	544	7360	+2	4	+32	1024
9	2925	731	8639	+24	576	+22	484
10	2752	688	8376	+14	196	-10	100
Σ	26 468					3332	4479
Среднее		661,7	8176				

Примечание. В столбце 10 указана мантисса десятичного логарифма при характеристике, равной (-10); i — номер измерения; j — номер группы измерений.

Значение постоянной C определим по формуле (4.12):

$$C = 1 + \frac{1}{3(10-1)} \left(\frac{10}{5-1} - \frac{1}{50-10} \right) \approx 1,094.$$

По формулам (4.11) и (4.12) вычислим

$$(N - L) \lg S_{\text{ср}}^2 = (50 - 10) \cdot 10,8209 = 32,836 - 400 = -367,164;$$

$$\sum_{j=1}^{10} (n_j - 1) \lg S_j^2 = 10(5 - 1) \cdot 10,8176 = 32,704 - 400 = -367,296;$$

$$\chi^2 = \frac{2,303}{1,094} (32,836 - 32,704) \approx 0,28.$$

При доверительной вероятности $P=0,95$, числе степеней свободы $k = 10 - 1 = 9$ находим по табл. П7 $\chi_{\text{max}}^2 = 16,9$. Поскольку $\chi^2 \leq \chi_{\text{max}}^2$, то следует считать, что все оценки дисперсий групп являются оценками одной и той же дисперсии.

2. Проверим однородность ряда средних, т.е. присутствует ли в результатах вычислений систематическая погрешность. Для этого воспользуемся методом Фишера.

В столбцах 11 и 12 табл. 2 приведены отклонения средних арифметических групп от совокупного среднего и квадраты этих отклонений соответственно.

По формуле (4.5) найдем внутригрупповую дисперсию, используя для этого данные столбца 8:

$$S_{\text{вг}}^2 = \frac{26\,468 \cdot 10^{-12}}{50 - 10} = 662 \cdot 10^{-12} \text{ см}^4.$$

По формуле (4.6) найдем межгрупповую дисперсию, используя данные столбца 12:

$$S_{\text{мг}}^2 = \frac{5 \cdot 3332 \cdot 10^{-12}}{10 - 1} = 1851 \cdot 10^{-12} \text{ см}^4.$$

Отношение дисперсий $F_{9,40} = 1851/662 = 2,8$. Из табл. П10 для уровня значимости $q = 0,05$ и $k_1 = 10 - 1 = 9$, $k_2 = 50 - 10 = 40$ находим $F = 2,12$. Так как $F_{9,40} = 2,8 > F = 2,12$, то расхождение между средними групп велико. Поэтому необходимо продолжить исследование и выяснить, является это расхождение систематическим или случайным. Для этого используем критерий Аббе, который позволяет обнаружить монотонное изменение групповых средних.

3. В столбце 13 табл. 2 приведены значения последовательных разностей средних арифметических групп $d_j = (\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j)$, а в столбце 14 — квадраты этих разностей. Оценку дисперсии по последовательным разностям находим, используя формулу (4.4), данные для которой берем из столбца 14:

$$S_d^2 = \frac{4479}{2 \cdot 9} \cdot 10^{-12} = 249 \cdot 10^{-12} \text{ см}^4.$$

Обычную несмещенную оценку дисперсии средних арифметических вычисляем по формуле (столбец 12)

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{j=1}^L (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = \frac{3332}{10-1} \cdot 10^{-12} = 370 \cdot 10^{-12} \text{ см}^4.$$

Отношение дисперсий будет равно $v = 249/370 = 0,67$.

Из табл. П8 для уровня значимости $q = 0,05$ при $n = 10$ находим минимально допустимое значение $v_q = 0,531$. Поскольку $0,531 < 0,67$, то согласно критерию Аббе рассеивание следует считать случайным, но не систематическим.

4. Найдем дисперсию совокупного среднего. Поскольку это дисперсия нескольких групп измерений, то она вычисляется по формуле

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N(N-1)} \left[\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji} - \bar{x}_j)^2 + \sum_{j=1}^L n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{50 \cdot 49} (26\,468 \cdot 10^{-12} + 5 \cdot 3332 \cdot 10^{-12}) \approx 17,6 \cdot 10^{-12},$$

где численные значения для первого слагаемого взяты из столбца 8, а второго — из столбца 12.

СКО совокупного среднего равно $S_{\bar{x}} = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ см}$.

Пример 4.12. В таблице приведены погрешности трех групп измерений эталона метра. Каждая группа из пяти измерений объединяет результаты, полученные за короткое время.

	Результаты обработки j -й группы измерений		
	1-я	2-я	3-я
Среднее по группам, \bar{x}_j , мкм	-1,462	-1,458	-1,460
Дисперсии внутри групп измерений, $S_j^2 \cdot 10^{-6}$, мкм ²	320	720	3800

Оценить расхождение между средними значениями погрешностей групп измерений длины или установить, есть ли в погрешностях измерений систематическое смещение.

Решение. 1. Найдем попарные отношения дисперсий, используя для оценки рассеянности дисперсий в различных группах между собой F -распределение (метод Фишера) с $k_1 = k_2 = k_3 = 4$ степенями свободы:

$$F_1 = \frac{S_3^2}{S_1^2} = 11,875; \quad F_2 = \frac{S_2^2}{S_1^2} = 2,25; \quad F_3 = \frac{S_3^2}{S_2^2} = 5,278. \quad (1)$$

При уровне значимости $q = 0,05$ ($P = 0,95$) из табл. П10 находим $F_{0,05} = 6,39$. Поскольку $F_1 > F_{0,05}$, $F_2 < F_{0,05}$, $F_3 < F_{0,05}$, то при 5%-ном уровне значимости можно сделать вывод о равенстве дисперсий в 1-й и 2-й и во 2-й и 3-й группах измерений, различие же дисперсий в 1-й и 3-й группах следует признать значимым.

Поскольку не для всех групп дисперсий получены положительные выводы о их равенстве, то значимость различий между средними групп необходимо определить для всех разностей средних групп.

2. Парные значения (4.8) будут равны

$$\begin{aligned} t_{1-2} &= \frac{1,462 - 1,458}{10^{-3} \cdot \sqrt{4 \cdot 320 + 4 \cdot 720}} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 5(5 + 5 - 2)}{5 + 5}} = \\ &= \frac{0,04}{10^{-3} \cdot 2 \cdot 30,659} \cdot 4,472 = 0,278, \\ t_{1-3} &= \frac{1,462 - 1,460}{10^{-3} \cdot \sqrt{320 + 3800}} \cdot 4,472 = 0,07, \\ t_{2-3} &= \frac{1,460 - 1,458}{10^{-3} \cdot \sqrt{720 + 3800}} \cdot 4,472 = 0,067. \end{aligned} \quad (2)$$

При уровне значимости $q = 0,05$ ($P = 0,95$) по табл. П5 для $k = n_1 + n_2 - 2 = 5 + 5 - 2 = 8$ находим, что $t_{0,95} = 2,30$. Поскольку все значения (2) меньше, чем $t_{0,95} = 2,30$, расхождения средних, несмотря на то, что дисперсии 1-й и 3-й групп измерений значимы, являются незначимыми. Существенное различие дисперсий в 1-й и 3-й группах измерений, по-видимому, связано с влиянием каких-то внешних факторов, поскольку оценка расхождения средних с хорошим запасом говорит о их воспроизводимости.

Пример 4.13. Имеются результаты $L = 4$ групп измерений:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 3,392; S_1 = 0,023; n_1 = 5, \\ \bar{x}_2 &= 3,364; S_2 = 0,032; n_2 = 10, \\ \bar{x}_3 &= 3,355; S_3 = 0,025; n_3 = 8, \\ \bar{x}_4 &= 3,345; S_4 = 0,043; n_4 = 5.\end{aligned}$$

Поверить гипотезу о равенстве математических ожиданий четырех групп измерений при уровне значимости $q = 0,05$.

Решение. 1. Вначале проверим, равнорассеяны ли результаты измерений в представленных четырех группах измерений, т.е. проверим гипотезу о равенстве дисперсий. Вычислим отношение $F = S_4^2/S_1^2$ для наиболее отличающихся между собой дисперсий. Это отношение равно 3,49. Задаваясь уровнем значимости $q = 0,05$, определяем по табл. П10 при степенях свободы $k_1 = k_2 = 4$ значение критерия Фишера $F_q = 6,39$.

Поскольку $F < F_q$, то с вероятностью 0,95 (или уровнем значимости 0,05) можно считать, что дисперсии в представленных группах измерений одинаковы.

2. Для определения того, что измеренные средние не содержат систематической погрешности, вычислим отношение $F = S_{\text{мг}}^2/S_{\text{вг}}^2$ в соответствии с формулами (4.5) и (4.6). Для этого вначале определим общее среднее, а затем внутригрупповую и межгрупповую дисперсии:

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \bar{x}_j = \frac{1}{4} (3,392 + 3,364 + 3,355 + 3,345) = \frac{13,456}{4} = 3,364;$$

$$\begin{aligned}S_{\text{вг}}^2 &= \frac{1}{N - L} \sum_{j=1}^L (n_j - 1) S_j^2 = \\ &= \frac{1}{28 - 4} [4(0,023)^2 + 9(0,032)^2 + 7(0,025)^2 + 4(0,043)^2] = \\ &= \frac{1}{24} [2116 + 9216 + 4375 + 7396] \cdot 10^{-6} = 0,963 \cdot 10^{-3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\text{мг}}^2 &= \frac{1}{N - 1} \sum_{j=1}^L (\bar{x}_j - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{3} [5(0,028)^2 + 10 \cdot 0 + 8(-0,009)^2 + 5(-0,019)^2] = \\ &= \frac{1}{3} [3920 + 0 + 648 + 1805] \cdot 10^{-6} = 2,124 \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

Определим отношение дисперсий

$$F = S_{\text{мг}}^2 / S_{\text{вг}}^2 = 2,124 / 0,963 = 2,21.$$

По табл. П10 при уровне значимости $q = 0,05$, степенях свободы $k_1 = L - 1 = 3$, $k_2 = N - L = 28 - 4 = 24$ определим значение критерия Фишера $F_q = 3,01$, что больше $F = 2,21$. Следовательно, со значимостью $0,05$ можно считать, что результаты измерений не искажены присутствием систематической погрешности.

Пример 4.14. Для проверки первичного преобразователя радиоизотопного прибора на временную стабильность (присутствия в результатах измерения систематической погрешности) было проведено четыре группы измерений в течение 10 с для каждого измерения. Результаты каждого измерения скорости счета от фиксированного источника ионизирующего излучения, приведенные к времени, равному 1 с, даны в таблице:

Время измерения, ч (номер группы j)	9.00 (1)	12.00 (2)	15.00 (3)	18.00 (4)
Среднее по группам \bar{N}_j , с ⁻¹	1002	1004	1010	1012
	$\bar{N} = 1007$			
Дисперсия S_j^2 , с ⁻²	100	100	100	100
$N_j - \bar{N}$	-5	-3	3	5
$(N_j - \bar{N})^2$	25	9	9	25

Используя метод дисперсионного анализа, проверить наличие систематической погрешности результатов при уровне значимости принятия решения $q = 0,05$.

Решение. Поскольку объектом измерения является поток излучения, подчиняющийся закону Пуассона, то дисперсия результатов измерения равна $S_N^2 = N$. За 10 с будет зарегистрировано примерно 10^4 импульсов в каждой группе измерений. При этом дисперсия будет также равна 10^4 импульсам. Приведя этот результат к скорости счета, т.е. к времени измерения за 1 с, получим (1000 ± 10) с⁻¹ и дисперсия скорости счета будет равна $S_j^2 = 100$ с⁻².

Измерение пуассоновского потока за время 10 с можно рассматривать как десятикратное ($n_j = 10$) измерение за 1 с в каждой из четырех групп измерений с результатом в каждом измерении, примерно равным средней скорости счета. При этом СКО среднего (средней скорости счета) в каждой группе будет равно [1, 18]

$$S_j = \sqrt{\frac{\bar{N}_j}{n}} \approx \sqrt{\frac{1000}{10}} = 10 \text{ с}^{-1},$$

а дисперсия 100 с^{-2} .

Поскольку результаты измерений равнорассеяны (дисперсии примерно одинаковы для всех четырех измерений), для проверки присутствия в результатах измерения систематической погрешности используем критерий Фишера. Для этого вычислим среднюю дисперсию, характеризующую рассеянность результатов измерения внутри групп (4.5):

$$S_{\text{вр}}^2 = \frac{1}{N - k} \sum_{j=1}^k (n_j - 1) S_j^2 = \frac{1}{40 - 4} \cdot 4 \cdot 9 \cdot 100 = 100 \text{ с}^{-2}$$

и дисперсию, характеризующую рассеянность результатов между четырьмя группами измерений (4.6):

$$S_{\text{мг}}^2 = \frac{1}{L - 1} \sum_{j=1}^L n_j (\bar{N}_j - \bar{N})^2 = \frac{4}{3} \cdot 10 \cdot 68 = 226,7 \text{ с}^{-2},$$

где j — номер группы измерений, всего $L = 4$ группы; $n_j = 10$, так как в данном случае имеются 10 измерений по 1 с каждое; $N = 40$ — общее число измерений; S_j^2 — дисперсия (рассеянность) измерений в каждой j -й группе (см. таблицу); $\bar{N} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \bar{N}_j$ — общее среднее, вычисленное по результатам всех измерений.

Определим отношение $F = 226,7/100 = 2,27$ и критерий Фишера (см. табл. П10) при числе степеней свободы $k_1 = 4 - 1 = 3$, $k_2 = 40 - 4 = 36$ и уровне значимости $q = 0,05$ ($P = 0,95$) $F_q \approx 2,88$. Поскольку $F_q > F$, то принимается с вероятностью 0,95 или значимостью 0,05 гипотеза об отсутствии систематической погрешности в результатах измерений.

Примечания.

1. Из таблицы видно, что среднее увеличивается со временем от 1002 импульсов в секунду в 9.00 до 1012 — к 18.00. Однако значимость этого изменения, как показали оценки по критерию Фишера, не существенна. Это связано с тем, что изменение среднего на 10 импульсов сравнимо с СКО, равным примерно 10 импульсам.

2. Повысим точность получения среднего. Для этого предположим, что время измерения увеличилось в 2 раза, т.е. стало равным 20 с, а вычисленные средние по группам не изменились. Поскольку средние определены за общее время 20 с, а не 10 с, как это было ранее, то дисперсия, приведенная к 1 с, уменьшится в два раза: $S_j^2 = 50$ ($S_j = 7,1$).

Произведя вычисления, подобные проведенным выше, получим:

$$S_{\text{мг}}^2 = 453,3; S_{\text{гр}}^2 = 50; F \approx 9; F_q(k_1 = 3, k_2 = 76, q = 0,05) \approx 2,7 < F = 9.$$

Таким образом, при меньшей дисперсии с уровнем значимости 0,05 можно утверждать, что на результаты измерений накладывается систематическая погрешность (временной дрейф).

Пример 4.15. При определении среднего расстояния, пройденного автомобилем, на 1 л бензина получили следующие результаты измерений (средние и СКО) после пробега пяти автомобилей по грунтовой (индекс 1) и асфальтовой (индекс 2) дорогам:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 21,3 \text{ км/л}, \quad \bar{x}_2 = 22,7 \text{ км/л}; \\ S_1 &= 0,55 \text{ км/л}; \quad S_2 = 0,45 \text{ км/л}. \end{aligned}$$

Проверить гипотезу о том, что характер дорожного покрытия дороги влияет на показатели среднего пробега на 1 л бензина, т.е. на появление систематического смещения в показателях расхода бензина при их оценке для разного типа дорожного покрытия.

Решение. 1. Вначале проверим гипотезу о равномерности результатов в двух группах измерений, задаваясь уровнем значимости $q = 0,05$. При степени свободы $k_1 = k_2 = 4$ находим по табл. П10 критерий Фишера $F_q = 6,39$. Используя результаты измерений, определим соотношение $F = S_1^2/S_2^2 = (1,22)^2 = 1,494$. Поскольку $F_q > F$, то принимается гипотеза о равенстве дисперсий в группах измерений.

2. Для проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий воспользуемся критерием (4.8) для выбранного уровня значимости $q = 0,05$. По табл. П5 найдем, что при степени свободы $k = n_1 + n_2 - 2 = 8$ $t_{1-q} = t_{0,95} = 2,306$.

В соответствии с соотношением (4.8) вычислим

$$\begin{aligned} t_{1-2} &= \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} = \\ &= \frac{22,7 - 21,3}{\sqrt{4 \cdot 0,3025 + 4 \cdot 0,2025}} \sqrt{\frac{5 \cdot 5 (5 + 5 - 2)}{5 + 5}} = \frac{1,4}{2 \cdot 0,710} 4,472 = 4,41. \end{aligned}$$

Поскольку $t_{1-2} > t_{0,95}$ ($4,41 > 2,31$), то с вероятностью 0,95 подтверждается гипотеза о том, что математическое ожидание среднего пробега автомобиля на 1 л израсходованного бензина при движении по грунтовой дороге больше, чем при движении по ас-

фальтовой дороге. Таким образом, систематическая разница в среднем пробеге на 1 л бензина обусловлена типом дорожного покрытия.

4.2. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

Задача 4.1. Известны границы четырех составляющих неисклученных систематических погрешностей $\theta_1 = \pm 0,01$, $\theta_2 = \pm 0,02$, $\theta_3 = \pm 0,03$, $\theta_4 = \pm 0,04$. Определить доверительные границы композиции этих составляющих погрешностей при вероятности $P = 1,0$.

Ответ. $\theta(P = 1) = \pm 0,1$.

Задача 4.2. Известны границы трех составляющих неисклученных систематических погрешностей $\theta_1 = \pm 0,01$, $\theta_2 = \pm 0,03$, $\theta_3 = \pm 0,04$. Определить доверительные границы композиции этих составляющих погрешностей при вероятности $P = 1,0$. Сравнить результаты, полученные с помощью формул (4.1) и (4.2).

Ответ: $\theta(P = 1) \approx \pm 0,077$ по формуле (4.1) и $\theta(P = 1) = \pm 0,08$ по формуле (4.2).

Задача 4.3. Граница композиции из пяти одинаковых неисклученных систематических погрешностей при вероятности $P = 0,99$ составляет 0,08. Определить границу этой композиции погрешностей при доверительной вероятности 0,95.

Ответ. $\theta(0,95) = 0,063$.

Задача 4.4. Имеются результаты двух групп измерений матрицы эталона метра, полученные в разное время. Определить с вероятностью 0,95 (или значимостью 0,05), появилось ли во второй группе измерений, полученной позже первой, изменение среднего, т.е. имеется ли в измерениях систематическая погрешность.

Обработанные данные двух групп измерений приведены в таблице:

Группа измерений	Число измерений в группе	Среднее арифметическое, мкм	СКО, 10^{-3} мкм
1-я	10	1,460	18
2-я	10	1,450	27

Ответ. Расхождение в средних можно считать незначительным (систематическая погрешность отсутствует со значимостью 0,05).

Задача 4.5. Результаты измерений величины x приведены в таблице. Используя метод Аббе, оценить неизменность среднего при уровне значимости 0,05.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Результат измерений	13,4	13,3	14,5	13,8	14,5	14,6	14,1	14,0	14,3	14,3	13,2

Ответ. С вероятностью 0,95 или при уровне значимости 0,05 можно утверждать, что в представленных результатах измерений отсутствует смещение среднего.

Задача 4.6. Имеются 17 результатов измерений величины x , представленных в таблице. Используя метод Аббе, оценить неизменность среднего при уровне значимости 0,01.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
x_i	13,4	13,3	14,5	15,0	14,7	15,2	15,0	15,0	14,7	15,7	15,2	16,0	15,5	15,4	16,1	16,3	16,0

Ответ. В результатах измерений присутствует систематическая погрешность, смещающая среднее результатов измерений.

Задача 4.7. Были проведены 48 измерений размеров детали восьмью различными средствами измерения по шесть измерений каждым СИ. В результате обработки результатов измерений по формулам (4.5) и (4.6) получены следующие данные: внутрисерийная дисперсия $S_{\text{вг}}^2 = 0,033 \text{ мм}^2$ и межсерийная дисперсия $S_{\text{мг}}^2 = 0,182 \text{ мм}^2$. Определить наличие систематической погрешности измерения при уровне значимости $q = 0,05$.

Ответ. Со значимостью 0,05 в результатах измерений обнаруживается систематическая погрешность.

Задача 4.8. Даны результаты двух групп измерений величины Y :

$$Q_1 = 0,0484 \pm 0,0024, n_1 = 4,$$

$$Q_2 = 0,0495 \pm 0,0008, n_2 = 9,$$

которые записаны с доверительной вероятностью $P = 99\%$.

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешностей этих двух групп измерений при доверительной вероятности 0,95.

Примечание. Поскольку результаты измерений представлены в доверительном интервале с вероятностью 0,99, необходимо с помощью табл. П5 определить СКО и дисперсию для каждого из результатов измерений. Например, для первого результата при $P = 0,99$, числе степеней свободы $k = 3$ по табл. П5 находим $t_{0,99} = 5,841$. При этом СКО будет равно $S_1 = 0,0024/5,841 = 4,109 \cdot 10^{-4}$.

Ответ. 1. Оценка равномерности результатов измерений с помощью критерия Фишера показывает, что с вероятностью 0,95 представленные результаты равномерны.

2. Оценка смещения среднего (наличия систематической погрешности в результатах измерений) с помощью соотношения (4.8) показывает, что с вероятностью 0,95 можно говорить о смещенности средних относительно друг друга.

Задача 4.9. Даны результаты пяти групп измерений (среднее, СКО, число измерений в группе):

$$\bar{x}_1 = 100,01, S_1 = 0,02, n_1 = 16;$$

$$\bar{x}_2 = 100,02, S_1 = 0,05, n_2 = 5;$$

$$\bar{x}_3 = 100,05, S_3 = 0,03, n_3 = 10;$$

$$\bar{x}_4 = 100,10, S_4 = 0,06, n_4 = 8;$$

$$\bar{x}_5 = 100,08, S_5 = 0,04, n_5 = 15.$$

Проверить гипотезы о равенстве средних и дисперсий погрешности измерений при $P = 0,95$.

Ответ. 1. Проверка равнорасеянности дисперсий по критерию Фишера показывает, что с доверительной вероятностью 0,95 можно считать результаты измерений неравнорасеянными (со значимостью 0,05).

2. Поскольку результаты измерений неравнорасеяны, то оценку смещения среднего для обнаружения систематической погрешности проводить нельзя.



ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

5.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Прямые измерения можно классифицировать как однократные и многократные, а также как равноточные и неравноточные. Ниже приведены теоретические сведения и примеры, показывающие особенности обработки результатов этих измерений.

5.1.1. Порядок обработки результатов прямых равноточных измерений

Равноточными называются измерения ФВ, выполненные одинаковыми по точности средствами измерения (СИ), в одних и тех же условиях и с одинаковой тщательностью [1–3]. При многократных измерениях дисперсии всех рядов измерений равны между собой. Методы обработки результатов измерений кратко сводятся к следующему (см. ГОСТ 8.207–76).

1. Определяют систематические погрешности, используя методы, рассмотренные в гл. 4. Они исключаются из полученных результатов измерений с помощью введения поправок.

2. Для исправленных результатов измерений вычисляют среднее арифметическое, приравнивая его к истинному значению измеряемой ФВ $\bar{x} = Q$ (см. (3.3)).

3. Вычисляют оценку среднеквадратического отклонения (СКО) результатов измерений S_x и оценку СКО среднего арифметического $S_{\bar{x}}$ (см. (3.4) и (3.5)).

4. Проверяют гипотезу о нормальности распределения результатов измерений, используя различные критерии.

5. Проверяют результаты измерений на наличие грубых погрешностей и промахов (см. разд. 5.1.3). Если таковые обнаружены, их отбрасывают, и вычисления точечных оценок повторяют.

6. Вычисляют доверительные (интервальные) границы случайной погрешности при заданной вероятности (рекомендованы $P = 0,95$;

0,99). Доверительные границы $\varepsilon(P)$ случайной погрешности результата измерения (без учета знака) записывают в виде

$$\varepsilon(P) = t_p S_{\bar{x}}. \quad (5.1)$$

7. Уточняют границы неисключенной систематической погрешности результатов измерений, полагая, что составляющие неисключенной систематической погрешности являются случайными величинами [2, 3, 9–11]. Правила суммирования неисключенных погрешностей приведены в разд. 4.1 настоящего сборника. Доверительную вероятность для вычисления границ неисключенной систематической погрешности принимают той же, что при вычислении доверительных границ случайной погрешности результатов измерения.

8. Для оценки суммарной погрешности измерений используют формулы

$$Q = \bar{x} \pm \Delta(P) \text{ при } P = \dots\%, \quad (5.2)$$

при различных соотношениях между оценкой СКО случайной погрешности и неисключенной систематической погрешностью $\theta(P)/S_{\bar{x}} = \lambda$:

$$\Delta(P) = \varepsilon(P) = t_p S_{\bar{x}} \text{ при } \lambda < 0,8, \quad (5.3)$$

где t_p — по табл. П5 и П6, см. формулы (5.1), (5.2);

$$\Delta(P) = t_{p\Sigma} S_{\Sigma} \text{ при } 0,8 \leq \lambda \leq 8, \quad (5.4)$$

где $t_{p\Sigma}$ и S_{Σ} , см. формулу (5.2);

$$\Delta(P) = \theta(P) \text{ при } \lambda > 8, \quad (5.5)$$

см. формулы (5.2), (4.1) и (4.2).

Примечание. Погрешность, возникающая из-за пренебрежения одной из составляющих погрешности результата измерения при выполнении указанных неравенств, не превышает 15% [11].

Из формул (5.3)–(5.5) видно, что, если неисключенная суммарная погрешность составляет 0,8 от случайной среднеквадратической погрешности (СКП) результата измерения, то она не учитывается в конечном результате. И наоборот, если суммарная неисключенная погрешность в 8 раз превышает СКП результата измерения, то учитывается только систематическая погрешность.

В формуле (5.4)

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\theta}^2 + S_{\bar{x}}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3} + S_{\bar{x}}^2}, \quad (5.6)$$

коэффициент $t_{p\Sigma}$ вычисляют по эмпирической формуле

$$t_{P\Sigma} = \frac{t_P S_{\bar{x}} + \theta(P)}{S_{\bar{x}} + \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3}}}, \quad (5.7)$$

где $\theta(P)$ — граница неисключенной составляющей погрешности, определенной по формуле (4.1) или (4.2) при доверительной вероятности P ; t_P — коэффициент, определенный по таблицам Стьюдента при той же вероятности P .

Примечания: 1. Для понимания физической сущности множителей 0,8 и 8, используемых при сравнении случайной и систематической составляющих погрешностей, рекомендуется воспользоваться достаточно убедительными разъяснениями, приведенными в [5,10, 17].

2. Из формул (5.6) и (5.7), используемых для суммарной оценки неисключенных систематических погрешностей видно, что предполагается равномерное распределение вероятности остатков неисключенных составляющих погрешностей.

9. Результат измерения записывается в виде $\bar{x} \pm \Delta(P)$, а при отсутствии данных о виде функции распределений составляющих погрешности результата — в виде $\bar{x}, S_{\bar{x}}, n, \theta$.

Пример 5.1. Полагая, что доверительные границы композиции случайной и систематической погрешности при изменении λ от 0,8 до 8 можно представить в виде

$$\Delta(P) = K[\varepsilon(P) + \theta(P)] = t_{P\Sigma} S_{\Sigma}, \quad (1)$$

определить коэффициент $K = f(\lambda)$ при $P = 0,95$.

Решение. 1. Используя (5.6) и (5.7), можно записать

$$K[\varepsilon(P) + \theta(P)] = \frac{\varepsilon(P) + \theta(P)}{S_{\bar{x}} + \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3}}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3} + S_{\bar{x}}^2}. \quad (2)$$

Дисперсию суммарной неисключенной систематической погрешности, используя соотношение (4.1), можно представить в виде

$$S_0^2 = \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3} = \frac{\theta^2(P)}{3k^2}. \quad (3)$$

Подставив (3) в соотношение (2) и используя обозначение отношения $\theta(P)/S_{\bar{x}} = \lambda$, получим следующее выражение для определения коэффициента K :

$$K = \frac{\sqrt{1 + (\lambda^2/3k^2)}}{1 + (\lambda/\sqrt{3}k)}. \quad (4)$$

Результаты вычисления коэффициента K при доверительной вероятности $P = 0,95$ ($k = 1,1$, $m > 4$) приведены в таблице:

$\lambda = \theta(P)/S_{\bar{x}}$	0,8	1	2	3	4	5	6	7	8
$K(P = 0,95)$	0,760	0,740	0,707	0,724	0,750	0,775	0,799	0,815	0,830

2. Исследуем изменение коэффициента K в формуле (4) при изменении отношения $x = \lambda/k\sqrt{3}$. Беря первую производную по x в формуле $K = \sqrt{1+x^2}/(1+x)$ и приравняв ее нулю, получаем, что минимум функции имеет место при $x = 1$. Значения $K \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \infty$. В минимуме $K(x = 1) = 0,707$. Таким образом, при всех сочетаниях отношения λ и коэффициента k величина K может изменяться от 0,71 до 1,0. Анализ различных сочетаний λ от 0,8 до 8 и коэффициента k от 1 до 2 показывает, что K может изменяться от 0,71 до 0,84, т.е. на 15,5%.

Пример 5.2. Используя соотношения, определяющие уровень значимости неисключенной систематической погрешности θ по сравнению с СКО среднеарифметического $S_{\bar{x}}$, получить формулу, ограничивающую целесообразность увеличения числа измерений.

Решение. Известно (5.5), что если $\theta/S_{\bar{x}} > 8$, то случайной погрешностью можно пренебречь и точность измерения при этом можно характеризовать только систематической погрешностью. При этом дальнейшее увеличение числа измерений не имеет смысла, так как, хотя это и уменьшит случайную погрешность, но существенно не увеличит общую точность измерения.

Так как $S_{\bar{x}} = S_x/\sqrt{n}$, то из предыдущего неравенства получим соотношение для максимального числа измерений

$$n_{\max} = 64(S_x/\theta)^2.$$

Например, если $S_x = \theta$, то $n_{\max} = 64$.

Пример 5.3. Приведем примеры учета погрешностей измерения, когда имеет место случайная погрешность, распределенная по нормальному закону, и неисключенная систематическая погрешность. Покажем также, как при этом осуществляется запись результатов измерения.

1. Обработка результатов измерений, полученных при калибровке образцовой многогранной призмы, дала следующие результаты отклонения одного из углов от номинального значения:

$$\bar{x} = 1,98''; S_{\bar{x}} = 0,05''; \theta(P = 0,95) = 0,03''; n = 20.$$

Так как

$$\lambda = \frac{\theta(P)}{S_{\bar{x}}} = \frac{0,03}{0,05} = 0,6 < 0,8,$$

то результат измерения может быть представлен в виде

$$\bar{x} = 1,98''; S_{\bar{x}} = 0,05''; n = 20 \text{ или } Q = 1,98'' \pm 0,10'' \text{ при } P = 0,95.$$

Вторая запись означает, что истинное значение измеряемой ФВ с вероятностью 0,95 лежит в доверительном интервале от 1,88'' до 2,08''. Погрешность $\Delta = \pm 0,10''$ вычислена следующим образом. При $P = 0,95$ и $n = 20$ из табл. П5 находим $t_{0,95} = 2,093$ и $\Delta = t_{0,95} S_{\bar{x}} \approx 0,10''$.

В результате измерения не учтена (отброшена как незначимая) систематическая погрешность. Оценим, какова погрешность такой операции. Суммарная СКП в предположении, что распределение систематической погрешности равновероятно, будет равна:

$$\begin{aligned} S_{\Sigma} &= \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + S_{\theta}^2} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + \theta^2(P)/3k^2} = \sqrt{25 \cdot 10^{-4} + 2,47 \cdot 10^{-4}} = \\ &= \sqrt{28,47 \cdot 10^{-4}} \approx 0,052'', \end{aligned}$$

где коэффициент $k = 1,1$ при доверительной вероятности $P = 0,95$. Таким образом, отличие составляет 4%.

2. Допустим, что границы неисключенной систематической погрешности составляют $\theta(P = 0,95) = 0,17''$. При этом отношение $\theta(P)/S_{\bar{x}} = 0,17/0,05 = 3,4 > 0,8$ и результат измерения должен быть записан в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 1,98''; \theta(P = 0,95) = 0,17''; S_{\bar{x}} = 0,05''; n = 20 \\ \text{или } Q &= 1,98'' \pm 0,18'' \text{ при } P = 0,95. \end{aligned}$$

Погрешность $\Delta = \pm 0,18''$, которая является композицией случайной и систематической погрешностей, вычислена следующим образом.

В соответствии с формулами (5.4), (5.6) и (5.7) определим доверительный интервал композиции этих погрешностей:

$$\Delta = t_{P\Sigma} S_{\Sigma} = t_{P\Sigma} \sqrt{S_{\theta}^2 + S_{\bar{x}}^2},$$

где $S_{\theta}^2 = \theta^2(P)/3k^2$; $t_{P\Sigma}$ — коэффициент, соответствующий вероятности P композиции распределений случайных погрешностей и неисключенных остатков систематических погрешностей. Этот коэффициент вычисляют по эмпирической формуле (5.7).

Определим суммарную СКП:

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + S_{\theta}^2} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + \theta^2(P)/3k^2} = \sqrt{25 \cdot 10^{-4} + 79,6 \cdot 10^{-4}} = \\ = \sqrt{104,6 \cdot 10^{-4}} \approx 0,10'',$$

а затем по формулам (5.7) и (5.4) коэффициент t_{Σ} и доверительную границу результата измерения, соответствующую вероятности 0,95:

$$t_{\Sigma} = \frac{0,10 + 0,17}{0,05 + 0,17/\sqrt{3} \cdot 1,21} = \frac{0,27}{0,15} = 1,808; \Delta = 1,808 \cdot 0,10 \approx 0,18''.$$

3. Допустим, что неисключенная погрешность $\theta(P=0,95) = 0,5''$, тогда отношение $\theta(P)/S_{\bar{x}} = 0,5/0,05 = 10 > 8$. При этом можно пренебречь случайной погрешностью и результат измерения записать в виде

$$\bar{x} = 1,98''; \theta(P=0,95) = 0,5''; n = 20.$$

Оценим доверительный интервал для суммарной погрешности, используя формулу (5.4), а также погрешность пренебрежения случайной составляющей погрешности. Для этого, как и прежде, определим суммарную СКП по формуле (5.4), предварительно вычислив

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + S_{\theta}^2} = \sqrt{0,0025 + 0,25/3 \cdot 1,21} = 0,267'', \\ t_{\Sigma} = \frac{0,10 + 0,50}{0,05 + 0,262} = \frac{0,60}{0,312} = 1,923.$$

Тогда доверительный интервал будет равен $\Delta(P=0,95) = 1,923 \times 0,2655 = 0,51''$, что на 2% больше, чем доверительная граница систематической погрешности.

5.1.2. Проверка нормальности результатов измерений

Наиболее полные сведения о результатах измерений можно получить, если известно вероятностное распределение результатов измерений. Возникает вопрос: а почему проверяют именно нормальность распределения результатов и погрешностей измерения? Дело в том, что почти все оценки результатов измерений, многие метрологические формулы, различного рода критерии справедливы, если имеет место нормальное распределение. Оно является фундаментальным распределением природы, и к нему, как уже говорилось, в пределе стремятся многие как симметричные, так и несимметричные непрерывные и дискретные распределения плотности вероятности. Это распределение хорошо изучено и его

характеристики определяются двумя параметрами: математическим ожиданием и дисперсией.

Проверку нормальности распределения проводят различными способами. Наиболее распространенным является способ (при $n > 40$), использующий критерий Пирсона. При меньшем числе измерений ($50 > n > 11$), как правило, используют составной d -критерий. Имеются и другие методы, описанные в [3, 5, 33].

Проверка с использованием критерия Пирсона.

1. Весь диапазон полученных результатов измерений от максимального x_{\max} до минимального значения x_{\min} разбивают на r интервалов шириной Δx_i ($i = 1, 2, 3, \dots, r$) и подсчитывают частоты m_i , равные числу результатов в i -м интервале

$$P_i^* = m_i/n, \quad (5.8)$$

где n — общее число измерений. Распределение частоты по интервалам образует статистическое распределение результатов измерений. Рекомендуется число интервалов r выбирать в зависимости от числа измерений [3] по таблице:

№ n/n	Число измерений n	Количество интервалов r
1	40–100	7–9
2	100–500	8–12
3	500–1000	10–16
4	1000–10000	12–22

2. Строят ступенчатое распределение результатов измерений, откладывая по оси ординат среднее значение плотности распределения в интервале Δx_i (рис. 5.1):

$$p_i^* = \frac{P_i^*}{\Delta x_i} = \frac{m_i}{\Delta x_i n}. \quad (5.9)$$

Площадь под всей гистограммой, являющейся экспериментальной функцией плотности распределения вероятности результатов измерений, должна равняться единице.

3. По виду гистограммы подбирается теоретическая кривая распределения. Если гистограмма подобна нормальному распределению, то, вычисляя среднее арифметическое \bar{x} и дисперсию результатов измерений S_x , строят теоретическую кривую (рис. 5.1)

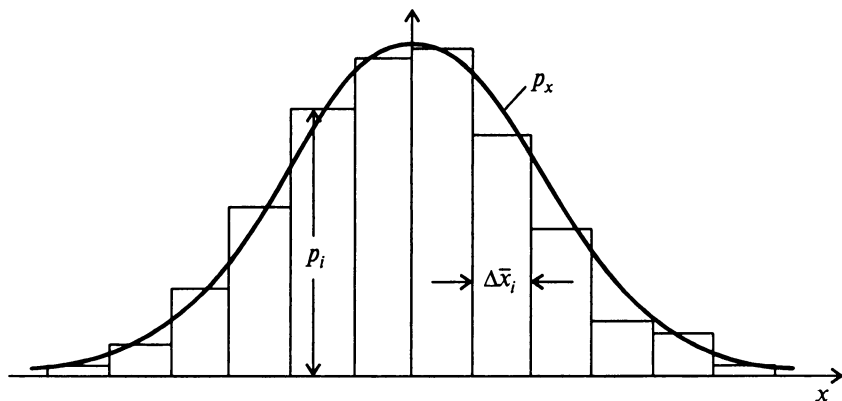


Рис. 5.1. Гистограмма и теоретическое (нормальное) распределение результатов измерений

$$p(x) = \frac{1}{S_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2S_x^2} \right]. \quad (5.10)$$

4. Проверяют выдвинутую гипотезу о нормальности распределения результатов измерения, используя метод Пирсона. Расхождение между экспериментальной гистограммой и выбранной теоретической кривой в этом методе оценивается с помощью величины

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^r C_i (P_i^* - P_i)^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}, \quad (5.11)$$

где C_i — коэффициент весов разрядов, выбранный для усиления веса составляющих с малой вероятностью в виде $C_i = n/P_i$; P_i^* — значение вероятности в i -м интервале экспериментальной гистограммы; P_i — значение вероятности в i -м интервале, определенное по теоретической кривой как площадь под i -м интервалом:

$$P_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx. \quad (5.12)$$

Мера расхождения χ_k^2 — величина случайная, и плотность вероятности распределения этой величины подчиняется распределению Пирсона при $m_i > 5$ и $n \rightarrow \infty$ (реально при $n > 40$).

Заметим, что число степеней свободы здесь $k = r - 3$, поскольку результаты измерений использованы для вычисления среднего, дисперсии и общей площади под гистограммой.

Задаваясь уровнем значимости $q = 1 - P = \int_{\chi_{k,q}}^{\infty} p(\xi) d\xi$, находят по табл. П7 значение $\chi_{k,q}^2$, соответствующее значению q или вероятности P . Если $\chi_k^2 \leq \chi_{k,q}^2$, то распределение результатов измерений принимают нормальным и гипотеза о нормальности распределения считается верной. При этом возможны ошибки. В соответствии с математической статистикой, если отвергается правильная гипотеза, то имеют дело с ошибкой 1-го рода, а если принимается неверная гипотеза (распределение нормально, но это отвергается в результате исследований), то имеет место ошибка 2-го рода.

Пример 5.4. Погрешности 500 результатов измерений дальности до цели радиодальномером приведены в табл. 1. Пользуясь критерием Пирсона с уровнем значимости 0,01, проверить согласованность теоретического и экспериментального распределений.

Таблица 1

Интервал погрешности измерения дальности $\Delta\delta_i$, м	-25; -15	-15; -5	-5; 5	5; 15	15; 25
Количество погрешностей в интервале m_i	50	130	200	100	20
Относительная частота P_i^*	0,10	0,26	0,40	0,20	0,04

По условию задачи число интервалов $r = 5$, а длина интервалов $\Delta\delta_i = 10$ м. Предположим, что экспериментальное распределение является нормальным. Для этого, пользуясь экспериментальными данными, определяем оценки среднего и дисперсии. Поскольку данные табл. 1 сгруппированы по интервалам, то вычислим эти оценки по формулам

$$\bar{\delta} = \sum_{i=1}^5 \delta_i P_i^* = -20 \cdot 0,10 - 10 \cdot 0,26 - 0 \cdot 0,40 + 10 \cdot 0,20 + 20 \cdot 0,04 = -1,8 \text{ м,}$$

$$S_{\delta}^2 = \sum_{i=1}^5 \delta_i^2 P_i^* - (\bar{\delta})^2 = 400 \cdot 0,10 + 100 \cdot 0,26 + 100 \cdot 0,2 + 400 \cdot 0,04 - 3,24 = 98,76 \text{ м,}$$

где δ_i — середины интервалов: -20, -10, 0, 10, 20; $S_x = 9,93$ м.

Тогда выражение оценок плотности вероятности и функции распределения будут иметь вид

$$p(\delta) = \frac{1}{S_{\delta} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\delta - \bar{\delta})^2}{2S_{\delta}^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 98,76}} \exp \left[-\frac{(\delta + 1,8)^2}{2 \cdot 98,76} \right];$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z p(\delta) d\delta = \Phi \left(\frac{\delta + 1,8}{9,93} \right).$$

Для определения меры расхождения (5.11) необходимо вычислить вероятности

$$P_i = \Phi \left(\frac{\delta_{i+1} - \bar{\delta}}{S_{\delta}} \right) - \Phi \left(\frac{\delta_i - \bar{\delta}}{S_{\delta}} \right),$$

где δ_i, δ_{i+1} — границы i -го интервала, а $\Phi(z)$ находится из табл. П3. Например, для четвертого интервала (5; 15) имеем

$$P_4 = \Phi \left(\frac{15 + 1,8}{9,93} \right) - \Phi \left(\frac{5 + 1,8}{9,93} \right) = 0,2012.$$

Результаты вычислений остальных вероятностей сведены в табл. 2.

Таблица 2

$\delta_i, \text{ м}$	-25; -15	-15; -5	-5; 5	5; 15	15; 25
P_i	0,0821	0,2818	0,3794	0,2012	0,0417

Подставив соответствующие значения в формулу (5.11), получим расхождение

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i} = 3,427.$$

Поскольку число степеней свободы $k = 2$, то из табл. П7 для уровня значимости $q = 0,01$ или вероятности принятия гипотезы верной $P = 0,99$ находим $\chi_{k,q}^2 = \chi_{2;0,01}^2 = 9,21$.

Так как, $\chi_k^2 = 3,427 < \chi_{k,q}^2 = 9,21$, то гипотезу о том, что результаты измерения дальности распределены по нормальному закону, можно считать правдоподобной.

Проверка с помощью составного критерия. Вычисляется статистика

$$d = \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| / \sqrt{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (5.13)$$

квантили (квантиль — абсцисса, соответствующая определенной вероятности) распределения которых приведены в табл. П11.

Если при данном числе измерений n и выбранном уровне значимости q_1 соблюдается условие $d_{1-0,5q} < d \leq d_{0,5q}$ то гипотеза о нормальности распределения на основании первого критерия принимается, если — нет, то отвергается. Гипотеза по второму критерию принимается, если не более m разностей $|x_i - \bar{x}|$ измерений превышают уровень $z_{0,5(1+P)} S_x$, где S_x — оценка СКО результатов измерений, $z_{0,5(1+P)}$ — квантиль интегральной функции нормированного нормального распределения, определяемая по табл. П3 или П4 при $\Phi(z_{0,5(1+P)}) = 0,5(1+P)$. Величина P находится при заданном уровне значимости q_2 по данным табл. П12.

Распределение результатов измерений считается отличным от нормального, если не выполняется хотя бы один из рассмотренных критериев. Уровень значимости составного критерия $q \leq q_1 + q_2$ или вероятность того, что распределение результатов измерений нормально, $P = 1 - q$.

Пример 5.5. Проверить гипотезу о нормальности распределения небольшой группы измерений, результаты которых приведены в таблице:

№	Изменная ФВ x_i	Случайное отклонение от среднего $v_i \cdot 10^{-3}$	$v_i^2 \cdot 10^{-6}$	№	Изменная ФВ x_i	Случайное отклонение от среднего $v_i \cdot 10^{-3}$	$v_i^2 \cdot 10^{-6}$
1	8,906	-13	169	13	8,914	-5	25
2	8,915	-4	16	14	8,925	6	36
3	8,913	-6	36	15	8,923	4	16
4	8,921	2	4	16	8,917	-2	4
5	8,925	6	36	17	8,918	-1	1
6	8,929	10	100	18	8,921	2	4
7	8,917	-2	4	19	8,920	1	1
8	8,915	-4	16	20	8,920	1	1
9	8,919	0	0	21	8,914	-5	25
10	8,914	-5	25	22	8,917	-2	4
11	8,921	2	4	23	8,916	-3	9
12	8,920	1	1	24	8,935	16	256

Решение. 1. Для проверки гипотезы с помощью составного критерия предварительно вычислим среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{24} x_i = 8,91896 \approx 8,919$$

и смещенную S^* и несмещенную S оценки СКО ($v_i = x_i - \bar{x}$)

$$S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{24} v_i^2} = 5,75 \cdot 10^{-3}, \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1} v_1^2} = 5,87 \cdot 10^{-3}.$$

2. Для проверки гипотезы о нормальности распределения по первому критерию вычислим статистику

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{24} |x_i - \bar{x}|}{nS^*} = \frac{103 \cdot 10^{-3}}{24 \cdot 5,75 \cdot 10^{-3}} = 0,746$$

и при заданном уровне значимости $q_1 = 0,02$ и числе измерений $n = 24$ находим из табл. П11 квантили $d_{0,01}(0,5q_1) = 0,897$ и $d_{0,99}(1 - 0,5q_1) = 0,690$.

Сравнение статистики d с квантилями показывает, что $0,690 < d = 0,746 < 0,897$. Это означает, что в соответствии с первым критерием (при уровне значимости 0,02) результаты измерений распределены по нормальному закону.

3. Для проверки нормальности распределения в соответствии со вторым критерием необходимо оценить допустимое число абсолютных разностей результатов измерений $|x_i - \bar{x}|$ при заданном уровне значимости, превысившем уровень $z_{0,5(1+P)}S$. При $q_2 = 0,02$, $n = 24$ находим по табл. П12 $P = 0,98$, $m = 2$. По табл. П4 находим значение квантили $z_{0,5(1+P)} = z_{0,99} = 2,3267$ и значение произведения $z_{0,99}S = 2,3267 \cdot 0,00587 = 0,01366 = 13,6 \cdot 10^{-3}$. Анализ результатов измерений, приведенных в таблице, показывает, что только результат под номером 24 превышает $13 \cdot 10^{-3}$, что допустимо, чтобы признать распределение результатов измерения близким к нормальному в соответствии со вторым критерием при уровне значимости 0,02 (в соответствии со вторым критерием можно допустить превышение двух измерений).

4. Таким образом, оба критерия говорят о том, что распределение полученных экспериментальных данных можно признать нормальным с уровнем значимости $q \leq q_1 + q_2 = 0,04$. Однако, если бы хотя бы один из двух критериев не был бы удовлетворен, распределение нельзя было бы признать нормальным.

Другие методы проверки нормальности распределения. Рассмотрим примеры, в которых для проверки гипотезы о нормальности распределения результатов измерения используются критерии оценки моментов нормального распределения, метода Колмогорова и непараметрического метода оценки.

Пример 5.6. Размер частиц никелевого катализатора измерен с точностью до 1 мкм. На выборке объемом $n = 200$ проверить, подчиняется ли распределение размеров частиц нормальному закону. В табл. 1 приведены отклонения размеров частиц катализатора от номинального, результаты сгруппированы в 10 интервалов длиной $h = 5$ мкм.

Таблица 1

Интервал h	Границы интервала $x_{i-1} - x_i$	Середина интервала x_i	Число точек в интервале t_i	Относительная частота p^*
1	-20 -15	-17,5	7	0,035
2	-15 -10	-12,5	11	0,055
3	-10 -5	-7,5	15	0,075
4	-5 0	-2,5	24	0,129
5	0 5	2,5	49	0,245
6	5 10	7,5	41	0,205
7	10 15	12,5	26	0,130
8	15 20	17,5	17	0,085
9	20 25	22,5	7	0,035
10	25 30	27,5	3	0,015

Решение. 1. Вначале проверим гипотезу нормального распределения размера частиц катализатора, определив коэффициенты асимметрии и эксцесса. Известно, что для нормального распределения коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю [3, 5, 33].

Выборочные коэффициенты эксцесса и асимметрии определяются по формулам [33]

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{\tilde{\mu}_3}{S_x^2} = \frac{1}{nS_x^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3, \quad (1)$$

$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{\tilde{\mu}_4}{S_x^4} = \frac{1}{nS_x^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - 3. \quad (2)$$

Известно также, что дисперсии этих величин равны

$$D(\tilde{\gamma}_1) = \frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}, \quad (3)$$

$$D(\tilde{\gamma}_2) = \frac{24(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}. \quad (4)$$

Зная оценки дисперсий $D(\tilde{\gamma}_1)$ и $D(\tilde{\gamma}_2)$, можно определить, значимо ли выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса отличаются от нуля. Если

$$|\tilde{\gamma}_1| \leq 3\sqrt{D(\tilde{\gamma}_1)}, \quad (5)$$

$$|\tilde{\gamma}_2| \leq 5\sqrt{D(\tilde{\gamma}_2)}, \quad (6)$$

то наблюдаемое распределение можно считать нормальным.

В табл. 2 приведены предварительные вычисления для определения выборочного (оценок) среднего, дисперсии, третьего и четвертого моментов случайной величины x по формулам

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{10} p_i^* x, \quad S_x^2 = \sum_{i=1}^{10} p_i^* (x_i - \bar{x})^2, \quad \tilde{\mu}_3 = \sum_{i=1}^{10} p_i^* (x_i - \bar{x})^3, \quad \mu_4 = \sum_{i=1}^{10} p_i^* (x_i - \bar{x})^4,$$

где p_i^* — относительная частота, определяемая формулой $p_i^* = m_i/n$.

В результате вычислений получим $\bar{x} = 4,30$ мкм, $S_x = 9,71$ мкм, $\tilde{\mu}_3 = -114,2$ мкм³, $\mu_4 = 25\,375$ мкм⁴. Определим по формулам (1) и (2) коэффициенты асимметрии и эксцесса $\tilde{\gamma}_1 = 0,1247$, $\tilde{\gamma}_2 = 0,1455$, а по формулам (3) и (4) оценки дисперсий

$$D(\tilde{\gamma}_1) = \frac{6(200-1)}{(200+1)(200+3)} = 0,029; \quad \sqrt{D(\tilde{\gamma}_1)} \approx 0,17;$$

$$D(\tilde{\gamma}_2) = \frac{24 \cdot 20(200-2)(200-3)}{(200+1)^2(200+3)(200+5)} = 0,113; \quad \sqrt{D(\tilde{\gamma}_2)} \approx 0,34.$$

Таким образом, используя формулы (5) и (6), имеем

$$3\sqrt{D(\tilde{\gamma}_1)} = 0,51; \quad |\tilde{\gamma}_1| = 0,1247 < 3\sqrt{D(\tilde{\gamma}_1)},$$

$$5\sqrt{D(\tilde{\gamma}_2)} = 1,70; \quad |\tilde{\gamma}_2| = 0,1455 < 5\sqrt{D(\tilde{\gamma}_2)}.$$

Таблица 2

№	x_i	$p_i^* x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$	$p_i^* (x_i - \bar{x})^2$	$p_i^* (x_i - \bar{x})^3$	$p_i^* (x_i - \bar{x})^4$
1	-17,5	-0,6125	21,8	475,2	-10360	225835	17,43	-362,6	7904,9
2	-12,5	-0,6875	-16,8	282,2	-4742	79659	15,52	-260,8	4381,2
3	-7,5	-0,5675	-11,8	139,2	-1643	19388	10,44	-123,2	1454,1
4	-2,5	-0,3000	-6,8	46,2	-314	2138	5,54	-37,7	256,6
5	2,5	-0,6125	-1,8	3,2	-6	10	0,78	-1,5	2,4
6	7,5	1,5375	3,2	10,2	30	105	2,09	6,2	21,5
7	12,5	1,6250	8,2	67,2	551	4125	8,74	71,6	587,7
8	17,5	1,4875	13,2	174,2	2300	30300	14,81	195,5	2580,6
9	22,5	0,7875	18,2	331,2	6029	109720	11,59	211,0	3840,2
10	27,5	0,4125	23,2	532,2	12487	289702	7,98	187,3	4345,5
Σ		4,295					94,92	-114,2	25375

Следовательно, наблюдаемое распределение можно считать нормальным.

2. Проверим полученный вывод о нормальности распределения размеров частиц катализатора, используя критерий Пирсона. Для удобства расчетов составим табл. 3.

Таблица 3

i	Границы интервалов	m_i	np_i	$nF_n(x)$	$nF(x)$	$n F_n(x) - F(x) $	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	$-\infty$ -15	7	4,7	7	4,7	2,3	1,12
2	-15 -10	11	9,5	18	14,2	3,8	
3	-10 -5	15	24,2	33	33,7	0,7	1,18
4	-5 0	24	31,6	57	65,3	8,3	1,81
5	0 5	49	40,3	106	105,6	0,4	1,87
6	5 10	41	33,9	147	144,5	2,5	0,11
7	10 15	26	29,2	173	173,7	0,7	0,20
8	15 20	17	15,6	190	189,3	0,7	0,002
9	20 25	7	7,7	197	197,0	0,0	0,001
10	25 $+\infty$	3	3,0	200	200	0,0	

Вероятности p_i , соответствующие теоретической кривой нормального распределения с средним $\bar{x} = 4,3$ мкм и $S_x = 9,71$ мкм, определим по формуле (5.12). Например, для второго интервала имеем

$$p_2 = \Phi\left(\frac{-10 - 4,3}{9,71}\right) - \Phi\left(\frac{-15 - 4,3}{9,71}\right) = \Phi\left(\frac{-14,3}{9,71}\right) - \Phi\left(\frac{-19,3}{9,71}\right) = \\ = \Phi(-1,472) - \Phi(-1,987) \approx 0,0475$$

и после умножения $np_2 = 200 \cdot 0,0475 = 9,5$. Так как для первого и последнего интервалов $np_i < 5$, первые два и последние два интервала объединены в один. Величина χ^2 определяется по формуле (5.11)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \approx 6,3.$$

По табл. П7 при числе степеней свободы $k = 8 - 3 = 5$ определим $\chi_{0,95}^2 = 11,1$. Поскольку $\chi^2 = 6,3 < 11,1 = \chi_{0,95}^2$, то критерий Пирсона позволяет считать экспериментальное распределение размеров частиц катализатора нормальным.

3. Для применения критерия Колмогорова необходимо определить наибольшее абсолютное отклонение выборочной функции распределения $F_n(x)$ от генеральной $F(x)$, т.е. экспериментальной функции интегрального распределения результатов измерения от теоретической функции, которая предлагается для сравнения: $\Delta = \max |F_n(x) - F(x)|$. Затем вычисляется $\lambda = \Delta \sqrt{n}$. Квантили λ_{1-q} распределения Колмогорова, приведенные в табл. 4, сравниваются со значением λ , вычисленным по экспериментальным данным.

Таблица 4

q	λ_{1-q}	q	λ_{1-q}	q	λ_{1-q}
0,99	0,44	0,50	0,83	0,15	1,14
0,90	0,57	0,40	0,89	0,10	1,22
0,80	0,69	0,30	0,97	0,05	1,36
0,70	0,71	0,25	1,02	0,02	1,52
0,60	0,77	0,20	1,07	0,01	1,63

Если $\lambda < \lambda_{1-q}$, то гипотеза о совпадении теоретического закона распределения $F(x)$ с выборочным $F_n(x)$ не отвергается. При $\lambda \geq \lambda_{1-q}$ гипотеза отклоняется (или считается сомнительной). Уровень значимости q при применении критерия Колмогорова выбирают обычно равным 0,2–0,3.

В столбцах 5, 6 и 7 табл. 3 приведены вычисления критерия Колмогорова. Данные в столбце 5 вычислены следующим образом: первая строка — 7; вторая — $18 = 7 + 11$; третья — $33 = 18 + 15$; четвертая — $57 = 33 + 24$ и т.д., данные в столбце 6 — следующим образом: 4,7; $14,2 = 4,7 + 9,5$; $33,7 = 14,2 + 19,5$ и т.д. Для применения критерия Колмогорова в столбце 7 приведены разности $n|F_n(x) - F(x)|$. Видно, что $n\Delta = \max n|F_n(x) - F(x)| = 8,3$.

Для принятия решения по критерию Колмогорова найдем $\lambda = n\Delta/\sqrt{n} = 0,59$. По табл. 4 для уровня значимости $q = 0,2$ находим $\lambda_{0,8} = 1,07$. Поскольку $\lambda = 0,59 < \lambda_{0,8}$, то критерий Колмогорова также позволяет считать рассматриваемое распределение нормальным.

Пример 5.7. При малом числе измерений для быстрой, но грубой оценки нормальности распределения результатов измерений иногда используют так называемый непараметрический метод, который не требует больших объемов вычислений и определения оценок математического ожидания и СКО.

Для проверки нормальности распределения результатов измерений вначале результаты располагают в вариационный ряд в порядке их возрастания, а затем строится статистическая интегральная функция распределения

$$F_n(x_k) = k/(n + 1),$$

где $k = 1, 2, \dots, n$; n — общее число измерений.

Функция $F_n(x_k)$ — ступенчатая функция, скачки которой равны $1/(n + 1)$. Если в этом ряду имеются одинаковые числа, то скачок возрастает на количество этих чисел.

Затем теоретическую функцию распределения приравнивают к статистической $\Phi(z_k) = F_n(x_k)$ и для каждого x_k по табл. ПЗ находят соответствующее значение z_k . Поскольку переменные z_k и x_k связаны соотношением $z_k = (x_k - m_x)/\sigma$, то зависимость $z_k = f(x_k)$ при нормальном распределении должна иметь вид прямой линии или, точнее говоря, точки с координатами z_k и x_k должны расположиться вдоль одной прямой линии. Эта прямая по оси абсцисс отсекает отрезок, примерно равный математическому ожиданию, а котангенс угла наклона прямой к оси абсцисс равен примерно СКО ряда измерений. Если расположение точек существенно отличается от прямолинейного, то распределение результатов измерений отличается от нормального.

Рассмотрим численный пример. В первом столбце таблицы приведены результаты 19 измерений длины детали. Проверить нормальность распределения результатов измерений.

$x_k, \text{ мм}$	$\Phi(z_k) = F_n(x_k)$	z_k
18,303	0,05	-1,6449
18,304	0,10	-1,2816
18,305 два одинаковых результата	0,20	-0,8416
18,306 два одинаковых результата	0,30	-0,5244
18,307 два одинаковых результата	0,40	-0,2533
18,308 четыре одинаковых результата	0,60	0,2533
18,309 три одинаковых результата	0,75	0,6745
18,310 два одинаковых результата	0,85	1,0364
18,311	0,90	1,2816
18,312	0,95	1,6449

Результаты вычислений по изложенной выше методике представлены во втором и третьем столбцах таблицы. На рис. 5.2 приведена зависимость $z_k = f(x_k)$. Видно, что точки этой зависимости довольно близко расположены к прямой линии, поэтому распределение можно признать нормальным. Для подтверждения этого вывода можно использовать, например, составной критерий.

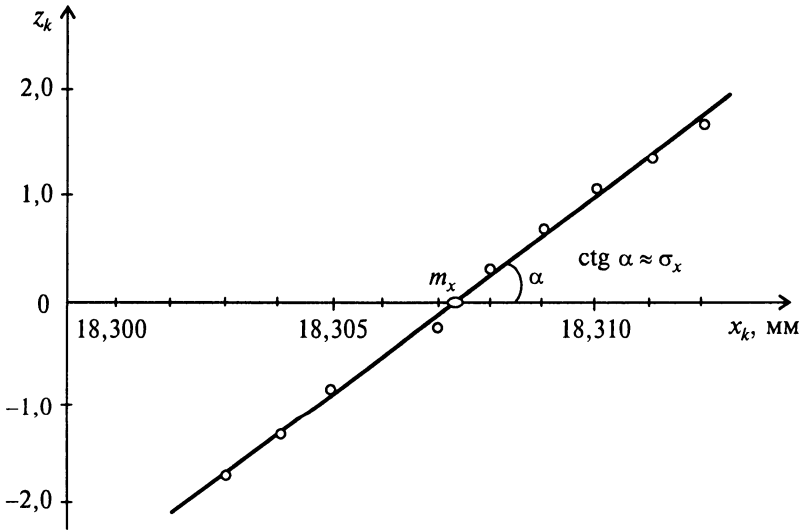


Рис. 5.2. Зависимость $z_k(x_k)$

5.1.3. Анализ числовых результатов измерений

Обнаружение грубых погрешностей. Грубыми называются погрешности, явно выходящие за допустимые пределы. Со статистических позиций вопрос об обнаружении и отбрасывании грубых погрешностей ставится как вопрос принятия или непринятия выдвинутой статистической гипотезы.

Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат измерения x_i не содержит грубой погрешности. Для проверки гипотезы составляются соотношения

$$v = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{S_x} \quad \text{или} \quad v = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{S_x}, \quad (5.14)$$

поскольку именно максимальные x_{\max} и минимальные x_{\min} результаты измерений в общем ряду измерений могут оказаться

сомнительными. Для соотношений (5.14) составлены таблицы, позволяющие при заданной доверительной вероятности $P = 1 - q$ или уровне значимости q определить граничное значение v_p , при котором результаты измерения x_{\max} или x_{\min} могут считаться не искажающими общие результаты измерения. Таким образом, при $v < v_p$ гипотеза принимается, в противном случае, результат измерений может быть отброшен. Вероятность принятия этого решения равна P .

Граничные значения v_p , соответствующие заданным значениям P или q при известном числе измерений n , приведены в табл. П9. Этот метод используется при числе измерений $n < 25$.

Существуют также другие методы анализа результатов измерения на наличие в них грубых погрешностей [5, 12].

Пример 5.8. При измерении температуры были получены результаты, представленные во втором столбце таблицы (с. 128).

Требуется определить, не являются ли результаты 8-го и 3-го измерений источниками грубых погрешностей.

Решение. 1. Находим для всех результатов измерений среднее арифметическое и среднеквадратическое отклонение результатов измерений: $\bar{t} = 20,4^\circ\text{C}$; $S_t = 0,04^\circ\text{C}$ Если принять доверительную вероятность $P = 0,95$, то, как следует из табл. П9 при $n = 15$, $v_{0,95} = 2,493$ и из результатов измерений,

$$v_1 = \frac{\bar{t} - t_{\min}}{S_t} = \frac{\bar{t} - t_8}{S_t} = \frac{20,40 - 20,30}{0,040} = 2,68 > v_{0,95} = 2,493,$$

$$v_2 = \frac{t_{\max} - \bar{t}}{S_t} = \frac{t_3 - \bar{t}}{S_t} = \frac{20,50 - 20,40}{0,040} = 2,195 < v_{0,95} = 2,493.$$

Видно, что 8-й результат с вероятностью 0,95 может быть отброшен, так как он в соответствии с принятым критерием является причиной грубой погрешности. В то же время 3-й результат в ряду 15 измерений не может быть признан в качестве грубого. Если отбросить 8-й результат и рассмотреть только 14 измерений, то получим следующие оценки среднего арифметического и среднеквадратического отклонения результатов измерений: $\bar{t} = 20,418^\circ\text{C}$; $S'_t = 0,028^\circ\text{C}$.

i	$t_i, ^\circ\text{C}$	v_i	$(v_i)^2 \cdot 10^{-4}$	v_i'	$(v_i')^2 \cdot 10^{-6}$	v_i''	$(v_i'')^2 \cdot 10^{-6}$
1	20,42	+0,01	1	+0,002	4	+0,008	64
2	20,43	+0,02	4	+0,012	144	+0,018	324
3	20,50	+0,09	81	+0,082	6724		
4	20,43	+0,02	4	+0,012	144	+0,018	324
5	20,42	+0,01	1	+0,002	4	+0,008	64
6	20,43	+0,02	4	+0,012	144	+0,018	324
7	20,39	-0,02	4	-0,028	784	-0,022	484
8	20,30	-0,11	121				
9	20,40	-0,01	1	-0,018	324	-0,012	144
10	20,43	+0,02	4	+0,012	144	+0,018	324
11	20,42	+0,01	1	+0,002	4	+0,008	64
12	20,41	0	0	-0,008	64	-0,002	4
13	20,39	-0,02	4	-0,028	784	-0,022	484
14	20,39	-0,02	4	-0,028	784	-0,022	484
15	20,40	-0,01	1	-0,018	324	-0,012	144
Σ	306,16		235		10 376		3232
Сумма 306,16; сумма без измерения № 3: 285,86; сумма без измерений № 3 и 8: 265,36							
$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{15} t_i = \frac{306,16}{15} = 20,410 \quad \bar{t}' = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} t_i = 20,418 \quad \bar{t}'' = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} t_i = 20,412$							
$S_t = 0,041 \quad S_t' = 0,028 \quad S_t'' = 0,016$							

2. Оценим результат 3-го измерения с точки зрения его аномальности в ряду оставшихся 14 результатов измерений:

$$v_3 = \frac{t_{\max} - \bar{t}'}{S_t'} = \frac{20,500 - 20,418}{0,028} = 2,92 > v_{0,95} = 2,461.$$

Для исправленных 13 результатов измерений получим $\bar{t}'' = 20,412^\circ\text{C}$; $S_t'' = 0,016^\circ\text{C}$

Пример 5.9. При большом числе измерений ($n > 50$), подчиняющихся нормальному закону распределения, иногда используется правило 3σ (трех сигм). По этому критерию считается, что результат измерений x_i , возникший с вероятностью $q \leq 0,03$, маловероятен, и его можно считать промахом, если $|\bar{x} - x_i| > 3\sigma_x$. Рассмотрим численный пример.

Определить, не содержится ли ошибок в следующих экспериментальных данных, полученных при измерении мгновенного значения шумового напряжения в отсутствии полезного сигнала: $-4,2; 0,3; 5,7; -1,6; -7,2; 3,9; 2,2; -0,1; 1,4$ мВ, если мощность электрического шума, выделяемая на нагрузке $R = 1$ Ом, равна $W = 4$ мкВт.

Решение. Среднеквадратическое отклонение мгновенного значения шумового напряжения определим из формулы $W = \sigma^2/R$. Подставляя измеренные значения в эту формулу, получаем $\sigma^2 = WR = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 4 \cdot 10^{-6}$ В. Мгновенное значение шумового напряжения будет равно 2 мВ. По «правилу трех сигм» результаты измерений мгновенного значения шумового напряжения не должны превышать 6 мВ. В экспериментальном ряду значений напряжения пятый результат ($-7,2$ мВ) является сомнительным. Возможно, в момент измерения на СИ воздействовала помеха. Необходимо увеличить количество измерений или использовать другой способ оценки результатов измерения на наличие грубой ошибки.

Критерий ничтожных погрешностей. Анализ составляющих суммарной погрешности позволяет определить также те погрешности, которые могут быть удалены из общей суммы погрешностей. При этом используют критерий ничтожных погрешностей, который определяет: *если данная погрешность меньше одной трети суммы погрешностей, то эта погрешность считается ничтожно малой и может быть исключена.* Основанием для исключения этой погрешности является тот факт, что при округлении общей суммы погрешностей ничтожно малая составляющая погрешности не повлияет на результат округления. Отметим, что сравнение производится между случайными составляющими погрешностей и этот критерий можно применять к нескольким погрешностям.

Пример 5.10. Имеются пять составляющих случайных погрешностей измерения длины: $\sigma_1 = 5,3 \cdot 10^{-3}$ м, $\sigma_2 = 6,1 \cdot 10^{-3}$ м, $\sigma_3 = 1,0 \cdot 10^{-3}$ м, $\sigma_4 = 1,0 \cdot 10^{-3}$ м, $\sigma_5 = 8,7 \cdot 10^{-3}$ м. Определить составляющие погрешностей, которые можно признать ничтожными.

Решение. Результирующая (суммарная) погрешность равна

$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{j=1}^5 \sigma_j^2} = 11,96 \cdot 10^{-3}$ м. Третья и четвертая составляющие погрешностей меньше, чем другие составляющие, и поэтому оценим их значимость по сравнению с общей суммой погрешности. Сумма оцениваемых погрешностей составляет $\sqrt{\sigma_3^2 + \sigma_4^2} = 1,41 \cdot 10^{-3}$ м,

что гораздо меньше, чем одна треть общей погрешности ($\approx 4 \cdot 10^{-3}$ м). При дальнейшей обработке результатов измерений можно не учитывать третью и четвертую составляющие погрешности, Действительно, без этих составляющих общая погрешность равна $11,87 \cdot 10^{-3}$ м, что на 0,75% меньше с учетом третьей и четвертой составляющих погрешностей.

Округление результатов измерений. Округление производят только после проведения окончательных расчетов, поскольку при округлении возникает дополнительная погрешность, не превышающая половины единицы разряда последней значащей цифры округленного числа. Все промежуточные вычисления осуществляются с одним-двумя лишними знаками, иначе окончательный результат может быть неоправданно искажен. В основе подхода к округлению лежит тот факт, что получение результата измерения ограничено реальной погрешностью (грубо говоря, от прибавления лишних цифр точность измерения не возрастет). Установлены следующие правила округления [4, 5].

1. Поскольку погрешность характеризует недостоверность последних цифр числового результата, то значение результата должно оканчиваться десятичным знаком того же разряда, что и значение погрешности (например, если в результате вычислений получено значение $x = 63,1322$, а погрешность равна $\pm 0,2$, то результат измерения должен быть записан в виде $x = 63,1 \pm 0,2$);

2. Погрешность следует выражать не более чем двумя значащими цифрами, если первая из них 1 или 2, и одной, если первая равна 3 или более. Две и более цифр допускаются при высокоточных измерениях.

3. Округление производится в соответствии с правилами приближенных вычислений: если первая из отбрасываемых или заменяемых нулями цифр меньше 5, то остающиеся цифры не изменяются, например 237,442 округляется как 237,44. Если же первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, но за ней следуют отличные от нуля цифры, то последнюю из остающихся цифр увеличивают на единицу, например 237,468 округляют как 237,47 или 0,255 округляют как 0,3.

4. Если отбрасываемая цифра равна 5, следующие за ней цифры неизвестны или нули, то последнюю сохраняемую цифру числа не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная, например 237,465 округляют как 237,46 или 237,475 округляют как 237,48.

5.1.4. Обработка результатов равнооточных рядов измерений

1. Многократные измерения — это, как правило, лабораторные или исследовательские измерения, проводимые иногда довольно длительное время. Часто такие измерения проводят не непрерывно, а периодически. При этом изменение параметров средства измерения или окружающей среды могут приводить к изменению полученных результатов. Чтобы понять, можно ли объединить все измерения в одну большую группу и для этой группы вычислить все необходимые статистические характеристики, необходимо провести исследования на однородность измерительных данных. Для этого весь измерительный массив разбивают на группы измерений (либо эти группы уже имеются) и проводят статистическую проверку прежде всего на одинаковость дисперсий в группах и на допустимость отличий средних арифметических в группах.

Равнорассеянность групп измерений устанавливают, используя критерий Фишера или Бартлетта, рассмотренные в разд. 4.1.3. Гипотеза о равенстве дисперсий в двух группах измерений принимается, если удовлетворяется критерий Фишера. Если групп измерений больше двух, то можно использовать критерий Фишера, предварительно расположив оценки дисперсий групп в вариационный ряд в порядке увеличения дисперсий, и проверку по критерию Фишера сделать для отношений их крайних значений (для самой большой и самой малой оценок дисперсий).

Критерий Бартлетта специально предназначен для оценки допустимости экспериментального рассеяния СКО для более двух групп измерений.

Следует подчеркнуть, что указанные критерии устанавливают равенство дисперсий в группах измерений с определенным уровнем значимости (0,01–0,1) по экспериментальным оценкам дисперсий.

После того как установлена равнорассеянность групп измерений, необходимо оценить, используя способ последовательных разностей, или метод Фишера, или метод Стьюдента (разд. 4.1.2), имеется ли в экспериментальных рядах измерений смещение (изменение) среднего арифметического, и если оно имеется, то можно ли его признать как незначимое с заданным уровнем значимости или с заданной доверительной вероятностью.

Если устанавливается, что различия в средних и дисперсиях групп измерений допустимы (незначимы), то вычисляют общее среднее арифметическое по формуле для $\bar{\bar{x}}$ (см. разд. 4.2.1) и среднюю дисперсию по формуле (4.5).

Поскольку подходы к решению задач о наличии систематической погрешности в ряду измерений и подходы к определению однородности и равномерности групп измерений подобны, в качестве примеров этого раздела можно рекомендовать примеры 4.9–4.13.

2. Иногда ставится задача сравнения результатов двух или более опытов (испытаний), чтобы установить, повлияло ли изменение, внесенное в конструкцию или схему установки, на ее метрологическую характеристику (МХ), или влияет ли температура на выход продукта при химической реакции, или изменилось ли число отказов оборудования после проведенной модернизации и т.д. При этом дисперсии измерения не изменяются (или проверка гипотезы об их равенстве подтверждается). Рассмотрим примеры, в которых ставятся подобные задачи и которые решаются с помощью упомянутых выше методов и критериев.

Пример 5.11. Поскольку часто сравнение значимости различия результатов измерений проводится по формуле (4.8), то поставим задачу получения соотношения для оценки различия средних арифметических \bar{x}_1 и \bar{x}_2 независимых выборок двух групп измерений n_1 и n_2 в предположении, что:

1) распределение выборок нормально и их математические ожидания и дисперсии соответственно равны $(m_1; m_2)$ и $(\sigma_1; \sigma_2)$;

2) проверка гипотезы о равенстве дисперсий S_1^2 и S_2^2 показала, что их можно считать примерно одинаковыми ($S_1^2 \approx S_2^2$), т.е. можно предположить, что и дисперсии выборок равны ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$).

Таким образом, необходимо получить соотношение для проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий двух групп измерений при их равнозначности.

Решение. С учетом условий 1 и 2 можно считать, что разница двух средних $\overline{\Delta x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ также распределена по нормальному закону и это разностное распределение можно охарактеризовать суммарной дисперсией разности средних:

$$D_{\Delta x} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \approx \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) = \sigma^2 \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right) \quad (1)$$

относительно математического ожидания $m = m_1 - m_2 = 0$ (в соответствии с гипотезой о равенстве математических ожиданий двух групп измерений).

С другой стороны, оценку дисперсии σ двух групп измерений в соответствии с (4.5) можно вычислить по формуле

$$S_{1-2}^2 = \frac{k_1 S_1^2 + k_2 S_2^2}{k_1 + k_2} \quad (2)$$

для $k = k_1 + k_2 = n_1 + n_2 - 2$ степеней свободы, $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$.

Следовательно, оценка дисперсии среднего разностного распределения будет равна

$$S_{\Delta x}^2 = S_{1-2}^2 \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right) = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{n_1 + n_2}{n_2 n_1} \right)$$

и отношение $t_{1-2} = (\bar{\Delta x} - 0) / S_{\Delta x}$ будет иметь t -распределение с $k = k_1 + k_2 = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы.

Таким образом, для проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий необходимо вычислить величину

$$t_{1-2} = \frac{|\bar{\Delta x}|}{S_{\Delta x}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

Далее, задаваясь определенной доверительной вероятностью P или уровнем значимости $q = 1 - P$, по табл. П5 находится соответствующее значение t_p , и если $t_{1-2} < t_p$, то гипотеза о равенстве математических ожиданий двух групп измерений принимается с уровнем значимости q . В противном случае гипотеза отвергается.

Пример 5.12. Сравнить результаты двух химических опытов по получению полимеров с помощью различных веществ, в каждом из которых было проведено по восемь измерений ($n_1 = n_2 = 8$). Средний выход полимера в первом опыте составил $\bar{x} = 67,72\%$, а во втором — $\bar{y} = 91,61\%$. Среднеквадратическая погрешность измерений в экспериментах составила $S = 16,6\%$. Сравнение провести при уровне значимости $q = 0,1$.

Решение. В качестве нулевой (исходной) гипотезы рассматривается равенство средних выходов полимеров. Поскольку средний выход полимера во втором опыте заметно выше, чем в первом, то для оценки значимости различия средних используем односторонний критерий. При числе степеней свободы $k = 8 + 8 - 2 = 14$ и $q = 0,1$ по табл. П5 найдем $t_{0,9} = 1,345$ (так как критерий односторонний, то $t_{0,9}$ в табл. П5 равен $t_{0,8}$ для двустороннего критерия). Вычисляя по (4.8) при $S_1 = S_2 = S$

$$t_{0,9} S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 1,345 \cdot 16,6 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = 11,16,$$

получаем $\bar{y} - \bar{x} = 23,89 > 11,16$. Следовательно, при 10%-ном уровне значимости нулевая гипотеза о равенстве выходов полимеров в этих опытах должна быть отвергнута.

Если для проверки нулевой гипотезы использовать двусторонний критерий, т.е. «не замечая», что выход полимера во втором опыте заметно выше, чем в первом, то при $k = 14$, $q = 0,1$ найдем по табл. П5 $t_{0,95} = 2,145$. Вычисляя

$$t_{0,95} S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 2,145 \cdot 16,6 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = 17,8,$$

получаем $\bar{y} - \bar{x} = 23,89 > 17,8$. Таким образом, и при двустороннем критерии нулевая гипотеза отвергается.

Пример 5.13. В таблице приведены массы продуктов, полученных на двух установках:

Установка 1	97,8	98,8	101,2	98,8	102,0	99,0	99,1	100,8	100,9	100,5
Установка 2	97,2	100,5	98,2	98,3	97,5	99,9	97,9	96,8	97,4	97,2

Определить, используя односторонний критерий Фишера, являются ли дисперсии масс продуктов, полученных на двух установках, значимо отличимыми друг от друга при уровне значимости 0,05.

Решение. Гипотеза H_0 состоит в том, что $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Для каждой установки число степеней свободы равно 9. Для проверки гипотезы вычислим выборочные дисперсии: $S_1^2 = 1,69$ и $S_2^2 = 1,44$. Составим отношение дисперсий $F = S_1^2/S_2^2 = 1,69/1,44 = 1,17$.

Из табл. П10 для $q = 0,05$ находим $P_{0,95}(9,9) = 3,18$, что больше 1,17. Следовательно, гипотеза о незначимости различия дисперсий масс продуктов, получаемых с двух установок, принимается.

Пример 5.14. В каталитическом реакторе распределение выходов продукта при использовании катализаторов *A* и *B* характеризуется следующими данными (см. таблицу):

	Катализатор <i>A</i>	Катализатор <i>B</i>
Среднее арифметическое	$\bar{x}_A = 1,219$	$\bar{x}_B = 1,179$
Оценка дисперсии	$S_A^2 = 0,208$	$S_B^2 = 0,193$
Среднеквадратическое отклонение	$S_A = 0,456$	$S_B = 0,439$
Число измерений	$n_A = 16$	$n_B = 15$

Определить однородность (равнорассеянность) двух групп измерений, а также проверить гипотезу о равенстве их математических ожиданий (уровень значимости 0,05).

Решение. В качестве первой гипотезы примем, что $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$. Чтобы применить критерий Фишера о равенстве дисперсий, вычислим отношение дисперсий

$$\frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{0,2080}{0,1930} = 1,08.$$

Из табл. П10 при уровне значимости $q = 0,05$, числе степеней свободы $k_A = n_A - 1 = 15$, $k_B = n_B - 1 = 14$ находим значение $F_{0,95}(15, 14) = 2,46 > 1,08$.

Таким образом, принимается гипотеза о незначимости отличия дисперсий σ_A^2 и σ_B^2 .

Теперь можно объединить выборочные дисперсии в соответствии с формулой (4.5), определив средневзвешенную дисперсию

$$S_{\text{св}}^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A - 1 + n_B - 1} = \frac{15 \cdot 0,208 + 14 \cdot 0,193}{15 + 14} = 0,201.$$

Разность между выборочными средними

$$\Delta x = \bar{x}_A - \bar{x}_B = 1,219 - 1,179 = 0,04.$$

Для проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий необходимо определить t_{A-B} (см. (4.8))

$$t_{A-B} = \frac{|\bar{x}_A - \bar{x}_B|}{S_{\text{св}}} \sqrt{\frac{n_A n_B}{n_A + n_B}} = \frac{0,04}{0,448} \cdot 7,742 = 0,691.$$

Задаваясь доверительной вероятностью $P = 0,95$ (или уровнем значимости $q = 0,05$) при числе степеней свободы $k = n_A + n_B - 2 = 29$ по табл. П5, получаем $t_{0,95}(19) = 2,093$. Поскольку $t_{0,95} > t_{A-B}$, т.е. $2,093 > 0,691$, то гипотеза о равенстве математических ожиданий двух групп измерений принимается.

Пример 5.15. При получении фосфора возгонкой из фосфата измерялась степень восстановления фосфата при четырех различных температурах. Результаты предварительной статистической обработки результатов измерений при разных температурах приведены в таблице. Определить, используя критерий Бартлетта, сохраняется ли точность анализа при изменении температуры.

Температура, °С	S_j^2	$k_j = n_j - 1$	$k_j S_j^2$	$\lg S_j^2$	$k_j \lg S_j^2$	$1/k_j$
T_1	1,72	5	8,60	0,2355	1,177	0,200
T_2	1,60	4	6,40	0,2041	0,816	0,250
T_3	1,97	6	11,82	0,2945	1,767	0,167
T_4	2,37	8	18,96	0,3747	2,995	0,125
Σ		23	45,78		6,755	0,742

Решение. Необходимо определить, выполняется ли гипотеза о примерном равенстве дисперсий в каждой группе испытаний, каждая из которых характеризуется постоянной температурой.

В соответствии с формулами (4.10)–(4.12), произведя необходимые вычисления, получим

$$S_{\text{ср}}^2 = \frac{45,78}{23} = 1,99, \quad \lg S_{\text{ср}}^2 = 0,29, \quad (N - L) \lg S_{\text{ср}}^2 = 23 \cdot 0,29 = 6,874,$$

$$1/(N - L) = 1/23 = 0,0435,$$

где $N = \sum_{j=1}^L n_j$; $L = 4$;

$$B = 2,303(6,874 - 6,755) = 0,278; \quad C = \frac{0,742 - 0,0435}{3(4 - 1)} = 1 + 0,077 = 1,077.$$

В табл. П7 находим при трех степенях свободы и уровне значимости $q = 0,05$ $\chi_{0,95}^2 = 7,82$. Величина $B < \chi_{0,95}^2$ и, следовательно, на уровне значимости $q = 0,05$ можно принять гипотезу о равенстве генеральных дисперсий по оценке выборочных дисперсий.

Таким образом, критерий Бартлетта позволяет считать, что точность анализа не зависит от температуры. Выборочные дисперсии однородны, поэтому в качестве оценки для дисперсии рассеянности результатов анализа можно взять средневзвешенную дисперсию $S_{\text{ср}}^2$ с числом степеней свободы, равным 23.

Пример 5.16. Показать, что для некоторых измерительных задач объединение результатов измерений в пары позволяет уменьшить выборочную дисперсию [12] (дисперсия воспроизводимости [33]). Дать объяснение этому эффекту.

Допустим, что некоторый продукт производится на двух различных установках № 1 и 2. Этот продукт имеет несколько показателей, характеризующих его качество. Предполагается, что одна из специфических характеристик (например, плотность) для продукта, производимого на указанных установках, имеет одно и то же

значение, исключая нормальные случайные отклонения. Полагается также, что продукты одинаковы в смысле равенства математических ожиданий исследуемой специфической характеристики.

Результаты измерений приведены во 2-м и 3-м столбцах таблицы. Измерения проводились попарно на каждой установке, всего 20 измерений (по $t = 10$ измерений на каждой установке).

№ n/n	Характеристика продукта, полученного на установке № 1, x_1	Характеристика продукта, полученного на установке № 2, x_2	Разность $\Delta x = x_1 - x_2$	Δx^2
1	73,2	74,0	0,8	0,64
2	68,2	68,8	0,6	0,36
3	70,9	71,2	0,3	0,09
4	74,3	74,2	-0,1	0,01
5	70,7	71,8	1,1	1,21
6	66,6	66,4	-0,2	0,04
7	69,5	69,8	0,3	0,09
8	70,8	71,3	0,5	0,25
9	68,8	69,3	0,5	0,25
10	73,3	73,6	0,3	0,09
Среднее результатов 20 измерений равно 70,89; дисперсия — 5,89			Сумма 4,1	Сумма 3,03

Решение. Рассмотрим два подхода к получению выборочной дисперсии результатов измерений, полученных попарно на установках № 1 и 2.

1. Обычное вычисление выборочной дисперсии для общего среднего и общей дисперсии при $N = n_1 + n_2 = 20$ измерениях в соответствии с формулами (3.3) и (3.4)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{20} (73,2 + 74,0 + \dots + 73,3 + 73,6) = 70,89, \quad (1)$$

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_i - 70,89)^2 = 5,89. \quad (2)$$

2. Попарное (построчное) вычисление дисперсии и получение средневзвешенной дисперсии в соответствии с формулой (4.5).

Для каждой пары (строчки в таблице) измерений среднее $\bar{x}_i = 0,5 (x_{i1} + x_{i2})$, а сумма квадратов отклонений при i -м измерении пар равна

$$(x_{i1} - \bar{x}_i)^2 + (x_{i2} - \bar{x}_i)^2 = 0,5(x_{i1} - x_{i2})^2 = 0,5\Delta x_i^2, \quad (3)$$

где Δx — разность результатов измерений, приведенных в строчке таблицы. Дисперсия пары измерений равна

$$S_i^2 = \frac{1}{2-1} \frac{(x_{i1} - x_{i2})^2}{2} = \frac{\Delta x_i^2}{2}. \quad (4)$$

Тогда для m наборов измерений (в нашем примере $m = N/2 = 10$) средневзвешанная дисперсия (дисперсии воспроизводимости [33]) будет равна (см. формулу (4.5))

$$S_{\text{св}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m k_i S_i^2}{\sum_{i=1}^m k_i} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^m k_i \frac{\Delta x_i^2}{2} = \frac{1}{2K} \sum_{i=1}^m \Delta x_i^2 = \frac{3,03}{2 \cdot 10} = 0,152, \quad (5)$$

где K — полное число степеней свободы, равное

$$\sum_{i=1}^m k_i = \sum_{i=1}^{10} (2-1) = 10.$$

Видно, что среднее рассеяние (5) намного меньше, чем дисперсия, подсчитанная по всей совокупности измерений. Это объясняется тем, что попарные результаты коррелированы, когда они получены одновременно или сразу один за другим. Грубо оценить наличия корреляционной связи можно обнаружить, подсчитав сумму разностей Δx (см. таблицу). Эта сумма в данном примере равна 4,1, т.е. плотность продукта, получаемого на установке B , почти всегда выше, чем на установке A .

Таким образом, среднее рассеяние внутри групп измерений (здесь 10 групп измерений) уменьшена за счет положительной корреляционной связи между характеристиками продукта, получаемого на двух установках. По какой-то причине на установке B показатель качества продукта (плотность) почти всегда выше, чем на установке A . Средневзвешенная дисперсия (5) отражает случайный элемент погрешности измерений.

Дисперсия (2) отражает как разброс всей совокупности продукта по его параметру, так и разброс, связанный со случайной погрешностью измерения.

Полученный результат можно объяснить также математически. Для одной пары (двух групп измерений)

$$\Delta x_i - \overline{\Delta x} = (x_{i1} - \bar{x}_1) - (x_{i2} - \bar{x}_2),$$

где средняя разность

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Delta x_i.$$

Тогда средневзвешенная дисперсия рассеяния внутри групп будет равна

$$S_{\text{св}}^2 = \frac{\sum (\Delta x_i - \overline{\Delta x})^2}{m-1} = \frac{\sum (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}{m-1} + \frac{\sum (x_{i2} - \bar{x}_2)^2}{m-1} - \frac{2 \sum (x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2)}{m-1} = S_{x1}^2 + S_{x2}^2 - 2S_{x1x2}, \quad (6)$$

где суммирование производится по m группам.

Видно, что средняя дисперсия рассеяния внутри групп измерений зависит от корреляции (третий член в выражении (6) между парами измерений).

5.1.5. Обработка результатов неравноточных рядов измерений

В результате измерений одной и той же ФВ разными операторами с применением разных СИ получают ряды измерений, которые могут быть отнесены к неравнорассеянным (неравноточным), поскольку их дисперсии значительно отличаются друг от друга.

Основой для получения оценок результирующего среднего и дисперсии служат следующие исходные данные:

- 1) предполагается, что результаты измерений имеют нормальное распределение вероятности;
- 2) $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ — средние арифметические m рядов равнорассеянных измерений;
- 3) $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ — СКО (или их оценки) результатов измерений в отдельных рядах;
- 4) n_1, n_2, \dots, n_m — число измерений в каждом ряду.

Используя метод максимального правдоподобия, можно представить оценку среднего m групп измерений в виде

$$\tilde{Q} = \bar{x}_0 = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_j}^2} \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_j}^2}} = \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^m \alpha_j} = \sum_{j=1}^m A_j \bar{x}_j. \quad (5.15)$$

Полученная оценка называется средним взвешенным и представлена в трех равноценных формулах. Обратные дисперсии, входящие в выражение (5.15), выступают при этом как веса отдельных средних арифметических

$$\alpha_j = 1/\sigma_{\bar{x}_j}^2 = n_j/\sigma_j^2, \quad A_j = \alpha_j / \sum_{j=1}^m \alpha_j. \quad (5.16)$$

Веса характеризуют степень доверия к соответствующему среднему арифметическому, и чем меньше дисперсия, т.е. рассеиваемость результатов измерений в группе, тем больше доверия к результатам измерений данной группы. Дисперсия среднего взвешенного определяется формулой

$$\sigma_{\bar{x}_0}^2 = 1 / \sum_{j=1}^m \alpha_j^2. \quad (5.17)$$

Из (5.17) видно, что дисперсия среднего взвешенного меньше дисперсии любого из средних арифметических отдельных рядов измерений, поэтому совместная обработка нескольких рядов измерений позволяет повысить точность измерений ФВ.

При заранее неизвестных дисперсиях и ограниченном числе измерений используют оценки дисперсий $S_{\bar{x}_j}^2$. Доверительная граница при $n_j > 20$ может быть определена с помощью функции нормированного нормального распределения:

$$P \left\{ \left| \bar{x}_0 - Q \right| < t_p S_{\bar{x}_0} \right\} = 2\Phi(t_p) - 1.$$

При малом числе нормально распределенных результатов измерений для определения доверительных границ используют распределение Стьюдента с числом степеней свободы, определяемым формулой

$$k_{\text{эф}} = \left[\left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{S_{\bar{x}_j}^2} \right)^2 / \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j+1} \frac{1}{S_{\bar{x}_j}^4} \right) \right] - 2 = \left[\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \right)^2 / \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j^2}{n_j+1} \right] - 2. \quad (5.18)$$

Пример 5.17. Тремя коллективами экспериментаторов с помощью различных методов были получены следующие значения ускорения свободного падения: $g_1 = (981,9190 \pm 0,0014) \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$; $g_2 = (981,9215 \pm 0,0016) \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$; $g_3 = (981,923 \pm 0,002) \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$. В скобках приведены СКО результатов измерений в каждом из рядов.

Весовые коэффициенты отдельных рядов измерений вычислим по формуле (5.16)

$$A_1 = \frac{1}{(0,0014)^2} \left[\frac{1}{(0,0014)^2} + \frac{1}{(0,0016)^2} + \frac{1}{(0,002)^2} \right]^{-1} = \frac{0,51}{1,15} = 0,44;$$

$$A_2 = \frac{1}{(0,0016)^2 \cdot 1,15} = \frac{0,39}{1,15} = 0,34; \quad A_3 = \frac{1}{(0,002)^2 \cdot 1,15} = \frac{0,25}{1,15} = 0,22.$$

Средневзвешенное в соответствии с уравнением (5.15) будет равно

$$\bar{x}_0 = 0,44 \cdot 981,9190 + 0,34 \cdot 981,9215 + 0,22 \cdot 981,923 = 981,920 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$$

и его СКО (5.17)

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}_0} &= \left[\frac{1}{(0,0014)^2} + \frac{1}{(0,0016)^2} + \frac{1}{(0,002)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{10^{-6}}{1,15} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 0,932 \cdot 10^{-3} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} \approx 0,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}. \end{aligned}$$

Полагая, что измерения имеют нормальное распределение, запишем окончательный результат в виде $g = (981,920 \pm 0,002) \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Пример 5.18. Измерения образцовой меры длины, выполненные приборами разной точности, дали результаты, приведенные в таблице:

Порядковый номер измерения	Отклонение от номинального размера Δl и СКО результатов измерения σ_{Δ} , характерное для данного прибора, мкм			
	Вертикальный оптиметр, $\sigma_{\Delta 1} = 0,4$ мкм	Машина типа Цейсс, $\sigma_{\Delta 2} = 0,8$ мкм	Машина типа Суп, $\sigma_{\Delta 3} = 0,7$ мкм	Миниметр с ценой деления 1 мкм, $\sigma_{\Delta 4} = 0,5$ мкм
1	11,3	10,8	9,8	10,4
2	—	11,1	10,7	11,2
3	—	10,9	—	10,1
4	—	—	—	9,9
Номера групп измерений $j = 1, \dots, m$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
Число измерений в группе n_j	$n_1 = 1$	$n_2 = 3$	$n_3 = 2$	$n_4 = 4$

Определить средневзвешенное отклонение размера от номинального значения и оценку СКО средневзвешенного.

Решение. Преобразуем выражение для оценки среднего m групп измерений (5.15), поскольку в условии задачи приведены СКО результатов измерений, а не СКО средних значений результатов измерений:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta l} &= \frac{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\Delta j}^2} \overline{\Delta l_j}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\Delta j}^2}} = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{\sigma_{\Delta j}^2} \left(\frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} \Delta l_{ji} \right)}{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{\sigma_{\Delta j}^2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{\sigma_{\Delta 1}^2} \Delta l_1 + \frac{1}{\sigma_{\Delta 2}^2} (\Delta l_{21} + \Delta l_{22} + \Delta l_{23}) + \dots}{\frac{n_1}{\sigma_{\Delta 1}^2} + \frac{n_2}{\sigma_{\Delta 2}^2} + \frac{n_3}{\sigma_{\Delta 3}^2} + \dots}, \end{aligned}$$

где j — порядковый номер группы измерений от 1 до m ; n_j — число измерений в j -й группе; i — порядковый номер измерения в j -й группе.

Подстановка известных значений $\sigma_{\Delta j}$ экспериментальных результатов в эту формулу дает

$$\begin{aligned} \overline{\Delta l} &= \frac{\frac{1}{16} \cdot 11,3 + \frac{1}{0,64} (10,8 + 11,1 + 10,9) + \frac{1}{0,49} (9,8 + 10,7) + \frac{1}{0,25} (10,4 + 11,2 + 10,1 + 9,9)}{\frac{1}{0,16} + \frac{3}{0,64} + \frac{2}{0,49} + \frac{4}{0,25}} = \\ &= 10,65 \text{ мкм.} \end{aligned}$$

СКО результата измерения вычислим по формуле (5.17)

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\Delta j}^2}}} = \sqrt{\frac{1}{31}} = 0,18 \text{ мкм.}$$

Для определения доверительных границ при вероятности $P=0,95$ воспользуемся формулой (5.18), в которую подставим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1/\sigma_{\Delta 1}^2 = 1/0,16 = 6,25, & n_1 &= 1; \\ \alpha_2 &= 1/\sigma_{\Delta 2}^2 = 1/0,64 = 1,5625, & n_2 &= 3; \\ \alpha_3 &= 1/\sigma_{\Delta 3}^2 = 1/0,49 = 2,041, & n_3 &= 2; \\ \alpha_4 &= 1/\sigma_{\Delta 4}^2 = 1/0,25 = 6,25, & n_4 &= 4. \end{aligned}$$

После вычислений получим $k_{эф} = 6$. По табл. П5 для вероятности $P = 0,95$ при $k = 6$ найдем $t_p = 2,447$. Таким образом, доверительные границы будут равны $2,447 \cdot 0,18 = 0,44$ мкм, средневзвешенное среднее $\bar{\Delta l} = 10,65$ мкм, оценка средневзвешенного СКО $\sigma = 0,18$ мкм или $\Delta l_Q = (10,65 \pm 0,44)$ мкм с вероятностью $P = 0,95$.

5.1.6. Обработка результатов однократных измерений

Однократные измерения характеризуются прежде всего тем, что они проводятся один раз без повторных измерений. В соответствии с классификацией, предложенной в [10], эти измерения можно разделить на измерения с точным оцениванием погрешности, измерения с приближенным оцениванием погрешности и технические измерения. При любом измерении имеют место методическая, инструментальная и субъективная погрешности (см. гл. 1, соотношение (1.2)). Осуществление однократных измерений и получение при этом достаточно достоверной информации возможно только при соблюдении ряда условий:

- изучена заранее модель измерения и установлены все методические погрешности измерения, некоторые из которых устранены;
- метрологические характеристики средств измерения соответствуют требованиям нормативной документации на данный вид средств;
- субъективная погрешность является незначительной либо вообще отсутствует.

Характерной особенностью однократных измерений в отличие от многократных является «отсутствие» случайной погрешности, хотя в полученном результате она учитывается, но не выявляется.

При измерении с *точным оцениванием погрешностей* проводят индивидуальное исследование СИ с учетом влияния всех факторов на результат измерения и, как для многократных измерений, определяют оценки всех систематических погрешностей, а затем по возможности их устраняют. При точном оценивании выделяют, как правило, много составляющих систематических и случайных погрешностей и их статистически объединяют. Методика обработки результатов прямых однократных измерений приведена в рекомендациях МИ 1552-86 [26]. Она применима при соблюдении ряда условий: составляющие погрешности известны, случайные составляющие распределены по нормальному закону, а неисключенные систематические погрешности заданы своими границами и распределены равномерно.

Следует отметить, что из-за недостатка информации, в основном связанной с распределением составляющих погрешностей,

оценка погрешности даже при тщательном индивидуальном подходе к измерительной модели одного измерения оказывается приближенной. (Индивидуальный подход к оцениванию погрешностей СИ приведен в примерах гл. 9 и 11.)

Однократные измерения с приближенным оцениванием погрешности измерения и технические измерения имеют много общего. Для этих измерений характерно оценивание погрешностей на основе нормативных данных о метрологических свойствах используемых средств измерений данного типа. Метрологические характеристики (МХ) индивидуального СИ, как правило, отличаются от нормируемых МХ «типового» СИ, и это составляет одну из основных составляющих погрешности однократного измерения. Порядок проведения технических измерений, методика их выполнения, а также методика оценивания погрешностей, как правило, представляется в отдельных документах («Методика выполнения измерений», «Методика оценки погрешности измерения», в технических условиях на СИ, в техническом паспорте или других документах). Важно, что для этого типа измерений все составляющие погрешности определены заранее и в сопроводительной документации на СИ могут быть указаны составляющие погрешности в данных условиях применения. Примеры расчета составляющих погрешностей СИ по их типовым нормируемым МХ приведены в гл. 8–10. Здесь рассмотрим примеры оценивания погрешностей технических измерений.

Пример 5.19. Измерение кровяного давления осуществляется с помощью прибора, который состоит из манжета, сдавливающего руку выше локтя при подаче в него воздуха под давлением, измерителя давления и наушников, с помощью которых улавливается появление и пропадание пульсаций, соответствующих верхнему и нижнему кровяному давлению.

В сопроводительной документации описывается порядок и методика проведения измерения, в частности положение руки пациента, порядок повышения и понижения давления в системе прибора, положение глаз измерителя по отношению к показывающему прибору и т.д. При выполнении условий измерений и эксплуатации (температура окружающей среды, статическое положение прибора, атмосферное давление и т.д.) обеспечивается измерение кровяного давления с погрешностью не более ± 10 мм рт. ст. Все указанные условия и погрешности указываются в паспорте на данное СИ.

Заметим, что подобные бытовые приборы при их выпуске подвергаются калибровке, поскольку их периодическая поверка не предусмотрена условиями эксплуатации.

Пример 5.20. На заводском пульте управления технологическим процессом, как правило, имеется много измерительных приборов. Измерения напряжения или тока осуществляются оператором пульта путем снятия показаний, соответствующих положению стрелки прибора на его шкале. Погрешность измерения при правильном расположении оператора по отношению к шкале прибора (т.е. при отсутствии субъективной погрешности) определяется классом точности прибора. Если, например, класс точности составляет 0,5, то это означает, что максимальная основная погрешность измерения не превышает $\Delta x_{\max} = 0,005x$, где x — показание прибора. Реально показания снимаются с точностью до 0,2–0,3 деления шкалы.

Погрешность Δx_{\max} учитывает только основную погрешность данного типа СИ. Если на показаниях прибора сказывается режим его подключения к объекту измерения (например, сопротивление нагрузки) или изменение окружающей температуры, то это указывается в документации на пульт управления в виде поправок к показаниям либо в виде соответствующего увеличения погрешности измерения.

Следует отметить, что все приборы на производстве проходят периодическую поверку на соответствие их МХ требованиям документации.

Пример 5.21. Приведем пример паспорта на ртутный термометр, предназначенный для технических измерений температуры (тип Б (ТЛ4), группа 4), №1364:

пределы измерения от 50 до 105°С;

цена деления 0,1°С;

предел допускаемых погрешностей показаний $\pm 0,02^\circ\text{C}$.

Фактические поправки в поверяемых отметках шкалы °С:

Поверяемые точки	0	50	60	70	80	90	100
Поправка	+0,05	+0,10	+0,10	+0,10	+0,10	+0,08	-0,05

Положение нулевой точки после +20–0,05°С.

Гарантийный срок хранения и эксплуатации — 30 месяцев со времени его изготовления. Изготовлен в соответствии с требованиями ГОСТ 215–73.

При однократном измерении, например, температуры около 80°С необходимо учитывать, что результат измерения необходимо увеличить на 0,1°С, а погрешность измерения при этом не будет превышать $\pm 0,02^\circ\text{C}$.

Пример 5.22. Оценить погрешность результата однократного измерения напряжения $U_V = 0,9$ В на сопротивлении $R = 0,4$ Ом, выполняемого вольтметром класса точности 0,5 ($\delta_{СИ} = 0,5\%$) с верхним пределом измерения $U_n = 1,5$ В и внутренним сопротивлением $R_V = 1000$ Ом. Из паспортных данных этого вольтметра известно также, что дополнительные погрешности показаний вольтметра из-за влияния магнитного поля и температуры не превышают соответственно $\delta_{мп} = \pm 0,75\%$ и $\delta_T = \pm 0,3\%$ допускаемого предела погрешности вольтметра.

Решение. Как видно из условий примера суммарная погрешность измерения состоит из основной погрешности, обусловленной вольтметром данного типа, методической погрешности, обусловленной взаимодействием между внутренним сопротивлением вольтметра и измеряемым сопротивлением, и дополнительных погрешностей, связанных с влиянием магнитного поля и температуры окружающей среды на показания вольтметра. Все эти погрешности связаны со свойствами СИ — вольтметром.

Основная погрешность. Эта погрешность определяется классом точности вольтметра, и относительный предел ее на отметке измерения составляет $\delta_x = \delta_{СИ} (U_n / U) = 0,83\%$.

Методическая погрешность взаимодействия. При подсоединении вольтметра к измеряемому сопротивлению исходное напряжение U_x изменится из-за шунтирования нагрузки внутренним сопротивлением вольтметра R_V и составит $U_V = R U_x / (R + R_V)$. Тогда относительная методическая погрешность будет равна

$$\delta_m = \frac{U_V - U_x}{U_x} 100 = -\frac{R}{R + R_V} \cdot 100 = -0,4\%.$$

Таким образом, напряжение, показываемое вольтметром, $U_V = 0,9$ В на самом деле занижено на 0,4%, т.е. примерно на 0,004 В. С учетом поправки на систематическую методическую погрешность взаимодействия результат измерения равен 0,904 В.

Дополнительные погрешности, обусловленные влиянием магнитного поля и температуры, заданы своими границами и могут рассматриваться как неисключенные систематические погрешности с относительными границами 0,75 и 0,3%.

Суммарная погрешность. Рассматривая основную погрешность как неисключенную, определим суммарную погрешность при доверительной вероятности 0,95 по формуле (4.1)

$$\delta_\Sigma = 1,1 \sqrt{0,83^2 + 0,75^2 + 0,3^2} = 1,27\%.$$

Абсолютная погрешность будет равна $\Delta_{\Sigma} = \delta_{\Sigma} U_{\sqrt{}} / 100 = 0,0115 \text{ В} \approx 0,01 \text{ В}$. С учетом округления окончательный результат измерения можно записать в виде $\bar{U} = 0,90 \text{ В}$; $\Delta = \pm 0,01 \text{ В}$; $P = 0,95$.

Пример 5.23. Дозиметр гамма-излучения предназначен для измерения дозы H в диапазоне от 1,0 до 100 мкЗв в диапазоне энергий от 0,05 до 3,0 МэВ. Предел погрешности измерения в нормальных условиях (температура окружающей среды $20 \pm 10^\circ\text{C}$) составляет $\pm(20 + 8/H)\%$ верхнего предела измерения. Дополнительная температурная погрешность составляет $0,1\%/^\circ\text{C}$. Методика измерения предполагает, что чувствительная поверхность датчика прибора должна находиться при измерении на расстоянии $(10 \pm 0,5)$ см от загрязненной поверхности.

Измерение дозы, проведенное оператором при температуре окружающей среды 50°C , показало, что загрязненность грунта составляет 80 мкЗв.

Определить абсолютную погрешность измерения и поправку, которую необходимо внести в показания дозиметра.

Решение. Основная относительная погрешность измерения будет равна $\pm(20 + 8/80) = \pm 20,1\%$, а абсолютная $\pm 20,1$ мкЗв. Дополнительная погрешность, обусловленная повышенной температурой, в условиях которой производилось измерение, составляет $0,1(50 - 20) = 3\%$, что соответствует абсолютной погрешности 2,4 мкЗв. С учетом поправки и округления результат измерения составит 78 мкЗв. Предел погрешности измерения ± 20 мкЗв.

5.2. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

Задача 5.1. При условиях, заданных в примере 5.3, обработка результатов измерений, полученных при калибровке образцовой многогранной призмы, дала следующие результаты отклонения одного из углов: $\bar{x} = 1,98''$; $S_{\bar{x}} = 0,05''$; $\theta_1(P = 0,95) = 0,03''$; $n = 20$. Определить суммарную погрешность (композицию случайной и систематической погрешности) измерения при доверительной вероятности $P = 0,99$.

Получить результат измерения, если также известно, что $\theta_2(P = 0,95) = 0,17''$ и $\theta_3(P = 0,95) = 0,5''$. Записать результаты измерений.

Ответ.

- 1) $Q = 1,98'' \pm 0,14''$ при $P = 0,99$;
- 2) $Q = 1,98'' \pm 0,26''$ при $P = 0,99$;
- 3) $x = 1,98''$; $\theta(P = 0,99) = 0,64''$; $n = 20$.

Задача 5.2. Определить границы доверительного интервала при вероятности $P \approx 1$, в которых находится результат измерения, если погрешность измерения состоит из случайной погрешности, имеющей нормальное распределение, и неисключенной систематической погрешности, имеющей равномерное распределение вероятности. Дисперсия случайной погрешности равна $S_{\bar{x}}^2$, а границы неисключенной систематической погрешности равны $\pm\theta_0$, причем $\lambda = \theta_0/S_{\bar{x}} = 1$.

Примечание. Суммарный доверительный интервал рассмотреть при вероятности $P = 0,997$ ($t_p = 3$) для случайной погрешности и $P = 1$ ($t_p = \sqrt{3}$) для равномерно распределения.

Ответ. $t_{p\Sigma} = 2,55$; $S_{\Sigma} = 1,15 S_{\bar{x}}$; $\varepsilon(P) = t_{p\Sigma} S_{\Sigma} = 2,90 S_{\bar{x}}$;
 $Q = \bar{x} \pm 2,9 S_{\bar{x}}$ при $P \approx 1$.

Задача 5.3. В таблице приведены средние по 8 группам измерений (всего 100 измерений). Среднее, определенное по результатам всех измерений, равно $\bar{x} = 8,9193$, СКО — $S_x = 0,0028$.

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7	8
Среднее, соответствующее середине интервала	8,912	8,914	8,916	8,918	8,920	8,922	8,924	8,926
Количество измерений в интервале (частота)	1	5	14	27	24	18	9	2

Определить, используя критерий Пирсона со значимостью 0,1, является ли распределение нормальным.

Ответ. Распределение результатов измерений со значимостью 0,1 можно признать нормальным.

Задача 5.4. Используя составной критерий при уровнях значимости $q_1 = q_2 = 0,02$, проверить гипотезу о нормальности распределений случайных погрешностей по результатам 19 независимых измерений длины детали. Результаты измерений приведены в таблице.

Номер измерения	Результат измерения	Номер измерения	Результат измерения	Номер измерения	Результат измерения
1	18,305	8	18,303	15	18,309
2	18,308	9	18,308	16	18,308
3	18,311	10	18,306	17	18,307
4	18,309	11	18,312	18	18,309
5	18,304	12	18,306	19	18,310
6	18,306	13	18,307		
7	18,310	14	18,308		

Ответ. При уровне значимости составного критерия $q = 0,04$ можно признать гипотезу о нормальности распределения погрешностей результатов измерений.

Задача 5.5. Используя первые 16 результатов измерений, приведенных в задаче 5.4, оценить распределение погрешности при уровнях значимости составного критерия $q_1 = 0,02$ и $q_2 = 0,01$.

Ответ. При уровне значимости составного критерия $q = 0,03$ распределение погрешностей 16 измерений можно признать нормальным.

Задача 5.6. Оценить, является ли грубым результат измерения № 24, приведенный в таблице примера 5.5 со значимостью 0,05.

Ответ. Со значимостью 0,05 результат № 24 можно признать грубым.

Задача 5.7. Измерение одного и того же рабочего эталона сопротивления было проведено на трех магазинах сопротивлений и получены следующие значения средних и СКО среднего:

$$R_1 = (100,145 \pm 0,005) \text{ Ом};$$

$$R_2 = (100,105 \pm 0,200) \text{ Ом};$$

$$R_3 = (100,165 \pm 0,010) \text{ Ом}.$$

Используя результаты измерений, рассчитать среднее взвешенное значение сопротивления рабочего эталона, а также оценку значения этого сопротивления.

Ответ. Результат измерений может быть записан в виде $R_Q = (100,147 \pm 0,003) \text{ Ом}$ при $P = 0,95$.

Задача 5.8. Даны результаты двух групп измерений:

$$\bar{x}_1 = 8,392; S_1 = 0,023; n_1 = 5;$$

$$\bar{x}_2 = 8,364; S_2 = 0,032; n_2 = 10.$$

Определить средневзвешенное и СКО средневзвешенного результатов двух групп измерений, а также записать результат измерений при доверительной вероятности 0,95.

Ответ. Средневзвешенное $\bar{x}_0 = 8,366$; СКО $S_{\bar{x}_0} = 0,019$; $k_{эф} = 10$; $Q = 8,37 \pm 0,04$ при $P = 0,95$.



ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

6.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

6.1.1. Общие положения

Под *косвенным измерением* понимается определение искомого значения физической величины (ФВ) Y на основании результатов прямых измерений других ФВ x_j , функционально связанных с искомой величиной:

$$Y = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_m). \quad (6.1)$$

Функция F может обозначать линейную или нелинейную зависимость измеряемой величины Y от аргументов x_j , поэтому косвенные измерения принято делить на косвенные измерения при линейной функции и косвенные измерения при нелинейной функции F от аргументов x_j .

Методы обработки результатов косвенных измерений при линейной функции хорошо разработаны. При этом используется подход, основанный на *раздельной обработке результатов измерений аргументов x_j* и их погрешностей.

Методы обработки результатов косвенных измерений при нелинейной функции сводятся, как правило, к *линеаризации* зависимости (6.1). При таком подходе делается оценка возможности линейного приближения, а также определяются дополнительные погрешности. Реже используются метод приведения и метод перебора.

Метод приведения — это получение ряда отдельных значений измеряемой величины путем подстановки отдельных значений аргументов в формулу, выражающую зависимость косвенно измеренной величины от аргументов (приведение результатов косвенных измерений к ряду прямых измерений) [14,15]. Этот метод целесообразно применять при наличии корреляции между погрешностями измерений аргументов, а также при неизвестных распределениях

погрешностей аргументов. Подобный метод можно также применять, например, при измерении средней плотности жидкости, когда каждая проба дает пару аргументов: массы m_i и объема V_i . По этим величинам вычисляется отдельное значение плотности $\rho_i = m_i/V_i$. Все полученные значения плотности образуют группу, которую можно обрабатывать методами, разработанными для прямых измерений. Метод приведения может быть применен также, при измерении сопротивления резистора, если напряжение на резисторе может изменяться по условиям эксперимента. При этом одновременно изменяется и сила тока. Согласованное изменение этих аргументов позволяет получить достоверную группу измерений сопротивления, которая может быть обработана методами прямых измерений.

Метод перебора — это метод статистической обработки сгруппированных результатов измерений, при котором результат косвенного измерения находят по приближенно построенной функции распределения отдельных значений измеряемой величины [14]. Метод перебора — численный метод построения функции распределения отдельных значений измеряемой величины Y . Этот метод можно использовать при условии, если выполняемое измерение позволяет производить группировку результатов измерений аргументов и подставлять в формулу (6.1) всевозможные сочетания значений аргументов, соответствующих серединам интервалов их группировки. При этом методе вычисление среднего и СКО результатов измерений аргументов производится с помощью экспериментальных функций распределения аргументов [15].

В настоящем сборнике рассматривается обработка результатов косвенных измерений при линейной зависимости результата от аргументов, а при нелинейной зависимости — обработка с помощью методов линеаризации и приведения.

6.1.2. Основные соотношения при линейной зависимости

Если функция (6.1) линейна и ее можно представить в виде

$$Y = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots = \sum_{j=1}^m b_jx_j, \quad (6.2)$$

где b_j — постоянные коэффициенты; m — число аргументов, то дисперсия результата измерения может быть определена по формуле

$$S_Y^2 = \sum_{j=1}^m b_j^2 S_{x_j}^2 + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \tilde{r}_{kl} b_k b_l S_{\bar{x}_k} S_{\bar{x}_l}, \quad (6.3)$$

где \tilde{r}_{kl} — оценка коэффициента корреляции между погрешностями переменных (аргументов) x_k и x_l , $k \neq l$ во втором слагаемом; $S_{\tilde{x}_k}$, $S_{\tilde{x}_l}$ — оценки СКО результатов измерения. В общем случае коэффициенты b_j вычисляются через функции влияния $b_j = \partial F / \partial x_j$.

Как видно из формулы (6.3), погрешность косвенных измерений может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от знака коэффициента корреляции.

Наилучшей оценкой результата косвенных измерений является величина функции F при аргументах, принимающих среднеарифметическое значение

$$\tilde{Y} = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m) = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m) = \bar{Y}. \quad (6.4)$$

Если погрешности измерения аргументов статистически независимы, т.е. коэффициенты корреляции $r_{kl} = 0$, то соотношение (6.3) записывается в виде

$$S_{\tilde{Y}}^2 = \sum_{j=1}^m b_j^2 S_{\tilde{x}_j}^2. \quad (6.5)$$

При ограниченном числе измерений (при $n \neq \infty$) в соотношениях (6.3) и (6.5) оценки дисперсий $S_{\tilde{x}_j}$ и коэффициента корреляции определяются по формулам

$$S_{\tilde{x}_j}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2; \quad (6.6)$$

$$\tilde{r}_{kl} = \frac{1}{n(n-1)S_{\tilde{x}_k}S_{\tilde{x}_l}} \sum_{i=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_k)(x_{li} - \bar{x}_l). \quad (6.7)$$

Критерием отсутствия связи между аргументами является выполнение неравенства

$$\left| \frac{r_{kl} \sqrt{n}}{1 - r_{kl}^2} \right| < t_q, \quad \text{где } t_q - q\text{-процентная квантиль распределения}$$

Стьюдента. Если измеряемая величина Y зависит от m аргументов, то проверяют отсутствие корреляционных связей между всеми парными сочетаниями аргументов.

Доверительные границы случайной погрешности результатов косвенных измерений при числе измерений $n > 25$ и нормальном распределении случайных погрешностей аргументов можно рассчитывать, используя нормальное распределение (табл. ПЗ и П5). При меньшем числе измерений для определения доверительного интервала используется распределение Стьюдента, эффективное число степеней свободы которого (при малом числе нормально

распределенных результатов измерений) рассчитывается по приближенной формуле [3, 10, 14, 15]

$$k_{\text{эф}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^m b_j^2 S_{\bar{x}_j}^2 \right)^2}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j + 1} b_j^4 S_{\bar{x}_j}^4} - 2 = \frac{\left(\sum_{j=1}^m E_j^2 \right)^2}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j + 1} E_j^4} - 2, \quad (6.8)$$

где n_j — число прямых измерений каждого из аргументов величин

$$Q_j; E_j = b_j S_{\bar{x}_j} \quad \text{или в общем виде} \quad E_j = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) S_{\bar{x}_j}.$$

Если предполагается, что распределение результата измерения не противоречит нормальному, то результат косвенного измерения записывается в виде

$$Y = \bar{Y} \pm \varepsilon(P) \quad \text{при} \quad P = \dots\%, \quad (6.9)$$

$$\varepsilon(P) = t_P S_{\bar{Y}}, \quad (6.10)$$

где t_P — коэффициент, соответствующий доверительной вероятности P (по таблицам распределения Стьюдента П5 и П6, а при большом числе измерений или известных СКО по таблицам нормального распределения П3 и П4).

Если при измерении аргументов x_j имеют место систематические погрешности, то они должны быть исследованы и по возможности устранены. Однако, как известно, полностью устранить систематические погрешности не удастся и остаются неисключенные систематические погрешности аргументов x_i и результата измерения Y . Границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения вычисляют следующим образом.

Если неисключенные систематические погрешности результатов измерений заданы своими границами θ_j , то доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения $\theta(P)$ при линейной зависимости (6.1), (6.2) вычисляют по формуле

$$\theta(P) = \pm k \sqrt{b_j^2 \theta_j^2}, \quad (6.11)$$

где k — коэффициент, определяемый доверительной вероятностью P и числом m составляющих неисключенных систематических погрешностей для данного j -го аргумента. Так же как и для формулы (4.2), $k(P=0,95) = 1,1$ и $k(P=0,99; m > 4) = 1,4$. При $m \leq 4$ поправочный коэффициент можно найти в табл. П15 или по гра-

фику $k = k(m, l)$, где l — параметр, зависящий от соотношения границ составляющих (рис. 4.1).

Если границы неисключенных систематических погрешностей результатов измерения аргументов заданы доверительными границами с соответствующей этим границам вероятностью P_j , то границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения для вероятности P вычисляют по формуле

$$\theta(P) = \pm k \sqrt{\sum_{j=1}^m b_j^2 \frac{\theta_j^2(P_j)}{k_j^2}}, \quad (6.12)$$

где суммирование производится по всем m аргументам.

Погрешность результатов косвенного измерения оценивают на основе композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей.

Формулы для оценки суммарной погрешности косвенных измерений при различных соотношениях между дисперсией случайной погрешности $S_{\bar{Y}}$ и неисключенной систематической погрешностью $\theta(P)$ ($\theta(P)/S_{\bar{Y}} = \lambda$) [5, 14—16]:

$$\Delta(P) = \varepsilon(P) = t_p S_{\bar{Y}} \text{ при } \lambda < 0,8, \quad (6.13)$$

где t_p определяется по табл. П5 и П6;

$$\Delta(P) = K[\varepsilon(P) + \theta(P)] \text{ при } 0,8 \leq \lambda \leq 8, \quad (6.14)$$

где коэффициент K определяется по табл. 6.1:

$$\Delta(P) = \theta(P) \text{ при } \lambda > 8. \quad (6.15)$$

Таблица 6.1

λ	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_{0,95}$	0,81	0,77	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
$K_{0,99}$	0,87	0,85	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

При симметричной доверительной погрешности результаты измерений представляют в виде

$$Y = \bar{Y} \pm \Delta(P) \text{ при } P = \dots\%. \quad (6.16)$$

При отсутствии данных о виде функции распределений составляющих погрешности результат измерения записывают в виде \bar{Y} , $S_{\bar{Y}}$, n , $\theta(P)$.

6.1.3. Основные соотношения при нелинейной зависимости

При нелинейных зависимостях и некоррелированных погрешностях измерений аргументов используют метод линеаризации, который предполагает разложение нелинейной функции в ряд Тейлора:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m)}{\partial x_j} \Delta x_j + R, \quad (6.17)$$

где Δx_j — отклонение результата измерения аргумента x_j от среднего арифметического; R — остаточный член.

СКО случайной погрешности результата косвенного измерения вычисляют по формуле (6.5), где вместо коэффициентов b_j используют коэффициенты влияния, т.е. первые производные по каждому из аргументов x_j :

$$S_{\bar{y}}^2 = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 S_{\tilde{x}_j}^2. \quad (6.18)$$

Результат измерения записывается в виде (6.4).

Метод линеаризации допустим, если можно пренебречь остаточным членом. Им пренебрегают, если

$$R < 0,8 S_{\bar{y}}. \quad (6.19)$$

Остаточный член можно представить в общем виде

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,j,i \neq j}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (\Delta x_i \Delta x_j),$$

а для функции двух переменных — в виде

$$R = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} (\Delta x_1)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} (\Delta x_2)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} (\Delta x_1 \Delta x_2) \right], \quad (6.20)$$

где $\Delta x_{i,j}$ — отклонения результатов измерения от среднего арифметического. При расчетах берутся *максимальные значения отклонений*.

Если известны оценки СКО среднего, полученные экспериментальным путем, то оценить остаточный член можно, полагая, что нормально распределенные погрешности аргументов с вероятностью, близкой к единице ($P=0,997$), не превышают $\Delta x_j = 3 S_{\tilde{x}_j}$ (консервативная оценка «трех сигм»).

Усредненное значение систематической погрешности, обусловленной остаточным членом, может быть определено по формуле [3]

$$\theta_R = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} \right) S_{\bar{x}_j}^2, \quad (6.21)$$

где θ_R — поправка, обусловленная нелинейностью функции F .

Результат косвенного измерения, полагая, что распределение случайных погрешностей результатов измерения является нормальным, можно записать в виде (6.9).

Примечание. Следует подчеркнуть, что построение доверительного интервала для косвенно измеряемой величины и ее дисперсии является в общем случае не простой задачей даже при нормальном распределении погрешностей аргументов. Доверительный интервал при вычисленных на основе экспериментальных данных СКО можно определить, если точно известна функция плотности вероятности распределения косвенного результата измерения. Таким образом, встает вопрос: как определить коэффициент t_p , число степеней свободы и вероятностное распределение результата измерения или их случайных погрешностей? Эти проблемы довольно подробно рассмотрены в [14].

Однако, если функция F непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядков в области результата измерения и результаты прямых измерений аргументов распределены нормально, то при большом числе измерений ($n > 25$) для определения доверительного интервала можно воспользоваться функцией нормального распределения. При малом числе измерений можно использовать распределение Стьюдента и результат измерения записывать в виде (6.9). Эти формулы дают хорошее приближение при получении окончательного результата измерения [3, 10, 14].

Границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения вычисляют в соответствии с формулами (6.11) и (6.12), подставляя вместо коэффициентов b_1, b_2, \dots, b_m первые производные $\partial F/\partial x_1, \partial F/\partial x_2, \dots, \partial F/\partial x_m$ соответственно.

Погрешность косвенного измерения оценивают в соответствии с формулами (6.13)–(6.15). При отсутствии данных о виде функции распределений составляющих погрешности результат измерения записывают в виде $\bar{Y}, S_{\bar{Y}}, n, \theta(P)$.

6.1.4. Метод приведения

Результат косвенного измерения \bar{Y} вычисляют по формуле [15]

$$\bar{Y} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L Y_j, \quad (6.22)$$

где L — число отдельных значений измеряемой величины; Y_j — j -е отдельное значение измеряемой величины, полученное в результате подстановки j -го сочетания согласованных результатов аргументов в формулу (6.1).

СКО случайных погрешностей результатов косвенных измерений вычисляют по формуле

$$S_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{1}{L(L-1)} \sum_{j=1}^L (Y_j - \bar{Y})^2}. \quad (6.23)$$

Доверительные границы случайной погрешности для результатов измерения вычисляют по формуле $\Delta(P) = \pm T S_{\bar{Y}}$, где T — коэффициент, зависящий от вида распределения значений измеряемой величины Y , а также выбранной доверительной вероятности P . При нормальном распределении отдельных значений измеряемой величины доверительные границы вычисляют в соответствии с правилами обработки результатов прямых измерений (ГОСТ 8.207–76). Границы неисключенной систематической погрешности результата косвенных измерений вычисляют как было рассмотрено выше.

Пример 6.1. $Y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m$. Определить дисперсию погрешности результата косвенных измерений. Результаты прямых измерений и их погрешности независимы. Дисперсии результатов измерений аргументов известны и равны $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_m$.

Решение. Поскольку коэффициенты влияния

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = a_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_m} = a_m,$$

то оценка СКО будет равна

$$\sigma_Y = \sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_m^2 \sigma_m^2}.$$

При $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 1$ $\sigma_Y^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_j^2$, где σ_j^2 — дисперсия j -й переменной. Результат измерения при доверительной вероятности P можно записать в виде (с учетом (6.4))

$$Q_Y = \bar{Y} \pm t_p \sigma_Y \quad \text{или} \quad P \left\{ \left| \bar{Y} - Q_Y \right| < t_p \sigma_{\bar{Y}} \right\} = 2\Phi(t_p) - 1,$$

где $\bar{Y} = \tilde{Y} = a_1 \tilde{x}_1 + a_2 \tilde{x}_2 + \dots + a_m \tilde{x}_m$. В частности, для $Y = x_1 \pm x_2$ $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Относительная погрешность $\delta_Y = \sigma_Y / Y$ для разности аргументов может быть большой.

Пример 6.2. $Y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}$. Определить дисперсию погрешности результата косвенных измерений Y . Результаты прямых измерений независимы. Дисперсии результатов измерений аргументов известны и равны $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_m$ соответственно и получены при большом числе измерений аргументов.

Решение. Поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = a_j x_j^{a_j-1} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m} = \frac{a_j Y}{x_j},$$

представим слагаемые косвенных погрешностей в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \sigma_j \right)^2 = a_j^2 \frac{Y^2}{x_j^2} \sigma_j^2 = a_j^2 Y^2 \delta_j^2,$$

где $\delta_j = \sigma_j/x_j$ — относительная погрешность определения аргумента x_j . Выразим погрешность результата измерения в относительных величинах:

$$\delta_Y^2 = \frac{\tilde{\sigma}_Y^2}{\tilde{Y}^2} = \frac{1}{\tilde{Y}^2} \sum_{j=1}^m a_j^2 \tilde{Y}^2 \delta_j^2 = \sum_{j=1}^m a_j^2 \delta_j^2.$$

Особенность этого примера состоит в том, что для получения относительной дисперсии результата измерения, необходимо сложить относительные дисперсии аргументов. Кроме того, относительная погрешность результата косвенного измерения также равна сумме относительных погрешностей измерения аргументов (со своим знаком). Действительно,

$$\begin{aligned} \delta Y &= \frac{\tilde{Y} - Y}{Y} = \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{dF}{Y} = \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_m} \Delta x_m \right) = \\ &= a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 + \dots + a_m \delta x_m, \end{aligned}$$

где dF — полный дифференциал функции F ; $\delta x_j = \Delta x_j/x_j$ — относительная погрешность определения j -го аргумента.

При $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 1$ $\delta_Y^2 = \sum_{j=1}^m \delta_j^2$. Если $Y = x_1 x_2$ или $Y = x_1/x_2$, то $\delta_Y^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2$.

Пример 6.3. Пусть $Y = x_1 + x_2$ и между переменными x_1 и x_2 существует корреляционная связь, характеризуемая коэффициентом корреляции r . Тогда $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2}$. При отсутствии корреляционной связи ($r=0$) $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ и при жесткой корреляционной связи ($r=\pm 1$) $\sigma_Y = \sigma_1 \pm \sigma_2$.

Пример 6.4. Общее сопротивление ряда последовательно соединенных между собой резисторов определяется по формуле $R_\Sigma = 2R_1 + 4R_2 + 6R_3$. Номинальные значения сопротивлений резисто-

ров и пределы допускаемых отклонений от них (без знака) приведены в таблице:

Сопrotивление R_i	Номинальное значение сопротивления резистора, Ом	Пределы допускаемых отклонений Δ_i , Ом
R_1	100,00	0,03
R_2	10,00	0,02
R_3	1,00	0,01

Известно также, что распределения действительных значений сопротивлений удовлетворительно аппроксимируется нормальным распределением и указанные пределы допускаемых отклонений соответствуют уровню вероятности 0,98. Определить общее сопротивление и доверительные интервалы с вероятностью 0,98.

Решение. Номинальное сопротивление составного резистора в соответствии с формулой (6.4) равно $R_{\Sigma} = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 246$ Ом. Оценим возможные отклонения действительного значения сопротивления составного резистора от его номинального значения. В соответствии с формулой (6.5) получим

$$\Delta_{\Sigma} = \sqrt{2^2 \Delta_1^2 + 4^2 \Delta_2^2 + 6^2 \Delta_3^2} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 10^{-4} + 16 \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 36 \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = 0,11 \text{ Ом.}$$

После округления полученных результатов окончательно можно записать $R_{\Sigma} = (246,0 \pm 0,1)$ Ом при $P = 0,98$.

Пример 6.5. Для определения плотности твердого тела по формуле $\rho = m/V$ было проведено 11 измерений объема тела и массы, заключенной в этом объеме. Результаты измерений массы и объема приведены в таблице на с. 160.

Определить плотность тела и оценить погрешности измерения.

Решение. Зависимость измеряемой косвенным методом величины от аргументов нелинейная, поэтому для статистической обработки результатов измерений можно воспользоваться методом линеаризации. Предварительно следует проверить правомерность линеаризации, т.е. установить, что остаточный член в разложении нелинейной функции в ряд Тейлора незначителен.

Остаточный член представим в виде членов ряда Тейлора, содержащего вторые производные от аргументов:

$$R = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial V^2} (\Delta V)^2 + \frac{\partial^2 \rho}{\partial m^2} (\Delta m)^2 + 2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial V \partial m} \Delta m \Delta V \right] = \frac{1}{2} \left[2 \frac{\bar{m}}{V^3} (\Delta V)^2 - 2 \frac{1}{V^2} \Delta V \Delta m \right].$$

№ п/п	Числовые данные результатов измерений		Результаты обработки данных измерений			
	масса тела, $m_i \cdot 10^{-3}$ кг	объем тела $V_i \cdot 10^{-6}$ м ³	$(m_i - \bar{m}) \cdot 10^{-7}$, кг	$(m_i - \bar{m})^2 \cdot 10^{-14}$, кг ²	$(V_i - \bar{V}) \cdot 10^{-10}$, м ³	$(V_i - \bar{V})^2 \cdot 10^{-20}$, м ⁶
1	252,9119	195,3799	-1	1	1	1
2	252,9133	195,3830	13	169	32	1024
3	252,9151	195,3790	31	961	-8	64
4	252,9130	195,3819	10	100	21	441
5	252,9109	195,3795	-11	121	-3	9
6	252,9094	195,3788	-26	676	-10	100
7	252,9113	195,3792	-7	49	-6	36
8	252,9115	195,3794	-5	25	-4	16
9	252,9119	195,3794	-1	1	-4	16
10	252,9115	195,3791	-5	25	-7	49
11	252,9118	195,3791	-2	4	-7	49
	$\bar{m} = 252,9120 \cdot 10^{-3}$ кг	$\bar{V} = 195,3798 \cdot 10^{-6}$ м ³	$S_m^2 = 213 \cdot 10^{-14}$ кг ²	$S_{\bar{m}}^2 = 19,36 \cdot 10^{-14}$ кг ²	$S_V^2 = 180 \cdot 10^{-20}$ м ⁶	$S_{\bar{V}}^2 = 16,36 \cdot 10^{-20}$ м ⁶

Используя консервативный подход, находим значение R при $\Delta V = \Delta V_{\max} = 32 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3$, $\Delta m = \Delta m_{\max} = 31 \cdot 10^{-7} \text{ кг}$, полагая, что изменения аргументов положительны. Тогда остаточный член будет равен

$$R = \frac{252,912 \cdot 10^{-3}}{(195,3798 \cdot 10^{-6})^3} \cdot (32 \cdot 10^{-10})^2 + \frac{32 \cdot 10^{-10} \cdot 31 \cdot 10^{-7}}{(195,3798 \cdot 10^{-6})^2} =$$

$$= (0,0347240 + 0,0259867) \cdot 10^{-5} \approx 6 \cdot 10^{-7}.$$

Числовое значение остаточного члена необходимо сравнить с числовым значением $0,8 S_{\bar{\rho}}$ (6.19). СКО результата измерений вычислим по формуле (6.18)

$$S_{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right) S_{\bar{m}}^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right) S_{\bar{V}}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{V}}\right)^2 S_{\bar{m}}^2 + \left(\frac{\bar{m}}{\bar{V}^2}\right)^2 S_{\bar{V}}^2} =$$

$$= \sqrt{50,7 \cdot 10^{-7} + 71,6 \cdot 10^{-7}} \approx 0,0035.$$

Поскольку $6 \cdot 10^{-7} < 0,8 \cdot 0,0035$, то условие (6.19) выполняется и для обработки результатов измерения возможно применение метода линеаризации.

Результат измерения вычислим по формуле (6.4)

$$\bar{\rho} = \bar{m} / \bar{V} = 1,29446 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Результат измерения можно представить в виде

$$\bar{\rho} = 1294,4634 \text{ кг/м}^3; S_{\bar{\rho}} = 0,0035 \text{ кг/м}^3; n_1 = n_2 = 11.$$

Для определения доверительных границ результата измерения необходимо вычислить эффективное число степеней свободы косвенных измерений в соответствии с формулой (6.8). Из формулы для вычисления СКО видно, что

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} S_{\bar{m}}\right)^2 = 50,7 \cdot 10^{-7}, \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} S_{\bar{V}}\right)^2 = 71,6 \cdot 10^{-7}.$$

Подставив эти значения, а также $n_1 = n_2 = 11$ в (6.8), получим $k_{\text{эф}} = 21$. По таблице распределения Стьюдента при $P = 0,95$ и $k_{\text{эф}} = 21$ находим $t_p = 2,08$. Запишем результат измерения в виде

$$\rho = (1294,463 \pm 0,007) \text{ кг/м}^3 \text{ при вероятности } P = 0,95.$$

Пример 6.6. Провести консервативную оценку (трех сигм) остаточного члена R по данным примера 6.5.

Подставив в формулу для R значения $\Delta V = 3 S_{\bar{V}} = 3 \cdot 13,4 \cdot 10^{-10} = 40,2 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3$, $\Delta m = 3 S_{\bar{m}} = 3 \cdot 14,6 \cdot 10^{-7} = 43,8 \cdot 10^{-7} \text{ кг}$, после вы-

числений получим $R \approx 10^{-6}$, что меньше $0,8 S_{\bar{p}} = 0,8 \cdot 0,035 = 0,028$. Эта оценка позволяет не учитывать квадратичные члены в разложении Тейлора, ограничившись, как и ранее, линейными приближением.

Пример 6.7. При вычислении площади прямоугольной фигуры получены следующие результаты измерения сторон прямоугольника: $\bar{a} = 2,0$ см, $\bar{b} = 4,0$ см и СКО результатов измерения сторон $\sigma_{\bar{a}} = 0,02$ см, $\sigma_{\bar{b}} = 0,03$ см. Нормированный коэффициент корреляции $r_{ab} = 0,3$ Определить среднее значение площади и доверительный интервал, в котором находится истинное значение площади с вероятностью 0,95, полагая, что результаты косвенных измерений распределены по нормальному закону.

Решение. Результат измерения в соответствии с (6.4) равен

$$\bar{P} = \bar{a}\bar{b} = 2 \cdot 4 = 8,0 \text{ см}^2.$$

Дисперсию результата измерения вычислим по формулам (6.3) и (6.18) с учетом корреляционной зависимости между переменными

$$\sigma_{\bar{P}}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)^2 \sigma_{\bar{a}}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial b}\right)^2 \sigma_{\bar{b}}^2 + 2 \frac{\partial P}{\partial a} \frac{\partial P}{\partial b} \sigma_{\bar{a}} \sigma_{\bar{b}} r_{ab} = (\bar{b} \sigma_{\bar{a}})^2 + (\bar{a} \sigma_{\bar{b}})^2 + 2 \bar{b} \bar{a} \sigma_{\bar{a}} \sigma_{\bar{b}} r_{ab} = 16(0,02)^2 + 4(0,03)^2 + 2 \cdot 8 \cdot 0,02 \cdot 0,03 \cdot 0,3 = 128,8 \cdot 10^{-4} \text{ см}^4.$$

Тогда $\sigma_{\bar{P}} = 0,113$ см $\approx 0,1$ см и результат измерения при $P = 0,95$ ($t_p = 2$) запишется в виде $P_Q = (8,0 \pm 0,2)$ см; при $r_{ab} = 0$ $\sigma_{\bar{P}}^2 = 10^{-2}$ см, $\sigma_{\bar{P}} = 0,1$ см².

Таким образом, корреляционная связь на уровне $r_{ab} = 0,3$ не изменила конечный результат измерения, поскольку различия в СКО с и без корреляционной связи оказались неразличимы при округлении результатов вычислений. Заметим, что существенной корреляционной связью считается связь с коэффициентом корреляции $\geq 0,7$.

Поскольку в исходных данных примера нет конкретных результатов измерений размеров сторон прямоугольника, оценим с помощью соотношения (6.21) среднюю дополнительную погрешность, возникающую из-за линеаризации. Поскольку вторые производные по переменным a и b равны нулю, то $\theta_R = 0$.

Пример 6.8. При условии примера 6.7 определить интервальные оценки для истинного значения измеряемой величины, если число измерений каждой из сторон прямоугольника равно $n_a = n_b = 5$, а оценки СКО каждой из сторон равны $S_{\bar{a}} = 0,02$ см, $S_{\bar{b}} = 0,03$ см, $r_{ab} = 0,3$.

Решение. Оценим эффективное число степеней свободы, используя формулу (6.8):

$$\begin{aligned}
 k_{\text{эф}} &= \frac{\left(\sum_{j=1}^m E_j^2\right)^2}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j + 1} E_j^4} - 2 = \frac{(E_a^2 + E_b^2)^2}{\frac{1}{n+1}(E_a^4 + E_b^4)} - 2 = \\
 &= \frac{(64 \cdot 10^{-4} + 36 \cdot 10^{-4})^2}{\frac{10^{-8}}{6} [(64)^2 + (36)^2]} - 2 = 11,1 - 2 \approx 9,
 \end{aligned}$$

в которой использованы обозначения $E_a = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a}\right) S_a$, $E_b = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right) S_b$, $m = 2$.

По табл. П5 при $P = 0,95$, $k = 9$ найдем $t_p = 2,262$. Тогда результат измерения при $S_{\bar{\Pi}} = 0,113$ см запишется в виде $\Pi_Q = (8,0 \pm 0,3)$ см при $P = 0,95$.

Пример 6.9. При многократных измерениях пройденного телом пути по формуле $S = 0,5wt^2$ найдено среднее значение ускорения $\bar{w} = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ и среднее время в пути $\bar{t} = 10$ с. Оценка СКО результата измерений ускорения и времени при этом соответственно равны $S_{\bar{w}} = 0,1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, $S_{\bar{t}} = 0,05$ с. Число измерений каждого аргумента $n = 4$ и погрешности измерений не коррелированы между собой. Определить результат измерения, СКО результата измерения, усредненную систематическую погрешность и записать результат измерения, полагая, что результаты косвенных измерений распределены по нормальному закону.

Решение. 1. Найдем результат измерения, используя формулу (6.4):

$$\bar{S} = \frac{\bar{w}\bar{t}^2}{2} = \frac{10 \cdot 100}{2} = 500 \text{ м}$$

и оценку дисперсии результата измерения по формуле (6.18):

$$\begin{aligned}
 S_{\bar{S}}^2 &= \left(\frac{\partial S}{\partial w}\right)^2 S_{\bar{w}}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 S_{\bar{t}}^2 = \left(\frac{\bar{t}^2}{2}\right)^2 S_{\bar{w}}^2 + \left(\frac{2\bar{w}\bar{t}}{2}\right)^2 S_{\bar{t}}^2 = \\
 &= (50)^2 \cdot 10^{-2} + (100)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 50 \text{ м}^2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, СКО косвенного измерения равно $S_{\bar{S}} = \sqrt{50} = 7,07 \text{ м}$.

2. Поскольку формула косвенных измерений нелинейна, то проверим допустимость линеаризации, оценив остаточный член R , используя метод «трех сигм»:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial w^2} (\Delta w)^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial w \partial t} \Delta w \Delta t \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[0 + \bar{w} (3\sqrt{n} S_i)^2 + 2\bar{t} (3\sqrt{n} S_i) (3\sqrt{n} S_{\bar{w}}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[10(2 \cdot 3 \cdot 0,05)^2 + 20(2 \cdot 3 \cdot 0,05)(2 \cdot 3 \cdot 0,1) \right] = \frac{1}{2} [0,1 + 0,4] = 0,25 \text{ м.} \end{aligned}$$

Сравним остаточный член по формуле (6.19). Поскольку $R = 0,25 < 0,8 \cdot 7,07$, то для вычисления погрешности косвенного измерения можно ограничиться линейным приближением, используя для этого формулу (6.18).

3. Определим усредненное значение систематической погрешности по формуле (6.21):

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) S_{\bar{x}_j}^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial w^2} \right) S_{\bar{w}}^2 + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right) S_{\bar{t}}^2 \right] = \frac{1}{2} \bar{w} S_{\bar{t}}^2 = 0,0125 \text{ м.}$$

Видно, что систематическая погрешность много меньше СКО результата измерения и может не учитываться при подведении результатов измерения.

4. Для определения доверительного интервала истинного значения пути, пройденного телом за 10 с, вычислим эффективную степень свободы по формуле (6.8) при $n_w = n_t = n = 4$. Для этого вначале вычислим

$$E_w = \left(\frac{\partial S}{\partial w} \right) S_{\bar{w}} = \left(\frac{\bar{t}^2}{2} \right) S_{\bar{w}} = 50 \cdot 0,1 = 5,0 \text{ м, } E_t = \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) S_{\bar{t}} = (\bar{w} \bar{t}) S_{\bar{t}} = 5 \text{ м,}$$

а затем

$$\begin{aligned} k_{\text{эф}} &= \frac{(E_w^2 + E_t^2)^2}{\frac{1}{n+1} (E_w^4 + E_t^4)} - 2 = \frac{(25 + 25)^2}{0,2(25^2 + 25^2)} - 2 = \frac{2500}{0,2(625 + 625)} - 2 = \\ &= 10 - 2 = 8. \end{aligned}$$

По таблице Стьюдента при $P = 0,95$, $k = 8$ найдем $t_p = 2,306$. Тогда результат измерения при $S_{\bar{S}} = 7,07$ м и $t_p = 2,306$ запишется в виде

$$S_Q = (500,0 \pm 16,3) \text{ м при } P = 0,95.$$

Пример 6.10. В результате измерений получены следующие значения электрических сопротивлений, включенных параллельно:

$$R_1 = \bar{R}_1 + \Delta R_1 = (240 \pm 1,0) \text{ Ом при } n_1 = 4 \text{ и вероятности } P_1 = 0,9,$$

$$R_2 = \bar{R}_2 + \Delta R_2 = (300 \pm 0,8) \text{ Ом при } n_2 = 0 \text{ и вероятности } P_2 = 0,7.$$

Найти результат измерения, СКО результата измерения и доверительные границы при $P = 0,95$, полагая, что итоговые значения сопротивления распределены по нормальному закону, результаты измерений статистически независимы. Оценить также величину остаточного члена и усредненную систематическую погрешность.

Решение. 1. Определим результат измерения по формуле (6.4):

$$\bar{R} = \frac{\bar{R}_1 \bar{R}_2}{\bar{R}_1 + \bar{R}_2} = \frac{240 \cdot 300}{540} = 133,33 \text{ Ом.}$$

2. Определим СКО каждого из результатов измерения сопротивлений. По таблице Стьюдента при числе степеней свободы $k_1 = n_1 - 1 = 3$, $P_1 = 0,9$ найдем $t_{P_1} = 2,353$ и соответственно $S_{\bar{R}_1} = \Delta R_1 / t_{P_1} = 1,0 / 2,353 = 0,4249$ и $S_{R_1} = S_{\bar{R}_1} \sqrt{n} = 0,4249 \cdot 2 = 0,8498$. Аналогично при $k_2 = 8$ и $P_2 = 0,7$ найдем $t_{P_2} = 1,108$ и соответственно $S_{\bar{R}_2} = \Delta R_2 / t_{P_2} = 0,8 / 1,108 = 0,722$, $S_{R_2} = 2,166$.

3. Для определения дисперсии результата измерения по формуле (6.18) вычислим слагаемые

$$E_1^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial R_1} \right)^2 S_{\bar{R}_1}^2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^4 S_{\bar{R}_1}^2 = \left(\frac{300}{540} \right)^2 (0,4249)^2 = \\ = 0,09526 \cdot 0,18 = 0,0172,$$

$$E_2^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial R_2} \right)^2 S_{\bar{R}_2}^2 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^4 S_{\bar{R}_2}^2 = \left(\frac{240}{540} \right)^2 (0,722)^2 = \\ = 0,0390 \cdot 0,52 = 0,0203.$$

Искомая дисперсия результата измерения будет равна $S_{\bar{R}}^2 = E_1^2 + E_2^2 = 0,0375$, СКО результата измерения $S_{\bar{R}} \approx 0,194$ Ом.

4. Используя формулу (6.8) и полученные выше результаты вычислений, определим эффективный коэффициент степени свободы

$$k_{\text{эф}} = \frac{(E_1^2 + E_2^2)^2}{\frac{E_1^4}{n_1 + 1} + \frac{E_2^4}{n_2 + 1}} - 2 = \frac{(0,0172 + 0,02033)^2}{\frac{(0,0172)^2}{5} + \frac{(0,02033)^2}{10}} - 2 =$$

$$= \frac{12,93 \cdot 10^{-4}}{(0,542 + 0,379) \cdot 10^{-4}} - 2 \approx 12.$$

По таблице Стьюдента при $k = 12$ и $P = 0,95$ найдем $t_p = 2,179$. Таким образом, результат измерения можно записать в виде

$$R_Q = \bar{R} \pm t_p S_{\bar{R}} = (133,3 \pm 0,4) \text{ Ом при } P = 0,95.$$

5. Оценим остаточный член по формуле

$$R = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial R_1^2} (\Delta R_1)^2 + \frac{\partial^2 R}{\partial R_2^2} (\Delta R_2)^2 + 2 \frac{\partial^2 R}{\partial R_1 \partial R_2} \Delta R_1 \Delta R_2 \right].$$

Для вычисления остаточного члена определим вторые производные

$$\frac{\partial^2 R}{\partial R_1^2} = \frac{2R_2 R_1}{(R_1 + R_2)^3}; \quad \frac{\partial^2 R}{\partial R_2^2} = \frac{2R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^3}; \quad \frac{\partial^2 R}{\partial R_1 \partial R_2} = \frac{2R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^3}.$$

Полагая, что $\Delta R_1 = 3S_{R_1} = 2,55$; $\Delta R_2 = 3S_{R_2} = 6,5$, и учитывая, что

$$\frac{\partial^2 R}{\partial R_1^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial R_2^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial R_1 \partial R_2} = 9,145 \cdot 10^{-4},$$

получаем следующее значение остаточного члена:

$$R = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^3} \left[(\Delta R_1)^2 + (\Delta R_2)^2 + 2(\Delta R_1 \Delta R_2) \right] =$$

$$= 4,57 \cdot 10^{-4} \left[(2,55)^2 + (6,5)^2 + 2 \cdot 2,55 \cdot 6,5 \right] \approx 0,015.$$

Поскольку $R < 0,8 S_{\bar{R}} = 0,155$, то линейризация функции правомерна.

Пример 6.11. Имеется зависимость $Z = X/Y + Y^2$. Измерения аргументов дали следующие результаты: $\bar{X} = 16,0$; $\bar{Y} = 4,0$. Корреляционная матрица погрешностей имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} S_{\bar{X}}^2 & S_{\bar{X}} S_{\bar{Y}} r_{\bar{X}\bar{Y}} \\ S_{\bar{Y}} S_{\bar{X}} r_{\bar{X}\bar{Y}} & S_{\bar{Y}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,076 & -0,12 \\ -0,12 & 0,260 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Определить корреляционную связь между аргументами, СКО результата измерений и его результат.

Решение. Результат измерений вычислим по формуле (6.4):

$$\bar{Z} = \bar{X}/\bar{Y} + \bar{Y}^2 = 20,0.$$

Дисперсию результата измерений запишем с учетом корреляционной связи

$$S_{\bar{Z}}^2 = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 S_{\bar{X}}^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 S_{\bar{Y}}^2 + 2\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right) S_{\bar{X}} S_{\bar{Y}} r_{\bar{X}\bar{Y}}. \quad (2)$$

Вычислим множители, входящие в формулу (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{1}{Y} = 0,25; \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = -\frac{X}{Y^2} + 2Y = 7; \quad S_{\bar{X}} = 0,276; \quad S_{\bar{Y}} = 0,510; \\ r_{\bar{X}\bar{Y}} = r_{YX} = -\frac{0,12}{S_{\bar{X}} S_{\bar{Y}}} = -\frac{0,12}{0,276 \cdot 0,510} = -0,85. \end{aligned} \quad (3)$$

Для определения СКО результата измерений подставим в формулу (2) значения из (1) и (3)

$$\begin{aligned} S_{\bar{Z}}^2 &= (0,25)^2 \cdot 0,076 + (7)^2 \cdot 0,26 + 2 \cdot 0,25 \cdot 7 \cdot (-0,12) = \\ &= 0,00475 + 12,74 - 0,42 = 12,3 \end{aligned}$$

и определим $S_{\bar{Z}} = 3,5$.

Таким образом, результат измерения $\bar{Z} = 20$, СКО $S_{\bar{Z}} = 3,5$, коэффициент статистической связи (коэффициент корреляции) между погрешностями $-0,85$.

Пример 6.12. Имеется зависимость $W = Z^2/(X + Y)$. Прямые измерения аргументов дали следующие результаты при доверительной вероятности 0,95:

$$\bar{X} = 10,000 \pm 0,005; \quad n = 5,$$

$$\bar{Y} = 2,500 \pm 0,010; \quad n = 10,$$

$$\bar{Z} = 5,00 \pm 0,002; \quad n = 16.$$

Полагая, что линеаризация функции допустима, найти СКП косвенного результата измерения, а также доверительный интервал для истинного значения с вероятностью $P = 0,95$.

Решение. 1. Определим среднее значение, полученное в результате косвенного измерения:

$$\bar{W} = \frac{\bar{Z}^2}{\bar{X} + \bar{Y}} = \frac{25}{10 + 2,5} = 2,000.$$

2. Определим СКП результатов прямых измерений. Для этого вначале по табл. П5 найдем коэффициенты $t_{X,Y,Z} = t(P, k = n - 1)$: $t_X = 2,145$; $t_Y = 2,262$; $t_Z = 2,131$, а затем

$$S_X = \frac{0,005}{2,145} = 2,33 \cdot 10^{-3}; S_Y = \frac{0,01}{2,262} = 4,42 \cdot 10^{-3}; S_Z = \frac{0,002}{2,131} = 0,938 \cdot 10^{-3}.$$

3. Для определения СКП результата косвенного измерения и эффективного коэффициента степени свободы в соответствии с формулой (6.8), вычислим сомножители E_j :

$$E_{\bar{X}} = \frac{\partial W}{\partial X} S_{\bar{X}} = \left(-\frac{Z}{X+Y} \right)^2 S_{\bar{X}} = \left(\frac{5}{12,5} \right)^2 \cdot 2,33 \cdot 10^{-3} = 0,3728 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{\bar{Y}} = \frac{\partial W}{\partial Y} S_{\bar{Y}} = \left(-\frac{Z}{X+Y} \right)^2 S_{\bar{Y}} = \left(\frac{5}{12,5} \right)^2 \cdot 4,42 \cdot 10^{-3} = 0,7072 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{\bar{Z}} = \frac{\partial W}{\partial Z} S_{\bar{Z}} = \left(\frac{2Z}{X+Y} \right)^2 S_{\bar{Z}} = \left(\frac{10}{12,5} \right)^2 \cdot 0,938 \cdot 10^{-3} = 0,7504 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{\bar{X}}^2 = 0,139 \cdot 10^{-6}; E_{\bar{Y}}^2 = 0,500 \cdot 10^{-6}; E_{\bar{Z}}^2 = 0,563 \cdot 10^{-6}.$$

4. Вычислим дисперсию и СКП результатов измерения по формуле (6.18)

$$S_{\bar{W}}^2 = E_{\bar{X}}^2 + E_{\bar{Y}}^2 + E_{\bar{Z}}^2 = (0,139 + 0,500 + 0,563) \cdot 10^{-6} = 1,202 \cdot 10^{-6};$$

$$S_{\bar{W}} = 1,096 \cdot 10^{-3}.$$

5. Вычислим эффективный коэффициент степени свободы для результата косвенного измерения по формуле (6.8)

$$k_{\text{эф}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^3 E_j^2 \right)^2}{\sum_{j=1}^3 \frac{1}{n_j + 1} E_j^4} - 2 = \frac{(0,139 + 0,500 + 0,563)^2}{\frac{1}{16} (0,139)^2 + \frac{1}{11} (0,5)^2 + \frac{1}{17} (0,563)^2} - 2 =$$

$$= \frac{1,445}{0,0425} - 2 = 32.$$

6. По табл. П5 при вероятности 0,95 определим $t(P, k_{\text{эф}}) = 1,96$ и доверительный интервал для истинного значения

$$P(|Q - 2,000| \leq t S_{\bar{W}}) = P(|Q - 2,000| \leq 0,002) = 0,95.$$

Пример 6.13. При измерении площади прямоугольной детали со сторонами A и B получены следующие результаты $\bar{A} = 35,2$ мм,

$\bar{B} = 57,4$ мм. СКП определения сторон $S_{\bar{A}} = 0,06$ мм, $S_{\bar{B}} = 0,05$ мм. Границы неисключенных систематических погрешностей, имеющих равномерное распределение, составляют $\theta_A = \theta_B = \pm 0,05$ мм. Количество измерений каждой из сторон прямоугольника более 30. Распределение случайной погрешности не противоречит нормальному распределению. Определить результат косвенных измерений, случайную и систематическую составляющие погрешности измерения и записать результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,99$.

Решение. Площадь прямоугольника (результат измерения) будет равна $\bar{\Pi} = \bar{A} \bar{B} = 35,2 \cdot 57,4 = 2020,48$ мм².

Определим дисперсию случайной погрешности измерения, используя формулу (6.18):

$$S_{\bar{\Pi}}^2 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial A} \right)^2 S_A^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial B} \right)^2 S_B^2 = \bar{B}^2 S_A^2 + \bar{A}^2 S_B^2 = \\ = (57,4)^2 \cdot 36 \cdot 10^{-4} + (35,2)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 14,96 \text{ мм}^2.$$

СКО случайной погрешности результата измерения будет равно $S_{\bar{\Pi}} = 3,87$ мм.

Определим неисключенную систематическую погрешность по формуле (6.11)

$$\theta(P) = k \sqrt{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial A} \right)^2 \theta_A^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial B} \right)^2 \theta_B^2} = 1,4 \sqrt{\bar{B}^2 \theta_A^2 + \bar{A}^2 \theta_B^2} = \\ = 1,4 \sqrt{(57,4)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4} + (35,2)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 1,4 \sqrt{11,33} = 4,72 \text{ мм}.$$

Поскольку доверительная вероятность $P = 0,99$, число неисключенных систематических погрешностей равно 2 ($m = 2$), границы этих погрешностей одинаковы ($l = 1$), то в соответствии с графиком $k = k(m, l)$ и табл. П15 коэффициент $k = 1,4$.

По формуле (6.14) $\Delta(P) = K[\varepsilon(P) + \theta(P)]$ определим доверительный интервал, учитывающий случайную и систематическую составляющие погрешности измерения. Так как $\varepsilon(P) = t_{0,99} S_{\bar{\Pi}} = 2,75 \cdot 3,87 = 10,64$ мм, $\lambda = \theta(P)/S_{\bar{\Pi}} = 1,22$, то $\Delta(0,99) = 0,82 \cdot 15,36 = 12,595$ мм. Коэффициент $K = 0,82$ взят из табл. 6.1.

Результат измерения можно записать в виде $Q_{\Pi} = (2020,5 \pm 12,6)$ мм² при $P = 0,99$.

Пример 6.14. Формула косвенных измерений $Y = (A/B) + C$. В результате большого числа измерений каждого из аргументов получены следующие данные:

$$\bar{A} = 20,00; \sigma_{\bar{A}} = 0,03; \theta_A(P = 0,9) = 0,02,$$

$$\bar{B} = 10,0; \sigma_{\bar{B}} = 0,02; \theta_B(P = 0,95) = 0,05,$$

$$\bar{C} = 3,00; \sigma_{\bar{C}} = 0,01; \theta_C(P = 0,99) = 0,3,$$

где $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ — неисключенные систематические погрешности, определенные в своих доверительных границах, имеющих равномерное распределение и симметрично расположенные около нуля.

Полагая, что распределение результатов косвенных измерений не противоречит нормальному распределению, линеаризация функции Y допустима, определить результат косвенных измерений, случайную и систематическую погрешности результата измерения и записать результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Решение. Результат косвенных измерений $\bar{Y} = (\bar{A}/\bar{B}) + \bar{C} = (20/10) + 3 = 5$. Для определения дисперсии случайной погрешности по формуле (6.18) вычислим первые производные по аргументам от функции Y :

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = \frac{1}{B}; \quad \frac{\partial Y}{\partial B} = -\frac{A}{B^2}; \quad \frac{\partial Y}{\partial C} = 1.$$

Подставим эти выражения в (6.18)

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{Y}}^2 &= \left(\frac{1}{\bar{B}}\right)^2 \sigma_{\bar{A}}^2 + \left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}^2}\right)^2 \sigma_{\bar{B}}^2 + \sigma_{\bar{C}}^2 = \\ &= 10^{-2} \cdot 9 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 10^{-4} = 1,25 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

СКО случайной погрешности результата измерения равно $\sigma_{\bar{Y}} = 1,12 \cdot 10^{-2} \approx 0,01$.

Для вычисления систематической составляющей погрешности в соответствии с формулой (6.12) определим границы этих погрешностей при $m = 1$ (при равномерном распределении погрешностей, см. таблицу в примере 4.2):

$$\theta_{iA} = 0,02/0,9 = 0,022; \quad \theta_{iB} = 0,05/0,95 = 0,0526; \quad \theta_{iC} = 0,03/0,99 = 0,03.$$

В соответствии с формулой (6.11) вычислим систематическую составляющую погрешности при доверительной вероятности $P = 0,95$:

$$\begin{aligned} \theta(P) &= 1,1 \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)^2 \theta_{iA}^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial B}\right)^2 \theta_{iB}^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial C}\right)^2 \theta_{iC}^2} = \\ &= 1,1 \sqrt{10,15 \cdot 10^{-4}} = 1,1 \cdot 0,032 = 0,035. \end{aligned}$$

Доверительный интервал, обусловленный случайной и систематической составляющими погрешностей, определим по формуле (6.14) при $\lambda = \theta(P)/\sigma_{\bar{Y}} = 3,5$ и табл. 6.1:

$$\Delta(0,95) = 0,745 [2 \cdot 0,01 + 0,035] = 0,041.$$

Результат измерения: $Q_Y = 5,00 \pm 0,08$ при $P = 0,95$.

Если нет уверенности в том, что результаты косвенных измерений имеют нормальное распределение, то целесообразно результат измерений и обработки представить в виде $\bar{Y} = 5$; $\sigma_{\bar{Y}} = 0,01$; $\theta(P) = 0,035$; $\Delta(P = 0,95) = 0,041$.

Пример 6.15. Составной резистор набран из разного типа резисторов в соответствии с формулой $R = 2R_1 + 3R_2 + 2R_3 + 4R_4$.

Предварительные измерения позволили установить следующие средние значения сопротивлений резисторов: $\bar{R}_1 = 10,0$ Ом, $\bar{R}_2 = 20,0$ Ом, $\bar{R}_3 = 15,0$ Ом, $\bar{R}_4 = 5,0$ Ом. СКП всех аргументов одинаковы и равны $S_0 = 0,1$ Ом, а границы неисключенных систематических погрешностей, распределенных равномерно и симметрично около среднего значения сопротивления, одинаковы и равны $\theta_0 = 0,2$ Ом. Число измерений каждого аргумента $n = 11$.

Определить результат измерения составного резистора, случайную и систематическую погрешности и записать результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,99$.

Решение. 1. Определим результат косвенного измерения сопротивления составного резистора

$$\bar{R} = 2\bar{R}_1 + 3\bar{R}_2 + 2\bar{R}_3 + 4\bar{R}_4 = 130 \text{ Ом.}$$

2. Используя формулу (6.3), вычисляем дисперсию случайной составляющей погрешности

$$S_{\bar{R}}^2 = \sum_{i=1}^4 b_i^2 S_0^2 = (4 + 9 + 4 + 16) \cdot 10^{-2} = 33 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^2$$

и СКП $S_{\bar{R}} = 0,574$ Ом.

Для определения доверительной границы случайной погрешности результата косвенного измерения $\varepsilon(P)$ вычислим эффективное число степеней свободы по формуле (6.8): $k_{\text{эф}} = 33$. В табл. П5 приведены значения для $k = 30$, при котором $t_{0,99} = 2,75$. Для уточнения значения $t_{0,99}$ можно воспользоваться таблицей, приведенной в [12]: $t_{0,99} \approx 2,72$ при $k_{\text{эф}} = 33$. Тогда $\varepsilon(P = 0,99) = 2,72 \cdot 0,574 = 1,567 \approx 1,56$ Ом.

3. Для использования формулы (6.11) воспользуемся пояснениями, приведенными в табл. П15. Составим вариационный

ряд из неисключенных систематических погрешностей $b_1\theta_1 = b_3\theta_3 < b_2\theta_2 < b_4\theta_4$ или $0,4 = 0,4 < 0,6 < 0,8$. Таким образом, отношения $l_1 = 0,8/0,6 = 1,33$ и $l_2 = 0,6/0,4 = 1,5$. При $m = 4$ максимальный коэффициент $k = k(m = 4; l_1 = 1,33) = 1,4$ (из табл. П15 и графика $k = k(m, l)$).

Из формулы (6.11) получим неисключенную составляющую систематической погрешности

$$\theta(P) = 1,4 \sqrt{\sum_{i=1}^4 b_i^2 \theta_i^2} = 1,4 \sqrt{132 \cdot 10^{-2}} = 1,61 \text{ Ом.}$$

5. Для определения композиции случайной и систематической погрешностей по формуле (6.14) найдем отношение $\lambda = \theta(0,99) / S_{\bar{Y}} = 1,61/0,574 = 2,8$ и по табл. 6.1 коэффициент $K = 0,81$. Тогда $\Delta(0,99) = 0,81 [\varepsilon(0,99) + \theta(0,99)] = 0,81 (1,56 + 1,61) = 2,57 \text{ Ом.}$

6. Результат измерения: $\bar{R} = 130,0 \text{ Ом}$, $S_{\bar{R}} = 0,6 \text{ Ом}$, $n = 11$, $\theta(0,99) = 1,6 \text{ Ом}$. Поскольку границы погрешности результата измерения симметричны и получены при достаточно большом числе измерений, результат измерения можно записать в виде

$$Q_R = (130,0 \pm 2,6) \text{ Ом при доверительной вероятности } P = 0,99.$$

7. Используя данные настоящего примера, определим границы композиции случайной и систематической погрешностей при $P = 0,99$, используя эмпирическую формулу (5.4), вместо табл. 6.1. Для этого вначале по формуле (5.6) определим суммарную дисперсию и СКО:

$$S_{RE} = \sqrt{S_{\bar{R}}^2 + S_{\theta}^2} = \sqrt{S_{\bar{R}}^2 + \sum_{i=1}^4 \frac{b_i^2 \theta_i^2}{3}} = \sqrt{33 \cdot 10^{-2} + \frac{132 \cdot 10^{-2}}{3}} = 0,877 \text{ Ом.}$$

Используя ранее полученные данные, определяем по формуле (5.7) коэффициент

$$t_{P\varepsilon} = \frac{\varepsilon(0,99) + \theta(0,99)}{S_{\bar{R}} + S_{\theta}} = \frac{1,56 + 1,61}{0,57 + 0,66} = \frac{3,17}{1,23} = 2,57,$$

а затем границы суммарного интервала $\Delta^*(0,99) = t_{P\varepsilon} S_{RE} = 2,57 \cdot 0,877 = 2,26$. Отличие от $\Delta(P)$ составляет около 12%.

Пример 6.16. Результаты согласованных 11 измерений сопротивления эмиттерного перехода транзистора по формуле

$$r_3 = \frac{kT}{qI_3} = \frac{0,08625T}{I_3},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{23}$ Дж/К — постоянная Больцмана; $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона; T — температура перехода в кельвинах; I_3 — ток, протекающий через эмиттерный переход транзистора, мКА, приведены в таблице (с. 174).

Определить с помощью метода приведения среднее сопротивление эмиттерного перехода, оценку СКП измерения и коэффициент корреляции, связывающий погрешности аргументов. Записать результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Решение. 1. Используя данные таблицы, результат измерения определяем по формуле (6.22)

$$\bar{r}_3 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{0,08625 T_i}{I_{3i}} = \frac{1}{11} \cdot 273,02 = 24,82 \text{ Ом.}$$

а СКО случайной погрешности — по формуле (6.23)

$$S_{\bar{r}} = \sqrt{\frac{1}{L(L-1)} \sum_{i=1}^{11} (r_{3i} - \bar{r}_3)^2} = \sqrt{\frac{1}{110} \cdot 10,9912} = 0,315 \text{ Ом.}$$

При доверительной вероятности $P = 0,95$ и числе степеней свободы $k = 10$ по табл. П5 найдем $t_{0,95} = 2,228$. Полагая, что распределение погрешности результата измерения не противоречит нормальному, запишем результат измерения в виде (при среднем токе эмиттера 1 мА)

$$Q_r = (24,8 \pm 0,7) \text{ Ом при } P = 0,95.$$

2. Проверим наличие корреляционной связи между погрешностями аргументов, поскольку повышение температуры, как правило, сопровождается увеличением тока эмиттера. Для этого воспользуемся соотношением (6.7), представив его в виде

$$r_{T, I_3} = \frac{1}{L(L-1) S_{\bar{T}} S_{\bar{I}}} \sum_{i=1}^{11} \Delta T_i \Delta I_{3i}.$$

Промежуточные результаты вычислений приведены в таблице (столбцы 8–11). Подставив в предыдущее выражение $L = 11$, $S_{\bar{T}} = 1,16$ К, $S_{\bar{I}} = 16,1$ мКА, сумму из столбца 11, равную 1413,36 К · мКА, получим коэффициент корреляции: $r_{T, I_3} = 0,7$.

6.2. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

Задача 6.1. После обработки опытных данных, имеющих нормальное распределение, были получены следующие результаты начальной (ϑ_n) и конечной (ϑ_k) температур в калориметре с соответствующими СКО:

N_0 п/п	T, K	$I_3, \text{мкА}$	$r_3, \text{Ом}$	$r_{3i} - \bar{r}_3 = \Delta r_3$	Δr_3^2	$T_i - \bar{T} = \Delta T$	ΔT_i^2	ΔI_3	ΔI_{3i}^2	$\Delta T_i \Delta I_{3i}$
1	293,0	1000	25,27	0,45	0,2025	-1,9	3,61	-26,6	707,56	50,54
2	294,5	1105	22,98	-1,84	3,3856	-0,4	0,16	78,4	6146,56	-31,36
3	292,8	1000	25,25	0,43	0,1849	-2,1	4,41	-26,6	707,56	55,86
4	300,4	1110	23,34	-1,48	2,1904	5,5	30,25	83,4	6955,56	458,7
5	293,3	988	25,60	0,78	0,6084	-1,6	2,56	-38,6	1489,96	61,76
6	297,5	1015	25,28	0,46	0,2116	2,6	6,76	-11,6	134,56	-30,16
7	290,4	975	25,69	0,87	0,7569	-4,5	20,25	-51,6	2662,56	232,2
8	298,3	1002	25,67	0,85	0,7225	3,4	11,56	-24,6	606,16	-83,64
9	295,6	1010	25,24	0,42	0,1764	0,7	0,49	-16,6	275,56	-11,62
10	288,2	980	25,36	0,54	0,2916	-6,7	44,89	-46,6	2171,56	312,22
11	299,8	1108	23,34	-1,48	2,1904	4,9	24,01	81,4	6625,96	598,86
	$\bar{T} = 294,89$	$\bar{I}_3 = 1026,6$	$\bar{r}_3 = 24,82$		Сумма 10,9912		$S_T^2 = 1,354$		$S_{I_3}^2 = 258,93$	Сумма 1413,36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$\bar{\vartheta}_n = 25,10718^\circ\text{C}; \quad \bar{S}_n = 0,6 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C};$$

$$\bar{\vartheta}_k = 27,10739^\circ\text{C}; \quad \bar{S}_k = 0,3 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}.$$

Определить разность между конечной и начальной температурами, СКП результата измерения, а также результат измерения с доверительной вероятностью 0,95.

Ответ. Результат измерения $\Delta\bar{\vartheta} = 2,00021^\circ\text{C}$, $S_{\Delta\bar{\vartheta}} = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$, результат измерения с вероятностью $P = 0,95$ ($t_p = 2$) можно записать в виде $\Delta\bar{\vartheta} = (2,00021 \pm 0,00014)^\circ\text{C}$.

Задача 6.2. Для определения средней плотности твердого тела по формуле $\rho = m/V$ было проведено $L = 11$ согласованных измерений объема тела и массы, заключенной в этом объеме. Результаты измерений массы и объема приведены в таблице примера 6.5. Используя экспериментальные данные этой таблицы, с помощью метода приведения определить плотность тела и оценить погрешности измерения.

Записать результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,95$, полагая, что распределение результатов измерения не противоречит нормальному закону.

Ответ. $\bar{\rho} = 1294,463 \text{ кг/м}^3$, $S_{\bar{\rho}} = 0,0027 \text{ кг/м}^3$, $L = 11$;

$$Q_{\rho} = (1294,463 \pm 0,006) \text{ кг/м}^3 \text{ при } P = 0,95 \text{ (} t_{0,95} = 2,228 \text{)}.$$

Задача 6.3. Объем куба $V = a^3$. В результате большого числа измерений ($n > 30$) получено $\bar{a} = 5,32 \text{ см}$, $\sigma_{\bar{a}} = 0,04 \text{ см}$. Определить объем куба, СКП результата измерения, записать результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,99$, а также оценить среднюю систематическую погрешность θ из-за использования при расчетах погрешности операции по линеаризации функции $V = a^3$.

Ответ. $\bar{V} = 150,57 \text{ см}^3$, $\sigma_{\bar{V}} = 3,40 \text{ см}^3$, $\theta = 0,03 \text{ см}^3$;

$$Q_V = (150,57 \pm 8,74) \text{ см}^3 \text{ при } P = 0,99.$$

Задача 6.4. Объем куба $V = a^3$. При числе измерений каждой стороны куба $n = 5$ получено $\bar{a} = 5,32 \text{ см}$, $S_{\bar{a}} = 0,04 \text{ см}$. Определить объем куба, СКП результата измерения, записать результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,99$, а также, используя метод «трех сигм», оценить остаточный член R при операции по линеаризации функции $V = a^3$.

Ответ. $\bar{V} = 15,57 \text{ см}^3$, $S_{\bar{V}} = 3,40 \text{ см}^3$, $R = 1,15 \text{ см}^3$ (линеаризация возможна);

$$Q_V = (150,57 \pm 9,93) \text{ см}^3 \text{ при } P = 0,99.$$

Задача 6.5. В результате измерения эмиттерного сопротивления транзистора по формуле $r_{\varepsilon} = \varphi_T / I_{\varepsilon}$ получены следующие данные при температуре 298 К: $\bar{\varphi}_T = 25$ мВ, $\bar{I}_{\varepsilon} = 1,0$ мА, $\sigma_{\varphi}^2 = 0,000025$ мВ², $\sigma_I^2 = 0,0009$ мА², коэффициент корреляции $r_{\varphi, I} = 0,4$.

Записать результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Ответ. $Q_r = (25,0 \pm 1,0)$ Ом при $P = 0,95$.

Задача 6.6. Общее сопротивление участка цепи вычисляется по формуле $R = 5R_1 + 3R_2 + R_3 + 8R_4 + 6R_5$. Результаты прямых измерений каждого из сопротивлений и их СКП приведены в таблице:

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
Среднее сопротивление \bar{R}_i	10,0	5,0	20,0	6,0	3,0
Оценка СКП результата измерения каждого сопротивления $S_{\bar{R}_i}$	0,05	0,04	0,06	0,05	0,04
Оценка дисперсии $S_{\bar{R}_i}^2 \cdot 10^{-4}$	25	16	36	25	16
Количество измерений каждого сопротивления n_i	5	5	5	5	5

Определить результат измерения, СКП косвенного измерения и записать результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,95$, полагая, что распределение результата косвенного измерения не противоречит нормальному.

Ответ. $\bar{R} = 161$ Ом, $S_{\bar{R}} = 0,5$ Ом, $k_{\varepsilon\Phi} = 14$, $t_{0,95} = 2,145$;

$Q_R = (161,0 \pm 1,1)$ Ом при $P = 0,95$.

Задача 6.7. Имеется функциональная зависимость $Y = AB + C$. В результате большого числа измерений получены следующие данные:

$$\bar{A} = 5,00; \sigma_{\bar{A}} = 0,01; \theta_A = 0,15;$$

$$\bar{B} = 10,0; \sigma_{\bar{B}} = 0,05; \theta_B = 0,20;$$

$$\bar{C} = 20,0; \sigma_{\bar{C}} = 0,04; \theta_C = 0,10,$$

где приведены средние арифметические результатов измерений каждого из аргументов, СКО случайных результатов измерений, границы неисключенных систематических погрешностей. Случайные погрешности имеют нормальное распределение, а систематические — равномерное. Определить результат измерения Y ,

случайную и систематическую погрешности измерения и записать результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Ответ. $\bar{Y} = 70,0$; $\sigma_{\bar{Y}} = 0,27$; $\theta (P = 0,95) = 1,65$; $\Delta (P = 0,95) = 1,73$;
 $Q_Y = 70 \pm 2$ при $P = 0,95$.

Задача 6.8. Составной резистор набран из разного типа резисторов в соответствии с формулой: $R = 3R_1 + 4R_2 + R_3 + 5R_4$. Предварительные измерения позволили установить следующие сопротивления резисторов, их СКО от среднего и границы неисключенных систематических погрешностей распределенных равномерно и симметрично около среднего значения сопротивления резистора (в омах):

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= 10; \sigma_{\bar{R}_1} = 0,1; \theta_1 = \pm 0,06; \\ \bar{R}_2 &= 15; \sigma_{\bar{R}_2} = 0,15; \theta_2 = \pm 0,08; \\ \bar{R}_3 &= 20; \sigma_{\bar{R}_3} = 0,2; \theta_3 = \pm 0,03; \\ \bar{R}_4 &= 8; \sigma_{\bar{R}_4} = 0,1; \theta_4 = \pm 0,1. \end{aligned}$$

Определить результат измерения составного резистора, случайную (СКП) и систематическую погрешности и записать результаты измерения при двух значениях доверительной вероятности $P_1 = 0,95$ и $P_2 = 0,99$.

Ответ. $\bar{R} = 150$ Ом; $\sigma_{\bar{R}} = 0,86$ Ом;
 $\theta (P_1 = 0,95) = 0,68$ Ом; $\Delta (0,95) = 1,85$ Ом;
 $\theta (P_2 = 0,99) = 0,87$ Ом; $\Delta (0,99) = 2,53$ Ом.

Задача 6.9. Общая электрическая емкость цепи составлена из разных емкостей и определяется формулой $C = 3C_1 + 2C_2 + 4C_3$. В результате большого количества измерений каждой емкости установлены следующие средние значения, их СКО случайной погрешности от среднего и границы неисключенных систематических составляющих погрешностей, имеющих равномерное распределение (в пикофарадах):

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= 200,0; \sigma_{\bar{C}_1} = 0,5; \theta_1 = 1,0; \\ \bar{C}_2 &= 400,0; \sigma_{\bar{C}_2} = 0,5; \theta_2 = 1,0; \\ \bar{C}_3 &= 20,0; \sigma_{\bar{C}_3} = 0,1; \theta_3 = 0,2. \end{aligned}$$

Определить результат измерения составной емкости, случайную и систематическую погрешности при значениях доверительной вероятности $P_1 = 0,95$ и $P_2 = 0,99$.

Ответ. $\bar{C} = 1480,0$ пФ; $S_{\bar{C}} = 1,85$ пФ;

$\varepsilon(0,95) = 3,7$ пФ; $\theta(0,95) = 4,1$ пФ; $\Delta(0,95) = 5,5$ пФ;

$\varepsilon(0,99) = 4,8$ пФ; $\theta(0,99) = 5,0$ пФ; $\Delta(0,99) = 8,0$ пФ.

Задача 6.10. Имеется зависимость $Y = 5x_1 + 3x_2 - 4x_3$, в которой случайные погрешности первого и третьего аргументов связаны корреляционной зависимостью с коэффициентом корреляции $r_{13} = 0,6$. Средние значения аргументов, полученные в результате большого количества измерений, и СКО случайной погрешности от среднего соответственно равны

$$\bar{x}_1 = 10,0; \sigma_{\bar{x}_1} = 0,05; \bar{x}_2 = 20,0; \sigma_{\bar{x}_2} = 0,03; \bar{x}_3 = 5,0; \sigma_{\bar{x}_3} = 0,01.$$

Определить результат косвенных измерений и, полагая, что распределение результатов косвенных измерений не противоречат нормальному распределению, записать его результат при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Ответ. $Q_Y = 90,0 \pm 0,2$ при $P = 0,95$.

Задача 6.11. В условиях примера 6.4 определить доверительный интервал для результата измерения при вероятности $P = 0,9$.

Ответ. $R_Z = (246,00 \pm 0,07)$ Ом при $P = 0,9$.



ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ СОВМЕСТНЫХ И СОВОКУПНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

7.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

7.1.1. Метод наименьших квадратов и его применение для линейных функций

Совместные измерения — одновременные измерения нескольких разноименных величин для нахождения зависимости между ними. При совокупных измерениях проводят одновременные измерения нескольких одноименных величин для нахождения зависимости между ними. Эти измерения характеризуются тем, что значения искоемых величин рассчитывают с помощью системы уравнений, в которых эти величины связаны с другими величинами, определяемыми методами простых или косвенных измерений.

Уравнение совместного измерения можно представить как

$$F(A, B, C, \dots, x, y, z, \dots) = l, \quad (7.1)$$

где x, y, z, l — измеряемые величины; A, B, C — величины, которые необходимо определить.

Для нахождения, например, двух неизвестных величин можно провести два измерения и, составив систему из двух уравнений (7.1), получить их решения. Однако такой способ нахождения неизвестных величин неизбежно даст большие погрешности в определении этих величин. Поэтому для повышения точности результата измерения проводят $n \gg m$ измерений, где m — число неизвестных величин. Наибольшее распространение при обработке совместных и совокупных измерений нашел метод наименьших квадратов (МНК). Разработке и применению этого метода посвящена литература [3, 10, 18, 19]. Суть его состоит в следующем.

При проведении n измерений величин x, y, z, \dots и подстановке их в уравнение (7.1) получается система из n уравнений

$$F_i(A, B, C, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots) = l, \quad (7.2)$$

в которых точное равенство невозможно из-за того, что измеряемые величины входят в каждое из уравнений (7.1) с погрешностями. Предположим, что $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \dots$ — наилучшие приближения к истинным значениям неизвестных A, B, C, \dots . Поскольку эти оценки определены со своими погрешностями, то каждое из уравнений (7.2) будет обращаться в тождество, если к правой части добавить некоторое слагаемое v_i , называемое *остаточной погрешностью* условных уравнений:

$$F_i(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \dots) - l_i = v_i \neq 0. \quad (7.3)$$

В системе n условных уравнений (7.3) $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \dots$ — оценки величин A, B, C, \dots , которые будут определены ниже в результате предложенного метода обработки результатов измерений. Особенность системы уравнений (7.3) состоит в том, что невозможно подобрать для всех уравнений значения v_i , такие, чтобы выполнялись все уравнения одновременно. Поэтому рассматривают методы одновременной минимизации остаточных погрешностей

В соответствии с МНК оценки $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \dots$ выбирают таким образом, чтобы обеспечить минимум суммы квадратов остаточных погрешностей условных уравнений, т.е. минимизировать величину

$$V = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n [F_i(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \dots) - l_i]^2 = \min. \quad (7.4)$$

Очевидно, что минимум V будет иметь место при равенстве нулю всех частных производных искомых величин одновременно, т.е. при

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \frac{\partial V}{\partial B} = \frac{\partial V}{\partial C} = \dots = 0. \quad (7.5)$$

Полученная система из m нормальных уравнений позволяет определить наилучшие оценки искомых величин. Дисперсия условных уравнений будет равна

$$S^2 = \frac{1}{n - m} \sum_{i=1}^n v_i^2, \quad (7.6)$$

а СКО результатов измерений искомых величин при этом могут быть определены из формул [10, 18]

$$S_{\tilde{A}} = S \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \dots, S_{\tilde{B}} = S \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \dots, S_{\tilde{C}} = S \sqrt{\frac{A_{33}}{D}} \text{ и т. д.}, \quad (7.7)$$

где D — определитель (детерминант) системы (7.5); $A_{11}, A_{22}, A_{33}, \dots, A_{mm}$ — алгебраическое дополнение элементов детерминанта $A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$, D_{ik} — минор определителя, полученный вычеркиванием i -й строки и k -го столбца.

При обосновании МНК в математической статистике предполагается, что результаты измерений удовлетворяют следующим условиям:

- значения аргументов известны точно;
- результаты измерений содержат лишь случайные погрешности, которые независимы, имеют нулевые средние значения и одинаковые дисперсии;
- погрешности измеряемых величин имеют нормальное распределение.

При этих условиях МНК дает несмещенные оценки искомых неизвестных в зависимости (7.1), имеющие минимальные дисперсии. Однако на практике перечисленные условия выполняются далеко не всегда. В частности, кроме случайных составляющих погрешностей имеют место также и систематические составляющие погрешности. (Довольно подробно вопросы различного применения МНК рассмотрены в работе [19].)

МНК используется также и для обработки неравноточных измерений. Особенности применения формул при неравноточных измерениях рассмотрены в работах [10, 17, 18].

Доверительные интервалы для истинных значений измеряемых величин строят на основе распределения Стьюдента при числе степеней свободы, равном $n - m$, или на основе нормального распределения, если результаты измерений можно считать нормальными.

Пример 7.1. Рассмотрим основные приемы применения МНК на примере нахождения оценок трех неизвестных $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ в линейном уравнении (7.1): $Ax + By + Cz = 1$.

В соответствии с (7.5) найдем частные производные и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial A} &= 2 \sum_{i=1}^n (\tilde{A}x_i + \tilde{B}y_i + \tilde{C}z_i - l_i) x_i = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial B} &= 2 \sum_{i=1}^n (\tilde{A}x_i + \tilde{B}y_i + \tilde{C}z_i - l_i) y_i = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial C} &= 2 \sum_{i=1}^n (\tilde{A}x_i + \tilde{B}y_i + \tilde{C}z_i - l_i) z_i = 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Решая эту систему уравнений относительно искомых переменных, получаем систему нормальных уравнений

$$\begin{aligned}\tilde{A} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \tilde{B} \sum_{i=1}^n x_i y_i + \tilde{C} \sum_{i=1}^n x_i z_i &= \sum_{i=1}^n x_i l_i, \\ \tilde{A} \sum_{i=1}^n y_i x_i + \tilde{B} \sum_{i=1}^n y_i^2 + \tilde{C} \sum_{i=1}^n y_i z_i &= \sum_{i=1}^n y_i l_i, \\ \tilde{A} \sum_{i=1}^n z_i x_i + \tilde{B} \sum_{i=1}^n z_i y_i + \tilde{C} \sum_{i=1}^n z_i^2 &= \sum_{i=1}^n z_i l_i.\end{aligned}\quad (7.9)$$

Для упрощения записи системы нормальных уравнений часто используют обозначения Гаусса

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = [xx], \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = [xy] = [yx] = \sum_{i=1}^n y_i x_i, \quad \sum_{i=1}^n x_i l_i = [xl] \text{ и т. д.} \quad (7.10)$$

В обозначениях Гаусса нормальные уравнения будут иметь более удобный вид

$$\begin{aligned}[xx] \tilde{A} + [xy] \tilde{B} + [xz] \tilde{C} &= [xl], \\ [xy] \tilde{A} + [yy] \tilde{B} + [yz] \tilde{C} &= [yl], \\ [xz] \tilde{A} + [yz] \tilde{B} + [zz] \tilde{C} &= [zl].\end{aligned}\quad (7.11)$$

Преимущество записи нормальных уравнений в виде (7.11) состоит в том, что, используя исходную систему условных уравнений (7.2), можно сразу (без промежуточных вычислений) записать систему (7.9). При этом x и A соответствуют первому члену в уравнении (7.2), y и B — второму члену, z и C — третьему члену и т.д.

Необходимо обратить внимание на две важные особенности матрицы коэффициентов при неизвестных в системах (7.9) и (7.11):

- матрица этих коэффициентов симметрична относительно главной диагонали;
- все элементы главной диагонали положительны.

В процессе решения примеров этой главы эти свойства матрицы нормальных уравнений будут подтверждаться как для совместных, так и для совокупных измерений.

Решения нормальных уравнений записываются с помощью определителей в виде

$$\tilde{A} = \frac{D_A}{D}, \quad \tilde{B} = \frac{D_B}{D}, \quad \tilde{C} = \frac{D_C}{D}, \quad (7.12)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} [xx] & [xy] & [xz] \\ [yx] & [yy] & [yz] \\ [zx] & [zy] & [zz] \end{vmatrix}, \quad D_A = \begin{vmatrix} [xl] & [xy] & [xz] \\ [yl] & [yy] & [yz] \\ [zl] & [zy] & [zz] \end{vmatrix},$$

$$D_B = \begin{vmatrix} [xx] & [xl] & [xz] \\ [yx] & [yl] & [yz] \\ [zx] & [zl] & [zz] \end{vmatrix}, \quad D_C = \begin{vmatrix} [xx] & [xy] & [xl] \\ [yx] & [yy] & [yl] \\ [zx] & [zy] & [zl] \end{vmatrix}.$$

Определители D_A , D_B , D_C получены путем замены первого, второго и третьего столбцов на столбец со свободными членами.

Погрешности полученных результатов оцениваются с помощью соотношений (7.6) и (7.7), где алгебраические дополнения равны

$$A_{11} = \begin{vmatrix} [yy] & [yz] \\ [zy] & [zz] \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} [xx] & [zx] \\ [zx] & [zz] \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} [xx] & [xy] \\ [yx] & [yy] \end{vmatrix}. \quad (7.13)$$

При неравноточных измерениях, т.е., когда условные уравнения (7.3) являются неравноточными, в уравнении минимизации (7.4) необходимо учитывать веса α_i каждого i -го условного уравнения [10].

Пример 7.2. Рассмотрим случай равноточных измерений y и x , связанных линейным уравнением

$$y = a + bx. \quad (7.14)$$

Искомыми величинами являются a и b . Равноточность предполагает, что для всех результатов измерений i значений y_i и x_i их дисперсии не зависят от величин y и x . Кроме того, предполагается, что значение x_i задается в серии измерений *точно*, а учитывается только погрешность определения y_i , в состав которой входит и погрешность, связанная с заданием величин x_i .

Подставив в (7.14) измеренные значения, можно получить систему уравнений

$$\begin{cases} \tilde{a} + x_1 \tilde{b} = y_1, \\ \tilde{a} + x_2 \tilde{b} = y_2, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{a} + x_n \tilde{b} = y_n. \end{cases}$$

Для получения условных уравнений в виде (7.3) к каждому из уравнений (7.2) добавляются (или вычитаются — это все равно)

остаточные погрешности v_i . После этого составляются соотношения типа (7.4):

$$V = \sum_{i=1}^n [y_i - (\tilde{a} + \tilde{b}x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 \rightarrow \min.$$

Для отыскания минимума функции V определяются частные производные по искомым неизвестным a и b :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tilde{a}} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{a} - \tilde{b}x_i) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \tilde{b}} &= -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \tilde{a} - \tilde{b}x_i) = 0. \end{aligned}$$

После упрощения получим систему нормальных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{a} - \tilde{b}x_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{a} - \tilde{b}x_i)x_i &= 0. \end{aligned}$$

Приведем эти уравнения к виду, удобному для вычисления неизвестных с помощью определителя:

$$\begin{aligned} \tilde{a}n + \tilde{b} \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i; \\ \tilde{a} \sum_{i=1}^n x_i + \tilde{b} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned} \tag{7.15}$$

В обозначениях Гаусса система (7.15) будет иметь вид

$$\begin{aligned} [ll]\tilde{a} + [lx]\tilde{b} &= [ly], \\ [lx]\tilde{a} + [xx]\tilde{b} &= [xy]. \end{aligned}$$

Решая (7.15) относительно неизвестных \tilde{a} и \tilde{b} , получаем

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}, \tag{7.16}$$

$$\tilde{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}. \tag{7.17}$$

Умножая числитель и знаменатель на $1/n^2$ и вводя обозначения

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad S_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2,$$

получаем

$$\tilde{a} = \frac{\overline{x^2 \bar{y}} - \bar{x} \overline{xy}}{S_x^2}, \quad \tilde{b} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{S_x^2}. \quad (7.18)$$

В формулах (7.18) дисперсия S_x^2 характеризует рассеянность точно задаваемых значений x_i около среднего значения \bar{x} на оси x . Если прямая (7.14) проходит через начало координат ($a=0$), то формулы (7.18) значительно упрощаются: $\bar{x} = \bar{y} = 0$ и $\tilde{a} = 0$, $\tilde{b} = \overline{xy}/S_x^2$.

Случайные погрешности оценок неизвестных a и b , если использовать соотношения (7.6), (7.7) и систему уравнений (7.15), будут равны [18]

$$S_{\tilde{a}} = S \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial y_i} \right)^2} = S \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{D}}, \quad S_{\tilde{b}} = S \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{b}}{\partial y_i} \right)^2} = S \sqrt{\frac{n}{D}}, \quad (7.19)$$

где $D = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_j \right)^2$ — детерминант системы (7.15).

В данном случае СКО условных уравнений является СКО распределения $y(x)$ и для нормального закона распределения $y(x)$, может быть представлено в виде (см. (7.6))

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n y_i (y_i - \tilde{a} - \tilde{b} x_i)}.$$

Параметры a и b выражаются через суммы всех случайных значений величин $y(x)$ (см. формулы (7.16) и (7.17)). Поэтому закон их распределения, получающийся в результате свертки n законов распределения $y(x)$, нормальный независимо от вида закона распределения $y(x)$ [18].

Пример 7.3. Определить параметры a и b в линейной зависимости $y = a + bx$, а также случайные погрешности их измерения (систематические погрешности отсутствуют) по результатам 10 измерений, приведенным во 2-м и 3-м столбце таблицы:

Номер измерения	x_i	y_i	$(x_i)^2$	$x_i y_i$	$y_i^* = \bar{a} + \tilde{b} x_i$	$v_i = y_i^* - y_i$	v_i^2
1	0	2,2	0	0	1,949	-0,251	0,063
2	0,5	2,4	0,25	1,2	2,48175	0,08175	0,00668
3	1,0	3,0	1,0	3,0	3,0145	0,0145	0,00021
4	1,5	3,2	2,25	4,8	3,54725	0,34725	0,1206
5	2,0	3,9	4,0	7,8	4,08	0,18	0,0324
6	2,5	4,8	6,25	12,0	4,61275	-0,18725	0,035
7	3,0	4,9	9,0	14,7	5,1455	0,2455	0,0603
8	4,0	6,2	16,0	24,8	6,211	0,011	0,00012
9	5,0	7,3	25,0	36,5	7,2765	-0,0235	0,00055
10	6,0	8,1	36,0	48,6	8,342	0,242	0,0585
Σ	25,5	46,0	99,75	153,4			0,37736

Решение. В таблице приведены данные обработки экспериментальных результатов, позволяющих представить нормальные уравнения вида (7.15):

$$10\tilde{a} + 25,5\tilde{b} = 46, \quad 25,5\tilde{a} + 99,75\tilde{b} = 153,4. \quad (1)$$

Используя формулы (7.16), (7.17) и результаты вычислений в таблице, получаем искомые оценки

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{99,75 \cdot 46 - 25,5 \cdot 153,4}{10 \cdot 99,75 - (25,5)^2} = \frac{4588,5 - 3911,7}{347,25} = 1,949, \\ \tilde{b} &= \frac{10 \cdot 153,4 - 25,5 \cdot 46}{347,25} = 1,0625, \end{aligned} \quad (2)$$

а также оценки дисперсии и СКО измерения

$$S^2 = \sum_{i=1}^{10} v_i^2 / (10 - 2) = 0,3774 / 8 = 0,0472; \quad S = 0,217.$$

В соответствии с формулами (7.6), (7.7) и (7.19) СКП измеренных параметров будут равны

$$S_{\tilde{a}} = S \sqrt{\frac{A_{11}}{D}} = 0,217 \sqrt{\frac{99,75}{347,25}} = 0,1163,$$

$$S_{\tilde{b}} = S \sqrt{\frac{A_{22}}{D}} = 0,217 \sqrt{\frac{10}{347,25}} = 0,0368.$$

Полагая, что распределения результатов измерений близки к нормальному, запишем результат измерения параметров a и b с доверительной вероятностью 0,95 в виде

$$Q_a = \tilde{a} \pm 2S_a = 1,95 \pm 0,23, \quad Q_b = \tilde{b} \pm 2S_b = 1,06 \pm 0,07.$$

Пример 7.4. Зависимость электрического сопротивления композиционного материала от температуры выражается формулой $R = R_0(1 + \beta t^2)$ Для определения коэффициента β было проведено 13 равноточных измерений сопротивления при различной температуре (см. таблицу). Используя МНК, вычислить оценку коэффициента β с доверительной вероятностью 0,95.

i	$t_i, ^\circ\text{C}$	$R_i, \text{Ом}$	t_i^2	$R_i t_i^2$	$t_i^4 \cdot 10^4$	$R_i^* = \tilde{a} + \tilde{b} t_i^2$	$v_i = R_i - R_i^*$	v_i^2
1	10	128	100	12 800	1,0	133,61	-5,61	31,472
2	12	140	144	20 160	2,0736	136,686	+3,314	10,983
3	15	170	225	38 250	5,0625	170,985	-0,985	0,970
4	18	190	324	61 560	10,4975	200,586	-10,586	112,063
5	20	230	400	92 000	16,0	223,31	+6,69	44,756
6	25	290	625	181 250	39,0625	290,585	-0,585	0,342
7	30	365	900	328 500	81,0	372,81	-7,81	60,996
8	35	475	1225	581 875	150,0625	469,985	+5,015	25,150
9	40	570	1600	912 000	256,0	582,11	-12,11	146,652
10	45	710	2025	1 437 750	410,0625	709,185	+0,815	0,664
11	50	855	2560	2 137 500	625,0	851,21	+3,79	14,364
12	55	1010	3025	3 055 250	915,0625	1008,185	+1,815	3,294
13	60	1175	3600	4 230 000	1296,0	1180,11	-5,11	26,112
Σ		6308	16 693	13 088 895	3806,7837			477,82

Решение. Представим зависимость сопротивления от температуры в виде

$$R = R_0(1 + \beta t^2) = R_0 + R_0\beta t^2 = a + bt^2. \quad (1)$$

Измеренные значения сопротивлений $R_i = F(t_i^2)$ приведены во 2-м и 3-м столбцах таблицы.

Система нормальных уравнений по аналогии с (7.15) имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{a}n + \tilde{b} \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n R_i, \\ \tilde{a} \sum_{i=1}^n t_i^2 + \tilde{b} \sum_{i=1}^n t_i^4 = \sum_{i=1}^n R_i t_i^2. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя в (2) данные из последней строки таблицы, получаем систему нормальных уравнений с численными коэффициентами

$$\begin{cases} \tilde{a} \cdot 13 + \tilde{b} \cdot 16\,693 = 6308, \\ \tilde{a} \cdot 16\,693 + \tilde{b} \cdot 38\,067\,837 = 13\,088\,895. \end{cases} \quad (3)$$

Вычислив определители D , D_a , D_b , как в предыдущем примере, получим

$$\tilde{a} = \tilde{R}_0 = \frac{D_a}{D} = \frac{22\,430\,633\,261}{216\,238\,632} = 103,73; \quad \tilde{b} = \frac{D_b}{D} = \frac{64\,856\,191}{216\,238\,632} \approx 0,29.$$

Используя формулы (7.19) и результаты обработки данных, приведенные в таблице, получаем СКП результатов измерения параметров a и b : $S = 6,59$, $S_a = 2,77$, $S_b = 0,00162$. Поскольку в формуле (1) было введено обозначение $b = R_0 \beta$, то $\tilde{\beta} = \tilde{b} / \tilde{R}_0 = \tilde{b} / \tilde{a} \approx 0,0029$. СКП температурного коэффициента β может быть определена с помощью формулы (6.18) для косвенных измерений:

$$\begin{aligned} S_{\tilde{\beta}}^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 S_b^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^2 S_a^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 S_b^2 + \left(\frac{b}{a^2}\right)^2 S_a^2 = \\ &= \left(\frac{1}{103,73}\right)^2 \cdot 2,624 \cdot 10^{-6} + \left(\frac{0,29}{10\,759,91}\right)^2 \cdot 7,673 = \\ &= 9,293 \cdot 10^{-5} \cdot 2,624 \cdot 10^{-6} + 7,768 \cdot 10^{-10} \cdot 7,673 = \\ &= 2,4388 \cdot 10^{-10} + 59,604 \cdot 10^{-10} \approx 62,0 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

Отсюда $S_{\tilde{\beta}} = 7,88 \cdot 10^{-5}$, и результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,95$ можно записать в виде

$$R_0 = (103,73 \pm 5,54) \text{ Ом}, \quad \beta = (0,0029 \pm 0,0002)^\circ \text{C}^{-2}.$$

Пример 7.5. Для измерения толщины алюминиевых пластинок в диапазоне от 2,7 до 3,3 см используется радиоизотопный прибор, основанный на принципе поглощения гамма-излучения от источника ионизирующего излучения америция-241. Результаты зависимости средней скорости счета от изменения толщины пластины представлены в таблице (2-й и 3-й столбцы).

Используя МНК, построить линейную градуировочную зависимость и оценить погрешность из-за неточности градуировки.

x_i	Δx_i	N_i	$(\Delta x_i)^2$	$\Delta x_i N_i$	N_i^*	$V_i = N_i - N_i^*$	v_i^2	$N_{i\tau}$	$\delta = \Delta N / N_{i\tau}$
2,70	0	1748	0	0	1700	48	2304	1703	0,18
2,74	0,04	1650	0,016	66	1662	-12	144		
2,80	0,10	1580	0,01	158	1605	-25	625		
2,83	0,13	1550	0,0169	201,5	1576	-26	676		
2,90	0,20	1505	0,04	301	1510	5	25		
3,00	0,30	1450	0,09	435	1415	35	1225	1400	1,07
3,10	0,40	1340	0,16	536	1320	20	400		
3,30	0,60	1120	0,36	672	1129	-9	81	1150	1,82
Σ	1,77	11 943	0,6785	2369			5480		

Решение. Теоретическая зависимость (геометрия узкого пучка) скорости счета на выходе регистрирующего первичного преобразователя от толщины пластины на пути излучения имеет вид

$$N(x) = N_0 \exp(-\mu x), \quad (1)$$

где N_0 — скорость счета в отсутствии поглотителя; μ — линейный коэффициент поглощения излучения. Если изменения толщины происходят в малом диапазоне около некоторого значения толщины x_0 , то в области этой точки (толщины) экспоненциальную зависимость можно аппроксимировать линейной зависимостью в виде (разложение в ряд Тейлора):

$$N(x) = N_0 [\exp(-\mu x_0)] (1 - \mu \Delta x) = A + B \Delta x. \quad (2)$$

В таблице $N_i^* = \tilde{A} + \tilde{B} \Delta x_i$; $N_{i\tau}$ — теоретическое значение средней скорости счета, полученной из (1) при табличном значении коэффициента линейного поглощения гамма-излучения энергией 60 кэВ (источник америций-241) алюминием $\mu = 0,656 \text{ см}^{-1}$; $\Delta N = N_i^* - N_{i\tau}$, $n = 8$ — число измерений.

В соответствии с методом наименьших квадратов составим систему уравнений

$$\begin{cases} \tilde{A}n + \tilde{B}\sum \Delta x_i = \sum N_i, \\ \tilde{A}\sum \Delta x_i + \tilde{B}\sum (\Delta x_i)^2 = \sum \Delta x_i N_i. \end{cases} \quad (3)$$

Используя результаты вычислений, приведенные в таблице, систему уравнений (3) и решений этой системы в виде (7.16) и (7.17), получаем

$$N_i = \tilde{A} + \tilde{B} \Delta x_i = 1700 - 951 \Delta x_i. \quad (4)$$

В таблице приведено сравнение (два последних столбца) полученной зависимости в характерных точках диапазона градуировки: в начале, середине и конце шкалы. Видно, что погрешность от неточности линейной градуировочной зависимости не превышает 2%. Используя формулы (7.19) и вычисления, представленные в таблице, получаем, что дисперсия измерений $S^2 = 5480/6 = 913,3$, а СКО оценок A и B соответственно равны

$$S_A = 30,2 \sqrt{\frac{0,6785}{2,3}} = 30,2 \cdot 0,543 = 16,4 \text{ с}^{-1};$$

$$S_B = 30,2 \sqrt{\frac{8}{2,3}} = 56,3 \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Пример 7.6. Используя метод наименьших квадратов, можно доказать эффективность оценки математического ожидания при n измерениях одной и той же физической величины x .

Известно, что среднее арифметическое \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

является наилучшим приближением к математическому ожиданию m_x . Докажем, что дисперсия этой оценки является минимальной, т.е. оценка эффективная. Для этого предположим, что среднее арифметическое равно некоторому значению x^* .

Рассмотрим условие, при котором сумма квадратов отклонений измеренных значений от выбранного x^* (т.е. сумма дисперсий) становится минимальной:

$$V = \sum_{i=1}^n (x_i - x^*)^2 = \min.$$

Используя первую производную по x^* , получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x^*} = \sum_{i=1}^n -2(x_i - x^*) = 0 \quad \text{или} \quad x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

7.1.2. Применение метода наименьших квадратов для нелинейных функций

При нелинейной зависимости (7.1), если по условиям эксперимента допустима замена нелинейной функции на линейную в некотором диапазоне изменения аргумента x , после такой замены определение параметров A и B осуществляется с помощью МНК. Подобный случай рассмотрен в примере 7.5.

В общем виде задача определения неизвестных параметров A и B при нелинейной зависимости (7.1) от них с помощью МНК осуществляется в несколько этапов. Вначале функция (7.1) линеаризуется в области некоторых значений искомым параметров и отыскивается первое приближенное выражение для искомой функции с помощью МНК. Если полученное приближение отвечает заданной (требуемой) точности, то полученное приближение функции принимается. Если полученное приближение не отвечает требуемой точности, то, используя его, переходят к более точному приближению, т.е. для получения результата требуемой точности используется итерационный процесс.

Для упрощения решения нелинейных зависимостей часто применяют замену переменных с помощью функционального преобразования, которое приводит нелинейную функцию к линейной. Наиболее распространенными преобразованиями является использование логарифмических и обратных функций (см. табл. П16, а также примеры 7.4, 7.8 и 7.9). Построение нелинейных зависимостей методом наименьших квадратов приведено в [19].

Пример 7.7. Рассмотрим общий случай применения МНК к нелинейной зависимости. Пусть имеется нелинейная зависимость

$$y = F(a, b, x), \quad (7.20)$$

где a, b — параметры, которые необходимо определить. Рассмотрим в этом примере применение МНК для двух случаев (процедур) получения нормальных уравнений [17, 18]:

1) вначале с помощью разложения в ряд Тейлора записывается линейное приближение уравнения (7.20), а затем, минимизируя сумму остаточных погрешностей условных уравнений, формируется система нормальных уравнений;

2) вначале минимизируется сумма остаточных погрешностей условных уравнений, а затем с помощью разложения в ряд Тейлора, ограничиваясь линейным приближением, формируется система нормальных уравнений.

В первом случае функциональная зависимость (7.20) представляется в виде

$$y_i = F_i(a, b, x_i) \approx \left[F_i(a_0, b_0, x_i) + \frac{\partial F_i(a_0, b_0, x_i)}{\partial a} \alpha + \frac{\partial F_i(a_0, b_0, x_i)}{\partial b} \beta \right], \quad (7.21)$$

где $a = a_0 + \alpha$, $b = b_0 + \beta$, α и β — малые величины.

Составляется система условных уравнений для линейного приближения функции (7.20): $y_i - F(\tilde{a}, \tilde{b}, x_i) = v_i$, а затем, как обычно, отыскивается минимум суммы условных уравнений по параметрам α и β :

$$\sum_{i=1}^n \left[y_i - F(a_0, b_0, x_i) - \frac{\partial F(a_0, b_0, x_i)}{\partial a} \alpha - \frac{\partial F(a_0, b_0, x_i)}{\partial b} \beta \right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i^2 \rightarrow \min. \quad (7.22)$$

Приравняв первые производные по α и β нулю и отбросив произведения малых величин второго порядка малости, получим систему нормальных уравнений относительно параметров α и β :

$$\alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_{0i}}{\partial a} \right)^2 + \beta \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_{0i}}{\partial a} \frac{\partial F_{0i}}{\partial b} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial F_{0i}}{\partial a} - \sum_{i=1}^n F_{0i} \frac{\partial F_{0i}}{\partial a},$$

$$\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_{0i}}{\partial a} \frac{\partial F_{0i}}{\partial b} + \beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_{0i}}{\partial b} \right)^2 = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial F_{0i}}{\partial b} - \sum_{i=1}^n F_{0i} \frac{\partial F_{0i}}{\partial b}, \quad (7.23)$$

где для упрощения записи введено обозначение $F_{0i} = F(a_0, b_0, x_i)$ — значение функции (7.20) и ее производных в точке a_0, b_0, x_i .

Во втором случае составляется система условных уравнений для нелинейной функции (7.20) и затем отыскивается минимум по параметрам a и b :

$$\sum_{i=1}^n [y_i - F(\tilde{a}, \tilde{b}, x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 \rightarrow \min. \quad (7.24)$$

Приравняв нулю первые производные по параметрам a и b , получим нелинейные относительно \tilde{a} и \tilde{b} нормальные уравнения

$$\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial F(\tilde{a}, \tilde{b}, x_i)}{\partial \tilde{a}} = \sum_{i=1}^n F(\tilde{a}, \tilde{b}, x_i) \frac{\partial F(\tilde{a}, \tilde{b}, x_i)}{\partial \tilde{a}},$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial F(\tilde{a}, \tilde{b}, x_i)}{\partial \tilde{b}} = \sum_{i=1}^n F(\tilde{a}, \tilde{b}, x_i) \frac{\partial F(\tilde{a}, \tilde{b}, x_i)}{\partial \tilde{b}}. \quad (7.25)$$

Представляя, как и ранее, искомые параметры в виде $\tilde{a} = a_0 + \alpha$, $\tilde{b} = b_0 + \beta$, где a_0, b_0 — нулевые приближения параметров; α, β — малые приращения параметров, осуществляют линейризацию нормальных уравнений (7.25). Для этого представляют функцию (7.20) в виде (7.21), первые производные вычисляют при $a = a_0, b = b_0$:

$$\frac{\partial F(\tilde{a}, \tilde{b}, x_i)}{\partial \tilde{a}} \approx \frac{\partial F(a_0, b_0, x_i)}{\partial a} = \frac{\partial F_{0i}}{\partial a},$$

$$\frac{\partial F(\tilde{a}, \tilde{b}, x_i)}{\partial \tilde{b}} \approx \frac{\partial F(a_0, b_0, x_i)}{\partial b} = \frac{\partial F_{0i}}{\partial b}.$$

Можно показать, что после соответствующих преобразований и отбрасывания произведений малых величин второго порядка малости получим систему нормальных уравнений относительно параметров α и β в виде (7.23).

Поскольку a_0 и b_0 — неслучайные величины, то дисперсии $S^2(\tilde{a}) = S^2(\alpha)$, $S^2(\tilde{b}) = S^2(\beta)$.

Пример 7.8. В качестве иллюстрации рассмотрим применение МНК для зависимости между двумя величинами x и y в виде $y = a + b^2x$. Экспериментальные данные этой зависимости, полученные при точном задании переменной x , приведены в столбцах 2 и 3 таблицы на с. 194. Определить оценки параметров a и b и оценки их СКО.

Решение. 1. Поскольку уравнение $F(a, b, x)$ нелинейно относительно одного из искомых параметров, то представим это уравнение в линейном виде в окрестности некоторой точки a_0 и b_0 :

$$y \approx (a_0 + b_0^2x) + \frac{\partial F(a_0, b_0)}{\partial a} \alpha + \frac{\partial F(a_0, b_0)}{\partial b} \beta = (a_0 + b_0^2x) + \alpha + 2b_0x\beta.$$

Тогда условное уравнение будет иметь вид

$$y_i \approx (a_0 + b_0^2x_i) + \alpha + 2b_0\beta x_i.$$

В соответствии с (7.22) составим сумму уравнений с остаточными погрешностями

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + b_0^2x_i) - \alpha - 2b_0\beta x_i]^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

Используя первые производные по искомым параметрам (α , β) и производя необходимые сокращения и преобразования, получаем систему нормальных уравнений (см. (7.23)):

$$\alpha n + 2\beta b_0 \sum x_i = \sum y_i - \sum y_{0i},$$

$$2\alpha b_0 \sum x_i + 4\beta b_0^2 \sum x_i^2 = 2b_0 [\sum x_i y_i - \sum x_i y_{0i}],$$

где $y_{0i} = a_0 + b_0^2 x_i$ — суммы по n измерениям.

Эта система уравнений в операторной форме будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 2b_0 \sum x_i \\ 2b_0 \sum x_i & 4b_0^2 \sum x_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i - \sum y_{0i} \\ 2b_0 (\sum x_i y_i - \sum x_i y_{0i}) \end{pmatrix}.$$

Номер измерений	x_i , точное	y_i , эксперимент.	x_i^2	$x_i y_i$	y_{0i}	$x_i y_{0i}$	y_i^*	$v_i = y_i - y_i^*$	v_i^2
1	2,0	32,100	4,00	64,200	33,7	67,40	31,984	+0,116	0,01346
2	2,2	34,900	4,84	76,780	36,9	81,18	35,034	-0,134	0,01796
3	2,5	39,720	6,25	99,300	41,7	104,25	39,609	+0,111	0,0123
4	2,8	43,980	7,84	123,144	46,5	130,20	44,184	-0,204	0,0416
5	3,0	47,330	9,00	141,990	49,7	149,10	47,234	+0,096	0,0092
6	3,1	48,500	9,61	150,350	51,3	159,03	48,759	-0,259	0,0671
7	3,5	55,035	12,25	192,620	57,7	201,95	54,859	+0,176	0,0310
8	3,8	59,570	14,44	226,366	62,5	237,50	59,434	+0,136	0,0185
9	4,0	62,600	16,00	250,400	65,7	262,80	62,484	+0,116	0,01346
10	4,2	65,300	17,64	274,260	68,9	289,38	65,5342	-0,234	0,0547
Σ	31,1	489,035	101,87	1599,410	514,6	1682,79			0,2793
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Из экспериментальных данных можно определить примерные значения параметров a и b , например, решив одну из систем, состоящую из двух уравнений с двумя неизвестными. Используя результаты решения этих систем, выбираем в качестве нулевого приближения $a_0 = 1,7$ и $b_0 = 4,0$. С учетом этих значений параметров a_0 и b_0 вычисленные данные приведены в столбцах 6–10.

Для определения искомых параметров первого приближения α и β представим систему нормальных уравнений с численными коэффициентами

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 248,8 \\ 248,8 & 6519,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25,565 \\ -667,04 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители системы

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 248,8 \\ 248,8 & 6519,68 \end{vmatrix} = 65\,196,8 - 61\,901,44 = 3295,36,$$

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} -25,565 & 248,8 \\ -667,04 & 6519,68 \end{vmatrix} = -713,068,$$

$$D_\beta = \begin{vmatrix} 10 & -25,565 \\ 248,8 & -667,04 \end{vmatrix} = -309,828$$

и соответствующие искомые параметры α и β :

$$\alpha = \frac{D_\alpha}{D} = -\frac{713,068}{3295,36} = -0,216, \quad \beta = \frac{D_\beta}{D} = -\frac{309,828}{3295,36} = -0,094.$$

Таким образом,

$$\tilde{a} = a_0 + \alpha = 1,7 - 0,216 = 1,484; \quad \tilde{b} = b_0 + \beta = 4,0 - 0,094 = 3,906.$$

Уравнение для вычисления СКП измерений будет иметь вид (столбец 8 таблицы)

$$y_i^* = 1,484 + (3,906)^2 x_i = 1,484 + 15,25x_i.$$

СКП измерений и соответственно параметров a и b будут равны ($n = 10$, $m = 2$)

$$S = \sqrt{\frac{v_i^2}{n-m}} = \sqrt{\frac{0,279}{8}} = 0,187,$$

$$S_{\tilde{a}} = S_\alpha = S \sqrt{\frac{A_{11}}{D}} = 0,187 \sqrt{\frac{10}{3295}} \approx 0,01,$$

$$S_{\tilde{b}} = S_\beta = S \sqrt{\frac{A_{22}}{D}} = 0,187 \sqrt{\frac{6519}{3295}} = 0,26.$$

С доверительной вероятностью 0,95 результаты измерений можно представить в виде $\tilde{a} = 1,48 \pm 0,02$; $\tilde{b} = 3,91 \pm 0,52$.

2. Параметры a и b могут быть вычислены, не прибегая к линеаризации зависимости $y = a + b^2x$, если сделать замену переменных $b^2 = c$. Тогда для уравнения $y = a + cx$ параметры a и c можно вычислить обычным способом, приведенным в примере 7.2.

С помощью уравнений (7.16) и (7.17) и данных таблицы получим $\tilde{a} = 1,482$, $\tilde{c} = 15,25$ и $\tilde{b} = 3,905$. Поскольку параметры \tilde{a} и \tilde{b} практически не отличаются от ранее вычисленных, то оценка СКО $S = 0,187$. Дальнейшие вычисления позволяют получить $S_{\tilde{a}} = 0,083$ и $S_{\tilde{c}} = 0,26$. Оценку СКП для b получим из соотношения

$$S_{\tilde{b}} = \frac{\partial b}{\partial c} S_{\tilde{c}} = \frac{1}{2c} S_{\tilde{c}} = 0,033.$$

Таким образом, с доверительной вероятностью $P = 0,95$ получим

$$\tilde{a} = 1,48 \pm 0,17; \quad \tilde{b} = 3,91 \pm 0,07.$$

Поскольку способы вычисления параметров и их оценок различны, то и оценки СКО параметров a и b получились разные. Первый способ предполагает итерационный процесс вычисления.

Пример 7.9. Для измерения линейного коэффициента поглощения μ ионизирующего излучения радионуклидного источника америция-241, проходящего через алюминиевую пластинку, используется зависимость (геометрия узкого пучка излучения)

$$N_x = N_0 \exp(-\mu x), \quad (1)$$

где N_0 — число импульсов в секунду (скорость счета) при $x=0$; x — толщина алюминиевой пластины; N_x — скорость счета импульсов зарегистрированного датчиком излучения после ослабления излучения пластиной.

Данные измерения скорости счета N_x в зависимости от изменения толщины x алюминиевой пластины приведены в таблице. Поскольку с увеличением толщины x скорость счета N_x уменьшается (см. (1)), то для обеспечения равноточности измерения регистрируемой скорости счета время измерения (время набора общего числа импульсов) увеличивалось с увеличением толщины. Наибольшее значение времени соответствует 1000 с.

i	x_i	N_{xi}	$y_i = \ln N_{xi}$	x_i^2	$x_i y_i$	$y_i^* = \bar{a} + \bar{b} x_i$	$(y_i - y_i^*) = v_i \cdot 10^{-2}$	$v_i^2 \cdot 10^{-4}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,5	7180	8,8808	0,25	4,4404	8,8820	-0,12	0,0144
2	1,0	5270	8,5584	1,00	8,5584	8,5540	+0,44	0,1936
3	1,2	4545	8,4218	1,44	10,1062	8,4228	-0,1	0,01
4	1,8	3072	8,0295	3,24	14,4530	8,0292	+0,03	0,0009
5	2,1	2515	7,8301	4,41	16,4432	7,8324	-0,23	0,0529
6	2,4	2067	7,6338	5,76	18,3211	7,6356	-0,18	0,0324
7	2,51	1932	7,5658	6,30	18,9900	7,5634	+0,236	0,0557
8	2,62	1790	7,4900	6,86	19,6240	7,4913	-0,128	0,0164
9	2,74	1665	7,4178	7,51	20,3248	7,4126	+0,654	0,428
10	2,9	1491	7,3066	8,41	21,1890	7,3076	-0,1	0,01
11	3,1	1308	7,1708	9,61	22,2500	7,1764	-0,56	0,3136
12	3,5	1012	6,9172	12,25	24,2193	6,9140	+0,38	0,1444
13	3,68	884	6,7842	13,54	24,9690	6,7959	-1,172	1,3736
14	3,8	825	6,7215	14,44	25,5170	6,7172	+0,432	0,1866
15	4,1	678	6,5192	16,81	26,7280	6,5204	-0,12	0,0144
Σ	37,95		113,24	111,83	276,12			2,847

Решение. Для решения этой задачи с помощью МНК представим зависимость (1) в виде (см. табл. П16)

$$y_i = \ln N_x = \ln N_0 + (-\mu) x_i = a + bx_i, \quad (2)$$

где $a = \ln N_0$, $b = -\mu$.

Данные в соответствии с расчетом МНК приведены в таблице, используя которые можно составить следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{a} \cdot 15 + \tilde{b} \cdot 37,95 = 113,24, \\ \tilde{a} \cdot 37,95 + \tilde{b} \cdot 111,83 = 276,12. \end{cases} \quad (3)$$

Вычислим определители системы (3):

$$D = \begin{vmatrix} 15 & 37,5 \\ 37,5 & 111,83 \end{vmatrix} = 237,2475, \quad D_{\tilde{a}} = \begin{vmatrix} 113,24 & 37,5 \\ 276,12 & 111,83 \end{vmatrix} = 2184,85, \\ D_{\tilde{b}} = \begin{vmatrix} 15 & 113,24 \\ 37,5 & 276,12 \end{vmatrix} = -155,66,$$

а затем искомые величины

$$\tilde{a} = \frac{D_{\tilde{a}}}{D} = \frac{2184,85}{237,2475} = 9,209 \approx 9,21, \quad \tilde{b} = \frac{D_{\tilde{b}}}{D} = \frac{-155,66}{237,2475} = -0,656.$$

Для определения СКП измерения найденных величин необходимо вычислить значения $y_i^* = 9,21 - 0,656x_i$ (см. таблицу, столбец 7) и разницу между значениями y_i , полученными экспериментально, и y_i^* , вычисленными с помощью формулы с коэффициентами \tilde{a} , \tilde{b} , т.е. v_i (столбец 8):

$$S = \sqrt{\frac{v_i^2}{n-m}} = \sqrt{\frac{2,847}{13}} \cdot 10^{-2} = 0,47 \cdot 10^{-2}, \\ S_{\tilde{a}} = S \sqrt{\frac{A_{11}}{D}} = S \sqrt{\frac{111,83}{237,25}} = 0,0032, \\ S_{\tilde{b}} = S \sqrt{\frac{A_{22}}{D}} = S \sqrt{\frac{15}{237,25}} = 0,002.$$

Поскольку $a = \ln N_0$, то $S_a^2 = (1/N_0)^2 S_N^2$ и $S_N = N_0 S_a$. Тогда, исходя из того, что $\tilde{a} = \ln \tilde{N}_0$, получим $\tilde{N}_0 = 9982 \text{ с}^{-1}$.

Используя вычисленные данные и полагая, что результаты измерений не противоречат нормальному закону распределения, запишем результат измерения в доверительном интервале с вероятностью 0,95:

$$\tilde{\mu} = (0,656 \pm 0,004) \text{ см}^{-1}, \quad \tilde{N}_0 = (9982 \pm 64) \text{ с}^{-1}.$$

7.1.3. Обработка данных при совокупных измерениях

Совокупные измерения широко используются в метрологии, как правило, при калибровке набор мер (например, гирь, призм, сопротивлений и т.д.) или шкал приборов. Обработка результатов измерений осуществляется МНК. Однако его применение для этих целей имеет некоторые особенности. Они связаны прежде всего с тем, что уравнения для совокупных одноименных величин A_1, A_2, \dots, A_m имеют вид

$$y_i = \sum_{j=1}^m C_{ij} A_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где m — число измеряемых величин; n — число измерений, обычно $n > m$. Коэффициенты C_{ij} принимают значения 0, 1, -1. Коэффициенты $C_{ij} = 1$, если измеряется сумма величин, в которую входит A_j ; $C_{ij} = -1$, если сумма нескольких величин сравнивается с A_j ; $C_{ij} = 0$, если величина A_j не участвует в i -м измерении. По результатам y_i измерений или сличений различных сочетаний величин A_j находят значения этих величин.

Кроме того, во многих случаях из физических условий измерений вводятся дополнительные точные условия, связывающие искомые величины, — так называемые уравнения связи. При наличии уравнений связи можно выразить часть неизвестных через остальные.

Пример 7.10. Допустим, что рабочий эталон массы $M_0 = 5$ г (точно) используется для аттестации двух гирь массой 2 г и двух гирь массой 1 г: $M_1 = 2$ г, $M_2 = 2^*$ г, $M_3 = 1$ г, $M_4 = 1^*$ г. Для этого производится последовательное взвешивание (сравнение) различных сочетаний гирь «одинаковых» масс на рычажных весах. При этих измерениях зафиксированы следующие различия в массах, которые обозначены как m_i ($i = 1, \dots, 7$):

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 + M_3 - M_0 &= m_1, \\ M_1 - M_3 - M_4 &= m_2, \\ M_2 - M_3 - M_4 &= m_3, \\ M_3 - M_4 &= m_4, \\ M_1 - M_2 &= m_5, \\ M_1 + M_3 - M_2 - M_4 &= m_6, \\ M_1 + M_2 + M_4 - M_0 &= m_7, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,05 \text{ г}, \quad m_2 = 0,05 \text{ г}, \quad m_3 = -0,01 \text{ г}, \\ m_4 &= 0,01 \text{ г}, \quad m_5 = -0,01 \text{ г}, \quad m_6 = -0,02 \text{ г}, \quad m_7 = 0,05 \text{ г}. \end{aligned} \quad (2)$$

Считая измерения равноточными, определить с помощью МНК оценку действительных значений масс указанных четырех гирь (мер). Полагая, что результаты измерений не противоречат нормальному закону, определить доверительный интервал результатов измерений при вероятности 0,9.

Решение. Для составления условных уравнений относительно погрешностей взаимного определения масс гирь примем, что

$$M_1 = M_{10} + \alpha, \quad M_2 = M_{20} + \beta, \quad M_3 = M_{30} + \gamma, \quad M_4 = M_{40} + \xi, \quad (3)$$

где $M_{10} = M_{20} = 2$ г и $M_{30} = M_{40} = 1$ г — номинальные значения масс; $\alpha, \beta, \gamma, \xi$ — отклонения масс гирь от своих номинальных значений, которые необходимо найти с помощью МНК. Поскольку значения m_i определены с погрешностями, то составим систему условных уравнений для отклонений масс гирь в виде

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma - m_1 &= v_1, \\ \alpha - \gamma - \xi - m_2 &= v_2, \\ \beta - \gamma - \xi - m_3 &= v_3, \\ \gamma - \xi - m_4 &= v_4, \\ \alpha - \beta - m_5 &= v_5, \\ \alpha + \gamma - \beta - \xi - m_6 &= v_6, \\ \alpha + \beta + \xi - m_7 &= v_7. \end{aligned} \quad (4)$$

При составлении уравнений (4) учтено, что $M_{10} + M_{20} + M_{30} = M_0$ и $M_{10} + M_{20} + M_{40} = M_0$.

После операции минимизации суммы квадратов остаточных погрешностей $\sum_{i=1}^7 v_i^2$ относительно каждого из четырех неизвестных ($\alpha, \beta, \gamma, \xi$) получим следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma - 1 \cdot \xi &= \mu_1, \\ 0 \cdot \alpha + 5 \cdot \beta - 1 \cdot \gamma + 1 \cdot \xi &= \mu_2, \\ 1 \cdot \alpha - 1 \cdot \beta + 5 \cdot \gamma + 0 \cdot \xi &= \mu_3, \\ -1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma + 5 \cdot \xi &= \mu_4, \end{aligned} \quad (5)$$

в которых для упрощения записи системы (5) введены обозначения:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_7 &= \mu_1, \\ m_1 + m_3 - m_5 - m_6 - m_7 &= \mu_2, \\ m_1 - m_2 - m_3 + m_4 + m_6 &= \mu_3, \\ -m_2 - m_3 - m_4 - m_6 - m_7 &= \mu_4. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя данные (2), получаем: $\mu_1 = 12 \cdot 10^{-2}$ г, $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ г, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 2 \cdot 10^{-2}$ г.

Решим систему нормальных уравнений относительно переменных α , β , γ и ξ . Для этого вначале вычислим определитель системы (5)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 525 \quad (7)$$

и определители искоемых переменных:

$$\Delta_{\tilde{\alpha}} = \begin{vmatrix} \mu_1 & 0 & 1 & -1 \\ \mu_2 & 5 & -1 & 1 \\ \mu_3 & -1 & 5 & 0 \\ \mu_4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 115\mu_1 - 10\mu_2 - 25\mu_3 + 25\mu_4 = 14,10, \quad (8)$$

$$\Delta_{\tilde{\beta}} = \begin{vmatrix} 5 & \mu_1 & 1 & -1 \\ 0 & \mu_2 & -1 & 1 \\ 1 & \mu_3 & 5 & 0 \\ -1 & \mu_4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10\mu_1 + 115\mu_2 + 25\mu_3 - 25\mu_4 = 0,60, \quad (9)$$

$$\Delta_{\tilde{\gamma}} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & \mu_1 & -1 \\ 0 & 5 & \mu_2 & 1 \\ 1 & -1 & \mu_3 & 0 \\ -1 & 1 & \mu_4 & 5 \end{vmatrix} = -25\mu_1 - 25\mu_2 + 115\mu_3 - 10\mu_4 = -2,70, \quad (10)$$

$$\Delta_{\tilde{\xi}} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & \mu_1 \\ 0 & 5 & -1 & \mu_2 \\ 1 & -1 & 5 & \mu_3 \\ -1 & 1 & 0 & \mu_4 \end{vmatrix} = 25\mu_1 - 25\mu_2 - 10\mu_3 + 115\mu_4 = 4,80. \quad (11)$$

Вычислим значения переменных, используя (7)–(11):

$$\alpha = \frac{\Delta_{\tilde{\alpha}}}{\Delta} = 0,027 \text{ г}, \quad \beta = \frac{\Delta_{\tilde{\beta}}}{\Delta} = 0,0011 \text{ г},$$

$$\gamma = \frac{\Delta_{\tilde{\gamma}}}{\Delta} = -0,005 \text{ г}, \quad \xi = \frac{\Delta_{\tilde{\xi}}}{\Delta} = 0,009 \text{ г}.$$

Таким образом, оценки действительных значений масс гирь равны

$$M_1 = 2,027 \text{ г}, \quad M_2 = 2,001 \text{ г}, \quad M_3 = 1,995 \text{ г}, \quad M_4 = 1,009 \text{ г}.$$

Теперь определим дисперсию условных уравнений по формулам (7.5). Для этого, используя систему условных уравнений (4) и подставляя в них найденные значения неизвестных α , β , γ , и ξ , а также m_i из (1), получаем следующие значения $v_i \cdot 10^{-2}$: $v_1 = -2,70$, $v_2 = -2,73$, $v_3 = 0,70$, $v_4 = -2,41$, $v_5 = 3,57$, $v_6 = 3,16$, $v_7 = -1,29$ — и в соответствии с (7.6) определим

$$S^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^7 v_i^2 = 15,14 \cdot 10^{-4} \text{ г}, \quad S = 3,89 \cdot 10^{-2} \text{ г} \approx 39 \text{ мг.}$$

В этом соотношении учтено, что число измерений $n = 7$, число переменных $m = 4$.

В соответствии с (7.5) вычислим алгебраические дополнения к определителю (7), получаемые для переменной α вычеркиванием 1-й строки и 1-го столбца, переменной β — 2-й строки и 2-го столбца, переменной γ — 3-й строки и 3-го столбца и переменной ξ — 4-й строки и 4-го столбца. После вычисления получим $\Delta_{11} = \Delta_\alpha = \Delta_{22} = \Delta_\beta = \Delta_{33} = \Delta_\gamma = \Delta_{44} = \Delta_\xi = 115$ и далее оценки дисперсий

$$S_\alpha^2 = S_\beta^2 = S_\gamma^2 = S_\xi^2 = \frac{115}{525} \cdot 15,14 \cdot 10^{-4} = 3,316 \cdot 10^{-4} \text{ г}^2$$

и СКО $S_\alpha = S_\beta = S_\gamma = S_\xi = 0,0182 \text{ г} = 18,2 \text{ мг}$. Довольно большая дисперсия и, соответственно — СКО результатов оценки действительных значений масс гирь обусловлена большими погрешностями, которые были получены при измерении различных сочетаний взвешиваемых масс (50; 50; -10; 10; -10; -20; 50 мг).

Если распределение результатов измерений не противоречит нормальному распределению, то, используя табл. П5 при $k = n - m = 3$, получим $t_{0,90} = 2,353$.

Таким образом, доверительный интервал для вероятности $P = 0,90$ будет составлять $\varepsilon(P) = t_{0,90} S = 2,353 \cdot 18,2 \cdot 10^{-2} \approx 0,043 \text{ г} = 43 \text{ мг}$.

Пример 7.11. Выполняется калибровка углов четырехгранной призмы. При определении отклонений φ_i углов призмы от 90° и их сумм получены следующие значения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = 5'35''; \quad \varphi_2 = 3'22''; \quad \varphi_3 = -2'47''; \quad \varphi_4 = -6'26''; \\ \varphi_1 + \varphi_2 = 8'50''; \quad \varphi_2 + \varphi_3 = 31''; \quad \varphi_3 + \varphi_4 = -8'53''; \quad \varphi_4 + \varphi_1 = -37''. \end{aligned} \quad (1)$$

Сумма отклонений четырех углов призмы $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \neq 0$, и это свидетельствует о том, что отклонения углов измерены с некоторыми погрешностями.

Определить (поправить) отклонения углов четырехгранной призмы, учитывая, что алгебраическая сумма их должна быть равна нулю. Измерения равноточные.

Решение. Из условия, что сумма углов призмы равна 360° , можно получить уравнение связи для отклонения углов $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0$ и, соответственно, выразить одно из переменных через другие для того, чтобы сократить количество отыскиваемых переменных до трех. Подставив в (1)

$$\varphi_4 = -(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3), \quad (2)$$

получим вместо седьмого и восьмого условий (1) дополнительные соотношения, связывающие между собой отклонения трех углов: $\varphi_1 + \varphi_2 = 8'53''$ и $\varphi_2 + \varphi_3 = 37''$. Введя для упрощения расчетов следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 &= 6'26'' = 386'' = \varphi_{123}, \\ \varphi_1 + \varphi_2 &= 8'50'' = 530'' = \varphi_{12}, \\ \varphi_2 + \varphi_1 &= 8'53'' = 533'' = \varphi_{21}, \\ \varphi_2 + \varphi_3 &= 31'' = \varphi_{23}, \\ \varphi_3 + \varphi_2 &= 37'' = \varphi_{32}, \end{aligned} \quad (3)$$

запишем по результатам экспериментальных данных следующую систему условных уравнений:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 0 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 0 \cdot \tilde{\varphi}_3 &= \varphi_1, \\ 0 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 0 \cdot \tilde{\varphi}_3 &= \varphi_2, \\ 0 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 0 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_3 &= \varphi_3, \\ 1 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_3 &= \varphi_{123}, \\ 1 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 0 \cdot \tilde{\varphi}_3 &= \varphi_{12}, \\ 0 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_3 &= \varphi_{23}, \\ 1 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 0 \cdot \tilde{\varphi}_3 &= \varphi_{21}, \\ 0 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_3 &= \varphi_{32}, \end{aligned} \quad (4)$$

а также систему условных уравнений с использованием остаточных погрешностей, которая необходима для непосредственного применения МНК, в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \tilde{\varphi}_1 &= v_1, \\ \varphi_2 - \tilde{\varphi}_2 &= v_2, \\ \varphi_3 - \tilde{\varphi}_3 &= v_3, \\ -(\varphi_{123}) + (\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3) &= v_4, \\ \varphi_{12} - (\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2) &= v_5, \\ \varphi_{21} - (\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_1) &= v_6, \\ -\varphi_{23} + (\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3) &= v_7, \\ -\varphi_{32} + (\tilde{\varphi}_3 + \tilde{\varphi}_2) &= v_8. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя МНК, т.е. отыскивая минимумы суммы квадратов остаточных погрешностей по каждому из неизвестных, получаем систему нормальных уравнений вида

$$\begin{cases} 4 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 3 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_3 = 29'44'' = 1784'', \\ 3 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 6 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 3 \cdot \tilde{\varphi}_3 = 28'39'' = 1719'', \\ 1 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 3 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 4 \cdot \tilde{\varphi}_3 = 4'47'' = 287''. \end{cases} \quad (6)$$

Чтобы определить неизвестные в системе (6), определим вначале общий определитель этой системы $\Delta = 36$, а затем определители соответствующих неизвестных $\Delta_{\varphi_1} = 12\ 150''$, $\Delta_{\varphi_2} = 7146''$, $\Delta_{\varphi_3} = -5814''$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= \frac{\Delta_{\varphi_1}}{\Delta} = 337,5'' = 5'37,5'', \\ \tilde{\varphi}_2 &= \frac{\Delta_{\varphi_2}}{\Delta} = 198,5'' = 3'18,5'' = 3'18,5'', \\ \tilde{\varphi}_3 &= \frac{\Delta_{\varphi_3}}{\Delta} = -161,5'' = -2'41,5'', \\ \tilde{\varphi}_4 &= -(\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3) = \\ &= -(337,5 + 198,5 - 161,5) = -374,5'' = -6'14,5''. \end{aligned} \quad (7)$$

Определим остаточные погрешности как разность между установленными погрешностями измерения углов призмы в процессе их измерения и погрешностями, полученными в результате вычислений по МНК:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \tilde{\varphi}_1 &= 335 - 337,5 = v_1 = -2,5'', \\ \varphi_2 - \tilde{\varphi}_2 &= 202 - 198,5 = v_2 = 3,5'', \\ \varphi_3 - \tilde{\varphi}_3 &= -167 + 161,5 = v_3 = -5,5'', \\ \varphi_4 - \tilde{\varphi}_4 &= -386 + 374,5 = v_4 = -11,5'', \\ (\varphi_1 + \varphi_2) - (\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2) &= 530 - 536 = v_5 = -6,0'', \\ (\varphi_2 + \varphi_3) - (\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3) &= 31 - 37 = v_6 = -6,0'', \\ (\varphi_3 + \varphi_4) - (\tilde{\varphi}_3 + \tilde{\varphi}_4) &= -533 + 536 = v_7 = 3,0'', \\ (\varphi_4 + \varphi_1) - (\tilde{\varphi}_4 + \tilde{\varphi}_1) &= -37 + 37 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

По формуле (7.6) при числе степеней свободы, равном 5, получим СКО результатов измерения $S = 7,4''$.

Примечание. Число степеней свободы равно $n - t + k$, n — число условных уравнений, равное 8, t — число неизвестных, равное 4, и k — число уравнений связи, равное 1. Таким образом, число степеней свободы будет равно 5.

Для определения СКП искоемых параметров по формулам (7.13) вычислим алгебраические дополнения из соотношений

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 15; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 15; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 15.$$

Поскольку алгебраические дополнения $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 15$, то СКП для искомым переменных будут одинаковы и равны

$$S_{\tilde{\varphi}_1} = S_{\tilde{\varphi}_2} = S_{\tilde{\varphi}_3} = S \sqrt{15/36} \approx 4,77''.$$

Так как измерения равноточные, то $S_{\tilde{\varphi}_4} = 4,77''$.

Таким образом,

$$\tilde{\varphi}_1 = 5'37,5'', \quad \tilde{\varphi}_2 = 3'18,5'', \quad \tilde{\varphi}_3 = -2'41,5'', \quad \tilde{\varphi}_4 = -6'14,5'';$$

$$S_{\tilde{\varphi}_1} = S_{\tilde{\varphi}_2} = S_{\tilde{\varphi}_3} = S_{\tilde{\varphi}_4} = 4,77''.$$

Пример 7.12. В результате совокупных измерений получены следующие значения емкостей $C_1 = 0,2071$ мкФ, $C_2 = 0,2056$ мкФ, $C_1 + C_2 = C_3 = 0,4111$ мкФ, $C_4 = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) = 0,1035$ мкФ, где C_3 и C_4 — результаты измерений параллельного и последовательного соединения емкостей C_1 и C_2 . Определить оценки емкостей C_1 и C_2 , а также погрешности их измерения.

Решение. Поскольку одна из зависимостей между искомыми значениями емкостей и результатом измерения нелинейна, то запишем первое приближение оценок в виде

$$\tilde{C}_1 = C_{10} = C_{100} + \alpha, \quad \tilde{C}_2 = C_{20} = C_{200} + \beta,$$

$$C_{30} = C_{100} + C_{200} + \alpha + \beta, \quad C_{40} = C_{100} C_{200} / (C_{100} + C_{200}) + F_{C1} \alpha + F_{C2} \beta, \quad (1)$$

где C_{100} и C_{200} — нулевые приближения к реальным значениям емкостей; α и β — малые приращения емкостей, которые необходимо определить; F_{C1} и F_{C2} — первые производные от нелинейной функции C_4 по C_1 и C_2 . Полагая, что погрешность измерений невелика, можно положить $C_{100} = 0,2070$ мкФ и $C_{200} = 0,2060$ мкФ.

Условные линейные уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} C_1 - C_{100} - \alpha = 0, \\ C_2 - C_{200} - \beta = 0, \\ C_3 - (C_{100} + C_{200}) - (\alpha + \beta) = 0, \\ C_4 - C_{400} - F_{C1} \alpha - F_{C2} \beta = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$F_{C_1} = \frac{\partial C_4(C_{100}, C_{200})}{\partial C_1} = \left(\frac{C_{200}}{C_{100} + C_{200}} \right)^2,$$

$$F_{C_2} = \frac{\partial C_4(C_{100}, C_{200})}{\partial C_2} = \left(\frac{C_{100}}{C_{100} + C_{200}} \right)^2.$$

Тогда с учетом остаточных погрешностей v_i систему нормальных уравнений можно представить в виде

$$\begin{cases} 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + (C_{100} - C_1) = v_1, \\ 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + (C_{200} - C_2) = v_2, \\ 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + (C_{100} + C_{200} - C_3) = v_3, \\ F_{C_1} \cdot \alpha + F_{C_2} \cdot \beta + (C_{400} - C_4) = v_4, \end{cases} \quad (4)$$

где $C_{400} = C_{100}/C_{200}$ — параллельное соединение емкостей C_{100} и C_{200} . Подставив в (4) соответствующие значения емкостей, получим следующую систему условных уравнений:

$$\begin{cases} 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 0,0001 = v_1, \\ 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + 0,0004 = v_2, \\ 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + 0,0019 = v_3, \\ 0,249 \cdot \alpha + 0,251 \cdot \beta + 0,00025 = v_4. \end{cases} \quad (5)$$

Возведя в квадрат правые и левые части уравнений (5) и сложив их, получим

$$\begin{aligned} & [1 \cdot \alpha + 0,0001]^2 + [1 \cdot \beta + 0,0004]^2 + [1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + 0,019]^2 + \\ & + [0,249 \cdot \alpha + 0,251 \cdot \beta - 0,00025]^2 = \sum_{i=1}^4 v_i^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения наилучших значений первых приближений вычислим первые производные по α и β и, приравняв их нулю, получим следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} 2,062\alpha + 1,0625\beta = -0,001738, \\ 1,0625\alpha + 2,063\beta = -0,002237. \end{cases} \quad (7)$$

Для определения искоемых значений вычислим определители

$$D = \begin{vmatrix} 2,062 & 1,0625 \\ 1,0625 & 2,063 \end{vmatrix} = 3,125; \quad D_\alpha = \begin{vmatrix} -0,001738 & 1,0625 \\ -0,002237 & 2,063 \end{vmatrix} = -0,00122; \\ D_\beta = \begin{vmatrix} 2,062 & -0,001738 \\ 1,0625 & -0,002237 \end{vmatrix} = -0,00275, \quad (8)$$

откуда

$$\alpha = \frac{D_\alpha}{D} = -0,00039, \quad \beta = \frac{D_\beta}{D} = -0,00088. \quad (9)$$

Следовательно, из (1) получим первые приближения для иско-
мых емкостей

$$C_{10} = 0,2070 - 0,00039 = 0,20661,$$

$$C_{20} = 0,2060 - 0,00088 = 0,2051.$$

Полученные значения α и β уточняют принятые значения ем-
костей на 0,2% (C_{10}) и 0,4% (C_{20}). Дальнейшее уточнение нецеле-
сообразно.

Остаточные погрешности условных уравнений найдем, подста-
вив найденные оценки в (4):

$$v_1 = C_1 - C_{10} = 0,00049, \quad v_2 = C_2 - C_{20} = 0,00058,$$

$$v_3 = C_3 - C_{30} = -0,00063, \quad v_4 = C_4 - C_{40} = 0,00048.$$

Дисперсию погрешность измерения определим из (7.6)

$$S^2 = \sum_{i=1}^4 v_i^2 / (4 - 2) = 6 \cdot 10^{-7} \text{ мкФ}^2.$$

Для определения дисперсии погрешностей измерения каждой
из емкостей вычислим алгебраические дополнения $A_{11} \approx A_{22} = 2,063$.
Поскольку $A_{11} \approx A_{22}$, то дисперсии измерения емкостей

$$S_{C1}^2 = S_{C2}^2 = \frac{A_{11}}{D} S^2 = \frac{2,063}{3,125} \cdot 6 \cdot 10^{-7} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ мкФ}^2$$

и соответственно СКО

$$S_{C1} = S_{C2} = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ мкФ}.$$

Таким образом, результат измерения с доверительной вероят-
ностью 0,9 можно записать в виде (по таблице Стьюдента при
числе степеней свободы $k = 2$, $t_{0,9} = 2,92$)

$$\tilde{C}_1 = C_{10} = (0,2066 \pm 0,0018) \text{ мкФ},$$

$$\tilde{C}_2 = C_{20} = (0,2051 \pm 0,0018) \text{ мкФ}.$$

7.1.4. Влияние систематических погрешностей

Метод наименьших квадратов разработан, как отмечалось выше, для обработки данных, содержащих только случайные погрешности, однако на практике иногда не удается избежать присутствия в измерениях систематических погрешностей. Рассмотрим на конкретных примерах вначале влияние постоянных систематических погрешностей, а затем их случайного характера на результаты совместных и совокупных измерений.

Пример 7.13. Систематическая погрешность постоянна и равна θ_0 . Этот случай наиболее прост с точки зрения влияния на результат измерения и наиболее сложен с точки зрения его учета аналитическими средствами. Если в измерении y_i присутствует систематическая погрешность θ_0 , то погрешность искомым параметров a и b можно определить из соотношений (7.16) и (7.17).

Если систематическая погрешность имеет место при задании аргумента x и она равна $\Delta x = \pm\theta_{0x}$, то систематическая погрешность $\Delta y = \pm b\Delta x = \pm b\theta_{0x}$.

Данные примера 7.3, в которых результаты измерений величин y_i искажены присутствием постоянной систематической погрешности — увеличены на $\Delta y = \theta_0 = 0,2$, приведены в таблице. Обработка данных позволяет получить новые значения искомым параметров $\tilde{a} = 2,15$, $\tilde{b} = 1,04$. Как и следовало ожидать, присутствие систематической погрешности привело к параллельному смещению прямой по оси y на $0,2$. Дисперсия условных уравнений и дисперсии результатов измерений при этом остались без изменения (см. таблицу).

Номер измерения i	x_i	y_i	$(x_i)^2$	$x_i y_i$	$y_i^* = \tilde{a} + \tilde{b} x_i$	$v_i = y_i^* - y_i$	v_i^2
1	0	2,4	0	0	2,1490	-0,2510	0,06300
2	0,5	2,6	0,25	1,3	2,6818	0,0818	0,00668
3	1,0	3,2	1,0	3,2	3,2145	0,0145	0,00021
4	1,5	3,4	2,25	5,1	3,7473	0,3473	0,12060
5	2,0	4,1	4,0	8,2	4,2800	0,1800	0,34240
6	2,5	5,0	6,25	12,5	4,8128	-0,1873	0,03500
7	3,0	5,1	9,0	15,3	5,3455	0,2455	0,06030
8	4,0	6,4	16,0	25,6	6,4110	0,0110	0,00012
9	5,0	7,5	25,0	37,5	7,4765	-0,0235	0,00055
10	6,0	8,3	36,0	49,8	8,5420	0,2420	0,05850
Σ	25,5	48,0	99,75	158,5			0,37736

Таким образом, искажения, внесенные постоянной систематической погрешностью, могут быть обнаружены, если использовать в измерении другое, более точное СИ, или имеется возможность сравнить полученные результаты измерений с другими измерениями подобного рода.

Пример 7.14. Рассмотрим влияние постоянной систематической погрешности на результаты аттестации гирь (мер в примере 7.10). Процесс аттестации состоит в том, что, например, при одной точно известной мере оценивают с помощью МНК отклонения действительных значений масс гирь от своих номинальных. Допустим, что при сравнении масс на рычажных весах в измерении присутствует постоянная систематическая погрешность (указатель равновесия имеет смещение θ_0). Тогда все разницы в массах m_i будут равны $m'_i = m_i + \theta_0$. При этом $\mu'_1 = \mu_1 + 5\theta_0$, $\mu'_2 = \mu_2 + \theta_0$, $\mu'_3 = \mu_3 + \theta_0$, $\mu'_4 = \mu_4 - 3\theta_0$. Подставляя эти значения в соотношения (8)–(11), получаем следующие составляющие погрешностей аттестации мер, обусловленные систематической погрешностью θ_0 :

$$\alpha_\theta = \frac{465}{525}\theta_0 = 0,886\theta_0, \quad \beta_\theta = \frac{165}{525}\theta_0 = 0,314\theta_0,$$

$$\gamma_\theta = \frac{45}{525}\theta_0 = 0,086\theta_0, \quad \xi_\theta = \frac{355}{525}\theta_0 = -0,676\theta_0.$$

Если $\theta_0 = 10$ мг, то оценки отклонений масс гирь от номинальных значений составят $\tilde{a}' = 35,9$ мг (вместо 27,0 мг), $\tilde{b}' = 4,2$ мг (вместо 1,1 мг), $\tilde{\gamma}' = -4,14$ мг (вместо -5 мг), $\tilde{\xi}' = 2,4$ мг (вместо 9,0 мг).

Пример 7.15. Анализ экспериментальных данных измерений отклонений углов четырехгранной призмы и результатов расчетов остаточных погрешностей (6) в примере 7.11 показывает, что эти результаты измерений имеют систематическое смещение, примерно равное $\theta = -4''$. Действительно, если исправить результаты измерений (1), увеличив их на $4''$, то сумма отклонений для первых четырех измерений (1) $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 339 + 206 + (-163) + (-382) = 0$.

Установить, как изменятся окончательные результаты по калибровке углов призмы для экспериментальных данных с исключенной систематической погрешностью

$$\varphi_1 = 5'39''; \quad \varphi_2 = 3'26''; \quad \varphi_3 = -2'43''; \quad \varphi_4 = -6'22'';$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 8'54''; \quad \varphi_2 + \varphi_3 = 35''; \quad \varphi_3 + \varphi_4 = -8'49''; \quad \varphi_4 + \varphi_1 = -33''. \quad (1)$$

Окончательный результат также должен удовлетворять уравнению связи

$$\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3 + \tilde{\varphi}_4 = 0. \quad (2)$$

Решение. Если последовательно проделать все вычисления с данными (1), подобные тем, что проведены в примере 7.11, то в результате получим нормальные уравнения в прежнем виде (уравнения (6) примера 7.11)

$$\begin{aligned} 4 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 3 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 1 \cdot \tilde{\varphi}_3 &= 29'44'' = 1784'', \\ 3 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 6 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 3 \cdot \tilde{\varphi}_3 &= 28'39'' = 1719'', \\ 1 \cdot \tilde{\varphi}_1 + 3 \cdot \tilde{\varphi}_2 + 4 \cdot \tilde{\varphi}_3 &= 4'47'' = 287''. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение этой системы уравнений даст прежний результат (результаты вычислений (7) примера 7.11):

$$\tilde{\varphi}_1 = 5'37,5'', \quad \tilde{\varphi}_2 = 3'18,5'', \quad \tilde{\varphi}_3 = -2'41,5'', \quad \tilde{\varphi}_4 = 6'14,5''.$$

Таким образом, наличие постоянной систематической погрешности не изменило результат измерения, и это обусловлено тем, что окончательный результат должен соответствовать уравнению связи (2).

Для определения дисперсии условных уравнений вычислим остаточные погрешности подобно тому, как это было сделано в примере 7.11 (система (8)):

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \tilde{\varphi}_1 &= 339 - 337,5 = v_1 = 1,5'', \\ \varphi_2 - \tilde{\varphi}_2 &= 206 - 198,5 = v_2 = 7,5'', \\ \varphi_3 - \tilde{\varphi}_3 &= -163 - 161,5 = v_3 = -1,5'', \\ \varphi_4 - \tilde{\varphi}_4 &= 382 - 374,5 = v_4 = 7,5'', \\ (\varphi_1 + \varphi_2) - (\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2) &= 534 - 536 = v_5 = -2,0'', \\ (\varphi_2 + \varphi_3) - (\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3) &= 35 - 37 = v_6 = -2,0'', \\ (\varphi_3 + \varphi_4) - (\tilde{\varphi}_3 + \tilde{\varphi}_4) &= -529 + 536 = v_7 = 7,0'', \\ (\varphi_4 + \varphi_1) - (\tilde{\varphi}_4 + \tilde{\varphi}_1) &= -33 + 37 = v_8 = 4,0''. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя соотношение (7.6) при числе степеней свободы, равном 5, получаем $S = 6,16''$ и соответственно $S_{\tilde{\varphi}_1} = S_{\tilde{\varphi}_2} = S_{\tilde{\varphi}_3} = S \sqrt{15/36} \approx 4,0''$ и $S_{\tilde{\varphi}_4} = 4,0''$.

Как видно из полученных результатов, исключение постоянной систематической погрешности не изменило отклонений от углов призмы, но позволило уменьшить (на 16%) разброс их значений.

Пример 7.16. Рассмотрим влияние неисключенных систематических погрешностей, которые можно рассматривать как случайные на примере линейной зависимости вида (7.14).

При большом числе измерений и любом характере распределений неисключенных систематических погрешностей результирующий закон распределений параметров a и b , получающийся в результате свертки n законов распределений $y(x)$, близок к нормальному.

Распределение неисключенных систематических погрешностей обычно принимают как равномерное. Если возникает необходимость отдельного учета составляющих систематических и случайных погрешностей $y(x)$, имеющих нормальное распределение, то этот учет производится так же, как и при прямых измерениях (разд. 4.1.1, формула (4.2); разд. 5.1.1, формулы (5.3)–(5.7) и пример 5.1).

Доверительный интервал для суммарной погрешности параметра a можно определить по формуле

$$\Delta_a(P) = K[\varepsilon_a(P) + \theta_a(P)],$$

где

$$\varepsilon_a(P) = t_P S \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial y_i}\right)^2} = t_P S \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \quad \theta_a(P) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial y_i}\right)^2} \theta_i^2(y);$$

$\theta_i(y)$ — границы m неисключенных систематических погрешностей; S — СКО условных уравнений или $y(x)$; коэффициенты K и k определяются в зависимости от границ выбранной доверительной вероятности P (см. гл. 4 и 5).

Аналогично можно определить доверительный интервал для параметра b

$$\Delta_b(P) = K[\varepsilon_b(P) + \theta_b(P)],$$

где

$$\varepsilon_b(P) = t_P S \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{b}}{\partial y_i}\right)^2} = t_P S \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \quad \theta_b(P) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{b}}{\partial y_i}\right)^2} \theta_i^2(y).$$

7.2. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

Задача 7.1. Измерение электрического сопротивления R медного стержня при разной температуре дали следующие результаты (см. таблицу):

i	1	2	3	4	5	6	7
$t_i, ^\circ\text{C}$	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
$R_i, \text{Ом}$	76,30	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10

Полагая, что зависимость сопротивления от температуры имеет вид $R = a + bt$, найти параметры a и b в этой зависимости, а также оценить СКП их определения (измерения).

Примечание. Нормальные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} 7\tilde{a} + \sum_{i=1}^7 t_i \tilde{b} = \sum_{i=1}^7 R_i, \\ \left(\sum_{i=1}^7 t_i \right) \tilde{a} + \left(\sum_{i=1}^7 t_i^2 \right) \tilde{b} = \sum_{i=1}^7 t_i R_i \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 7\tilde{a} + 245,3\tilde{b} = 566,0, \\ 245,3\tilde{a} + 9325,8\tilde{b} = 20044,5. \end{cases}$$

Ответ. $\tilde{a} = 70,76 \text{ Ом}$, $\tilde{b} = 0,288 \text{ Ом}/^\circ\text{С}$,
 $S_{\tilde{a}} = 0,31 \text{ Ом}$, $S_{\tilde{b}} = 0,008 \text{ Ом}/^\circ\text{С}$.

Задача 7.2. Зависимость погрешности Δ измерения углов, производимых угловыми мерами с помощью одноканального гониометра, от средней высоты H неровностей их поверхностей можно представить в виде $\Delta = a + bH$. Экспериментальные данные погрешности от значений средних высот неровностей приведены в таблице:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H_i , мкм	0,072	0,080	0,112	0,120	0,130	0,136	0,140	0,140	0,183	0,208	0,241	0,268
Δ_i''	2,8	2,6	3,2	2,9	3,1	3,4	3,0	3,4	3,7	4,1	4,5	4,8

Определить параметры a и b в этой зависимости, а также оценить СКП их определения (измерения).

Примечание. Нормальные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} 12\tilde{a} + 1,830\tilde{b} = 41,5, \\ 1,830\tilde{a} + 0,319782\tilde{b} = 6,7782. \end{cases}$$

Ответ. $\tilde{a} = 1,775''$; $S_{\tilde{a}} = 0,135''$; $\tilde{b} = 11,4''/\text{мкм}$; $S_{\tilde{b}} = 0,83''/\text{мкм}$.

Задача 7.3. При градуировке измерительного преобразователя с линейной функцией преобразования $Y = a + bX$ получены следующие числовые значения экспериментальных данных:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
X_i	41	50	81	104	120	139	154	180	208	241	250	269	301
Y_i	4	8	10	14	15	20	19	23	26	30	31	36	37

В каждом эксперименте входная величина X_i задается точно, а величина Y_i измеряется. Найти методом наименьших квадратов аналитическое выражение для градуировочной характеристики.

Ответ. $Y = 0,7 + 0,124X$.

Задача 7.4. В результате равнооточных трехкратных измерений углов трехгранной призмы получены следующие результаты:

$$\varphi_{A1} = 89^\circ 55', \varphi_{B1} = 45^\circ 5', \varphi_{C1} = 44^\circ 57',$$

$$\varphi_{A2} = 89^\circ 59', \varphi_{B2} = 45^\circ 6', \varphi_{C2} = 44^\circ 55',$$

$$\varphi_{A3} = 89^\circ 57', \varphi_{B3} = 45^\circ 5', \varphi_{C3} = 44^\circ 58'.$$

Сумма углов треугольника должна удовлетворять условию

$$\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C = 180^\circ. \quad (1)$$

Необходимо, используя метод наименьших квадратов, изменить полученные значения углов $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$. Определить также СКО результатов измерений.

Ответ. Исправленные результаты определения углов призмы:

$$\tilde{\varphi}_A = 89^\circ 57,33', \tilde{\varphi}_B = 45^\circ 5,67', \tilde{\varphi}_C = 44^\circ 57,01'.$$

СКО измерения углов $S_A = S_B = S_C = 0,68'$.

Задача 7.5. Используя условия примера 7.11, а также уравнение связи (1) между отклонениями в углах четырехгранной призмы, решить задачу, исключив переменную φ_1 , т.е. в уравнениях (1) сделать замену $\varphi_1 = -(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$.

Ответ. СКП $\tilde{\varphi}_1 = 5'37,5'', \tilde{\varphi}_2 = 3'18,5'', \tilde{\varphi}_3 = -2'41,5'',$

$$\tilde{\varphi}_4 = -6'14,5''. S_{\tilde{\varphi}_1} = S_{\tilde{\varphi}_2} = S_{\tilde{\varphi}_3} = S_{\tilde{\varphi}_4} = 4,8''.$$

Задача 7.6. В результате совокупных измерений получены следующие значения емкостей: $C_1 = 0,2071$ мкФ, $C_2 = 0,2056$ мкФ, $C_1 + C_2 = C_3 = 0,4111$ мкФ.

Определить оценки емкостей C_1 и C_2 , а также дисперсию их измерения.

Ответ. $\tilde{C}_1 = 0,2066$ мкФ, $\tilde{C}_2 = 0,2051$ мкФ,

$$S_{C_1}^2 = S_{C_2}^2 \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ мкФ}^2.$$



СТАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

8.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В этой главе приводятся соотношения, необходимые для расчета основных и дополнительных погрешностей СИ, а также комплекс нормируемых метрологических характеристик (МХ), которые необходимы для проведения расчета погрешностей. Здесь же рассматриваются критерии существенности составляющих погрешности СИ, классы точности СИ, а также погрешности взаимодействия. Приводятся примеры для расчета этих составляющих погрешностей СИ.

Прежде чем перейти к изложению указанных вопросов сделаем несколько замечаний, касающихся используемых в гл. 8 и 9 терминологии и понятий.

Под нормированием метрологических характеристик СИ понимается установление границ допустимых отклонений реальных метрологических характеристик от их номинальных значений. Нормированные МХ должны быть такими, чтобы в необходимых случаях было возможным статистическое объединение всех составляющих погрешностей СИ, отражаемых этими характеристиками, в реальных условиях эксплуатации [3, 6]. Только нормирование МХ позволяет обеспечить взаимозаменяемость СИ, согласованность их МХ в измерительных системах и единство измерений в стране. Совокупность нормированных МХ данного типа СИ устанавливается нормативными документами на СИ.

Номинальное значение МХ — значение МХ, принимаемое для любого СИ данного типа и устанавливаемое в нормативно-технической документации на данный тип СИ. Например, в документации на импульсный усилитель указано, что его коэффициент усиления равен $K_y = 100$, однако реальное значение K_y может быть равно 102. Как видно, понятие номинального значения МХ подобно понятию номинального значения меры или ФВ, когда номинал

меры, т.е. то, что указано на мере (приписано ей при изготовлении), не всегда соответствует ее действительному значению.

Нормальное значение влияющей величины — значение, установленное в документации в качестве номинального. Около нормального значения влияющей величины устанавливают нормальную область значений влияющей величины — это пределы ее изменения, которые несущественно влияют на результат измерения и составляют часть основной погрешности СИ.

Предел допускаемой погрешности СИ — наибольшее значение погрешности СИ, устанавливаемое для данного типа СИ, при котором оно еще признается годным к применению. Допускаемые пределы изменения любой МХ представляют собой границы интервала, в котором значение характеристики любого экземпляра СИ данного типа должно находиться с вероятностью, близкой к единице.

Под *типом* или *видом* СИ следует понимать совокупность СИ одного и того же назначения, основанных на одном и том же принципе действия, имеющих одинаковую конструкцию и изготовленных по одной и той же технической документации. Для данного типа СИ МХ рассматриваются как случайные, т.е. имеющие номинальные значения и статистический разброс около этого значения, характеризуемый соответствующей функцией плотности вероятности.

В приводимых ниже формулах и соотношениях сохранены (по возможности) обозначения ФВ, принятые в метрологических стандартах, относящихся к СИ.

8.2. ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Основная погрешность СИ может быть записана в виде [6]

$$\Delta_0(t) = \Delta_{0s} + \overset{\circ}{\Delta}_0(t) + \overset{\circ}{\Delta}_{0H}, \quad (8.1)$$

где Δ_{0s} — систематическая составляющая основной погрешности; $\overset{\circ}{\Delta}_0(t)$ — случайная составляющая основной погрешности; $\overset{\circ}{\Delta}_{0H}$ — случайная составляющая основной погрешности, обусловленная гистерезисом. Значок « \circ » сверху обозначения показывает, что эти погрешности центрированы, т.е. симметричны относительно нуля и их математическое ожидание равно нулю.

Математическое ожидание и дисперсия основной погрешности определяются по формулам

$$M[\Delta_0] = M[\Delta_{0s}], \quad (8.2)$$

$$D[\Delta_0] = D[\Delta_{0s}] + D\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + D\left[\overset{\circ}{\Delta}_{0H}\right]. \quad (8.3)$$

Отметим, что систематическая погрешность рассматривается как случайная величина для данного типа (вида) СИ.

Дополнительная погрешность СИ обусловлена изменением влияющих величин относительно своих нормальных значений и является функцией влияющих величин

$$\Delta_C = \sum_{i=1}^l \psi_i(\xi_i),$$

где ψ_i — нормированная функция влияния; ψ_i — i -я влияющая величина (температура, влажность, атмосферное давление и т.д.). Функция влияния определяет дополнительную погрешность как функциональную связь между погрешностью СИ и вызвавшими ее изменение влияющими величинами $\Delta\xi = \xi - \xi_{\text{ref}}$, где ξ — текущее значение влияющей величины в реальных условиях применения СИ, ξ_{ref} — нормальное значение ξ .

Примечание. Влияющие величины могут вызывать изменение не только погрешности СИ, но и других МХ СИ, которые в свою очередь влияют также на погрешность измерения. Однако эти изменения, как правило, имеют второй порядок малости.

Математическое ожидание (систематическая составляющая) и дисперсия дополнительной погрешности при воздействии одной влияющей величины можно представить в виде

$$M[\Delta_C] = \psi_s(\xi), \quad (8.4)$$

$$D[\Delta_C] = \psi_D(\xi) = \psi_\sigma^2(\xi), \quad (8.5)$$

где $\psi_s(\xi)$, $\psi_D(\xi)$ и $\psi_\sigma(\xi)$ — функции влияния величин ξ на систематическую погрешность, на дисперсию и СКО случайной погрешности СИ. Например, влияние изменения температуры на уровень (дисперсию) электронного шума СИ. В зависимости от того, какая из функций влияния ψ_D или ψ_σ известна, такая и используется для расчетов.

Общая погрешность СИ в реальных условиях $\Delta = \Delta_0 + \Delta_C$ и математическое ожидание и дисперсия погрешности измерения СИ будут равны (без учета погрешности из-за гистерезиса)

$$M[\Delta] = M[\Delta_{0s}] + \psi_s(\xi), \quad (8.6)$$

$$D[\Delta] = D[D_{0s}] + D\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + \psi_D(\xi). \quad (8.7)$$

Если для конкретного экземпляра СИ известно значение его основной систематической погрешности Δ_{0s} , то

$$M[\Delta] = \Delta_{0s} + \psi_s(\xi), \quad (8.8)$$

$$D[\Delta] = D\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + \psi_D(\xi). \quad (8.9)$$

Если известно СКО случайной погрешности (а не дисперсия) и функция влияния на СКО случайной составляющей погрешности $\psi_\sigma(\xi)$, то формулы (8.7) и (8.9) будут иметь вид

$$D[\Delta] = D[\Delta_{0s}] + \left[\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + \psi_\sigma(\xi) \right]^2, \quad (8.10)$$

$$D[\Delta] = \left[\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + \psi_\sigma(\xi) \right]^2. \quad (8.11)$$

Приведенные выше формулы (8.6)–(8.11) справедливы в тех случаях, когда $\Delta\xi$ учитываются как известные *детерминированные* отклонения влияющих величин от нормальных значений. Если же величины $\Delta\xi$ являются случайными, обладающими своими математическими ожиданиями, то формулы (8.6) и (8.7) будут иметь вид

$$M[\Delta] = M[\Delta_{0s}] + M[\psi_s(\xi)], \quad (8.12)$$

$$D[\Delta] = D[\Delta_{0s}] + D\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + \psi_D(\xi) + D[\psi_s(\xi)], \quad (8.13)$$

где $M[\psi_s(\xi)]$ и $D[\psi_s(\xi)]$ — математическое ожидание и дисперсия функции влияния как функции случайных аргументов. Например, напряжение питания, являющееся влияющей величиной, может колебаться в течение дня или в одно и то же время дня, но в разные дни в зависимости от изменения общей нагрузки в сети. То же самое может происходить с влиянием температуры, влажности, давления и т.д. на погрешность СИ.

Рекомендуется [6] при случайном характере ξ рассматривать функции влияния на дисперсию $\psi_{D0}(\xi)$ как детерминированные функции и при расчете погрешности учитывать те значения аргументов $\Delta\xi$, при которых эти функции имеют максимальные значения. Таким образом, формула (8.13) принимает окончательный вид

$$D[\Delta] = D[\Delta_{0s}] + D\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + [\psi_D(\xi)]_{\max} + D[\psi_s(\xi)]. \quad (8.14)$$

Если известно СКО, то формула (8.14) будет иметь вид

$$D[\Delta] = D[\Delta_{0s}] + \left(\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + [\psi_\sigma(\xi)]_{\max} \right)^2 + D[\psi_s(\xi)]. \quad (8.15)$$

Пример 8.1. Случайная составляющая основной погрешности СИ распределена по нормальному закону с СКО, равным σ_0 , а систематическая составляющая основной погрешности находится в границах Δ_1 и Δ_2 и имеет равномерное распределение. Дополнительная погрешность характеризуется функциями влияния на систематическую погрешность (влияние температуры) и на дисперсию случайной погрешности и имеет линейный вид $\psi_s(\xi) = A\Delta\xi$ и $[\psi_D(\xi)]_{\max} = B\Delta\xi$, где A и B — постоянные величины. Записать математическое ожидание и дисперсию общей погрешности СИ.

Решение. Поскольку случайная погрешность центрирована относительно нуля и $M[\psi_s(\xi)] = AM[\Delta\xi]$, то выражение для математического ожидания общей погрешности будет иметь вид (8.12)

$$M[\Delta] = M[\Delta_{0s}] + M[\psi_s(\xi)] = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + AM[\Delta\xi].$$

Дисперсию общей погрешности вычислим по формуле (8.14):

$$\begin{aligned} D[\Delta] &= D[\Delta_{0s}] + D[\overset{\circ}{\Delta}_0] + D[\psi_s(\xi)] + [\psi_D(\xi)]_{\max} = \\ &= \frac{(\Delta_2 + \Delta_1)^2}{12} + \sigma_0^2 + A^2 D[\Delta\xi] + B\Delta\xi. \end{aligned}$$

8.3. МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ В РЕАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

8.3.1. Исходные данные для расчета погрешности СИ

Для расчета характеристик погрешности СИ в реальных условиях эксплуатации необходимо располагать следующими исходными данными (РД 50-453-84) [6]:

- нормируемыми МХ СИ;
- характеристиками влияющих величин;
- характеристиками входного сигнала.

При расчете может быть использован один из двух методов расчета погрешности (см. разд. 1.3) в зависимости от задач измерения, экономической целесообразности и имеющейся информации. Первый метод включает расчет статистических моментов составляющих погрешности СИ и соответствует модели I погрешности СИ, второй метод — расчет наибольших возможных значений составляющих погрешности СИ и соответствует модели II погрешности СИ.

В качестве исходных данных при расчете погрешности СИ первым методом используются следующие характеристики.

Нормируемые МХ СИ:

- математическое ожидание $M[\Delta_{0s}]$ систематической составляющей основной погрешности;
- СКО $\sigma[\Delta_{0s}]$ систематической составляющей основной погрешности;
- предел допускаемого СКО $\sigma_p \left[\overset{\circ}{\Delta} \right]$ случайной составляющей основной погрешности;
- предел допускаемой вариации СИ N_{0p} при нормальных условиях;
- номинальная цена единицы наименьшего разряда кода μ_N цифрового измерительного прибора;
- номинальные функции влияния $\psi_{sN}(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, на систематическую составляющую погрешности СИ;
- номинальные функции влияния $\psi_{\sigma N}(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, l$, на СКО случайной составляющей погрешности СИ (либо на дисперсию случайной погрешности ψ_{DN});
- номинальные функции влияния $\psi_{HN}(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$, на вариацию СИ.

Примечания. 1. Перечисленные нормируемые МХ должны указываться в нормативно-технической документации на СИ. Вместо перечисленных характеристик для данного типа СИ могут быть указаны характеристики конкретного экземпляра СИ, полученные в результате исследования его характеристик. Перечень этих МХ приведен в [6].

2. Подстрочный индекс N означает номинальность МХ.

Характеристики влияющих величин:

- значения влияющих величин ξ_j , $j = 1, 2, 3, \dots, n$, задаются как детерминированные функции;
- математическое ожидание $M[\xi_j]$, СКО $\sigma[\xi_j]$, наименьшее ξ_{nj} и наибольшее ξ_{bj} значения влияющих величин, соответствующие реальным условиям эксплуатации СИ, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, задаются как случайные величины, поэтому они характеризуются своими статистическими параметрами.

Характеристики входного сигнала x:

- номинальная входная амплитуда и диапазон ее изменения, соответствующие рабочей области СИ;
- спектральная плотность мощности $S_x(\omega)$ или автокорреляционная функция входного сигнала $R_x(\tau)$, соответствующие реальным условиям эксплуатации СИ.

Другие МХ СИ, необходимые для расчета погрешности СИ: чувствительность, коэффициент преобразования, время включения, время коррективки, время и момент измерения и т.д.

В качестве исходных данных при расчете характеристик погрешности СИ вторым методом используются следующие характеристики.

Нормируемые МХ СИ:

- предел допускаемых значений погрешности СИ Δ_{0P} ;
- наибольшие допускаемые изменения погрешности СИ $\varepsilon_P(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, вызванные изменением влияющих величин в установленных пределах.

Характеристики влияющих величин:

- значения ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, влияющих величин;
- наименьшие $\xi_{нj}$ и наибольшие $\xi_{вj}$ значения влияющих величин, соответствующие реальным условиям эксплуатации СИ.

Все исходные данные, используемые для расчета, должны быть приведены к одной и той же точке: ко входу или выходу СИ.

8.3.2. Расчет характеристик погрешности по первому методу

Математическое ожидание статической составляющей погрешности СИ при реальных значениях влияющих величин вычисляется по формулам:

- если исходные данные о влияющих величинах заданы как детерминированные функции, то

$$M[\Delta] = M[\Delta_{0s}] + \sum_{j=1}^n \psi_{sN}(\xi_j); \quad (8.16)$$

- если исходные данные о влияющих величинах заданы как случайные функции, то

$$M[\Delta] = M[\Delta_{0s}] + \sum_{j=1}^n M[\psi_{sN}(\xi_j)]. \quad (8.17)$$

Например для линейных функций влияния $\psi_{sN}(\xi_j) = K_{sN}(\xi_j - \xi_{refj})$ математическое ожидание функции влияния вычисляется по формуле

$$M[\psi_{sN}(\xi_j)] = K_{sN}(M[\xi_j] - \xi_{refj}), \quad (8.18)$$

а для нелинейных функций — по формуле

$$M[\psi_{sN}(\xi_j)] \approx \psi_{sN}(M[\xi_j]) + 0,5\psi_{sN}''(M[\xi_j])\sigma^2[\xi_j]. \quad (8.19)$$

Дисперсия статической составляющей погрешности СИ при реальных значениях влияющих величин вычисляются по формулам:

- если исходные данные о влияющих величинах заданы как детерминированные функции, то

$$D[\Delta] = \sigma^2[\Delta_{0s}] + \left\{ \sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta} \right] + \sum_{j=1}^l \psi_{\sigma N}(\xi_j) \right\}^2 + \frac{1}{12} \left[H_{0P} + \sum_{j=1}^k \psi_{HN}(\xi_j) \right]^2 + \frac{\mu_N^2}{12}; \quad (8.20)$$

- если исходные данные о влияющих величинах заданы как случайные функции, то

$$D[\Delta] = \sigma^2[\Delta_{0s}] + \sum_{j=1}^l D[\psi_{sN}(\xi_j)] + \left\{ \sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] + \sum_{j=1}^l \psi_{\sigma N}(\xi_j) \right\}^2 + \frac{1}{12} \left[H_{0P} + \sum_{j=1}^k \psi_{HNmax}(\xi_j) \right]^2 + \frac{\mu_N^2}{12}. \quad (8.21)$$

Примечания.

1. Для аналоговых СИ $\mu_N = 0$.
2. H_{0P} — предел допускаемых вариаций СИ, соответствующий полному размаху погрешности из-за вариации.
3. Коэффициенты $1/12$ в формулах (8.20) и (8.21) объясняются тем, что распределение от вариации и квантования имеют равномерный вид.
4. Суммирование выполняется для n, l, k влияющих величин, для которых нормированы и определены МХ $\psi_{sN}(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$; $\psi_{\sigma N}(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, l$; $\psi_{HN}(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$, и значения которых в момент измерения отличаются от установленных для данного СИ нормальных значений.
5. В формулах (8.20) и (8.21) некоторые составляющие погрешности могут отсутствовать, если они незначительны (см. критерий существенности разд. 8.3) или не проявляются из-за соответствующей конструкции СИ (например, погрешности, обусловленной вариацией показаний СИ или квантованием).

Например, для линейных функций влияния дисперсия $D[\psi_{sN}(\xi_j)]$ вычисляется по формуле (см. второе слагаемое в формуле (8.21))

$$D[\psi_{sN}(\xi_j)] = K_{sN}^2 \sigma^2(\xi_j), \quad (8.22)$$

а для нелинейной функции влияния — по приближенной формуле

$$D[\psi_{sN}(\xi_j)] \approx \left[\psi'_{sN}(M[\xi_j]) \right]^2 \sigma^2[\xi_j] + 0,4 \left[\psi''_{sN}(M[\xi_j]) \right]^2 \sigma^4[\xi_j]. \quad (8.23)$$

Примечания.

1. Если для СИ нормирован предел Δ_{0SP} допускаемых значений систематической составляющей основной погрешности без указания значения $M[\Delta_{0S}]$ и если нет оснований предполагать несимметричность распределения указанной погрешности в пределах $\pm\Delta_{0SP}$, то допускается для расчетов характеристик погрешности СИ пользоваться предположением, что $M[\Delta_{0S}] = 0$.

2. Для СИ с индивидуальными МХ для расчетов характеристик погрешности СИ обычно принимается $M[\Delta_{0S}] = 0$.

3. Если для j -й влияющей величины известны только ее наименьшее $\xi_{нj}$ и наибольшее $\xi_{вj}$ значения, соответствующие реальным условиям эксплуатации СИ, и нет оснований выделить области предпочтительных значений влияющей величины в группах от $\xi_{нj}$ до $\xi_{вj}$, несимметрично расположенные относительно центра интервала, определяемого указанными границами, то допускается для расчетов характеристик погрешности СИ пользоваться предположением $M[\xi_j] = 0,5(\xi_{нj} + \xi_{вj})$.

Значения нижней и верхней границ интервала, в котором с вероятностью P находится статическая погрешность СИ, вычисляются по формулам

$$\Delta_{СИн} = M[\Delta] - K\sigma[\Delta], \quad (8.24)$$

$$\Delta_{СИв} = M[\Delta] + K\sigma[\Delta]. \quad (8.25)$$

Значения коэффициента K (аналог коэффициента t_p по определению доверительных интервалов) зависят от вида закона распределения погрешности Δ и выбранного значения вероятности P . Закон распределения вероятности может иметь сложный вид, поскольку представляет собой суперпозицию нескольких функций распределений, и поэтому точную оценку искомых интервалов получить весьма трудно. Приближенное значение K может быть найдено следующим путем:

- Если закон распределения погрешности Δ может быть отнесен к числу симметричных законов распределения с невозрастающей плотностью по мере удаления от центра распределения, то в качестве значения K может быть принято K_{cp} на рис. 8.1. Заштрихованная область показывает поле $K(P)$ для одномодальных, усеченных и симметричных функций плотности вероятности от равномерной до весьма острой (рис. 8.2).

- Для грубых ориентировочных расчетов, если есть основание полагать, что закон распределения погрешности Δ подобен упомянутому выше закону, значение K может вычисляться с помощью таблицы или по формуле [6]

$$K = 5(P - 0,5) \text{ для } 0,8 \leq P \leq 1,0. \quad (8.26)$$

Эта формула дает несколько завышенное значение K по отношению к K_{cp} на рис. 8.1.

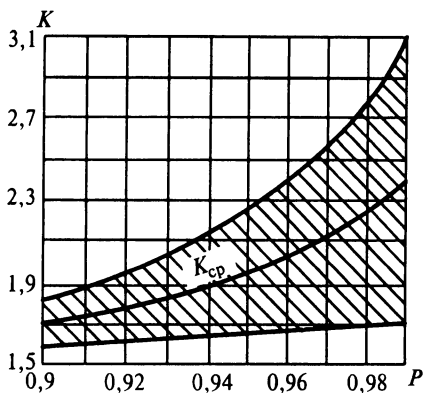


Рис. 8.1. Зависимость коэффициента K от вероятности P

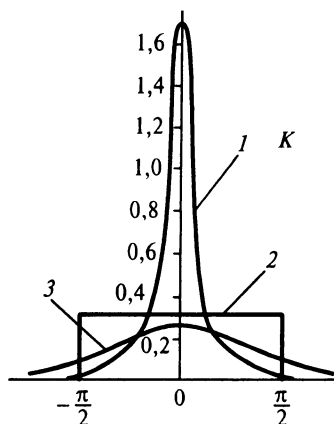


Рис. 8.2. Функции плотности распределения вероятностей погрешности: остроконечная (1), равномерная (2), нормальная (3) [2]

8.3.3. Расчет характеристик погрешности по второму методу

Максимальное значение j -й составляющей дополнительной погрешности СИ вычисляется по формуле

$$\Delta_{Cj \max} = \varepsilon_P(\xi_j) K_\varepsilon(\xi_j). \quad (8.27)$$

• Если диапазон изменения $\Delta\xi$ влияющей величины, для которого нормированы (заданы) МХ, равен диапазону рабочих условий применения СИ, то коэффициент $K_\varepsilon = 0$ при $\xi_j = \xi_{refj}$ и $K_\varepsilon = 1$ при $\xi_j \neq \xi_{refj}$.

• Если диапазон изменения $\Delta\xi$ равен лишь части диапазона рабочих условий применения СИ, причем для любой части диапазона нормируется одно и то же значение $\varepsilon_P(\xi_j)$, то коэффициент K_ε определяется по формуле

$$K_\varepsilon(\xi_j) = \frac{|\xi_j - \xi_{refj}|}{\Delta\xi_{ej}}.$$

Нижняя $\Delta_{СИн}$ и верхняя $\Delta_{СИв}$ границы интервала, в котором с вероятностью $P = 1$ находится статическая погрешность СИ, в реальных условиях эксплуатации вычисляются по формулам

$$\Delta_{СИв} = \Delta_{OP} + \sum_{j=1}^n \Delta_{Cj \max}, \quad (8.28)$$

$$\Delta_{СИн} = -\Delta_{СИв}. \quad (8.29)$$

Пример 8.2. При измерении длины изделия установлено, что предел основной систематической погрешности данного типа СИ $\Delta_{0SP} \ll \sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]$, где $\sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]$ — предел СКО основной погрешности СИ. Вариация результатов измерения отсутствует. Записать выражение для пределов основной погрешности СИ для двух случаев: распределение вероятности случайной погрешности подчиняется нормальному закону и закон распределения неизвестен.

Решение. Поскольку систематическая погрешность много меньше случайной, то пределы основной погрешности определяются только случайной составляющей погрешности СИ и для интервала, в котором ее значение находится с вероятностью P , близкой к единице.

Положим $P = 0,997$. Тогда для нормального закона распределения основной случайной погрешности можно записать

$$\Delta_{0P} = \pm K \sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = \pm 3 \sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right].$$

Если неизвестный закон распределения погрешности может быть отнесен к числу симметричных законов с невозрастающей плотностью по мере удаления от центра распределения, то коэффициент K может быть вычислен по формуле (8.26): $K = 5 (P - 0,5)$ для $0,8 \leq P < 1$. При $P = 0,997$ получим $K = 2,485$. Примерно такое же K получаем, используя зависимость $K_{cp} = f(P)$ на рис. 8.1. Таким образом, для неизвестного закона распределения, но с ограничениями, изложенными выше, находим

$$\Delta_{0P} = \pm K \sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = \pm 2,48 \sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right].$$

Пример 8.3. При измерении длины изделия установлено, что пределы основной систематической погрешности для данного типа СИ $\Delta_{0SP} = \pm 0,2$ мм, а пределы СКО случайной погрешности $\sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = \pm 0,1$ мм. Вариация результатов измерения отсутствует.

Определить пределы допускаемой основной погрешности измерения при $P = 0,997$, полагая, что закон распределения случайной погрешности нормален.

Решение. Определим, как и в предыдущем примере 8.2, предел случайной погрешности при вероятности $P = 0,997$. Тогда пределы суммарной основной погрешности будут равны $\Delta_{0P} = \pm 0,5$ мм.

Пример 8.4. При измерении длины изделия установлено, что пределы основной систематической погрешности данного типа СИ $\Delta_{0SP} = \pm 0,1$ мм, а пределы СКО случайной погрешности $\sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = \pm 0,08$ мм. Гистерезис результатов измерения длины с разных концов изделия $H_{0P} = 0,5$ мм. Определить пределы допускаемой основной погрешности при вероятности $P = 0,95$ для случаев:

- случайная погрешность распределена по нормальному закону;
- закон распределения случайной погрешности неизвестен, но одномодален, ограничен и симметричен.

Решение. Пределы допускаемой погрешности СИ в общем виде равны

$$\Delta_{0P} = \pm \left(\Delta_{0SP} + K\sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] + 0,5H_{0P} \right).$$

При доверительной вероятности $P = 0,95$ и нормальном распределении случайной погрешности $K = 2$. Подставляя в предыдущее выражение исходные данные, получаем

$$\Delta_{0P} = \pm(0,1 + 2 \cdot 0,08 + 0,5/2) = \pm 0,51 \text{ мм} \approx 0,5 \text{ мм}.$$

Для определения коэффициента K при неизвестном законе распределения случайной погрешности воспользуемся графиком на рис. 8.1. При $P = 0,95$ $K_{CP} = 2,05$. Таким образом, получим $\Delta_{0P} = \pm 0,514 \approx \pm 0,5$ мм.

Пример 8.5. Установлено, что основная погрешность СИ размеров изделий состоит из случайной и систематической погрешностей. Случайная погрешность распределена по нормальному закону с СКО $\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = 0,1$ мм. Систематическая погрешность имеет равномерное распределение от $-0,4$ до 0 мм. Определить математическое ожидание, дисперсию общей погрешности, а также ее пределы.

Решение. В соответствии с (8.2) и (8.3) математическое ожидание и дисперсия основной погрешности будут равны:

$$M[\Delta_0] = M[\Delta_{0s}] = -0,2 \text{ мм},$$

$$D[\Delta_0] = D[\Delta_{0s}] + D\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] = \frac{0,16}{12} + 0,01 = 0,23 \text{ мм}^2.$$

Полагая, что систематическая погрешность не устранена, пределы основной суммарной погрешности определим при $P = 0,997$ для случайной погрешности и при $P = 1$ для систематической погрешности:

$$(\Delta_{0P})_H = -3\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] - (\Delta_{0SP})_H = -0,3 - 0,4 = -0,7 \text{ мм} \text{ — нижний предел};$$

$$(\Delta_{0P})_B = 3\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] + (\Delta_{0SP})_B = 0,3 + 0 = 0,3 \text{ мм} \text{ — верхний предел}.$$

Если систематическую погрешность полностью удалось устранить, то пределы основной погрешности определяются только случайной погрешностью и составляют $\pm 0,3$ мм.

Пример 8.6. Определить наибольшую дополнительную погрешность изменения сигнала на выходе СИ при изменении температуры окружающей среды от 20 до 60°C, если в этом диапазоне изменения температур:

1) функция влияния $\psi(t) = At$ линейна, $A = 1 \text{ мВ/}^\circ\text{C}$;

2) функция влияния изменяется по закону

$$\psi(t) = k [400 - (t - 40)^2], \quad k = 1 \text{ мВ/}^\circ\text{C}^2;$$

3) функция влияния при $t \geq 20^\circ\text{C}$ изменяется по закону

$$\psi(t) = k \ln(t - 19), \quad k = 1 \text{ мВ}.$$

Решение. 1. В диапазоне температур от 20 до 60°C наибольшая дополнительная погрешность будет при температуре 60°C ($\Delta t = 40^\circ\text{C}$):

$$\Delta_{C\max} = A\Delta t = 40 \text{ мВ}.$$

2. Определим температуру, при которой функция влияния имеет максимальное значение $\partial\psi/\partial t = -2(t - 40) = 0$, $t_{\max} = 40^\circ\text{C}$. При этом $\psi_{\max} = 400 \text{ мВ}$ и $\Delta_{C\max} = \psi_{\max} = 400 \text{ мВ}$.

3. $\Delta_{C\max} = 1 \cdot \ln(60 - 19) = 1 \cdot \ln(41) = 3,7 \text{ мВ}$.

8.4. КРИТЕРИИ СУЩЕСТВЕННОСТИ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

При расчете погрешностей СИ учитываются только те составляющие, которые вносят заметный вклад в суммарную погрешность СИ, т.е. являются существенными. Следует заметить, что в отличие от критерия значимости (критерий 1/3 от общей погрешности), рассмотренного в гл. 5, критерий существенности распространяется на погрешности разного характера (случайные и систематические) и разных причин возникновения (основная, дополнительная, динамические, гистерезиса и др.)

Рациональный комплекс нормируемых МХ СИ также должен включать характеристики всех составляющих погрешностей модели I или II, существенных для СИ данного типа. Существенность составляющих определяется сравнением их между собой.

8.4.1. Составляющие основной погрешности

Для определения критериев существенности составляющих основной погрешности аналоговых СИ используется выражение для наибольшей основной погрешности СИ в виде

$$\Delta_{0\max} = \Delta_{0\text{ср}} + 2\sqrt{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + \frac{H_0^2}{12}} = \Delta_{0\text{ср}} + 2\varepsilon, \quad (8.30)$$

где $\Delta_{0\text{ср}}$ — предел допускаемой систематической составляющей основной погрешности; $\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right]$ — СКО случайной составляющей основной погрешности; H_0 — основание закона распределения случайной составляющей основной погрешности СИ, обусловленной гистерезисом (вариации при нормальных условиях). Второе слагаемое под корнем соответствует СКО $\sigma_{H_0} = H_0/12$ при равномерном распределении погрешности из-за вариации.

Следует подчеркнуть, что *предел допускаемой систематической составляющей основной погрешности $\Delta_{0\text{ср}}$ нормируется во всех случаях без исключения.*

Принимая, что случайную составляющую основной погрешности СИ целесообразно нормировать и соответственно учитывать при расчетах, если она равна или более 10% допускаемого значения систематической погрешности, т.е. $\varepsilon \geq 0,2\Delta_{0\text{ср}}$, или $\sigma/\Delta_{0\text{ср}} \geq 0,1$, получаем следующие критерии существенности [6]:

$$\text{при } \frac{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right]}{H_0} \geq 0,9 \text{ и } \frac{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right]}{\Delta_{0\text{ср}}} \geq 0,1 \quad (8.31)$$

нормируется $\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right]$, а H_0 не нормируется, т.е. не учитывается, считается несущественной;

$$\text{при } \frac{\sigma\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right]}{H_0} < 0,1 \text{ и } \frac{H_0}{\Delta_{0\text{ср}}} \geq 0,3 \quad (8.32)$$

нормируется H_0 , а $\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]$ не нормируется, т.е. не учитывается, считается несущественной;

$$\text{при } 0,1 \leq \frac{\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]}{H_0} < 0,9 \text{ и } \frac{\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]}{\Delta_{0SP}} > \frac{1}{\sqrt{100 + 8,3 \left(H_0 / \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] \right)^2}} \quad (8.33)$$

нормируются $\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]$ и H_0 .

Если не соблюдаются оба из вторых неравенств (8.31)–(8.33) при соблюдении первых неравенств, ни $\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]$, ни H_0 не нормируются.

Вместо H_0 можно рассматривать $\sigma_{H_0} = H_0/12$, так как всегда предполагается равномерность погрешности из-за вариации.

Аналогичные соотношения критериев существенности имеют место при оценке погрешности цифровой части СИ (а именно АЦП и ЦАП) из-за влияния квантования непрерывного сигнала. При этом *номинальная ступень квантования или номинальная цена единицы наименьшего разряда* при двоичном выходном коде (μ_N) *всегда нормируется*, т.е. всегда учитывается при расчетах. Поскольку погрешность, обусловленная квантованием, имеет равномерное распределение, то ее оценивают совместно с погрешностью из-за вариации и в формуле (8.30) вместо H_0^2 тогда записывается $H_0^2 + \mu_N^2$.

8.4.2. Составляющие дополнительной погрешности

Соизмеримыми дополнительными погрешностями считаются погрешности, наибольшее значение которых различается не более чем на 30%. Погрешности, значения которых различаются более чем на 30%, считаются несоизмеримыми [1, 3, 4, 6]. Для определения критериев существенности дополнительных погрешностей СИ принимается, что при соизмеримых всех наибольших возможных значениях дополнительных погрешностей эти погрешности считаются существенными при условии, что сумма всех наибольших возможных значений дополнительных погрешностей равна или превышает 0,2 суммы наибольших возможных значений остальных составляющих погрешностей СИ в реальных условиях применения:

$$\sum_{i=1}^l \Delta_{Ci \max} \geq 0,2 \left(\Delta_{СИ \max} - \sum_{i=1}^l \Delta_{Ci \max} \right) \quad (8.34)$$

или

$$\sum_{i=1}^l \Delta_{Ci \max} \geq 0,17 \Delta_{СИ \max},$$

где $\Delta_{СИ \max}$ — наибольшее возможное значение погрешности СИ в рабочих условиях применения СИ данного типа (т.е. включающее погрешности по формуле (1.3)).

Если среди всех дополнительных погрешностей можно выделить группу «меньших» по сравнению с другими погрешностями, то условие, при котором эта часть дополнительных погрешностей считается несущественной, имеет вид

$$\left(\sum_{i=1}^r \Delta_{Ci \max} \right)_m < 0,17 \Delta_{СИ \max}, \quad (8.35)$$

где r — число дополнительных погрешностей, входящих в группу и удовлетворяющих неравенству (8.35).

Примечание. Определение дополнительной погрешности СИ приведено в разд. 1.6. Дополнительная погрешность может проявляться в виде систематической, случайной и грубой погрешности [1]. См. также разд. 8.2.

Аналогично (8.34) производится оценка существенности динамической составляющей погрешности

$$\Delta_{\text{dyn} \max} \geq 0,17 \Delta_{СИ \max}, \quad (8.36)$$

где $\Delta_{\text{dyn} \max}$ — наибольшее значение динамической погрешности СИ, возможное в рабочих условиях применения СИ данного типа.

Пример 8.7. Рассмотреть критерии существенности (8.31)–(8.33) при предельных соотношениях между составляющими основной погрешности, когда одна из них много меньше другой.

Пусть погрешность из-за вариации отсутствует, а $\sigma \left[\dot{\Delta}_0 \right] / \Delta_{0SP} = 0,1$, при этом выполняются оба неравенства (8.31) и правое неравенство (8.33). Тогда случайная погрешность $\sigma \left[\dot{\Delta}_0 \right]$ считается существенной.

Если случайная погрешность мала, т.е. $H_0 \gg 10^2 \sigma \left[\dot{\Delta}_0 \right]$, $\Delta_{0SP} \gg 10^2 \sigma \left[\dot{\Delta}_0 \right]$, а $H_0 / \Delta_{0SP} = 1,0$ то при этом выполняются оба не-

равенства (8.32) и случайная погрешность из-за вариации считается существенной, а случайная составляющая погрешности — несущественной.

Пример 8.8. При исследовании МХ данного типа СИ выявлены следующие составляющие основной погрешности:

- предел допускаемой систематической погрешности $\Delta_{0sp} = 0,05$;
- СКО случайной погрешности $\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = 0,01$;
- основание распределения случайной составляющей погрешности СИ, обусловленной гистерезисом $H_0 = 0,07$;

наибольшие значения дополнительных погрешностей измерения:

$\Delta_1 = 0,035$ — погрешность из-за влияния температуры окружающей среды;

$\Delta_2 = 0,001$ — погрешность из-за изменения напряжения питания;

$\Delta_3 = 0,002$ — погрешность из-за влияния влажности окружающей среды;

$\Delta_4 = 0,01$ — погрешность из-за влияния механической вибрации;

$\Delta_5 = 0,033$ — погрешность из-за влияния атмосферного давления;

наибольшее значение динамической погрешности СИ в рабочих условиях применения этого СИ $\Delta_{dyn\ max} = 0,07$.

Используя критерии существенности составляющих погрешности СИ, оценить, какие из погрешностей данного типа СИ необходимо нормировать и учитывать при расчете МХ СИ.

Решение. 1. Используя соотношения (8.31)–(8.33), оценим существенность случайных составляющих погрешностей относительно друг друга и предела основной систематической погрешности.

Подстановка данных в соотношения (8.31) дает следующие результаты:

$$\frac{\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]}{H_0} = \frac{0,01}{0,07} = 0,14 < 0,9 \text{ и } \frac{\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]}{\Delta_{0sp}} = \frac{0,01}{0,05} = 0,2 > 0,1,$$

в соотношения (8.32)

$$\frac{\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]}{H_0} = \frac{0,01}{0,07} = 0,14 > 0,1 \text{ и } \frac{H_0}{\Delta_{0sp}} = \frac{0,07}{0,05} = 1,4 > 0,3$$

и в соотношения (8.33)

$$0,1 \leq \frac{\sigma \left[\dot{\Delta}_0 \right]}{H_0} = 0,14 < 0,9 \text{ и } \frac{\sigma \left[\dot{\Delta}_0 \right]}{\Delta_{0SP}} = 0,2 > \frac{1}{\sqrt{100 + 8,3 \left(H_0 / \left[\dot{\Delta}_0 \right] \right)}} = 0,044.$$

Сравнивая полученные результаты с критериями существенности, определяемыми неравенствами (8.31)–(8.33), получаем, что удовлетворяются только неравенства (8.33). Это означает, что обе составляющие основной случайной погрешности, а именно $\sigma \left[\dot{\Delta}_0 \right]$ и H_0 , являются существенными и должны быть учтены в дальнейших расчетах. Напомним, что погрешность Δ_{0SP} должна учитываться всегда. При этом с доверительной вероятностью 0,95 наибольшее возможное значение основной погрешности для СИ данного типа будет равно (8.30)

$$\Delta_{0 \max} = 0,02 + 2 \sqrt{10^{-4} + (0,07^2)/12} = 0,02 + 2 \sqrt{5 \cdot 10^{-4}} = 6,5 \cdot 10^{-2}.$$

2. Для того чтобы оценить существенность дополнительных погрешностей, вычислим вначале наибольшее возможное значение погрешности СИ в рабочих условиях применения СИ данного типа

$$\begin{aligned} \Delta_{СИ \max} &= \Delta_{0 \max} + \sum_{i=1}^5 \Delta_i + \Delta_{\text{dyn max}} = \\ &= (6,5 + 3,5 + 0,1 + 0,2 + 1,0 + 3,3 + 7,0) \cdot 10^{-2} = 21,6 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Среди дополнительных погрешностей соизмеримы, т.е. отличаются друг от друга не более чем на 30%, только первая и пятая дополнительные погрешности. Они же могут быть отнесены к группе «больших» погрешностей. Оценка их по критерию (8.34) показывает, что они существенны:

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_5 &= (3,5 + 3,3) \cdot 10^{-2} = 6,8 \cdot 10^{-2} \geq 0,17 \Delta_{СИ \max} = \\ &= 0,17 \cdot 21,6 \cdot 10^{-2} = 3,7 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Оценка группы «меньших» погрешностей по критерию (8.35)

$$\begin{aligned} \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 &= (0,1 + 0,3 + 1,0) \cdot 10^{-2} = 1,3 \cdot 10^{-2} < 0,17 \cdot 21,6 \cdot 10^{-2} = \\ &= 3,68 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

показывает, что эта группа погрешностей несущественна и может не учитываться в общей сумме погрешностей и не нормироваться для данного типа СИ.

3. Используя критерий (8.36), оценим существенность динамической погрешности. Видно, что этот критерий удовлетворяется, так как $0,07 > 0,037$.

Примечание. В теории измерений существует критерий ничтожных погрешностей, согласно которому погрешность (или группа погрешностей) считается ничтожно малой, если она составляет не более одной трети от общей суммы всех погрешностей. Следует заметить, что этот критерий получен для определения общей погрешности косвенных измерений и касается только суммирования дисперсий погрешностей, т.е. случайных погрешностей (см. гл. 5).

Пример 8.9. При исследовании МХ данного типа СИ выявлены следующие составляющие основной погрешности:

— предел допускаемой систематической погрешности $\Delta_{0SP} = 0,02$;

— СКО случайной погрешности $\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = 0,01$;

— основание распределения случайной составляющей погрешности СИ, обусловленной гистерезисом $H_0 = 0,005$;

наибольшие значения дополнительных погрешностей измерения:

$\Delta_1 = 0,03$ — погрешность из-за влияния температуры окружающей среды;

$\Delta_2 = 0,001$ — погрешность из-за изменения напряжения питания;

$\Delta_3 = 0,01$ — погрешность из-за влияния влажности окружающей среды;

$\Delta_5 = 0,02$ — погрешность из-за влияния атмосферного давления;

наибольшее значение динамической погрешности СИ в рабочих условиях применения этого СИ $\Delta_{\text{dyn max}} = 0,015$.

Используя критерии существенности составляющих погрешности СИ, оценить, какие из погрешностей данного типа СИ необходимо нормировать и учитывать при расчете МХ СИ.

Решение. 1. Используя соотношения (8.31)–(8.33), оценим существенность случайных составляющих погрешностей относительно друг друга и предела основной систематической погрешности.

Подстановка данных в соотношения (8.31):

$$\frac{\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]}{H_0} = \frac{0,01}{0,005} = 2,0 > 0,9 \text{ и } \frac{\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]}{\Delta_{0SP}} = \frac{0,01}{0,02} = 0,5 > 0,1,$$

а затем в (8.32) показывает, что погрешность из-за вариации является несущественной по сравнению с погрешностью $\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]$.

При этом с доверительной вероятностью 0,95 наибольшее возможное значение основной погрешности для СИ данного типа будет равно (8.30)

$$\Delta_{0 \max} = 0,02 + 2\sqrt{10^{-4} + 25 \cdot 10^{-6}} \approx 0,02 + 2\sqrt{10^{-4}} = 4,0 \cdot 10^{-2}.$$

2. Для того чтобы оценить существенность дополнительных погрешностей, определим вначале наибольшее возможное значение погрешности СИ в рабочих условиях применения СИ данного типа:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{СИ} \max} &= \Delta_{0 \max} + \sum_{i=1}^4 \Delta_i + \Delta_{\text{dyn} \max} = \\ &= (4,0 + 3,0 + 0,1 + 1,0 + 2,0 + 1,5) \cdot 10^{-2} = 11,6 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Среди дополнительных погрешностей соизмеримы, т.е. отличаются друг от друга не более чем на 30%, только первая и четвертая дополнительные погрешности. Они же могут быть отнесены к группе «больших» погрешностей. Оценка их по критерию (8.34) показывает, что они существенны:

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_4 &= (3,0 + 2,0) \cdot 10^{-2} = 5,0 \cdot 10^{-2} \geq 0,17 \Delta_{\text{СИ} \max} = \\ &= 0,17 \cdot 11,6 \cdot 10^{-2} = 1,97 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Оценка группы «меньших» погрешностей по критерию (8.35)

$$\Delta_2 + \Delta_3 = (0,1 + 1,0) \cdot 10^{-2} = 1,1 \cdot 10^{-2} < 0,17 \cdot 11,6 \cdot 10^{-2} = 1,97 \cdot 10^{-2}$$

показывает, что эта группа погрешностей несущественна и может не учитываться в общей сумме погрешностей и не нормироваться для данного типа СИ.

3. Используя критерий (8.36), оценим существенность динамической погрешности. Видно, что этот критерий не удовлетворяется, так как $0,015 < 0,0197$ и динамическая погрешность признается несущественной, а само измерение может считаться статическим.

8.5. КЛАССЫ ТОЧНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Точность СИ — характеристика качества СИ, отражающая близость его погрешности к нулю. Класс точности СИ — это обобщенная характеристика данного типа СИ, как правило, отра-

жающая уровень их точности, выражаемая пределами допускаемых основных погрешностей, а иногда и дополнительных погрешностей. Следует подчеркнуть, что класс точности позволяет судить о том, *в каких пределах может находиться погрешность СИ данного типа*, но не является непосредственным показателем точности измерений, выполняемых с помощью каждого из этих средств.

Классы точности устанавливаются в зависимости от уровня основной погрешности. Пределы допускаемой основной абсолютной погрешности могут быть постоянны (аддитивная погрешность):

$$\Delta = \pm a,$$

либо зависеть от измеряемой величины x (аддитивная погрешность плюс мультипликативная погрешность):

$$\Delta = \pm(a + bx),$$

где Δ , a и x выражаются в единицах измеряемой величины; b — безразмерно.

Пределы допускаемых приведенных погрешностей, как правило, выражают в относительных единицах

$$\gamma = \Delta/x_N, \quad (8.37)$$

где x_N — нормируемое значение шкалы СИ (конечное значение шкалы, диапазон измерений, верхний предел измерений и т.д.). В общем случае величина x_N устанавливается документацией на СИ. Относительная приведенная погрешность выбирается из ряда чисел:

$$p = \pm(1 \cdot 10^n; 1,5 \cdot 10^n; 2 \cdot 10^n; 2,5 \cdot 10^n; 4 \cdot 10^n; 5 \cdot 10^n; 6 \cdot 10^n), \quad (8.38)$$

где $n = 1; 0; -1; -2; -3$ и т.д.

Класс точности обычно выражают в процентах. Например, класс точности 0,1 соответствует относительной погрешности 0,001.

Для обозначения класса точности СИ, у которых аддитивная и мультипликативная погрешности соизмеримы, нормируется предел допускаемой относительной погрешности

$$\delta = \frac{\Delta}{x} = \frac{a + bx}{x} = \pm \left[c + d \left(\left| \frac{X_k}{x} \right| - 1 \right) \right], \quad (8.39)$$

где X_k — конечное значение диапазона измерений; $c = b + d$, $d = a/X_k$ — положительные постоянные члены. Смысл такого представления относительной погрешности будет понятен, если определить δ в характерных точках шкалы СИ: при $x = X_k/2$, т.е.

в точке, соответствующей половине диапазона измерений, $\delta = c + d$, а при $x = X_k$ $\delta = \pm c$, т.е. пределу допускаемой относительной погрешности в том случае, когда показания прибора максимальны.

Числа, обозначающие c и d , выбирают из того же ряда p (8.38) и класс точности обозначают как отношение c/d .

Пример 8.10. Если класс точности обозначен 0,02/0,01, то это в соответствии с формулой (8.39) означает следующую запись относительной погрешности:

$$\delta = \pm \left[0,02 + 0,01 \left(\left| \frac{X_k}{x} \right| - 1 \right) \right] \% = \pm \left[0,0002 + 0,0001 \left(\left| \frac{X_k}{x} \right| - 1 \right) \right].$$

В конце диапазона СИ предел относительной допускаемой основной погрешности будет равен $\delta = \pm 2 \cdot 10^{-4} X_k$, а в середине диапазона — $\delta = \pm 3 \cdot 10^{-4} X_k$ для данного типа СИ.

Пример 8.11. Определить класс точности амперметра с конечным значением шкалы $I_k = 1,0$ мА для измерения тока в диапазоне от 0,2 до 1,0 мА так, чтобы относительная погрешность δ_r не превышала 1%.

Решение. Относительная погрешность определяется в соответствии с соотношением (8.37), где x_N — конечное значение шкалы, равное 1,0 мА. Чтобы относительная погрешность при измерении тока 0,2 мА не превышала 1%, погрешность измерения тока 0,2 мА должна быть $(0,2/1,0) \cdot 1\% = 0,2\%$. Таким образом, класс точности амперметра должен быть 0,2.

Пример 8.12. Определить показания двух последовательно включенных миллиамперметров с конечным значением шкал $I_k = 100$ мА и классами точности 1,0 и 0,5, если действительное значение тока при измерении равно 50 мА. Определить также наибольшую разницу в показаниях этих приборов.

Решение. Поскольку относительные погрешности в показаниях приборов $\gamma_1 = 0,01$ и $\gamma_2 = 0,005$, определим их пределы абсолютных основных погрешностей (8.37)

$$\Delta_1 = \gamma_1 I_k = 0,01 \cdot 100 = \pm 1,0 \text{ мА},$$

$$\Delta_2 = \gamma_2 I_k = 0,005 \cdot 100 = \pm 0,5 \text{ мА}.$$

Таким образом, показания первого прибора лежат в диапазоне от 51 до 49 мА, показания второго прибора — в диапазоне от 50,5 до 49,5 мА. Как видно, наибольшая возможная разница в показаниях двух приборов 1,5 мА.

Пример 8.13. Определить класс точности вольтметра с конечным значением диапазона измерения $U_k = 300$ В, если предел абсолютной погрешности измерения напряжения этим прибором равен $\Delta = \pm 0,5$ В.

Решение. Определим относительную погрешность измерения

$$\gamma = \Delta / U_k = 0,5 / 300 = \pm 1,67 \cdot 10^{-3}, \text{ или } 0,167\%.$$

Показатель точности СИ выбираем из ряда (8.38): $p = 0,2$.

Пример 8.14. Класс точности СИ 0,5/0,1. Записать выражение для относительной погрешности СИ и определить относительную погрешность для середины и края диапазона измерения.

Решение. Запись точности СИ в виде дроби говорит о том, что общая погрешность СИ состоит из аддитивной и мультипликативной погрешности:

$$\begin{aligned} \delta &= \pm \left[c - d \left(\left| \frac{X_k}{x} \right| - 1 \right) \right] = \pm \left[0,05 + 0,01 \left(\left| \frac{X_k}{x} \right| - 1 \right) \right] \% = \\ &= \pm \left[0,0005 + 0,0001 \left(\left| \frac{X_k}{x} \right| - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Относительная погрешность для края диапазона, т.е. при $x = X_k$, равна $\delta = \pm c = 0,05$ и для половины диапазона, т.е. при $x = 0,5X_k$, равна $\delta = \pm(c + d) = \pm 0,06$.

Пример 8.15. Равномерная шкала амперметра класса точности 1,5 имеет начальное значение шкалы минус $5A(x_{N1})$ и конечное значение плюс $20A(x_{N2})$. Цена деления шкалы 1 А. Указатель амперметра показывает 4 А. Полагая, что остальными факторами, влияющими на результат измерения, можно пренебречь, дайте оценку результату измерения.

Решение. Поскольку класс точности амперметра характеризует предел допустимой основной погрешности амперметров данного типа (но не конкретно данного амперметра), то абсолютное значение этой погрешности в соответствии с (8.37) будет равно $\Delta = \gamma x_{N2} = 0,015 \cdot 20 = 0,3$ А.

Таким образом, напряжение, измеренное амперметром, может находиться в пределах от 3,7 до 4,3 А, т.е. в пределах цены деления шкалы амперметра.

Пример 8.16. Цифровой частотомер класса точности 2,0 с номинальной частотой 50 Гц показывает 47 Гц. Цена наименьшего разряда 1 Гц. Оцените результат измерения.

Решение. У средств измерений с установленным номинальным значением измеряемой ФВ предел допускаемой основной погрешности относится к этому номиналу. Поэтому отличие показаний от значения измеряемой величины не может превысить соответствующего числа процентов от номинального значения: $\Delta < 50 \cdot 0,02 = 1$ Гц.

Следовательно, измеряемая частота находится в диапазоне от 46 до 48 Гц, т.е. в пределах дискретности показаний ± 1 Гц.

Пример 8.17. Указатель отсчетного устройства мегаомметра класса 2,5 показывает 40 МОм. На шкале прибора обозначение 2,5 помещено в круг, что свидетельствует о неравномерности шкалы. Оцените показание мегаомметра.

Решение. Поскольку мегаомметр имеет неравномерную шкалу, то погрешность, обусловленная свойствами данного типа мегаомметров, определяется не относительно конечного значения шкалы (в данном случае оно соответствует бесконечности, когда имеет место разрыв цепи), а относительно того значения, которое показывает указатель СИ. Таким образом $\Delta = 40 \cdot 0,25 = 1$ МОм. Измеряемое сопротивление лежит в пределах от 39 до 41 МОм.

Пример 8.18. Указатель отсчетного устройства амперметра класса точности 0,02/0,01 показывает минус 26 А. Шкала амперметра имеет конечные значения ± 50 А с нулем в центре шкалы. Цена деления шкалы 1 А. Оценить результат измерения.

Решение. В соответствии с (8.39) измеряемая сила тока отличается от той, что показывает указатель прибора, не больше чем на $\left[0,02 + 0,01 \left(\left| \frac{50}{-26} \right| - 1 \right) \right] \approx 0,03\%$. Таким образом, $\Delta < 26 \cdot 0,0003 = 0,0078 \approx 0,008$ А и показания амперметра находятся в пределах от 25,992 до 26,008 А. Для данного типа приборов эта погрешность незначительна.

Пример 8.19. Измерение мощности дозы гамма-излучения на одном из агрегатов атомной станции производится с помощью прибора, имеющего класс точности 5,0, по шкале 10 мкЗв/с. В результате 14 повторных измерений получено среднее значение мощности дозы $\bar{D} = 3,6$ мкЗв/с при СКО результата измерения $S_{\bar{D}} = 0,4$ мкЗв/с. Определить погрешность результата измерения при вероятности $P = 0,95$.

Решение. В соответствии с классом точности прибора 5,0 определим предел абсолютной основной погрешности СИ: $\Delta D = 0,05 \cdot 10 = 0,5$ мкЗв/с. Полагая, что это неисключенная систематическая

погрешность измерения, имеющая равномерное распределение в границах $\theta = \pm 0,5$ мкЗв/с, определяем $\theta(0,95) = 0,475$ мкЗв/с по таблице примера 4.2 и отношение $\lambda = \theta(P)/S_{\bar{D}} = 0,475/0,4 = 1,18$. Затем по формулам (1) и (2) примера 5.1 определяем суммарную погрешность измерения, полагая, что $\varepsilon(P=0,95, n=14) = t_p S_{\bar{D}} = 2,16 \cdot 0,4 = 0,864$ мкЗв/с:

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= K [\varepsilon(P) + \theta(P)] = 0,74 (0,864 + 0,475) = \\ &= 0,74 \cdot 1,33 \approx 1,0 \text{ мкЗв/с.} \end{aligned}$$

8.6. ПОГРЕШНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Одним из важных факторов, влияющих на погрешность измерений, является взаимодействие между объектом измерения и СИ, между двумя и более СИ, последовательно соединенными в измерительную систему, а также между СИ и устройством представления результатов измерений. Потребление энергии от объекта измерения или от СИ, предвключенного или послевключенного к основному СИ, также приводит к изменению результатов измерений и появлению соответствующей погрешности измерений.

Погрешность взаимодействия как одна из составляющих погрешности СИ в соответствии с классификацией, приведенной в методическом материале к ГОСТ 8.009–84, может быть довольно условно отнесена к статической погрешности. Проявления этой погрешности разнообразны, зависят от принципа действия СИ, и часто необходимо пристальное изучение физики проявления этой погрешности и ее учета.

Ниже приводятся несколько характерных примеров проявления погрешности взаимодействия.

Пример 8.20. Пусть измеряется напряжение сигнала $X(j\omega)$ на выходе некоторого объекта, выходное полное сопротивление которого, включая сопротивление линии связи объекта с СИ, равно $Z_0(j\omega)$, входное полное сопротивление СИ равно $Z_i(j\omega)$ (рис. 8.3). Определить погрешность измерения сигнала, обусловленную взаимодействием объекта измерения и СИ, в общем виде, а также для случая, когда измеряемый сигнал является синусоидальным $Z_0(j\omega) = R_0$, а $Z_i(j\omega)$ представляет собой параллельное соединение сопротивления R_i и емкости C_i .

Решение. 1. В результате взаимодействия объекта измерения и СИ на входе СИ имеет место не действительный сигнал $X(j\omega)$, а искаженный влиянием входного сопротивления сигнал

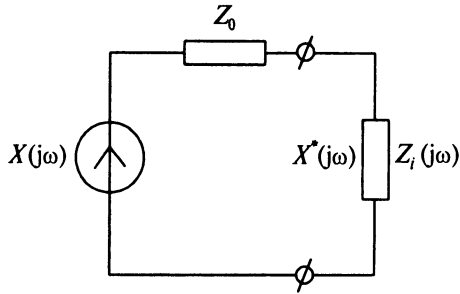


Рис. 8.3. Схема для определения погрешности взаимодействия

$$X^*(j\omega) = X(j\omega) \frac{Z_i(j\omega)}{Z_i(j\omega) + Z_0(j\omega)}.$$

Погрешность взаимодействия в общем виде определим как

$$\Delta_{\text{int}}(j\omega) = X^*(j\omega) - X(j\omega) = -X(j\omega) \frac{Z_0(j\omega)}{Z_0(j\omega) + Z_i(j\omega)}. \quad (1)$$

2. Если измеряемый сигнал $X(j\omega)$ — центрированный процесс, то математическое ожидание погрешности

$$M[\Delta_{\text{int}}] = 0.$$

3. Определим погрешность взаимодействия при синусоидальном характере сигнала. Для этого представим сигнал в комплексном виде $X(j\omega) = A_m e^{j\omega t}$. Преобразуем дробь формулы (1) с учетом данных примера:

$$\frac{Z_0}{Z_0 + Z_i} = \frac{R_0}{R_0 + Z_i} = \frac{R_0}{R_0 + R_i / (1 + j\omega\tau_i)} = k \frac{1 + j\omega\tau_i}{1 + j\omega k\tau_i} = \frac{\beta + j\omega}{\gamma + j\omega}, \quad (2)$$

где $k = \frac{R_0}{R_0 + R_i}$, $\beta = \frac{1}{\tau_i}$, $\gamma = \frac{1}{k\tau_i}$, $\tau_i = R_i C_i$.

Используя (2), запишем погрешность (1) в виде

$$\Delta_{\text{int}} = \left| \frac{\beta + j\omega}{\gamma + j\omega} \right| A_m e^{j\omega t} = \sqrt{\frac{\beta^2 + \omega^2}{\gamma^2 + \omega^2}} A_m e^{j\omega t}.$$

Частотную зависимость амплитуды погрешности взаимодействия при частоте ω_0 можно определить по формуле

$$A_{\Delta}(\omega_0) = A_m \sqrt{\frac{\beta^2 + \omega_0^2}{\gamma^2 + \omega_0^2}}. \quad (3)$$

Например, при $R_i = 10^6$ Ом, $C_i = 10^{-11}$ Ф, $R_0 = 100$ Ом, $A_m = 10^{-2}$ В, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 10^4$ с⁻¹ получим $k \approx 10^{-4}$, $\tau_i = R_i C_i = 10^{-5}$ с, $\beta = 10^5$ с⁻¹, $\gamma = \beta/k = 10^9$ с⁻¹. Подставляя в (3) вычисленные значения, получаем

$$A_{\Delta}(f_0 = 1,6 \text{ кГц}) = 10 \text{ мВ} \sqrt{\frac{10^{10} + 10^8}{10^{18} + 10^8}} = 10^{-4} \cdot 10^{-2} = 10^{-6} \text{ В} = 1 \text{ мкВ}.$$

Как видно, погрешность измерения амплитуды, обусловленная взаимодействием объекта измерения и СИ, при измеряемой частоте $f_0 = 1,6$ кГц составляет 1 мкВ и является несущественной. Однако, если измеряемая частота равна $f_0 = 10$ МГц, то погрешность измерения амплитуды уже составит заметную величину 0,63 мВ (6,3% измеряемой амплитуды).

Пример 8.21. Измерениям по схеме рис. 8.3. подвергается случайный стационарный центрированный сигнал с спектральной плотностью мощности, равной

$$S_x(\omega) = \sigma_x^2 \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

где σ_x^2 — дисперсия измеряемого сигнала; $\alpha = \tau_x^{-1}$, τ_x — постоянная времени корреляции случайного сигнала. СИ подключено к устройству для развертывания сигнала во времени, входное полное сопротивление представляет собой параллельное соединение сопротивления R и емкости C . Определить дисперсию случайной погрешности, обусловленной взаимодействием СИ и указанного устройства.

Решение. Погрешность взаимодействия определим по формуле (1) примера 8.20. Поскольку случайный сигнал центрирован, то математическое ожидание погрешности равно нулю. Дисперсию погрешности вычислим по формуле

$$\begin{aligned} D[\Delta_{\text{int}}] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{X^*}{X} - 1 \right|^2 S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{Z_0}{Z_0 + Z_i} \right|^2 S_x(\omega) d\omega = \\ &= \frac{\alpha \sigma_x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\beta^2 + \omega^2) d\omega}{(\gamma^2 + \omega^2)(\alpha^2 + \omega^2)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\beta = 1/\tau$, $\tau = R_i C_i$, $\gamma = \beta/k$, $k = R_0/(R_0 + R_i)$.

Используя значения интегралов табл. П15, после преобразования (1) получаем

$$D[\Delta_{\text{int}}] = \sigma_x^2 \frac{\alpha/k + \beta}{\alpha + \beta/k}. \quad (2)$$

Например, при $R_i = 10^6$ Ом, $C_i = 10^{-11}$ Ф, $R_0 = 100$ Ом, $\tau_x = 10^{-3}$ с получим $k \approx 10^{-4}$, $\tau = 10^{-5}$ с, $\beta = 10^5$ с $^{-1}$, $\gamma = \beta/k = 10^9$ с $^{-1}$, $\alpha = 10^3$ с $^{-1}$. Подставляя в (1) вычисленные значения, получаем дисперсию погрешности взаимодействия

$$D[\Delta_{\text{int}}] = \sigma_x^2 \frac{10^7 + 10^5}{10^3 + 10^9} \approx 0,01\sigma_x^2.$$

Пример 8.22. При измерении сопротивления резистора R «омметром», имеющим входное сопротивление R_p , измеряемое сопротивление резистора будет меньше из-за шунтирующего действия входного сопротивления СИ. Если пренебречь сопротивлением соединительных проводов, измеряемое сопротивление будет равно

$$R^* = R_i R / (R_i + R).$$

Абсолютную и относительную погрешности взаимодействия можно вычислить по формулам

$$\Delta_{\text{int}} = R - R^* = R \frac{R}{R + R_i} = kR, \quad \delta = \frac{\Delta_{\text{int}}}{R} = k.$$

где $k = R/(R + R_i)$.

Оценим погрешность взаимодействия при $R_i = 10^7$ Ом, $R = 10^5$ Ом. Подставляя заданные значения в приведенные выше формулы, получаем $k = 10^{-2}$, абсолютная погрешность измерения — 10^3 Ом, относительная — 1%.

Пример 8.23. С датчика по кабелю длиной $L = 100$ м и волновым сопротивлением $\rho = 75$ Ом (время распространения волны по кабелю $t_0 \approx 5$ нс/м) на вход измерительного преобразователя (ИП) поступают прямоугольные импульсы амплитудой A от 20 до 100 мВ и длительностью $t_{\text{и}} = 10$ нс со средней частотой следования 10^3 имп./с. На входе ИП для отсекаания электронных шумов включают амплитудный дискриминатор с порогом $U_{\text{д}} = 10$ мВ, который в пять раз превышает среднеквадратическое значение шума.

Определить условия, накладываемые на входное сопротивление $R_{\text{вх}}$ ИП, при которых отсутствуют погрешность в числе транслируемых по кабелю импульсов сигнала (погрешность взаимодействия между датчиком и ИП), если выходное сопротивление датчика $R_{\text{вых}} \gg \rho$ (рис. 8.4).

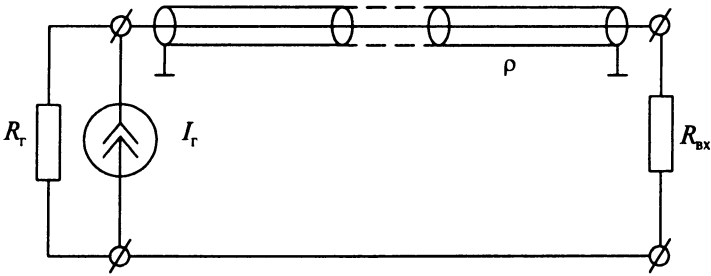


Рис. 8.4. Схема передачи импульсного сигнала по длинной кабельной линии

Решение. 1. Исходя из условия примера, определим вначале возможный характер искажений, которые может внести в систему передачи сигнала линия трансляции сигнала. Поскольку время передачи сигнала по кабелю $Lt_0 = 100 \cdot 5 = 500$ нс больше $t_{и} = 10$ нс, то при неправильном выборе сопротивления $R_{вх}$ в системе передачи сигнала могут возникнуть отраженные импульсы той же полярности, что основной импульс (при $R_{вх} > \rho$), или отраженные импульсы противоположной полярности (при $R_{вх} < \rho$). Наиболее «опасными» являются первые отраженные импульсы той же полярности, что и основной, так как они имеют наибольшую амплитуду и могут восприниматься ИП как полезные.

2. Поскольку импульсы передаются с малой частотой 10^3 имп./с, то такую передачу импульсов можно считать как передачу единичных импульсов, исключающую наложение отраженных импульсов на основной.

3. Амплитуда первого (самого большого отраженного) импульса может быть определена по формуле [21]

$$U_{01} = A_{\max} \frac{R_{вх} - \rho}{R_{вх} + \rho}.$$

Из этой формулы получаем условия, ограничивающие $R_{вх}$:

$$R_{вх} \leq \frac{1 + m}{1 - m} \rho,$$

где $m = U_{01}/A$. Определим наибольшее $R_{вх}$, при котором может наступить ошибочное увеличение числа регистрируемых импульсов. Это будет иметь место при $U_{01} \geq U_{д} = 10$ мВ. Тогда отношение $m = U_{01}/A_{\max} = 0,1$.

Таким образом, допустимое входное сопротивление не должно превышать

$$R_{вх} = \frac{1 + 0,1}{1 - 0,1} \cdot 75 = 91,5 \text{ Ом.}$$

Пример 8.24. В стакане содержится 250 см^3 воды. Опущенный в стакан термометр показал температуру $T_B = 78^\circ\text{C}$. Теплоемкость термометра 20 Дж/К , удельная теплоемкость воды $4190 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$. До опускания в воду (до измерения) термометр показывал температуру $T_T = 20^\circ\text{C}$.

Определить действительную температуру воды T_x , а также погрешность, вызванную взаимодействием СИ (термометра) и объекта измерения (вода в стакане).

Решение. В соответствии с законом сохранения энергии

$$C_B m_B (T_x - T_B) = C_T m_T (T_B - T_T), \quad (1)$$

где C_B, C_T — удельные теплоемкости воды и термометра, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; m_B, m_T — масса воды и термометра.

Из формулы (1) находим

$$T_x = \frac{C_T m_T (T_B - T_T) + C_B m_B T_B}{C_B m_B} = \frac{C_T m_T}{C_B m_B} (T_B - T_T) + T_B. \quad (2)$$

Подставляя исходные данные в (2), получаем $T_x = 1,1 + 78 \approx 79^\circ\text{C}$. Таким образом, погрешность взаимодействия составляет $\Delta \approx 1^\circ\text{C}$.



ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

В настоящей главе приводятся примеры расчета инструментальных погрешностей (основной и дополнительной) СИ. Эти расчеты основаны на материале, изложенном в гл. 8, и примерах, приведенных в РД 50-453-84 [6]. Наибольшее внимание уделено расчету усилителей постоянного тока (УПТ), поскольку их параметры и МХ особенно чувствительны к изменению внешних условий эксплуатации и могут заметно изменяться со временем. Приводятся примеры расчета погрешностей как для данного типа усилителей, так и для усилителей с индивидуальными МХ, работающими в конкретных условиях эксплуатации. Кроме того, показано, каким образом формируется перечень нормируемых МХ для данного типа СИ по его среднестатистическим параметрам.

Расчеты характеристик погрешностей и их оценки являются типичными и могут быть использованы для многих СИ с учетом их индивидуальных особенностей.

9.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСНОВНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Представим основные соотношения, связывающие МХ УПТ с его параметрами.

Основную погрешность УПТ, приведенную ко входу УПТ, можно представить в виде суммы аддитивной и мультипликативной составляющих погрешностей (рис. 9.1):

$$\Delta_0 = \frac{u_0}{K_N} + \delta K u_{in} = \frac{u_n + u_{dr} + u_d}{K_N} + u_{in}(\delta_n + \delta_{dr} + \delta_d), \quad (9.1)$$

где u_0 — смещение нулевого уровня на выходе УПТ; u_{in} — входное напряжение усилителя; δK — относительное изменение коэффициента усилителя от текущего K до номинального значения K_N , равное $\delta K = (K - K_N)/K_N$; u_n , u_{dr} , u_d — аддитивные состав-

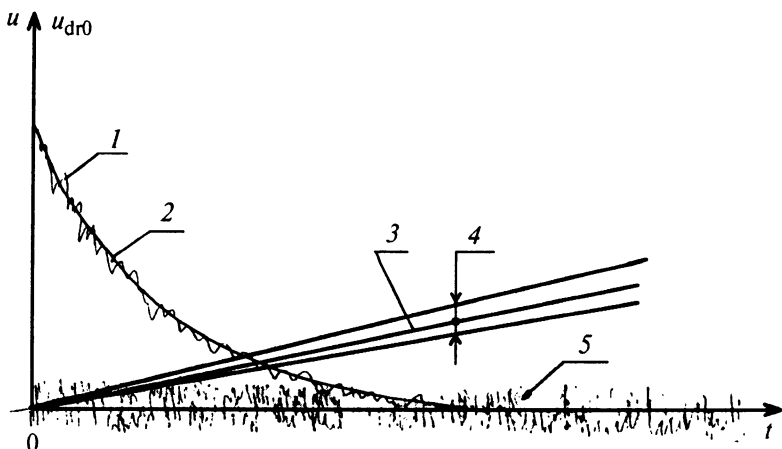


Рис. 9.1. Источники основной составляющей погрешности усилителей: 1 — случайные изменения экспоненциального дрейфа; 2, 3 — номинальный дрейф из-за старения элементов схемы; 4 — разброс дрейфа из-за разброса номинальных величин компонентов схем; 5 — стационарный белый шум

ляющие погрешности УПТ, приведенные к его выходу и обусловленные электронным шумом, дрейфом и разбросом параметров элементов электронной схемы соответственно; δ_n , δ_{dr} , δ_d — относительные изменения коэффициента усиления УПТ, обусловленные электронным шумом, дрейфом и разбросом параметров электронной схемы соответственно и приводящие к появлению мультипликативной составляющей погрешности УПТ.

Полагается, что шум — это стационарный случайный процесс типа белого шума, характеризуемый математическим ожиданием, равным нулю, $M[u_n] = 0$, $M[\delta_n] = 0$ и дисперсиями $D[u_n]$ и $D[\delta_n]$.

Полагается также, что медленные случайные изменения нулевого уровня на входе УПТ обусловлены двумя причинами. Первая — постепенный прогрев УПТ. Этот процесс, как правило, экспоненциально затухает со временем. Вторая причина — медленное изменение характеристик элементов УПТ со временем (старение элементов). Математическое ожидание дрейфа нулевого уровня u_{dr} и относительного изменения коэффициента усиления δ_{dr} можно представить в виде

$$\begin{aligned} M[u_{dr}] &= u_{dr0} \exp[-\alpha_u(t - t_{sw})] + [v_1(t - t_0)], \\ M[\delta_{dr}] &= \delta_{dr0} \exp[-\alpha_\delta(t - t_{sw})] + [v_2(t - t_0)], \end{aligned} \quad (9.2)$$

где t_{sw} — момент включения УПТ; t_0 — момент последней корректировки погрешности УПТ; α_u и α_δ — коэффициенты, характери-

зующие скорости «прогрева» УПТ; v_1 и v_2 — математические ожидания скоростей дрейфа. Процессы дрейфа сопровождаются низкочастотными флуктуациями u_{dr} и δ_{dr} , которые представляют собой центрированные стационарные случайные процессы, характеризующиеся автокорреляционными функциями $R_{1N}(\tau) = D[u_{dr}] e^{-\beta|\tau|}$ и $R_{2N}(\tau) = D[\delta_{dr}] e^{-\beta|\tau|}$ соответственно, $D[u_{dr}]$, $D[\delta_{dr}]$ — дисперсии этих процессов; β — граничная круговая частота, характеризующая частотный спектр шумов типа $1/f$; u_d и δ_d — случайные величины (для совокупности УПТ данного типа), обусловленные отклонением параметров элементов схемы от номинальных значений, математические ожидания которых равны нулю, т.е. $M[u_d] = 0$, $M[\delta_d] = 0$.

В настоящее время широко применяется принцип усиления постоянного тока с использованием МДМ-преобразования (модуляции—демодуляции) входного постоянного тока. Для этих целей разработаны специальные электрометрические операционные усилители. Применение МДМ-усилителей значительно снижает многие проблемы высокоточного усиления слабых сигналов, в том числе изменение коэффициента усиления усилителя при изменении ряда влияющих величин, и прежде всего температуры окружающей среды и напряжения питания, дрейфа нулевого уровня сразу после включения УПТ и в течение длительного времени. В импульсных усилителях при усилении импульсного сигнала отсутствует дрейф нулевого уровня, коэффициент усиления меньше зависит от разного рода влияющих факторов, но остаются проблемы изменения усиления при «прогреве» и старении элементов схем.

Электронные шумы и их зависимость от влияющих величин, и особенно от температуры окружающей среды, имеют место для всех типов усилителей. Поскольку дисперсия электронного шума, как правило, возрастает с увеличением температуры окружающей среды, то входные каналы наиболее ответственных схем принудительно охлаждаются. Примеры оптимизации частотной полосы пропускания для повышения отношения сигнала/шум приведены в гл. 10.

9.2. РАСЧЕТ ОСНОВНОЙ ПОГРЕШНОСТИ УСИЛИТЕЛЕЙ

Пример 9.1. Используя данные разд. 9.1. и формулы гл. 8, записать выражения для

- систематической основной погрешности в процессе прогрева и после прогрева УПТ;

- математического ожидания этой погрешности;
- пределов, в которых находится эта погрешность, при условии, что корректировка дрейфа производится периодически через каждые $t_{\text{кор}}$ часов.

Вычислить указанные выше величины для УПТ, обладающего следующими параметрами

- номинальный коэффициент усиления $K_N = 1000$;
- номинальное входное напряжение $u_{\text{in}} = 10$ мВ;
- интервал корректировки дрейфа $t_{\text{кор}} = 24$ ч = 1440 мин;
- скорости прогрева УПТ $\alpha_u = \alpha_\delta = 0,08$ мин⁻¹;
- скорости систематического линейного дрейфа составляют $v_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ В/мин, $v_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ мин⁻¹; разброс скоростей незначителен;
- отклонения u_d и δ_d лежат в пределах $u_{\text{др}} = \pm 0,07$ В, $\delta_{\text{др}} = \pm 0,07$ и распределены равномерно в указанных пределах; математические ожидания $M[u_d] = 0$, $M[\delta_d] = 0$;
- время оценки погрешности $t - t_0 = 24$ ч, т.е. перед очередной корректировкой, когда погрешность максимальна.

Решение. 1. Используя формулы (9.1) и (9.2), получаем выражения для систематической составляющей основной погрешности, приведенной ко входу СИ (УПТ);

$$\Delta_{0s} = \frac{1}{K_N} \left\{ u_{\text{др}0} \exp[-\alpha_u(t - t_{\text{sw}})] + v_1(t - t_0) + u_d \right\} + u_{\text{in}} \left\{ \delta_{\text{др}0} \exp[-\alpha_\delta(t - t_{\text{sw}})] + v_2(t - t_0) + \delta_{\text{др}} \right\}. \quad (9.3)$$

Оценим время прогрева $t_{\text{пр}}$ УПТ, полагая, что оно соответствует уменьшению $u_{\text{др}0}$ и $\delta_{\text{др}0}$ до 1%. Для этого из уравнения $\exp(-0,08 t_{\text{пр}}) = 0,01$ определим, что $t_{\text{пр}} = 1$ ч. Таким образом, через 1 ч «прогрева» УПТ войдет в свое номинальное состояние и систематическая составляющая основной погрешности будет иметь вид

$$\Delta_{0s}(t) = \frac{v_1(t - t_0) + u_d}{K_N} + u_{\text{in}} [v_2(t - t_0) + \delta_d]. \quad (9.4)$$

Как видно из (9.4), систематическая погрешность несмотря на прогрев УПТ продолжает зависеть от времени, так как имеет место временной дрейф, характерный процесс для всех УПТ (если УПТ построен по принципу модуляция—демодуляция входного сигнала, то дрейф таких УПТ, как правило, отсутствует).

2. Определим математическое ожидание систематической погрешности, учитывая, что систематический линейный дрейф (из-за старения элементов) происходит по линейному закону, отрицательные и положительные отклонения u_d и δ_d равновероятны, а математические ожидания их равны нулю:

$$\begin{aligned} M[\Delta_{0s}] &= \frac{M[v_1](t-t_0)}{K_N} + u_{in} M[v_2](t-t_0) = \\ &= \left[\frac{M[v_1]}{K_N} + u_{in} M[v_2] \right] (t-t_0). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Подставив в (9.5)

$M[v_1] = v_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ В/мин, $M[v_2] = v_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ мин⁻¹, $K_N = 1000$, получим

$$M[\Delta_{0s}] = (2 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot 10^{-6} u_{in}) (t-t_0) = 2 \cdot 10^{-8} (1 + 10^2 u_{in}) t_{cor}. \quad (9.6)$$

К моменту периодической корректировки, т.е. через 24 ч, $M[\Delta_{0s}] \approx 60$ мкВ. Отметим, что полученные оценки относятся к данному типу УПТ, т.е. представляют некие усредненные значения для большой группы СИ данного типа.

3. Определим предельные значения для систематической составляющей основной погрешности, т.е. погрешности, которыми могут обладать отдельные (индивидуальные) экземпляры УПТ, полагая, что погрешность из-за дрейфа максимальна в момент корректировки. Поскольку допустимые отклонения $u_{dP} = \pm 0,07$ В и $\delta_{dP} = \pm 7 \cdot 10^{-3}$ (обусловленные в основном допусками на элементы (детали) УПТ данного типа), $u_{in} = 10$ мВ, то консервативная оценка предела систематической составляющей основной погрешности будет равна

$$\begin{aligned} \Delta_{0sP} &= \left(\frac{v_1}{K_N} + u_{in} v_2 \right) t_{cor} + \frac{u_{dP}}{K_N} + u_{in} \delta_{dP} \approx \\ &\approx 10^{-4} (1 + 10^2 u_{in}) = 200 \text{ мкВ}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Таким образом, математическое ожидание систематической составляющей основной погрешности СИ через сутки (перед коррекцией) составит 58 мкВ, а ее предел 200 мкВ.

Пример 9.2. Для СИ, характеристики которого приведены в предыдущем примере, записать выражения для дисперсии систематической составляющей основной погрешности СИ и предельной

случайной составляющей основной погрешности СИ данного типа СИ.

Вычислить вышеуказанные характеристики, а также дисперсию основной составляющей погрешности УПТ, используя данные, приведенные в примере 9.1, а также следующие характеристики:

- наибольшее значение дисперсии аддитивного белого шума, приведенного к выходу, равно $D_p[u_n] = 2 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2$;
- наибольшее значение дисперсии мультипликативного белого шума равно $D_p[\delta_n] = 2 \cdot 10^{-6}$;
- наибольшая дисперсия аддитивного дрейфа, приведенного к выходу усилителя, $D_p[u_{dr}] = R_{1N}(0) = 2 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2$;
- наибольшая дисперсия мультипликативного дрейфа $D_p[\delta_{dr}] = R_{2N}(0) = 2 \cdot 10^{-6}$;
- разброс скоростей дрейфа $\Delta v_1 = \pm 0,2 \cdot 10^{-5} \text{ В/мин}$, $\Delta v_2 = \pm 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ мин}^{-1}$;
- распределение скоростей дрейфа равномерное.

Решение. Поскольку все флуктуационные процессы независимы, то дисперсию систематической составляющей основной погрешности СИ можно представить как сумму дисперсий ее составляющих:

$$\begin{aligned}
 D[\Delta_{0s}] &= \left[\frac{D(v_1)}{K_N^2} + u_{in}^2 D(v_2) \right] (t - t_0)^2 + \frac{u_{dP}^2}{3K_N^2} + u_{in}^2 \frac{\delta_{dP}^2}{3} = \\
 &= \left(\frac{\Delta v_1^2}{3K_N^2} + u_{in}^2 \frac{\Delta v_2^2}{3} \right) (t - t_0)^2 + \frac{u_{dP}^2}{3K_N^2} + u_{in}^2 \frac{\delta_{dP}^2}{3} = \\
 &= \left(\frac{4 \cdot 10^{-12}}{3 \cdot 10^6} + u_{in}^2 \frac{4 \cdot 10^{-14}}{3} \right) (t - t_0)^2 + \frac{49 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^6} + u_{in}^2 \frac{49 \cdot 10^{-6}}{3} = \\
 &= (1,33 \cdot 10^{-18} + 10^{-4} \cdot 1,33 \cdot 10^{-14})(1440)^2 + 16,3 \cdot 10^{-10} + \\
 &\quad + 10^{-4} \cdot 16,3 \cdot 10^{-6} \approx 33,0 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2.
 \end{aligned}$$

Дисперсия вычислена для входного сигнала, равного 10 мВ, и периодичности корректировки: один раз за 24 ч. Полученные результаты показывают, что отклонения скорости дрейфа в пределах $\pm 10\%$ слабо влияют на конечный результат. Для данного типа УПТ дисперсию систематической составляющей основной погрешности СИ можно представить в виде

$$D[\Delta_{0s}] = 16 \cdot 10^{-10} (1 + 10^4 u_{in}^2). \quad (9.8)$$

Предельное значение дисперсии случайной составляющей основной погрешности СИ будет равно

$$\begin{aligned}
 D\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] &= \frac{1}{K_N^2} \left[D_P[u_n] + D_P[u_{dr}] \right] + u_{in}^2 \left[D_P[\delta_n] + D_P[\delta_{dr}] \right] = \\
 &= \frac{1}{10^6} \left[2 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} \right] + u_{in}^2 \left[2 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-6} \right] = \\
 &= 4 \cdot 10^{-6} (1 + 10^4 u_{in}^2) = 8 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2.
 \end{aligned} \tag{9.9}$$

Таким образом, предельное СКО основной погрешности равно $\sigma_P\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] = 28 \text{ мкВ}$, а суммарная дисперсия случайной составляющей основной погрешности в соответствии с (8.3) равна

$$\begin{aligned}
 D\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] &= D[\Delta_{0s}] + D_P\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] = 33 \cdot 10^{-10} + 8 \cdot 10^{-10} \approx \\
 &\approx 41 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2 = \sigma_P^2\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] = (64 \text{ мкВ})^2.
 \end{aligned}$$

9.3. РАСЧЕТ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ УСИЛИТЕЛЕЙ

Пример 9.3. Для УПТ, характеристики которого приведены в примерах 9.1 и 9.2, определить дополнительные погрешности, обусловленные влиянием изменения температуры и напряжения питания. Номинальные функции влияния на систематическую погрешность и дисперсию случайной погрешности имеют вид

$$\psi_s(\xi_1, \xi_2) = \frac{d_1 \Delta \xi_1 + d_2 \Delta \xi_2}{K_N} + u_{in} (l_1 \Delta \xi_1 + l_2 \Delta \xi_2), \tag{9.10}$$

$$\psi_D(\xi_1, \xi_2) = \frac{f_1 \Delta \xi_1 + f_2 \Delta \xi_2}{K_N^2} + u_{in}^2 (g_1 \Delta \xi_1 + g_2 \Delta \xi_2), \tag{9.11}$$

где $\Delta \xi_1$ и $\Delta \xi_2$ — разности между реальными (в момент измерения) и нормальными значениями температуры окружающей среды и напряжения питания; $d_1, d_2, l_1, l_2, f_1, f_2, g_1, g_2$ — постоянные коэффициенты пропорциональности (индекс 1 относится к изменениям температуры, индекс 2 — напряжения).

Рассчитать дополнительные погрешности, приведенные ко входу УПТ, при следующих значениях постоянных коэффициентов:

$$d_1 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ В/}^\circ\text{С}, l_1 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{С}^{-1}, f_1 = 10^{-4} \text{ В}^2/\text{}^\circ\text{С}, g_1 = 10^{-6} \text{ }^\circ\text{С}^{-1},$$

$$d_2 = 1,5 \cdot 10^{-3}, l_2 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ В}^{-1}, f_2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ В}, g_2 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ В}^{-1}. \quad (9.12)$$

Нормальное значение температуры соответствует 20°С , а область рабочих значений температур от 10 до 50°С . Нормальное значение напряжения питания -220 В , которое изменяется от 210 до 250 В .

Решение. После подстановки (9.12) в (9.10) и (9.11) получим

$$\psi_s(\xi_1, \xi_2) = 3 \cdot 10^{-6} (1 + 10^2 u_{\text{in}}) (\Delta\xi_1 + 0,5\Delta\xi_2), \quad (9.13)$$

$$\psi_D(\xi_1, \xi_2) = 10^{-10} (1 + 10^4 u_{\text{in}}^2) (\Delta\xi_1 + 0,5\Delta\xi_2). \quad (9.14)$$

Рассчитаем дополнительные погрешности для наибольших изменений температуры напряжения питания, т.е. для $\Delta\xi_1 = 30^\circ\text{С}$, $\Delta\xi_2 = 30 \text{ В}$ и входном сигнале $u_{\text{in}} = 10 \text{ мВ}$:

$$\psi_s(50^\circ\text{С}, 250 \text{ В}) = 6 \cdot 10^{-6} (30 + 15) = 27 \cdot 10^{-5} \text{ В} = 270 \text{ мкВ},$$

$$\psi_D(50^\circ\text{С}, 250 \text{ В}) = 2 \cdot 10^{-10} \cdot 45 = 90 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2 = (95 \cdot 10^{-6})^2 \text{ В}^2 = (95 \text{ мкВ})^2,$$

$$\psi_s(10^\circ\text{С}, 210 \text{ В}) = 6 \cdot 10^{-6} (-10 - 5) = -90 \text{ мкВ},$$

$$\psi_D(10^\circ\text{С}, 210 \text{ В}) = 2 \cdot 10^{-10} |-15| = 30 \cdot 10^{-12} \text{ В}^2 = (55 \cdot 10^{-6})^2 \text{ В}^2 = (55 \text{ мкВ})^2.$$

Другие сочетания изменения температуры и напряжения питания дают меньшие значения дополнительной погрешности, например $\psi_s(10^\circ\text{С}, 230 \text{ В}) = 30 \text{ мкВ}$, $\psi_s(50^\circ\text{С}, 210 \text{ В}) = 150 \text{ мкВ}$.

Пример 9.4. Для УПТ, характеристики которого приведены в примерах 9.1–9.3, установлены следующие нормальные области значений влияющих величин: для температуры окружающей среды $(20 \pm 2)^\circ\text{С}$ и для напряжения питания $(220 \pm 2) \text{ В}$. Определить систематическую погрешность в области нормальных условий и оценить ее значимость по сравнению с другими погрешностями. Полагается, что погрешность из-за гистерезиса и динамическая погрешность равны нулю.

Решение. Используя формулы (9.10), (9.11) и значения коэффициентов (9.12), определим наибольшее значение погрешности при температуре 22°С и напряжении питания 222 В , т.е. при $\Delta\xi_1 = 2^\circ\text{С}$ и $\Delta\xi_2 = 2 \text{ В}$. После подстановки коэффициентов в (9.12) получим $\psi_s(\xi_1, \xi_2) = 18 \text{ мкВ}$.

Оценим значимость полученной погрешности, используя соотношение (8.34):

$$\sum_{i=1}^j \Delta_{si \max} \geq 0,17 \Delta_{СИ \max},$$

где $\Delta_{si \max}$ — максимальные значения оцениваемых систематических погрешностей из-за изменения температуры на 2°C и напряжения питания на 2 В.

Из предыдущих вычислений получено $\Delta_{0sp} = \pm 200$ мкВ, наибольшая систематическая погрешность (см. пример 9.3) 270 мкВ. Определим случайную составляющую погрешности при доверительной вероятности $P = 0,997$, полагая, что она распределена по нормальному закону. Тогда $\dot{\Delta}_0 = 3\sigma \left[\dot{\Delta}_0 \right] = 3 \cdot 28 = 84$ мкВ.

Подставляя полученные значения в формулу (8.34), получаем $\Delta_{СИ \max} \cdot 0,17 = (270 + 200 + 84) \cdot 0,17 = 94$ мкВ, что больше 18 мкВ. Следовательно, погрешность, вносимая изменениями внешних условий эксплуатации, незначима и ее можно не учитывать. Это соответствует определению нормальных условий эксплуатации.

Пример 9.5. Для УПТ, метрологические характеристики которого приведены в примерах 9.1–9.4, получить выражение для дисперсии дополнительной систематической погрешности, если функция влияния систематической погрешности, обусловленная воздействием влияющих факторов ξ_1 и ξ_2 , изменяющихся случайным образом, имеет вид (см. (9.13))

$$\psi_s(\xi_1, \xi_2) = 3 \cdot 10^{-6} (1 + 10^2 u_{in}) (\Delta \xi_1 + 0,5 \Delta \xi_2),$$

и эти факторы статистически независимы между собой.

Решение. Получим выражение для дисперсии систематической составляющей дополнительной погрешности данного вида СИ, используя формулу для определения дисперсии при косвенных измерениях:

$$\begin{aligned} D[\psi_s(\xi_1, \xi_2)] &= \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial (\Delta \xi_1)} \right]^2 D(\Delta \xi_1) + \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial (\Delta \xi_2)} \right]^2 D(\Delta \xi_2) = \\ &= \left[3 \cdot 10^{-6} (1 + 10^2 u_{in}) \right]^2 D[\Delta \xi_1] + \left[3 \cdot 10^{-6} (1 + 10^2 u_{in}) \right]^2 \times \\ &\times 0,25 D[\Delta \xi_2] = 9 \cdot 10^{-12} (1 + 10^2 u_{in})^2 (D[\Delta \xi_1] + 0,25 D[\Delta \xi_2]). \end{aligned} \quad (9.15)$$

9.4. РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ УСИЛИТЕЛЕЙ ПО ЗАДАНЫМ НОРМИРОВАННЫМ МЕТРОЛОГИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Пример 9.6. Для совокупности СИ данного вида (УПТ) в предыдущих примерах были определены следующие нормируемые метрологические характеристики (см. п. 8.2.1):

- математическое ожидание систематической составляющей основной погрешности (9.6)

$$M[\Delta_{0s}] = 2 \cdot 10^{-8}(1 + 10^2 u_{in}^2) t_{cor};$$

- дисперсия систематической составляющей основной погрешности (9.8)

$$D[\Delta_{0s}] = 16 \cdot 10^{-10}(1 + 10^4 u_{in}^2);$$

- предел дисперсии случайной составляющей основной погрешности (9.9)

$$D_p\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] = 4 \cdot 10^{-10}(1 + 10^4 u_{in}^2);$$

- номинальная функция влияния на дополнительную погрешность (9.13)

$$\psi_s(\xi_1, \xi_2) = 3 \cdot 10^{-6}(1 + 10^2 u_{in}) (\Delta\xi_1 + 0,5\Delta\xi_2);$$

- функция влияния на дисперсию основной случайной погрешности (9.14)

$$\psi_D(\xi_1, \xi_2) = 10^{-10}(1 + 10^4 u_{in}^2) (\Delta\xi_1 + 0,5\Delta\xi_2);$$

- дисперсия функции влияния на дополнительную погрешность (9.15)

$$D[\psi_s(\xi_1, \xi_2)] = 9 \cdot 10^{-12}(1 + 10^2 u_{in})^2 (D[\Delta\xi_1] + 0,25D[\Delta\xi_2]).$$

Определить математическое ожидание, дисперсию погрешности СИ, а также интервалы, в которых может находиться погрешность с заданной доверительной вероятностью для данного вида СИ при следующих данных влияющих величин и УПТ:

- температура окружающей среды (параметр ξ_1) изменяется от 20 до 40°C равномерно в течение всего периода эксплуатации СИ;

- напряжение питания (параметр ξ_2) изменяется в течение суток по синусоидальному закону (ночью оно увеличивается до 220 В, а днем уменьшается до 200 В, рис. 9.2):

$$\xi_2(t) = \xi_{2ref} + \xi_{2max} \cos(2\pi t/T) + z(t),$$



Рис. 9.2. Изменения напряжения питания в течение суток

где $\xi_{2\text{ref}}$ — нормальное напряжение питания, равное 210 В, период $T = 24$ ч; $\xi_{2\text{max}} = 10$ В; $z(t)$ — функция, определяющая случайные изменения напряжения питания в текущий момент времени и характеризуемая автокорреляционной функцией $R_z(\tau) = R_z(0) \exp(-5|\tau|)$. Эта автокорреляционная функция уменьшается до 8% от своего начального значения в течение получаса, $R_z(0) = 4 \text{ В}^2$;

- корректировка дрейфа производится каждые 24 ч = 1440 мин;
- номинальное значение входного напряжения $u_{\text{in}} = 10 \text{ мВ}$.

Решение. 1. Математическое ожидание погрешности и дисперсия погрешности СИ включает две составляющие: основную и дополнительную погрешности, которые могут быть определены по следующим формулам (см. (8.12) и (8.13), а также формулы п. 8.2.2):

$$M[\Delta] = M[\Delta_0] + M[\Delta_C] = M[\Delta_{0s}] + M[\psi_s(\xi_1, \xi_2)], \quad (9.16)$$

$$\begin{aligned} D[\Delta] &= D[\Delta_0] + D[\Delta_C] = \\ &= D\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + D[\Delta_{0s}] + D[\psi_s(\xi_1, \xi_2)] + [\psi_D[\xi_1, \xi_2)]_{\text{max}}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

2. Определим вначале составляющие математического ожидания. Математическое ожидание основной погрешности в соответствии с (9.6) к моменту корректировки будет равно:

$$\begin{aligned} M[\Delta_{0s}] &= 2 \cdot 10^{-8} (1 + 10^2 u_{\text{in}}) t_{\text{cor}} = \\ &= 57,6 \cdot 10^{-6} \text{ В} = 57,6 \text{ мкВ} \approx 0,6 \cdot 10^{-4} \text{ В}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Поскольку влияющие величины имеют некоторые распределения во времени, то необходимо определить статистические характеристики погрешности для данного вида СИ. Математическое ожидание дополнительной систематической погрешности может быть определено, используя формулу (9.13):

$$M[\Delta_C] = M[\psi_s(\xi_1, \sigma_2)] = 3 \cdot 10^{-6} (1 + 10^2 u_{in}) (M[\Delta\xi_1] + 0,5M[\Delta\xi_2]). \quad (9.19)$$

Рабочая температура окружающей среды изменяется от 20 до 40°C, и ее изменение подчиняется равномерному закону распределения плотности вероятности, поэтому

$$M[\Delta\xi_1] = M[\xi_1(t)] - \xi_{1ref} = \frac{\xi_{1min} + \xi_{2max}}{2} - \xi_{1ref} = 30 - 20 = 10^\circ\text{C}.$$

Математическое ожидание изменения напряжения питания

$$M[\Delta\xi_2] = M[\xi_1(t)] - \xi_{2ref} = \xi_{2max} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

и оно принимает максимальные значения при $t=0,5$; 1 сут. Так как период $T=t_{cor}=1$ сут. = 1440 мин, поэтому максимальное значение математического ожидания будет достигать к моменту корректировки

$$M[\Delta_C]_{max} = 3 \cdot 10^{-6} (1 + 10^2 u_{in}) \left[10 + 0,5 \cdot 10 \cos\left(\frac{2\pi}{1440}t\right) \right] = 3 \cdot 10^{-6} (1 + 10^2 u_{in}) (10 + 0,5 \cdot 10) = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 15 = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

Математическое ожидание общей погрешности СИ, таким образом, будет равно

$$M[\Delta] = M[\Delta_{0s}] + M[\psi_s] = 0,6 \cdot 10^{-4} + 0,9 \cdot 10^{-4} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ В} = 150 \text{ мкВ}.$$

3. Определим дисперсию погрешности СИ. Для этого используем соотношения (9.11)–(9.15). Поскольку функция влияния (9.14) на дисперсию случайной составляющей погрешности определяется при максимальных изменениях влияющих величин, определим эти максимальные изменения по модулю для температуры окружающей среды:

$$|\Delta\xi_1|_{max} = |\xi_1 - \xi_{1ref}|_{max} = 10^\circ\text{C}.$$

Учитывая, что температура изменяется равномерно в своих пределах, определим дисперсию этих изменений по формуле

$$D[\Delta\xi_1] = \frac{(\Delta\xi_1)^2}{3} = \frac{100}{3} = 33,3^\circ\text{C}^2.$$

Подсчитаем все составляющие дисперсии при входном сигнале $u_{in} = 10$ мВ и с учетом полученных выше результатов, а также соотношений (9.8), (9.9), (9.14) и (9.15):

$$D_p \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = 8 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2;$$

$$D [\Delta_{08}] = 32 \cdot 10^{-10} = \text{В}^2;$$

$$D [\Delta \xi_2] = R_z(0) = 4 \text{ В}^2;$$

$$D [\psi_s(\xi_1, \xi_2)] = 18 \cdot 10^{-12} (33,3 + 0,25 \cdot 4) = 11,42 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2;$$

$$\psi_D(\xi_1, \xi_2) = 10^{-10} \cdot 2 (10 + 0,5 \cdot 10) = 30 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2.$$

Полагая, что все составляющие дисперсии статистически независимы, получаем значение общей дисперсии погрешности СИ, сложив все составляющие (8.7):

$$\begin{aligned} D [\Delta] &= 8 + 32 + 11,4 + 30) \cdot 10^{-10} = \\ &= 81 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2 = (9 \cdot 10^{-5} \text{ В})^2 = (90 \text{ мкВ})^2 = \sigma^2 [\Delta]. \end{aligned}$$

Поскольку вероятностный закон распределения погрешности неизвестен, для оценки вероятности изменения погрешности в интервале $M[\Delta] - 2\sigma[\Delta] < \Delta < M[\Delta] + 2\sigma[\Delta]$, воспользуемся графиком на рис. 8.1. При $K_{\text{ср}} = 2$ это будет соответствовать вероятности $P = 0,95$ (при погрешности определения P , равной $\pm 16\%$). Таким образом, можно записать, что погрешность СИ (УПТ) в рабочих условиях эксплуатации может находиться в пределах от $(150 - 180)$ до $(150 + 180)$ мкВ или $-30 \text{ мкВ} \leq \Delta \leq 330 \text{ мкВ}$ при $P = 0,95$.

Пример 9.7. Используя совокупность нормируемых МХ для данного типа УПТ, приведенных в примере 9.6, определить математическое ожидание и дисперсию погрешности СИ, а также интервалы, в которых может находиться погрешность СИ с известной вероятностью, если изменение рабочей температуры определяется зависимостью

$$\xi_1(t) = m_{\xi_1}(t) + v(t),$$

где $m_{\xi_1}(t)$ — неслучайная периодическая функция времени, соответствующая изменению среднемесячной температуры в течение года, полученной усреднением за много лет (рис. 9.3):

$$m_{\xi_1}(t) = \xi_{1\text{ref}} - \xi_{1\text{max}} \cos(2\pi t/T_1),$$

$\xi_{1\text{ref}}$ — нормальное значение влияющей величины — температуры, которая изменяется от -10°C зимой до $+50^\circ\text{C}$ летом; $\xi_{1\text{max}} = 30^\circ\text{C}$; $v(t)$ — стационарная случайная центрированная функция времени, соответствующая отклонению средней температуры от $m_{\xi_1}(t)$; автокорреляционная функция этого случайного процесса:

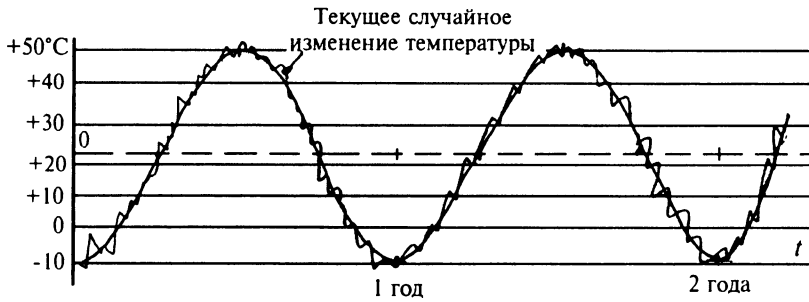


Рис. 9.3. Изменение температуры в течение года

$$R_v(\tau) = R_v(0) \exp(-0,001 |\tau|),$$

$R_v(0) = 4^\circ\text{C}^2$; автокорреляционная функция уменьшается до 10% своего максимального значения в течение 3 месяцев.

Решение. 1. Определим математическое ожидание отклонения температуры

$$M[\Delta\xi_1(t)] = M[\xi_1(t)] - \xi_{1\text{ref}} = -\xi_{1\text{max}} \cos(2\pi t/T_1).$$

Поскольку оценка погрешностей производится сверху, то необходимо найти максимальное значение, которое принимает математическое ожидание. Оно соответствует моменту времени $t = 0,5T$ и равно $M_{\text{max}}[\Delta\xi_1] = 30^\circ\text{C}$.

Математическое ожидание погрешности СИ определим по формуле (9.16), используя соотношения (9.18) и (9.19):

$$\begin{aligned} M[\Delta] &= M[\Delta_0] + M[\Delta_C] = M[\Delta_{0s}] + M[\psi_{\Delta s}(\xi_1, \xi_2)] = \\ &= 2 \cdot 10^{-8} (1 + 10^2 u_{\text{in}}) t_{\text{cor}} + 3 \cdot 10^{-6} (1 + 10^2 u_{\text{in}}) (M[\Delta\xi_1] + 0,5M[\Delta\xi_2]) = \\ &= 57,6 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-6} (30 + 0,5 \cdot 10) = 57,6 \cdot 10^{-6} + 210 \cdot 10^{-6} \approx 268 \text{ мкВ}. \end{aligned}$$

2. Определим дисперсию погрешности СИ, учитывая, что результаты вычислений дисперсии случайной составляющей основной погрешности $D_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right]$ и дисперсия систематической составляющей основной погрешности $D[\Delta_{0s}]$ принимают значения, полученные ранее в примере 9.6, а именно:

$$D \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = 8 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2, \quad D[\Delta_{0s}] = 32 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2.$$

3. Определим дисперсию функции влияния на дополнительную погрешность, используя соотношение (9.15):

$$D[\psi_{\Delta s}(\xi_1, \xi_2)] = 9 \cdot 10^{-12} (1 + 10^2 u_{\text{in}})^2 (D[\Delta\xi_1] + 0,25D[\Delta\xi_2]) \text{ В}^2.$$

При $D(\Delta\xi_1) = R_v(0) = 4^\circ\text{C}$, $D(\Delta\xi_2) = R_z(0) = 4 \text{ В}^2$ получим

$$D[\psi_{\Delta s}] = 9 \cdot 10^{-12} \cdot 4 (4 + 0,25 \cdot 4) = 180 \cdot 10^{-12} \text{ В}^2 =$$

$$= (1,34 \cdot 10^{-5} \text{ В})^2; \sigma[\psi_{\Delta s}] = 13,4 \text{ мкВ}.$$

При $|\Delta\xi_1|_{\max} = 30^\circ\text{C}$, $|\Delta\xi_2|_{\max} = 10 \text{ В}$ получим

$$[\psi_D(\xi_1, \xi_2)]_{\max} = 10^{-10}(1 + 10^4 u_{\text{in}}^2) (|\Delta\xi_1|_{\max} + 0,5 |\Delta\xi_2|_{\max}) =$$

$$= 10^{-10}(2) \cdot (35) = 70 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2.$$

Общая (суммарная) дисперсия основной погрешности в соответствии с (8.13) будет равна

$$D[\Delta] = (8 + 32 + 1,8 + 70) \cdot 10^{-10} = (106 \text{ мкВ})^2.$$

4. Запишем результат измерения при математическом ожидании погрешности, равном 268 мкВ, СКО, равном 106 мкВ, и вероятности $P = 0,95$ (в соответствии с рис. 8.1 $K_{\text{cp}} = 2$):

$$(268 - 212) \text{ мкВ} \leq \Delta \leq (268 + 212) \text{ мкВ}, \text{ или } 56 \text{ мкВ} \leq \Delta \leq 480 \text{ мкВ}$$

9.5. РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИНДИВИДУАЛЬНОГО УСИЛИТЕЛЯ

Предыдущие расчеты погрешностей СИ производились исходя из принципа, отражающего современную тенденцию в метрологии — стремление максимально приблизить оценку погрешности измерений к ее действительному значению, но так, чтобы она при этом оставалось в вероятностном смысле «оценкой сверху». При этом вычисляли усредненную оценку погрешности для данного вида СИ, т.е. для группы однородных в техническом и конструктивном отношении СИ.

Однако, если имеются данные по МХ конкретных образцов СИ в условиях их эксплуатации, можно довольно точно определить общую погрешность СИ и довольно точно компенсировать дополнительную систематическую погрешность.

В качестве примера ниже приводится расчет составляющих погрешностей конкретного образца УПТ, для которого измерены все необходимые МХ, в том числе и в рабочих условиях его эксплуатации. Для упрощения расчетов и возможности сравнения их с полученными ранее предполагается, что индивидуальный образец СИ взят из той же группы УПТ (того же типа УПТ), которые были рассмотрены выше. Поэтому основные МХ данного УПТ соответствуют номинальным характеристикам, используемым в предыдущих расчетах.

Вначале рассчитываются основная и дополнительные погрешности при условии периодической коррекции «нуля» из-за дрейфа,

а затем при условии компенсации (или учета) дополнительной погрешности.

Пример 9.8. Определить погрешность конкретного экземпляра УПТ, которую он может иметь 15 февраля в 10.00, если включение СИ произошло 1 января в 8.00 и если корректировка дрейфа его осуществляется периодически через каждые сутки. Оценка погрешности должна быть произведена «сверху», т.е. для максимально возможной погрешности в момент ее определения. СИ имеет следующие технические характеристики:

- коэффициент усиления усилителя K_0 равен номинальному коэффициенту усиления усилителей данного типа $K_0 = K_N = 1000$;
- входное напряжение $u_{in} = 10$ мВ;
- скорость прогрева $\alpha_u = \alpha_\delta = 0,08$ мин⁻¹;
- скорости временного дрейфа равны $v_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ В/мин, $v_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ мин⁻¹;
- дисперсии, обусловленные флуктуациями типа белого шума, составляют $D[u_n] = 1 \cdot 10^{-4}$ В², $D[\delta_n] = 1 \cdot 10^{-6}$;
- дисперсии, обусловленные флуктуацией дрейфа, $D[u_{dr}] = 1 \cdot 10^{-4}$ В² = $R_{1N}(0)$, $D[\delta_{dr}] = 1 \cdot 10^{-6}$ = $R_{2N}(0)$;
- температура окружающей среды изменяется от -10°C зимой до $+50^\circ\text{C}$ летом по закону $\xi_1(t) = m_{\xi_1}(t) + v(t)$, где $m_{\xi_1}(t) = \xi_{1ref} - \xi_{1max} \cos(2\pi t/T_1)$, период $T_1 = 1$ год, нормальная температура равна $\xi_{1ref} = 20^\circ\text{C}$, максимальная — $\xi_{1max} = 30^\circ\text{C}$. Случайная составляющая изменения температуры характеризуется автокорреляционной функцией $R_\xi(t) = R_\xi(0) e^{-0,001|t|}$, $R_\xi(0) = 4^\circ\text{C}^2$;
- напряжение питания изменяется по закону $\xi_2(t) = m_{\xi_2}(t) + z(t)$, где $m_{\xi_2}(t) = \xi_{2ref} + \xi_{2max} \cos(2\pi t/T_2)$, $\xi_{2ref} = 210$ В, $\xi_{2max} = 10$ В, период $T_2 = 1$ сут, $z(t) = R_z(t) = R_z(0) e^{-5|t|}$, $R_z(0) = 4$ В², где $R_z(t)$ — корреляционная функция случайной составляющей изменения напряжения питания.

Решение. 1. Используя формулу (9.3), запишем выражение для основной систематической погрешности, обусловленной прогревом и временным дрейфом

$$\Delta_{0s} = \frac{1}{K_0} \left\{ u_{dr0} \exp[-\alpha_u(t - t_{sw})] + v_1(t - t_0) \right\} + u_{in} \left\{ \delta_{dr0} \exp[-\alpha_u(t - t_{sw})] + v_2(t - t_0) \right\}.$$

Составляющие погрешности, обусловленные прогревом СИ, уже через час будут составлять 1% своего начального значения, поэтому они не учитываются в дальнейших расчетах. Определим систематическую погрешность на требуемый момент времени (10.00), т.е. через 2 ч после корректировки:

$$\Delta_{0s} = \pm \left[\left(\frac{v_1}{K_0} + u_{in} v_2 \right) (t - t_0) \right] = \pm \left[(4 \cdot 10^{-8}) \cdot 120 \right] = \pm 4,8 \text{ мкВ}.$$

Заметим, что в момент корректировки «нуля», т.е. через сутки (1440 мин), основная систематическая погрешность будет равна 60 мкВ (точно 57,6 мкВ).

2. Предельную величину случайной составляющей основной погрешности определим с помощью соотношения (9.9):

$$\begin{aligned} D_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] &= \frac{1}{K_0^2} \left[D(u_n) + D(u_{dr}) \right] + u_{in}^2 \left[D(\delta_n) + D(\delta_{dr}) \right] = \\ &= \frac{1}{10^6} \left[1 \cdot 10^{-4} + R_{1N}(0) \right] + 10^{-4} \left[1 \cdot 10^{-6} + R_{2N}(0) \right] = \\ &= 2 \cdot 10^{-10} + 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2 = (20 \text{ мкВ})^2. \end{aligned}$$

3. Дополнительная погрешность, обусловленная изменением температуры окружающей среды и питающего напряжения, может быть определена с помощью соотношения (9.13):

$$\psi_s(\xi_1, \xi_2) = 3 \cdot 10^{-6} (1 + 10^2 u_{in}) (\Delta\xi_1 + 0,5 \Delta\xi_2).$$

Определим изменение температуры, которое может быть 15 февраля, т.е. через 1,5 месяца после включения СИ, относительно нормального значения

$$\Delta\xi_1 = \xi_1(t) - \xi_{1ref} = -\xi_{1max} \cos(2\pi \cdot 1,5/12) = -30 \cos(\pi/4) = -21^\circ\text{C}.$$

Определим изменение напряжения питания, которое может быть 15 февраля в 10.00, относительно номинального его значения:

$$\begin{aligned} \Delta\xi_2 &= \xi_2(t) - \xi_{2ref} = \xi_{2max} \cos(2\pi \cdot 10/24) = \\ &= 10 \cos(5\pi/6) = -10 \cos(\pi/6) = -8,5 \text{ В}. \end{aligned}$$

Дополнительную погрешность получим, подставив полученные изменения дестабилизирующих факторов $\Delta\xi_1$ и $\Delta\xi_2$ в исходное выражение (9.13):

$$\psi_s(\xi_1, \xi_2) = 30 \cdot 10^{-6} (2) [-21 + 0,5 (-8,5)] = -1515 \text{ мкВ}.$$

Заметим, что эта погрешность определена по среднестатистическим характеристикам функций влияния, но для конкретного образца УПТ путем непосредственного измерения влияния температуры и напряжения питания на МХ данного конкретного (индивидуального) образца УПТ. Для точной компенсации погрешностей, обусловленных влиянием изменений условий эксплуатации, т.е. компенсации дополнительных погрешностей, необходимо знание условий эксплуатации (в данном случае температуры и напряжения питания) в момент проведения измерений с помощью СИ (УПТ).

4. Определим функцию влияния на дисперсию случайной погрешности, используя соотношение (9.14):

$$\begin{aligned} \psi_D(\xi_1, \xi_2) &= 10^{-10}(1 + 10^2 u_{in}^2)(\Delta\xi_1 + 0,5\Delta\xi_2) = \\ &= 10^{-10}(2)(-21 + 0,5(-8,5)) = 50,5 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2 \approx (71 \text{ мкВ})^2. \end{aligned}$$

5. Используя соотношение (9.15), определим дисперсию систематической погрешности, обусловленную дисперсией влияющих величин:

$$\begin{aligned} D[\psi_{sN}(\xi_1, \xi_2)] &= 9 \cdot 10^{-12}(1 + 10^2 u_{in}^2)^2 [D(\Delta\xi_1) + 0,25D(\Delta\xi_2)] = \\ &= 9 \cdot 10^{-12} \cdot 2^2 [4 + 0,25 \cdot 4] = 1,8 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2 = (13,4 \text{ мкВ})^2. \end{aligned}$$

6. Суммарная дисперсия в соответствии с (8.13) будет равна

$$\begin{aligned} D[\Delta] &= D\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + D[\psi_{\Delta S}] + \psi_D = 10^{-10}(4 + 50,5 + 1,8) \approx 56,3 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2, \\ \sigma[\Delta] &= 75 \text{ мкВ}. \end{aligned}$$

Заметим, что для оценок дисперсий, полученных выше, используются среднестатистические функции влияния.

7. Предел суммарной основной и дополнительной систематической погрешности будет равен

$$\Delta_P = \Delta_{0S} + \Delta_C = -4,8 - 1515 \approx -1520 \text{ мкВ}.$$

8. При вероятности 0,95 ($K_{cp} = 2$, рис. 8.1) погрешность СИ будет находиться в пределах $(-1520 - 150) \text{ мкВ} \leq \Delta \leq (-1520 + 150) \text{ мкВ}$ или $-1670 \text{ мкВ} \leq \Delta \leq -1370 \text{ мкВ}$.

Таким образом основной вклад в общую погрешность в данном примере вносит дополнительная погрешность, обусловленная изменением МХ усилителя под влиянием температуры окружающей среды и напряжения питания.

Если исключить влияние дополнительной погрешности, то общая погрешность может быть уменьшена до $-4,8 \text{ мкВ}$ через два

часа после корректировки и до -60 мкВ через сутки после корректировки. Дальнейшее снижение погрешности возможно при уточнении зависимостей случайных составляющих погрешностей. Однако их корректировка невозможна.

9.6. РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИМПУЛЬСНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

Отличие импульсного усилителя (ИУ) от УПТ состоит в том, что между входом и выходом ИУ нет непосредственной связи по постоянному току и при входном импульсном сигнале, равном нулю, выходной импульсный сигнал также равен нулю. Если в УПТ погрешность проявляется в постоянном напряжении на его выходе, то в ИУ — в изменении амплитуды выходного импульса (или других параметров импульса) при постоянной амплитуде входного импульса.

Ниже приводятся примеры определения составляющих основной и дополнительной погрешностей ИУ. При этом для простоты сравнения результатов расчетов используются МХ ИУ такие же, как и для УПТ.

Пример 9.9. Определить составляющие основной и дополнительной погрешностей ИУ, а также написать формулы для определения этих погрешностей и суммарной погрешности измерения амплитуды импульсов.

Решение. Основную погрешность измерения амплитуды импульсов, приведенную ко входу ИУ, по аналогии с УПТ можно представить в виде суммы аддитивной и мультипликативной составляющих погрешностей:

$$\Delta_0 = \frac{u_n}{K_N} + u_{in}(\delta_n + \delta_{dr} + \delta_d), \quad (9.20)$$

где u_n — аддитивная составляющая погрешности ИУ, приведенная к его выходу и обусловленная электронным шумом; u_{in} — амплитуда импульса на входе усилителя; δ_n , δ_{dr} , δ_d — относительные изменения коэффициента усиления, обусловленные электронным шумом, дрейфом и разбросом параметров электронной схемы соответственно и приводящие к появлению мультипликативной составляющей погрешности ИУ (δ_d для совокупности ИУ данного типа обусловлено отклонением параметров элементов схемы от номинальных значений, математическое ожидание которого равно нулю $M[\delta_d] = 0$, а пределы допускаемых отклонений $\pm\delta_{dp}$).

Полагается, что шум — это стационарный случайный процесс типа белого шума, характеризуемый математическим ожиданием, равным нулю, $M[u_n] = 0$, $M[\delta_n] = 0$ и дисперсиями $D[u_n]$ и $D[\delta_n]$, и что частотная полоса пропускания ИУ находится вне действия низкочастотного шума типа $1/f$.

Полагается также, что медленные случайные изменения коэффициента усиления ИУ, как и для УПТ, обусловлены двумя причинами. Первая — непрерывный быстрый «прогрев» элементов ИУ, который приводит к изменениям МХ, как правило, экспоненциально затухающим со временем. Вторая причина — медленное изменение характеристик элементов ИУ со временем (старение элементов). Математическое ожидание относительного изменения коэффициента усиления δ_{dr} можно представить в виде

$$M[\delta_{dr}] = \delta_{dr0} \exp[-\alpha_\delta(t - t_{sw}) + v_2(t - t_0)], \quad (9.21)$$

где t_{sw} — момент включения усилителя; t_0 — момент последней корректировки изменения коэффициента усиления ИУ со временем; α_δ — коэффициент, характеризующий скорость «прогрева» ИУ; v_2 — математическое ожидание скорости временного изменения дрейфа. Процесс дрейфа сопровождается флуктуациями, которые представляют собой центрированный стационарный случайный процесс, характеризующийся автокорреляционной функцией $R_{2N}(\tau)$. Эти флуктуации являются причиной появления низкочастотного шума типа $1/f$, который находится за пределами частотной полосы пропускания ИУ.

Таким образом, *составляющими основной погрешности ИУ* являются:

- Систематическая составляющая основной погрешности, которую можно представить в виде

$$\Delta_{0s} = (\delta_d + \delta_{dr}) u_{in}, \quad (9.22)$$

причем, поскольку математические ожидания $M[\delta_d] = 0$, то $M[\Delta_{0s}] = u_{in} M[\delta_{dr}]$.

Предел основной систематической погрешности равен

$$\Delta_{0sP} = u_{in} (\delta_{dP} + \delta_{drP}),$$

а систематическая погрешность конкретного i -го экземпляра ИУ, для которого установлены его индивидуальные характеристики, $\Delta_{0si} = u_{in} (\delta_{di} + \delta_{dri})$.

- Случайная составляющая основной погрешности, дисперсию которой можно представить в виде

$$D[\overset{\circ}{\Delta}_0] = \frac{D[u_n]}{K_N^2} + u_{in}^2 [D(\delta_n)],$$

а ее предельную величину

$$D_P[\overset{\circ}{\Delta}_0] = \frac{D_P[u_n]}{K_N^2} + u_{in}^2 [D_P(\delta_n)]. \quad (9.23)$$

• Случайная составляющая систематической погрешности, обусловленная флуктуациями дрейфа коэффициента усиления. Дисперсия этой погрешности при равномерном распределении скоростей дрейфа и равномерном распределении отклонений параметров элементов схем от своих номинальных значений, будет иметь вид

$$D[\Delta_{0s}] = u_{in}^2 [D[v_2] t_{cor}^2 + D[\delta_d]] = u_{in}^2 \left[\frac{\Delta v_{2P}^2}{3} t_{cor}^2 + \frac{\delta_{dP}}{3} \right]. \quad (9.24)$$

Составляющими дополнительной погрешности ИУ являются:

• Воздействие дестабилизирующих факторов, например температуры окружающей среды ξ_1 и изменения напряжения питания ξ_2 . Функции влияния на дополнительную систематическую погрешность будут проявляться в ИУ через изменение коэффициента усиления:

$$\psi_s(\xi_1, \xi_2) = u_{in} (l_1 \Delta \xi_1 + l_2 \Delta \xi_2), \quad (9.25)$$

где $\Delta \xi_1$ и $\Delta \xi_2$ — изменения температуры и напряжения питания.

Усредненное значение погрешности для ИУ данного типа можно определить по формуле

$$M[\psi_s(\xi_1, \xi_2)] = u_{in} (l_1 M[\Delta \xi_1] + l_2 M[\Delta \xi_2]). \quad (9.26)$$

Предел дополнительной погрешности

$$\psi_{sP}(\xi_1, \xi_2) = u_{in} [l_1 (\Delta \xi_1)_{\max} + l_2 (\Delta \xi_2)_{\max}].$$

Расчет погрешности по формуле (9.26) производится для наиболее неблагоприятного сочетания изменения факторов воздействия.

Расчет дополнительной систематической погрешности для конкретного экземпляра ИУ производится по той же формуле при конкретных значениях l_{1i} и l_{2i}

$$(\psi_s)_i = u_{in} (l_{1i} \Delta \xi_1 + l_{2i} \Delta \xi_{2i}).$$

• Воздействие дестабилизирующих факторов на основную случайную погрешность проявляется в виде флуктуаций на выходе

ИУ и при входном сигнале, равном нулю. Например, влияние температуры на тепловые шумы сопротивлений или влияние режима по постоянному току входного активного элемента на дробовой шум этого элемента. Поэтому функция влияния на дисперсию основной случайной погрешности будет иметь вид

$$\psi_D = \frac{1}{K_N^2} (f_1 \Delta \xi_1 + f_2 \Delta \xi_2) + u_{in}^2 (g_1 \Delta \xi_1 + g_2 \Delta \xi_2). \quad (9.27)$$

Предельное значение этой функции, так же как и для ψ_{sp} , будет определяться максимальными изменениями влияющих факторов с учетом наиболее неблагоприятного их сочетания.

Для определения случайной составляющей дополнительной погрешности конкретного i -го образца ИУ должны быть известны коэффициенты l_{1i} , l_{2i} , g_{1i} , g_{2i} , а также коэффициент усиления K_i .

• Воздействие дестабилизирующих факторов на флуктуации систематической погрешности. Дисперсию дополнительной случайной погрешности, обусловленной этим явлением, можно определить из формулы

$$D[\psi_{sN}(\xi_1, \xi_2)] = u_{in}^2 [l_1^2 D(\Delta \xi_1) + l_2^2 D(\Delta \xi_2)]. \quad (9.28)$$

Эта составляющая погрешности проявляется прежде всего в изменении случайной составляющей процесса временного дрейфа коэффициента усиления из-за изменения температуры, напряжения питания, атмосферного давления, влажности и т.д.

• Общая (дополнительная) систематическая погрешность и дисперсия случайной погрешности для данного типа ИУ будут равны

$$\Delta_C = M[\Delta_{0s}] + M[\psi_s],$$

$$D = D\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + \psi_D + D[\psi_s], \quad \sigma = \sqrt{D}.$$

• Оценки предела систематической погрешности и дисперсии случайной погрешности ИУ будут равны

$$\Delta_{CP} = \Delta_{0sP} + \psi_{sP},$$

$$D_P = D_P\left[\overset{\circ}{\Delta}_0\right] + (\psi_D)_P + D_P[\psi_{sP}].$$

• Для i -го образца ИУ указываются, так же как и в предыдущем случае, конкретные значения систематической и случайной погрешностей. Причем систематическая погрешность для конкретного образца усилителя может быть учтена или скомпенсирована различными схемными и/или программными методами.

Пример 9.10. Определить систематическую и случайную составляющие основной погрешности ИУ, а также записать интервальную оценку ожидаемой общей погрешности с заданной доверительной вероятностью для данного типа ИУ.

Расчет погрешностей ИУ провести при следующих данных:

- номинальный коэффициент усиления $K_N = 1000$;
- номинальная амплитуда импульсов, для которой производится расчет всех параметров ИУ $u_{in} = 10$ мВ;
- математическое ожидание скоростей линейного дрейфа $v_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ мин⁻¹, разброс скоростей имеет равномерное распределение в диапазоне $\Delta v_2 = \pm 0,2 \cdot 10^{-6}$ мин⁻¹;
- скорость прогрева $\alpha_g = 0,08$ мин⁻¹;
- время корректировки $t_{cor} = 24$ ч;
- пределы разброса равномерно распределенной случайной величины δ_d , вызванные отклонением комплектующих от своих номинальных значений $\delta_{dP} = \pm 0,007$; математическое ожидание этого распределения равно нулю;
- предельные значения дисперсии аддитивного и мультипликативного белого шума, приведенные к выходу ИУ, равны $D_P[u_n] = 2 \cdot 10^{-4}$ В², $D_P[\delta_n] = 2 \cdot 10^{-6}$.

Решение. Поскольку составляющая погрешности, обусловленная прогревом ИУ, затухает до 1% уже через час, то систематическую погрешность ИУ определим из формул (9.21) и (9.22):

$$\Delta_{0s} \approx u_{in} [v_2 (t_{cor}) + \delta_d].$$

Математическое ожидание этой погрешности при времени корректировки, равном 24 ч, $M[\Delta_{0s}] = 28,8$ мкВ ≈ 29 мкВ.

Нормированную метрологическую характеристику можно представить в виде

$$M[\Delta_{0s}] = 2 \cdot 10^{-8} t_{cor} u_{in}. \quad (9.29)$$

Предел систематической погрешности определим при $\delta_{dP} = 0,007$, $t_{cor} = 24$ ч:

$$\begin{aligned} \Delta_{0sP} &= u_{in} (v_2 t_{cor} + \delta_{dP}) = 10^{-2} (2 \cdot 10^{-6} \cdot 1440 + 7 \cdot 10^{-3}) = \\ &= 10^{-4} \text{ В} \approx 100 \text{ мкВ}. \end{aligned}$$

Предельное значение дисперсии случайной составляющей основной погрешности ИУ, обусловленное белым шумом и флуктуацией дрейфа, будет равно (9.23):

$$\begin{aligned} D_P[\dot{\Delta}_0] &= \frac{D_P[u_n]}{K_N^2} + u_{in}^2 (D_P[\delta_n]) = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^6} + 10^{-4} [2 \cdot 10^{-6}] = \\ &= 4 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2 = (20 \text{ мкВ})^2. \end{aligned}$$

Нормированную метрологическую характеристику можно представить в виде

$$D_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = 2 \cdot 10^{-10} (1 + 10^4 u_{in}^2) B^2. \quad (9.30)$$

Дисперсия систематической погрешности, обусловленной флуктуациями скоростей старения и разбросом параметров элементов схемы в момент корректировки, будет равна

$$\begin{aligned} D[\Delta_{0s}] &= u_{in}^2 (D[v_2] t_{cor}^2 + D[\delta_d]) = \frac{u_{in}^2}{3} [(\Delta v)^2 t_{cor}^2 + \delta_{dP}^2] = \\ &= \frac{10^{-4}}{3} (4 \cdot 10^{-14} \cdot 207,4 \cdot 10^4 + 49 \cdot 10^6) = \frac{10^{-4}}{3} (83 \cdot 10^{-9} + 49 \cdot 10^{-6}) \approx \\ &\approx 16,3 \cdot 10^{-10} B^2 = (40 \text{ мкВ})^2. \end{aligned}$$

Нормированную МХ можно представить в виде

$$D[\Delta_{0s}] = 16 \cdot 10^6 u_{in} B^2. \quad (9.31)$$

Таким образом, суммарная дисперсия будет равна

$$\begin{aligned} D_P[\Delta_0] &= D[\Delta_{0s}] + \Delta_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = (16 + 4) \cdot 10^{-10} = \\ &= 20 \cdot 10^{-10} B^2 \approx (45 \text{ мкВ})^2, \end{aligned}$$

а предел СКО основной погрешности $\sigma_P[\Delta_0] = 45 \text{ мкВ}$.

• Результат оценки погрешности ИУ запишем с помощью доверительных интервалов при вероятности, равной 0,95 (рис. 8.1, $K_{cp} = 2$ при $P = 0,95$):

$$M[\Delta_{0s}] - 2\sigma_P[\Delta_0] \leq \Delta \leq M[\Delta_{0s}] + 2\sigma_P[\Delta_0] \text{ или } -61 \text{ мкВ} \leq \Delta \leq 119 \text{ мкВ}.$$

Пример 9.11. Используя данные предыдущего примера, определить дополнительные погрешности ИУ, возникающие из-за воздействия температуры окружающей среды и изменения напряжения питания при следующих исходных данных:

- нормальное значение температуры окружающей среды $\xi_{1ref} = 20^\circ\text{C}$;
- рабочая температура изменяется равномерно в течение всего периода эксплуатации от -10 до $+50^\circ\text{C}$;
- нормальное значение напряжения питания 220 В ;
- рабочее напряжение питания равномерно изменяется в течение всего периода эксплуатации от 210 до 250 В ;
- значения коэффициентов для расчета дополнительных погрешностей в соответствии с формулами (9.25) и (9.27) примем равными (9.12):

$$l_1 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, l_2 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ В}^{-1},$$

$$f_1 = 10^{-4} \text{ В}^2/\text{ } ^\circ\text{C}, f_2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ В},$$

$$g_1 = 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, g_2 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ В}^{-1}.$$

Решение. 1. Определим дополнительную систематическую погрешность СИ для ИУ в соответствии с формулой (9.26). Эта погрешность будет проявляться только через изменение коэффициента усиления. Вычислим математические ожидания изменения влияющих величин:

$$M[\Delta\xi_1] = M[\xi_1(t)] - \xi_{1\text{ref}} = 30 - 20 = 10^\circ\text{C},$$

$$M[\Delta\xi_2] = M[\xi_2(t)] - \xi_{2\text{ref}} = 230 - 220 = 10 \text{ В}.$$

Подставляя эти значения в (9.26), получаем

$$M[\psi_s] = 10^{-2} [3 \cdot 10^{-4}(10) + 1,5 \cdot 10^{-4} \cdot 10] = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ В} = 45 \text{ мкВ}.$$

2. Определим предел дополнительной систематической погрешности, выбрав наиболее неблагоприятное сочетание изменений температуры окружающей среды и напряжения питания, с учетом, что все коэффициенты, входящие в формулу (9.26), положительны. Анализ показывает, что это имеет место при температуре -20°C и напряжении питания 210 В:

$$(\psi_s)_P = u_{\text{in}} (l_1 \Delta\xi_{\text{max}} + l_2 \Delta\xi_{2\text{max}}) =$$

$$= 10^{-2} (3 \cdot 10^{-4} (-20) + 1,5 \cdot 10^{-4} (-10)) = -75 \text{ мкВ}.$$

Нормированную МХ можно представить в виде

$$M[\psi_s] = 3 \cdot 10^{-6} (M[\Delta\xi_1] + 0,5M[\Delta\xi_2]) \text{ В}. \quad (9.32)$$

3. Определим функцию влияния на дисперсию основной случайной погрешности. Дестабилизирующие факторы в ИУ изменяют как саму величину шума ИУ, так и коэффициент усиления, который в свою очередь влияет на флуктуации, приведенные ко входу ИУ. Дополнительная погрешность для ИУ данного типа определяется математическим ожиданием функции влияния

$$M[\psi_D] = \frac{1}{K_N^2} (f_1 M[\Delta\xi_1] + f_2 M[\Delta\xi_2]) + u_{\text{in}}^2 (g_1 M[\Delta\xi_1] + g_2 M[\Delta\xi_2]).$$

Подставляя ранее вычисленные значения для математических ожиданий температуры и напряжения питания в эту формулу, получаем

$$M[\psi_D] = \frac{1}{10^6} [10^{-4}(10) + 5 \cdot 10^{-5}(10)] + 10^{-4} [10^{-6}(10) +$$

$$+ 5 \cdot 10^{-7}(10)] = 3,0 \cdot 10^{-9} \text{ В}^2.$$

Нормированную МХ можно представить в виде

$$M[\psi_D] = 10^{-10} (1 + 10^4 u_{in}^2) (M[\Delta\xi_1] + 0,5M[\Delta\xi_2]). \quad (9.33)$$

4. Для определения дисперсии дополнительной случайной погрешности, обусловленной флуктуациями воздействующих факторов, вычислим дисперсии температуры и напряжения питания, учитывая, что они изменяются по равномерному закону в своих пределах ($\Delta\xi_{1P} = 50 - (-10) = 60^\circ\text{C}$, $\Delta\xi_{2P} = 250 - 210 = 40\text{ В}$):

$$D[\Delta\xi_1] = \frac{\Delta\xi_{1P}}{12} = \frac{(60)^2}{12} = 300^\circ\text{C}^2, \quad D[\Delta\xi_2] = \frac{\Delta\xi_{2P}}{12} = \frac{(40)^2}{12} = 133\text{ В}^2,$$

$$\begin{aligned} D[\psi_s] &= u_{in}^2 (I_1^2 D[\Delta\xi_1] + I_2^2 D[\Delta\xi_2]) = \\ &= 10^{-4} (9 \cdot 10^{-8} \cdot 300 + 2,25 \cdot 10^{-8} \cdot 133) = 3,0 \cdot 10^{-9}\text{ В}^2. \end{aligned}$$

Нормированную МХ можно представить в виде

$$D[\psi_s] = 9 \cdot 10^{-12} u_{in}^2 (D[\Delta\xi_1] + 0,25D[\Delta\xi_2]). \quad (9.34)$$

Таким образом, в результате анализа и расчета характеристик погрешностей ИУ данного типа получен перечень нормируемых МХ (9.29)–(9.34), с помощью которых могут быть рассчитаны типовые (среднестатистические) характеристики погрешностей как в нормальных, так и в рабочих условиях изменения температуры окружающей среды и напряжения питания.

9.7. РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ АНАЛОГОВОГО СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ В РАБОЧИХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Отличие расчетов, приводимых в настоящем разделе, от расчетов, проведенных для УПТ и ИУ, состоит в том, что данные, на которых основываются расчеты, приведены без затрагивания существа процессов, приводящих к возникновению погрешностей. Здесь же приводится расчет аналогового СИ по второму методу (см. п. 8.2.3), который предполагает довольно консервативную оценку погрешностей СИ.

Пример 9.12. Рассчитать характеристики погрешности аналогового СИ в условиях изменения температуры окружающей среды от 25 до 35°C и напряжения питания от 200 до 230 В. СИ имеет следующие нормированные МХ:

- пределы допускаемой систематической составляющей основной погрешности $\Delta_{0SP} = \pm 10\text{ мВ}$, а значения погрешности равномерно распределены в своих пределах;

- предел допускаемого СКО случайной составляющей основной погрешности $\sigma_p \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = 5 \text{ мВ}$;

- пределы допускаемой вариации показаний (значений сигнала) $H_{0p} = \pm 6 \text{ мВ}$; значения вариаций равномерно распределены в своих пределах;

- номинальные функции влияния на систематическую составляющую погрешности

$$\psi_{sN1}(\xi_1) = K_{sN1}(\xi_1 - \xi_{1ref}), \quad \psi_{sN2}(\xi_2) = K_{sN2}(\xi_2 - \xi_{2ref}), \quad (9.35)$$

где $K_{sN1} = 0,5 \text{ мВ/}^\circ\text{C}$, $K_{sN2} = 0,4 \text{ мВ/В}$ — номинальные значения коэффициентов влияния температуры и напряжения питания на систематическую составляющую погрешности;

- номинальные функции влияния на СКО случайной составляющей погрешности

$$\psi_{\sigma N1}(\xi_1) = K_{\sigma N1}(\xi_1 - \xi_{1ref}), \quad \psi_{\sigma N2}(\xi_2) = K_{\sigma N2}(\xi_2 - \xi_{2ref}), \quad (9.36)$$

где $K_{\sigma N1} = 0,1 \text{ мВ/}^\circ\text{C}$, $K_{\sigma N2} = 0,1 \text{ мВ/В}$ — номинальные значения коэффициентов влияния температуры и напряжения питания на систематическую составляющую погрешности.

- $\xi_{1ref} = 20^\circ\text{C}$; $\xi_{2ref} = 220 \text{ В}$ — нормальные значения влияющих величин.

Влияющие величины равномерно изменяются в течение всей работы СИ и характеризуются нижними и верхними значениями:

$$\xi_{1н} = 25^\circ\text{C}, \quad \xi_{1в} = 35^\circ\text{C}, \quad \xi_{2н} = 200 \text{ В}, \quad \xi_{2в} = 230 \text{ В}.$$

Примечание. Все величины погрешностей приведены ко входу СИ.

Решение. 1. Математическое ожидание $M[\Delta_\xi]$ статической составляющей погрешности СИ при изменении влияющих величин (температуры и напряжения) определим, используя формулы п. 8.2.2. Поскольку систематическая составляющая погрешности и влияющие величины имеют равномерное распределение, их математические ожидания будут равны

$$M[\Delta_{0s}] = 0; \quad M[\xi_1] = 0,5 (\xi_{1н} + \xi_{1в}) = 0,5 (25 + 30) = 30^\circ\text{C};$$

$$M[\xi_2] = 0,5 (\xi_{2н} + \xi_{2в}) = 0,5 (200 + 230) = 215 \text{ В}.$$

В соответствии с формулами (8.16) и (8.18) получим

$$\begin{aligned} M[\Delta_\xi] &= M[\Delta_{0s}] + K_{sN1}(M[\xi_1] - \xi_{1ref}) + K_{sN2}(M[\xi_2] - \xi_{2ref}) = \\ &= 0 + 0,5 \cdot 10 - 0,4 \cdot 5 = 3 \text{ мВ}. \end{aligned}$$

2. Для определения дисперсии $D[\Delta_\xi]$ статической составляющей погрешности СИ вычислим вначале дисперсию систематической составляющей погрешности и СКО влияющих величин:

$$D[\Delta_{0s}] = \sigma^2[\Delta_{0s}] = \frac{\Delta_{0sP}^2}{3} = \frac{100}{3} = 33,3 \text{ мВ}^2;$$

$$\sigma[\xi_1] = \frac{\xi_{1H} - \xi_{1B}}{\sqrt{12}} = \frac{35 - 25}{\sqrt{12}} = 2,9^\circ\text{С};$$

$$\sigma[\xi_2] = \frac{\xi_{2H} - \xi_{2B}}{\sqrt{12}} = \frac{230 - 200}{\sqrt{12}} = 8,7 \text{ В};$$

$$\sigma_H^2 = \frac{H_{0P}^2}{12} = \frac{6^2}{12} = 3 \text{ мВ}^2.$$

Представляя формулу (8.21) в обозначениях настоящего примера и подставляя в нее вычисленные выше значения, получаем

$$D[\Delta_\xi] = \sigma^2[\Delta_{0s}] + \left(\sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] + K_{\sigma N1} |\xi_{B1} - \xi_{1ref}| + K_{\sigma N2} |\xi_{H2} - \xi_{2ref}| \right)^2 +$$

$$+ K_{sN1}^2 \sigma^2[\xi_1] + K_{sN2}^2 \sigma^2[\xi_2] + H_{0P}^2/12 = 33,3 + (5 + 1,5 + 2)^2 +$$

$$+ 0,25 \cdot 2,9^2 + 0,16 \cdot 8,7^2 + 3 = 123 \text{ мВ}^2.$$

При вычислении дисперсии $D[\Delta_\xi]$ использовался принцип консервативности, т.е. вычисления проводились при наибольшем отклонении влияющих величин от своих нормальных значений.

3. Поскольку распределение случайной составляющей погрешности получено в результате наложений нескольких распределений (в данном случае шести), есть основания полагать, что результирующее распределение близко к нормальному при математическом ожидании $M[\Delta_\xi] = 3,0 \text{ мВ}$ и СКО $\sigma[\Delta_\xi] = \sqrt{123} \approx 11 \text{ мВ}$.

Пример 9.13. В примере 9.12 дополнительные погрешности были определены для СИ данного типа. Поскольку этот расчет сделан для среднестатистического СИ, то результаты расчета могут дать как заниженную, так и завышенную оценку по отношению к СИ с известными индивидуальными МХ. Продолжим рассмотрение предыдущего СИ, полагая, что для него определены индивидуальные МХ:

- систематическая составляющая основной погрешности $\Delta_{0s} = 5 \text{ мВ}$;

- СКО случайной составляющей основной погрешности $\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] = 3 \text{ мВ}$;

- предел допускаемой вариации показаний (значений сигнала) $H_{0P} = \pm 3 \text{ мВ}$, а значения вариаций равномерно распределены в своих пределах;

- функции влияния на систематическую составляющую погрешности и на СКО случайной составляющей погрешности совпадают с номинальными функциями влияния (9.35) и (9.36), где $\xi_{1\text{ref}} = 20^\circ\text{C}$; $\xi_{2\text{ref}} = 220 \text{ В}$ — нормальные значения влияющих величин, а ξ_1 и ξ_2 необходимо выбрать из диапазона изменения влияющих величин: температуры от 25 до 35°C и напряжения питания от 200 до 230 В.

Решение. 1. Определяем статическую составляющую погрешности СИ при воздействии влияющих величин, выбирая сочетания воздействующих величин, которые приводят к наибольшей погрешности (температура 35° С и напряжение питания 230 В):

$$\begin{aligned} \Delta_\xi &= \Delta_{0s} + K_{sN1} (\xi_1 - \xi_{1\text{ref}}) + K_{sN2} (\xi_2 - \xi_{2\text{ref}}) = \\ &= 10 + 0,5 \cdot 15 + 0,4 \cdot 10 = 21,5 \text{ мВ}. \end{aligned}$$

Другие сочетания воздействующих факторов дают меньшее значение погрешности, например при температуре 25°C и напряжении питания 200 В получим $\Delta_\xi = -0,5 \text{ мВ}$.

2. Дисперсию $D[\Delta_\xi]$ статической составляющей погрешности СИ вычислим по формуле (8.21)

$$\begin{aligned} D[\Delta_\xi] &= \left(\sigma \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] + K_{\sigma N1} |\xi_{1B} - \xi_{1\text{ref}}| + K_{\sigma N2} |\xi_{2H} - \xi_{2\text{ref}}| \right)^2 + \\ &+ K_{sN1}^2 \sigma^2[\xi_1] + K_{sN2}^2 \sigma^2[\xi_2] + H_{0P}^2/12 = \\ &= (5 + 1,5 + 2)^2 + 0,25 \cdot 2,9^2 + 0,16 \cdot 8,7^2 + 0,75 = 87,4 \text{ мВ}^2. \end{aligned}$$

3. Таким образом, систематическая погрешность конкретного образца СИ при воздействии влияющих величин может изменяться от -0,5 до 21,5 мВ. При этом СКО случайной составляющей погрешности будет равно $\sigma[\Delta_\xi] = \sqrt{87,4} \approx 9,35 \text{ мВ}$.

4. Возможно уточнение и снижение погрешности, если известны значения воздействующих величин непосредственно во время работы с СИ.

Пример 9.14. Рассмотрим расчет аналогового СИ напряжения по второму методу, который предполагает задание нормируемых МХ в соответствии с п. 8.2.3. Влияющие величины — температура

окружающей среды, изменяющаяся в диапазоне от 25 до 35°C, и напряжение питания, изменяющееся от 200 до 230 В.

Заданы следующие нормированные МХ СИ:

- предел допускаемых значений основной погрешности $\Delta_{0P} = \pm 20$ мВ;

- наибольшее допускаемое изменение $\varepsilon_P(\xi_1)$ погрешности, вызванное отклонением температуры от нормального значения 20°C, составляет 5 мВ на каждые 10°C отклонения температуры;

- наибольшее допускаемое изменение $\varepsilon_P(\xi_2)$ погрешности, вызванное отклонением напряжения от нормального значения 220 В на $\pm 10\%$, составляет 10 мВ.

Решение. 1. Расчет наибольших возможных значений дополнительных погрешностей выполним по формуле (8.27):

$$\Delta_{C1 \max} = \varepsilon_P(\xi_1) \frac{\xi_{1B} - \xi_{1ref}}{\Delta \xi_{\varepsilon_1}} = \frac{(35 - 20) \cdot 5}{10} = 7,5 \text{ мВ};$$

$$\Delta_{C2 \max} = \varepsilon_P(\xi_2) \frac{\xi_{2H} - \xi_{2ref}}{\Delta \xi_{\varepsilon_2}} = \frac{(200 - 220) \cdot 10}{-22} \approx 10 \text{ мВ}.$$

2. Статическая погрешность СИ в реальных условиях эксплуатации будет равна

$$\Delta_{СИH} = -(\Delta_{0P} + \Delta_{C1 \max} + \Delta_{C2 \max}) = -(20 + 7,5 + 10) = -37,5 \text{ мВ};$$

$$\Delta_{СИВ} = -\Delta_{СИH} = 37,5 \text{ мВ},$$

где $\Delta_{СИH}$, $\Delta_{СИВ}$ — нижний и верхний пределы погрешности СИ соответственно.

9.8. РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В РАБОЧИХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Пример 9.15. Рассчитать характеристики погрешности АЦП данного типа в условиях изменения температуры окружающей среды от $\xi_H = 30^\circ\text{C}$ до $\xi_B = 60^\circ\text{C}$. Нормальное значение температуры $\xi_{ref} = 20^\circ\text{C}$.

АЦП имеет следующие нормируемые МХ:

- предел допускаемой систематической составляющей основной погрешности $\Delta_{0SP} = \pm 1$ мА и значения погрешности равномерно распределены в своих пределах;

- предел допускаемого СКО случайной составляющей основной погрешности $\sigma_P \left[\overset{\circ}{\Delta} 0 \right] = 0,3$ мА;

- номинальная функции влияния температуры на систематическую составляющую погрешности

$$\psi_{sN}(\xi) = K_{sN}(\xi - \xi_{ref})^2,$$

где $K_{sN} = 0,001 \text{ мА/}^\circ\text{C}^2$ — номинальное значение коэффициента влияния температуры на систематическую составляющую погрешности;

- номинальная цена единицы наименьшего разряда кода $\mu_N = 1 \text{ мА}$.

Решение. 1. Математическое ожидание $M[\Delta_\xi]$ статической составляющей погрешности АЦП определяем, используя формулы п. 8.2.2. Поскольку систематическая составляющая погрешности и влияющая величина (температура) имеют равномерное распределение, их математические ожидания будут равны

$$M[\Delta_{0s}] = 0, \quad M[\xi] = 0,5 (\xi_H + \xi_B) = 0,5 (30 + 60) = 45^\circ\text{C},$$

а дисперсия изменения температуры

$$\sigma^2(\xi) = \frac{(60 - 30)^2}{12} = 75^\circ\text{C}^2.$$

В соответствии с формулами (8.17)–(8.19), учитывая, что зависимость ψ_{sN} нелинейная, получаем

$$\begin{aligned} M[\Delta_\xi] &= M[\Delta_{0s}] + K_{sN}(M[\xi] - \xi_{ref})^2 + K_{sN}\sigma^2(\xi) = \\ &= 0 + 10^{-3} (45 - 20)^2 + 10^{-3} \cdot 75 = 0,7 \text{ мА}. \end{aligned}$$

2. Дисперсию $D[\Delta_\xi]$ статической составляющей погрешности АЦП вычислим по формулам (8.21)–(8.23), также учитывая нелинейный характер зависимости ψ_{sN} :

$$\begin{aligned} D[\Delta_\xi] &= \sigma^2[\Delta_{0sP}] + [2K_{sNI}(M[\xi] - \xi_{ref})]^2 \sigma^2[\xi] + 1,6K_{sN}^2 \sigma^4[\xi] + \\ &+ \sigma_P^2 \left[\overset{\circ}{\Delta}_0 \right] + \frac{\mu_N^2}{12} = 0,33 + (2 \cdot 10^{-2})^2 (45 - 20)^2 \cdot 75 + 1,6 (10^{-3})^2 (75)^2 + \\ &+ 0,09 + 0,083 = 0,7 \text{ мА}^2 = (0,84 \text{ мА})^2. \end{aligned}$$

3. Расчет границ интервальной оценки произведем по графику на рис. 8.1. Коэффициент $K_{cp} = 2$ при доверительной вероятности 0,95. Заметим, что в данном случае итоговое распределение должно быть близко к нормальному, так как число слагаемых распределений равно пяти.

Границы интервальных оценок будут равны

$$\Delta_{СИH} = M[\Delta_\xi] - K_{cp} \sigma[\Delta_\xi] = 0,7 - 2 \cdot 0,84 = 0,98 \approx 1,0 \text{ мА},$$

$$\Delta_{СИB} = M[\Delta_\xi] + K_{cp} \sigma[\Delta_\xi] = 0,7 + 2 \cdot 0,84 = 2,38 \approx 2,4 \text{ мА}.$$

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

10.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

10.1.1. Общие положения

Динамическая погрешность СИ — погрешность, возникающая при измерении изменяющейся (в процессе измерений) физической величины (ФВ) или сигнала.

Отнесение измерения к динамическому или статическому довольно условно и определяется в сравнении динамической погрешности с другими погрешностями измерения. Если динамическая погрешность должна учитываться в сумме других погрешностей, то измерение относится к динамическому, если — нет, то к статическому. Динамическая погрешность считается существенной при удовлетворении неравенства (8.36).

Динамическая погрешность определяется соотношением между скоростью изменения входного сигнала и скоростью реакции СИ на это изменение. Изменение ФВ (или сигнала) может происходить с различной скоростью: от скорости, равной бесконечности при скачкообразном изменении ФВ, до очень медленного изменения, при котором режим работы СИ может считаться статическим. Рассмотрим ряд примеров (рис. 10.1) динамических измерений, поясняющих возникновение динамической погрешности [1, 20].

1. Определение последовательных значений ФВ, изменяющейся во времени (измерение толщины стали на прокатном стане, высоты полета летательного аппарата, глубины дна под килем судна, распределения урана по длине теплоделяющего элемента и т.д.). Эти изменения характеризуются сигналом, изменяющимся со временем случайным образом около некоторого среднего значения или закономерным образом (детерминированное изменение).

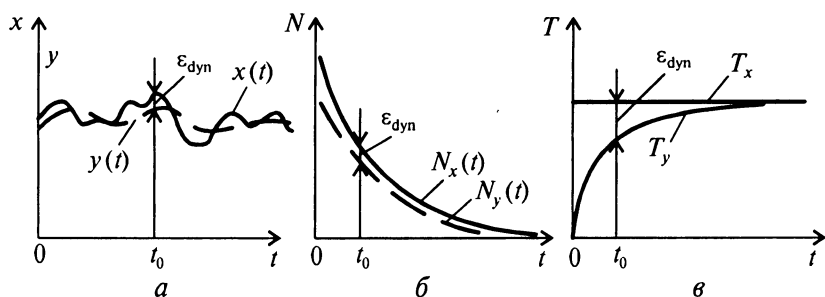


Рис. 10.1. Примеры входных сигналов, регистрация которых приводит к появлению динамических погрешностей: *a* — случайная реализация сигнала; *б* — экспоненциально изменяющийся сигнал (кривая интенсивности излучения короткоживущего радионуклида); *в* — скачок постоянного сигнала (скачок температуры на датчике при его погружении в измеряемую среду). Обозначение $x(t)$ относится к сигналу на входе СИ, а $y(t)$ — на выходе средства измерения

2. Измерение параметров однократной реализации какого-либо процесса, например измерение постоянной времени жизни радиоактивного короткоживущего радионуклида по его кривой распада, измерение импульсных характеристик взрывов, определение энергетических и временных характеристик ионизирующего излучения, измерение характеристик импульсного лазерного излучения и т.д.

3. Измерение постоянной величины за ограниченное время, например быстрое (время измерения сравнимо со временем реакции СИ) измерение температуры или напряжения в точках электронной цепи.

Динамическая погрешность, обусловленная инерционностью СИ и описываемая динамической характеристикой СИ, является основной составляющей динамической погрешности и называется погрешностью линейных искажений. Кроме того, динамическая погрешность может быть обусловлена отклонением реальной динамической характеристикой СИ от номинальной, по которой производится априорный расчет выходного сигнала (разброс динамической характеристики от экземпляра к экземпляру СИ) и неточностью фиксации момента времени измерения. Указанные выше составляющие динамической погрешности имеют место при любых динамических измерениях.

Вторая группа динамической погрешности, обусловленная частотными и амплитудными перегрузками СИ и зависящая от динамической характеристики СИ, может быть условно отнесена к динамической погрешности. Эти погрешности, например, имеют место при измерении параметров импульсного сигнала, распреде-

ленного во времени по закону Пуассона. Поскольку при этом промежуток времени между поступающими на вход СИ импульсами может быть очень малым, то существует вероятность того, что последующий импульс будет искажаться из-за влияния предыдущих импульсов. Эти искажения (погрешности) амплитуды и временных параметров импульсов определяются в первую очередь динамической характеристикой СИ.

Третья группа погрешностей СИ, которая не относится к динамической, но которая зависит от динамической характеристики СИ и, как правило, анализируется наряду с динамической погрешностью линейных искажений, — это погрешности, обусловленные электронными шумами СИ (случайная составляющая основной погрешности СИ), а также реакцией СИ на различные помехи и наводки. Это связано с тем, что динамическая погрешность линейных искажений и погрешности из-за электронных шумов СИ по-разному зависят от частотной полосы пропускания СИ, и совместный анализ этих составляющих погрешности позволяет оптимизировать работу СИ в динамическом режиме.

10.1.2. Модели определения динамической погрешности

Динамическую погрешность СИ при регистрации случайных и детерминированных непрерывных сигналов определяют, как правило, с помощью модели, изображенной на рис. 10.2. Динамическая погрешность определяется как разность между зашумленным сигналом $y(t)$ на выходе реального СИ с импульсной переходной характеристикой (ИПХ) $g(t)$ и сигналом $h(t)$ на выходе идеального СИ с ИПХ $g_0(t)$. Как видно из рис. 10.2, погрешность измерения сигнала $x(t)$ состоит из динамической погрешности, обусловленной линейными искажениями сигнала, и погрешностью из-за влияния электронных шумов $n(t)$. Погрешность линейных искажений связана с отличием ИПХ реального и идеального измерительных каналов на этой схеме. Практически всем СИ, работающим в динамическом режиме измерения, присуща коллимационная система (КС), усредняющая измеряемую ФВ в поле зрения (рис. 10.3).

Примечание. Коллимационная система — это часть конструкции СИ, ограничивающая угол зрения, под которым чувствительная часть прибора (датчик) «видит» объект измерения. КС (коллиматор) в том или ином виде присутствует в каждом приборе, поскольку точечные измерения в динамическом режиме неосуществимы. Можно не учитывать усреднение, вносимое КС в процессе измерения, и сами измерения считать точечными, если размеры КС по пути измерения много меньше по сравнению с длиной корреляции измеряемой ФВ. Типичным элементом усреднения, играющим роль КС в каждом приборе, является чувствительная поверхность детектора, имеющего конечные геометрические размеры.

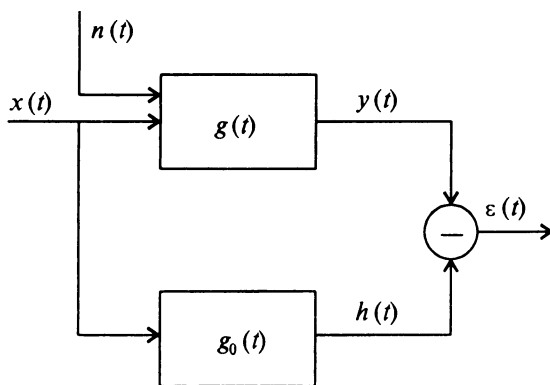


Рис. 10.2. Упрощенная модель определения погрешности измерения в динамическом режиме

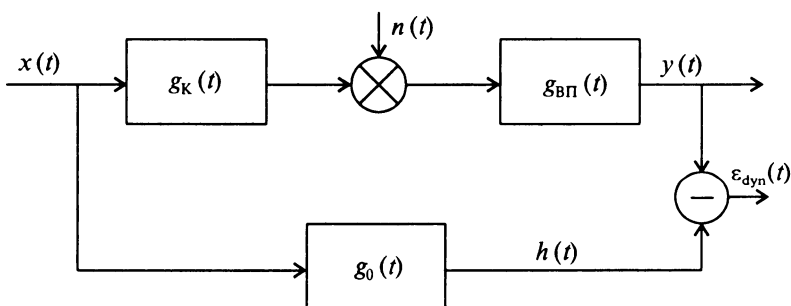


Рис. 10.3. Временная модель СИ для расчета динамической погрешности: $g_K(t)$, $g_{ВП}(t)$, $g_0(t)$ — импульсные переходные характеристики коллиматора, вторичного преобразователя и идеального преобразователя соответственно; $n(t)$ — шум; $x(t)$ — полезный сигнал

Используя модель на рис. 10.3, динамическую погрешность, обусловленную линейными искажениями, представляют в виде [1, 6, 20]

$$\varepsilon_{\text{dyn}}(t) = \left| \int_0^t x(t - \xi) g_{K, \text{ВП}}(\xi) d\xi - \int_0^t x(t - \xi) g_0(\xi) d\xi \right|, \quad (10.1)$$

где $g_{K, \text{ВП}}(\xi)$ — свертка ИПХ КС и вторичного преобразователя (ВП):

$$g_{K, \text{ВП}}(t) = \int_0^t g_K(t - \xi) g_{ВП}(\xi) d\xi. \quad (10.2)$$

Если проводятся «точечные» измерения, т.е. усреднением в поле зрения КС можно пренебречь, то

$$g_K(t) = \delta(t) \text{ и } g_{\text{КВП}}(t) = g_{\text{ВП}}(t).$$

Дисперсия случайной составляющей основной погрешности, обусловленная электронным шумом $n(t)$, будет равна

$$D[\dot{\Delta}_0] = D[u_n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_n^{\oplus}(\omega) |G_{\text{ВП}}(j\omega)|^2 d\omega = \overline{\varepsilon_n^2}, \quad (10.3)$$

где $S_n^{\oplus}(\omega)$ — спектральная плотность мощности (СПМ) шума в области положительных частот.

Суммарная динамическая погрешность может быть записана в виде

$$\varepsilon_{\Sigma} = \varepsilon_{\text{dyn}} \pm K(P) \sqrt{\overline{\varepsilon_n^2}} \text{ при } P = \dots\%, \quad (10.4)$$

где для определения коэффициента $K(P)$ можно воспользоваться нормальным распределением вероятности табл. ПЗ или П4.

Для вычисления дисперсии случайной погрешности при входном случайном сигнале используют модель, приведенную на рис. 10.4, а погрешность вычисляют по формуле

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_{\text{dyn}}^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_x^{\oplus}(\omega) |G_0(j\omega) - G_K(j\omega) G_{\text{ВП}}(j\omega)|^2 d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_n^{\oplus}(\omega) |G_{\text{ВП}}(j\omega)|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (10.5)$$

где $\varepsilon(\omega)$ — погрешность, зависящая от частоты; $S_x^{\oplus}(\omega)$ — СПМ сигнала в области положительных частот; $G_0(j\omega)$, $G_K(j\omega)$, $G_{\text{ВП}}(j\omega)$ — номинальные амплитудно-фазовые характеристики (АФХ) идеального канала преобразования, коллиматора и вторичного преобразователя. В формуле (10.5) первое слагаемое является динамической погрешностью, обусловленной линейными искажениями сигнала, а второе — погрешностью из-за электронных шумов. Это соотношение позволяет оптимизировать полосу пропускания СИ для получения условий измерения при минимальной общей погрешности.

Для гармонического (синусоидального) сигнала $A_m e^{j\omega t}$, если измеряется его мгновенное значение, динамическая погрешность равна [6]

$$\varepsilon_{\text{dyn}}(t) = \left| \frac{G_N(j\omega)}{K_N} - 1 \right| A_m e^{j\omega t}, \quad (10.6)$$

математическое ожидание ее равно нулю, а дисперсия

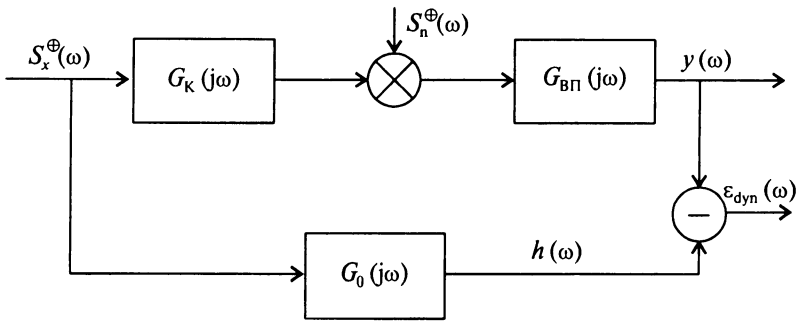


Рис. 10.4 Частотная модель СИ для расчета динамической погрешности: $G_K(j\omega)$, $G_{ВП}(j\omega)$, $G_0(j\omega)$ — АФХ коллиматора, вторичного преобразователя и идеального преобразователя соответственно

$$\overline{\varepsilon_{\text{dyn}}^2(t)} = \frac{A_m^2}{2} \left| \frac{G_N(j\omega)}{K_N} - 1 \right|^2, \quad (10.7)$$

где A_m — амплитуда гармонического сигнала; $G_N(j\omega)$ — номинальная АФХ СИ; K_N — номинальный коэффициент преобразования.

Оценка сверху (грубая оценка в соответствии со вторым методом расчета погрешности) относительного значения динамической погрешности для СИ с линейной фазочувствительной характеристикой определяется по формуле [6]

$$\delta_{\text{dyn max}} = \left| 1 - \frac{A_N(\omega_0)}{A_N(\omega_{\text{max}})} \right|, \quad (10.8)$$

где $A_N(\omega_0)$ — номинальная амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) при нормальном значении ω_0 частоты; $A_N(\omega_{\text{max}})$ — номинальная АЧХ, наиболее отклоняющаяся на интервале $\omega_n \leq \omega_0 \leq \omega_B$ от значения $A_N(\omega_0)$. Абсолютная погрешность определяется умножением относительной погрешности (10.8) на амплитуду измеряемого сигнала.

10.1.3. Исходные данные, необходимые для расчета динамических погрешностей средств измерений

В качестве исходных данных при расчете характеристик динамической погрешности СИ первым методом используются следующие характеристики.

1. Одна из полных номинальных динамических характеристик СИ:

- переходная характеристика (ПХ) $h_N(t)$;
- импульсная переходная характеристика (ИПХ) $g_N(t)$;
- амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) $G_N(j\omega)$;
- передаточная функция (ПФ) $G_N(p)$;
- одна из полных динамических характеристик, задающая идеальное (желаемое) преобразование входного сигнала.

Если ставится задача воспроизведения формы входного сигнала, то ПФ $G_0(p) = 1$, ИПХ $g_0(t) = \delta(t)$, для задачи измерения скорости изменения входного сигнала $G_0(p) = p$, $g_0(t) = \delta(t)/dt$, для задачи интегрирования $G_0(p) = 1/p$ и т.д. [1]. При поступлении на вход СИ единичного скачка выходной сигнал имеет вид $h(t)$, а при подаче на вход δ -импульса — $g(t)$. Эти полные динамические характеристики связаны между собой следующими соотношениями:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (10.9)$$

$$h(t) = \int_0^t g(\xi) d\xi. \quad (10.10)$$

Амплитудно-фазовая и импульсная переходная характеристики связаны между собой с помощью прямого и обратного преобразований Фурье:

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (10.11)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega. \quad (10.12)$$

Передаточная функция может быть получена с помощью преобразования Лапласа:

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt. \quad (10.13)$$

Таким образом, зная одну из полных динамических характеристик, с помощью соотношений (10.9)–(10.13) можно получить любую другую динамическую характеристику.

Амплитудно-фазовую характеристику как функцию комплексного переменного в общем случае можно представить в показательной форме

$$G(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)}, \quad (10.14)$$

где $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ — амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики (ФЧХ) СИ.

2. Частные динамические характеристики. К частным динамическим характеристикам относят любые функционалы или параметры полных динамических характеристик. Например, время реакции (быстродействие), время задержки, постоянная времени и т.п. Известно, что любые частные динамические характеристики могут быть определены из полной.

3. Допускаемые пределы отклонения от номинальной полной динамической характеристики, обусловленные разбросом коэффициента передачи (преобразования) и постоянных времени СИ.

4. Время измерения $t_{\text{изм}}$, которое определяется как достижение сигналом на выходе СИ определенного уровня.

5. Погрешность определения времени измерения.

6. Характеристики входного сигнала.

6.1. Характеристики случайного входного сигнала: СПМ и АКФ, которые связаны между собой прямым и обратным преобразованием Винера–Хинчина

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (10.15)$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (10.16)$$

6.2. Характеристики входного непрерывного детерминированного сигнала:

- аналитическое выражение входного сигнала можно представить в общем виде

$$x(t) = \sum_{i=0}^r a_i t^i = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_r t^r.$$

При $r = 0$ входной сигнал постоянен, при $r = 1$ сигнал изменяется линейно, при $r = 2$ сигнал изменяется параболически и т.д.;

- диапазон изменения коэффициентов a_i или их вероятностные характеристики.

6.3. Характеристики импульсных входных сигналов (рис. 10.5):

- амплитуда и ее возможные изменения;
- форма импульса;
- длительность импульса и длительности его фронта и среза;
- вероятность появления импульса или серии импульсов;

- другие характеристики (например, спад вершины, задержка, наличие положительных и отрицательных выбросов, а также высокочастотных колебаний и т.д.).

Примечание. Характеристик различных импульсных сигналов довольно много, и выделять какие-то в качестве основных вряд ли целесообразно. Поэтому здесь приводятся только некоторые из них, поскольку значимость той или иной частной динамической характеристики входного сигнала определяется прежде всего поставленной задачей.

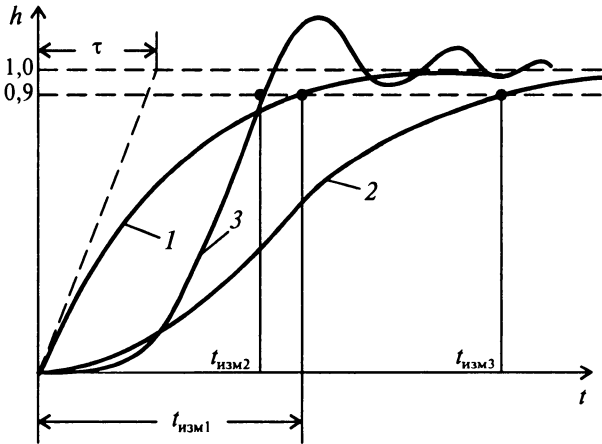


Рис. 10.5. Переходные характеристики СИ и некоторые частные динамические характеристики: 1 — характеристика звена 1-го порядка (см. пример 10.1); 2 — характеристика нескольких звеньев 1-го порядка, включенных последовательно; 3 — переходная характеристика более сложной схемы СИ

Используя аналогию между ИПХ и дифференциальной функцией распределения плотности вероятности и аналогию между ПХ и интегральной функцией плотности вероятности, время задержки и постоянную времени нарастания выходного импульсного сигнала можно оценить по формулам [1]

$$t_3 = \int_0^{\infty} t g(t) dt; \quad \tau_{нэ}^2 = \int_0^{\infty} (t - t_3)^2 g(t) dt. \quad (10.17)$$

7. Характеристики мешающего электронного шума, приведенного ко входу СИ:

- СПМ шума $S_n^{\oplus}(\omega)$ или АКФ $R_n(\tau)$.

В качестве исходных данных при расчете характеристик динамической погрешности СИ вторым методом (определение погрешности при доверительной вероятности $P = 1$) используются следующие характеристики.

8. Номинальная АЧХ $A_N(\omega)$ СИ.

9. Характеристики входного сигнала: нижняя ω_H и верхняя ω_B границы спектра частот реального входного сигнала.

10. Другие характеристики, в том числе характеристики детерминированных сигналов и шумов.

10.2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

10.2.1. Полные и частные динамические характеристики

Рассмотрим на нескольких примерах представление моделей СИ полными динамическими характеристиками, преобразование этих характеристик, а также получение некоторых частных, используя полные динамические характеристики.

Пример 10.1. Эквивалентная схема (модель) СИ представляет собой фильтр нижних частот (ФНЧ) первого порядка (интегрирующая RC -цепочка). Подобной эквивалентной схемой (рис. 10.6) можно представить многие СИ, например основанные на тепловом, электрическом, механическом и других физических принципах работы. Определить все полные динамические характеристики для этой модели.

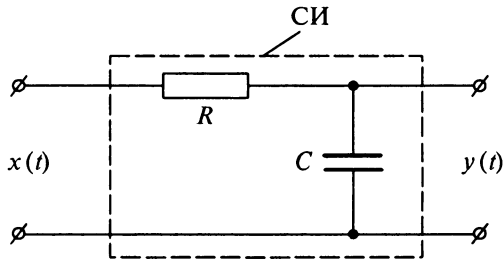


Рис. 10.6. Модель СИ, представляющая собой фильтр нижних частот 1-го порядка (интегрирующая RC -цепь)

Решение. 1. Подавая на вход схемы сигнал комплексной частоты и определяя отношение выходного сигнала к входному, получаем

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{I(j\omega)(1/j\omega C)}{X(j\omega)} = \frac{X(j\omega)(1/j\omega C)}{R + (1/j\omega C)} \frac{1}{X(j\omega)} = \\ &= \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tau = RC$ — постоянная времени схемы; $I(j\omega)$ — ток в цепи.

2. Передаточную функцию определим, сделав формальную замену $j\omega = p$:

$$G(p) = 1/(1 + p\tau). \quad (2)$$

3. Определим АЧХ и ФЧХ, представив АФХ в виде $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$. Тогда АЧХ и ФЧХ будут иметь вид (рис. 10.7, в, з)

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \text{tg } \varphi(\omega) = -\omega\tau, \quad \varphi(\omega) = -\text{arctg}(\omega\tau). \quad (3)$$

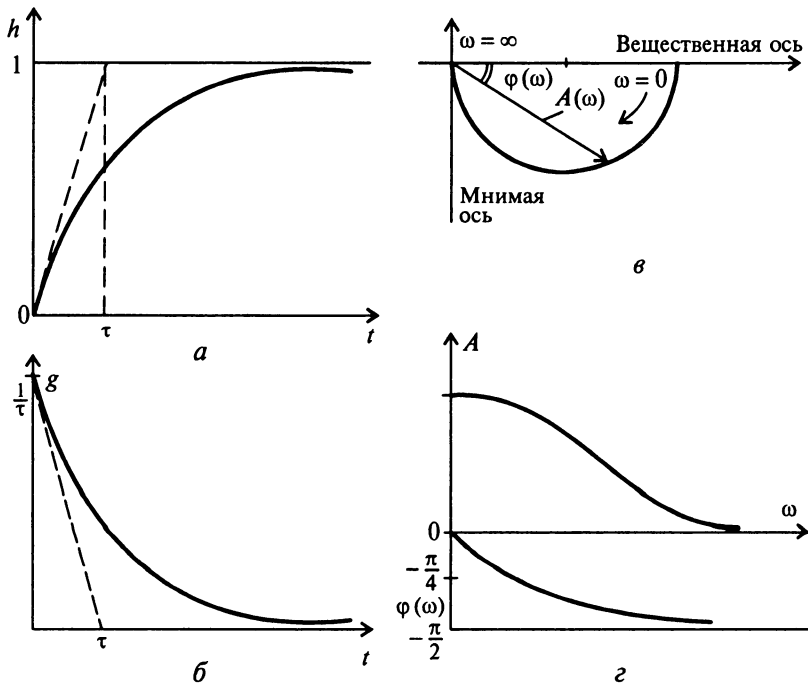


Рис. 10.7. Полные динамические характеристики RC-цепи, изображенной на рис. 10.6

ФЧХ определена как отношение мнимой составляющей $G(j\omega)$ к ее действительной составляющей. Используя выражение для $G(j\omega)$, АФХ в соответствии с (10.14) можно представить в виде

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} e^{-j\omega\tau}. \quad (4)$$

4. По таблице преобразований Лапласа (табл. П13) найдем ИПХ (рис. 10.7, б)

$$G(p) = \frac{1}{1 + p\tau} \Rightarrow g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (5)$$

5. ПХ найдем с помощью соотношения (10.10) (рис.10.7, а)

$$h(t) = \int_0^t g(\xi) d\xi = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\xi/\tau} d\xi = 1 - e^{-t/\tau}. \quad (6)$$

Пример 10.2. Модель СИ представляет собой последовательное соединение двух ФНЧ 1-го порядка с постоянными времени $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_2$ (рис. 10.8). Найти полные динамические характеристики: АФХ, ПФ, ИПХ и ПХ. Получить динамические характеристики также при равенстве постоянных времени $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.

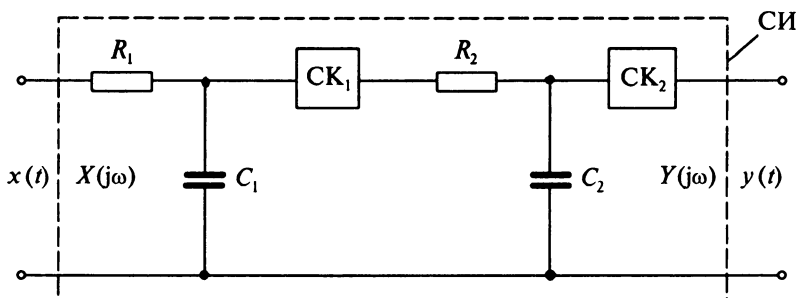


Рис. 10.8. Модель средства измерения примера 10.2: СК₁, СК₂ — согласующие каскады с коэффициентом передачи, равным единице

Используя результаты примера 10.1, получаем АФХ и ПФ модели СИ

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_1} \frac{1}{1 + j\omega\tau_2},$$

$$G(p) = G_1(p)G_2(p) = \frac{1}{1 + p\tau_1} \frac{1}{1 + p\tau_2}.$$

По табл. П13 получим

$$g(t) = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{t/\tau_1} - e^{t/\tau_2}).$$

Используя (10.10), вычислим ПХ модели

$$h(t) = 1 + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{t/\tau_2} - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{t/\tau_1}.$$

При $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, получим следующие выражения для ИПХ и ПХ:

$$G(p) = \frac{1}{(1 + p\tau)^2} \Rightarrow g(t) = \frac{1}{\tau^2} e^{-t/\tau},$$

$$h(t) = \int_0^t g(x) dx = \int_0^t \frac{x}{\tau^2} e^{-x/\tau} dx = 1 - \left(\frac{1}{\tau} + 1\right) e^{-t/\tau}.$$

Пример 10.3. Модель СИ представляет собой последовательное соединение фильтров нижних и верхних частот (ФНЧ и ФВЧ) 1-го порядка с постоянными времени $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_2$ соответственно. Найти полные динамические характеристики: АФХ, ПФ, ИПХ и ПХ.

Решение. Получив выражение для АФХ первого блока модели в виде $G_1(j\omega) = j\omega\tau_1/(1 + j\omega\tau_1)$ и используя результаты примера 10.1, получим АФХ и ПФ модели СИ:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) = \frac{j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_1} \frac{1}{1 + j\omega\tau_2},$$

$$G(p) = G_1(p)G_2(p) = \frac{p\tau_1}{1 + p\tau_1} \frac{1}{1 + p\tau_2}.$$

По табл. П13 получим

$$g(t) = \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \left(\frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} \right)$$

и, используя (10.10), найдем ПХ

$$h(t) = \int_0^t g(\xi) d\xi = \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \left(e^{-t/\tau_2} - e^{-t/\tau_1} \right).$$

Пример 10.4. Модель СИ представляет собой последовательное соединение идеального интегратора на емкости C , ФНЧ и ФВЧ 1-го порядка с постоянными времени $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_2$ соответственно (рис. 10.9). На вход СИ поступает сигнал в виде дельта-импульса заряда $x(t) = Q\delta(t)$. Определить сигнал $y(t)$ на выходе СИ.

Решение. Поскольку на входе СИ имеется идеальный интегратор, то дельта-импульс заряда на емкости C преобразуется в скачок напряжения амплитудой $U_0 = Q/C$.

Определим вначале сигнал после его преобразования ФВЧ. Используя интеграл свертки и ИПХ ФВЧ в виде (5) табл. П13, получаем

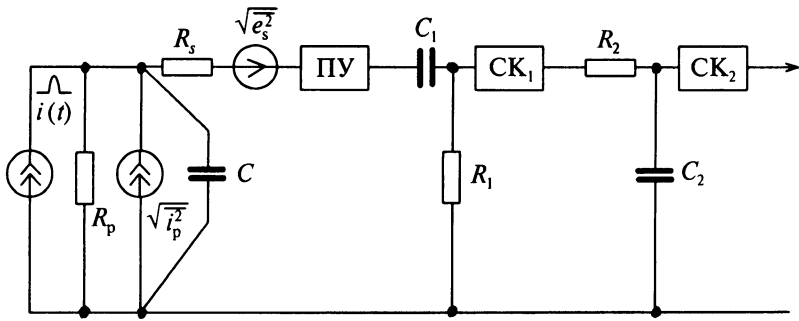


Рис. 10.9. Модель СИ для определения сигнала и дисперсии шума в примерах 10.4, 10.9, 10.10, 10.11, 10.20: ПУ — предварительный усилитель; R_s и R_p — эквивалентные сопротивления последовательного и параллельного шумов; $\sqrt{e_s^2}$, $\sqrt{i_p^2}$ — генераторы последовательного и параллельного шумов

$$U_1(t) = \int_0^t U_0(t - \xi) g_1(\xi) d\xi = \int_0^t U_0 \delta(\xi) d\xi - \frac{U_0}{\tau_1} \int_0^t e^{-\xi/\tau_1} d\xi = U_0 e^{-t/\tau_1}. \quad (1)$$

Аналогичным образом, используя выражение для ИПХ ФНЧ в виде (4) табл. П13, получаем выражение для сигнала на выходе модели СИ

$$\begin{aligned} U_2(t) &= y(x) = \int_0^t U_1(t - \xi) g_2(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^t U_0 \exp\left(-\frac{t - \xi}{\tau_1}\right) \frac{1}{\tau_2} \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_2}\right) d\xi = \\ &= \frac{U_0}{\tau_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{\xi}{\tau_1}\right) \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_2}\right) \xi = \\ &= U_0 \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \left[\exp\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2 \tau_1}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) = \\ &= U_0 \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Более простым способом этот результат можно получить, если использовать операторное представление сигнала и ПФ блоков модели СИ:

$$Y(p) = Q \frac{1}{pC} \frac{p}{1 + p\tau_1} \frac{1}{1 + p\tau_2} = U_0 \frac{\tau_1}{(1 + p\tau_1)(t + p\tau_2)}. \quad (3)$$

Тогда $U_2(t)$ можно найти, используя выражение (3) и таблицу операторных преобразований Лапласа П13 (п. 9).

При $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$ выходной сигнал будет иметь вид

$$y(t) = U_0 \frac{1}{\tau_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right), \quad (4)$$

а максимум этого сигнала при $\tau = \tau_0$ имеет величину U_0/e , $U_0 = Q/C$ ($e = 2,7$).

Пример 10.5. Модель СИ представлена на рис. 10.10. АФХ этой модели, определенная как отношение тока на выходе $I_2(j\omega)$ к току на входе $I_1(j\omega)$, равна

$$G(j\omega) = \frac{I_2(j\omega)}{I_1(j\omega)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega}, \quad (1)$$

где $\alpha = R/2L$; $\omega_0^2 = 1/LC$, ω_0 — резонансная частота LC -контура. Определить ИПХ, ПХ, а также частную динамическую характеристику: время успокоения показаний до уровня 0,95 от установившегося значения переходной характеристики.

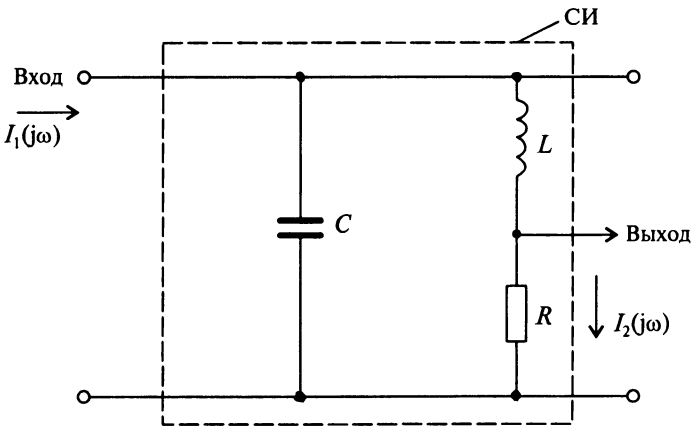


Рис. 10.10. Модель СИ для примера 10.5. и задачи 10.5

Решение. Передаточную функцию определим заменой комплексной частоты $j\omega$ на комплексную переменную p :

$$G(p) = \omega_0^2 \frac{1}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}. \quad (2)$$

Если напряжение измеряется на сопротивлении R , то передаточная функция будет иметь вид

$$G(p) = \omega_0^2 \frac{R}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}.$$

Для определения ИПХ, разложим знаменатель на два множителя и представим ПФ в виде, удобном для использования преобразований Лапласа табл. П13:

$$G(p) = \omega_0^2 \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)},$$

где p_1 и p_2 — корни знаменателя, равные

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (3)$$

В зависимости от соотношения между слагаемыми подкоренного выражения в корнях p_1 и p_2 возможны три решения. Если подкоренное выражение отрицательно, то ИПХ будет иметь колебательную составляющую, если положительно, то ИПХ будет изменяться аperiодически, что в электронной технике называется аperiодическим режимом изменения ИПХ СИ. При равенстве составляющих под корнем имеет место граничный или так называемый критический режим изменения ИПХ СИ. Используя табличное значение преобразования Лапласа (табл. П13), получаем вначале ИПХ критического режима, который соответствует условию $\alpha^2 = \omega_0^2$:

$$G(p) = \omega_0^2 \frac{1}{(p + \alpha)^2} \Rightarrow g_1(t) = \omega_0^2 t e^{-\alpha t} \quad \text{при } \alpha^2 = \omega_0^2, \quad (4)$$

а затем ИПХ при неодинаковых корнях знаменателя ПФ

$$G_{2,3}(p) = \omega_0^2 \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} \Rightarrow g_{2,3}(t) = \omega_0^2 \frac{1}{p_1 - p_2} (e^{-p_1 t} - e^{-p_2 t}). \quad (5)$$

При $\alpha^2 \ll \omega_0^2$, что соответствует корням уравнения в комплексном виде, получаем

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \frac{\omega_0^2}{2j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \left(e^{j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t} - e^{-j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t} \right) = \\ &= \frac{\omega_0^2}{2j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t \right) \approx \omega_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t; \end{aligned} \quad (6)$$

при $\alpha^2 \gg \omega_0^2$

$$g_3(t) = \frac{\omega_0^2}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{-\alpha t} \left(e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} \right) =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \cdot t \right) \approx \frac{\omega_0^2}{\alpha} e^{-\alpha t} \operatorname{sh}(\alpha t). \quad (7)$$

Приближенные крайние правые выражения (6) и (7) приведены для $\alpha^2 \ll \omega_0^2$ и $\alpha^2 \gg \omega_0^2$ соответственно. Используя (10.12), получаем выражения для ПХ

$$h_1(t) = 1 - (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}, \quad (8)$$

$$h_2(t) = \frac{\omega_0^2}{\beta} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\beta - e^{-\alpha t} (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) \right], \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2};$$

$$h_2(t) \approx 1 - e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t \quad \text{при } \alpha^2 \ll \omega_0^2; \quad (9)$$

$$h_3(t) \approx \frac{\omega_0^2}{4\alpha^2} (2\alpha t - 1 + e^{-2\alpha t}) \quad \text{при } \alpha^2 \gg \omega_0^2.$$

Определим некоторые частные динамические характеристики для колебательного режима (9) изменения ИПХ и ПХ со временем. Частота колебаний равна $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Время достижения ПХ уровня 0,95 от установившегося уровня, равного единице, определим из соотношения $0,95 = 1 - e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$. Полагая $\cos \omega_0 t = 1$, получаем $t_{\text{уст}} = 3/\alpha = 6L/R$.

Пример 10.6. Для модели СИ, приведенной в примере 10.1, оценить с помощью соотношений (10.17) время задержки и постоянную времени нарастания выходного сигнала. Определить также время измерения, соответствующее достижению уровня 0,95 от установившегося значения выходного сигнала.

Решение. Подставляя в уравнение (10.17) для определения задержки ИПХ $g(t) = \exp(-t/\tau) \tau^{-1}$, получаем $t_3 = \tau$, а в уравнение для оценки «дисперсии» постоянной времени нарастания $\tau_{\text{нэ}}^2 = \tau^2$. Таким образом, задержка выходного сигнала может быть оценена τ , а эквивалентная постоянная времени нарастания также как τ . При этом время нарастания выходного сигнала до определенного уровня определяется из уравнения $t_{\text{н}} = k\tau$, причем коэффициент k в этом соотношении определяется выбором уровня достижения выходного сигнала. Например, если время нарастания определено как время достижения 0,95 установившегося уровня, то, определяя его из соотношения $0,95 = 1 - \exp(-t_{\text{н}}/\tau)$, получаем $t_{\text{н}} = 2,3\tau$. Это

время, как правило, задается как время измерения выходного импульсного сигнала.

Пример 10.7. Эквивалентная схема СИ представлена n последовательно включенными интегрирующими цепочками с равными постоянными времени τ . Определить временную задержку выходного сигнала, эквивалентную постоянной времени и время достижения выходным сигналом уровня 0,95 от установившегося значения.

Решение. Используя результаты примера 10.1, запишем выражения для АФХ и ПФ:

$$G_n(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega\tau)^n} \rightarrow G_n(p) = \frac{1}{(1 + p\tau)^n}.$$

По табл. П13 преобразований Лапласа получим ИПХ, а затем с помощью соотношения (10.10) — переходную характеристику

$$g_n(t) = \frac{t^{n-1}}{\tau^n(n-1)} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

$$h_n(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sum_{v=1}^n \frac{(t/\tau)^{n-v}}{(n-v)!}.$$

Определим временную задержку и дисперсию времени нарастания по формулам (10.17)

$$t_3 = \int_0^{\infty} t g_n(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\tau^n} \int_0^{\infty} t^n \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\tau^n} n! \tau^{n+1} = n\tau,$$

$$\tau_{\text{нз}}^2 = \int_0^{\infty} t^2 g_n(t) dt - t_3^2 = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\tau^n} \int_0^{\infty} t^{n+1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt - t_3^2 =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \frac{\tau^{n+2}}{\tau^n} - (n\tau)^2 = n\tau^2.$$

Таким образом, эквивалентная постоянная времени нарастания будет равна $\tau_{\text{нз}} = \tau\sqrt{n}$, а время нарастания на уровне 0,95 от установившегося значения будет равно $\tau_{\text{н}} = 2,3\tau\sqrt{n}$. Это грубая оценка времени нарастания, так как она получена из предположения экспоненциального характера нарастания выходного сигнала. Точное решение может быть найдено после решения уравнения $\Delta = 1 - h_n(t_{\text{н}})$, где Δ — погрешность измерения амплитуды, при которой определяется время нарастания $t_{\text{н}}$.

Пример 10.8. Для усиления прямоугольных импульсов с параметрами:

— длительность входных импульсов $t_{\text{и}} = 10$ мкс;

— длительность нарастания переднего и спада заднего экспоненциально изменяющихся фронтов, измеренных на уровне 0,1–0,9, составляет $t_{\text{н}} = t_{\text{сп}} = 22$ нс;

— амплитуда входных импульсов $U_{\text{вх0}} = 10$ В

используется импульсный усилитель с коэффициентом усиления, равным единице, частотная полоса которого ограничена сверху ФНЧ с постоянной времени $\tau_2 = 200$ нс, а снизу ФВЧ с постоянной времени $\tau_1 = 100$ мкс. Определить вид сигнала на выходе импульсного усилителя, а также линейные искажения фронта (на уровне 0–0,9) и плоской вершины, вносимые этим усилителем (частные динамические характеристики).

Решение. 1. Поскольку постоянные времени фильтров сильно различаются и первый фильтр оказывает влияние только на спад плоской вершины импульса, а второй — на длительность переднего и заднего фронтов, рассмотрим их влияние отдельно, полагая, что они независимы. Такое разделение существенно облегчает анализ.

2. Определим постоянные времени переднего и заднего фронтов входных импульсов. Поскольку длительность их определена на уровне 0,1–0,9, то времена нарастания и спада связаны следующим соотношением (для экспоненциальной зависимости) $t_{\text{н}} = t_{\text{сп}} = 2,2\tau_{\text{вх}} = 22$ нс. Тогда $\tau_{\text{вх}} = 10$ нс.

3. Полагая, что на вход ИУ поступает скачок, так как $\tau_{\text{вх}} \ll \tau_1$, и используя ПХ в виде $h(t) = 1 - \exp(-t/\tau_2)$, получаем, что фронт сигнала будет изменяться в соответствии с формулой

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх0}} K [1 - \exp(-t/\tau_2)], \quad (1)$$

а его спад

$$U_{\text{вых}}(t - t_{\text{и}}) = KU_{\text{вх0}} \exp(-(t - t_{\text{и}})/\tau_1). \quad (2)$$

4. Вычислим постоянные времени нарастания и спада фронтов выходного импульса по формуле: $\tau_{\text{вых}} = \sqrt{\tau_{\text{вх}}^2 + \tau_2^2} = \sqrt{100 + 40\,000} = 200,2 \approx 200$ нс, а затем время нарастания и спада на уровне от 0 до 0,9 по формуле $t_{\text{н вых}} = t_{\text{сп вых}} = 2,3\tau_{\text{вых}} = 460$ нс.

5. Спад плоской вершины определяется ФВЧ с ПХ $h(t) = \exp(-t/\tau_1)$ и равен $\Delta_{\text{сп}} = 1 - \exp(-t_{\text{и}}/\tau_1) = 1 - \exp(-0,1) = 1 - 0,9 = 0,1$, или 10% амплитуды сигнала.

6. Энергия, накопленная на емкости ФВЧ, после окончания импульса выделится в виде выброса амплитудой $U_{\text{вых}} = -U_{\text{вх0}} K\Delta_{\text{сп}}$, который будет спадать к нулю с постоянной времени $\tau_1 = 100$ мкс.

10.2.2. Дисперсия электронного шума

В этом разделе приводятся несколько примеров вычисления дисперсии электронного шума, приведенного ко входу СИ. Эта дисперсия характеризует случайную составляющую основной погрешности СИ, и, как упоминалось выше, для снижения общей погрешности измерения приходится почти всегда искать компромисс между динамической погрешностью и погрешностью из-за электронных шумов. Поиск такого компромисса (оптимума) будет показан в последующих примерах этой главы.

Пример 10.9. На входе СИ, модель которого описана в примере 10.2 (рис. 10.8), действует белый шум со СПМ $S_n = S_{n0}^\oplus$ в диапазоне частот $\omega \geq 0$. Определить дисперсию шума на выходе СИ.

Решение. Используя формулу (10.3), получаем дисперсию шума на выходе СИ

$$\begin{aligned} \overline{y^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{n0}^\oplus |G_1(j\omega)|^2 |G_2(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{n0}^\oplus \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_2^2} d\omega = \frac{S_{n0}^\oplus}{4} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2}. \end{aligned}$$

При вычислении использованы интегралы табл. П14.

Пример 10.10. На входе СИ, модель которого описана в примере 10.3, действует белый шум со СПМ $S_n = S_{n0}^\oplus$ в диапазоне частот $\omega \geq 0$. Определить дисперсию шума на выходе СИ.

Решение. Используя формулу (10.3), получаем дисперсию шума на выходе СИ

$$\begin{aligned} \overline{y^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{n0}^\oplus |G_1(j\omega)|^2 |G_2(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{n0}^\oplus \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} \frac{\omega^2 \tau_2^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} d\omega = \frac{S_{n0}^\oplus}{4} \frac{\tau_2}{(\tau_1 + \tau_2) \tau_1}. \end{aligned}$$

При вычислении использованы интегралы табл. П14. При $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ дисперсия шума будет равна

$$\overline{y^2} = \frac{S_{n0}^\oplus}{4} \frac{1}{2\tau}.$$

Пример 10.11. Модель СИ представляет собой последовательное соединение идеального интегратора, ФНЧ и ФВЧ 1-го порядка с постоянными времени $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_2$ соответственно (рис. 10.9). На входе СИ действует белый шум со СПМ $S_n = S_{n0}^\oplus$ в диапазоне частот $\omega \geq 0$. Определить дисперсию шума на выходе СИ:

$$\begin{aligned} \overline{y^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{n0}^\oplus |G_u(j\omega)|^2 |G_1(j\omega)|^2 |G_2(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{n0}^\oplus \frac{1}{\omega^2 C^2} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_2^2} d\omega = \frac{S_{n0}^\oplus}{4C^2} \frac{\tau_2^2}{\tau_1 + \tau_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

При вычислении использованы интегралы табл. П14. При $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ дисперсия шума будет равна

$$\overline{y^2} = \frac{S_{n0}^\oplus}{4C^2} \frac{\tau}{2}. \quad (2)$$

10.2.3. Расчет динамических погрешностей

В этом разделе приводятся примеры по расчету динамических погрешностей СИ для различных входных сигналов.

Пример 10.12. При измерении температуры T человеческого тела типовым ртутным термометром с делением шкалы $0,1^\circ\text{C}$ нарастание показаний термометра L происходит по закону (см. рис. 10.11)

$$\tilde{L} = T_0 \tilde{K} [1 - \exp(-t_n/\tau)], \quad (1)$$

где $\tilde{L} = L \pm \Delta L$ — показания измеренной температуры с учетом погрешности фиксации показаний; $\tilde{K} = K_N \pm \Delta K$ — статический коэффициент преобразования с учетом отличия его от номинального значения; $\tilde{t}_n = t_n \pm \Delta t_n$ — время измерения от момента прикосновения термометра к телу человека до момента снятия показаний с учетом погрешности фиксации этого момента; $\tilde{\tau} = \tau_N \pm \Delta \tau$ — постоянная времени ИПХ термометра, соответствующей динамической характеристике интегрирующей цепочки (пример 10.1), с учетом отличия ее от номинальной τ_N ; T_0 — действительная температура человека.

Определить:

1. Действительную температуру человеческого тела, а также наибольшее значение основной погрешности измерения температуры, если

- показания термометра равны $L = 38^\circ\text{C}$, а максимальная погрешность снятия показаний $\Delta L = \pm 0,025^\circ\text{C}$;
- номинальный коэффициент преобразования температуры человеческого тела в показаниях термометра $K_N = 1$, предел допускаемого отклонения K_N от номинала $\Delta K = \pm 0,002$;
- время измерения $t_n = 300$ с, а его разброс не превышает $\Delta t_n = \pm 10$ с;
- номинальная постоянная времени $\tau_N = 60$ с, а ее разброс для данного типа термометров не превышает $\Delta \tau = \pm 3$ с.

2. Получить условие, накладываемое на время измерения, которое позволяет отнести процедуру измерения температуры тела к динамическим измерениям. Вычислить статическую погрешность.

3. Оценить СКО показаний термометра, если для данного типа термометров СКО снятия показаний $\sigma_L = 0,01^\circ\text{C}$, СКО коэффициента преобразований $\sigma_K = 0,001$, СКО времени измерений $\sigma_t = 5$ с, СКО постоянной времени динамической характеристики $\sigma_\tau = 1$ с.

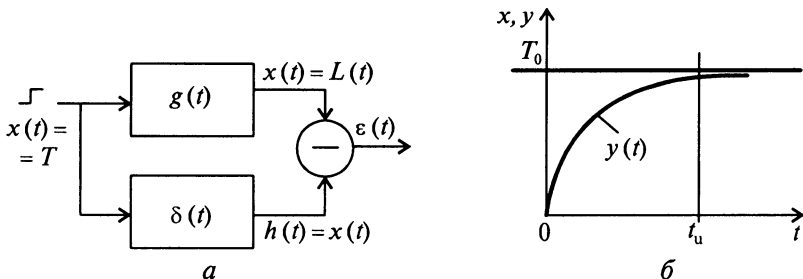


Рис. 10.11. Модель для определения погрешности измерения постоянной температуры (а), эпюры сигналов (б)

Решение. 1. Температуру тела определим по формуле

$$\tilde{T}_0 = \frac{L}{K_N(1 - e^{-t_n/\tau_N})} = \frac{38}{1,0(1 - e^{-5})} = \frac{38}{(1 - 0,00674)} \approx 38,26^\circ\text{C}. \quad (2)$$

Отличие действительной температуры от показаний термометра в данном случае обусловлено ограниченностью времени измерения, т.е. динамической погрешностью, которая составляет $-0,26^\circ\text{C}$.

Определим максимальную систематическую основную погрешность результата измерения, используя консервативный подход, т.е. суммируя все погрешности по модулю. Для этого вначале определим полный дифференциал (2)

$$d\tilde{T}_0 = \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial L} \Delta L + \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial K} \Delta K + \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial t_n} \Delta t_n + \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \tau} \Delta \tau,$$

$$\frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial L} = \frac{1}{K_N W}; \quad \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial K} = -\frac{L}{K_N^2 W}; \quad \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial t_n} = -\frac{L}{K_N W^2 \tau_N} \exp\left(-\frac{t_n}{\tau_N}\right), \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \tau} = \frac{L}{K_N W^2} \frac{t_n}{\tau_N^2} \exp\left(-\frac{t_n}{\tau_N}\right); \quad W = 1 - \exp\left(-\frac{t_n}{\tau_N}\right). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) и переходя к относительной форме записи погрешности, получаем

$$\frac{\Delta \tilde{T}_0}{\tilde{T}_0} = \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta K}{K_N} \right| + \frac{1}{(e^{t_n/\tau_N} - 1)} \frac{t_n}{\tau_N} \left(\left| \frac{\Delta \tau}{\tau_N} \right| + \left| \frac{\Delta t_n}{t_n} \right| \right). \quad (5)$$

Подставив в (5) номинальные значения параметров и их пределы допустимых отклонений, определим относительную максимальную погрешность результата измерения температуры термометра, обусловленную перечисленными выше факторами:

$$\left| \frac{\Delta \tilde{T}_0}{\tilde{T}_0} \right| = \frac{0,025}{38} + \frac{0,002}{1,0} + \frac{1}{e^{300/60} - 1} \frac{300}{60} \left(\frac{3}{60} + \frac{10}{300} \right) =$$

$$= (6,6 + 20,0 + 28,0) \cdot 10^{-4} = 54,6 \cdot 10^{-4}, \quad (6)$$

а абсолютная максимальная погрешность (предел погрешности) измерения температуры тела человека термометров данного типа при времени измерения 300 с будет равна

$$(\Delta \tilde{T}_0)_{\max} = 54,6 \cdot 10^{-4} \tilde{T}_0 = 54,6 \cdot 10^{-4} \cdot 38,26 \approx 0,21^\circ \text{C}. \quad (7)$$

С учетом поправки на динамическую погрешность действительное значение температуры с вероятностью, близкой к единице, будет находиться в пределах $(38,3 \pm 0,2)^\circ \text{C}$.

Анализ (5) и (6) показывает, что наибольший вклад в погрешность измерения вносит отклонение коэффициента преобразования термометра от номинального (составляющая основной систематической погрешности), а также погрешность, обусловленная динамическими характеристиками СИ. Значимость третьего слагаемого определяется временем измерения, и его значение может быть сведено к нулю при достаточно большом времени измерения.

2. Получим условие, которое определяет отнесение измерения к динамическим. Для этого воспользуемся соотношением (8.36). Динамическую погрешность представим в виде двух составляющих. Первая — это составляющая динамической погрешности, которая непосредственно влияет на показания термометра и определяется из соотношения (2)

$$\Delta_{\text{dyn1}} = \tilde{T}_0 - \tilde{T}_0 K_{\text{пр}} [1 - \exp(-t_{\text{и}}/\tau)] = \tilde{T}_0 \exp(-t_{\text{и}}/\tau), \quad (8)$$

и вторая составляющая, приводящая к появлению динамической погрешности из-за разброса параметров $t_{\text{и}}$ и τ , определяющих динамическую характеристику СИ (5):

$$\Delta_{\text{dyn2}} = \frac{1}{\exp(t_{\text{и}}/\tau) - 1} \frac{t_{\text{и}}}{\tau} \left(\frac{\Delta\tau}{\tau} + \frac{\Delta t_{\text{и}}}{t_{\text{и}}} \right) \tilde{T}_0. \quad (9)$$

Условие существенности (8.36) динамической погрешности тогда можно представить в виде

$$0,17 \left[\left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta K_{\text{пр}}}{K_{\text{пр}}} \right) \tilde{T}_0 + \Delta_{\text{dyn1}} + \Delta_{\text{dyn2}} \right] \leq (\Delta_{\text{dyn1}} + \Delta_{\text{dyn2}}) \quad (10)$$

или

$$0,17 \left[\left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta K_{\text{пр}}}{K_{\text{пр}}} \right) \tilde{T}_0 \right] \leq 0,83 (\Delta_{\text{dyn1}} + \Delta_{\text{dyn2}}). \quad (11)$$

Уравнения (10) и (11) представляют собой трансцендентные уравнения относительно $t_{\text{и}}$, решение которых нельзя представить в аналитическом виде. Поэтому решение может быть получено графически или простым перебором значений $t_{\text{и}}$ и определением величины $t_{\text{и}0}$, при котором обеспечивается примерное равенство в (10) или (11).

Анализ показывает, что при времени измерения $t_{\text{и}0} \approx 500$ с и менее можно считать динамическую погрешность существенной, а сами измерения отнести к разряду динамических. При этом $\Delta_{\text{dyn1}} = 0,01^\circ\text{C}$, $\Delta_{\text{dyn2}} = 0,005^\circ\text{C}$. Например, при времени измерения 600 с, т.е. при условии статических измерений, погрешность измерения будет состоять из погрешности считывания показаний $\Delta T_L = 0,025^\circ\text{C}$ и предела основной систематической погрешности $\Delta T_K = 0,076^\circ\text{C}$.

3. Определим СКП для случая, когда для термометров данного типа заданы его статистические характеристики, а именно СКО

каждого из параметров, входящих в формулу (1). Для этого, используя формулу для определения дисперсии косвенных измерений в виде

$$\sigma_T^2 = \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial K}\right)^2 \sigma_K^2 + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t_{\text{и}}}\right)^2 \tau_i^2 + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau}\right)^2 \sigma_\tau^2 \quad (12)$$

и подставляя формулы (4) в (12), получаем

$$\sigma_T^2 = \frac{L^2}{K_N^2 W^2} \left[\frac{\sigma_L^2}{L^2} + \frac{\sigma_K^2}{K^2} + \frac{t_{\text{и}}^2}{\tau_N^2} \exp\left(-\frac{2t_{\text{и}}}{\tau_N}\right) \left(\frac{\sigma_i^2}{t_{\text{и}}^2} + \frac{\sigma_\tau^2}{\tau_N^2} \right) \right]. \quad (13)$$

Подставляя значения величин, входящих в формулу (13), при $t_{\text{и}} = 300$ с получаем

$$\sigma_T^2 = 1444 [7,0 \cdot 10^{-8} + 10^{-6} + 25 \cdot 10^{-10} \cdot 5,4 \cdot 10^{-4}] \approx 0,0014^\circ\text{C}^2, \\ \delta_T = 0,037^\circ\text{C}.$$

Пример 10.13. Определить погрешность линейных искажений, вносимых коллиматором с ИПХ в виде

$$g_K(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta_K}, & |t| \leq \Delta_K, \\ 0, & |t| > \Delta_K, \end{cases} \quad (1)$$

где $2\Delta_K = l_K/v$ — временная развертка коллиматора; l_K — линейные размеры коллиматора вдоль движения изделия; v — скорость движения изделия.

При измерении случайного изменения толщины изделия, характеризующегося спектральной плотностью мощности

$$S_x(\omega) = 2\alpha\sigma_x^2/(\alpha^2 + \omega^2), \quad (2)$$

где σ_x^2 — дисперсия изменения толщины изделия около некоторого среднего значения толщины x_0 ; $\alpha = \tau_x^{-1}$; $\tau_x = l_x/v$ — постоянная времени корреляции, равная линейной корреляции случайного изменения толщины, деленная на скорость движения изделия (временная развертка постоянной корреляции случайного изменения толщины изделия).

Оценить относительную динамическую погрешность искажения случайного сигнала при $\Delta_K = 0,1\tau_x$.

Решение. Для определения погрешности из-за усреднения случайного процесса (2), вносимого коллиматором (1), воспользуемся частотной моделью на рис. 10.4. Для этого с помощью преобразо-

вания Фурье определим АФХ коллиматора, соответствующую ИПХ (1):

$$G_K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_K(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\Delta_K}^{\Delta_K} \frac{1}{2\Delta_K} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\Delta_K} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j\omega} \right) = \frac{\sin \omega \Delta_K}{\omega \Delta_K}. \quad (3)$$

Погрешность вычислим по формуле

$$\overline{\varepsilon_{\text{dyn}}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha\sigma_x^2}{\alpha^2 + \omega^2} \left| 1 - \frac{\sin \omega \Delta_K}{\omega \Delta_K} \right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2\alpha\sigma_x^2}{\alpha^2 + \omega^2} \times$$

$$\times \left(1 - 2 \frac{\sin \omega \Delta_K}{\omega \Delta_K} + \frac{\sin^2 \omega \Delta_K}{(\omega \Delta_K)^2} \right) d\omega =$$

$$= \sigma_x^2 \left[1 - \frac{2}{x} (1 - e^{-x}) + \frac{1}{2x^2} (e^{-2x} + 2x - 1) \right]. \quad (4)$$

Относительная погрешность $(\overline{\delta^2})^{1/2} = (\overline{\varepsilon_{\text{dyn}}^2} / \sigma_x^2)^{1/2}$ при $x = 0,1$ равна 17,6%. Таким образом, случайный сигнал будет сглажен за счет усреднения КС, и СКО, характеризующая это искажение сигнала, оценивается 17,6%.

Пример 10.14. Изделия, характеристики которых (например, плотность, толщина, химический состав) измеряются с помощью просвечивания его источником ионизирующего излучения, движутся на конвейере со скоростью v . Пучок излучения сформирован коллиматором с ИПХ, имеющей в направлении движения вид (1) примера 10.13. Линейные размеры изделия составляют $l_x = 2t_x v > l_K$, где $l_K = 2\Delta_K v$ — линейные размеры коллиматора; $t_x = 1,0$ с, а $\Delta_K = 0,5$ с. Эффективность регистрации излучения первичным преобразователем (ПП) принимается равной единице. Определить:

— зависимость скорости счета, зарегистрированной ПП, от времени;

— общее количество зарегистрированных частиц с момента появления изделия в поле зрения детектора и до момента его ухода из него, если средняя скорость счета на выходе детектора в отсутствии изделия составляет $N_0 = 10^4$ с⁻¹, а при полном перекрытии пучка излучения изделием — $N_x = 10^3$ с⁻¹;

— дисперсию зарегистрированного числа импульсов и относительную случайную погрешность их регистрации.

Решение. 1. Для определения зависимости числа зарегистрированных импульсов $N(t)$ на выходе ПП, необходимо вычислить интеграл свертки двух функций: ИПХ коллиматора и функции поглощения излучения изделием $\varphi_x(t)$ (рис. 10.12, а):

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} N_0, & |t| \geq t_x, \\ N_x, & |t| < t_x. \end{cases} \quad (1)$$

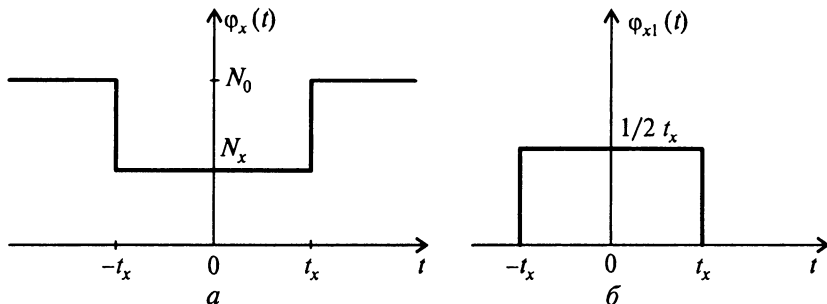


Рис. 10.12. Функции $\varphi_x(t)$ и $\varphi_{x1}(t)$

Для того чтобы использовать результаты вычислений интеграла свертки, приведенные в гл. 2, заменим функцию $\varphi_x(t)$ другой (обратной) функцией $\varphi_{x1}(t)$, (рис. 10.12, б):

$$\varphi_{x1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t_x}, & |t| \leq t_x, \\ 0, & |t| > t_x, \end{cases} \quad (2)$$

а зависимость $N(t)$ представим в виде

$$N(t) = N_0 - (N_0 - N_x) \int_0^t \varphi_{x1}(\xi) g_K(t - \xi) d\xi. \quad (3)$$

После соответствующих преобразований получим, что зависимость скорости счета на выходе первичного преобразователя $N(t)$ имеет форму трапеции (рис. 10.13):

$$N(t) = N_0 - \frac{N_0 - N_x}{2\Delta_K} \begin{cases} 0, & t < -(\Delta_K + t_x), \\ (\Delta_K + t_x) + t, & -(\Delta_K + t_x) \leq t \leq -(t_x - \Delta_K), \\ 2\Delta_K, & -(t_x - \Delta_K) < t < (t_x - \Delta_K), \\ (\Delta_K + t_x) - t, & (t_x - \Delta_K) \leq t \leq (t_x + \Delta_K), \\ 0, & t > (t_x + \Delta_K). \end{cases} \quad (4)$$

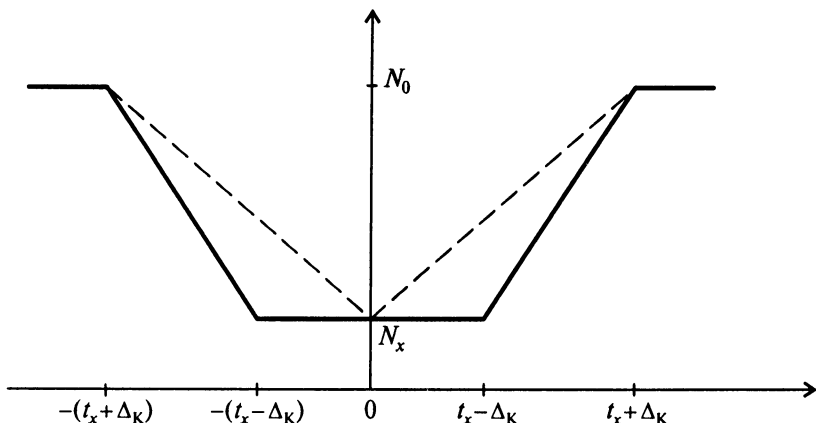


Рис. 10.13. Зависимость скорости счета $N_x(t)$, регистрируемой средством измерения (штриховая линия — зависимость при $t_x = \Delta_K$)

2. Определим среднее суммарное количество импульсов N_Σ , зарегистрированных ПП от момента времени, соответствующего появлению изделия в поле зрения детектора, $t_1 = -(\Delta_K + t_x)$ до момента времени ухода изделия из поля зрения детектора $t_2 = (\Delta_K + t_x)$. Поскольку общее время «видимости» изделия детектором равно $2(\Delta_K + t_x)$, то

$$N_\Sigma = 2(\Delta_K + t_x)N_x + 2 \cdot 0,5 \cdot 2\Delta_K(N_0 - N_x) = N_x 2t_x + N_0 2\Delta_K. \quad (5)$$

После подстановки в (5) $N_x = 10^3 \text{ с}^{-1}$, $N_0 = 10^4 \text{ с}^{-1}$, $t_x = 1,0 \text{ с}$, $\Delta_K = 0,5 \text{ с}$ получим $N_\Sigma = 12 \cdot 10^3$ имп. Сравним общее число зарегистрированных импульсов без изделия и при прохождении изделием позиции контроля. Без изделия число зарегистрированных импульсов составит $N_{\Sigma 0} = 2(\Delta_K + t_x)N_0 = 30 \cdot 10^3$ имп., т.е. перепад числа зарегистрированных импульсов составляет 2,5 раза.

3. Дисперсия числа зарегистрированных импульсов равна $12 \cdot 10^3$ имп. Результат измерения при доверительной вероятности $P = 0,95$ можно записать в виде

$$Q_N = 1,2 \cdot 10^4 \pm 2\sqrt{1,2 \cdot 10^4} = 120,0 \cdot 10^2 \pm 2,2 \cdot 10^2 \text{ имп.},$$

и относительная погрешность будет равна 0,18%.

Примечания. 1. Для удобства вычислений отсчет времени производится относительно середины изделия. Момент отсчета времени может быть «включен», например, с момента появления изделия в поле зрения коллиматора. Однако это не изменит окончательных результатов по оценке погрешности, полученной в настоящем примере.

2. Соотношения между величинами Δ_K и t_x должны выбираться в каждом конкретном случае, поскольку увеличение Δ_K увеличивает долю сквозного («прострельного») излучения и таким образом уменьшает перепад между $N_{\Sigma 0}$ и N_Σ .

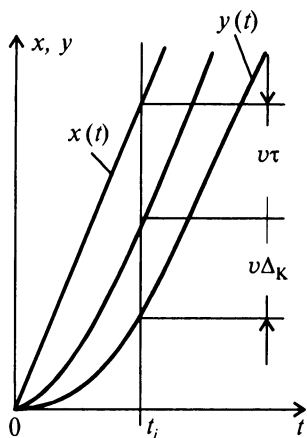


Рис. 10.14. Изменение детерминированного (линейного) сигнала под влиянием коллиматора и вторичного преобразователя

Пример 10.15. На вход СИ с КС длиной l_K поступает линейно изменяющийся сигнал $x(t) = vt$, где v — скорость перемещения детектора относительно измеряемого изделия (рис. 10.14). Определить динамическую погрешность линейных искажений, обусловленную коллиматором, если после полного перекрытия изделием коллиматора отсчет показаний $y(t)$ начинается

- 1) с точки l_K от начала изделия, т.е. с правого края коллиматора;
- б) с точки $l_K/2$ от начала изделия, т.е. с середины коллиматора.

Решение. 1. В случае, когда начало отсчета соответствует l_K , при вычислении интеграла свертки необходимо использовать ИПХ коллиматора в виде

$$g_K(t) = \begin{cases} 1/2 \Delta_K, & 0 \leq t \leq 2\Delta_K, \\ 0, & t < 0, t > 2\Delta_K, \end{cases} \quad (1)$$

где $2\Delta_K = l_K/v$.

Поскольку ИПХ коллиматора имеет прямоугольный вид (1), результирующее воздействие его определим сначала для ИПХ в виде скачка, возникающего в момент времени $t = 0$, а затем для ИПХ в виде скачка, возникающего в момент времени $t = 2\Delta_K$. Окончательный результат получаем, вычитая из первого результата второй:

$$y_{1K}(t) = \int_0^t x(t - \xi) g_K(\xi) d\xi = \int_0^t v(t - \xi) \frac{1}{2\Delta_K} d\xi = \frac{vt^2}{4\Delta_K}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y_{2K}(t) &= \int_{2\Delta_K}^t x(t - \xi) g_K(\xi) d\xi = \\ &= \int_{2\Delta_K}^t v(t - \xi) \frac{1}{2\Delta_K} d\xi = \frac{vt^2}{4\Delta_K} - vt + v\Delta_K; \end{aligned} \quad (3)$$

$$y(t) = y_{1K}(t) - y_{2K}(t) = vt - v\Delta_K. \quad (4)$$

Погрешность, вносимую КС, определим из соотношения

$$\theta_K = x(t) - y(t) = v\Delta_K \text{ при } t > 2\Delta_K. \quad (5)$$

2. В случае, когда начало отсчета соответствует $l_K/2$, при вычислении интеграла свертки необходимо использовать ИПХ КС в виде

$$g_K(t) = \begin{cases} 1/2 \Delta_K, & |t| \leq \Delta_K, \\ 0, & |t| > 2\Delta_K. \end{cases} \quad (6)$$

Вычисляя, как и выше (см. (2)–(4)), выходной сигнал при воздействии на вход СИ двух скачков, смещенных друг относительно друга на величину $\Delta_K - (-\Delta_K) = 2\Delta_K$, получаем

$$y_{1K}(t) = \int_{-\Delta_K}^t x(t-\xi) g_K(\xi) d\xi = \int_{-\Delta_K}^t v(t-\xi) \frac{1}{2\Delta_K} d\xi = \frac{vt}{2} - \frac{v\Delta_K}{4}; \quad (8)$$

$$y_{2K}(t) = \int_{\Delta_K}^t x(t-\xi) g_K(\xi) d\xi = \int_{\Delta_K}^t v(t-\xi) \frac{1}{2\Delta_K} d\xi = -\frac{vt^2}{2} + \frac{v\Delta_K}{4}; \quad (9)$$

$$y(t) = y_{1K}(t) - y_{2K}(t) = vt. \quad (10)$$

Погрешность, вносимую КС, определим из соотношения

$$\theta_K = x(t) - y(t) = 0 \text{ при } t > \Delta_K. \quad (11)$$

Примечания. 1. В случае 1 имеет место постоянная систематическая динамическая погрешность (5), которая может быть устранена введением поправки $v\Delta_K$. Эта погрешность возникает из-за того, что усредненное значение параметра, которое «видит» датчик через коллиматор на длине l_K (или за время $2\Delta_K$), соответствует середине коллиматора.

2. В случае 2 отсчет производится относительно середины коллиматора, поэтому систематическая погрешность равна нулю (11). Однако это имеет место только для сигнала, изменяющегося по линейному закону.

Пример 10.16. При измерении характеристик изделия, непрерывно движущегося на конвейере, на вход СИ с ИПХ в виде (рис. 10.15)

$$g(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (1)$$

поступают сигналы прямоугольной формы постоянной длительности t_n и амплитудой x_0 . Измерение амплитуды импульса происходит в присутствии белого шума со СПМ $S_n(\omega) = S_{n0}$ ($-\infty < \omega < \infty$). Определить условия измерения, при которых систематическая и случайная погрешности будут минимальны при заданных параметрах сигнала t_n и схемы τ .

Решение. Используя интеграл свертки, получаем выражение для сигнала на емкости C (рис. 10.15, б):

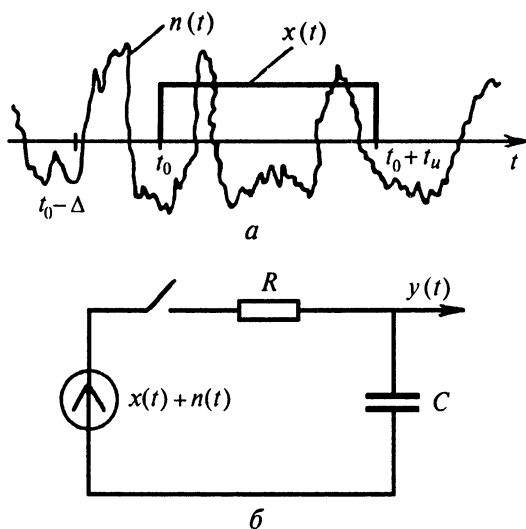


Рис. 10.15. Воздействие прямоугольного импульса и шума (а) на RC-цепь (б)

$$y(t) = \int_0^t x_0 \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi = x_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (2)$$

Сигнал (2) достигает своего наибольшего значения при $t = t_n$

$$y_{\max}(t_n) = x_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t_n}{\tau}\right) \right]. \quad (3)$$

Определим дисперсию шума на емкости C (см. табл. П14)

$$D_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{n0} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} d\omega = 2 \frac{S_{n0}}{2\pi\tau} \int_0^{\infty} \frac{d(\omega\tau)}{1 + (\omega\tau)^2} = \frac{S_{n0}}{2\tau}. \quad (4)$$

Отношение наибольшего значения выходного сигнала, которое будет иметь место при времени измерения, равном длительности сигнала, будет равно

$$\eta\left(\frac{t_n}{\tau}\right) = \frac{x_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t_n}{\tau}\right) \right]}{\sqrt{S_{n0}/2\tau}} = \sqrt{\frac{W}{S_{n0}}} \rho\left(\frac{t_n}{\tau}\right), \quad (5)$$

где $\rho\left(\frac{t_n}{\tau}\right) = \rho(\mu) = \sqrt{2\mu} (1 - e^{-\mu})$, $\mu = t_n/\tau$, $W = x_0^2 t_n$ — энергия импульса. Графическое решение трансцендентного уравнения $\rho(\mu)$ показывает, что оно имеет максимум при $t_n = 1,25\tau$. При этом влияние шумов на погрешность измерения минимально и $\eta(\mu = 1,25) = 0,9$.

Систематическая погрешность при этом будет равна

$$y(t_{\text{и}}) - x_0 = \exp(-t_{\text{и}}/\tau) = \exp(-1,25) = 0,29.$$

Это довольно высокая погрешность (29%) по отношению к исходному значению x_0 . Возможны различные подходы при решении конкретной технической задачи для уменьшения погрешности измерения:

— если x_0 изменяется незначительно, то можно частично компенсировать (исключить) эту погрешность;

— поскольку длительность $t_{\text{и}}$ не изменяется (например, размеры изделий идентичны), то систематическая погрешность исключается с помощью градуировки;

— если шум незначителен (сигнал не «тонет» в шумах), то можно оптимизировать измерение исходя из требуемого значения систематической погрешности, уменьшив с этой целью постоянную времени τ ;

— использование стробирования, т.е. включение измерения в момент появления импульса (перепада) и прекращение измерения в момент его окончания [34].

Пример 10.17. На входе СИ имеется линейно изменяющийся сигнал вида (рис. 10.14)

$$x(t) = \begin{cases} vt, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где v — скорость нарастания сигнала, м/с; t — текущее время, с. Определить систематическую и случайную погрешности измерения при следующих условиях (см. модель для определения погрешностей на рис. 10.3):

— на входе СИ также действует белый шум со СПМ $S_n(\omega) = S_{n0}$;

— ИПХ вторичного преобразователя СИ равна

$$g_{\text{ВП}}(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right); \quad (2)$$

— ИПХ коллиматора имеет вид дельта-функции $g_{\text{К}}(t) = \delta(t)$;

— ИПХ идеального канала сравнения $g_0(t) = \delta(t)$, т.е. в настоящей задаче необходимо произвести непосредственное измерение ФВ $x(t)$.

Решение. Случайная составляющая погрешности, обусловленная электронным шумом так же, как и в примере 10.16, равна $S_{n0}/2\tau$. Систематическая составляющая погрешности, обусловленная линейными искажениями из-за коллиматора и вторичного преобразователя СИ, может быть вычислена по формуле (10.1):

$$\varepsilon_{\text{dyn}}(t) = \left| x(t) - y(t) \right| = \left| x(t) - \int_0^t x(\xi) g_{\text{К,ВП}}(t - \xi) d\xi \right|, \quad (3)$$

где $g_{\text{К,ВП}}(t)$ — свертка ИПХ коллиматора и вторичного преобразователя. Поскольку $g_{\text{К}}(t) = \delta(t)$, то $g_{\text{К,ВП}}(t) = g_{\text{ВП}}(t)$.

Подставляя в (3) формулы (1) и (2), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{dyn}}(t) &= \left| vt - \int_0^t v\xi \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau}\right) d\xi \right| = \\ &= v\tau \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau}\right) \right] \rightarrow v\tau \text{ при } t \gg \tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, общую погрешность измерения сигнала можно представить в виде

$$\varepsilon_{\Sigma} = v\tau \pm K(P) \sqrt{S_{n0}/2\tau}. \quad (5)$$

Из (5) видно, что систематическая и случайная погрешности по-разному зависят от постоянной времени τ и при некотором значении τ возможно получение минимума суммарной погрешности.

Пример 10.18. Получить выражение для суммарной погрешности измерения распределения толщины по длине изделия, а также условия оптимального измерения, если толщина изделия, изменяется случайным образом. Данные для расчета следующие:

- АКФ отклонения толщины изделия от среднего значения

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad (1)$$

где $\alpha^{-1} = \tau_x = l_x/v$; l_x — длина корреляции; v — скорость движения изделия относительно детектора; σ_x^2 — дисперсия изменения толщины. В соответствии с (10.16) этой АКФ соответствует СПМ сигнала в виде

$$S_x(\omega) = 2\alpha\sigma_x^2 / (\alpha^2 + \omega^2); \quad (2)$$

- мешающим фактором является белый шум со СПМ $S_{n0}^{\oplus} = 2S_{n0}$;
- измерительный сигнал поступает на СИ с АФХ

$$G(j\omega) = K\beta / (\beta + j\omega), \quad (3)$$

что соответствует ИПХ в виде $g(t) = K\beta e^{-\beta t}$ (см. (10.12)), где K — коэффициент преобразования СИ, который в рамках настоящей задачи $K = 1$; $\beta^{-1} = \tau$ — постоянная времени интегрирования СИ;

• измерение осуществляется узким коллиматором, для которого выполняются условия $\tau \gg \Delta_K$, $\tau_x \gg \Delta_K$, при этом можно считать, что ИПХ КС $g_K(t) = \delta(t)$;

• АФХ идеального канала сравнения $G_0(j\omega) = 1$.

Решение. Для определения случайной погрешности измерения воспользуемся частотной моделью СИ (рис. 10.4), а также соотношением (10.5)

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_{\text{dyn}}^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) |1 - G(j\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{n0}^{\oplus}}{2} |G(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha\sigma_x^2}{\alpha^2 + \omega^2} \left| 1 - \frac{\beta}{\beta - j\omega} \right|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{n0}^{\oplus}}{2} \left| \frac{\beta}{\beta + j\omega} \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2\alpha\sigma_x^2}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{\omega^2}{\beta^2 + \omega^2} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S_{n0}^{\oplus}}{2} \frac{\beta^2}{\beta^2 + \omega^2} d\omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Осуществив необходимые преобразования в (4) и используя табличные значения интегралов (табл. П14), получим

$$\overline{\varepsilon_{\text{dyn}}^2} = \sigma_x^2 \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + S_{n0}^{\oplus} \frac{\beta}{4}. \quad (5)$$

Введя обозначения

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\tau_x}{\tau}; \quad \gamma^2 = \frac{S_x(\omega = 0)}{S_{n0}} = \frac{4\sigma_x^2\tau_x}{S_{n0}^{\oplus}}; \quad \overline{\delta^2} = \frac{\varepsilon_{\text{dyn}}^2}{\sigma_x^2}, \quad (6)$$

после соответствующих преобразований получим выражение для квадрата относительной погрешности измерения в виде

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{1 + \xi} + \frac{\xi}{\gamma^2}. \quad (7)$$

Эта погрешность зависит от отношения мощности сигнала к шуму γ^2 и соотношения ξ , которое определяет степень различия между постоянной корреляции измеряемой ФВ и постоянной времени интегрирования СИ. Минимум относительной погрешности найдем из (7), приравняв первую производную по переменной ξ нулю:

$$\xi_0 = \gamma - 1 \approx \gamma \quad \text{при} \quad \gamma \gg 1. \quad (8)$$

При этом минимальное значение квадрата относительной случайной погрешности будет равно

$$\overline{\delta_0^2} \approx 2/\gamma \quad \text{при} \quad \gamma \gg 1. \quad (9)$$

Характерной особенностью этих выражений является их зависимость только от отношения сигнал/шум γ^2 . Используя вышеприведенные обозначения, представим соотношения (8) и (9) в виде

$$\xi_0 = \gamma = \tau_x / \tau; \quad \overline{\delta_0^2} = 2\tau / \tau_x. \quad (10)$$

Из этих соотношений видно, что только при $\tau \ll \tau_x$ можно достичь большого отношения сигнал/шум и, соответственно, малой погрешности измерения.

Пример 10.19. При характеристиках сигнала и СИ, описанных в примере 10.18, определить поток ионизирующего излучения от радионуклидного источника гамма-излучения америция-241, которым должен просвечиваться листовой прокат стали, чтобы относительная случайная погрешность измерения не превышала 10%, используя следующие дополнительные условия:

- скорость движения проката $v = 1$ м/с;
- пространственная длина корреляции толщины $l_x = 10^{-2}$ м;
- СКО толщины изделия от среднего значения составляет $\sigma_x = 2 \cdot 10^{-5}$ м;

— постоянная времени интегрирования СИ $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ с;

— СПМ шума потока ионизирующего излучения приведена ко входу СИ и определяется по формуле [1] $S_{n0}^{\oplus} = 2/\mu_l N$, где $\mu_l = 10$ см $^{-1}$ — линейный коэффициент поглощения ионизирующего излучения в стали для энергии гамма-излучения америция-241; N — скорость счета, регистрируемая СИ.

Решение. Из соотношений (8) и (9) примера 10.18 определим отношение сигнал/шум и отношение ξ_0 , которые необходимо обеспечить для осуществления оптимальных условий измерения $\gamma = 2 \cdot 10^2$, $\xi_0 = 2 \cdot 10^2$. Определим постоянную времени корреляции $\tau_x = l_x / v = 10^{-2}$ с, а также постоянную времени интегрирования СИ $\tau = \tau_x / \xi_0 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ с.

Используя соотношение (6) примера 10.18, получаем, что допустимый уровень шума

$$S_{n0}^{\oplus} = 4\sigma_x^2 \tau_x / \gamma_2 = 4 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2 \cdot \text{с}.$$

Поскольку измерение толщины изделия производится с помощью просвечивания изделия гамма-излучением, то для определения необходимой регистрируемой скорости счета N_x используем соотношение, связывающее между собой регистрируемую скорость счета N_x , СПМ шума S_{n0}^{\oplus} , приведенную к измеряемой величине, и линейный коэффициент поглощения гамма-излучения от америция-241 ($\mu_l = 10$ см $^{-1}$):

$$N_x = 2/S_{n0}^{\oplus} \mu_t^2 = 5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, для обеспечения относительной погрешности воспроизведения толщины профиля листа стали с относительной погрешностью менее 10% при движении его со скоростью 1 м/с, необходимо СИ с быстродействием около 50 мкс и потоком гамма-излучения порядка 5 ГГц.

Пример 10.20. Модель СИ, предназначенного для измерения дельта-импульсов слабых зарядов, представлена на рис. 10.9. Импульс заряда Q интегрируется на входной емкости СИ и далее для увеличения отношения амплитуды сигнала к среднеквадратическому значению шума проходит через фильтры верхних (постоянная времени фильтра τ_1) и нижних частот (постоянная времени фильтра τ_2). Мешающими факторами являются параллельный и последовательный электронные шумы, для которых СПМ, приведенные ко входу СИ, соответственно равны $S_p = 4kT/R_p$ и $S_s = 4kTR_s$, где R_p и R_s — соответственно эквивалентные шумовые сопротивления параллельного и последовательного шумов [1, 21, 25].

Получить аналитическое выражение для минимального заряда, которое способно надежно зарегистрировать это СИ, если известно, что максимальное отношение сигнал/шум (минимальная погрешность, обусловленная влиянием электронного шума) обеспечивается при равенстве постоянных времени $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$.

Определить основные параметры модели, если на входе СИ кремниевый полупроводниковый детектор, энергия образования одной электронно-дырочной пары $\epsilon_1 = 3,5$ эВ; эквивалентная емкость на входе СИ $C = 20$ пФ; $R_p = 100$ МОм; $R_s = 100$ Ом; $T = 300$ К; константы: постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град; заряд электрона $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $e = 2,7$.

Решение. Используя результаты, полученные в примере 10.4 (формулы (2) и (3)), запишем сигнал напряжения на выходе модели на рис. 10.9 (табл. П13):

$$U_{\text{вых}}(t) = U_0 \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right]. \quad (1)$$

При $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$ выходной сигнал будет иметь вид

$$U_{\text{вых}}(t) = U_0 \frac{t}{\tau_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right), \quad (2)$$

а максимум этого сигнала при $t = \tau_0$ имеет величину U_0/e , где $e = 2,7$.

Используя результаты вычисления дисперсии шумов на выходе СИ, полученные в примерах 10.9–10.11, запишем выражения для дисперсии параллельного и последовательного шумов на выходе СИ применительно к настоящей задаче:

$$U_p^2 = \frac{kT}{R_p C^2} \frac{\tau_0}{2}, \quad (3)$$

$$\overline{U_s^2} = \frac{kTR_s}{2\tau_0}. \quad (4)$$

Суммарное значение дисперсии шума на выходе усилителя будет

$$\overline{U_\Sigma^2} = \overline{U_p^2} + \overline{U_s^2} = \frac{kT}{2C^2 R_p} \tau_0 + \frac{kTR_s}{2} \frac{1}{\tau_0}. \quad (5)$$

Поскольку для схемы на рис. 10.9 коэффициенты преобразования всех промежуточных преобразователей приняты равными единице, дисперсия шума на выходе усилителя (или в точке подсоединения детектора) также равна (5). Из выражения (5) видно, что составляющие дисперсии шума по-разному зависят от постоянной времени τ_0 . Взяв первую производную от дисперсии (5) по переменной τ_0 , получим, что минимальное значение дисперсии имеет место при

$$\tau_0 = C\sqrt{R_p R_s}. \quad (6)$$

При этом минимальное значение дисперсии шума будет

$$\left(\overline{U_\Sigma^2}\right)_{\min} = \frac{kT}{C} \sqrt{\frac{R_s}{R_p}}. \quad (7)$$

Полагая, что шум имеет нормальное распределение амплитуд, результат измерения на выходе усилителя можно записать в виде

$$U_{\text{вых}}(E_0) = \frac{Q_0}{C_\Sigma e} \pm 2 \sqrt{\frac{kT}{C_\Sigma}} \sqrt[4]{\frac{R_s}{R_p}} \quad \text{при } P = 0,95, \quad (8)$$

где Q_0 — величина заряда на выходе детектора (или на емкости C), соответствующая энергии ионизирующей частицы E_0 , потерянной в детекторе. Результат измерения при той же доверительной вероятности, приведенный к измеряемой энергии, записывается в виде

$$E = E_0 \pm 2 \left(\sqrt{\frac{kT}{C_\Sigma}} \sqrt[4]{\frac{R_s}{R_p}} \right) \frac{1}{K_N},$$

где K_N — номинальный коэффициент преобразования измеряемой величины в выходной сигнал, который в данном случае равен

$$K_N = \frac{U_{\text{вых}}}{E_0} = \frac{E_0 q}{\varepsilon_d} \frac{1}{e} \frac{1}{C} \frac{1}{E_0} = \frac{q}{\varepsilon_d C e} =$$

$$= \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{3,5 \cdot 20 \cdot 10^{-12} \cdot 2,7} = 8,46 \cdot 10^{-10} \text{ В/эВ.} \quad (9)$$

Используя (7), определяем предельную чувствительность способа измерения энергии как величину, втрое превышающую минимальное значение среднеквадратического шума:

$$E_{\min} = 3 \sqrt{\frac{kT}{C_\Sigma}} \sqrt[4]{\frac{R_s}{R_p}} \frac{1}{K_N}. \quad (10)$$

Оценим параметры установки для измерения энергии ионизирующего излучения при параметрах модели СИ, приведенных в условиях примера. Используя формулы (6), (7), (11), (12), получаем $K_N = 8,46 \cdot 10^{-10} \text{ В/эВ}$, $\sqrt{\left(U_\Sigma^2\right)_{\min}} = 4,55 \cdot 10^{-7} \text{ В}$, $\tau_0 = 2 \text{ мкс}$, $E_{\min} = 1,61 \text{ кэВ}$ (или $Q_{\min} = 7,4 \cdot 10^{-17} \text{ Кл}$ или $(U_{\min})_{\text{вх}} = 3,7 \text{ мкВ}$). Относительная погрешность $\delta = \sigma/E_0 = 0,54\%$.

Примечания. 1. В примере 10.20 решается задача измерения энергии ионизирующего излучения путем интегрирования заряда на выходе детектора, образовавшегося в результате взаимодействия (ионизации) частицы (кванта) ионизирующего излучения с материалом рабочего объема детектора. Идеальный канал преобразования (см. рис. 10.9) может быть представлен идеальным интегрирующим звеном. Это звено в реальной схеме выполняет роль входной цепи при $R_p C \gg 1$, а последующие цепи выполняют роль фильтров, повышающих отношение сигнал/шум. Таким образом, в примере решается задача оптимизации измерения напряжения на емкости C в условиях мешающих шумов, т.е. задача снижения погрешности измерения.

2. В подобных задачах по измерению параметров сигналов, вероятность появления которых определяется пуассоновским характером потока, возникает ряд погрешностей, которые непосредственно можно считать динамическими (второй тип динамических погрешностей, см. разд. 10.1). С увеличением скорости счета числа импульсов в потоке Пуассона увеличивается вероятность частичного перекрытия соседних импульсов, а также попадания последующего импульса на отрицательный выброс предыдущего (эффект смещения нулевой линии). Эти явления приводят к увеличению погрешности при оценке измеряемой амплитуды импульсов и могут проявляться уже при средних скоростях счета более 10^3 с^{-1} (рис. 10.16) Эти искажения характеризуются, как правило, среднестатистическими параметрами и не могут быть напрямую отнесены к погрешностям линейных искажений.

3. Имеющие место в этой задаче погрешности линейных искажений при преобразовании полезного сигнала линейными цепями исключаются с помощью градуировки.



Рис. 10.16. Смещение нулевой линии в спектрометре и искажение амплитуды сигнала

Пример 10.21. Определить систематическую и случайную погрешности, возникающие из-за смещения нулевой линии вследствие влияния разделительной RC -цепи с постоянной времени τ_{RC} , включенной между выходом усилителя и входом АЦП (см. примечание 2 к примеру 10.20, рис. 10.16). Определить также влияние постоянной времени τ_{RC} на эти погрешности. Получить оценки при амплитуде сигнала $U_0 = 10$ В, длительности импульсов $t_{и} = 1$ мкс, $\tau_{RC} = 400$ мкс и средней скорости счета $N = 2 \cdot 10^4$ имп./с.

Решение. Для упрощения задачи будем считать, что на вход RC -цепи поступают однополярные импульсы амплитудой U_0 и длительностью $t_{и}$, которые после прохождения RC -цепи искажаются из-за появления выброса противоположной полярности. Амплитуда выброса, определяемая зарядом емкости C в течение времени $t_{и}$, будет равна $U_B = U_0 t_{и} / \tau_{RC}$, где τ_{RC} — постоянная времени спада выброса экспоненциальной формы.

Для определения математического ожидания и дисперсии смещения нулевой линии для импульсов, распределенных во времени по закону Пуассона, используем формулы Кэмпбэлла [1, 25]:

$$\bar{U}_{см} = N \int_0^{\infty} U_B \exp\left(\frac{-t}{\tau_{RC}}\right) dt = N \tau_{RC} U_B, \quad (1)$$

$$D_{см} = N \int_0^{\infty} U_B^2 \exp\left(\frac{-2t}{\tau_{RC}}\right) dt = \frac{N}{2} \tau_{RC} U_B^2. \quad (2)$$

Используя ранее приведенное выражение для амплитуды выброса, получаем

$$\bar{U}_{см} = N t_{и} U_0. \quad (3)$$

$$D_{см} = N t_{и}^2 U_0^2 / 2 \tau_{RC}. \quad (4)$$

Подставив значения для входящих в выражения (3) и (4) параметров, определим $\bar{U}_{см} = 200$ мВ, $D_{см} = 0,25 \cdot 10^{-2}$ В², $\sigma_n = \sqrt{D_{см}} = 50$ мВ.

Относительное смещение энергетического пика (составляющая основной систематической погрешности) будет равно $\delta = \bar{U}_{\text{см}}/U_0 = 2\%$. Видно, что это смещение нулевой линии и, соответственно, погрешность не зависит от постоянной времени τ_{RC} , в то время как случайная составляющая погрешности уменьшается с увеличением τ_{RC} .

Если регистрируемая энергия равна 1000 кэВ, то при малой скорости счета в 1024-канальном амплитудном анализаторе с разрешением в 1 кэВ/канал = 10 мВ/канал в 1000-м канале будет набираться энергетический пик. При увеличении скорости счета N положение пика будет смещаться и при $N = 2 \cdot 10^4$ имп./с он переместится в 980-й канал. При этом размытие пика, характеризующее шириной на половине высоты пика, будет равно $\Delta = 2,36\sigma_{\text{см}} = 2,36 \cdot 5 \approx 12$ кэВ или 12 каналов.

Пример 10.22. На сканирующей установке измеряется распределение плотности по длине тепловыделяющего элемента, представляющего собой трубку из специального сплава, заполненную урановым топливом.

Разработать модель для расчета динамической погрешности измерения плотности изделия с заданной длиной усреднения l_0 при следующих данных сканирующей системы:

- скорость сканирования v ;
- длина коллимационной системы, сужающей угол зрения, под которым детектор «видит» изделие, равна l_K ;
- АФХ сканера $G_{\text{вп}}(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau)$;
- СПМ сигнала $S_x^{\oplus} = 2S_x(\omega) = 4\alpha\sigma_x^2/(\alpha^2 + \omega^2)$, $\alpha = \tau_x^{-1}$, $\tau_x = l_x/v$;
- мешающим фактором является шум со СПМ $S_n^{\oplus}(\omega)$, $0 \leq \omega \leq \infty$.

Привести формулу для расчета погрешности измерения, обусловленной погрешностью линейных искажений и шумом. Рассмотреть возможные сочетания параметров сканера.

Решение. Модели для расчета динамической погрешности и оптимизации измерения по максимуму отношения сигнал/шум показаны на рис. 10.4 и 10.17, а. Верхний канал модели является реальным, а нижний — идеальным, задающим требуемое усреднение. Формула для расчета дисперсии погрешности составляется аналогично (10.5):

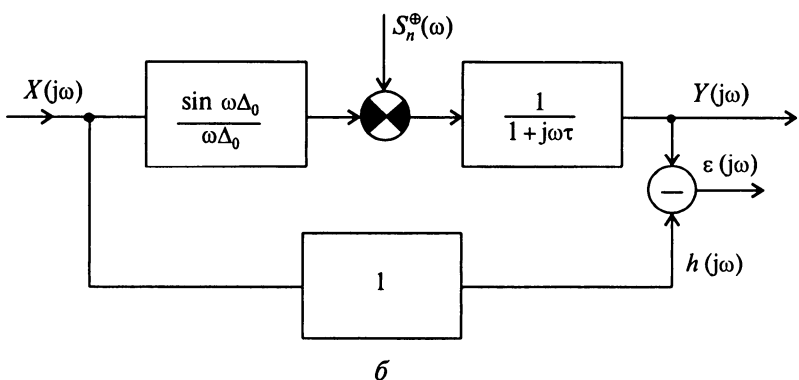
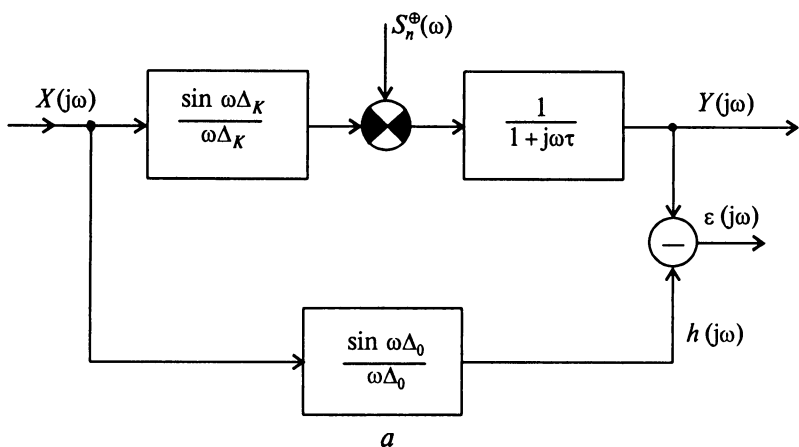


Рис. 10.17. Модели определения динамической погрешности при заданной длине усреднения

$$\overline{\varepsilon_{\text{dyn}}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_x^{\Phi}(\omega) \left| G_0(j\omega) - G_K(j\omega) G_{\text{ВП}}(j\omega) \right|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_x^{\Phi}(\omega) \left| G_{\text{ВП}}(j\omega) \right|^2 d\omega, \quad (1)$$

$$G_0(j\omega) = \frac{\sin \omega \Delta_0}{\omega \Delta_0}; \quad G_K(j\omega) = \frac{\sin \omega \Delta_K}{\omega \Delta_K}; \quad \Delta_0 = \frac{l_0}{2v}; \quad \Delta_K = \frac{l_K}{2v}. \quad (2)$$

Если уровень шума незначителен, т.е. вносит несущественный вклад в общую погрешность измерения, то роль усредняющего звена может выполнять коллимационная система. Тогда, выбирая длину коллиматора по направлению движения изделия $\Delta_K = \Delta_0$,

расчет погрешности можно производить с помощью модели, изображенной на рис. 10.17, б.

Роль звена, осуществляющего усреднение измеряемого параметра на заданной длине изделия, может выполнять также вторичный преобразователь, если его АФХ выбрать в виде идеального интегрирующего звена:

$$G_{\text{ВП}}(j\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \exp\left(-\frac{\omega T}{2}\right), \quad (3)$$

где T — время идеального интегрирования, которое может быть выбрано равным l_0/v , если роль коллимационной системы несущественна и можно считать, что $G_K(j\omega) = 1$. Такую АФХ (3) имеет, например, счетчик-интегратор числа импульсов, регистрируемых радиоизотопным прибором. Длина усреднения при этом равна $l_T = Tv$.

Подобные задачи требуют больших вычислительных операций и, как правило, решаются на ЭВМ. В работе [22] получены некоторые решения этой задачи в общем виде. На рис. 10.18 показаны зависимости относительной погрешности измерения $\overline{\delta^2} = \overline{\varepsilon_{\text{dyn}}^2} / \sigma_x^2$ от отношения $\xi = T/2\Delta_0 = l_T/l_0$ при различных отношениях $\theta = \Delta_K/\Delta_0 = l_K/l_0$ и отношениях сигнал/шум $\gamma^2 = S_x(0)/S_n(0)$. Видно, что при большом отношении сигнал/шум $\gamma^2 = 100$ и $\theta = 0,1$ ($l_K = 0,1l_0$) минимум относительной погрешности имеет место при $T \approx 2\Delta_0$ ($l_T \approx l_0$). Таким образом, в этом случае время интегрирования определяет длину усреднения.

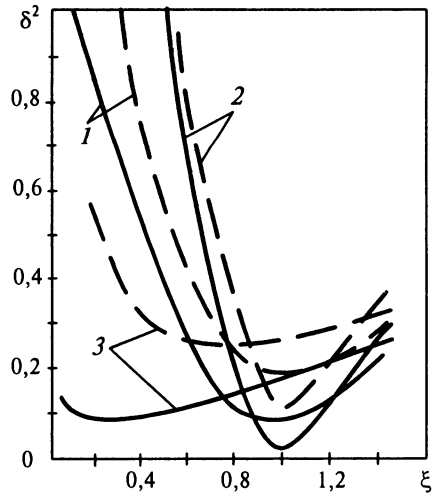


Рис. 10.18. Зависимость относительной суммарной погрешности измерения от параметра ξ при различных значениях θ и γ^2 : 1 — $\theta = 0,5$; 2 — $0,1$; 3 — $1,0$; — $\gamma^2 = 100$; - - - $\gamma^2 = 10$

Пример 10.23. Модель усилителя звуковой частоты представляет собой ФНЧ 1-го порядка (пример 10.1) с постоянной времени $\tau = 10^{-5}$ с. Определить мгновенную динамическую погрешность линейных искажений синусоидального сигнала амплитудой A_m на частоте $\omega = 1,0$ кГц и СКО этой погрешности.

Решение. Динамическую погрешность мгновенных искажений определим по формуле (10.6)

$$\begin{aligned} (\Delta_m)_{\text{dyn}} &= A_m \left| \frac{G_N}{K_N} - 1 \right| = A_m |j\omega\tau + 1 - 1| = A_m \omega\tau = \\ &= 10^3 \cdot 10^{-5} A_m = 0,01 A_m. \end{aligned}$$

Дисперсию динамической погрешности определим по формуле (10.7)

$$D_{\text{dyn}} = \frac{A_m^2}{2} \left| \frac{G_N}{K_N} - 1 \right|^2 = \frac{A_m^2}{2} |j\omega\tau|^2 = \frac{A_m^2 \omega^2 \tau^2}{2} = \frac{A_m^2}{2} 10^{-4},$$

а СКО погрешности будет равно $\delta_{\text{dyn}} = (A_m/\sqrt{2}) \cdot 10^{-2}$.

Пример 10.24. Аналоговое СИ характеризуется номинальной АЧХ:

$$A_N(\omega) = K_N / \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2},$$

где $K_N = 1$ — номинальный коэффициент преобразования СИ при нормальном значении $\omega_0 = 0$ частоты входного сигнала; $\tau = 5$ мс — постоянная времени. Спектр входного сигнала лежит в диапазоне 0–10 Гц. Оценить динамическую погрешность для измеренного мгновенного напряжения $U = 0,5$ В по второму методу расчета погрешности СИ.

Решение. Расчет оценки сверху относительного значения динамической погрешности проведем по формуле (10.8)

$$\delta_{\text{dyn max}} = \left| 1 - \frac{K_N}{A_N(\omega_B)} \right| = \left| 1 - \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \right| \approx 0,05.$$

где $\omega_B = 10$ Гц — высшая граничная частота спектра измеряемого сигнала.

При $U = 0,5$ В максимальная абсолютная динамическая погрешность измерения будет равна $\varepsilon_{\text{dyn max}} = 0,05 \cdot 0,5 = 25$ мВ.

10.3. ЗАДАЧИ И ОТВЕТЫ

Задача 10.1. Эквивалентная схема (модель) СИ представляет собой ФНЧ 1-го порядка (рис. 10.19). Определить полные динамические характеристики этого СИ.

Ответ. Амплитудно-фазовая характеристика

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{I(j\omega)R}{X(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau},$$

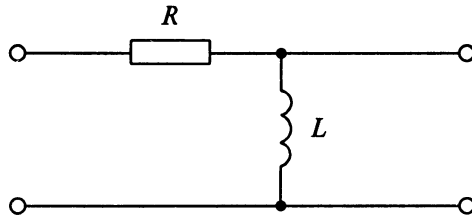


Рис. 10.19. Модель СИ к задаче 10.1

где $\tau = L/R$ — постоянная времени схемы. Остальные полные динамические характеристики этой схемы идентичны динамическим характеристикам для схемы на рис. 10.6 (пример 10.1). Различие состоит в разных физических представлениях постоянных времени этих схем.

Задача 10.2. Эквивалентная схема (модель) СИ представляет собой ФВЧ 1-го порядка (дифференцирующая RC -цепочка, рис. 10.20). Определить все полные динамические характеристики этого СИ.

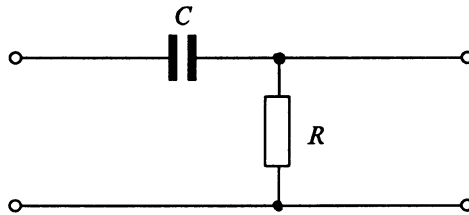


Рис. 10.20. Модель СИ к задаче 10.2

Ответ. Амплитудно-фазовая характеристика

$$G(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau},$$

где $\tau = RC$;

передаточная функция $G(p) = \frac{p\tau}{1 + p\tau}$;

амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \varphi(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{1}{\omega\tau}\right);$$

импульсная переходная и переходная характеристики

$$g(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad h(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Задача 10.3. Модель СИ представляет собой последовательное соединение двух измерительных преобразователей с общей АФХ

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) = \frac{K_1}{1 + j\omega\tau} K_2 e^{-j\omega t_0}.$$

Определить ПФ, ИПХ и ПХ этого СИ, а также охарактеризовать функции, выполняемые этими преобразователями.

Ответ. 1. Первый измерительный преобразователь является инерционным звеном 1-го порядка полные динамические характеристики которого подробно рассмотрены в примере 10.1.

2. Второй преобразователь является запаздывающим звеном, осуществляющим задержку обрабатываемого сигнала на время t_0 .

3. Передаточная функция $G(p) = G_1(p)G_2(p) = \frac{K_1 K_2}{1 + p\tau} e^{-pt_0}$;

амплитудно-частотная и фазочастная характеристики:

$$A(\omega) = |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| = \frac{K_1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} K_2,$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega\tau) - \omega t_0;$$

импульсная переходная характеристика

$$g(t) = \frac{K_1 K_2}{\tau} \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right), \quad t \geq t_0; \quad g(t) = 0, \quad t < t_0;$$

переходная характеристика

$$h(t) = K_1 K_2 \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right) \right], \quad t > 0; \quad h(t) = 0, \quad t < t_0.$$

Задача 10.4. Для модели СИ (рис. 10.8), представляющей собой последовательное соединение двух ФНЧ 1-го порядка (две интегрирующие цепочки с постоянными времени τ_1 и τ_2), определить задержку и эквивалентную постоянную времени нарастания. Решение получить, используя формулы (10.17).

Ответ. Время задержки $t_3 = \tau_1 + \tau_2$; эквивалентная постоянная времени $\tau_{\text{нэ}} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$.

Задача 10.5. С помощью динамометра измеряется масса тела m . Механическая модель динамометра показана на рис. 10.21, где k — коэффициент демпфирования; c — коэффициент жесткости пружины; m — измеряемая масса груза; F — сила притяжения груза к земле, т.е. его вес; y — отсчитывающее устройство.

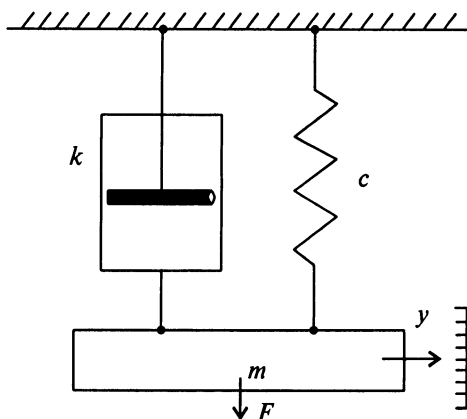


Рис. 10.21. Модель динамометра

Передаточная функция динамометра описывается соотношением [23]

$$G(p) = \omega_0^2 \frac{1/c}{p^2 + 2D\omega_0 p + \omega_0^2},$$

где $\omega_0^2 = c/m$ — собственная (резонансная) частота системы; $D = k/2m\omega_0$ — параметр затухания. Подобная механическая система может быть представлена эквивалентной электрической схемой рис. 10.10, в которой выходным сигналом является напряжение на сопротивлении R . В зависимости от массы груза и параметров динамометра k и c возможны различные переходные режимы поведения системы (см. пример 10.5).

Определить режим измерения и время, в течение которого показания динамометра достигнут уровня 0,95 от установившегося значения, при $m = 1$ кг, $k = 0,5$ кг/с, $c = 36$ кг/с².

Ответ. Режим колебательный ($\omega_0 = 6$ с⁻¹). Время достижения показывающим устройством 0,95 от установившегося (статического) показания будет $t_{\text{уст}}(0,95) = 3/D\omega_0 = 12$ с.

Задача 10.6. Измерительная система состоит из трех измерительных преобразователей, каждый из которых имеет ИПХ в виде $g(t) = (1/\tau) \exp(-t/\tau)$ с постоянными времени τ_1 , τ_2 , и τ_3 соответственно. Определить частные динамические характеристики: эквивалентную постоянную времени всей системы и общее время

задержки, учитывая, что работа каждого из блоков не влияет друг на друга.

Ответ. Эквивалентная постоянная времени системы

$$\tau_{\text{нэ}} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2};$$

общее время задержки $t_{\Sigma} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$.

Задача 10.7. Измерительная система, состоящая из двух последовательно соединенных измерительных преобразователей, имеет

общую АФХ $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \exp(-j\omega t_3)$, τ — постоянная времени

первого преобразователя, t_3 — время задержки второго преобразователя. Определить время измерения системы $t_{\text{изм}}$, полагая, что оно соответствует 0,95 от установившегося уровня.

Ответ. $t_{\text{изм}} = 2,3\tau + t_3$.

Задача 10.8. На входе СИ с ИПХ $g(t) = \beta \exp(-\beta t)$ действует сигнал $x(t) = x_0 \exp(-\alpha t)$ при $t \geq 0$. Определить сигнал $y(t)$ на выходе ($x = 0$ при $t < 0$) и момент времени, при котором выходной сигнал достигает максимального значения t_{max} .

Ответ. $y(t) = x_0 \frac{\beta}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$, $t_{\text{max}} = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha}$.

Задача 10.9. На входе СИ с ИПХ $g(t) = K\beta \exp(-\beta t)$ действует шум со СПМ $S_n(\omega) = S_0 \alpha^2 / (\alpha^2 + \omega^2)$. Определить СПМ шума на выходе СИ $S_y(\omega)$ и дисперсию случайной составляющей основной погрешности измерения D_y на выходе СИ. Вычислить СКП при $K = 1$, $S_0 = 1 \text{ мкВ}^2/\text{Гц}$, $\alpha = \beta = 10^3 \text{ Гц}$.

Ответ.

$$S_y(\omega) = K^2 S_0 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{\beta^2}{\beta^2 + \omega^2}; \quad D_y = K^2 S_0 \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \quad \sigma_y = 22,4 \text{ мкВ}.$$

Задача 10.10. Номинальная ПХ данного типа СИ имеет вид

$$h_N(t) = K_N [1 - \exp(-t/\tau_N)],$$

где $K_N = 1$ — номинальный коэффициент преобразования; τ_N — номинальная постоянная времени. Коэффициент преобразования и постоянная времени данного типа СИ характеризуются следующими пределами допускаемых отклонений: $\Delta K = \pm 10\%$ и $\Delta \tau = \pm 20\%$ от своих номинальных значений.

Оценить динамическую погрешность из-за отклонения каждого параметра ПХ от номинала, суммарное влияние отклонений при времени измерения $t_{\text{изм}} = 3\tau_N$.

Ответ. 1. Пределы систематической погрешности при изменении коэффициента преобразования в пределах $\pm 10\%$ и $\tau = \tau_N$ составляют $\pm 10\%$.

2. Пределы систематической погрешности при изменении постоянной времени в пределах $\pm 20\%$ и $K = K_N = 1$ составляют от $-3,4$ до $+2,8\%$.

3. Пределы систематической погрешности при изменении постоянной времени в пределах $\pm 20\%$ и изменении коэффициента преобразования в пределах $\pm 10\%$ составляют $\pm 13\%$.

Задача 10.11. Известно, что операцию идеального дифференцирования входного сигнала (определение скорости изменения сигнала) можно осуществить с помощью преобразователя с ИПХ $g(t) = d\delta(t)/dt$, где $\delta(t)$ — дельта-функция. Однако это преобразование невозможно реализовать практически. Оценить динамическую погрешность ε_{dyn} при измерении скорости изменения сигнала $x(t) = vt$, если измерительный преобразователь имеет ИПХ $g(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, т.е. с точностью до постоянного множителя $1/\tau$, представляет собой дифференцирующую цепочку (ФВЧ 1-го порядка).

Ответ. $\varepsilon_{\text{dyn}} = v(1 - e^{-t/\tau})$.

Задача 10.12. Модель СИ представляет собой два последовательно соединенных блока, АФХ которого имеет вид $G(j\omega) = \beta^2/(\beta + j\omega)^2$. На вход этого СИ поступает случайный сигнал со СПМ $S_x(\omega) = 2\alpha\sigma_x^2/(\alpha^2 + \omega^2)$. Определить относительную случайную динамическую погрешность линейных искажений.

Ответ. $\overline{\delta_{\text{dyn}}^2} = \frac{\varepsilon_{\text{dyn}}^2}{\sigma_x^2} = \frac{\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} \left(\frac{4\beta^2 - \alpha^2}{\alpha + \beta} - \frac{3}{2}\beta \right)$.

Задача 10.13. При входном сигнале, изменяющемся по параболическому закону $x(t) = x_0 t^2$, определить сигнал $y(t)$ и динамическую погрешность линейных искажений, обусловленную коллиматором $\theta_K(t)$, если после полного перекрытия изделием коллиматора отсчет показаний $y(t)$ начинается:

- 1) с точки l_K от начала изделия, т.е. с правого края коллиматора;
- 2) с точки $l_K/2$ от начала изделия, т.е. с середины коллиматора.

Ответ. 1) сигнал

$$y(t) = x_0 \left[(t - \Delta_K)^2 + \frac{\Delta_K^2}{3} \right],$$

погрешность $\theta_K(t) = 2\Delta_K \left(t - \frac{2\Delta_K}{3} \right)$ при $t > 2\Delta_K$;

2) сигнал

$$y(t) = x_0 \left(t^2 + \frac{\Delta_K^2}{3} \right),$$

погрешность $\theta_K(t) = -x_0 \frac{\Delta_K^2}{3}$ при $t > \Delta_K$.

Задача 10.14. При входном сигнале, изменяющемся по экспоненциальному закону $x(t) = x_0 e^{\gamma t}$, определить сигнал $y(t)$ и динамическую погрешность линейных искажений, обусловленную коллиматором $\theta_K(t)$, если после полного перекрытия изделием коллиматора отсчет показаний $y(t)$ начинается:

- 1) с точки l_K от начала изделия, т.е. с правого края коллиматора;
- 2) с точки $l_K/2$ от начала изделия, т.е. с середины коллиматора.

Ответ. 1) сигнал

$$y(t) = \frac{x_0}{2\Delta_K \gamma} e^{-\gamma t} (e^{2\Delta_K \gamma} - 1)$$

с точностью до квадратичного члена в разложении в степенной ряд $e^{2\Delta_K \gamma}$, полагая, что $2\Delta_K \gamma \ll 1$. Погрешность $\theta_K \approx -x_0 e^{-\gamma t} \Delta_K \gamma$;

2) сигнал

$$y(t) = \frac{x_0}{2\Delta_K \gamma} e^{-\gamma t} (e^{\gamma \Delta_K} - e^{-\gamma \Delta_K}) \approx x_0 e^{-\gamma t}$$

с точностью до квадратичного члена в разложении в степенной ряд $e^{\pm \Delta_K \gamma}$, полагая, что $\Delta_K \gamma \ll 1$. Погрешность $\theta_K = 0$.

АНАЛИЗ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

В главе на примерах работы конкретных измерительных преобразователей, приборов и установок рассматриваются метрологические характеристики СИ и анализируются методическая и инструментальная составляющие погрешностей по месту их возникновения и по характеру их проявления (систематическая, случайная). Поскольку для анализа широко используются различные модели СИ, то в начале этой главы приводятся краткие сведения по моделированию, а затем наиболее типичные примеры реальных СИ [1, 5, 20, 21, 23].

11.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Известно, что, используя модели СИ, можно значительно сократить вычислительные и экспериментальные работы, связанные с определением составляющих погрешностей СИ при вариации его параметров и воздействии различных дестабилизирующих факторов. Построение модели, отражающей сразу все свойства СИ (всеобъемлющая модель), невозможно, да и нецелесообразно из-за ее сложности. Модель (принципиальная схема, структурная, эквивалентная и др.) создается, как правило, с определенным целевым назначением и отражает те свойства устройства, которые влияют на исследуемый показатель качества (например, на статическую или динамическую погрешность, на стоимость, быстродействие).

Модели могут описывать прямое преобразование и преобразование с отрицательной обратной связью (уравновешивающее преобразование или компенсационное преобразование). Отличительной чертой прямого преобразования является последовательность преобразования в одном направлении от входа к выходу. Пример прямого преобразования приведен на рис. 11.1. В этой модели СИ разбито на ряд блоков, которые характеризуются своими коэффи-

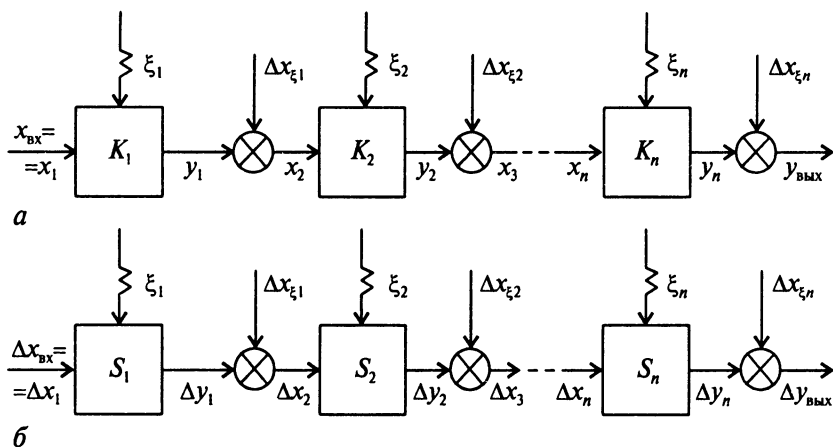


Рис. 11.1. Модели СИ с блоками, характеризуемыми коэффициентами преобразования (а), и с блоками, характеризуемыми чувствительностью преобразования (б): ξ_i — воздействующие факторы, определяющие дополнительные погрешности; Δx_{ξ_i} — генераторы погрешностей, искажающие результаты преобразования сигнала

циентами преобразования K_i . Эти блоки могут принадлежать одному прибору или различным измерительным устройствам установки или измерительной системы, могут быть соединены линиями связи и расположены в разных местах.

Поскольку погрешности, как правило, малы, то коэффициенты преобразований принимаются линейными и при $x=0$, $y=0$ (рис. 11.2, зависимость 1) равными чувствительности блока $S = \Delta y / \Delta x = K = y/x$. Тогда эту схему удобнее представить, заменив коэффициент преобразования на чувствительность $S_i = \Delta y_i / \Delta x_i$ (рис. 11.1, б).

Примечание. Для усилителей электрических сигналов, как правило, $K = S$. Однако часто зависимость $K = f(x_i)$ для СИ, где x_i — измеряемая физическая величина (ФВ), является нелинейной (рис. 11.2). При этом коэффициент преобразования $K = y/x$ не будет равен чувствительности $S = \Delta y / \Delta x \approx dy/dx$, и для расчета погрешностей СИ и приведения их к измеряемой величине x необходимо использовать значения чувствительности в данной точке диапазона измеряемых ФВ (рис. 11.3).

Искажения сигнала из-за воздействия дестабилизирующих факторов (факторов влияния), а также составляющих основных погрешностей отражены на модели генераторами погрешностей Δx_{ξ_i} . Воздействующих факторов ξ_i может быть несколько: температура, влажность, вибрация, удары, колебания питающей сети, помехи и т.д. При этом каждому воздействию фактору на схемах рис. 11.1 будут соответствовать отдельные генераторы погрешностей.

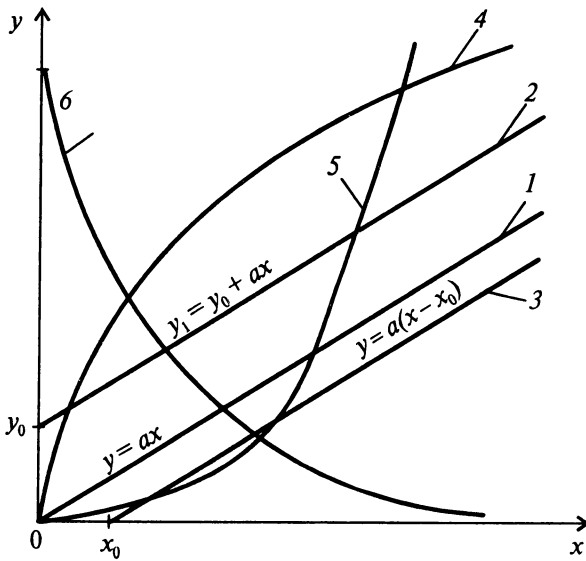


Рис. 11.2. Функции преобразования средств измерений: линейные (1, 2, 3), со смещением по оси y (2) и по оси x (3); нелинейные (4, 5, 6)

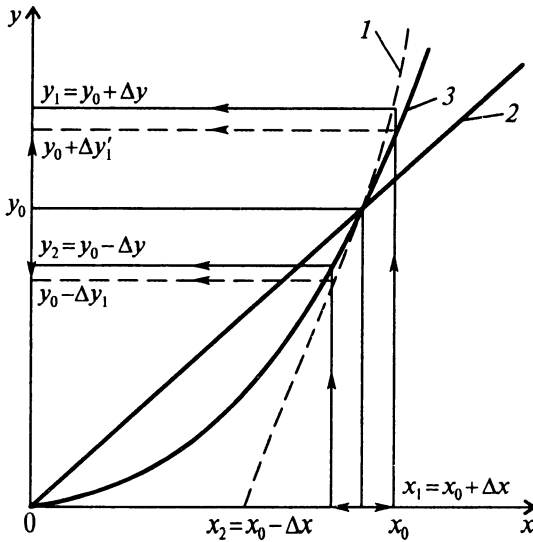


Рис. 11.3. Нелинейная функция преобразования: коэффициент преобразования $K = y_0/x_0$ соответствует наклону прямой 2 в точке x_0 ; чувствительность преобразования $S_0 = \Delta y/\Delta x$ соответствует наклону касательной 3 в точке x_0 . На оси y показаны проекции $y_0 \pm \Delta y$ и $y_0 \pm \Delta y_1$ при изменениях $x_0 \pm \Delta x$ для реальной кривой преобразования 1 и прямой 3

Для удобства расчетов и сравнения различных воздействий на сигнал используется приведение дестабилизирующих факторов ко входу или выходу СИ. Например, для погрешностей Δx_{ξ_1} и Δx_{ξ_2} , приведенных ко входу,

$$(\Delta x_{\xi_{12}})_{\text{вх}} = \Delta x_{\xi_1}/K_1 + \Delta x_{\xi_2}/K_1 K_2,$$

а к выходу

$$(\Delta y_{\xi_{12}})_{\text{вых}} = \Delta x_{\xi_1} K_2 K_3 \dots K_n + \Delta x_{\xi_2} K_3 K_4 \dots K_n.$$

Нестабильность коэффициентов преобразования, приведенных к выходу (мультипликативная погрешность), будет равна

$$\Delta y_{\text{вых}} = x_{\text{вх}} (K_2 K_3 \dots K_n \Delta K_1 + \dots + K_1 K_2 \dots K_{n-1} \Delta K_n),$$

а относительная нестабильность

$$\delta y = \frac{\Delta y_{\text{вых}}}{y_{\text{вых}}} = \frac{\Delta K}{K}.$$

Приведенная ко входу нестабильность равна

$$\Delta x_{\text{вх}} = \Delta y_{\text{вых}} / K, \quad K = K_1 K_2 \dots K_n.$$

Дисперсии случайных погрешностей пересчитываются ко входу или выходу по формулам

$$\left(\sigma_i^2\right)_{\text{вх}} = \sigma_i^2 / K_1^2 K_2^2 \dots K_i^2 \quad \text{и} \quad \left(\sigma_i^2\right)_{\text{вых}} = \sigma_i^2 K_{i+1}^2 K_{i+2}^2 \dots K_n^2.$$

Отметим, что в дополнении к классификации погрешностей, приведенных в гл. 1, инструментальные погрешности делятся на мультипликативные и аддитивные. Погрешности, пропорциональные входному сигналу, относят к мультипликативным, а погрешности, не зависящие от сигнала, — к аддитивным. Таким образом, все погрешности, изменяющие коэффициент преобразования (чувствительность), являются мультипликативными. Погрешности, обусловленные дрейфом нуля, шумами, наводками, изменением порога чувствительности и т.д., относятся к аддитивным и моделируются введением дополнительных генераторов погрешностей типа Δx_{ξ_i} (рис. 11.1).

Преобразование с отрицательной обратной связью используется в тех случаях, когда стремятся уменьшить влияние дестабилизирующих факторов либо когда в соответствии с принципом работы СИ представляет собой следящую систему (систему с автоматическим регулированием). Подобные системы имеют прямой и обратный каналы преобразования (рис. 11.4).

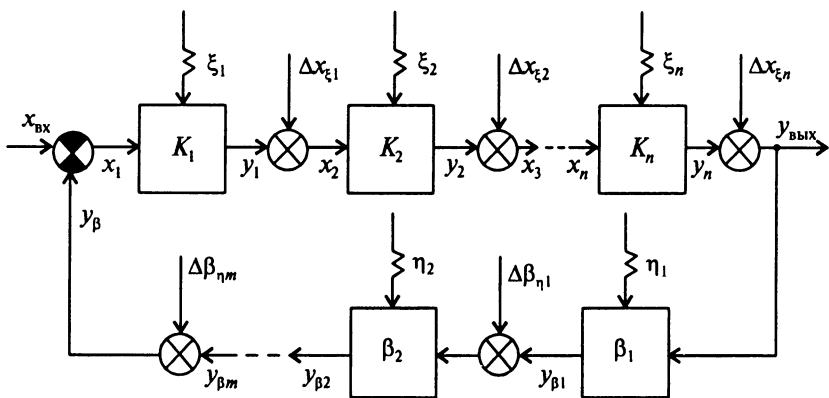


Рис. 11.4. Модель СИ с каналом обратной связи (обозначения как на рис. 11.1)

Обратный канал преобразования, так же как и прямой, может состоять из ряда блоков (преобразователей). Без учета дестабилизирующих факторов для схемы на рис. 11.4 выражение для коэффициента преобразования с обратной связью имеет вид

$$K_{\text{ос}} = \frac{y_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{K}{1 + K\beta}, \quad K = \prod_{i=1}^n K_i; \quad \beta = \prod_{i=1}^m \beta_i = \frac{y_{\beta}}{y_{\text{вых}}}.$$

Относительная мультипликативная погрешность, обусловленная нестабильностью коэффициентов преобразования K и β , будет равна

$$\delta y_{\text{вых}} = \frac{\Delta y_{\text{вых}}}{y_{\text{вых}}} = \frac{\Delta K}{K} \frac{1}{1 + \beta K} - \frac{\Delta \beta}{\beta} \frac{\beta K}{1 + \beta K} \approx \frac{\delta K}{\beta K} - \delta \beta,$$

где δ — относительные изменения величин.

Таким образом, при $\beta K \gg 1$ нестабильность выходного сигнала коэффициента прямой передачи будет уменьшена в βK раз и определяться нестабильностью канала обратной связи, который стремятся выполнять из стабильных, как правило, пассивных элементов.

Абсолютная аддитивная погрешность, приведенная ко входу, равна

$$\Delta x_{\text{вх}0} = \left(\frac{\Delta x_{\xi 1}}{K_1} + \frac{\Delta x_{\xi 2}}{K_1 K_2} + \dots + \frac{\Delta x_{\xi n}}{K_1 K_2 \dots K_n} \right) - \left(\beta_2 \beta_3 \dots \beta_m \Delta \beta_{\eta 1} + \beta_3 \dots \beta_m \Delta \beta_{\eta 2} + \Delta \beta_{\eta m} \right),$$

а приведенная к выходу $\Delta y_{\text{вых}} = \Delta x_{\text{вх}} K_{\text{ос}}$.

Астатические системы, т.е. системы с полным уравниванием рассогласования по отношению к дестабилизирующим воздействиям, характеризуются лучшими показателями погрешности измерения. В цепи преобразования сигнала таких систем имеются идеальные интегрирующие преобразователи (например, электродвигатель).

В моделях для расчета динамических характеристик и динамических погрешностей коэффициенты преобразования представляются полными динамическими характеристиками.

Достаточно полный и подробный порядок расчета СИ с использованием моделей приведен в работе [5].

Известно, что стабильность показаний СИ в основном определяется аналоговой частью СИ, каковым в современной аппаратуре являются первичный преобразователь (ПП) или датчик¹. Если простыми средствами не удастся получить достаточную стабильность СИ, для повышения стабильности выходного сигнала и улучшения динамических характеристик применяют различные корректирующие устройства первичных преобразователей или всего СИ [1, 21, 23, 24]. В настоящее время корректоры часто выполняются, используя микропроцессорные устройства, корректирующий сигнал которых формируется с использованием датчиков состояния окружающей среды [24]. При этом, если вводить в память микропроцессора номинальные значения чувствительности датчика данного типа и дополнительных погрешностей СИ данного типа, то из-за разброса этих характеристик не удастся получить удовлетворительные результаты по компенсации систематических погрешностей во всем диапазоне изменения влияющей величины, например температуры. Это оказывается возможным только при занесении в память микропроцессора характеристики чувствительности данного датчика и измерений индивидуальных характеристик дополнительных погрешностей СИ в диапазоне рабочих температур, в том числе промежуточных.

Корректировка динамических характеристик для увеличения быстродействия СИ (снижения динамических погрешностей линейных искажений) приводит к повышению погрешности, обусловленной шумами, наводками и помехами. Кроме того, это часто сопровождается уменьшением коэффициента преобразования, и для его восстановления необходимы дополнительные высокочастотные средства усиления сигналов. Исправление «плохих» динамических

¹ Первичный преобразователь — измерительный преобразователь, на который непосредственно воздействует измеряемая физическая величина и который осуществляет первичное преобразование полезного сигнала, несущего информацию об измеряемом объекте.

характеристик СИ с помощью корректирующих устройств [23] не всегда целесообразно, поскольку некоторые характеристики СИ (например, порог чувствительности, шумы, наводки) не корректируются, а некоторые требуют тщательной настройки и подготовки каждого индивидуального образца СИ. В связи с изложенным вопрос об использовании корректирующих устройств должен решаться прежде всего с учетом экономической целесообразности.

11.2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРИМЕРОВ

В примерах рассматриваются наиболее значимые и характерные составляющие погрешностей для СИ данного типа. Довольно подробный анализ здесь неуместен по следующим причинам: во-первых, он может заинтересовать только узкий круг специалистов, во-вторых, детальный анализ, выявляющий несущественные составляющие погрешностей, значительно усложнит материал. В то же время именно детальное знание процессов, сопровождающих преобразование сигнала, позволяет выявить все источники погрешностей и разработать способы борьбы с ними. Поэтому при анализе составляющих погрешностей необходима постоянная оценка уровня значимости погрешностей и выделение наиболее существенных из них. Таким образом, всегда решается компримиссная задача.

Примеры представлены следующим образом: вначале ставится задача, решаемая с помощью данного СИ (преобразователя, прибора, установки), затем с помощью моделей СИ описывается принцип работы СИ и назначение различных преобразователей, а также погрешностей, возникающих при преобразовании полезного сигнала. В зависимости от режима работы СИ, статического и/или динамического, анализируются источники возникновения основной, дополнительной и динамической погрешностей СИ. Кроме того, для СИ каждого типа анализируются некоторые источники методических погрешностей. Классификация погрешностей по различным признакам и определения их приведены в гл. 1 и учебных пособиях [1, 3, 4, 5].

Принцип работы приводимых ниже СИ основан на использовании проникающих свойств ионизирующего излучения. Анализ работы этих приборов позволяет показать преобразование измерительной информации и источников шумов, присущее многим СИ, работа которых основана и на других принципах измерения. Остановимся на некоторых особенностях, обусловленных использованием в качестве генератора сигналов источника ионизирующего

шего излучения (ИИИ), а в качестве информационного сигнала — радиационного сигнала².

1. Поскольку число частиц (квантов) N потока ИИ в единицу времени подчинено распределению Пуассона, то величина N флуктуирует около среднего значения. Таким образом, полезный сигнал, попадающий на чувствительную поверхность детектора регистрации излучения (датчик), зашумлен этой флуктуацией, которая является источником случайной составляющей погрешности. Если использовать классификацию погрешностей, принятую для инструментальных погрешностей, то эта погрешность является одной из составляющих основной методической погрешности.

2. Регистрация ИИ из-за ионизации и возбуждения атомов и молекул в детекторе ИИ характеризуется флуктуацией их числа около некоторого среднего значения, пропорционального регистрируемой энергии ионизирующих частиц E_0 . Эти флуктуации выражаются в флуктуациях амплитуд импульсов, которые в своих проявлениях подобны воздействию электронных шумов.

3. Случайный характер распределения частиц во времени и по амплитуде (как уже рассматривалось в примере 10.25) приводит к появлению искажений полезных импульсов из-за смещения нулевой линии. Эти погрешности увеличиваются с ростом регистрируемой скорости счета (имп./с), и их уровень зависит от динамической характеристики СИ. Среднее смещение нулевой линии является источником систематической погрешности, изменяющейся при изменении скорости счета, а ее флуктуации — источником случайной погрешности. Этот эффект смещения является одной из основных причин появления мертвого времени³ аппаратуры, основанной на использовании ионизирующего излучения. Это время ограничивает быстроедействие СИ [21, 25].

4. Любой радионуклид распадается со временем по экспоненциальному закону. Это свойство характеризуется периодом полураспада, т.е. временем $T_{0,5}$, в течение которого число частиц в единицу времени, вылетающих из источника, уменьшается в два раза. Нестабильность потока ИИ приводит к появлению прогрессирующей систематической погрешности с экспоненциальным

² Радиационный сигнал — поток ионизирующего излучения, несущий информацию об измеряемом объекте.

³ Мертвое время — среднестатистический параметр, определяющий нечувствительность СИ к регистрируемым частицам ИИ в течение некоторого времени, определяемого как мертвое время.

законом изменения со временем. Период полураспада $T_{0,5}$ является ядерной константой для данного радионуклида и может быть от долей секунды до нескольких сотен лет. В приборах используются ИИИ, период полураспада которых, как правило, составляет несколько лет и более (например, радионуклиды цезия-137 и стронция-90 имеют периоды полураспада $T_{0,5} \approx 30$ лет, америция-241 — $T_{0,5} \approx 433$ года, селена-75 — около 120 сут, кобальта-60 — около 5,3 года и т.д.).

5. Ионизирующее излучение выходит («вылетает») из ИИИ во все стороны или, как принято говорить в физике, в угле 4π . Для формирования потока излучения в нужном направлении используют конструкцию, закрепляющую ИИИ в определенном положении, защищающую от ионизирующего излучения обслуживающий персонал и имеющую коллимационное отверстие для выхода излучения в нужном направлении. Размеры коллимационного отверстия определяют полезный поток ИИ. Например, если площадь этого отверстия равна $S_K = 1 \text{ см}^2$, радиус защиты $R_3 = 5 \text{ см}$, а активность ИИИ в угле 4π составляет $1 \text{ МБк} = 10^6 \text{ распадов/с} = 10^6 \text{ частиц/с}$, то из коллимационного отверстия блока источника будет выходить $N = AS_K / 4\pi R_3^2 = 10^6 / 314 \approx 3,2 \cdot 10^3 \text{ частиц/с}$.

В зависимости от задач, стоящих перед СИ, отмеченные особенности в разной степени влияют на метрологические и технические характеристики СИ. Это будет показано в приведенных ниже примерах.

Поскольку наиболее значимые погрешности связаны с работой первичных преобразователей (ПП), то вначале анализируются погрешности ПП измерения энергии и средней скорости счета ИИ, а затем погрешности радиоизотопных приборов, в которых в качестве информации используется изменение потока ИИ, прошедшего через измеряемый объект.

11.3. ПОГРЕШНОСТИ ПЕРВИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ЭНЕРГИИ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Пример 11.1. Рассмотрим погрешности, возникающие при измерении энергии ИИ E_0 при скорости счета N , когда эффектами смещения нулевой линии можно пренебречь (режим измерения при малой скорости счета).

Установка для измерения энергии ИИ в упрощенном виде состоит из ИИИ, первичного преобразователя (Д — детектора, усилителя импульсов (У)) и амплитудного анализатора (рис. 11.5).

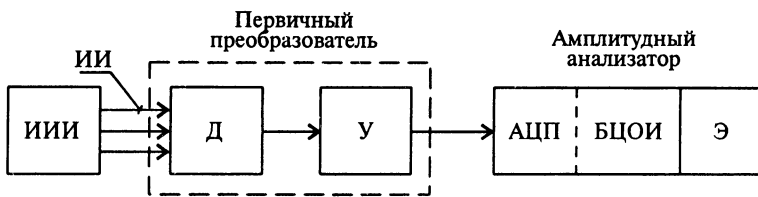


Рис. 11.5. Схема установки измерения энергии ионизирующего излучения

В амплитудном анализаторе (АЦП — аналого-цифровой преобразователь, БЦОИ — блок цифровой обработки сигнала, Э — экран монитора) импульсы сортируются по амplitудам. В результате на выходе анализатора (экране) появляется распределение частиц по энергиям в виде $n = f(E_i)$, где E_i — энергия, эВ, соответствующая середине канала амплитудного анализатора. Количественно измерение энергии характеризуется энергетическим разрешением, равным полной ширине размытия энергетической линии на экране амплитудного анализатора на половине высоты этой линии. Если форма размытия соответствует гауссовской, эта ширина $\Delta = 2,36\sigma_p$, σ_p — СКО нормального распределения (рис. 11.6). Относительное разрешение равно $\delta_p = \Delta/E_0$.

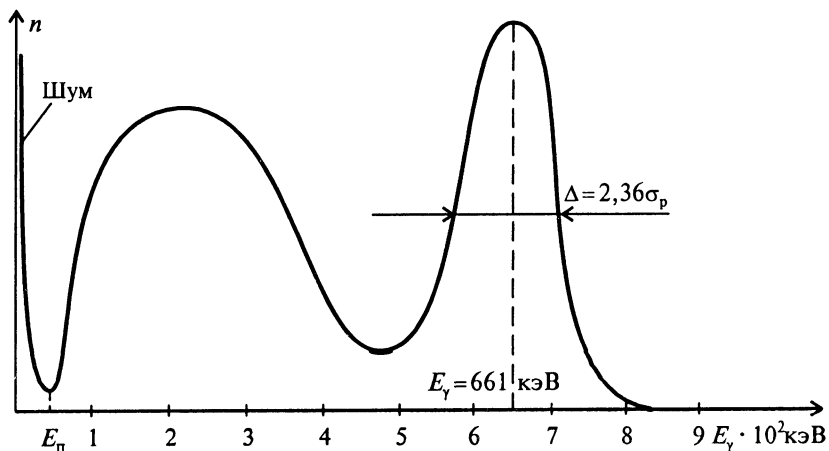


Рис. 11.6. Амплитудный спектр на экране монитора радионуклида цезия-137: $E_\gamma = 661$ кэВ — основная энергия цезия-137; E_n — энергетический порог

Источником ионизирующего излучения могут быть: радионуклид в защитной оболочке, образцовый, представляющий собой тонкий слой радионуклида на подложке; исследуемое вещество или продукт (загрязненный грунт, урановая руда, строительный мате-

риал), поток частиц от ускорителя заряженных частиц или ядерного реактора, излучение от рентгеновской промышленной или медицинской установки и т.п. Наиболее распространенными видами излучения являются: альфа-частицы (ядра гелия, имеющие положительный заряд), бета-частицы (электроны), гамма-кванты (излучение очень высокой частоты), нейтроны (частицы не имеющие заряда).

Детектор ионизирующего излучения. Регистрация любого вида излучения происходит через ионизацию и возбуждение атомов (молекул) рабочего объема детектора. Полупроводниковый детектор (ППД) представляет собой твердотельный аналог ионизационной камеры (ИК). Если в ИК между электрическими обкладками находится инертный газ под давлением, то в ППД, между обкладками находится полупроводниковый материал, как правило, германий или кремний. На обкладки детектора подается напряжение, создающее в рабочем объеме электрическое поле, предназначенное для сбора свободных зарядов, образующихся при взаимодействии ИИ с рабочим материалом детектора. При измерении энергии ИИ или всего спектра энергий, излучаемых ИИИ, важно обеспечить условия, при которых частицы полностью теряют свою энергию в рабочем объеме детектора. Это позволяет правильно измерить энергию излучения.

Преобразование энергии заряженной частицы в заряд характеризуется энергией образования одной электронно-дырочной пары в материале детектора ϵ_D , которая для кремния составляет 3,5 эВ, а для германия — 2,8 эВ. Для ИК эта энергия почти на порядок больше и составляет около 30 эВ. Величина ϵ_D имеет большое значение для повышения точности, разрешающей способности и чувствительности при измерении энергии ИИ. Чем меньше ϵ_D , тем большее число носителей образуется при ионизации в рабочем объеме детектора, что позволяет производить измерения частиц с малой энергией и, соответственно, повысить разрешающую способность, т.е. отдельно зарегистрировать мало отличающиеся между собой энергии излучения. Заряд, собираемый на электродах детектора равен

$$Q = E_0 q / \epsilon_D, \quad (1)$$

где E_0 — энергия, потерянная ИИ в чувствительном объеме детектора, эВ; q — заряд электрона, равный $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Как уже отмечалось в разд. 11.2, процесс преобразования энергии ИИ в заряд для всех детекторов статистический, т.е. при одной и той же полностью поглощенной энергии ИИ величина заряда в детекторе колеблется около некоторого среднего значения, определяемого колебаниями числа зарядов, образованных в результате

ионизации. При консервативных оценках предполагают, что эти флуктуации соответствуют распределению Пуассона, т.е. равны \sqrt{N} , где N — количество заряженных носителей, образованных в рабочем объеме детектора в результате ионизации. На самом деле, в ППД и ИК этот процесс сглажен, что учитывается с помощью фактора Фано $f < 1$. Например, в кремниевом детекторе при $E_0 = 100$ кэВ образуется $N = E_0/\varepsilon_D \approx 28\,570$ свободных носителей зарядов, что соответствует относительной СКП $\sqrt{Nf}/N = \sqrt{f/N} \approx 0,19\%$ при $f = 0,1$ и относительному разрешению энергии $\Delta/E_0 = 0,45\%$.

В сцинтилляционном детекторе (СД) при ионизации и возбуждении атомов и молекул переход в равновесное состояние сопровождается испусканием квантов света. В качестве материала детектора используются различные органические (полистирол, стильбен, антрацен, поливинилтолуол, и др.) и неорганические (NaJ(Tl) , CsJ(Tl) , CsJ(Na) и др.) материалы. Если СД помещается в герметичный контейнер, то в нем предусматривается оптическое окно для выхода света сцинтилляций. Для преобразования импульсов света СД в электрические сигналы и их усиления используется фотоэлектронный умножитель (ФЭУ), фотокатод которого оптически соединяется с СД. В ФЭУ электроны, вырванные из фотокатода вследствие фотоэффекта и ускоренные электрическим полем, попадают на ряд последовательно расположенных динодов, обладающих коэффициентом вторичной эмиссии $m (U_D) > 1$, где U_D — напряжение питания динодов ФЭУ. Если в ФЭУ n динодов, то общее усиление будет равно $M \approx m^n$. Электрический заряд, соответствующий энергии частицы E , потерянной в материале детектора, на выходе ФЭУ будет равен

$$Q = E_0 K_{\text{ДФ}} M q \varepsilon_1, \quad (2)$$

где $K_{\text{ДФ}}$ — коэффициент преобразования детектор–фотокатод ФЭУ, фотоэлектрон/кэВ; ε_1 — эффективность сбора электронов на первый динод ФЭУ. Коэффициент $K_{\text{ДФ}}$ в зависимости от материала СД и фотокатода может принимать значения от 0,16 до 1,2 фотоэлектрон/кэВ, а $M = 10^5$ – 10^7 .

Величина заряда на аноде ФЭУ флуктуирует из-за процессов преобразования энергии E_0 в детекторе, на стыке детектор–фотокатод ФЭУ и при усилении сигнала на динодной системе ФЭУ (больше чем $1/\sqrt{N}$). При $K_{\text{ДФ}} = 1,0$ фотоэлектрон/кэВ, $E_0 = 100$ кэВ, факторе Фано $f = 1$ относительная СКП, обусловленная флуктуацией преобразования энергии в детекторе, будет составлять 10%, энергетическое разрешение 23,6%, что намного больше, чем для ППД и ИК.

Импульсный усилитель осуществляет усиление сигнала с детектора до уровня, необходимого для нормальной работы АЦП, и обеспечивает усиление при максимально возможном отношении сигнал/шум благодаря оптимизации выбора частотной полосы пропускания. Это особенно важно при работе с ППД и ИК, поскольку импульс напряжения может быть очень малым (для ППД и ИК он составляет десятки микровольт). Импульс заряда с детектора преобразуется в импульс напряжения на входной емкости усилителя $U_0 = Q_0/C$, где C — суммарная входная емкость усилителя.

Типичная схема преобразования сигналов и шумов представлена на рис. 10.9. Для того чтобы уменьшить воздействие электронных шумов на полезный сигнал, полоса пропускания усилителя искусственно сужается с помощью фильтров, ограничивающих эту полосу со стороны низких и высоких частот. Сигнал U_0 после входного канала (коэффициент передачи входного канала принят равным единице) проходит последовательно фильтры верхних (сопротивление R_1 и емкость C_1) и нижних (сопротивление R_2 и емкость C_2) частот. Эти фильтры осуществляют над сигналом операции, близкие к дифференцированию и интегрированию. Поэтому в специальной литературе, посвященной обработке сигналов такого типа, эти фильтры называют дифференцирующими и интегрирующими соответственно, постоянную времени $\tau_1 = R_1 C_1$ — постоянной времени дифференцирования, а $\tau_2 = R_2 C_2$ — постоянной времени интегрирования. Для исключения влияния фильтров друг на друга они разделены согласующими каналами. На этой же схеме показаны источники шумов, разделенные на две группы: параллельные и последовательные шумы. К параллельным шумам относят все источники шумов, подключенные параллельно входу усилителя, к последовательным шумам — источники шумов, которые остаются на выходе после «закорачивания» входа на нулевую шину.

Параллельный шум обусловлен рядом факторов и прежде всего шумами детектора, входного тока активного элемента $I_{\text{вх}}$, тепловыми шумами всех сопротивлений R_{Σ} , подключенных к входу усилителя:

$$\overline{i_p^2} = \frac{4kT}{R_p} \Delta f = \left[2q(I_{\text{д}} + I_{\text{вх}}) + \frac{4kT}{R_{\Sigma}} \right] \Delta f = \left(2qI_{\Sigma} + \frac{4kT}{R_{\Sigma}} \right) \Delta f, \quad (3)$$

$I_{\text{д}}$ — эквивалентный ток, учитывающий шум детектора.

Последовательный шум обусловлен прежде всего дробовым шумом первого активного элемента входного канала и шумом последующих каналов усилителя.

На эквивалентной схеме параллельный шум представлен эквивалентным шумовым сопротивлением R_p и генератором тока $\sqrt{i_p^2} = \sqrt{4kT\Delta f/R_p}$, а последовательный шум — сопротивлением R_s и генератором напряжения $\sqrt{e_s^2} = \sqrt{4kTR_s\Delta f}$.

В примере 10.20 показано, что максимальное отношение сигнал/шум для схемы на рис. 10.9 может быть получено при равенстве постоянных времени $\tau_2 = \tau_1 = \tau_0 = C\sqrt{R_p R_s}$. При этом среднеквадратическое значение электронного шума, приведенное к измеряемой энергии, будет равно $\sigma_E = \left(4\sqrt{(kT)^2 R_s / C^2 R_p}\right) / K_{пр}$, где $K_{пр} = q/2,7\epsilon_D C$ — коэффициент преобразования энергии E_0 в выходной сигнал.

Продолжим оценку и сравнение детекторов при $E_0 = 100$ кэВ. Оценим величину шума для кремниевого детектора при следующих типичных данных: температура $T = 300$ К, емкость $C = 20$ пФ, сопротивление параллельных шумов $R_p = 100$ МОм, сопротивление последовательных шумов $R_s = 100$ Ом, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $K_{пр} = 8,46 \cdot 10^{-10}$ В/эВ, получим $\sigma_E = 536$ эВ, что соответствует разрешению 1,26 кэВ, или 1,26% (составляющая погрешности из-за флуктуаций числа свободных носителей составляет 0,45%). Это характерный результат, показывающий, что для полупроводникового детектора, а также ИК случайная погрешность из-за электронных шумов, как правило, выше, чем из-за преобразования энергии в материале детектора.

На рис. 11.7 представлена модель преобразования сигнала в первичном преобразователе (ПП) СИ энергии ИИ с указанием влияющих факторов и генераторов погрешностей на каждом этапе преобразования.

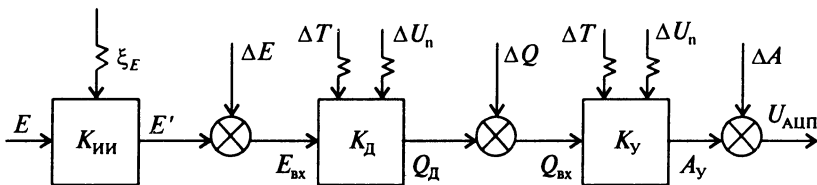


Рис. 11.7. Модель преобразования сигнала в первичном преобразователе измерителя энергии ионизирующего излучения: $K_{ИИ}$, $K_{Д}$, $K_{У}$ — коэффициенты преобразования ИИ, детектора и усилителя; ξ_E — фактор влияния на энергию излучения; ΔT и ΔU_n — изменения температуры и напряжения питания, влияющие на $K_{Д}$ и $K_{У}$; ΔE — генератор методической погрешности, искажающей регистрируемую энергию излучения; ΔQ — генератор погрешности, обусловленной преобразованием энергии в детекторе и влиянием условий эксплуатации; ΔA — генератор погрешности, обусловленной преобразованием сигнала в усилителе

Ниже приведены наиболее характерные составляющие методической, инструментальной и динамической погрешностей для ПП измерения энергии ИИ.

Методическая погрешность. Энергия ИИ $E_{\text{вх}}$, попадающая на чувствительную поверхность детектора, может отличаться от энергии E , которой характеризуется распад данного радионуклида. Это может быть обусловлено рядом факторов, приводящих к возникновению методической погрешности. «Основная» методическая погрешность⁴ может быть обусловлена следующими факторами:

- самопоглощением и рассеиванием излучения в материале радионуклида;
- поглощением и рассеиванием излучения в элементах упаковки (конструкции) источника;
- рассеянием излучения на элементах конструкции и в среде между источником и детектором;
- типом детектора;
- линейностью коэффициента $K_{\text{д}}$ во всем диапазоне регистрируемых энергий;
- погрешностью градуировки с помощью образцовых ИИИ;
- распадом радионуклида во времени.

Дополнительные составляющие методических погрешностей могут быть обусловлены рядом влияющих факторов, изменяющих поглощение и рассеяние излучения, и прежде всего изменением состояния окружающей среды (температура, влажность, давление и т.п.), воздействием механических перегрузок (вибрация, удары и т.п.), приводящих к изменению:

- взаимного расположения элементов конструкции детектора и ИИИ;
- физических характеристик радионуклида (например, плотности радиоактивного газа под влиянием температуры или плотности воздушной среды при изменении влажности и/или давления, расположения порошкообразного материала радионуклида под влиянием вибрации и т.п.).

Другие составляющие обусловлены особенностью конкретной задачи.

Инструментальная погрешность ПП определяется преобразованием энергии излучения в детекторе (преобразователь $K_{\text{д}}$), а также преобразованием и усилением сигнала в импульсном усилителе.

⁴ «Основная» методическая погрешность — методическая погрешность при нормальных условиях эксплуатации. Термин используется по аналогии с основной погрешностью СИ.

Составляющими основной погрешности ПП, которая определяется при нормальных условиях работы, являются:

— систематическая погрешность, обусловленная «мертвым» слоем детектора (для заряженных частиц), т.е. нечувствительным слоем, предшествующим чувствительному объему детектора;

— случайная погрешность, обусловленная флуктуациями преобразования энергии излучения в электрический заряд на выходе детектора;

— отклонения номинальной функции преобразования энергии излучения в сигнал на входе АЦП от номинальной;

— случайная погрешность, обусловленная электронными шумами детектора и усилителя (для полупроводникового детектора и входного канала усилителя нормальная температура соответствует температуре жидкого азота (77К), а для остальной схемы — комнатной температуре).

Составляющие *дополнительной погрешности* ПП определяются влиянием изменения температуры окружающей среды и напряжения питания детектора и импульсного усилителя на коэффициенты преобразования K_D и K_U . Вопросы расчета дополнительных погрешностей импульсных усилителей рассмотрены в гл. 8, а дополнительных погрешностей из-за нестабильности K_D применительно к сцинтилляционному счетчику анализируются в примере 11.2.

Динамическая погрешность для ПП измерения обусловлена в основном эффектами частотных перегрузок (смещением нулевой линии). Источники систематической и случайной погрешностей, связанных со смещением нулевой линии, рассмотрены в примере 10.21.

Пример 11.2. Сцинтилляционный счетчик, состоящий из СД и ФЭУ, предполагается использовать для измерения энергии ионизирующего излучения (рис. 11.8) на искусственном спутнике Земли. При облете Земли за время, примерно равное одному часу, спутник находится периодически под воздействием солнечного излучения либо в тени. При этом рабочая температура спектрометра изменяется от положительной 40°С до отрицательной -40°С.

Амплитуда импульса на выходе ФЭУ равна (рис. 11.9):

$$U_{\text{вых}} = \frac{E_0 \epsilon_{\text{св}} \epsilon_{\text{ФК}} \epsilon_1 M q}{C} \varphi(\lambda), \quad (1)$$

где E_0 — энергия измеряемого ИИ, поглощенная в рабочем объеме детектора; $\epsilon_{\text{св}}$ — коэффициент, характеризующий преобразование энергии излучения, поглощенной СД, в световое излучение, попадающее на фотокатод ФЭУ; $\epsilon_{\text{ФК}}$ — квантовая эффективность

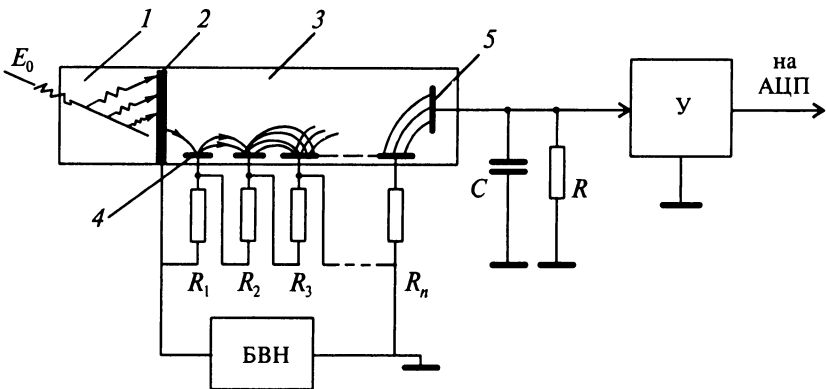


Рис. 11.8. Принцип работы сцинтиляционного счетчика: 1 — сцинтиляционный детектор; 2 — фотокатод; 3 — ФЭУ; 4 — диноды; 5 — анод; БВН — блок высокого напряжения; R_1, \dots, R_n — сопротивления делителя напряжения, питающего диноды ФЭУ

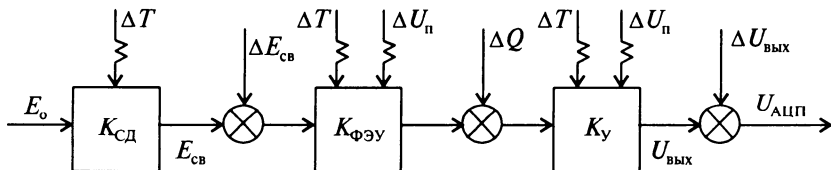


Рис. 11.9. Модель преобразования сигнала в первичном преобразователе с сцинтиляционным детектором:

K_{CD} , $K_{ФЭУ}$, $K_{у}$ — коэффициенты преобразования сигнала в сцинтиляционном детекторе, ФЭУ и импульсном усилителе; $K_{CD} = \epsilon_{св}$, $K_{ФЭУ} = \epsilon_{ФК} \epsilon_1 M$, $K_{у} = U_{вых} / Q_{вх}$; $\Delta E_{св}$, ΔQ , $\Delta U_{вых}$ — генераторы основной и дополнительной составляющих погрешностей, возникающих в соответствующих преобразователях; ΔT и $\Delta U_{п}$ — изменения температуры и напряжения питания

фотокатода ФЭУ, определяющая отношение числа электронов вылетающих с фотокатода, к энергии света, падающего на фотокатод; ϵ_1 — коэффициент, характеризующий эффективность собирания электронов, вылетевших с фотокатода, на первый динод динодной умножительной системы ФЭУ; $M(U_{Ф})$ — коэффициент усиления динодной системы ФЭУ, который возрастает примерно в два раза при изменении напряжения $U_{Ф}$ на 100 В относительно $U_{Ф0}$ — номинального рабочего напряжения ФЭУ:

$$M(U_{Ф}) = M_0(U_{Ф0}) \cdot 2^{(U_{Ф} - U_{Ф0})/100} = M_0(U_{Ф0}) \exp\left(\frac{U_{Ф} - U_{Ф0}}{100} \ln 2\right); \quad (2)$$

q — заряд электрона, равный $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; C — суммарная емкость на выходе ФЭУ, состоящая из выходной емкости ФЭУ, вход-

ной емкости усилителя и паразитной емкости; $\varphi(\lambda)$ — функция сбора заряда на входной емкости усилителя, зависящая от соотношения $\lambda = \tau/\tau_{\text{в}}$, где τ — постоянная времени выходной цепи ФЭУ; $\tau_{\text{в}}$ — постоянная времени импульса тока на выходе ФЭУ, имеющего экспоненциальную форму, повторяющую форму импульса высвечивания СД.

Требуется определить дополнительные погрешности, возникающие при измерении энергии ИИ в диапазоне температур от -40 до $+40^\circ\text{C}$, и изменения напряжения питания ФЭУ $\pm 1\%$ при следующих данных для индивидуального образца сцинтилляционного счетчика:

- нормальная температура равна 20°C ;
- изменение коэффициента $\epsilon_{\text{св}}$ в области положительных температур от 20 до 60°C составляет $\delta\epsilon_{\text{св}} = -0,12\%/^\circ\text{C}$;
- изменение коэффициента $\epsilon_{\text{св}}$ в области температур от 20 до -50°C составляет $\delta\epsilon_{\text{ФК}} = -0,5\%/^\circ\text{C}$;
- изменение квантовой эффективности в диапазоне рабочих температур составляет $-0,1\%/^\circ\text{C}$;
- постоянная времени высвечивания СД $\tau_{\text{в}}$, равная $0,25$ мкс при нормальной температуре, $0,16$ мкс при температуре 40°C и $-1,0$ мкс при температуре -40°C ;
- постоянная времени выходной цепи ФЭУ $\tau = 15$ мкс;
- изменение коэффициента усиления ФЭУ при изменении напряжения питания $U_{\text{Ф}}$ происходит по формуле (2), рабочее (номинальное) напряжение ФЭУ $U_{\text{Ф0}} = 1600$ В;
- коэффициент усиления ФЭУ M практически не изменяется при изменении температуры окружающей среды в указанном диапазоне.

1. Используя (1) и модель рис. 11.9, получаем соотношение для определения относительного изменения параметров сцинтилляционного счетчика (без учета нестабильности $K_{\text{ИУ}}$):

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВЫХ}}} = \frac{\Delta\epsilon_{\text{св}}}{\epsilon_{\text{св}}} + \frac{\Delta\epsilon_{\text{ФК}}}{\epsilon_{\text{ФК}}} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \\ &= \delta\epsilon_{\text{св}} + \delta\epsilon_{\text{ФК}} + \delta M + \delta\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Определим дополнительные составляющие погрешности из-за изменения температуры окружающей среды при крайних значениях температуры, т.е. при $\pm 40^\circ\text{C}$.

Функция влияния на систематическую погрешность, определяющая дополнительную погрешность, будет равна $\delta\varphi = \epsilon\Delta T$, где

ε — температурный коэффициент изменения параметра сцинтилляционного счетчика; ΔT — изменение температуры. Таким образом, дополнительная относительная погрешность из-за изменения светового выхода при температуре 40°C будет составлять $\delta\varepsilon_{+св} = -0,12\Delta T = -0,12 \cdot 20 = -2,4\%$, а при температуре -40°C $\delta\varepsilon_{-св} = -0,5\Delta T = -0,5 \cdot 60 = -30\%$. Дополнительная относительная погрешность из-за изменения квантовой эффективности фотокатода при температуре 40°C будет равна $\delta\varepsilon_{+ФК} = -0,1\Delta T = -0,1 \cdot 20 = -2,0\%$, а при температуре -40°C $\delta\varepsilon_{-св} = 0,1\Delta T = 0,1 \cdot 60 = 6,0\%$.

Функцию влияния температуры на составляющую дополнительной погрешности, обусловленной изменением постоянной времени импульса тока на выходе ФЭУ, определим по графику на рис. 11.10: $\varphi(20^\circ\text{C}) = \varphi(15/0,25) = \varphi(60) = 0,9$, $\varphi(40) = \varphi(100) = 0,95$, $\varphi(-40) = \varphi(15) = 0,8$. Тогда относительное изменение амплитуды из-за температурного изменения длительности импульса с ФЭУ будет составлять $\delta\varphi_+ = 5,5\%$ при температуре 40°C и $-\delta\varphi_- = -1,1\%$ при температуре -40°C .

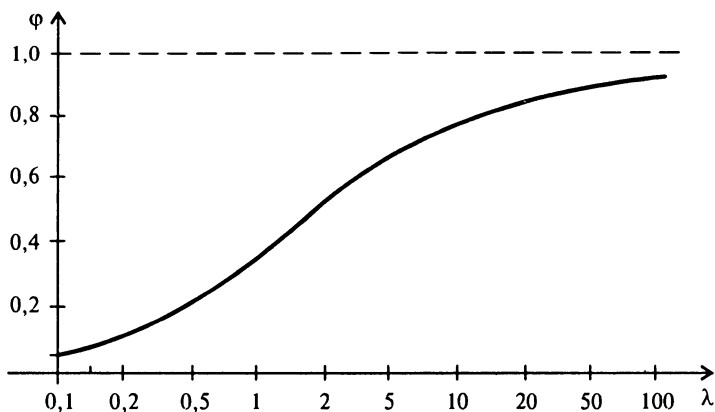


Рис. 11.10. Функция $\varphi(\lambda)$, $\lambda = \rho/\rho_в$

Таким образом, при температуре 40°C изменения амплитуды импульса напряжения на выходе ФЭУ составит $\Delta_{C+} = -2,4 + (-2,0) + + 5,5 = 1,1\%$ и при температуре -40°C и $\Delta_{C-} = -30 + 6 + (-1,1) = -25,1\%$.

3. Для определения функции влияния изменения напряжения питания ФЭУ на дополнительную погрешность разложим показательную функцию в соотношении (2) в ряд Тейлора около точки $U_{Ф0}$, представив относительное изменение коэффициента усиления ФЭУ в виде

$$\delta M = \frac{\Delta M}{M} = U_{\Phi 0} \frac{\ln 2}{100} 2^{\Delta U_{\Phi}/U_{\Phi}} \frac{\Delta U_{\Phi}}{U_{\Phi}} =$$

$$= U_{\Phi 0} \frac{0,693}{100} \left[1 + \left(\frac{\Delta U_{\Phi}}{100} \ln 2 \right) \frac{1}{1!} + \left(\frac{\Delta U_{\Phi}}{100} \ln 2 \right)^2 \frac{1}{2!} + \dots \right] \frac{\Delta U_{\Phi}}{U_{\Phi}}, \quad (4)$$

где $\Delta U_{\Phi} = U_{\Phi} - U_{\Phi 0}$, $\ln 2 = 0,693$. Подставляя исходные данные в выражение (4), получаем

$$\delta M = 1600 \cdot 7 \cdot 10^{-3} (1 + 0,1 + 0,005 + 0,0016 + \dots) \cdot 1\% = 12,88 \approx 13\%.$$

Таким образом, нестабильность напряжения питания ФЭУ $\pm 1\%$ приводит к изменению коэффициента усиления ФЭУ M на $\pm 13\%$. Это обусловлено тем, что $M \approx m^n$, где $m (U_{\Phi}/n)$ — коэффициент усиления динода ФЭУ; n — число динодов ФЭУ, и небольшие изменения питания n динодов приводят к значительным изменениям M и, соответственно, амплитуды сигнала на выходе ФЭУ.

4. Общая дополнительная погрешность с учетом нестабильности напряжения питания ФЭУ при консервативной оценке составит

$$\Delta_C (40^{\circ}\text{C}) = 1,1 + 13 \approx 14\%, \quad \Delta_C (-40^{\circ}\text{C}) = -25,1 - 13 \approx -37\%.$$

Проведенная предельная оценка составляющих дополнительных погрешностей показывает, что использование данного индивидуального сцинтилляционного счетчика в качестве спектрометра в указанных рабочих условиях эксплуатации не представляется возможным из-за слишком высокой нестабильности выходной амплитуды. Необходимо предусмотреть дополнительные меры по обеспечению стабилизации режима и/или термостатирования блоков сцинтилляционного счетчика.

Примечание. Для сцинтилляционного счетчика данного типа (вида) температурные коэффициенты $\delta \epsilon_{\text{св}}$, $\delta \epsilon_{\text{ФК}}$, $\delta \tau_{\text{в}}$ и зависимость $M(U_{\Phi})$ имеют определенный разброс. Например, $\delta \epsilon_{\text{св}}$ в диапазоне температур от 20 до 40°C может равновероятно принимать значения от 0,11 до 0,13%/°C. При этом номинальная функция влияния для данного типа счетчика определяется как математическое ожидание $\delta \psi_{\text{Нсв+}} = M[\delta \psi_{\text{св+}}] = M[\delta \epsilon_{\text{св}}] = [(-0,11 - 0,13)/2] \cdot \Delta T = -0,12\%/^{\circ}\text{C} \cdot \Delta T$. Аналогично для данного типа сцинтилляционного счетчика определяются и другие функции влияния, а также дополнительные погрешности. В данном примере для оценки составляющих дополнительных погрешностей использованы номинальные функции влияния.

Кроме того, для счетчика данного типа может быть произведена оценка дисперсии систематических составляющих погрешностей из-за разброса функций влияния, а также из-за вероятностного распределения влияющих величин. Дополнительные погрешности возникают также из-за влияния температуры и на-

пряжения питания на уровень шумов сцинтилляционного счетчика. Однако в данном примере они не являются существенными. Эти факторы будут рассмотрены при работе сцинтилляционного счетчика в качестве первичного преобразователя в радиоизотопных приборах, где они оказывают заметное влияние на стабильность регистрируемой скорости счета.

Пример 11.3. Рассмотрим работу сцинтилляционного счетчика с автоматической системой стабилизации, позволяющей в дополнение к термостатированию счетчика значительно снизить дополнительную погрешность при регистрации амплитуды сигнала на входе АЦП.

Для стабилизации первичного преобразователя приборов, основанных на регистрации ИИ, используются радиоактивные или световые реперы. Принцип работы таких систем стабилизации поясняется с помощью схемы сцинтилляционного счетчика и дифференциального спектра на входе АЦП (рис. 11.11). Если площадь пика равна N_p , то уровень дискриминируемых импульсов с помощью дискриминатора (Д) устанавливается таким образом, что он отсекает половину площади пика, т.е. на выходе дискриминатора скорость счета составляет $N_p/2$. Эта скорость счета преобразуется интенсиметром (И) в сигнал напряжения, который сравнивается с опорным напряжением $U_{оп}$. При смещении порога E_n , вызванного нестабильностью какого-либо параметра ПП, на выходе интенсиметра появляется сигнал, который с помощью преобразователя (Пр) изменяет напряжение питания ФЭУ и восстанавливает прежнее положение порога регистрации по шкале энергий.

Рассмотрим обобщенную модель (рис. 11.11, в) ПП с автоматической стабилизацией амплитуды сигнала, полагая, что отклонения от рабочих режимов блоков незначительны. Это позволит проводить анализ погрешностей в линейной области изменения характеристик блоков. Для упрощения и удобства анализа отклонения величин будем рассматривать в относительных единицах. Нестабильность тракта прямой передачи (нестабильность СД, ФЭУ, усилителя) отражена генератором $\delta E_n/E_n$, нестабильность обратной связи — генератором $\delta U/U_{оп}$ и влияние флуктуаций числа импульсов репера — генератором $\delta N_p/N_p$.

Записав уравнение для замкнутой цепи (рис. 11.11, в), после преобразования получим

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{\delta E_n}{E_n} \frac{1}{E_{ос}} + \frac{\delta N_p}{N_p} \frac{K_2 K_3}{F_{ос}} + \frac{\delta U}{U_{оп}} \frac{K_3}{F_{ос}}, \quad (1)$$

где $F_{ос} = 1 - K_1 K_2 K_3$ — фактор обратной связи; K_1, K_2, K_3 — коэффициенты преобразования блоков. Запишем эти коэффициенты [21].

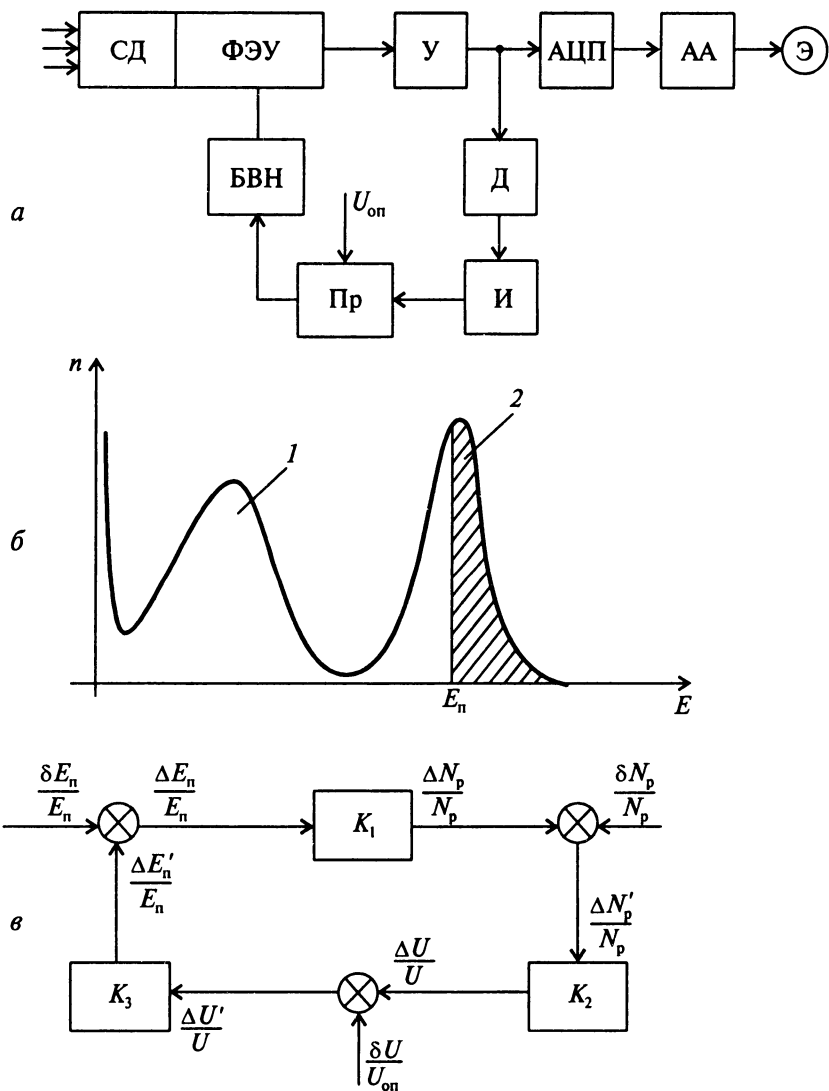


Рис. 11.11. Схема сцинтиляционного счетчика с автоматической стабилизацией порога регистрации по реперному пику (а); дифференциальный аппаратный спектр рабочего (1) и реперного (2) источника излучения (б); модель для расчета погрешностей (в)

Если реперный пик имеет гауссовскую форму, то $K_1 = -(\Delta_p)^{-1} = -(2,36\sigma/E_p)^{-1} = P$, т.е. равен величине, обратной разрешению реперного пика, где σ — СКО гауссовской кривой (рис. 11.6). В установившемся режиме коэффициент преобразования интенсивности $K_2 = 1$. Коэффициент блока высокого напряжения K_3 , как правило, больше единицы и выбирается, чтобы обеспечить необходимый уровень стабильности.

Как видно из (1), нестабильность порога, связанная с изменением коэффициента усиления ФЭУ, светового выхода, квантовой эффективности фотокатода ФЭУ, усиления усилителя, порога дискриминатора уменьшается в F_{oc} раз. Например, если $P = 10$, $K_3 = 100$, то $F_{oc} = 1000$. Применительно к данным примера 11.2 дополнительная погрешность, обусловленная влиянием температуры и нестабильностью напряжения питания ФЭУ, составит $\Delta_C(40^\circ\text{C}) \approx 0,014\%$, $\Delta_C(-40^\circ\text{C}) \approx -0,037\%$.

Следует отметить, что в подобных системах стабилизации влияние нестабильности цепи обратной связи целиком определяется «узостью» реперного пика, Действительно,

$$\left(\frac{\Delta E_p}{E_p}\right)_H = \frac{\delta U}{U_{оп}} \frac{K}{F_{oc}} \approx \frac{\delta U}{U_{оп}} \frac{1}{P}.$$

Если $P = 10$, то нестабильность опорного сигнала снижается в 10 раз, и если этого недостаточно, то элементы этой части схемы термостатируют, что гораздо проще, чем термостатирование всего первичного преобразователя.

Заметим также, что, поскольку сигнал обратной связи по своей природе является флуктуационным, то это приводит к дополнительной флуктуации выходной амплитуды сигнала (второе слагаемое в соотношении (1)). Для принятых выше значений $K_3 = 100$ и $P = 10$ увеличение флуктуаций равно $\sqrt{K_3/P} = \sqrt{10} = 3,16$. Однако из-за увеличения постоянной времени τ_{oc} цепи обратной связи (интенсиметра) эти флуктуации можно снизить до необходимого уровня. Эту постоянную времени можно сделать довольно большой, так как динамические характеристики системы определяются постоянной времени τ_{oc}/F_{oc} .

11.4. ПОГРЕШНОСТИ ПЕРВИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ СКОРОСТИ СЧЕТА

Одним из основных узлов радиоизотопных приборов являются первичные преобразователи, работающие в счетном или токовом режиме, основной задачей которых является получение стабиль-

ного и точного выходного сигнала, пропорционального среднему числу частиц ИИ, поступающих на чувствительную поверхность детектора. В счетном режиме выходным сигналом является средняя скорость счета, а в токовом — напряжение (ток), пропорциональное средней скорости счета.

Преобразование сигнала в ПП в счетном режиме происходит аналогично тому, как это показано на рис. 11.8. Только в схеме для регистрации средней скорости счета после усилителя поток импульсов поступает на амплитудный дискриминатор, который отсекает импульсы шума и формирует выходные импульсы стандартной амплитуды. Энергетический спектр регистрируемого излучения, на котором часть спектра выше порога $E_{\text{п}}$ соответствует регистрируемой скорости счета на выходе дискриминатора, показан на рис. 11.6.

Пример 11.4. Рассмотрим погрешности, возникающие при регистрации потока N_x , на примере ПП с сцинтилляционным счетчиком, если влияющими факторами являются температура окружающей среды и напряжение питания ФЭУ. В соответствии с соотношениями (1) и (2) примера 11.2 источником нестабильности приведенного порога дискриминации, равного

$$E_{\text{п}} = U_{\text{д}}/K_{\text{пр}}, \quad (1)$$

где $K_{\text{пр}}$ — коэффициент преобразования детектор—усилитель; В/кэВ; $U_{\text{д}}$ — амплитуда на выходе усилителя, равная порогу дискриминатора, В, являются: изменения светового выхода СД $\epsilon_{\text{св}}$, квантовой эффективности фотокатода $\epsilon_{\text{ФК}}$, постоянной времени высвечивания $\tau_{\text{в}}$ и коэффициента усиления ФЭУ. Это приводит к появлению дополнительной систематической погрешности. Кроме этих параметров при анализе стабильности ПП в счетном режиме необходимо учитывать зависимость шумов послесвечения СД и электронных шумов ФЭУ от температуры и напряжения питания ФЭУ. Эти факторы приводят к появлению дополнительной случайной погрешности [21].

Для удобства расчета составляющих основной и дополнительной погрешностей используют счетные характеристики, которые представляют собой зависимость средней скорости счета на выходе дискриминатора (рис. 11.12) от изменения порога дискриминатора, напряжения питания ФЭУ (в общем случае — детектора), коэффициента усиления усилителя и др. Как правило, изменение почти всех параметров ПП, ведущее к нестабильности N , обусловлено эквивалентным смещением порога. Поэтому основной (универсальной) счетной характеристикой ПП является характе-

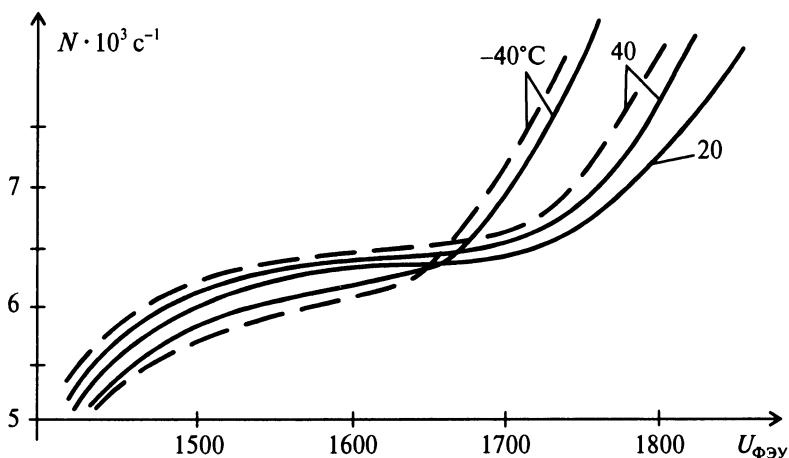


Рис. 11.12. Счетные характеристики первичного преобразователя с сцинтилляционным счетчиком $N=f(U_{\Phi})$ в зависимости от температуры (детектор NaI(Tl) размером 30×40 мм, ФЭУ-67, постоянные времени усилителя $\tau_2 = 1$ мкс, $\tau_1 = 1,5$ мкс)

ристика вида $N=f(E_{\text{п}})$. Однако в ПП с сцинтилляционным счетчиком одним из основных источников нестабильности порога $E_{\text{п}}$ и, соответственно, регистрируемой скорости счета N является напряжение питания ФЭУ U_{Φ} , то для этих ПП, как правило, имеют дело со счетными характеристиками вида $N=f(U_{\Phi})$. (Действительно, как показано в примере 11.2, изменение U_{Φ} на 1% приводит к 13%-ному изменению усиления ФЭУ и, соответственно, порога $E_{\text{п}}$.) Все изменения скорости счета, связанные с другими факторами (температура, напряжение питания и др.), приводят к эквивалентному смещению рабочей точки на этой счетной характеристике. Для стабильной регистрации N важно, чтобы на счетной характеристике имелось «плато» — участок характеристики с малым наклоном. Наличие плато зависит от многих факторов: спектра регистрируемого излучения, типа детектора, ФЭУ, частотной полосы пропускания усилителя и др. Каждый тип сцинтилляционного счетчика характеризуется некоторой номинальной счетной характеристикой и пределами отклонения счетной характеристики от номинальной характеристики.

На рис. 11.12 представлены номинальные счетные характеристики ПП с детектором NaI(Tl) при рабочих температурах 20°C , -40°C и 40°C , а также «коридор» допустимых отклонений счетной характеристики от номинальных (штриховая кривая). На этих характеристиках имеется «плато» с наклоном номинальной характеристики около 2,5% на 100 В протяженностью 200 В. С помощью этих характеристик можно выбрать рабочую точку напряжения

питания ФЭУ, соответствующую минимальной погрешности измерения N в диапазоне рабочих температур и изменению напряжения питания ФЭУ в пределах 1% (для данного примера). При $U_{\Phi 0} = 1600$ В в диапазоне температур от -40 до 40°C и при нестабильности напряжения U_{Φ} в диапазоне 1% будет составлять от 2 до -3% .

Параметры счетной характеристики существенно зависят от шумов конкретного образца детектора, обусловленных запасанием светосуммы сцинтиллятором и определяющих подъем счетной характеристики при увеличении напряжения U_{Φ} . Эти шумы возрастают при пониженных температурах и несколько снижаются при повышенных температурах, при которых, в свою очередь, возрастают электронные шумы ФЭУ, также определяемые индивидуальными характеристиками ФЭУ. Если это приводит к тому, что разброс в ходе счетной характеристики оказывается достаточно велик, то положение рабочей точки на счетной характеристике устанавливается для каждого сцинтилляционного счетчика индивидуально при настройке каждого ПП.

Пример 11.5. Рассмотрим автоматическую систему безреперной стабилизации (рис. 11.13, а), применение которой позволяет стабилизировать регистрируемую скорость счета без использования характерных реперных точек спектра (например, пика на энергетическом спектре ИИИ, см. рис. 11.6).

Устройство работает следующим образом. На входы реверсивного счетчика (РС) поступают импульсы с дискриминатора D_1 частотой N_1 и импульсы с дискриминатора D_2 , поделенные на два триггером (Т) частотой $(N_1 + N_2)/2$. При этом на выходе дискриминатора D_1 скорость счета соответствует площади на спектре выше порога E_{n1} , а на выходе дискриминатора D_2 — выше порога $E_{n2} = E_{n1}/K_{y2}$ (K_{y2} — коэффициент усиления усилителя U_2). Если скорости счета на входах реверсивного счетчика не равны, на входе интенсиметра (И) вырабатывается сигнал рассогласования пропорциональной разности $\Delta N = (N_1 - N_2)/2$, который является регулирующим сигналом преобразователя (Пр) напряжения ФЭУ.

На рис. 11.13, в приведена модель этого ПП, на которой приняты следующие обозначения: β — коэффициент передачи цепи обратной связи; K_1 , K_2 — коэффициенты передачи, отражающие приращение скоростей счета соответственно при изменении коэффициента преобразования $K_{\text{пр}}$ канала регистрации; δN_1 и $\delta(N_1 + N_2)$ — флуктуации, возникающие под действием дестабилизирующим факторов, выраженные во флуктуациях скоростей счета N_1 и $N_1 + N_2$.

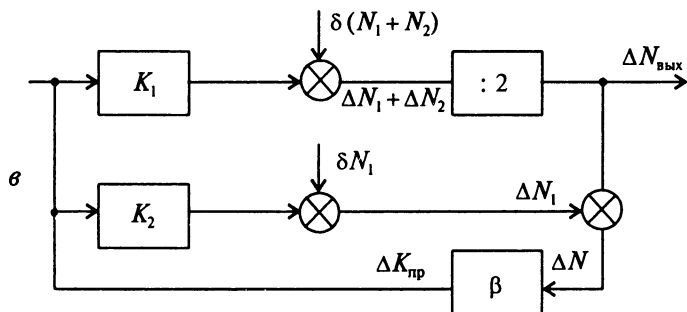
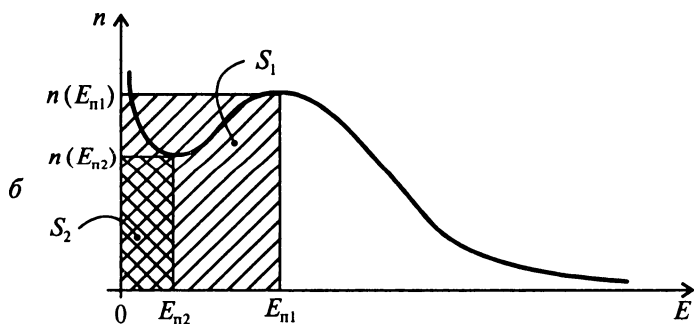
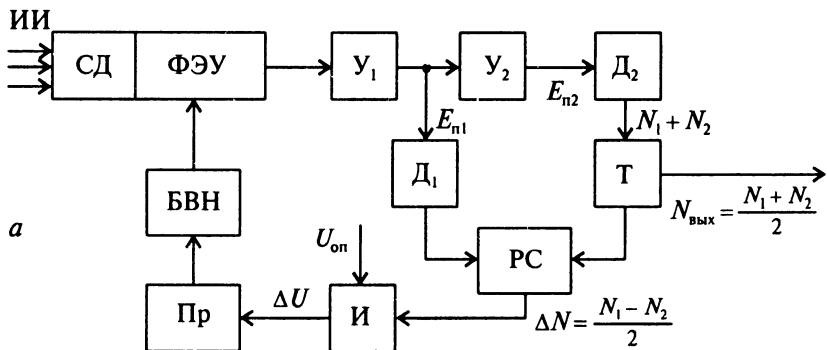


Рис. 11.13. Схема сцинтиляционного счетчика с автоматической безреперной стабилизацией (а); дифференциальный аппаратный спектр регистрируемого излучения (б); модель для расчета погрешностей (в)

Можно показать [21], что фактор обратной связи для этой системы стабилизации равен $F_{\text{ос}} = 1 + \beta S_1 - \beta S_2/2$, где $S_1 = n(E_{\text{п1}})E_{\text{п1}} = K_1 K_{\text{пр}}$ и $S_2 = n(E_{\text{п2}})E_{\text{п2}} = K_2 K_{\text{пр}}$ — площади, отмеченные штриховкой на рис. 11.13, б. При этом все основные дестабилизирующие факторы, влияющие на коэффициент преобразования $K_{\text{пр}} = U_{\text{Д1}}/E_{\text{п1}}$ (изменение напряжения питания схемы и ФЭУ, светового выхода СД, конверсионной эффективности фотокатода и т.д.) и нестабильность канала обратной связи, уменьшаются на фактор обратной связи $F_{\text{ос}}$. Например, если $S_1 = 10^4$ имп./с, $\beta = 1$, то фактор обратной связи $F_{\text{ос}} = 1000$. Эта система стабилизации для исходных данных примера 11.4 позволяет снизить суммарную дополнительную погрешность, обусловленную влиянием температуры и напряжения питания менее 1%.

11.5. ПОГРЕШНОСТИ РАДИОИЗОТОПНЫХ ПРИБОРОВ

Целью предлагаемых ниже примеров является иллюстрация разработки моделей радиоизотопных приборов для расчета составляющих погрешностей измерения, обусловленных различными дестабилизирующими факторами. Поскольку основные источники нестабильности и, соответственно, погрешности связаны с ПП, то в примерах будут использованы результаты, полученные при оценке погрешности преобразования сигналов для счетного режима работы ПП.

Пример 11.6. Ослабление потока ионизирующего излучения, проходящего через изделие толщиной x , описывается формулой (геометрия узкого пучка):

$$N_x [x(t)] = N_{x0} \exp [\mu_p \rho(t)x] = N_{x0} \exp [\mu_x x(t)], \quad (1)$$

где N_{x0} — поток излучения, падающий на измеряемое изделие, или поток при толщине $x = 0$; μ_x , μ_p — линейный и объемный коэффициенты поглощения излучения, зависящие от энергии излучения и материала изделия.

При изменении толщины и/или плотности изделия поток ионизирующего излучения будет изменяться в соответствии с (1), что и регистрируется измерительной аппаратурой. Если изделие движется, то изменение его толщины и/или плотности по длине будет развернуто во времени. На этом принципе основана работа мно-

гих радиоизотопных толщиномеров и плотномеров изделий и материалов. При измерении толщины изменение плотности, химического состава или структуры материала изделия будет вносить дополнительную погрешность, обусловленную влиянием нестабильности этих неинформативных параметров. Если стоит задача измерения плотности материала, то изменение толщины является неинформативным параметром и источником дополнительной погрешности.

Поток ионизирующего излучения (рис. 11.14), характеризуемый средней скоростью счета N_{x0} и энергией гамма-излучения E_0 , попадает на чувствительную поверхность детектора ионизирующего излучения Д⁵. Для того чтобы измерение осуществлялось на заданной площади изделия, в приборе имеется коллимационная система (КС) — это часть конструкции СИ, ограничивающая угол зрения, под которым чувствительная часть детектора (датчик) «видит» объект измерения. Излучение, сформированное КС и прошедшее измеряемое изделие, в детекторе преобразуется в электрические импульсы частотой N , которые при токовом режиме включения детектора интегрируются на интегрирующей RC-цепочке (штриховая линия), при счетном режиме суммируются счетчиком (Сч) за время T . Показывающее устройство (ПУ) представляет результат измерения $y(t)$ в единицах толщины изделия.

Модель преобразования радиационного сигнала, а также основные источники помех (шумов) и дестабилизирующих факторов, искажающих результат измерения, представлены на рис. 11.15.

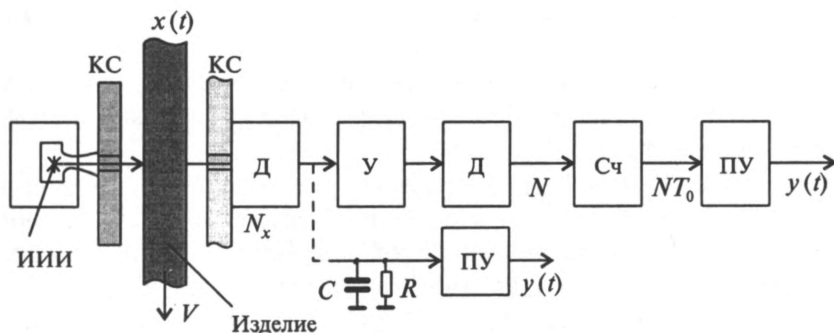


Рис. 11.14. Схема радиоизотопного прибора измерения толщины изделия

⁵ Для упрощения анализа предполагается, что энергетический спектр гамма-излучения $E(t) = E_0\delta(t)$, т.е. состоит из частиц одной энергии (моноэнергетичен).

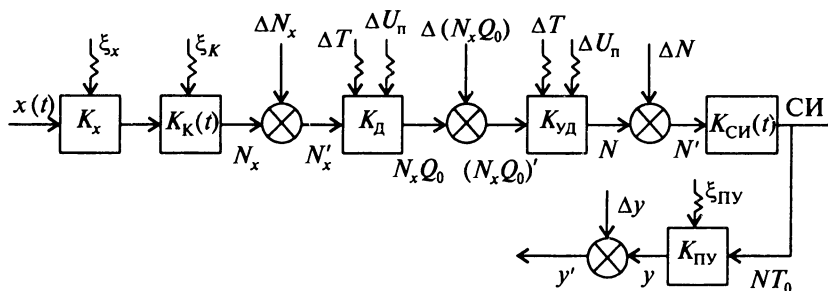


Рис. 11.15. Модель для расчета погрешностей радиоизотопного прибора: ΔN_x , $\Delta(N_x Q_0)$, ΔN , Δy — генераторы погрешностей, обусловленных характеристиками предшествующих преобразователей и воздействием дестабилизирующих факторов (ξ_x , ξ_K , ΔT , ΔU_n , $\xi_{ПУ}$)

Преобразователь K_x осуществляет преобразование изменения измеряемой величины x в среднее число частиц ионизирующего излучения N_{x0} в соответствии с формулой (1). Если определяется изменение толщины $\Delta x(t)$ относительно среднего значения \bar{x} и $\Delta x(t) \ll \bar{x}$, то зависимость $\Delta N_x(t) = f[\Delta x(t)]$ может быть заменена линейной зависимостью

$$\Delta N_x(t) \approx -\mu_x N_{\bar{x}} \Delta x(t), \quad (2)$$

где $N_{\bar{x}}$ соответствует \bar{x} . При этом коэффициент преобразования K_x будет иметь вид

$$K_x = \frac{\partial N_x}{\partial x} E_0 = -\mu_x N_{\bar{x}} E_0 \quad (3)$$

и принимается постоянным в диапазоне $\bar{x} \pm \Delta x(t)$. В противном случае для определения K_x необходимо пользоваться градуировочной зависимостью.

Преобразователь $K_K(t)$ учитывает усреднение $N_x(t)$ в поле зрения КС. Выделение $K_K(t)$ в отдельный преобразователь сделано для удобства анализа динамической погрешности. Его функции по ослаблению потока ИИ учтены преобразователем K_x .

При движении изделия ИПХ КС, выполняющей операцию скользящего усреднения, можно представить в виде

$$g_K(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta_K}, & |t| \leq \Delta_K, \\ 0, & |t| > \Delta_K, \end{cases} \quad (4)$$

где $2\Delta_K$ — временная развертка КС по ее длине, $2\Delta_K = l_K/v$, l_K — длина КС в направлении движения изделия; v — скорость движения.

Преобразователь K_D отражает преобразование энергии частиц ИИ в импульсы заряда на выходе детектора. Например, для полупроводникового детектора $K_D = q/\epsilon_D$ и для сцинтилляционного счетчика $K_D = \epsilon_1 M/\epsilon_{св}\epsilon_{ФК}$ (см. примеры 11.1 и 11.2).

Преобразователь $K_{УД}$ отражает преобразование импульса заряда в импульс напряжения (тока) на входе усилителя, усиление этого сигнала импульсным усилителем с коэффициентом усиления K_Y и дискриминацию потока импульсов по амплитуде с порогом E_n , превышающим уровень шумов. Сигналом на выходе амплитудного дискриминатора является пуассоновский поток электрических импульсов одинаковой амплитуды, средняя скорость счета которого равна N .

Преобразователь $K_{СИ}(t)$ осуществляет интегрирование числа импульсов за время T_0 . ИПХ и АФХ этого преобразователя можно представить в виде

$$g_{СИ}(t) = \begin{cases} 1/T_0, & 0 \leq t \leq T_0, \\ 0, & t < 0, t > T_0, \end{cases} \quad (5)$$

$$G_{СИ}(j\omega) = \frac{\sin \omega T_0/2}{\omega T_0/2} \exp\left(-\frac{j\omega T_0}{2}\right). \quad (6)$$

Преобразователь $K_{ПУ}$ осуществляет преобразование сигнала интегратора к виду, удобному для восприятия оператором (представление показаний в виде числа, перемещение стрелки показывающего прибора).

В этом примере радиационным сигналом является средняя скорость счета на входе детектора, которая соответствует площади амплитудного спектра выше порога $E_n = U_D/K_D K_Y$ (рис. 11.6). При этом изменение сигнала на выходе амплитудного дискриминатора $\Delta N \approx -\mu_x N_{\bar{x}} \Delta x$. Сигнал на выходе показывающего устройства, проградуированного в единицах измеряемой величины, будет равен $y_{\text{вых}} = K_{ПУ} T_0 N$, а изменение показаний $\Delta y_{\text{вых}} = K_{ПУ} T_0 \Delta N = -K_{ПУ} (\mu_x N_{\bar{x}}) T_0 \Delta x$.

Спектральная плотность мощности электронного шума, отсекаемого на входе амплитудного дискриминатора, равна

$$S_n(f) = 2qI_D |K_Y(j\omega)|^2, \quad (7)$$

где I_D — эквивалентный ток детектора, отражающий действие всех параллельных шумов на входе усилителя (см. (3) примера 11.1); $K_y(j\omega)$ — амплитудно-фазовая характеристика усилителя.

Спектральная плотность мощности шума, приведенная к измеряемой величине:

$$S_x(f) = \frac{S_n(f)}{|K_x|^2 |G_K(j\omega)|^2 |K_D|^2} = \frac{2qI_D}{(-\mu_x N_{\bar{x}} E_0)^2 |G_K(j\omega)|^2 K_D^2}. \quad (8)$$

Приведем к измеряемой величине флуктуации потока электрических импульсов на выходе амплитудного дискриминатора, учитывая, что спектральная плотность мощности этих флуктуаций равна [1] $S_{нд}(f) = 2NQ_D^2$, где Q_D — импульс заряда на выходе дискриминатора, поскольку по аналогии с (1) коэффициент преобразования $K_{хд}$, определяемый как изменение числа импульсов на выходе дискриминатора к изменению измеряемой толщины в малом диапазоне изменений около некоторого значения толщины \bar{x} , может быть представлен в виде $K_{хд} = -\mu_x N Q_D$. Тогда спектральная плотность мощности шума потока ИИ, приведенная к измеряемой величине x , будет равна

$$\begin{aligned} [S_n(f)]_{хд} &= \frac{S_{нд}(f)}{|K_{хд}|^2 |G_K(j\omega)|^2} = \frac{2NQ_D^2}{\mu_x^2 N^2 Q_D^2 |G_K(j\omega)|^2} = \\ &= \frac{2}{\mu_x^2 N^2 |G_K(j\omega)|^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Методические погрешности обусловлены неадекватностью реальной и идеальной моделей измерения, особенностями выбранного принципа измерения (проникающей способности ИИ), а также характерными свойствами этого принципа измерения, в том числе:

— флуктуацией числа частиц ИИ, обусловленной пуассоновским характером радиационного сигнала;

— флуктуацией состава реального изделия от идеализированного и/или стандартных образцов, с помощью которых осуществляется градуировка СИ;

— влиянием неинформативных параметров изделия на результат измерения;

— разбросом активности ИИИ, который может составлять десятки процентов, уменьшение этого разброса с помощью изменения

расстояния между источником и детектором, а также с помощью поглощающих пластин изменяет регистрируемый аппаратурный спектр и может приводить к увеличению методической составляющей погрешности измерения;

— уменьшением активности ИИИ со временем из-за распада используемого радионуклида;

— погрешностью аппроксимации нелинейной зависимости линейной (см. соотношение (1)).

Дополнительные методические погрешности (факторы влияния ξ_x и ξ_K), обусловлены влиянием состояния окружающей среды (температуры, влажности, давления и т.п.) и механических воздействий (вибрация, удары и т.п.) на «геометрию измерения», измеряемый параметр (толщину изделия) и др.

Основная и дополнительная составляющие инструментальной погрешности обусловлены свойствами применяемого СИ и определяются в основном ПП. Эти составляющие погрешностей подробно рассмотрены в примерах 11.3–11.5 и гл. 8 и 9.

Динамическая погрешность. Случайная динамическая погрешность, обусловленная линейными искажениями сигнала, может быть определена с помощью модели на рис. 10.3, 10.4 или 10.17. Для определения оптимальных условий измерения одновременно с динамической погрешностью целесообразно анализировать основную составляющую погрешности, обусловленную шумом радиационного сигнала по формуле (10.5). В этой формуле СПМ шума $S_n^\oplus(j\omega)$ — СПМ шума радиационного сигнала, приведенного к измеряемой величине (см. (9)):

$$S_n^\oplus(j\omega) = 2/\mu_x^2 N. \quad (10)$$

Если необходимо воспроизведение профиля изделия, то $G_0(j\omega) = 1$, если усреднение толщины изделия на длине l_0 , то $G_0(j\omega) = 0,5 \sin \omega T_0 / 0,5\omega T_0$, где $T_0 = l_0/v$, и для получения минимальной погрешности (10.5) отыскивается оптимальное соотношение между Δ_K и T , поскольку при $\Delta_K \approx 0$ можно выбрать $T \approx T_0$ или, наоборот, при $T \approx 0$ можно выбрать $T_0 \approx \Delta_K$. Решение этой задачи рассмотрено в примере 10.22.

Случайная составляющая динамической погрешности обусловлена также флуктуациями нулевой линии, приводящими к флуктуациям амплитуд регистрируемых импульсов (см. пример 10.21).

Систематическая составляющая динамической погрешности, обусловленная смещением нулевой линии и, соответственно, эквивалентным изменением порога регистрации E_n , проявляется через

потерю части регистрируемых полезных импульсов. Это так называемые просчеты, определяемые мертвым временем τ_m . При небольших регистрируемых потоках $N = N_x(1 - N_x\tau_m)$. Мертвое время снижает чувствительность СИ к измеряемому параметру, а также является причиной дополнительной погрешности при изменении мертвого времени с температурой. На рис. 11.12 смещение счетных характеристик (по оси N) ПП радиоизотопного прибора обусловлено изменением мертвого времени, которое изменяется под влиянием температуры из-за изменения времени высвечивания СД с температурой.

Пример 11.7. В тех случаях, когда необходимо обеспечить малые погрешности измерения толщины в динамике (менее 1%), в условиях изменения рабочих температур при высоком быстродействии (десятки миллисекунд) используется токовое включение ионизационной камеры (ИК) с усилением сигнала постоянного тока с помощью усилителя с модуляцией и демодуляцией (МДМ).

В схеме измерителя проката в токовом режиме (рис. 11.16) в отличие от предыдущей установки (пример 11.6) импульсы заряда с ИК интегрируются на входной емкости усилителя C и усиливаются МДМ-услителем (примерно в 1000 раз) до уровня, необходимого для нормальной работы АЦП. Сигнал с АЦП обрабатывается вычислительным устройством (ВУ) в соответствии с заложенной в нем номинальной градуировочной зависимостью. Сигнал с ВУ может преобразовываться в ЦАП в непрерывный сигнал и передаваться на усилитель мощности (УМ) для управления прокатным станом. Программа ВУ корректируется в соответствии с уставками, задающими толщину проката, сорт стали, режим проката и т.д.

Для обеспечения нормальной работы установки и достижения необходимой погрешности измерения:

- рабочая температура ПП, включая АЦП, поддерживается в диапазоне 25–35°C с помощью водяной рубашки, непрерывно охлаждаемой проточной водой;

- рабочая температура сопротивления обратной связи R_{oc} , определяющего коэффициент усиления МДМ-усилителя, поддерживается в термостате с точностью $\pm 0,5^\circ\text{C}$, поскольку выходной сигнал усилителя $U_{\text{вых}} = I_{\text{вх}} R_{oc}$.

К особенностям этой установки можно отнести:

- слабую зависимость эффективности регистрации гамма-излучения радионуклида америция-241 от температуры окружающей среды;

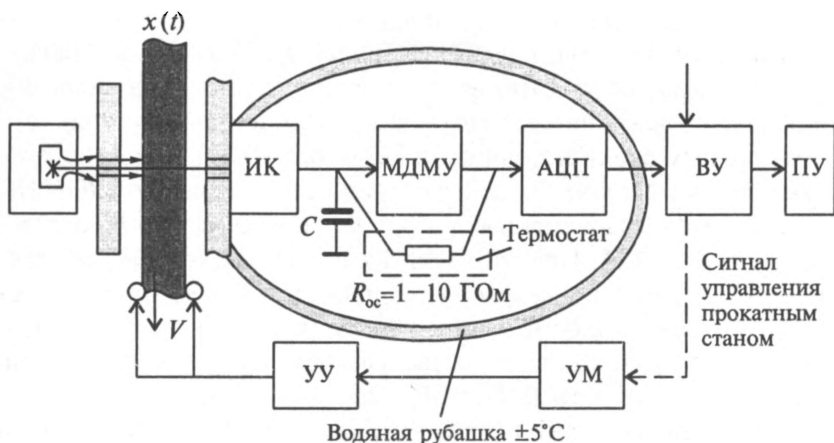


Рис. 11.16. Схема установки измерения толщины стального листа (проката)

— слабое изменение активности радионуклида со временем (период полураспада америция-241 составляет 433 года), а также возможность автоматической подстройки градуировочной зависимости в ВУ с учетом временного распада радионуклида;

— практически отсутствие влияния электронных шумов ИК на результат измерения (обратный ток — ток утечки ИК снижен благодаря охранному кольцу вокруг сигнального электрода ИК);

— полный сбор носителей с ИК, длительность которых может изменяться из-за температуры и напряжения питания ($I_{\text{вх}} = QN_{x0}$);

— отсутствие погрешности, связанной с нестабильностью мертвого времени, присущей всем СИ, работающим в счетном режиме.

Составляющие методической и инструментальной погрешностей подобны тем, которые были рассмотрены в примере 11.6. Составляющая инструментальной погрешности, обусловленная отличием градуировочной зависимости от номинальной, в этой установке устраняется индивидуальной градуировкой и соответствующей корректировкой ВУ.

Дисперсия динамической и основной составляющей погрешности из-за флуктуации радиационного сигнала определяется формулами (5) и (10) примера 10.18., где $G_0(j\omega) = 1$, $G_{\text{СИ}}(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau)$, $\tau = CR_{\text{oc}}$; $S_x^\oplus(\omega) = 2\alpha\sigma_x^2/(1 + \alpha^2\omega^2)$, $\alpha = \tau_x^{-1}$, $\tau_x = l_x/v$, l_x — постоянная линейной корреляции толщины проката; $S_N^\oplus(\omega) = 2/(\mu_x^2 N_x^2)$. В примере 10.19 приведена оценка регистрируемой скорости счета N при заданной относительной динамической погрешности.

Пример 11.8. На рис 11.17 приведена схема радиоизотопного следящего уровнемера, предназначенного для измерения положения уровня жидкости относительно базовой точки (дна емкости), а также для слежения за изменением уровня в этой емкости.

Поскольку блоки источника и детектора (БИ и БД) конструктивно жестко связаны с электромеханическим приводом (ЭМП), система находится в равновесии, когда на детектор поступает половина ИИ от БИ. При этом сигнал на выходе устройства сравнения (УС) равен нулю (рис. 11.17 и 11.18). При заполнении емкости уровень жидкости начинает перекрывать поток излучения, и на выходе УС появляется сигнал рассогласования $+\Delta U$, который приводит в движение ЭМП с БД и БИ, осуществляя слежение за уровнем. При снижении уровня на выходе УС вырабатывается сигнал противоположной полярности ($-\Delta U$), и ЭМП начинает движение вниз. Отсчет уровня жидкости производится электромеханическим устройством (ЭМУ) по положению системы БИ–БД.

На рис. 11.19 приведена модель для расчета погрешностей уровнемера.

Преобразователь K_h осуществляет преобразование изменения положения системы БИ–БД относительно уровня Δh в изменение потока излучения, падающего на чувствительную поверхность детектора, $\Delta N = f(\Delta h)$, где $\Delta N = N - N_0 = N - N_m/2 = (N_m/l_K)\Delta h$, в пределах режима слежения, когда рассогласование (расстояние) между

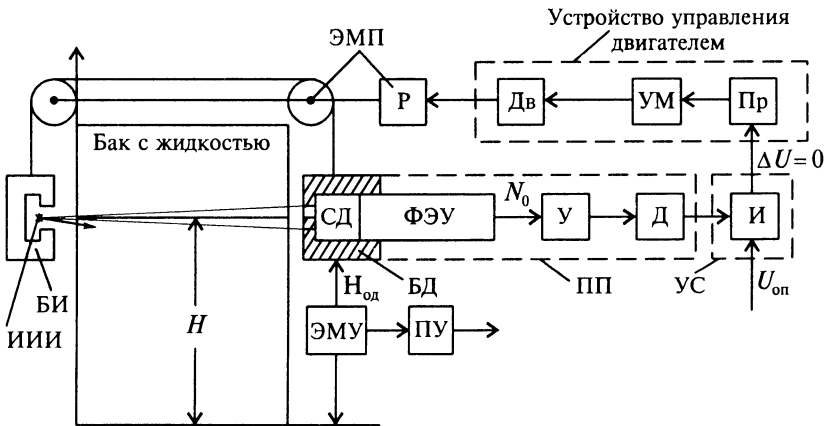


Рис. 11.17. Схема радиоизотопного следящего уровнемера: Р — редуктор; Дв — электродвигатель; Пр — преобразователь сигнала с интенсивметра (И) в сигнал на усилитель мощности (УМ). На схеме показаны сигналы, соответствующие состоянию равновесия системы слежения

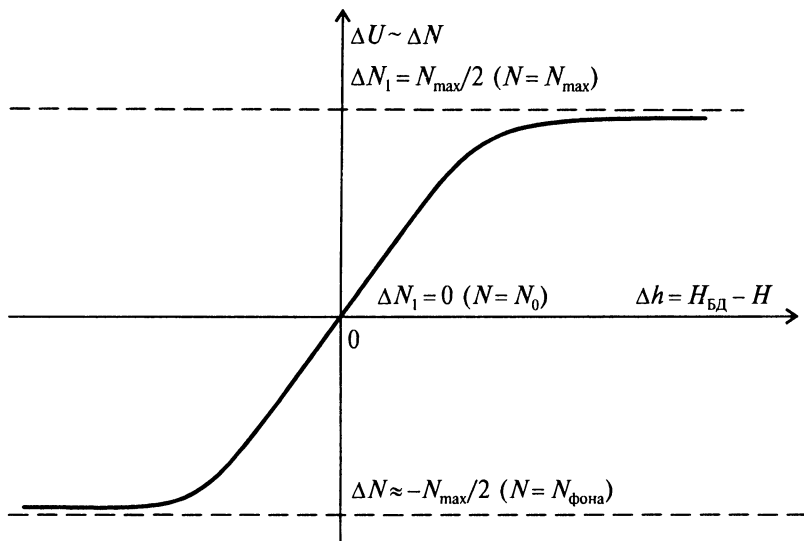


Рис. 11.18. Зависимость сигнала рассогласования от положения системы БД–БИ относительно уровня жидкости H (чувствительность преобразования $S_h = \Delta N/\Delta h \approx \Delta U/\Delta h$)

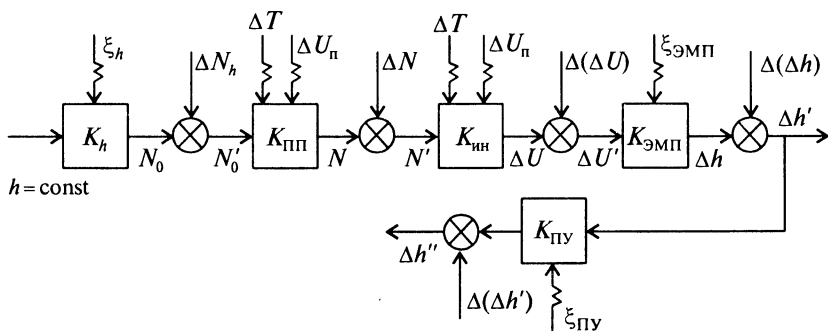


Рис. 11.19. Модель для расчета погрешности измерения (слежения) уровня: $K_h, K_{ПП}, K_{ИН}, K_{ЭМП}$ — преобразователи изменения входного сигнала в изменение выходного сигнала; $\Delta N_h, \Delta N, \Delta(\Delta U), \Delta(\Delta h), \Delta(\Delta h')$ — генераторы погрешностей на выходе соответствующих преобразователей

уровнем и системой БИ–БД не превышает $\pm l_K/2$, где l_K — длина КС БИ–БД.

Преобразователь $K_{ПП}$ осуществляет первичное преобразование радиационного сигнала в счетном (или токовом) режиме и формирует сигнал, удобный для работы УС (см. пример 11.4).

Преобразователь $K_{ИН}$ осуществляет интегрирование числа импульсов с постоянной времени τ и выдает сигнал сравнения для

приведения в действие ЭМП. Передаточная функция этого преобразователя имеет вид

$$G_{ин}(p) = K_{ин0}/(1 + p\tau).$$

Преобразователь $K_{ЭМП}$ приводит в движение ЭМП с помощью электродвигателя с редуктором по сигналу рассогласования. Передаточная функция этого преобразователя может быть представлена в виде

$$G_{ЭМП}(p) = G_{Эд}(p)G_{П}(p) = \frac{K_{ЭМП}}{p(1 + p\tau)},$$

где $G_{Эд}(p) = K_{Эд0}/p$ — передаточная функция двигателя; $G_{П}(p) = K_{П0}/(1 + p\tau_{П})$ — передаточная функция ЭМП с учетом передаточного числа редуктора; $\tau_{П}$ — постоянная времени ЭМП.

Преобразователь $K_{ПУ}$ осуществляет преобразование положения системы БИ–БД в показания в цифровом или аналоговом виде, определяющие измеренный уровень жидкости.

Отметим составляющие погрешностей, связанные с особенностями радиоизотопного следящего уравнивателя в дополнение к погрешностям, рассмотренным для ПП в счетном режиме (пример 11.4) и радиоизотопного измерителя толщины (пример 11.6).

Составляющие *методической погрешности* радиоизотопного следящего уравнивателя обусловлены: колебаниями поверхности жидкости между БИ и БД, толщины стенок емкости и их химического состава; наличием сварных швов, утолщений, элементов конструкций внутри емкости; растяжением тросов подвески системы БИ–БД и др.

Динамическая погрешность радиоизотопного следящего уравнивателя равна разнице $\Delta h(t)$ между вертикальными координатами системы БИ–БД и уровня при его изменении в данный момент времени. Используя модель на рис. 11.20 и очевидные соотношения в операторном виде $\Delta h(p) = H(p) - H'(p) = H(p) - \Delta h(p)W(p)$, получаем выражение для динамической погрешности слежения за уровнем

$$\Delta h(p) = H(p)/[1 + W(p)],$$

где

$$W(p) = \frac{K_h K_{пп} K_{ин0} K_{Эд0} K_{П0}}{p(1 + p\tau)(1 + p\tau_{П})} = \frac{K_{\Sigma}}{p(1 + p\tau)(1 + p\tau_{П})}.$$

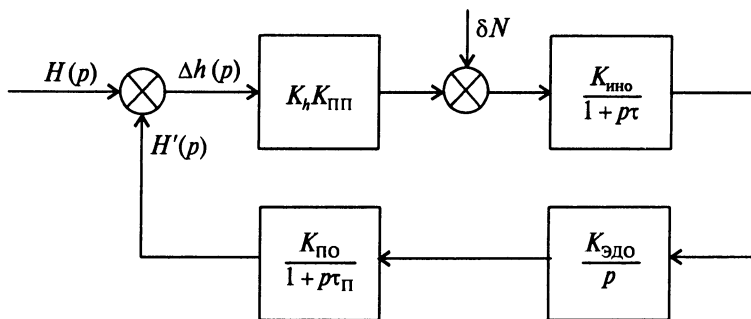


Рис. 11.20. Модель для расчета динамической погрешности слежения за уровнем

Можно показать, что при скачкообразном изменении уровня, т.е. при $H(p) = \Delta H/p$, динамическая погрешность будет стремиться к нулю. Действительно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\Delta h(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\Delta H}{p} \Delta h(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\Delta H p (1 + p\tau)(1 + p\tau_{П})}{p(1 + p\tau)(1 + p\tau_{П}) + K_{\Sigma}} \rightarrow 0.$$

При линейном изменении уровня, т.е. при $H(p) = H_0/p^2$, динамическая погрешность будет стремиться к некоторому постоянному значению и слежение будет осуществляться с некоторой постоянной динамической погрешностью. Действительно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\Delta h(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{H_0}{p^2} \Delta h(p) \rightarrow \frac{H_0}{K_{\Sigma}}.$$

Законы распределения случайных величин

Закон распределения	Аналитическое выражение закона распределения $p(x)$	График $p(x)$	Математическое ожидание	Дисперсия
Пуассона	$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, x = 0, 1, 2, \dots$		λ	λ
Равномерный (прямоугольный)	$\frac{1}{b-a}, a < x < b$		$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Нормальный (гауссовский)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right], -\infty < x < \infty, \sigma > 0$		m	σ^2
Хи-квadrat	$\frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{0.5k-1} e^{-0.5x}, 0 < x < \infty, k > 0$		n	$2n$

Закон распределения	Аналитическое выражение закона распределения $p(x)$	График $p(x)$	Математическое ожидание	Дисперсия
F-распределение	$\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) \left(\frac{k_1}{2}\right)^{\frac{k_1}{2}} \left(\frac{k_2}{2}\right)^{\frac{k_2}{2}} x^{\frac{k_1}{2}-1} \left(1+\frac{k_1}{k_2}x\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) \sqrt{k_2} \left(1+\frac{k_1}{k_2}x\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}$ $0 < x < \infty, k_1 > 0, k_2 > 0$		$\frac{k_2}{k_2-2},$ $k_2 > 2$	$\frac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)},$ $k_2 > 4$
t-распределение Стьюдента	$\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{k\pi}} \left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$ $-\infty < x < \infty, k = 1, 2, \dots$		0	$\frac{k}{k-2}, k > 2$
Симпсона (треугольное)	$\begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < a, b < x < \infty, \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} & \text{при } a \leq x \leq \frac{a+b}{2}, \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} & \text{при } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases}$		$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{24}$

Таблица П2

Дифференциальная функция нормированного нормального распределения

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5t^2}$$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,3989	1,0	0,2420	2,0	0,0540	3,0	0,0044
0,1	0,3970	1,1	0,2179	2,1	0,0440	3,1	0,0033
0,2	0,3910	1,2	0,1942	2,2	0,0355	3,2	0,0024
0,3	0,3814	1,3	0,1714	2,3	0,0283	3,3	0,0017
0,4	0,3683	1,4	0,1497	2,4	0,0224	3,4	0,0012
0,5	0,3521	1,5	0,1295	2,5	0,0175	3,5	0,0009
0,6	0,3332	1,6	0,1109	2,6	0,0136	3,6	0,0006
0,7	0,3123	1,7	0,9400	2,7	0,0104	3,7	0,0004
0,8	0,2897	1,8	0,0790	2,8	0,0079	3,8	0,0003
0,9	0,2661	1,9	0,0656	2,9	0,0060	3,9	0,0002

Таблица П3

Интегральная функция нормированного нормального распределения

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-0,5t^2} dt$$

t	$\Phi(z)$	t	$\Phi(z)$	t	$\Phi(z)$	t	$\Phi(z)$
-3,5	0,00023	-1,7	0,0446	+0,0	0,5000	+1,8	0,9641
-3,4	0,00034	-1,6	0,0548	+0,1	0,5398	+1,9	0,9713
-3,3	0,00048	-1,5	0,0668	+0,2	0,5793	+2,0	0,9773
-3,2	0,00069	-1,4	0,0808	+0,3	0,6179	+2,1	0,9821
-3,1	0,00097	-1,3	0,0968	+0,4	0,6554	+2,2	0,9861
-3,0	0,00135	-1,2	0,1151	+0,5	0,6915	+2,3	0,9893
-2,9	0,0019	-1,1	0,1357	+0,6	0,7257	+2,4	0,9918
-2,8	0,0026	-1,0	0,1587	+0,7	0,7580	+2,5	0,9938
-2,7	0,0035	-0,9	0,1841	+0,8	0,7881	+2,6	0,9953
-2,6	0,0047	-0,8	0,2119	+0,9	0,8159	+2,7	0,9965
-2,5	0,0062	-0,7	0,2420	+1,0	0,8413	+2,8	0,9974
-2,4	0,0082	-0,6	0,2743	+1,1	0,8643	+2,9	0,9981
-2,3	0,0107	-0,5	0,3085	+1,2	0,8849	+3,0	0,99865
-2,2	0,0139	-0,4	0,3446	+1,3	0,9032	+3,1	0,99903
-2,1	0,0179	-0,3	0,3821	+1,4	0,9192	+3,2	0,99931
-2,0	0,0228	-0,2	0,4207	+1,5	0,9332	+3,3	0,99952
-1,9	0,0287	-0,1	0,4602	+1,6	0,9452	+3,4	0,99966
-1,8	0,0359	-0,0	0,5000	+1,7	0,9554	+3,5	0,99977

Таблица П4

**Интегральная функция нормированного нормального распределения.
Значения z для различных $\Phi(z)$**

$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z
0,0005	-3,2905	0,25	-0,6745	0,50	+0,000	0,80	+0,8416
0,005	-2,5750	0,30	-0,5244	0,55	+0,1257	0,85	+1,0364
0,01	-2,3267	0,35	-0,3853	0,60	+0,2533	0,90	+1,2816
0,05	-1,6449	0,40	-0,2533	0,65	+0,3853	0,95	+1,6449
0,10	-1,2816	0,45	-0,1257	0,70	+0,5244	0,99	+2,3267
0,15	-1,0364	0,50	-0,0000	0,75	+0,6745	0,995	+2,5750
0,20	-0,8416					0,9995	+3,2905

Таблица П5

Распределение Стьюдента $P\{|t| < t_P\} = 2 \int_0^{t_P} S(t, k) dt$

k	P											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Распределение Стьюдента $P\{|t| < t_p\} = 2 \int_0^{t_p} S(t, k) dt$ для различных t_p

k	t_p				k	t_p			
	2,0	2,5	3,0	3,5		2,0	2,5	3,0	3,5
1	0,7048	0,7578	0,7952	0,8228	12	0,9314	0,9720	0,9890	0,9956
2	0,8164	0,8764	0,9046	0,9276	13	0,9392	0,9737	0,9898	0,9960
3	0,8606	0,9122	0,9424	0,9606	14	0,9348	0,9740	0,9904	0,9964
4	0,8838	0,9332	0,9600	0,9752	15	0,9360	0,9754	0,9910	0,9968
5	0,8980	0,9454	0,9700	0,9828	16	0,9372	0,9764	0,9916	0,9970
6	0,9076	0,9534	0,9760	0,9872	17	0,9382	0,9770	0,9920	0,9972
7	0,9144	0,9590	0,9800	0,9900	18	0,9392	0,9776	0,9924	0,9974
8	0,9194	0,9630	0,9830	0,9920	19	0,9400	0,9782	0,9926	0,9976
9	0,9234	0,9662	0,9850	0,9932	20	0,9408	0,9788	0,9930	0,9978
10	0,9266	0,9686	0,9866	0,9942	∞	0,9545	0,9876	0,9973	0,9995
11	0,9292	0,9704	0,9880	0,9950					

Интегральная функция распределения Пирсона. Значения $\chi^2_{k,P}$ для различных k и P

$$P(\chi^2_{k,P}) = \int_0^{\chi^2_{k,P}} P(\xi) d\xi$$

k	P													
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	
1	0,0002	0,0006	0,0040	0,0158	0,0064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	
3	0,1115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	

k	P													
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	
20	8,260	9,237	10,851	12,444	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,710	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	

Значения критерия Аббе v_q

n	v_q при q , равном			n	v_q при q , равном		
	0,001	0,01	0,05		0,001	0,01	0,05
4	0,295	0,313	0,390	13	0,295	0,431	0,578
5	0,208	0,269	0,410	14	0,311	0,447	0,591
6	0,182	0,281	0,455	15	0,327	0,461	0,603
7	0,185	0,307	0,468	16	0,341	0,474	0,614
8	0,202	0,331	0,491	17	0,355	0,487	0,624
9	0,221	0,354	0,512	18	0,368	0,499	0,633
10	0,241	0,376	0,531	19	0,381	0,510	0,642
11	0,260	0,396	0,548	20	0,393	0,520	0,650
12	0,278	0,414	0,564				

Таблица П9

Значения v_q при различных числах измерения n

n	$q = 1 - P$				n	$q = 1 - P$			
	0,10	0,05	0,025	0,01		0,10	0,05	0,025	0,01
3	1,406	1,412	1,414	1,414	14	2,297	2,461	2,602	2,759
4	1,645	1,689	1,710	1,723	15	2,326	2,493	2,638	2,808
5	1,731	1,869	1,917	1,955	15	2,354	2,523	2,670	2,837
6	1,894	1,996	2,067	2,130	17	2,380	2,551	2,701	2,871
7	1,974	2,093	2,182	2,265	18	2,404	2,557	2,728	2,903
8	2,041	2,172	2,273	2,374	19	2,426	2,600	2,754	2,932
9	2,097	2,237	2,349	2,464	20	2,447	2,623	2,778	2,959
10	2,146	2,294	2,414	2,540	21	2,467	2,644	2,801	2,984
11	2,190	2,383	2,470	2,606	22	2,486	2,664	2,823	3,008
12	2,229	2,387	2,519	2,663	23	2,504	2,683	2,843	3,030
13	2,264	2,426	2,562	2,714	24	2,520	2,701	2,862	3,051
					25	2,537	2,717	2,880	3,071

F-распределение Фишера. Значения F_{k_1, k_2} для доверительных вероятностей P

k_2	P	k_1											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,75	5,83	7,50	8,20	8,58	8,82	8,98	9,10	9,19	9,26	9,32	9,36	9,41
	0,90	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9	60,2	60,5	60,7
	0,95	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
	0,99												
2	0,75	2,57	3,00	3,15	3,23	3,28	3,31	3,34	3,35	3,37	3,38	3,39	3,39
	0,90	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,40	9,41
	0,95	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
	0,99	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4
3	0,75	2,02	2,28	2,36	2,39	2,41	2,42	2,43	2,44	2,44	2,44	2,45	2,45
	0,90	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,22
	0,95	10,1	9,55	9,38	9,28	9,10	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
	0,99	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	27,1
4	0,75	1,81	2,00	2,05	20,6	2,07	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08
	0,90	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,91	3,90
	0,95	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91
	0,99	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,4
5	0,75	1,69	1,85	1,88	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89
	0,90	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,28	3,27
	0,95	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68
	0,99	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,96	9,89
6	0,75	1,62	1,76	1,78	1,79	1,79	1,78	1,78	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77
	0,90	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,92	2,90
	0,95	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
	0,99	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	0,75	1,57	1,70	1,72	1,72	1,71	1,71	1,70	1,70	1,69	1,69	1,69	1,68
	0,90	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,68	2,67
	0,95	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
	0,99	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47
8	0,75	1,54	1,66	1,67	1,66	1,66	1,65	1,64	1,64	1,64	1,63	1,63	1,62
	0,90	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50
	0,95	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
	0,99	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	0,75	1,51	1,62	1,63	1,63	1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,58
	0,90	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38
	0,95	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
	0,99	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	0,75	1,49	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54
	0,90	3,28	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28
	0,95	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
	0,99	10,0	7,56	6,55	5,99	5,84	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71

k_2	P	k_1											
		15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞
1	0,75	9,49	9,58	9,63	9,67	9,71	9,74	9,76	9,78	9,80	9,82	9,84	9,85
	0,90	61,2	61,7	62,0	62,3	62,5	62,7	62,8	63,0	63,1	63,2	63,3	63,3
	0,95	246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254
	0,99												
2	0,75	341	343	343	344	345	345	346	347	347	348	348	348
	0,90	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,47	9,48	9,48	9,49	9,49	9,49
	0,95	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
	0,99	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	0,75	2,46	2,46	2,46	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47
	0,90	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,15	5,14	5,14	5,14	5,14	5,13
	0,95	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,57	8,55	8,55	8,54	8,53	8,53
	0,99	26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,4	26,3	26,2	26,2	26,2	26,1	26,1
4	0,75	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08
	0,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,80	3,79	3,78	3,78	3,77	3,76	3,76
	0,95	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,69	5,66	5,66	5,65	5,64	5,63
	0,99	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,7	13,6	13,6	13,5	13,5	13,5
5	0,75	1,89	1,88	1,88	1,88	1,88	1,88	1,87	1,87	1,87	1,87	1,87	1,87
	0,90	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,15	3,14	3,13	3,12	3,12	3,11	3,10
	0,95	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,43	4,41	4,40	4,39	4,37	4,36
	0,99	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,20	9,13	9,11	9,08	9,04	9,02
6	0,75	1,76	1,76	1,75	1,75	1,75	1,75	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74
	0,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,73	2,73	2,72
	0,95	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,74	3,71	3,70	3,69	3,68	3,67
	0,99	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,09	7,05	6,99	6,97	6,93	6,90	6,88
7	0,75	1,68	1,67	1,67	1,66	1,66	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65
	0,90	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,52	2,51	2,50	2,49	2,48	2,48	2,47
	0,95	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,30	3,27	3,27	3,25	3,24	3,23
	0,99	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,86	5,82	5,75	5,74	5,70	5,67	5,65
8	0,75	1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,59	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58
	0,90	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,35	2,34	2,32	2,32	2,31	2,30	2,29
	0,95	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	3,01	2,97	2,97	2,95	2,94	2,93
	0,99	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,07	5,03	4,96	4,95	4,91	4,88	4,86
9	0,75	1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54	1,54	1,53	1,53	1,53	1,53	1,53
	0,90	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,22	2,21	2,19	2,18	2,17	2,17	2,16
	0,95	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,79	2,76	2,75	2,73	2,72	2,71
	0,99	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,52	4,48	4,42	4,40	4,36	4,33	4,31
10	0,75	1,53	1,52	1,52	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49	1,49	1,49	1,48	1,48
	0,90	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,12	2,11	2,09	2,08	2,07	2,06	2,06
	0,95	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,62	2,59	2,58	2,56	2,55	2,54
	0,99	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,08	4,01	4,00	3,96	3,93	3,91

k_2	P	k_1											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	0,75	1,47	1,58	1,58	1,57	1,56	1,55	1,54	1,53	1,53	1,52	1,52	1,51
	0,90	3,22	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21
	0,95	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
	0,99	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	0,75	1,46	1,56	1,56	1,55	1,54	1,53	1,52	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49
	0,90	3,18	2,18	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,17	2,15
	0,95	4,75	3,89	3,49	3,29	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
	0,99	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	0,75	1,45	1,54	1,54	1,53	1,52	1,51	1,60	1,49	1,49	1,48	1,47	1,47
	0,90	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,12	2,10
	0,95	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
	0,99	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	0,75	1,44	1,53	1,53	1,52	1,51	1,50	1,48	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45
	0,90	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,08	2,05
	0,95	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53
	0,99	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	0,75	1,43	1,52	1,52	1,51	1,49	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45	1,44	1,44
	0,90	2,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02
	0,95	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48
	0,99	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	0,75	1,42	1,51	1,51	1,50	1,48	1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44
	0,90	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2,01	1,99
	0,95	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42
	0,99	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,79	3,69	3,62	3,55
17	0,75	1,42	1,51	1,50	1,49	1,47	1,46	1,45	1,44	1,43	1,43	1,42	1,41
	0,90	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,98	1,96
	0,95	3,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38
	0,99	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,58	3,52	3,46
18	0,75	1,41	1,50	1,49	1,48	1,46	1,45	1,44	1,43	1,42	1,42	1,41	1,40
	0,90	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,96	1,93
	0,95	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
	0,99	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37
19	0,75	1,41	1,49	1,49	1,47	1,46	1,44	1,43	1,42	1,41	1,41	1,40	1,40
	0,90	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,94	1,91
	0,95	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31
	0,99	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,53	3,43	3,36	3,30
20	0,75	1,40	1,49	1,48	1,46	1,45	1,44	1,42	1,42	1,41	1,40	1,39	1,39
	0,90	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,92	1,89
	0,95	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28
	0,99	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23

k_2	P	k_1											
		15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞
11	0,75	1,50	1,49	1,49	1,48	1,47	1,47	1,47	1,46	1,46	1,46	1,45	1,45
	0,90	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,04	2,03	2,00	2,00	1,99	1,98	1,97
	0,95	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,49	2,46	2,45	2,43	2,42	2,40
	0,99	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,81	3,78	3,71	3,69	3,66	3,62	3,60
12	0,75	1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44	1,43	1,43	1,43	1,42	1,42
	0,90	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,93	1,92	1,91	1,90
	0,95	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,38	2,35	2,34	2,32	2,31	2,30
	0,99	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,57	3,54	3,47	3,45	3,41	3,38	3,36
13	0,75	1,46	1,45	1,44	1,43	1,42	1,42	1,42	1,41	1,41	1,40	1,40	1,40
	0,90	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,92	1,90	1,88	1,88	1,86	1,85	1,85
	0,95	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,31	2,30	2,26	2,25	2,23	2,22	2,21
	0,99	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,38	3,34	3,27	3,25	3,22	3,19	3,17
14	0,75	1,44	1,43	1,42	1,41	1,41	1,40	1,40	1,39	1,39	1,39	1,38	1,38
	0,90	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,87	1,86	1,83	1,82	1,80	1,80	1,80
	0,95	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,22	2,19	2,18	2,16	2,14	2,13
	0,99	3,66	3,51	3,43	2,35	3,27	3,22	3,18	3,11	3,09	3,06	3,03	3,00
15	0,75	1,43	1,41	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,38	1,37	1,37	1,36	1,36
	0,90	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,83	1,82	1,79	1,79	1,77	1,76	1,76
	0,95	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,16	2,12	2,11	2,10	2,08	2,07
	0,99	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,08	3,05	2,98	2,96	2,92	2,89	2,87
16	0,75	1,31	1,40	1,39	1,38	1,37	1,37	1,36	1,36	1,35	1,35	1,34	1,34
	0,90	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,79	1,78	1,76	1,75	1,74	1,73	1,72
	0,95	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,12	2,11	2,07	2,06	2,02	2,02	2,01
	0,99	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,97	2,93	2,86	2,84	2,81	2,78	2,75
17	0,75	1,40	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,35	1,34	1,34	1,34	1,33	1,33
	0,90	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,76	1,75	1,75	1,72	1,71	1,69	1,69
	0,95	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,08	2,06	2,02	2,01	1,99	1,97	1,96
	0,99	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,87	2,83	2,76	2,75	2,71	2,68	2,65
18	0,75	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,34	1,34	1,33	1,33	1,32	1,32	1,32
	0,90	1,89	1,84	1,61	1,78	1,75	1,74	1,72	1,70	1,69	1,68	1,67	1,66
	0,95	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,04	2,02	1,98	1,97	1,95	1,93	1,92
	0,99	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,78	2,75	2,68	2,66	2,62	2,59	2,57
19	0,75	1,38	1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,33	1,32	1,32	1,31	1,31	1,30
	0,90	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,71	1,70	1,67	1,67	1,65	1,64	1,63
	0,95	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,98	1,94	1,93	1,91	1,89	1,88
	0,99	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,71	2,67	2,60	2,58	2,55	2,51	2,49
20	0,75	1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,33	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30	1,29
	0,90	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,69	1,68	1,65	1,64	1,63	1,62	1,61
	0,95	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,95	1,91	1,90	1,88	1,86	1,84
	0,99	3,09	2,94	2,86	2,78	2,68	2,64	2,61	2,54	2,52	2,48	2,44	2,42

k_2	P	k_1											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
22	0,75	1,40	1,48	1,47	1,45	1,44	1,42	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,37
	0,90	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,88	1,86
	0,95	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23
	0,99	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12
24	0,75	1,39	1,47	1,46	1,44	1,43	1,41	1,40	1,39	1,38	1,38	1,37	1,36
	0,90	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,85	1,83
	0,95	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18
	0,99	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03
26	0,75	1,38	1,46	1,45	1,44	1,42	1,41	1,40	1,39	1,37	1,37	1,36	1,35
	0,90	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,84	1,81
	0,95	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15
	0,99	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96
28	0,75	1,38	1,46	1,45	1,43	1,41	1,40	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,34
	0,90	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79
	0,95	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12
	0,99	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90
30	0,75	1,38	1,45	1,44	1,42	1,41	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,35	1,34
	0,90	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,79	1,77
	0,95	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09
	0,99	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84
40	0,75	1,36	1,44	1,42	1,40	1,39	1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,32	1,31
	0,90	2,84	2,44	2,23	2,09	1,93	1,87	1,83	1,83	1,79	1,76	1,73	1,71
	0,95	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00
	0,99	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66
60	0,75	1,35	1,42	1,41	1,38	1,37	1,35	1,33	1,32	1,31	1,30	1,29	1,29
	0,90	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,68	1,66
	0,95	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
	0,99	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50
120	0,75	1,34	1,40	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26
	0,90	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,62	1,60
	0,95	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83
	0,99	6,85	4,79	3,95	3,45	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34
200	0,75	1,33	1,39	1,38	1,36	1,34	1,32	1,31	1,29	1,28	1,27	1,26	1,25
	0,90	2,73	2,33	2,11	1,97	1,88	1,80	1,75	1,70	1,66	1,63	1,60	1,57
	0,95	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80
	0,99	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27
∞	0,75	1,32	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31	1,29	1,28	1,27	1,25	1,24	1,24
	0,90	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,57	1,55
	0,95	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75
	0,99	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18

k_2	P	k_1											
		15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞
22	0,75	1,36	1,34	1,33	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30	1,30	1,29	1,29	1,28
	0,90	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,65	1,64	1,61	1,60	1,59	1,58	1,57
	0,95	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,89	1,85	1,84	1,82	1,80	1,78
	0,99	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,50	2,42	2,40	2,36	2,33	2,31
24	0,75	1,35	1,33	1,32	1,31	1,30	1,29	1,29	1,28	1,28	1,27	1,27	1,26
	0,90	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,62	1,61	1,58	1,57	1,56	1,54	1,53
	0,95	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,84	1,80	1,79	1,77	1,75	1,73
	0,99	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,40	2,33	2,31	2,27	2,24	2,21
26	0,75	1,34	1,32	1,31	1,30	1,29	1,28	1,28	1,26	1,26	1,26	1,25	1,25
	0,90	1,76	1,71	1,68	1,68	1,61	1,59	1,58	1,55	1,54	1,53	1,51	1,50
	0,95	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,80	1,76	1,75	1,73	1,71	1,69
	0,99	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,36	2,33	2,25	2,23	2,19	2,16	2,13
28	0,75	1,33	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,27	1,26	1,25	1,25	1,24	1,24
	0,90	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,57	1,56	1,53	1,53	1,50	1,49	1,48
	0,95	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,79	1,77	1,73	1,71	1,69	1,67	1,65
	0,99	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,30	2,26	2,19	2,17	2,13	2,09	2,06
30	0,75	1,32	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26	1,26	1,25	1,24	1,24	1,23	1,23
	0,90	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,55	1,54	1,51	1,50	1,48	1,47	1,46
	0,95	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,74	1,70	1,68	1,66	1,64	1,62
	0,99	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,25	2,21	2,13	2,11	2,07	2,03	2,01
40	0,75	1,30	1,28	1,26	1,25	1,24	1,23	1,22	1,21	1,21	1,20	1,19	1,19
	0,90	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,48	1,47	1,43	1,42	1,41	1,39	1,38
	0,95	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,64	1,59	1,58	1,55	1,53	1,51
	0,99	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,06	2,02	1,94	1,92	1,87	1,83	1,80
60	0,75	1,27	1,25	1,24	1,22	1,21	1,20	1,19	1,17	1,17	1,16	1,15	1,15
	0,90	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,41	1,40	1,36	1,35	1,33	1,31	1,29
	0,95	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,53	1,48	1,47	1,44	1,41	1,39
	0,99	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,88	1,84	1,74	1,73	1,68	1,63	1,60
120	0,75	1,24	1,22	1,21	1,19	1,18	1,17	1,16	1,14	1,13	1,12	1,11	1,10
	0,90	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,34	1,34	1,27	1,26	1,24	1,21	1,19
	0,95	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,46	1,43	1,37	1,35	1,32	1,28	1,25
	0,99	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,70	1,66	1,56	1,53	1,48	1,42	1,38
200	0,75	1,23	1,21	1,20	1,18	1,16	1,14	1,12	1,11	1,10	1,09	1,08	1,06
	0,90	1,52	1,46	1,42	1,38	1,34	1,31	1,28	1,24	1,22	1,20	1,17	1,14
	0,95	1,72	1,62	1,57	1,52	1,46	1,41	1,39	1,32	1,29	1,26	1,22	1,19
	0,99	2,13	1,97	1,89	1,79	1,69	1,63	1,58	1,48	1,44	1,39	1,33	1,28
∞	0,75	1,22	1,19	1,18	1,16	1,14	1,13	1,12	1,09	1,08	1,07	1,04	1,00
	0,90	1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,26	1,24	1,18	1,17	1,13	1,08	1,00
	0,95	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,32	1,24	1,22	1,17	1,11	1,00
	0,99	2,04	1,88	1,79	1,70	2,59	1,52	1,47	1,36	1,36	1,25	1,15	1,00

Таблица П11

Квантили распределения статистики d

n	$d_{0,01}$	$d_{0,05}$	$d_{0,10}$	$d_{0,90}$	$d_{0,95}$	$d_{0,99}$
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,8733	0,7452	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,8631	0,7495	0,7304	0,6905
26	0,8901	0,8686	0,8570	0,7530	0,7360	0,7040
31	0,8827	0,8625	0,8511	0,7559	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,8468	0,7583	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,8436	0,7604	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,8409	0,7621	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,8385	0,7636	0,7518	0,7291

Таблица П12

Значения n и a , соответствующие различным m и q

n	m	P при уровне значимости q , равном		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,96
11–14	1	0,99	0,98	0,97
15–20	1	0,99	0,99	0,98
21–22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
23–27	2	0,98	0,98	0,97
28–32	2	0,99	0,98	0,97
33–35	2	0,99	0,98	0,98
36–49	2	0,99	0,99	0,98

Таблица некоторых преобразований Лапласа

№ п/п	Изображение — переходная функция $G(p)$	Оригинал-импульсная исходная характеристика $g(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{p}$	1
3	$\frac{1}{p^2}$	t
4	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
5	$\frac{p}{p-a}$	$\delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$
6	$\frac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
7	$\frac{1}{(p-a)^n}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
8	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$
9	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a-b} (a e^{at} - b e^{bt})$
10	$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{at}$
11	$\frac{1}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{at} \sin(\omega t)$
12	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos(\omega t)$
13	$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}$
14	$\frac{1+a_1p}{1+b_1p+b_2p^2} = \frac{1+a_1p}{(p-p_1)(p-p_2)},$ $p_{1,2} = -\frac{b}{2b_2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{2b_2}\right)^2 - \frac{1}{b_2}}$	$(1+a_1p_1)e^{p_1t} - (1+a_1p_1)e^{p_2t}$ при $\frac{4b_2}{b_1} \neq 1;$ $[(1+a_1p)t + a_1]e^{p_1t}$ при $\frac{4b_2}{b_1} = 1, p_1 = p_2$

Более полная таблица преобразований Лапласа приведена, например, в [38].

Таблица некоторых интегралов и преобразований

1	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi}{\alpha}$
2	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)(\beta^2 + \omega^2)}$	$\frac{\pi}{\alpha\beta} \frac{1}{\alpha + \beta}$
3	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)(\beta^2 + \omega^2)}$	$\frac{\pi}{\alpha + \beta}$
4	$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax} dx$	$\frac{\Gamma(m+1)}{a^{m+1}}, \Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$
5	$\int_0^{\infty} x^m e^{-r^2 x^2} dx$	$\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2r^{m+1}}$
6	$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-ax} dx$	$\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
7	$\int_0^{\infty} x \sqrt{x} e^{-ax} dx$	$\frac{3}{4a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
8	$\int e^{ax} dx$	$\frac{1}{a} e^{ax}$
9	$\int x e^{ax} dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$
10	$\int x^2 e^{ax} dx$	$e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$
11	$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2a}, a > 0$
12	$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$	$\frac{\pi}{2} e^{- a }$
13	$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x-m_x}{2\sigma^2}\right], -\infty < x < \infty$	$\theta(ju) = \exp\left[jm_x u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right]$
14	$p(x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b$	$\theta(ju) = \frac{\exp(jbu) - \exp(jau)}{ju(b-a)}$

Значения коэффициента $k = k(m, l)$ [13] для вычисления доверительной границы композиции равномерных распределений в формуле (4.1)

$$\theta(P) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2}$$

l	$P = 0,90$			$P = 0,95$			$P = 0,98$		
	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
1	0,967	0958	0,946	1,101	1,120	1,120	1,218	1,283	1,301
2	0,942	0,945	0,945	1,054	1,086	1,096	1,161	1,230	1,263
3	0,918	0,926	0,935	1,019	1,046	1,062	1,108	1,167	1,200
4	0,906	0,912	0,918	0,996	1,017	1,032	1,070	1,121	1,151
5	0,900	0,905	0,911	0,982	0,997	1,012	1,054	1,089	1,118

l	$P = 0,99$			$P = 1$		
	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
1	1,276	1,376	1,410	1,414	1,732	2,000
2	1,215	1,313	1,360	1,342	1,633	1,890
3	1,157	1,243	1,284	1,265	1,507	1,732
4	1,116	1,182	1,223	1,213	1,414	1,606
5	1,089	1,143	1,179	1,170	1,347	1,512

Примечания.

1. Данные, приведенные в таблице, получены «суммированием» от $m = 2$ до $m = 4$ составляющих систематических погрешностей, имеющих одинаковые равномерные распределения за исключением одной из составляющих, граница которой в l раз отличается от границ остальных погрешностей [13].

2. При доверительной вероятности P от 0,90 до 0,99, чтобы воспользоваться данными таблицы, исходят из консервативных оценок, выбирая $k = k_{\max}$ при различных сочетаниях параметров m и l . Для нахождения k в зависимости от параметра l границы суммируемых равномерно распределенных погрешностей располагают в вариационный ряд в порядке возрастания $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta_4$ и вычисляют отношения границ: $l_1 = \theta_1/\theta_2$ и $l_2 = \theta_m/\theta_{m-1}$. Затем определяют значения $k_1 = k(l_1, m)$ и $k_2 = k(l_2, m)$. В качестве поправочного коэффициента принимают наибольшее значение из k_1 и k_2 . Заметим, что меньшее значение l , как хорошо видно из графика зависимости $k = k(m, l)$, соответствует большее k при данном m .

При косвенных измерениях составляется вариационный ряд $b_1\theta_1 \leq b_2\theta \leq b_3\theta \leq b_4\theta$ и далее процедура выбора k подобна вышеизложенной.

3. Ниже представлен график с помощью которого можно определить $k = k(m, l)$ при $P = 0,99$ [11, 15] для формулы (4.1).

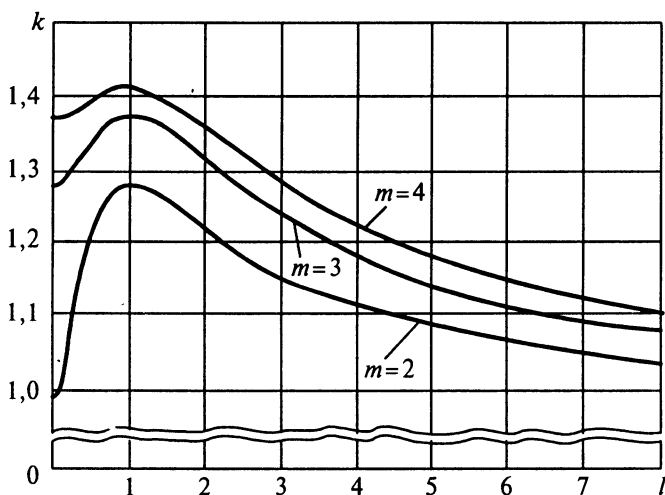


Таблица П16

Наиболее распространенные на практике виды нелинейных функций, приводимых к линейным, и соответствующие линеаризирующие преобразования

№ n/n	Функция	Формула	Замена переменных при линеаризации	Полученная линейная функция	Обратная
1	Показательная	$y = \alpha e^{\beta x}$	$z = \ln y$	$z = \ln \alpha + \beta x$	$y = e^z$
2	Дробно-линейная	$y = 1/(\alpha + \beta x)$	$z = 1/y$	$z = \alpha + \beta x$	$y = 1/z$
3	Логарифмическая	$y = \alpha + \beta \ln x$	$z = \ln x$	$y = \alpha + \beta z$	
4	Степенная	$y = \alpha x^\beta$	$z = \ln y, z_1 = \ln x$	$z = \ln \alpha + \beta z_1$	$y = e^z$
5	Гиперболическая	$y = \alpha + \beta/x$	$z = 1/x$	$y = \alpha + \beta z$	
6	Дробно-линейная	$y = x/(\alpha + \beta x)$	$z = 1/y, z_1 = 1/x$	$z = \beta + \alpha z_1$	$y = 1/z$
7	Показательная	$y = \alpha e^{\beta/x}$	$z = \ln y, z_1 = \ln x$	$z = \ln \alpha + \beta z_1$	$y = e^z$
8	Логарифмическая	$y = \alpha + \beta/\ln x$	$z = 1/\ln x$	$y = \alpha + \beta z$	


СПИСОК


ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$x, x(t)$	— измеряемая физическая величина (ФВ); сигнал на входе средства измерения (СИ), зависящий от времени t
$y(t)$	— сигнал на выходе СИ
$\bar{x} = \tilde{m}_x$	— среднее арифметическое ограниченного числа измерений — оценка математического ожидания ФВ
Q	— действительное (истинное) значение ФВ
δ	— случайная погрешность измерения
$\sigma_x = \sigma_\delta = \sigma$	— среднеквадратическое отклонение (СКО) результатов измерений и случайной погрешности
θ_i, θ	— i -я и суммарная неискл. систематические погрешности
Δ	— погрешность измерения; погрешность конкретного экземпляра СИ
Δ_0	— основная погрешность СИ (усилителя), приведенная ко входу
Δ_s	— систематическая погрешность
Δ_{os}	— систематическая составляющая основной погрешности СИ (усилителя)
$\overset{\circ}{\Delta}_0$	— случайная составляющая основной погрешности СИ (усилителя), центрированная относительно нулевого уровня
$\overset{\circ}{\Delta}_{0H}$	— случайная составляющая основной погрешности, обусловленная гистерезисом
Δ_C	— дополнительная погрешность
Δ_{int}	— составляющая инструментальной погрешности измерений, обусловленная взаимодействием СИ с объектом измерения или другим объектом, подключенным к выходу СИ
Δ_{dyn}, D_{dyn}	— динамическая составляющая погрешности СИ и дисперсия динамической погрешности, соответственно
P	— вероятность попадания результата измерения в доверительный интервал
q	— уровень значимости $q = 1 - P$ или вероятность попадания результата вне доверительного интервала.
$P(x), P(\delta)$	— интегральные функции распределения результатов измерения x и случайных погрешностей δ

$p(x), p(\delta)$	— дифференциальные функции распределения результатов измерения x и случайных погрешностей δ
$S_x^2 = \tilde{\sigma}_x^2$	— дисперсия ограниченного числа измерений, оценка дисперсии результатов измерения
$S_{\bar{x}}^2 = \tilde{\sigma}_{\bar{x}}^2$	— дисперсия результатов измерения среднего арифметического, оценка дисперсии результатов измерения среднего арифметического
S_{θ}^2	— дисперсия неисключенной систематической погрешности
$S_{\text{вг}}^2, S_{\text{мг}}^2$	— внутригрупповая и межгрупповая дисперсии в серии, состоящей из нескольких групп измерений
$S_x(\omega), S_y(\omega)$	— спектральные плотности мощности (СПМ) сигналов на входе и выходе СИ
$R_x(\tau), R_y(\tau)$	— автокорреляционные функции (АКФ) сигналов на входе и выходе СИ
$R_1(\tau), R_{1N}(\tau)$	— истинная и номинальная автокорреляционные функции стационарной случайной составляющей напряжения $u_{\text{др}}$, соответственно
$R_2(\tau), R_{2N}(\tau)$	— истинная и номинальная автокорреляционные функции стационарной случайной составляющей относительного изменения $\delta_{\text{др}}$, коэффициента усиления, соответственно
$R_{\Delta 0}(\tau)$	— автокорреляционная функция случайной составляющей основной погрешности усилителя
$g(t), h(t)$	— импульсная переходная и переходная характеристики (ИПХ и ПХ) СИ
$G(j\omega), G(p)$	— амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) и передаточная функция (ПФ) СИ, $p=j\omega$
$A(\omega), \varphi(\omega)$	— амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики (АЧХ и ФЧХ) СИ
u_N	— номинальное значение входного напряжения усилителя
$u_{\text{in}}, u_{\text{out}}$	— напряжения на входе и выходе усилителя
u_{δ}, δ_d	— составляющие абсолютного смещения нулевого уровня выходного напряжения и относительного изменения коэффициента усиления, обусловленные отклонениями параметров элементов усилителя от их номинальных значений
u_n, δ_n	— приведенное к выходу напряжение аддитивного шума усилителя и относительное изменение коэффициента усиления из-за электронного шума
$u_{\text{др}}, \delta_{\text{др}}$	— приведенное к выходу напряжение дрейфа нулевого уровня усилителя и относительное изменение коэффициента усиления, отражающее дрейф коэффициента усиления усилителя

v_1, v_2	— математические ожидания скорости изменения составляющей напряжения u_{dr} и составляющей относительного изменения δ_{dr} коэффициента усиления, обусловленные временным старением элементов усилителя
K_N	— номинальное значение коэффициента усиления — отношение выходного сигнала к входному, установленное в качестве номинального для данного типа СИ (усилителей)
δK	— относительное изменение коэффициента усиления относительно номинального значения
α_u, α_δ	— коэффициенты, определяющие скорости изменений математического ожидания напряжения дрейфа и относительного изменения коэффициента усиления под влиянием собственного прогрева усилителя
t_{sw}	— момент времени включения усилителя
$t_{кор}$	— интервал времени между коррекциями дрейфа нулевого уровня выходного напряжения и изменения коэффициента усиления, периодически проводящимися в процессе эксплуатации СИ (усилителя)
t_p	— квантильный коэффициент, определяющий отношение отклонения результата измерения от математического ожидания к СКО, соответствующий вероятности P
$\xi, \Delta\xi$	— влияющая величина и изменение влияющей величины относительно нормального значения, вызывающее дополнительную погрешность соответственно
$\psi(\xi), \psi_s(\xi)$	— функция влияния и функция влияния на систематическую составляющую погрешности СИ (усилителя) соответственно
$\psi_\sigma(\xi), \psi_D(\xi)$	— функция влияния на СКО и функция влияния на дисперсию погрешности СИ (усилителя) соответственно
H_0, H_{0P}	— вариация выходного сигнала СИ и предел допускаемой вариации СИ в нормальных условиях
$\chi_{k,P}^2$	— «хи-квадрат» — аргумент в распределении Пирсона, положение которого на оси абсцисс при числе степеней свободы k определяют вероятность P

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пронкин Н.С.* Основы метрологии динамических измерений: Учеб. пособие. М.: Логос, 2003.
2. РМГ 29-99 (Рекомендации по межгосударственной стандартизации). Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения. М.: Изд-во стандартов, 2000.
3. *Бурдун Г.Д., Марков Б.Н.* Основы метрологии. М.: Изд-во стандартов, 1985.
4. *Атамалян Э.Г.* Приборы и методы измерения электрических величин. М.: Высшая школа, 1989.
5. *Сергеев А.Г., Крохин В.В.* Метрология. Учеб. пособие. М.: Логос, 2002.
6. Нормирование и использование метрологических характеристик средств измерения: Нормативно-технические документы (ГОСТ 8.009-84, методический материал по применению ГОСТ 8.009-84, РД 50-453-84). М.: Изд-во стандартов, 1988.
7. *Румицкий Л.З.* Элементы теории вероятностей: Учеб. пособие. М.: Физматгиз, 1960.
8. *Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. Примеры и задачи. М.: Сов. радио, 1980.
9. *Кудряшова Ж.Ф., Рабинович С.Г., Резник К.А.* Рекомендация по методам обработки результатов наблюдений при прямых измерениях // Методы обработки результатов наблюдений при измерениях / Под ред. К.П. Широкова. М.; Л.: Изд-во стандартов, 1972. (Труды метрологических институтов СССР. Вып. 134 (194)).
10. *Рабинович С.Г.* Погрешности измерений. Л.: Энергия, 1978.
11. ГОСТ 8.207-76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. М.: Изд-во стандартов, 1986.
12. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами / Под ред. В.Г. Горского. М.: Мир, 1973.
13. *Кудряшова Ж.Ф., Рабинович С.Г.* Вычисление границ композиции равномерных распределений // Методы обработки результатов наблюдений при измерениях / Под ред. К.П. Широкова. М.; Л.: Изд-во стандартов, 1975. (Труды метрологических институтов СССР. Вып. 172 (232)).
14. *Кудряшова Ж.Ф., Рабинович С.Г.* Методы обработки результатов наблюдений при косвенных измерениях // Методы обработки результатов наблюдений при измерениях / Под ред. К.П. Широкова. М.; Л.: Изд-во стандартов, 1975.
15. МИ 2083-90 (ГСИ. Измерения косвенные). Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. М.: Изд-во стандартов, 1991.
16. Методические указания. Государственная система обеспечения единства измерений (Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров). МИ-1317-86. М.: Изд-во стандартов, 1986.

17. *Новицкий П.Ф., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1985.
18. *Климов А.Н.* Погрешности измеряемых величин: Учеб. пособие. М.: МИФИ, 1977.
19. *Грановский В.А., Сирая Т.Н.* Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Л.: Энергоатомиздат, 1990.
20. *Грановский В.А.* Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения. Л.: Энергоатомиздат, 1984.
21. *Пронкин Н.С.* Первичные преобразователи радиоизотопной аппаратуры. М.: Энергоатомиздат, 1984.
22. *Пронкин Н.С., Рыбаков А.П.* Определение параметров радиоизотопного прибора непрерывного контроля с заданной зоной усреднения измеряемой характеристики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Радиационная техника. 1989. Вып. 3 (40).
23. *Краус М., Вошни Э.* Измерительные информационные системы. М.: Мир, 1975.
24. Микропроцессорные системы и микроЭВМ в измерительной технике: Учеб. пособие для вузов / А.Г. Филипов, А.М. Аужбикович, В.М. Немчинов и др. М.: Энергоатомиздат, 1995.
25. Полупроводниковые детекторы в экспериментальной физике / Ю.К. Акимов, О.В. Игнатьев, А.И. Калинин, В.Ф. Кушнирук. Под общей ред. Ю.К. Акимова. М.: Атомиздат, 1989.
26. Методические указания. Государственная система обеспечения единства измерений. (Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей результатов измерений). МИ-1552-86. М.: Изд-во стандартов, 1987.
27. *Цветков Э.И.* Методические погрешности статистических измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1984.
28. *Фомин А.Ф., Новоселов О.Н., Плющев А.В.* Отбраковка аномальных результатов измерений. М.: Энергоатомиздат, 1985.
29. *Земельман М.А.* Метрологические основы технических измерений. М.: Изд-во стандартов, 1991.
30. *Земельман М.А.* и др. Нормировка и определение метрологических характеристик средств измерений. М.: Машиностроение, 1980.
31. *Гудзий Я.А., Плуталов В.Н.* Основы метрологии, точности и надежности в приборостроении. М.: Приборостроение, 1991.
32. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1962.
33. *Ахназаров С.Л., Кафаров В.В.* Оптимизация эксперимента в химии и химико-технологических вузах. М.: Высшая школа, 1978.
34. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982.
35. *Спектор С.А.* Электрические измерения физических величин. Л.: Энергоатомиздат, 1987.
36. *Мейзда Ф.* Электронные измерительные приборы и методы измерений. М.: Мир, 1990.
37. Основные термины в области метрологии: Словарь-справочник / М.Ф. Юдин, М.Н. Селиванов, О.Ф. Тищенко, А.И. Скороходов. М.: Изд-во стандартов, 1989.
38. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.
39. Сборник задач и упражнений по электрическим и электронным измерениям / Под ред. Э.Г. Атамалая. М.: Высшая школа, 1980.
40. Задачи и примеры расчетов по электроизмерительной технике / Р.М. Демидова-Панферова, В.Н. Малиновский, Ю.С. Солода. М.: Энергия, 1977.

41. Суриков Е.И. Погрешность приборов и измерений. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1975.
42. Цветков Э.И. Процессорные измерительные средства. Л.: Энергоатомиздат, 1989.
43. Новицкий П.В., Зограф И.А., Лабунец В.С. Динамика погрешностей средств измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1990.
44. Тарбеев Ю.В. Эталоны России // Измерительная техника. 1995. № 6.
45. Тюрин Н.И. Введение в метрологию. М.: Изд-во стандартов, 1985.
46. Левшина Е.С., Новицкий П.В. Электрические измерения физических величин. Измерительные преобразователи. Л.: Энергоатомиздат, 1983.
47. Заико А.И. Точность аналоговых линейных измерительных каналов информационно-измерительных систем. М.: Изд-во стандартов, 1987.
48. Маркин Н.С. Практикум по метрологии. М.: Изд-во стандартов, 1994.
49. Семенов Л.Н., Сирая Т.Н. Методы построения градуировочных характеристик средств измерений. М.: Изд-во стандартов, 1986.
50. Шишкин И.Ф. Теоретическая метрология. М.: Изд-во стандартов, 1990.



Предисловие	3
Глава 1. Краткие сведения из метрологии	8
1.1. Общие положения и понятия метрологии	8
1.2. Классификация измерений	9
1.3. Классификация погрешностей	10
1.4. Методические погрешности	12
1.5. Метрологические характеристики средств измерений	15
1.6. Погрешности средств измерений	16
1.7. Модели погрешностей средств измерений	18
1.8. Дополнительные сведения из метрологии в вопросах, ответах и примерах	19
Глава 2. Функции распределения результатов измерений и случайных погрешностей	30
2.1. Теоретические сведения и примеры	30
2.1.1. Интегральные и дифференциальные функции распределения и их основные характеристики	30
2.1.2. Преобразование функций распределения вероятности	36
2.2. Задачи и ответы	56
Глава 3. Точечные и интервальные оценки результатов измерений	60
3.1. Теоретические сведения и примеры	60
3.1.1. Точечные оценки	60
3.1.2. Оценки с помощью доверительных интервалов	61
3.1.3. Оценки с помощью неравенства Чебышева	63
3.1.4. Интервальные оценки дисперсии	63
3.1.5. Проверка статистических гипотез и ошибки первого и второго рода	75
3.2. Задачи и ответы	83
Глава 4. Систематические погрешности	85
4.1. Теоретические сведения и примеры	85
4.1.1. Суммирование неисключенных систематических погрешностей	85
4.1.2. Статистические методы обнаружения систематических погрешностей (методы Аббе, Фишера и Стьюдента)	91
4.1.3. Проверка равномерности групп измерений	94
4.2. Задачи и ответы	105

Глава 5. Обработка результатов измерений	108
5.1. Теоретические сведения и примеры	108
5.1.1. Порядок обработки результатов прямых равноточных измерений	108
5.1.2. Проверка нормальности результатов измерений	113
5.1.3. Анализ числовых результатов измерений	126
5.1.4. Обработка результатов равноточных рядов измерений	131
5.1.5. Обработка результатов неравноточных рядов измерений	139
5.1.6. Обработка результатов однократных измерений	143
5.2. Задачи и ответы	147
Глава 6. Обработка результатов косвенных измерений	150
6.1. Теоретические сведения и примеры	150
6.1.1. Общие положения	150
6.1.2. Основные соотношения при линейной зависимости	151
6.1.3. Основные соотношения при нелинейной зависимости	155
6.1.4. Метод приведения	156
6.2. Задачи и ответы	173
Глава 7. Обработка результатов совместных и совокупных измерений	179
7.1. Теоретические сведения и примеры	179
7.1.1. Метод наименьших квадратов и его применение для линейных функций	179
7.1.2. Применение метода наименьших квадратов для нелинейных функций	190
7.1.3. Обработка данных при совокупных измерениях	198
7.1.4. Влияние систематических погрешностей	207
7.2. Задачи и ответы	210
Глава 8. Статические погрешности средств измерений	213
8.1. Общие положения	213
8.2. Основная и дополнительная погрешности средств измерений	214
8.3. Метрологические характеристики и формулы для расчета погрешности средств измерений в реальных условиях эксплуатации	217
8.3.1. Исходные данные для расчета погрешности СИ	217
8.3.2. Расчет характеристик погрешности по первому методу	219
8.3.3. Расчет характеристик погрешности по второму методу	222
8.4. Критерии существенности составляющих погрешностей средств измерений	225
8.4.1. Составляющие основной погрешности	226
8.4.1. Составляющие дополнительной погрешности	227
8.5. Классы точности средств измерений	232
8.6. Погрешности взаимодействия	237
Глава 9. Примеры расчета статических погрешностей средств измерений	243
9.1. Характеристики основных источников погрешностей	243
9.2. Расчет основной погрешности усилителей	245
9.3. Расчет дополнительной погрешности усилителей	249

9.4. Расчет погрешностей усилителей по заданным нормированным метрологическим характеристикам	252
9.5. Расчет погрешностей индивидуального усилителя	257
9.6. Расчет погрешностей импульсных усилителей	261
9.7. Расчет погрешностей аналогового средства измерения в рабочих условиях эксплуатации	268
9.8. Расчет погрешности аналого-цифрового преобразователя в рабочих условиях эксплуатации	272
Глава 10. Динамические характеристики средств измерений	274
10.1. Теоретические сведения	274
10.1.1. Общие положения	274
10.1.2. Модели определения динамической погрешности	276
10.1.3. Исходные данные, необходимые для расчета динамических погрешностей средств измерений	279
10.2. Примеры расчета динамических характеристик средств измерений	283
10.2.1. Полные и частные динамические характеристики	283
10.2.2. Дисперсия электронного шума	293
10.2.3. Расчет динамических погрешностей	294
10.3. Задачи и ответы	316
Глава 11. Анализ составляющих погрешностей средств измерений	323
11.1. Общие сведения о моделировании средств измерений	323
11.2. Общая характеристика примеров	329
11.3. Погрешности первичных преобразователей средств измерений энергии ионизирующего излучения	331
11.4. Погрешности первичных преобразователей средств измерений скорости счета	345
11.5. Погрешности радиоизотопных приборов	350
Приложения	
Таблица П1. Законы распределения случайных величин	362
Таблица П2. Дифференциальная функция нормированного нормального распределения	364
Таблица П3. Интегральная функция нормированного нормального распределения	364
Таблица П4. Интегральная функция нормированного нормального распределения. Значения z для различных $\Phi(z)$	365
Таблица П5. Распределение Стьюдента	365
Таблица П6. Распределение Стьюдента для различных t_p	366
Таблица П7. Интегральная функция распределения Пирсона	367
Таблица П8. Значения критерия Аббе	369
Таблица П9. Значения v_α при различных числах измерения n	369
Таблица П10. F -распределение Фишера. Значения F_{k_1, k_2} для доверительных вероятностей P	370

<i>Таблица П11.</i> Квантили распределения статистики d	376
<i>Таблица П12.</i> Значения n и a , соответствующие различным m и q	376
<i>Таблица П13.</i> Таблица некоторых преобразований Лапласа	377
<i>Таблица П14.</i> Таблица некоторых интегралов и преобразований	378
<i>Таблица П15.</i> Значения коэффициента $k = k(m, l)$ [13] для вычисления доверительной границы композиции равномерных вычислений в формуле (4.1)	379
<i>Таблица П16.</i> Наиболее распространенные на практике виды нелинейных функций, приводимых к линейным, и соответствующие линеаризирующие преобразования	380 381
Список основных обозначений	384
Список литературы	

Учебное издание

Николай Степанович Пронкин
ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ:
практикум по метрологии и измерениям
Учебное пособие

Редактор *Т.М. Толмачева*
Корректор *А.В. Марыняк*
Компьютерная верстка *Ю.В. Одинцовой*
Оформление *Т.Ю. Хрычевой*

Подписано в печать 31.10.2006 г., № 0634(и).
Формат 60×90/16. Печать офсетная. Бумага офсетная.

Тираж 1000 экз. Заказ № 10170

Издательская группа «Логос»
105318, г. Москва, Измайловское шоссе, д. 4

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Марийский полиграфическо-издательский комбинат»
424002, г. Йошкар-Ола, ул. Комсомольская, 112

Учебное издание

Николай Степанович Пронкин
ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ:
практикум по метрологии и измерениям

Учебное пособие

Редактор *Т.М. Толмачева*
Корректор *А.В. Марыняк*
Компьютерная верстка *Ю.В. Одинцовой*
Оформление *Т.Ю. Хрычевой*



- Что такое метрология?
- Как производятся метрологические измерения
- Обработка результатов измерений
- Статические погрешности
- Законы, функции, критерии
- Характеристики средств измерений
- Анализ составляющих погрешностей средств измерений

ISBN 978-5-98704-267-4



9 785987 042670