В. И. Яковлев

ПРЕДЫСТОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

R&C Dynamics
РХД
Москва • Ижевск

2001

УДК 531.534
ББК 22.2
Я 475

Издание выполнено при финансовой поддержке
Пермского государственного университета.

Рецензенты: сектор истории физики и механики ИИЕТ РАН (д.ф.-м.н. В. П. Визгин), к. ф.-м. н. И. А. Тюлина.

Яковлев В. И.
Предыстория аналитической механики. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 328 стр.

В монографии рассматривается развитие основных понятий, принципов, законов и задач классической механики до середины XVIII века.

Для историков физико-математических наук, преподавателей и студентов вузов.

ISBN 5-93972-063-3 **ББК 22.2**

http://rcd.ru

ОТ АВТОРА

Понимание основ любой науки невозможно без знания истории возникновения ее понятий (языка), принципов, законов, задач и методов. Для эффективной творческой деятельности весьма полезен жизненный опыт выдающихся представителей прошлых поколений. А оценка современного состояния общества, перспектив его развития возможна только на основе ясного и глубокого понимания сущности и причин прошлых исторических событий. Все это подтверждается богатым историческим опытом классической механики, играющей важную роль в развитии современных физико-математических и технических наук, в современном образовании.

Как вошли в науку первые понятия (движения, равновесия, силы, момента силы, скорости, ускорения, массы), законы равновесия и движения? Каким было их физическое содержание и математическое представление на разных исторических этапах? Творцы современной науки — кто они? Как оценивался вклад Галилея, Декарта, Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, Бернулли, Вариньона в XVII–начале XVIII веков и каковы современные представления о достижениях ученых той эпохи?

Эта книга посвящена ответам на эти и другие вопросы, связанные с развитием основных идей, понятий, принципов и законов классической механики до середины XVIII века. Большое внимание в ней уделено работам по механике Лейбница и ученых Парижской академии наук. При этом использовались материалы отечественных и зарубежных историков науки, авторские исследования первоисточников. Книга может быть полезна историкам физико-математических наук, преподавателям теоретической механики, технических дисциплин, физики, математики, аспирантам и студентам университетов.

На содержание книги повлиял не только мой опыт преподавания теоретической механики и ее истории, но и опыт старших коллег. Глеб Константинович Михайлов, чьи работы инициировали мой интерес к истории механики, оказал большую моральную поддержку и помощь при подготовке рукописи, высказал многочисленные пожелания, как по

существу ее содержания, так и редакционного характера. К сожалению, не все эти пожелания мне удалось реализовать.

Более десяти лет я ощущал доброжелательную поддержку, внимание и заботу Ирины Александровны Тюлиной, чьи критические замечания и пожелания также способствовали улучшению рукописи.

Выражаю искреннюю благодарность коллегам за внимание к моей работе, за высказанные пожелания, большинство из которых были учтены в окончательном варианте рукописи, считаю необходимым поблагодарить сотрудников ИИЕТ РАН В. С. Кирсанова, М. М. Рожанскую, В. П. Визгина за рецензирование рукописи и полезные советы, сотрудников кафедры механики и процессов управления Пермского университета Г. И. Кушнину, Е. Н. Остапенко, В. Ф. Селезнева за помощь в подготовке книги к изданию.

Оглавление

Если существует наука, с помощью которой можно предвидеть прогресс человеческого рода, направлять и ускорять его, то история того, что было совершено, должна быть фундаментом этой науки.

Ж. Кондорсе. Эскиз исторической картины прогресса человеческого разума

ВВЕДЕНИЕ

Современное содержание теоретической (классической, аналитической, рациональной) механики[1] как единой теории математического моделирования движения и покоя твердых тел начало формироваться в XVII в. В работах Галилея, Декарта, Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, Вариньона, Бернулли и их современников появляются новые задачи естествознания и техники, создаются новые математические методы их решения. К постановке и анализу утилитарных задач подталкивали не только практические интересы, но и извечное стремление к поиску абсолютной истины, созданию всеобщей философской системы, борьба мнений. Научные теории, как правило, строились на базе исторически

[1]Термины *аналитическая*, *теоретическая*, *классическая*, *рациональная* механика ни в отечественной, ни в зарубежной литературе не имеют единого общепринятого толкования. Об этом свидетельствуют названия известных книг Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, Г. К. Суслова, Ш. Ж. Валле-Пуссена, Э. Т. Уиттекера, Т. Леви-Чивиты, П. Аппеля, Л. Парса, А. И. Лурье, Н. Н. Бухгольца, Ф. Р. Гантмахера и других. Иногда аналитическая механика отождествляется с теоретической, классической или рациональной механикой, иногда представляется углубленным курсом классической механики в обобщенных координатах, построенном на основе общих дифференциальных или интегральных принципов. В данной работе принята первая из этих точек зрения. И предыстория аналитической механики — это история механики до классических работ Эйлера, Лагранжа, Лапласа, Якоби, Гамильтона и их последователей.

сложившихся понятий, принятой аксиоматики с широким привлечением логических, математических и экспериментальных доказательств. Дальнейшее формирование классической механики, совершенствование ее понятийного и математического аппарата осуществлялось в русле традиций и методов, заложенных учеными XVII–XVIII вв. Именно это обстоятельство и является причиной повышенного интереса историков науки к указанному периоду, которому и посвящена эта книга.

Механика конца XVII в. еще далека от ее современного состояния. Но это уже не формальная совокупность частных теорий и задач (о причинах и законах движения тел, о равновесии простейших механизмов, о центре тяжести тел, о движении небесных тел и других), решение которых базируется на простейших опытных фактах, арифметических расчетах и геометрических построениях. Семнадцатый, начало восемнадцатого века — это время создания первых не философских, а физико-математических теорий (движения планет, падения тел в пустоте, удара тел, колебаний тел, равновесия тел под действием сил, движения тел в среде), уточнения физического смысла и математического представления как уже общепринятых, так и новых понятий, принципов и законов. Это переход от механики частных задач и методов их решения к идеологии универсальной, построенной на общих законах и понятиях теории, — к теоретической или аналитической механике, систематическое изложение и развитие которой на основе понятий и методов математического анализа начинается с работ Эйлера[1], Даламбера, Лагранжа.

Периодизация истории науки отражает положенные в ее основу принципы, которые, в свою очередь, определяются состоянием науки и общественного сознания. С этой точки зрения пересмотр периодизации истории науки неизбежен. Нуждается в совершенствовании и периодизация истории механики[2]. Не углубляясь в тонкости этой про-

[1]Первая крупная работа Эйлера по механике — двухтомный трактат «Механика или наука о движении, изложенная аналитически» (Mechanica sive motus scientia analytice exposita), — была опубликована в Петербурге в 1736 году [92].

[2]Периодизация, предложенная Н. Д. Моисеевым [63, с. 18–23], даже в аспекте терминологии представляется устаревшей, неоправданно громоздкой и недостаточно убедительной. Едва ли можно говорить о «донаучном периоде развития» науки (механики), да и «элементарный период», длившийся, по Н. Д. Моисееву, более 20 веков, очевидно, не был простейшим в истории механики. Что касается «физико-технического периода», то во все века механика была физико-технической. Подробный критический анализ книги Н. Д. Моисеева проведен Г. К. Михайловым [62].

блемы, назовем основные (с точки зрения степени общности формулируемых задач и универсальности методов их решения) периоды истории механики: **начальный** (до XVII в.), **переходный** (XVII – середина XVIII в.), **аналитический** (с середины XVIII в.).

Дальнейшая детализация состоит в установлении в рамках каждого периода определенной последовательности этапов. Так, в рамках начального периода важнейшими этапами являются: античная механика, средневековая механика стран Востока, механика средневековой Европы, механика эпохи Возрождения. Для длительного начального периода характерно стремление к решению конкретных практических задач, к описанию и объяснению наблюдаемых явлений. В силу ошибочности древних представлений о многих явлениях природы (устройство мироздания, причины движения тел и другие) их интерпретации сейчас не представляют практической ценности, как и решение инженерных задач примитивной техники. Однако именно в этот период начинается формирование понятийного аппарата механики (движение, равновесие, скорость, сила, ...) и поиск ответов на возникающие естественно-научные и технические вопросы. Наряду с философскими приемами рассмотрения проблем появляются лаконичные методы и понятия древнегреческой математики. Относительная статичность жизненного уклада общества, особенно в начальный период, стала причиной медленного расширения круга практических задач и, как следствие, вялого развития языка, методов и принципов науки. Этому способствовала и традиционная разобщенность народов (географические и языковые барьеры), и недоступность научных знаний, и их невостребованность большинством населения (практические навыки, опыт ценились выше теоретических знаний).

Переходный период истории механики характеризуется существенным расширением круга решаемых задач[1], построением первых механико-математических теорий движения и равновесия тел. Это период уточнения физического содержания и математического представления понятий состояния (движения, покоя), времени, скорости, ускорения, центра тяжести, массы, силы, импульса. Тогда же появляются такие новые понятия, как количество движения, центробежная и центростремительная силы, центр удара, центр колебаний, период колебаний, живая сила, действие. В процессе решения задач о движении

[1]Как следствие развития техники, изменения физических представлений, постановки более сложных задач.

планет, о падении тел на Земле, о колебаниях маятников, об ударе тел формируются символика, математические понятия функции, переменной величины и методы будущего математического анализа, используются и становятся общепризнанными законы Галилея о падении тел, законы инерции, сохранения количества движения и живых сил, принципы стационарности центра тяжести системы тел и равенства моментов сил как условия равновесия тел. Именно в переходный период формируется представление о силе как о причине ускоренного (замедленного) движения тел, о векторных свойствах сил, моментов, скоростей, количества движения.

Аналитический период — это период формирования математического аппарата механики на базе математического анализа, новых достижений математики XVIII–XX вв., установленных физических законов и принципов. Это время бурного расширения круга естественно-научных и технических задач, решаемых методами аналитической механики, и, как следствие, дифференциации механики в соответствии с физическими моделями (точка, система точек, абсолютно твердое тело, деформируемое тело, жидкость, газ, плазма, многофазная среда), конкретными задачами (небесная механика, баллистика, теория машин и механизмов, теории упругости и пластичности, сопротивление материалов, механика композиционных материалов, механика жидкости и газа, теория управления движением, ...) и особенностями их математической постановки (расчет характеристик, оптимизация, анализ устойчивости, ...).

Особая важность переходного периода истории механики привлекла к нему внимание многих отечественных и зарубежных исследователей, чьи работы освещают жизнь и творчество отдельных ученых, а также раскрывают пути появления новых задач, понятий и принципов теории. Приведенный в конце книги список литературы не исчерпывает, но дает представления о публикациях[1], посвященных жизни и творчеству Г. Галилея, Р. Декарта, Ж. П. Роберваля, Д. Уоллиса, Х. Гюйгенса, К. Рена, Р. Гука, И. Ньютона, Г. В. Лейбница, П. Вариньона, Я., И. и Д. Бернулли, П. Л. М. Мопертюи, А. Клеро. В библиографии приводятся и работы обобщающего характера, раскрывающие пути формирования современной механики и ее разделов. Это работы М. Блея, А. Н. Боголюбова, И. Н. Веселовского,

[1]Соответствующие библиографические ссылки приведены в именном указателе.

А. Т. Григорьяна, Я. Г. Дорфмана, Р. Дюга, П. Дюэма, В. П. Зубова, Н. И. Идельсона, В. Л. Кирпичева, В. С. Кирсанова, Э. Маха, Д. Р. Меркина, Н. Д. Моисеева, И. Б. Погребысского, Л. С. Полака, И. Сабо, К. Трусделла, И. А. Тюлиной.

Переход от античной и средневековой к качественно новой, аналитической механике был непростым. Отказ от устаревших и формирование новых понятий, физических представлений и теоретических обобщений были связаны с борьбой мнений, с приоритетными спорами. Словно большая река из малых речек и ручейков, теоретическая механика на протяжении десятилетий складывалась из идей, методов и представлений многих соучастников этого процесса. Он был непрерывен; в нем участвовали не только общепризнанные классики, но и «классики второго эшелона», большинством своих мнений принимавшие или отвергавшие мнения первых.

В предлагаемой книге по известным историко-научным публикациям и работам основоположников науки прослеживается развитие идей, понятий и принципов, составивших позднее фундамент современной классической (теоретической) механики. Особое внимание к работам Лейбница, Бернулли, Вариньона и других французских ученых начала XVIII в. определяется их особой ролью в переходе от механики Галилея–Декарта–Гюйгенса–Ньютона к аналитической механике Эйлера–Даламбера–Лагранжа — профессоров Парижской политехнической школы и их идейных преемников.

Глава 1
НАЧАЛЬНЫЙ ПЕРИОД РАЗВИТИЯ МЕХАНИКИ

1.1. Эпоха средневековья

Менее чем через 100 лет после смерти основателя мусульманства пророка Магомета (569–632) объединенные им кочевые племена Аравии под предводительством его последователей — халифов — завоевали обширные территории от Индии до Испании, включая северную Африку и южную Италию. Многие племена и народы, населявшие земли Двуречья, Египта, Малой Азии, оказались связанными единой государственностью, религией (ислам) и арабским языком, ставшим языком общения, науки и культуры. Но ни жестокость захватнических войн, ни стихийные бедствия не смогли уничтожить культурные и научные традиции древних цивилизаций: сохранились некоторые архитектурные, ирригационные и фортификационные сооружения, труды античных и византийских ученых.

Потребности халифата в упрочении своей власти, нужды развития военной техники, строительства мечетей и других сооружений, развития ремесел, земледелия и торговли (с Индией, европейскими и африканскими государствами) дали толчок дальнейшему развитию науки и образования, вынудили арабов обратиться к сочинениям Евклида, Платона, Аристотеля, Архимеда, Герона, Витрувия, Птолемея и их последователей.

Халифы и их приближенные часто оказывались широко образованными людьми, ценителями книг. В Багдаде, Каире, Дамаске, Рее, Гаргандже (Ургенче), Бухаре, Газне, Самарканде и других городах открывались публичные библиотеки, Дома мудрости, учебные заведения. Благодаря ученым, переводчикам и переписчикам стало возможным знакомство на арабском языке с трудами древних философов, астрономов, математиков, механиков, историков и поэтов. Переводы часто сопровождались комментариями и дополнялись новыми результатами, полученными авторами в результате собственных исследований и размышлений. Так, в мировую науку вошли открытия и имена знаменитых арабских ученых Мухаммеда ал-Хорезми, Сабита ибн Корры, Мухаммеда ал-Бируни, Ибн Сины (Авиценна), Омара Хайама, их учеников и многих последователей. Расцвет восточной науки IX–XIII вв. позволил сохранить человечеству достижения предыдущих культур, существенно развить некоторые отрасли знания. Но уже в XII–XV столетиях научная эстафета переходит к европейским ученым.

Арабские завоевания, возникновение исламской религии в какой-то мере изолировали страны христианского Запада от источников древнегреческой и римской культуры и науки. Но эта изоляция не была абсолютной. Позднее арабские культурные и научные сокровища привлекли внимание просвещенных деятелей христианства. Форпостами христианской религии в европейских странах средневековья становятся монастыри — общежития единоверцев, строго соблюдающих устав, религиозные обряды, посты и обязанных трудиться на общее благо[1]. В эту смутную эпоху даже многие зажиточные люди, стремясь обрести покой и веру, добровольно отказывались от мирских соблазнов, оказывали монастырям материальную и иную помощь, уходили в монастыри, становясь монахами. Монахи занимались физическим и умственным трудом. Последний состоял в изучении (чтении) и копировании рукописных книг. Так в Европе начали складываться коллективы церковной интеллигенции. Они не ставили перед собой задачи сохранения античной философии, геометрии, механики или астрономии, более того, они стремились заменить все достижения науки и культуры христианским богословием. Но своей деятельностью они невольно способствовали сохранению культурного наследия предшественников, а критическая направленность их мировоззрения оказалась полезной будущим европейским ученым. Постепенно в монастырях создавались обширные библиотеки трудов древних авторов и переписчиков, на базе которых стало возможным появление первых монастырских школ, позднее ставших прообразами первых европейских университетов.

В XII–XIV столетиях Западная Европа переживала период усиления роли городов, которые становились центрами формирования новой государственности, первых национальных государств. Города вели

[1]Возможно, идея идеального монастыря и послужила прообразом коммунистической утопии «Города солнца» итальянца Томмазо Кампанеллы, а позднее и марксистской идеи коммунистического общежития.

войны и устанавливали коммерческие связи с Востоком, остававшимся центром цивилизации. Времена крестовых походов свидетельствуют, что расширение связей происходило не только мирным путем. За проповедниками христианства, путешественниками, купцами и солдатами, а иногда и вместе с ними следовали ученые. В силу географического положения, Испания и Италия стали пунктами соприкосновения Востока и Запада. Обширные торговые и культурные контакты Севера с арабским миром осуществлялись через Геную, Пизу, Венецию, Милан, Флоренцию. Но не только чисто прагматические устремления притягивали европейцев на Восток. Туда тянуло и обычное человеческое любопытство, жажда новых открытий. Этому способствовало появление «Книги» (1298), написанной со слов итальянского географа Марко Поло, совершившего путешествие в Китай, длившееся около 17 лет.

Монашеские ордены, ставшие первыми культурными центрами христианского Запада, возводили величественные соборы, открывали первые школы. Латынь, официальный язык церкви, становится языком эрудитов, а вскоре и общеевропейским научным языком. На латынь переводятся книги арабоязычных ученых, которые в свое время занимались осмыслением, комментированием и переводами с греческого на арабский трудов своих греческих предшественников.

Французский монах, а с 999 г. римский папа Сильвестр II, в молодые годы путешествовавший по Испании (967–969 гг.) под именем Герберт, посетив арабские школы, познакомился с индоарабской системой счисления. Он стал пропагандистом использования арабских цифр и счетной доски — абака. Во Франции в то время считали на пальцах или использовали жетоны. Использование абака, в котором определенное число жетонов в одной полосе заменял один жетон в другой полосе, значительно упрощало и ускоряло технику сложения и вычитания. Английский философ и математик Аделяр, учившийся во Франции и Испании, побывавший не только в Европе, но и на африканском побережье Средиземного моря, перевел с арабского на латынь «Начала» Евклида, таблицы ал-Хорезми, познакомил европейцев с тригонометрией арабских ученых и пользовался их цифрами.

Одним из самых выдающихся переводчиков был Герард Кремонский, родившийся в 1114 г. в Кремоне и умерший в 1187 г. в Толедо. Этот испанский город, находившийся несколько веков под властью арабов и раньше других павший (1085) под натиском христиан, стал одним из первых центров европейской науки и образования. Герард и его единомышленники собрали, систематизировали, установили авторство и перевели более 80 работ арабских ученых, содержащих труды Аристотеля, Евклида («Начала»), Архимеда, Аполлония, Птолемея, Гиппократа, ал-Кинди, ал-Фараби, Ибн Сины, ал-Хорезми, Сабита ибн Корры и других греческих и арабских ученых. Это был заметный вклад в подъем европейской науки.

Начиная с этого периода, важным форпостом проникновения в Европу греческо-арабской науки становится южно-итальянский город Салерно. Коренная латинская культура впитала наследие длительной византийской оккупации, а близость арабов, захвативших Сицилию, обеспечивала прочные связи с их цивилизацией. В Салернской школе преподавание велось на четырех языках: арабском, греческом, древнееврейском и латыни.

Просвещенный император Сицилии Фридрих II (1194–1250) поддерживал научную переписку с восточными правителями по многим проблемам геометрии, астрономии, оптики и философии. Он устраивал опыты для проверки знаний, турниры, во время которых ученые ставили друг другу задачи. В этих турнирах участвовал и уроженец Пизы Леонардо, известный как Фибоначчи[1], чья жизнь и творчество характерны для средневековья.

Арабский язык и математику Леонардо изучал в бакалейной лавке своего отца в Буджии (Алжир). Затем занятия коммерцией и поиски манускриптов привели его в Египет, Сирию, Грецию, на Сицилию. О своих открытиях Леонардо сообщил в «Книге абака» (1202) и «Практике геометрии» (1220), ставших настоящей энциклопедией знаний по арифметике, алгебре, геометрии, тригонометрии и имевших большое значение для последующего расцвета математики в Европе. И это были не только переводы. Книги включают и результаты изысканий самого Леонардо. Так, рассматривая задачу о кроликах[2], автор приходит к ставшему известным «ряду Фибоначчи», каждый член которого есть сумма двух ему предшествующих: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Важную роль в распространении научных знаний сыграли школы. Образование, начавшись с принципа «делай как я», то есть с передачи навыков некоторой профессиональной деятельности, постепенно ста-

[1] Фибоначчи — «сын Боначчо».

[2] Сколько пар кроликов может произойти от одной пары в течение года, если каждая пара ежемесячно порождает новую пару, которая со второго месяца становится производителем, и кролики не дохнут?

новится важным элементом управления общественным сознанием, средоточием теоретических знаний как общечеловеческого характера, так и для конкретной профессиональной деятельности. Еще в VIII в. Карл Великий узаконил требование о том, чтобы каждый монастырь, городской собор имели свои школы. Это требование выполнялось, а кроме этого, школы открывались и при некоторых приходских церквях. Таким образом, были школы монастырские, кафедральные, церковно-приходские. Монастырские школы обычно имели два отделения: внутреннее — для монахов и внешнее — для светских учеников.

С течением времени внешние отделения монастырских школ приобретали самостоятельность, включали в число изучаемых предметов новые социально значимые науки. Позднее они стали называться университетами. Так возникли университеты Болоньи (XII в.), Парижа (1215), Оксфорда (XII в.), Кембриджа (1284) и других городов[1].

В составе университета обычно было четыре факультета: богословский, медицинский, права и искусств. Факультет искусств был общеобразовательным, здесь изучали гуманитарный тривиум (грамматика, риторика, диалектика) и математический квадривиум (арифметика, геометрия, астрономия, музыка), а после его окончания присваивалось звание бакалавра наук. Только бакалавр мог претендовать на богословскую степень, продолжив образование на богословском факультете. Окончание университета давало право на преподавание. Крупные университеты долго сохраняли «специализацию» по орденам: Парижский был вотчиной доминиканцев, последователей Аристотеля и натуралистов, в Оксфордском обосновались францисканцы, приверженцы платонизма августинского толка и математики. Университеты имели привилегии, обеспечивающие им независимость от гражданских властей.

Распространение математических знаний происходило и до возникновения университетов. Это диктовалось практическим интересом к ремесленной деятельности, строительству зданий, крепостей, судов, каналов, созданию военной и гражданской техники. Прежде в течение столетий арифметику и алгебру вне университетов преподавали профессиональные мастера счета, обучавшие бухгалтерскому делу и навигации. Новые образовательные заведения существенно расширили возможности получения образования.

---

[1] Виченце (1205), Ареццо (1215), Падуя (1222), Тулуза (1229), Монпелье (1289), Гренобль (1339), Прага (1348), Флоренция (1349), Вена (1365), Краков (1368), Лейпциг (1409), Базель (1459).

Эпоху создания университетов принято называть «золотым веком схоластики». Схоластика — это особый тип философских и теологических рассуждений с дидактическими устремлениями, с чисто умозрительными, формально-логическими доказательствами и ссылками на авторитеты. Схоласты, многие из которых были профессорами университетов, занимались освещением положений и отстаиванием христианской веры, систематизацией открывшихся истин. Их сочинения, как правило, назывались «Комментарии», «Диспуты», «Суммы» [28] и посвящались толкованию Священного писания, «Книги сентенции» (около 1150 г.) Петра Ломбардского, а в XIII в. и мирских произведений Аристотеля и его последователей, чьи труды постепенно проникали в недра христианского мировоззрения.

Возрождение античной философии было непростым. С одной стороны, идеи Аристотеля привлекали широтой взглядов, логической связностью всей системы, универсальностью объяснений. С другой стороны, языческие идеи этой философии противоречили христианским догмам вечности мира, его происхождения, влияния небесных явлений на земные события и тому подобное. Попытки примирения христианства и аристотелизма приобрели первостепенное значение.

Прославленный просветитель, большой знаток греческой, латинской и арабской науки Альберт Великий, пытаясь разрешить эту дилемму, пришел к убеждению, что «лишь опыт дает уверенность». Епископ Линкольнский, философ-натуралист Роберт Гроссетест, его ученик и последователь Роджер Бэкон противопоставляют аристотелевым объяснениям устройства мира необходимость сопоставления высказываний с опытными фактами, а последний признает и первостепенную роль математики в познании природы, заявляя, что может объяснить любые явления свойствами геометрических фигур. Но только видному идеологу католической церкви Фоме Аквинскому в его трудах «Сумма против язычников» и «Сумма теологии» удалось найти компромисс двух мировоззрений, после чего были сняты церковные запреты на преподавание учения Аристотеля (в Парижском университете с 1253 г.).

Узкий, односторонний взгляд схоластов на образование и содержание научного знания сделала слово «схоластика» нарицательным. Ныне это слово неизбежно ассоциируется с повторением, комментариями известных высказываний, формальными и бесполезными рассуждениями, несовместимыми с духом творчества, поиском новых путей в исследовании природы вещей, с тем, что символизирует для нас науку.

Негативное отношение к схоластике, стихийная уверенность в познаваемости мира, существовании неких всеобщих законов, определяющих поведение мира, стали важным стимулом для поиска новых ответов на традиционные вопросы.

Важно, что эта тенденция не противоречила всеобщему религиозному настрою общества. Религиозное учение, как основа человеческого мировоззрения, оставалось незыблемым, но оно приобретало новую, порой более притягательную окраску. Попытки формулирования новых законов природы и общественного бытия ассоциировалась со стремлением к более тесному слиянию с богом, познанием его сущности и проявлений, ибо «все от бога». Поэтому естественно, что наука и просвещение в эпоху средних веков были в основном религиозного толка. И деятели науки были, как правило, служителями церкви, в числе которых были и профессора университетов. В этом состоит одно из главных отличий средневековой науки от древнегреческой, где главные творцы науки выступали как независимые выразители своих концепций устройства природы и общества.

Отцы древнегреческой науки в своей искренней тяге к открытию всеобщих закономерностей искали ответ на вопрос «почему?». Это был главный вопрос их философии. Второй научный вопрос — «как?» — в силу его практической направленности, заземленности, если и интересовал их великие умы, то только в связи с поиском ответа на их главный вопрос. Отсутствие убедительных доказательств справедливости древних воззрений, растущий общественный прагматизм, требующий конкретных практических рекомендаций, постепенно приводят к смещению акцента в поисках истины. Эксперименты, с целью открытия и подтверждения новых законов, идея сопоставления, использования аналогии для познания новых явлений стали главными научными достижениями средневековья. Необходимы были десятилетия и века для того, чтобы люди отвыкли от необходимости придумывать объяснения того или иного феномена, осознав и привыкнув к тому, что наши органы чувств и разум дают возможность строить вполне убедительные, подтверждаемые опытом нашей жизни, практикой доказательства тех или иных гипотез. Нужно посмотреть на звездное небо, чтобы понять как оно устроено. Нужно изучить движение камня, чтобы понять как он движется.

Вопрос «как?» больше практический, чем философско-теоретический. И для его разрешения необходимы новые понятия, в первую очередь, понятия меры той или иной величины. Открытие законов движения тел в пространстве (в том числе и планет) стало возможным благодаря совершенствованию известных мер расстояния и времени, а также установлению новых измеримых характеристик движения (скорость, ускорение, траектория, радиус кривизны, период), количества вещества (масса) и интенсивности взаимодействия тел (сила). Формирование новых понятий, законов, возникновение общепринятых аббревиатур, буквенно-цифровой символики — это длительный исторический процесс концентрации установленных знаний, создания информационно емкого, формально достаточно простого и эффективного языка науки. Этот процесс шел помимо воли какого-то одного человека, он отражал стремление к поиску иных доказательств известных и познанию новых свойств тел и явлений природы, тенденцию к «экономии мышления» в связи с возрастающим потоком научных знаний и необходимостью их систематизации, осознания и использования. И в этом процессе велика роль ученых средневековья.

1.2. Античность и средневековый Восток

Знакомясь с состоянием математики и механики в арабских и европейских странах средневековья, следует иметь в виду, что наука тогда не относилась к важным сферам человеческой деятельности. Всеобщая религиозность общества была залогом его устойчивости, стабильности экономических, политических, культурных и иных сфер человеческой деятельности. Амбиции религиозных государственных деятелей разрешались жестокими силовыми методами, как внутри стран, так и в межгосударственных отношениях. На территории Европы и стран Востока шел болезненный и достаточно стихийный процесс захвата земель, формирования нынешней государственности. Низкий общий уровень образования населения, отсутствие стимулов развития науки даже в основных сферах деятельности — земледелие, животноводство, строительство, ремесло, военное дело — все это на протяжении многих веков сдерживало научный и технический прогресс. Поэтому содержание основных научных и технических достижений человечества (с позиций современности) долгое время совпадало с достижениями греческой, римской и арабской цивилизаций[1].

[1]Иное объяснение дает А. Т. Фоменко [85].

В области математики было известно понятие числа, существовали различные способы записи целых и дробных чисел, операций (сложение, вычитание, умножение, деление) над ними, процедуры построения и решения линейных, квадратных, некоторых кубических и биквадратных уравнений. Со времен Евклида и Аполлония наиболее развитым разделом математики оставалась геометрия, чьи методы еще долгое время оставались главными и в алгебре, а позднее и в анализе. Определение длин (расстояний), углов, площадей, объемов осуществлялось по известным правилам и с использованием соответствующих мер этих величин, естественно, разных в разных странах.

Из того, что сейчас принято относить к сфере механики, были известны наклонная плоскость, колесо, клин, рычаги I и II рода, винт, полиспаст, законы равновесия (включая гидростатический закон Архимеда) тел для некоторых конкретных случаев, понятия и способы определения центра тяжести простейших тел и их удельного веса. Безусловно, были известны и использовались и более сложные механизмы, такие, как ворот, домкрат, метательные и осадные машины, весло и парус, червячная передача (сочетание зубчатых колес и реек), пневматические автоматы Герона (в том числе и прототип реактивной турбины), рычажный пресс, мельница (водяная, ветряная), но это были достижения изобретательской деятельности человека. Мир техники формировался стихийно, экспериментально, часто без существенного использования научных постулатов.

Законы равновесия тел отражали два различных подхода. Один предполагал изучение равновесия как такового, другой состоял в мысленном выведении тела из равновесия и рассмотрении его дальнейшего поведения. Эти два метода в некоторых книгах по истории механики называются соответственно *геометрической* и *кинематической статикой.* Методы считались независимыми и никак не связывались с основными законами движения тел, сформулированными еще Аристотелем.

Основные механические понятия и принципы философии Аристотеля сформировались как критическое развитие теории его учителя Платона и состояли в следующем. Под движением понималось изменение вообще: возникновение и уничтожение, рост и убывание, качественные перемены, перемещение в пространстве. Природа боится пустоты. Тела имеют различную «сущность» и принадлежат одной из 4-х стихий — земля, вода, воздух, огонь. Каждое тело стихии имеет свое естественное место и всегда к нему стремится. Такова причина «естественного» (без вмешательства человека) движения. Причиной «насильственного» движения тел является действие «двигателя» или «сила». Закон «насильственного» движения можно считать состоящим в том, что произведение величины «двигателя» на время движения равно произведению величины «движимого» на пройденный им путь. В современных понятиях это соответствует формуле $F \cdot t = m \cdot s$ или $F = m \cdot v$, хотя возможны и иные интерпретации. Автор знаменитых трактатов «Физика», «О небе», «Метафизика» и других приписывал телам и некоторые скрытые свойства тяжести и трения, считая, что тяжелые тела падают быстрее легких.

Первое определение скорости перемещения встречается у современника Аристотеля — Автолика из Питаны. Это определение касается скорости равномерного движения: «О точке говорится, что она равномерно перемещается, если в равные времена она проходит равные и одинаковые величины» [20, с. 59]. Следует обратить внимание на то, что скорость определяется через путь и время. Отношение же пути ко времени считалось бессмысленным.

Наиболее завершенный вид имела теория прямого рычага, изложенная в трудах Архимеда («О весах», «О равновесии плоских тел и центрах тяжести плоских фигур»), псевдо-Евклида («Книги о весах») и псевдо-Аристотеля[1] («Механические проблемы»), Герона («Механика», «О подъеме тяжелых предметов») и Витрувия («Об архитектуре»). Применение рычагов было весьма разнообразным, но наиболее распространенным примером рычага были весы. Поэтому изучение свойств рычагов связано с «искусством взвешивания», греческое название которого *στατική τέχνη* (латинское — statiké) и породило слово «статика».

Общепринятая теория сводилась к следующим, проверенным многолетним опытом, положениям:

1. Равные тяжести на равных длинах уравновешиваются, на неравных длинах не уравновешиваются и перетягивает тяжесть на большей длине.

2. Если при равновесии тяжестей к одной из них будет что-нибудь добавлено, то перевесит тяжесть с добавкой.

---

[1] Автор не установлен, но по содержанию и стилю изложения трактата, им может быть последователь Евклида, Аристотеля, живший в I–II вв. до н. э.

3. Аналогично, если от одной из тяжестей что-нибудь отнять, то перевесит другая.

4. Если две величины уравновешиваются, то будут уравновешиваться и равные им.

5. Если центр тяжести подвешенного тяжелого тела расположен на отвесной линии, проходящей через точку подвеса, то тело находится в равновесии.

Из собственных семи постулатов, не противоречащих общепринятым положениям, чисто геометрическим способом Архимед доказал ряд теорем, суть одной из которых сводится к тому, что величины уравновешиваются на длинах, обратно пропорциональных тяжестям. Под длинами понималось расстояние до точки опоры (длина рычага), поэтому, несмотря на то, что Архимед не ввел понятие статического момента, он пришел к формулировке закона равновесия рычага.

К такому же выводу, но иначе, приходит и псевдо-Евклид. Автор вводит понятия веса[1] и «силы веса». Смысл последнего совпадает с современным понятием статического момента. С помощью умозрительного эксперимента он показывает, что если $CB = 3AC$ (рис. 1.2), а вес груза A в три раза больше веса груза B, то коромысло AB будет в горизонтальном положении, то есть рычаг AB в равновесии. Этот результат обобщается на общий случай, приводящий к выводу, полученному Архимедом.

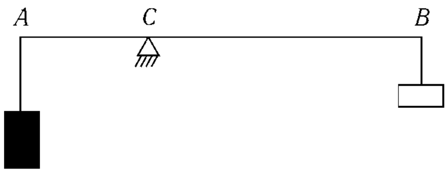


Рис. 1.2

Рассуждения Архимеда и псевдо-Евклида относятся к геометрической статике. Второй подход к изучению равновесия, с позиций кинема-

[1] «Вес есть мера тяжести или легкости предмета, сопоставленного с другим (предметом) с помощью весов» [259, с. 24].

тической статики, предлагается в «Механических проблемах». Автор выводит из равновесия рычаг AB (весы), у которого длинное плечо CB описывает дугу большого круга радиуса CB, а короткое плечо AC — дугу малого радиуса CA, и заключает, что «конец B должен двигаться быстрее конца A, т. к. большой радиус за то же время описывает больший круг» [34, с. 61]. Далее говорится о том, что малым усилием на длинном плече (в точке B) рычаг можно вывести из равновесия, чего иногда нельзя добиться, прикладывая то же усилие на коротком плече (в точке A). Отсюда делается вывод, что «одной и той же силы груз, двигаясь, поднимает тем больше, чем дальше он расположен от точки опоры» [34, с. 61]. Полученный вывод позволяет сформулировать условия равновесия прямого неравноплечного рычага через обратную пропорциональность весов и проходимых ими путей, а не расстояний до точки опоры.

Развивая точку зрения псевдо-Аристотеля, Герон отмечает, что выигрыш в силе, прикладываемой к длинному плечу, достигается увеличением не только пути, но и времени. Описывая действие ворота в учебном пособии для учеников александрийской технической школы, он пишет: «В этом инструменте, как и во всех подобных машинах большой мощности, происходит замедление, ибо в той мере, как движущаяся сила оказывается слабее, чем поднимаемый груз, в той же мере мы увеличиваем время. Так, отношение силы к силе обратно отношению времени ко времени» [201]. Время характеризует пройденный путь, поэтому заключение Герона можно, с позиций современной механики, рассматривать как *равенство работ сил.* Этот вывод близок к содержанию принципа возможных перемещений («золотое правило механики»), формировавшемуся на протяжении многих столетий трудами И. Неморария, Г. Галилея, Р. Декарта, И. Бернулли и других ученых и наиболее ясно сформулированному Лагранжем в «Аналитической механике».

Мысль о том, что экспериментальный метод вошел в науку только после работ Р. Бэкона и Г. Галилея не подтверждается историческими фактами. Интуитивно или сознательно ученые всех эпох стремились к практическому, экспериментальному подтверждению теоретических гипотез. Это было характерно еще для творчества Аристотеля, но особенно показательны опыты Архимеда по гидростатике, описанные позднее (в I в. до н. э.) Витрувием. Эти опыты позволили Архимеду открыть знаменитый закон (всякое тело, погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость), прославивший его имя, и ответить сиракузскому царю Гиерону на вопрос о наличии золота в его короне[1].

Царские сомнения Архимед разрешил экспериментально. Он попросил сделать два слитка (золотой и серебряный) весом равным весу короны и опустил в наполненный до краев водой сосуд золотой слиток. Далее он замерил мерным сосудом вылившийся объем воды, вынул золотой слиток и вновь наполнил сосуд до краев. Повторив этот опыт для серебряного слитка и короны, Архимед увидел, что объем вылившейся воды каждый раз был разным. А это означало, что корона не из чистого золота. Но, по-видимому, Архимед не ограничился описанным полукачественным экспериментом, а по свидетельству греческого механика Менелая (I в.) и его арабского переводчика ал-Хазини («Книга о весах мудрости», XII в.), изобрел «весы Архимеда», позволяющие определить количество золота в короне, не нарушая ее формы.

Следующие поколения ученых выражали сомнения, критически оценивали взгляды предшественников и предлагали свои научные концепции. Одним из наиболее видных критиков учения Аристотеля был Иоанн Грамматик, по прозвищу Филопон (Трудолюб), живший в конце V – начале VI в. В «Комментариях к физике» (517) он подвергает сомнению верность причин движения, названных Аристотелем и более поздними комментаторами его трудов Александром Афродизийским и Темистием. Комментаторы предполагали, что движению тела способствует среда (воздух, вода), в которой происходит движение. Мысленные эксперименты Филопона с брошенным камнем или выпущенной стрелой убеждают его, что причиной движения является «некоторая бестелесная кинетическая мощь», получившая название в латинских сочинениях средневековья «impetus», то есть напор.

Филопон подверг критике и аристотелеву теорию падения тел, утверждая, что отношение их весов не равно отношению времен их движения. Опыты не подтверждали ни увеличение веса по мере приближения к «естественному» месту, ни его потерю в момент достижения этого места, ни увеличения веса пустого тела после его надувания воздухом.

[1]Гиерон заподозрил, что ювелир сделал ему корону не из чистого золота, а с примесью серебра.

В результате гонений в христианской Византии на «языческую» науку, ученые Александрии, Афин и других городов в V–VI вв. переезжали на восток в сохранившиеся центры древних (ранее связанных с Вавилоном и Индией) культурных традиций, во вновь создаваемые научные центры. Так политические события (распад Римской империи, возникновение Арабского халифата) привели к угасанию эллинистических научных школ и возникновению в VIII–IX вв. новых научных центров на обширной территории Аравийского полуострова, Ирана, Сирии, Палестины, Северной Африки, Пиренейского полуострова, Сицилии и Южной Италии, Армении, Средней Азии и Северо-Западной Индии. Начальный этап формирования средневековой науки на Востоке был связан с освоением достижений предшественников, чьи труды с древнегреческого переводились на персидский, сирийский, позднее на арабский языки.

В VIII–IX вв. крупнейшим научным центром халифата стал Багдад. Здесь жили многие ученые, переводчики и переписчики. При поддержке халифа ал-Мамуда (813–833) был создан «Дом мудрости» с обсерваторией и библиотекой, непрерывно пополнявшейся новыми научными трудами (в том числе и поступавшими из других стран). Это была своеобразная академия, где не только обучались, но и проводили исследования, вели астрономические наблюдения и расчеты. В этот период в Багдаде и других научных центрах халифата переводятся труды древнегреческих математиков, Аристотеля, Архимеда, Герона, Птолемея.

Следующий этап становления средневековой восточной науки характеризуется появлением в нем специфических, самобытных особенностей. В механике — это математический стиль с присущим ему четкостью, строгостью формулировок и доказательств, полнотой и систематичностью изложения материала, использованием новых вычислительных (арифметических, алгебраических) и геометрических методов; это обилие практических примеров и задач. Заключительный этап связан с адаптацией достижений арабоязычных ученых и их древнегреческих предшественников в странах средневековой Европы. Исключительно важную роль в этом процессе сыграли западные провинции халифата, первыми начавшие его распад[1]. В Кордове, Толедо, Севилье, Гранаде и других научных центрах Пиренейского полуострова не

[1]В 929 г. кордовский эмир Абдуррахман III объявил себя халифом, а Кордовский эмират — независимым от Багдада государством.

только велись исследования по математике, механике и астрономии, но и переводились на латынь наиболее ценные греческие и арабские трактаты.

Из известных ныне арабских сочинений по статике[1] в рукописях сохранились только некоторые: «Книга о механике» (братья Бану Муса), «Отдельная глава о свойствах тяжести» и «Книга о карастуне» (Сабит ибн Корра), «О естественных весах и действиях с ними» (ар-Рази), «Книга о центрах тяжести» (Ибн ал-Хайсам), «Мерило разума» (Ибн Сина), трактаты ал-Бируни, ал-Хазини, Элиаса бар Шинайи, Омара Хайяма и других авторов. Во многих из названных трактатов обсуждаются и проблемы движения тел. Наиболее детально свойства и причины движения описываются в сочинениях Ибн Сины «Книга знания», «Книга исцеления», «Книга спасения», в его переписке с ал-Бируни, в уже упоминавшейся «Книге о весах мудрости» ал-Хазини, в публикациях известного багдадского ученого XII в. ал-Багдади и его испано-арабских современников Ибн Туфайля, Ибн Рушда (Аверроэса), ал-Битруджи, Ибн Баджжи (Авемпаса).

Среди арабских рукописей Парижской национальной библиотеки в 1851 г. были обнаружены два близких по содержанию и стилю изложения трактата: «Книга Евклида о весах» и «De canonio»[2]. Их авторы неизвестны, хотя установлено их греческое происхождение[3]. Оба сочинения посвящены условиям равновесия неравноплечих весов (рычагов). В первой книге — невесомых, во второй — весомых (коромысло весов — не линия, а однородная балка с грузом, подвешенным на коротком плече). Судя по содержанию других арабских источников, эти трактаты имели основополагающее значение для статики арабского средневековья.

В основу первого из трактатов положены три аксиомы, которые в современной трактовке сводятся к следующему:

1. Если два равных груза подвешены на концах прямолинейной однородной балки, подвешенной в ее середине, то балка остается параллельной горизонту (в равновесии).

2. Если балка с двумя грузами на концах покоится (горизонтальна), то ее равновесие не нарушится при перемещении одного из грузов

---

[1] Возможно, что это арабский перевод или обработка трудов Евклида [25, с. 52].

[2] По латыни canonium — коромысло весов.

[3] Авторы более чем 50 трактатов установлены, 11 сочинений анонимны.

вдоль линии, проходящей через точку подвеса груза перпендикулярно балке.

3. Равновесие балки с двумя грузами на концах не изменится, если добавить к ее точке подвеса некоторый груз.

При решении конкретных задач автор опирается на сформулированные аксиомы, пользуется введенным им новым понятием «силы груза» (аналог понятия момента силы) и формулирует закон (условие) равновесия рычага, совпадающий с современным условием равенства моментов сил.

Во втором трактате продолжается изучение условий равновесия весомого рычага-балки с грузом, подвешенным к более короткому плечу. Опираясь на архимедовское учение о центре тяжести, на его же условие равновесия рычага, автор устанавливает правило определения длин плеч рычага или точки подвеса рычага, относительно которой балка-рычаг будет сохранять равновесие.

Известно по крайней мере три «Книги о карастуне», авторами которых были братья Бану Муса, Коста ибн Лука и Ибн Корра. Все они изучают поведение неравноплечих весов (или карастуна). При доказательстве правила равновесия рычага Сабит ибн Корра пользовался подходом кинематической статики (аналогом принципа возможных перемещений). Его понятие «силы движения» близко к современному понятию работы силы тяжести на возможном перемещении[1]. Однако, излагая далее свои собственные результаты, Ибн Корра использовал и геометрические методы Архимеда, в частности, аксиомы, приведенные в «Книге Евклида о весах». Переходя от прямого рычага к коленчатому («ломаному»), он фактически вводит понятие момента силы как произведение веса на кратчайшее расстояние между осью вращения и линией действия силы. При этом рычаг (невесомый) не обязан быть в горизонтальной плоскости.

Обращаясь к изучению равновесия весомого рычага, Ибн Корра устанавливает правило для определения центра системы параллельных сил или центра тяжести тел. Но делает это иначе, чем в «Книге Евклида о весах». Доказательства Ибн Корры очень близки к методам геометрической статики Архимеда, его приемам вычисления центров тяжести тел методом исчерпывания. Сначала он находит равнодействующую двух равных сил, обобщает ее на любое конечное число

[1]При заданном грузе «сила движения» пропорциональна перемещению, а при заданном перемещении — весу груза.

равных сил, приложенных на равных расстояниях, а затем и на бесконечное множество равных сил, переходя к равномерно распределенной нагрузке.

Понятие центра тяжести тела, системы тел, впервые появившиеся в работах Архимеда, до сих пор является одним из важнейших в классической механике. Эта точка, именуемая еще центром масс, инерции, параллельных сил (тяжести, веса, инерции), существенно характеризует движение и равновесие тел. Поэтому ее определению, вычислению посвящены многие сочинения античных и средневековых ученых. В их числе и «Книга о весах мудрости», которая содержит не только результаты самого ал-Хазини, но и трактаты ал-Кухи, Ибн ал-Хайсама и ал-Асфизари. Классические результаты Архимеда для плоских тел здесь распространяются на пространственные тела и системы тел. Причиной существования силы тяжести тела, как и у Аристотеля, является стремление тела к своему «естественному месту», которое называется «центром Мира». Рассматривая различные случаи расположения центра тяжести тяжелой балки, системы шаров, авторы получают соответствующие условия равновесия и впервые обсуждают свойства устойчивости и неустойчивости равновесия. Ал-Хазини рассматривает три вида равновесия: *безразличное* (ось вращения балки проходит через центр тяжести системы), *устойчивое*[1] (центр тяжести системы ниже опоры — оси вращения), *неустойчивое* (центр тяжести системы выше опоры — оси вращения балки).

Как и в прежние времена, механика средневекового Востока включала не только работы теоретического (геометрического, физического, вычислительного) характера, но и учения о хитроумных приспособлениях, о машинах для поднятия тяжестей, воды, полива полей, «науку о зеркалах», приемы конструирования военных механизмов, весов, музыкальных инструментов, архитектуру и даже плотницкое дело. Этой «практической» механике, в частности, теории весов и взвешивания, методам определения удельного веса тела посвящена значительная часть «Книги о весах мудрости». Методы определения удельного веса (Менелая, Синда ибн Али, Абу Мансура, Юханны ибн Юсуфа, ар-Рази, ал-Бухари) обсуждаются и в трактате ал-Бируни «Об отно-

[1]Понятие устойчивого равновесия системы тел, его физический смысл и математическая запись в XVII в. использовались Робервалем, Гюйгенсом и другими учеными. Математические условия устойчивости равновесия системы тел впервые были сформулированы Лагранжем.

шениях между металлами и драгоценными камнями в объеме» (XI в.), в трактатах Хайяма, ат-Туси и других арабских ученых. Устройство многих механизмов, автоматов (в том числе новых) описывается в научной энциклопедии «Ключи наук» (ал-Хорезми, IX в.), в трактатах Ибн Сины («Книга знания» и «Мерило разума»), ал-Джезари («Книга, объединяющая науку и практику в искусстве механики»), ал-Караджи («Книга об извлечении скрытых вод», XI в.), написанных в русле античных традиций «Механических проблем»; «Механики» и «Автоматов» Герона Александрийского; «Пневматики» Филона Византийского.

Вопросы сущности, причин и свойств движения тел привлекали внимание многих арабоязычных ученых. Известные комментарии сочинений Платона, Аристотеля, Филопона, Симпликия, выполненные Ибн Синой, ал-Бируни, Ибн Рушдом донесли до нас взгляды древнегреческих ученых и наметили пути появления новых представлений. Так, термин «вес» у арабских ученых имел двойной смысл. Он использовался для обозначения груза, подвешенного к рычагу. А второй смысл этого слова связывался с понятием силы, перемещающей тело к его «естественному» месту — к центру Мира.

В «Книге весов мудрости» ал-Хазини прямо указывает на то, что вес (во втором смысле) зависит от расстояния до центра Мира (в центре он равен нулю). Эта путаница в понятиях веса и «тяжести соответственно положению» (прообразу момента силы) достаточно характерна для работ этого периода. Говоря о движении тел в среде, ал-Хазини считал, что скорость тела зависит от плотности среды, а само движение возможно только тогда, когда «сила», движущая тело, превосходит сопротивление среды.

Комментируя сочинения Платона, Аристотеля, Филопона, Ибн Сина, ал-Бируни и другие арабские ученые излагали свои подходы к теории движения тел. Ибн Сина, следуя Аристотелю, отрицал возможность существования пустоты, делил движения на «естественные» и «насильственные», повторял соотношения между скоростью и путем тела. Ал-Бируни выражал сомнение по поводу некоторых взглядов Аристотеля. Например, утверждал, что тела стремятся не к «естественному» месту, а к центу Земли. В «Книге исцеления» Ибн Сина возражает против аристотелевых причин движения[1] и предлагает считать, что в момент начала движения «двигатель» сообщает телу некоторое

[1]По Аристотелю причиной движения является давление воздуха, возникающее сзади тела.

«стремление» («маил» или «склонность»), которое и поддерживает его движение. Этих «стремлений» у тела три: *психическое*, *естественное* (у свободно падающего тела) и *насильственное* (или приложенная сила). Действие «стремления» зависит от величины веса тела. Если приложенная сила действует в пустоте, то движение должно сохраняться, не уничтожаясь и не прерываясь.

Взгляды Ибн Сины получили развитие в трудах его последователей — ал-Багдади и испано-арабских ученых. Не останавливаясь на деталях их концепций движения, заметим, что комментарии Ибн Рушда, Ибн Баджжи, Ибн Туфайля, ал-Багдади к трудам Аристотеля, Филопона, Ибн Сины сыграли важную роль в создании средневековыми европейскими учеными теории импетуса, во введении и изучении характеристик неравномерного движения.

1.3. Теория движения тел в философии номиналистов

Проблема движения тел (выяснение его причин и свойств) всегда была одной из основных в учениях греческих, арабских и европейских философов. Концепции Платона и его ученика Аристотеля, Филопона, Ибн Сины, отличаясь одна от другой во многих деталях, все носили умозрительный, оправдательный характер. Каждый мудрец пытался найти ответ на вопрос «почему движется тело?». Безрезультатность, неудовлетворительность попыток ответа на этот вопрос подтверждалась тем, что новые поколения ученых искали все новые и новые объяснения. Но поиск первопричины движения был и оставался обреченным на неуспех.

Более продуктивным оказался поиск ответа на вопрос «как движется тело?». Этот вопрос так или иначе присутствовал во всех философских концепциях движения, но от Аристотеля до Галилея он постепенно превратился в главный вопрос научного естествознания и техники, одновременно приняв не только качественное, философское, но и количественное, математическое выражение.

После Филопона и арабских ученых проблема движения брошенного тела начинает обсуждаться и в христианской Европе. «Ангельский доктор» Фома (Томас) Аквинский в своих комментариях к Аристотелю возражает против возможности передачи телу некоторой мощи и поддерживает аристотелеву идею о давлении воздуха. Позднее свою точку зрения на причины и свойства движения выразили профессора Оксфордского и Парижского университетов, ставших в начале XIV в. центрами исследования проблем механики.

Видным французским математиком и механиком XIII в. был Иордан Неморарий. Его математические трактаты «Арифметика, изложенная в 10 книгах», «О данных числах», «О треугольниках», «Трактат о сфере» свидетельствуют о широте интересов, хорошем знании трудов предшественников и характеризуют состояние математического знания той эпохи. Это относится и к механическим сочинениям Неморария «О тяжестях», «Элементы доказательств, касающихся тяжестей», «Книга о пропорции тяжестей».

В них автор повторяет и развивает идеи Аристотеля, древнегреческих и арабских ученых средневековья: обобщает учение о рычаге, вводя понятие «тяжести соответственно положению»; решает задачу о равновесии тела на наклонной плоскости; продолжая идеологию кинематической статики, предлагает теорию равновесия простых машин, основанную на сравнении относительной тяжести грузов при их перемещении. «Один и тот же груз, — рассуждал Неморарий, — приложенный в разных точках, оказывает разное действие на механизм (рычаг, ворот, наклонную плоскость, ...)». Например, груз на более длинном плече рычага более тяжел, как и груз на более крутой наклонной плоскости.

Понятие «тяжести соответственно положению», аналогичное «силе движения» Сабита ибн Корры, и условие равновесия тел являются важными звеньями в формировании понятия «момент силы» («статический момент») и принципа возможных перемещений («золотое правило механики»). Трактаты И. Неморария были широко известны в XIII–XV вв. в европейских странах и наложили отпечаток на творчество его многочисленных последователей не только во Франции, но и в Англии, Голландии, Италии.

Первым европейским трактатом по кинематике принято считать сочинение Герарда Брюссельского «О движении» (конец XII – начало XIII вв.). Заметим, что движение здесь рассматривается с традиционно аристотелевых позиций и часто ассоциируется со скоростью. Книга Герарда посвящена исследованию соотношений между движениями точек, линий, плоских и пространственных тел. Следуя Архимеду («Послание о методе»), Герард рассматривает линию как совокупность точек, поверхность — как совокупность линий, тело — как совокупность поверхностей. Для сравнения линий двух фигур автор вводит принцип соответствия между множествами точек[1].

Рассматривая круговые движения точек и вращательные движения тел, Герард делает вывод о том, что прямая, параллельная оси вращения, движется «одинаково с любой своей точкой», а радиус, вращаясь, «движется одинаково со своей серединой». В этом можно усмотреть идею определения средней скорости движения тела. В трактате различаются *равномерные* и *неравномерные* движения тел в пространстве. При сравнении перемещений тел всегда имеются в виду равные промежутки времени. Утверждается, что скорости (пути, описываемые точками вращающегося радиуса) меняются от нулевой (начало радиуса) до максимальной (конец радиуса).

Исследования Герарда Брюссельского продолжили английские схоласты-номиналисты Роджер Бэкон, Дунс Скотт, Уильям Оккам, Томас Брадвардин[2] и его последователи. В «Трактате о пропорциях или о пропорциях скоростей при движении» (1328) основоположник Оксфордской школы «калькуляторов» — Т.Брадвардин — выражает сомнение в правильности аристотелевой оценки величины скорости тела в зависимости от действующих сил. Пользуясь своей теорией пропорций, описанной в первой главе трактата, Брадвардин записывает словесную формулу аристотелевой физики в виде $v = \frac{F}{R}$, где v — скорость, F — движущая сила, R — сопротивление движению. По Аристотелю получалось, что при $F = R$, $v = 1$, но по логике должно быть $v = 0$. Это несоответствие подтолкнуло Брадвардина к поиску своей пропорции и он предлагает считать, что $v \sim F - R$ или $v = \frac{F - R}{R}$.

По Аристотелю, при постоянном сопротивлении должно быть:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{F_1}{F_2},$$

а при постоянной F —

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

[1] К этому можно относиться как к предыстории формирования математического понятия функции.

[2] Математик, механик, богослов. Профессор, прокурор Оксфордского университета. С 1333 г. — канцлер собора св. Павла в Лондоне, архиепископ.

В этом, однако, Брадвардин усматривает противоречие и предлагает свою пропорцию. Получается, что любая, сколь угодно малая сила F может двигать любое, сколь угодно большое тело, но со скоростью, меньшей в $\frac{R_1}{R_2}$ раз. В таком случае закон Аристотеля можно представить равенством

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{F_1}{R_1}}{\frac{F_2}{R_2}}.$$

Аристотелев закон изменения скорости

$$nv = n\frac{F}{R}$$

Брадвардин модернизирует весьма сложным образом:

$$nv \sim \left(\frac{F}{R}\right)^n.$$

Удвоение скорости соответствует возведению $\frac{F}{R}$ в квадрат, утроение — в куб и так далее. Записав пропорцию в виде функционального уравнения

$$nv(x) = v(x)^n,$$

где $x = \frac{F}{R}$, получаем его решение — выражение для скорости в зависимости от действующих сил —

$$v = \log x = \log\frac{F}{R},$$

при $F = R$, дающее $v = 0$.

С физической точки зрения, гипотеза Брадвардина о соотношении скорости и действующих сил необоснованна. Но чрезвычайно важно, что впервые привлекается идея функциональной зависимости скорости от причин движения.

Говоря современным языком, рассматривается динамическая задача. То есть с математической точки зрения, идея выведения количественной функциональной зависимости между характеристиками движения и его причинами была прогрессивной и поэтому получила дальнейшее развитие. Говоря о характеристиках движения, следует иметь в виду, что понятия скорости, силы в XIV в. существенно отличались от современных. Под движением понималось произвольное изменение. В соответствии с традициями древнегреческой физики сравнивать можно было только однородные величины (путь — с путем, время — со временем и тому подобное). Поэтому скорость движения характеризовалась не путем, пройденным в единицу времени, а безразмерным числом (например, отношением движущей силы к сопротивлению). В «Трактате о континууме», написанном между 1328 и 1355 гг., Брадвардин называет скорость «качеством движения». Продолжительность движения называется «количеством движения». Время он рассматривает как *бесконечный последовательный континуум*, определяющий и измеряющий очередность, делимый до бесконечности. Движение автор определяет как *прохождение пространственного континуума во времени.* Он утверждает, что одну и ту же траекторию тело может проходить с разными скоростями. Движения могут иметь одинаковую скорость («качество»), но разную продолжительность («количество»).

Существенный вклад в формирование кинематических понятий внесли ученики Брадвардина — ученые Мертон-колледжа Оксфордского университета Уильям Хейтесбери, Ричард Суайнсхед (Суиссет), Джон Дамблтон, Ричард Киллингтон, создавшие «учение о калькуляциях». «Униформное[1] локальное (то есть пространственное) движение таково, что в любые равные промежутки времени описываются равные пути», — писал Суайнсхед в трактате «О калькуляциях». Хейтесбери в сочинении «Правила решения софизмов» определяет равноускоренное движение следующим образом: «...в любую из равных частей времени приобретает равные приращения скорости». В трактате «О местном движении» Хейтесбери вводит понятие мгновенной скорости для неравномерного движения: «В пространственном диформном движении в любое мгновение скорость определяется по линии[2], которую прочертила бы наиболее быстродвижущаяся точка, если бы на протяжении она стала бы двигаться униформно с тем градусом скорости, с которым она движется в это мгновение — какое бы мгновение ни взять» [44, с. 140]. Ускорение и замедление Хейтесбери называл соответственно «интенсивностью» и «ремиссией» «местного» или «локального» движения. Общее определение ускорения (отдельное введение ускорения и за-

[1]Униформное — равномерное, диформное — неравномерное.

[2]Речь идет о направлении скорости.

медления связывается с отсутствием понятия отрицательного числа) отсутствовало, но в конкретных случаях его характеристика была достаточно ясной. Согласно Хейтесбери, при «униформно-диффформном» (с постоянным ускорением) движении скорость возрастает или уменьшается за равные промежутки времени на равную величину.

Наиболее важным результатом механиков Мертон-колледжа была теорема об эквивалентности равномерно ускоренного движения равномерному движению со средней скоростью, получившая название «мертонское правило». В формулировке Суайнсхеда эта теорема гласит: «Всякая широта движения, униформно приобретаемая или теряемая, соответствует своему среднему градусу, так что столько же в точности будет пройдено, благодаря этой приобретаемой широте, сколько и благодаря среднему градусу, если бы тело двигалось все время с этим средним градусом». Здесь под «широтой» понимается интенсивность качества (движения), а под «градусом» — величина этой интенсивности. В современной интерпретации «мертонское правило» означает, что путь, пройденный при равноускоренном движении за некоторое время, равен пути равномерного движения за то же время со средней скоростью. Доказательства этой теоремы приводятся в трактатах Хейтесбери, Суайнсхеда, Дамблтона, Киллингтона, написанных в 1330–1340 гг.

Одним из крупнейших университетов Европы в конце XII в. был Парижский университет. В 1257 г. теолог и духовник короля Людовика IX Робер де Сорбон создал в Латинском квартале богословский колледж с общежитиями для бедных студентов и квартирами для преподавателей. Через триста лет (1554) этот колледж стал теологическим факультетом Парижского университета, который с той поры стал называться Сорбонной[1].

Видным профессором Парижского университета (в 1327 г. ректором) и Наваррского колледжа был Жан Буридан, известный как автор философского парадокса «буриданова осла»[2]. Полностью разделяя аристотелев принцип: «Все движущееся должно необходимо приводиться в движение чем-нибудь», Буридан отрицал передачу движения от движителя к движимому телу через посредство среды (воздуха, воды). Он предложил собственную теорию, развивающую взгляды Фи-

[1] В 70-х гг. XX в. реорганизован в 13 самостоятельных университетов.

[2] Осел, помещенный между двух одинаковых охапок сена, должен умереть от голода, так как не сможет выбрать левую или правую охапку, колеблясь между двумя одинаковыми возможностями.

лопона, Ибн Сины и их последователей, получившую название *теории импетуса*[1].

Анализируя опытные факты, Буридан приходит к выводу, что движитель, приводя в движение перемещающееся тело, внедряет в него определенный напор (impetus)[2] или некоторую двигательную силу, действующую в направлении действия движителя. Этот напор или импетус непрерывно уменьшается сопротивлением воздуха или тяжестью, если тело брошено вверх. Чем больше материи в теле, тем больше импетус. Естественно, круговые движения на небе отличаются от насильственного движения брошенного камня, но все движения можно объяснить понятием импетуса. При падении тела импетус является причиной его ускорения.

Буридановский импетус объединяет в себе комплекс современных понятий. Его нельзя отождествлять ни с импульсом, ни с энергией, ни с силой, ни с ускорением. Но потенциально он содержит в себе некоторые аспекты всех этих важнейших понятий, вошедших в теоретическую механику позднее.

Как видный ученый, Буридан не мог обойти вниманием проблему устройства Вселенной. Он выражает идею относительности движения, сомневается в неподвижности Земли и ее расположении в центре Вселенной, впервые формулирует понятие *инерции* (как один из видов внутреннего сопротивления движению) и *закон инерциального движения* (естественно, в своей трактовке).

Значительный вклад в развитие теории импетуса внес ученик Ж. Буридана — Николь Орем. Эрудит, философ, профессор (ректор, 1356–1363) Наваррского колледжа, в 1363–1377 — каноник в Руане, с 1377 г. епископ Лизье, советник короля Карла V и профессор Парижского университета, он одним из первых начал писать научные труды не на латыни, а на французском языке. В частности, в 1377 г. он написал «Книгу о небе и Вселенной», где высказывает предположение о том, что Земля обладает суточным движением, которого лишены небеса: «И я заявляю, что, во-первых, невозможно доказать обратное с помощью любого опыта, во-вторых, с помощью рассуждений и, в третьих, я приведу соображения в пользу этого мнения» [34, с. 107]. Как

[1] В 20-х гг. XIV в. францисканский монах Франческо ди Маркиа в комментариях к «Сентенциям» Петра Ломбардского подробно рассмотрел понятие импетуса — движущей силы, передаваемой не среде, а самому телу.

[2] Термин впервые введен Буриданом.

известно, далее эта точка зрения получила развитие в знаменитом сочинении Н. Коперника.

Средневековые схоласты, следуя Аристотелю, считали, что движение всегда происходит в некоторой среде, то есть при наличии некоторого сопротивления среды. Поэтому, обсуждая движение небесных тел, движущихся вне среды, без сопротивления, Буридан предполагал наличие у тел внутренней склонности к противоположно направленному движению. Орем продолжил эту идею в комментариях к «Физике» Аристотеля, «О сфере» Сакробоско, «О небе и мире» Альберта Саксонского. В отсутствии сопротивления небесные движения сохраняли бы импетус бесконечно долго, а это привело бы к бесконечно быстрым движениям. Но таковых мы не наблюдаем. Поэтому Орем вводит в рассмотрение сопротивление особого рода. Кроме внешнего сопротивления среды он предполагает наличие у тел внутреннего сопротивления — тенденции к противоположно направленному движению и тенденции к покою. Благодаря Орему, эта точка зрения (существование инерциального сопротивления) была широко распространена в XIV в., а позднее укоренилась в механике в виде свойства инертности тел. Важно подчеркнуть, что идею инертности тел Буридан, а позднее и Орем, распространяли на все тела Вселенной. Тем самым пропагандировалась идея единства, универсальности законов движения земных и небесных тел.

В связи с понятием импетуса и осознанием возможности изменения скорости движения тел, в механику входит понятие *ускорения*. Как и все научные понятия, оно формировалось методом последовательных приближений и определяло одно из свойств движения — величину (меру, быстроту, степень) изменения скорости. Считалось, что брошенный вверх камень сначала увеличивает свою скорость, а затем его скорость убывает. Наблюдения Буридана не подтвердили эту точку зрения. Орем же, уверенный в том, что именно так и движется брошенный камень, предложил считать, что импетус является причиной не постоянной скорости, а постоянного ускорения, то есть изменения скорости. Таким образом, из ложной посылки фактически декларировалось часть содержания будущего второго закона Ньютона.

Чрезвычайно перспективной оказалась и еще одна идея Орема — идея *графического, геометрического исследования движения*, высказанная им в «Трактате о конфигурации качеств и движения» (1350). Он предложил изображать время (путь) отрезками прямой, а соответствующие скорости — отрезками другой прямой, перпендикулярной первой. Точнее, речь шла об изображении отрезками прямой количества и качества движения тела. Но если трактовать идею Орема именно таким образом, отождествляя количество и качество движения со временем и скоростью, то получится график изменения скорости в зависимости от времени. Используя идею декартовых координат (возможно, почерпнутую Декартом у Орема), это можно представить рисунком 1.3.

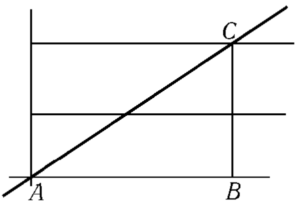


Рис. 1.3

Рисунок, вошедший в историю под названием «диаграммы Орема», наглядно демонстрирует величину скорости (CB) в зависимости от времени (AB). При равномерном движении графиком скорости будет прямая, параллельная (AB), при равноускоренном (падение тела) — наклонная (AC).

Возможность графического изображения функциональной зависимости скорости от времени сделала наглядными многие результаты оксфордских механиков. Во второй части трактата Орем показывает, что путь равномерного движения соответствует прямоугольнику, равноускоренного — треугольнику или трапеции (в зависимости от начальной скорости). В третьей части формулируется и доказывается «мертонское правило». При этом используется предположение, что движения эквивалентны, если площади их конфигураций равны. Таким образом, «мертонское правило» получило ясную геометрическую интерпретацию. Если бы Орем применил свой метод к проблеме падения тел, то смог бы предвосхитить результаты, полученные Галилеем из физических соображений через два с половиной века.

Работы оксфордских и парижских механиков получили развитие в Италии. Об этом свидетельствуют трактаты Джованни Казале, Баджио из Пармы («О движении», «Об интенсификации и ремиссии форм», «Вопросы к трактату о широте форм»), Паоло Венецианского, Анджело да Фассамруно, Джованни Мармюни. Учение «калькуляторов» даже изучалось в университетах. Но к середине XV в., в связи с отсутствием практических приложений и сложностью математического аппарата, оно перестало развиваться.

Значительный вклад в упрочение теории импетуса внес другой ученик Буридана — Альберт Саксонский де Хельмстед — профессор (в 1353 — ректор) Парижского университета. Он оперировал понятием угловой скорости, различал движение с переменной (в пространстве и времени) скоростью, пытался сформулировать некоторый количественный закон роста скорости падающего тела (считал, что скорость должна расти пропорционально пройденному пути).

Подводя итоги более чем 18-векового пути развития науки (от Аристотеля) следует отметить, что эволюция механико-математических знаний в этот период проходила крайне низкими темпами. Состояние стагнации, переживаемое европейской цивилизацией после ярких успехов древнегреческой и римской культур, было следствием постепенных, но весьма радикальных перемен в системе общественных ценностей.

Длительные экономические трудности, затянувшееся становление европейской государственности, бесконечные разрушительные войны, жесткий культ церкви привели к разрушению высокого авторитета культурных, образовательных и научных ценностей. Перемены в общественном сознании, как результат расширения сети учебных заведений (школ, училищ, университетов), возникновения новых естественнонаучных и технических задач, начинают проявляться только с XIV в.

1.4. Механика эпохи Возрождения

Конец средневековья характеризуется зарождением новых общественных отношений. В растущих городах власть постепенно переходит от господ по праву рождения к господам по праву богатства — торговцам, старшинам ремесленных цехов. В связи с ростом строительства городов, церквей, монастырей, оборонных и гидротехнических сооружений, мельниц[1] разного профиля (для помола зерна, распиловки досок, изготовления пеньки, бумагоделательные[2], железоделательные, сукновальни и другие), изобретением огнестрельного оружия (XIV в.), механических часов с гирями, появляется профессия инженера. Поначалу она не была цеховой и означала лишь совокупность знаний, которыми должен владеть архитектор, скульптор или художник помимо основных профессиональных умений. Очевидно, что инженер для строитель-

[1]Первые мельницы (водяные) строились на горных реках Закавказья (1 в.), в странах арабского халифата, где это искусство достигло расцвета (в VIII в. на территории Персии, Ирака, Афганистана появились ветряные мельницы).

[2]Бумага была изобретена раньше на Востоке. В Самарканде в IX в. ее умели делать из тряпья.

ства укреплений, машин, архитектурных объектов не мог обойтись без знания механики. Напомним, что время, о котором идет речь, именуется еще эпохой великих географических открытий, бурного развития торговых и завоевательских походов, что требовало развития транспорта (судоходного и сухопутного), астрономических наблюдений (для навигационных целей), военной техники. В Европе начинается подъем интеллектуальной деятельности. Особую роль в возрождении западной культуры в силу своего географического положения (плацдарм торговых походов на Восток, «ворота» для притока византийских ученых и их трудов), наличия сложившихся научных традиций и университетов стала играть Италия. В XV–XVI вв. Европа переживает эпоху Возрождения.

Возрождение греко-римских культурных традиций, начавшееся в Италии, проявлялось в стремлении городской буржуазии возродить и даже превзойти легендарное великолепие и красоту Античности. Крупные богачи, захватившие власть в городах-государствах, подобно Медичи во Флоренции, соревновались друг с другом в поощрении архитектуры, живописи, скульптуры, музыки и изящной литературы. В других странах Западной Европы разложение феодального общества и потеря могущества феодалами были использованы отдельными монархами преимущественно для укрепления своей централизованной власти. Этот процесс также сопровождался сооружением роскошных дворцов и поощрением архитектуры, искусств и литературы.

Развитию гуманитарного направления в культуре Западной Европы XV–XVI вв. косвенно способствовало одно важное политическое событие — завоевание в 1453 г. Константинополя турками, приведшее к массовому бегству на Запад последних представителей византийский образованности. В эту эпоху начала бурно развиваться светская литература. Широко переиздавались в подлинниках и в переводе вновь открытые произведения античных писателей, поэтов, историков, философов и естествоиспытателей. Передовые слои общества получили возможность подняться до уровня образованности античной цивилизации. Но этот этап Возрождения только намечал задачи развития естествознания, теоретическое мышление еще соответствовало уровню эллинистической эпохи.

Университетская наука переключилась главным образом на изучение литературных памятников античной культуры, присоединив к авторитету деятелей церкви авторитет античных писателей и философов. Это привело к еще большему отрыву официальной христианско-схоластической науки от естествознания и математики. Но, несмотря на смещение акцентов, интерес к техническим изобретениям возрастает. Наряду с переизданием и переводом древних трудов Витрувия и Герона появляются новые подробные руководства по фортификации, строительству гидротехнических сооружений и другим отраслям техники, сводные описания механизмов, называвшиеся «Театрами машин» [195]. Процессу распространения знаний способствовало изобретение Иоганном Гутенбергом в Страсбурге печатного пресса, первой продукцией которого стала 42-страничная Библия (1455).

Наиболее крупный вклад в механику эпохи Возрождения внесли немецкий кардинал Николай Кузанский, итальянский художник, скульптор, литератор и ученый Леонардо да Винчи, польский каноник, астроном, врач и юрист Николай Коперник, французский философ Юлий Цезарь Скалигер, испанский ученый Доминико Сото[1], итальянские ученые Николо Тарталья, Джироламо Кардано, Джамбаттиста Бенедетти, Гвидо Убальдо дель Монте.

Сторонник экспериментальных методов в естественных науках Н. Кузанский свой труд «О статических экспериментах» написал в форме диалога между «Оратором» и «Простаком», то есть человеком несведущим. В нем излагается целая программа экспериментальных количественных исследований с помощью весов и предлагается объяснение ряда явлений. Например, рассматривается задача измерения продолжительности падения тел одинакового веса. В сочинении «Об игре в мяч» он развивает теорию Филопона о передаче и сохранении импетуса: импетус («напор»), передаваемый телом в начале движения, может в нем сохраняться или исчезать, передаваясь другим телам.

Леонардо да Винчи развивал некоторые идеи Н. Кузанского. В «Замечаниях об игре в шары», рассматривая падение тела под углом к горизонту, он вводит понятие «составного» и «разлагаемого импетуса», говорит о возможности перехода от «насильственного» движения, то есть бросания, к «естественному», то есть вертикальному па-

[1]Учился в Парижском университете, член ордена доминиканцев. В своих работах пытался объединить «Физику» Аристотеля с учением об импетусе. Развивал идеи Орема и «калькуляторов». Утверждал, что тип «униформно-диффформного» движения «присущ телам, движущимся естественным движением, а также брошенным телам» [40, с. 81]. Таким образом, он более чем на полстолетия предвосхитил вывод Галилея о постоянстве ускорения падающих тел.

дению. Как инженер, автор многочисленных изобретений (приспособления для преобразования и передачи движения, ременные передачи, конические, спиральные, ступенчатые сцепления, роликовые опоры для уменьшения трения, молотобойная машина для формовки слитков золота и другие станки и приспособления, прообраз современных подшипников, ткацкие машины, боевые машины, музыкальные инструменты, очки, параболическое зеркало, первая модель крылатого летательного аппарата (1490), парашюта, вертолета), Леонардо да Винчи много времени уделял не просто экспериментированию, но и тем выводам, которые можно получить математическими методами. Идеи номиналистов, «количественные наблюдения» Н. Кузанского в творчестве Леонардо да Винчи приобретают черты устойчивой тенденции к математизации естественнонаучных и технических знаний. Это подтверждают его работы о центрах тяжести (тетраэдра, произвольной пирамиды), о равновесии механизмов (момент силы относительно точки, сложение и разложение сил, условия равновесия на наклонной плоскости), áрок, о свойствах трения, о явлении удара тел. В «Кодексе о полете птиц» он писал: «...никакое человеческое исследование не может претендовать на то, чтобы быть истинной наукой, если оно не использует математических доказательств и нет никакой уверенности там, где нельзя применить одну из математических наук» [54, с. 52].

Среди многочисленных заметок, рассеянных по его рукописям, можно встретить многие динамические идеи, значительно обогнавшие его время. «Всякое движение стремится к своему сохранению, или же каждое движущееся тело движется постоянно, пока в нем сохраняется действие его двигателя», «...движение весла против неподвижной воды аналогично движению воды против неподвижного весла», «такая же сила создается предметом против воздуха, что и воздухом против предмета», «силой я называю духовную способность, невидимую потенцию, которая через случайное внешнее насилие вызывается движением, помещается и вливается в тела, извлекаемые и отклоняемые от своего естественного бытия, причем она дает им активную жизнь удивительной мощности; она принуждает все созданные вещи к изменению формы и положения... Ни одна вещь не движется без нее. Тело, в котором она возникает, не увеличивается ни в весе, ни в форме» [54, с. 50–51].

Открытый Леонардо да Винчи экспериментально *закон сухого трения* («Каждым тяжелым телом побеждается сопротивление трения по весу, равное четвертой части этого веса» [34, с. 121]) оказался достаточно точным[1]. В конце XVII в. он был переоткрыт Амонтоном, а в XVIII в. уточнен Кулоном.

Идеи Леонардо да Винчи получили свое дальнейшее развитие в первую очередь в трудах его соотечественников — Н. Тартальи[2], Д. Кардано, Д. Бенедетти и Г. У. дель Монте.

Основные результаты творчества Тартальи изложены в двух его трактатах «Новая наука» и «Вопросы и различные изобретения». Структура первого из трактатов[3] аналогична «Началам» Евклида: определения, общие рассуждения, теоремы. Автор сразу уточняет, что в книге изучается не движение вообще, а только движение тяжелых тел, которые «одинаково тяжелы», то есть, говоря современным языком, имеющих постоянный вес. Единственным «естественным» движением Тарталья считает вертикальное падение тела, остальные движения — «насильственные», «вызванные некоторой движущей силой». Результат удара называется «эффектом» и определяется скоростью. «Естественное» движение совершается с постоянно изменяющейся скоростью, начальное значение которой является наименьшим, а конечное — наибольшим, — считает Тарталья. Как и Орем, он утверждает, что тело, брошенное в шахту, проходящую сквозь всю Землю через ее центр, в конечном итоге, после затухающих колебаний вокруг центра, остановится.

Если для «естественного» движения скорость возрастает с увеличением пути, то для «насильственного» все наоборот. На примере криволинейного движения снаряда Тарталья утверждает, что при «насильственном» движении скорость постоянно убывает, стремясь к некоторому минимуму, а пройденный путь тем больше, чем больше начальная скорость. В силу указанных различий между «естественным» и «насильственным» движениями они не могут происходить одновременно, но могут следовать одно за другим (движение брошенного тела начинается как «насильственное» и далее продолжается как «естественное»). Траектория «естественного» движения — всегда вертикальная прямая, траектория «насильственного» движения может быть любой

[1]По современным данным коэффициент трения имеет следующие значения: сталь по стали — 0.17, железо по железу — 0.3, железо по латуни — 0.2, дуб по дубу — 0.4. Среднее значение близко к 0.25.

[2]Настоящее имя — Никколо Фонтана. Прозвище Тарталья (то есть заика) связано с соответствующим дефектом речи, приобретенным им в детстве.

[3]Издан в 1537 г., переиздан в 1550, 1558, 1583 гг., переведен на английский, французский и немецкий языки.

(криволинейной, прямолинейной). Далее подробно рассматриваются, по-видимому, почерпнутые из артиллерийской практики тех времен, различные варианты траекторий движения снаряда в зависимости от угла наклона ствола орудия и величины начальной скорости, и делается вывод о максимальной дальности полета снаряда при угле 45°.

Второй из названных трактатов, вышедший в 1546 г., написан в форме диалога между автором и его собеседниками и является продолжением и развитием предыдущего. Он состоит из девяти частей, посвященных вопросам баллистики, пороху, военному искусству, применению компаса в топографии, фортификации, механике Аристотеля, теории простых механизмов и вопросам математики. Именно здесь автор утверждает, что траектория снаряда в общем случае является криволинейной: «...насильственное движение тела постоянного веса, брошенного не перпендикулярно к горизонту, никогда не имеет ни одной части, которая была бы совершенно прямой» [54, с. 54]. Многие рассмотренные здесь задачи статики ранее встречались в рукописи Иордана Неморария, которую Тарталья сам готовил к изданию, но которая была опубликована после его смерти Курцием Трояном в 1565 г. под названием «Труды Иордана о тяжестях, изученные и исправленные Николо Тартальей». В 1543, в год смерти Н. Коперника и выхода в свет его знаменитого труда «Об обращении небесных сфер», Тарталья переиздал в латинском переводе трактат Архимеда «О плавающих телах».

Одним из основных учебников XVI–XVII вв. по статике и гидростатике считалась книга современника и великого соперника Тартальи — Д. Кардано — «О тонкости» (1550). Доктор медицины и практикующий врач — Кардано был профессором математики и медицины Миланского (с 1534), Павийского (с 1539) и Болонского (с 1560) университетов. Кроме названного трактата он издал в 1545 г. основательный труд по алгебре («Великое искусство»), где привел решение уравнений третьей и четвертой степеней[1], указал на зависимость между корнями и коэффициентами уравнения, а также на делимость многочлена, имеющего корень a, на $x - a$. В 1554 г. вышла его книга «О разнообразии вещей», а в 1570 — «Новый труд». Сочинения Кардано, как и работы Леонардо да Винчи, были неисчерпаемым источником истинных и воображаемых фактов, естественно-научных, технических и математиче-

[1]Решение уравнений третьей степени ему сообщил Тарталья, четвертой — его ученик Лодовико Феррари.

ских сведений. Основной чертой сочинений Кардано является стремление к количественному исследованию изучаемых явлений. Одним из первых он утверждает невозможность вечного двигателя и приводит аналог принципа возможных перемещений (виртуальных скоростей).

Д. Бенедетти — придворный математик (с 1567 г.) великого герцога Савойского — был ближайшим предшественником Стевина и Галилея, автором нескольких книг[1], обеспечивших ему европейскую популярность и обессмертивших его имя. Одной из главных движущих сил его творчества было неприятие физических воззрений Аристотеля. Это была конструктивная, доказательная критика, основанная не только на результатах экспериментов, но и на «математической философии», то есть на использовании в доказательствах математических понятий, образов и методов.

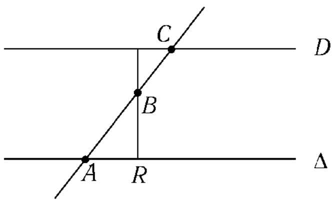


Рис. 1.4

В качестве иллюстрации можно привести доказательство Бенедетти ошибочности утверждения Аристотеля о невозможности бесконечно долгого движения точки по прямой. Проведя две параллельные прямые D и Δ (рис. 1.4), их общий перпендикуляр R и произвольную прямую AC, автор утверждает, что при вращении AC вокруг точки A, вызванного сколь угодно далеким перемещением точки C по D, эта прямая, приближаясь к Δ, тем не менее никогда не достигнет этой прямой. А это означает, что точка B, приближаясь к точке R сколь угодно долго, никогда не достигнет этой точки.

В своей философской динамике Бенедетти пользуется математическими традициями и понятиями (центр тяжести, гидростатическая подъемная сила, импетус), восходящими к Архимеду и средневековым номиналистам. Он считает, что импетус, то есть «двигатель», нельзя искать в окружающей среде (по Аристотелю), оказывающей сопротивление движению. Это внутреннее, «вложенное» свойство тела. Идея Тартальи о невозможности смещения «естественного» и «насильственного» движений также подвергается критике. Он поддерживает представление номиналистов о необходимости для начала движения толчка,

[1] «Доказательство соотношений местных движений против Аристотеля» (1553), «Гномоника» (1574), «Книга различных математических и физических рассуждений» (1585).

начального ускорения, но свой импетус характеризует величиной и направлением, отождествляя его с отрезком прямой. Любое движение осуществляется при помощи направленного и прямолинейного импетуса.

Размышляя о свойствах падающих тел, Бенедетти приходит к заключению, что тела с одинаковым удельным весом падают одинаково: «два тела одинаковой формы и одинакового рода, равные или неравные между собой, в одной и той же среде проходят равные расстояния за равное время» [54, с. 55]. Суть доказательства сводится к двум положениям: 1) скорость падения определяется не весом тела (как считал Аристотель), а архимедовой выталкивающей силой[1]; 2) понятие центра тяжести, заменяющее тело совокупностью его частей, позволяет считать, что все части тела падают так же, как и само тело. Траекторией «естественного» движения, по Бенедетти, является не вертикаль, а кратчайший путь («природа всегда действует по кратчайшим путям») между концентрическими сферами с центром в центре Земли. Ускорение тела при падении вызывается последовательным действием импетуса, непрерывно порождаемых «движущим началом» по мере удаления тела от начального положения. Таким образом, приняв за Оремом понятие ускорения, Бенедетти вводит переменную величину, значение которой отсчитывается от начального положения.

Исследуя равновесие жидкости в сообщающихся сосудах, Бенедетти выводит «гидростатический парадокс», состоящий в равенстве давлений жидкости на дно сосудов независимо от их формы. Через год, в 1586 г., это открытие повторил один из известнейших ученых конца XVI – начала XVII вв. Симон Стевин. Вопросами гидростатики занимался и маркиз Гвидо Убальдо дель Монте — итальянский военный инженер, генерал-инспектор крепостей Тосканы (с 1588), автор «Книги о механике» (1577), научный наставник и покровитель молодого Галилея. В основе его теории равновесия простых машин — архимедово условие равновесия подвешенных тел и принцип равенства моментов сил тяжести тел относительно неподвижной точки. Аналогичным принципом пользовался и Бенедетти в задаче о равновесии Т-образных весов, а позднее — Стевин, Галилей и Роберваль. Лагранж, высоко ценивший вклад Гвидо Убальдо в механику, именно его, а не Кордано, считал предшественником И. Бернулли по принципу виртуальных ско-

[1] Избыток веса тела над весом равного ему объема окружающей среды.

ростей. Этот принцип Гвидо Убальдо применял в задачах о равновесии рычага, блока, ворота, полиспастов.

Говоря о главных достижениях механики XV–XVI вв., можно отметить две важнейшие особенности этого периода: значительное расширение круга прикладных задач и смену теоретической ориентации: от натуральной философии Аристотеля — к «математической философии». Обе эти тенденции получили развитие в работах ученых XVII в.

Глава 2

ИСТОРИКО-НАУЧНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ СОЗДАНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Одним из наиболее значительных научных достижений XVII в. стало издание «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона. Это, безусловно, выдающееся событие в истории мировой науки было подготовлено многовековой практикой наблюдений, научных экспериментов, многочисленными философскими и математическим теориями и методами решения конкретных задач. С появлением на свет трактата, основные научные идеи которого в течение нескольких последующих десятилетий стали господствующими в европейской науке, начинается новый этап в истории мировой науки — этап формирования математической теории как универсального метода решения практических задач. Идеи математического моделирования, укоренившиеся прежде всего в механике и физике, в этот период получили дальнейшее развитие и определили научную картину современного мира.

2.1. Идеи статики С. Стевина

Генеральный квартирмейстер армии главы Голландии и Зеландии принца Мориса Оранского (1567–1625), инженер-инспектор строительства плотин — Симон Стевин — начинал свою карьеру с должности кассира, счетовода[1] у торговца в Антверпене. Но известность ему принесла не бурная административная карьера, а научная работа. Его главный труд «Начала науки о весах» (1586) позднее был переведен с фламандского на латынь (1605), на французский (1634) и оказал значительное влияние на формирование научных интересов Галилея, Роберваля, Б. Паскаля, Вариньона.

[1]Возможно, что большая счетная практика и привела его к идее создания десятичных дробей.

Симон Стевин

sur P, repose aussi sur I, & partant comme G O à G P, ainsi seront les pesanteurs qui reposent sur I & H.

Conclusion. Une colomne donc reposant, &c.

COROLLAIRE.

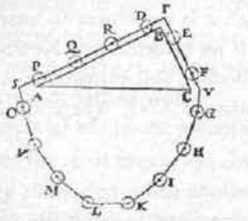
Il est manifeste par ce que devant, que voulant recognoistre la raison de la pesanteur reposant sur I, à celle qui repose sur H, qu'on doit à ceste fin mener les perpendiculaires K L, M N, coupant l'axe ès poincts O, P; & que la raison de G O à G P seroit la requise; ainsi donc, lorsque la pesanteur de la colomne est notoire, qu'aussi seront les pesanteurs de celles qui reposent sur chacun poinct, tel que H, I.

JUSQUES ICY ONT ESTE
declarées les proprietez des pesanteurs
directes; suivent les proprietez & qualitez
des obliques, desquelles le fondement
general est compris au Theo-
reme suivant.

THEOREME XI PROPOSITION XIX.

SI un triangle, a son plan perpendiculaire à l'horizon, & sa base parallele à iceluy; & sur un chacun des deux autres costez, un poids spherique, de pesanteur egale; comme le costé dextre du triangle, au senestre; ainsi la puissance du poids senestre, à celle du poids dextre.

Le donné. Soit A B C un triangle ayant son plan perpendiculaire à l'horizon, & sa base AC parallele à iceluy horizon: & soit sur le costé A B (qui est double à B C) un poids en globe D, & sur B C un autre E, egaux en pesanteur & en grandeur.



Le requis. Il faut demonstrer que comme le costé A B 2 au costé B C 1, ainsi la puissance ou pouvoir du poids E à celle de D.

Preparation. Soit accommodé à l'entour du triangle un entour de 14 globes, egaux en pesanteur, en grandeur, & equidistans, comme D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, enfilez d'une ligne passant par leurs centres, ainsi qu'ils puissent tourner sur leurs susdits centres, & qu'il y puisse avoir 2 globes sur le costé B C, & 4 sur B A, alors comme ligne à ligne, ainsi le nombre des globes au nombre des globes: qu'aussi en S, T, V, soyent trois poincts fermes, dessus lesquels la ligne, ou le filet puisse couler, & que les deux parties au dessus du triangle soyent paralleles aux costez d'iceluy A B, B C; tellement que le tout puisse tourner librement & sans accrochement, sur lesdits costez A B, B C.

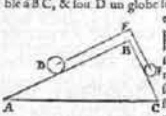
DEMONSTRATION.

Si le pouvoir des poids D, R, Q, P, n'estoit egal au pouvoir des deux globes E, F, l'un costé sera plus pesant que l'autre, donc (s'il est possible) que les 4 D, R, Q, P, soyent plus pesant que les deux E, F; mais les 4 O, N, M, L, sont egaux aux 4 G, H, I, K; parquoy le costé des 8 globes D, R, Q, P, O, N, M, L, sera plus pesant selon leur disposition, que non par les 6, E, F, G, H, I, K, & puis que la partie plus pesante emporte la plus legere, les 8 globes descendront, & les autres 6 monteront: Qu'il soit ainsi donc, & que D vienne, où O est presentement, & ainsi des autres; voire que E, F, G, H, viennent, où sont maintenant P, Q, R, D, aussi I, K, où sont maintenant E, F: Ce neantmoins l'entour des globes aura la mesme disposition qu'auparavant, & par mesme raison les 8 globes auront le dessus en pesanteur, & en tombant feront revenir 8 autres en leurs places, & ainsi ce mouvement n'auroit aucune fin, ce qui est absurde. Et de mesme sera la demonstration de l'autre costé: La partie donc de l'entour D, R, Q, P, O, N, M, L, sera en equilibre avec la partie E, F, G, H, I, K; que si on oste des deux costez, les pesanteurs egales, & qui ont mesme disposition, comme sont les 4 globes O, N, M, L, d'une part, & les 4, G, H, I, K, d'autre part; les 4 restans D, R, Q, P, seront & demeureront en equilibre avec les 2 E, F, parquoy E aura un pouvoir double au pouvoir de D; comme donc le costé B A 2, au costé B C 1, ainsi le pouvoir de E, au pouvoir de D.

Conclusion. Si un triangle donc a son plan, &c.

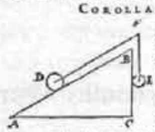
COROLLAIRE I.

Soit A B C un triangle comme devant, & A B double à B C, & soit D un globe sur A B, double à E, qui est sur B C; en F soit un poinct ferme, par dessus lequel la ligne DFE puisse couler sans empeschement, ainsi que D F, F E soyent paralleles aux costez du triangle A B C, procedantes des centres des globes; il appert que D, E seront encor en equilibre, puisque cy-dessus P, Q, R, D, l'estoyent à E, F; parquoy comme AB à B C, ainsi le globe D au globe E.



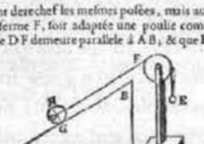
COROLLAIRE II.

Soit maintenant l'un des costez du triangle, comme BC (qui est moitié de l'autre A B) perpendiculaire à AC, comme cy joignant; le globe D, qui est double à E, sera encor en equilibre avec E, car comme le costé AB à BC, ainsi le globe D au globe E.



COROLLAIRE III.

Soient derechef les mesmes posées, mais au lieu du poinct ferme F, soit adaptée une poulie comme icy, ainsi que D F demeure parallele à A B, & que E soit un poids de quelle figure que ce puisse estre, egal en pesanteur à celuy de devant; iceluy avec D, seront encor en equilibre, parquoy comme A B à B C, ainsi D à E.



COROL-

Фрагмент французского издания книги С. Стевина

В основу своей статики Стевин положил постулаты Архимеда, закон рычага и пополнил их «принципом невозможности вечного движения», «принципом отвердевания», законом сложения перпендикулярных сходящихся сил, принципом возможных перемещений[1]. Новые идеи позволили сформулировать условия равновесия[2] тела на наклонной плоскости, теорию веревочных машин[3], широко использовавшихся в технике кораблестроения, погрузочно-разгрузочных работ, управления парусами. Свой принцип возможных перемещений Стевин формулирует следующим образом: «Как путь движущего относится к пути движимого, так и сила движимого относится к силе движущего» [63, с. 65]. Гидростатические законы Стевина давления воды на дно и стенки сосудов, равновесия воды в сообщающихся сосудах существенно развили гидростатику Архимеда и использовались в практике строительства плотин, а введенные им обозначения сил направленными отрезками (прообраз будущего вектора) и понятие силового треугольника (геометрическое условие равновесия трех сходящихся сил) вошли в современную механику.

2.2. Кинематические законы И. Кеплера

Важнейшим достижением механики XVII в. было открытие И. Кеплером законов движения планет (на основании журналов многолетних наблюдений Т. Браге движения Марса и других планет). Впервые в истории мировой науки было дано не только качественное, но и количественное, с использованием мер времени и пути, описание законов движения планеты — математические (функциональные) выражения, позволяющие не предсказывать, а предвычислять ее положение. В «Новой астрономии» (1609) Кеплер рассматривает гипотезу Коперника об устройстве Солнечной системы наряду с гипотезами Птолемея и Браге. Исходя из концепции Коперника, геометрических соображений и физических идей У. Гильберта о магнетизме тел, он формулирует два закона, в первом из которых утверждается, что площадь, описываемая отрезком планета-Солнце, является мерой времени движения

---

[1] Современное название.

[2] Термин «равновесие» впервые введен Стевином. У греческих ученых это именовалось «равномоментностью». Аналогичное условие равновесия было получено И. Неморарием.

[3] Теорию веревочных машин Стевин называл «трохлеостатикой».

планеты. Этот закон, именуемый сейчас *законом площадей*, говорит о постоянстве секторной скорости планеты и является одним из интегралов дифференциальных уравнений движения точки.

Во втором законе говорится о том, что планета описывает эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Третий закон, опубликованный Кеплером в «Гармонии мира» (1619), устанавливает связь между периодами движения планет и их средними расстояниями до Солнца: кубы средних расстояний планет от Солнца пропорциональны квадратам их периодов обращения. В механике эти законы казались необъяснимыми ни с точки зрения причин движения планет, ни с позиций их математического обоснования. Поэтому их открытие послужило дополнительным основанием для особого внимания философов, геометров XVII в. к проблемам мироздания, законам движения тел и стало возможным только благодаря усердию и вере Кеплера в существование соотношений, отражающих порядок и гармонию природы.

В более поздних трактатах Кеплер выражает убежденность в справедливости позиции Коперника, высказывает идею существования мирового эфира, транспортирующего некоторые свойства тел, говорит о существовании у тел свойства инерции, препятствующего их движению под действием «импетуса», сравнивает Землю с большим магнитом. Причина суточного вращения Земли, по Кеплеру, достаточно проста: природа всегда выбирает наиболее простые пути[1] и ей проще вращать Землю, чем весь небосвод. Все тела природы движутся, и скорость Вселенной во много раз больше скорости Земли. Суточное движение планет не постоянно в течение года. Материя всегда стремится к покою, и ее движение свидетельствует о наличии у нее врожденных «двигательных способностей». В «Новой астрономии» автор утверждает, что родственные тела (планеты, Солнце) взаимно притягиваются. Это притяжение объединяет и связывает тела. Если из пушки выстрелить на восток и на запад, то из-за вращения Земли дальности полета снарядов будут разными. Таковы некоторые воззрения Кеплера, отражающие научную картину мира в Европе начала XVII в. и получившие развитие в трудах Декарта, Фер-

[1] Идея простоты, рациональности, оптимальности устройства природы высказывалась и до Кеплера. В механике эта идея позднее укоренилась в виде принципов минимальности или стационарности некоторой характеристики (время, путь, «действие», энергия, кривизна траектории) для истинного движения тела из множества возможных.

ма, Роберваля, Уоллиса, Гюйгенса, Ньютона, Лейбница и их научных преемников.

2.3. Механика Г. Галилея

Научные заслуги Г. Галилея больше связаны с проблемами «земной» механики, с развитием идей Архимеда, Буридана, Орема, Тартальи, Бенедетти, Дель Монте, Стевина. Хотя широкую популярность в научных кругах XVII в. он приобрел как изобретатель телескопа и первооткрыватель лунных гор, звездного строения Млечного Пути, четырех спутников Юпитера, фаз Венеры, пятен на Солнце и других небесных чудес. За истекшие с той поры столетия имя Галилея стало еще более популярным в связи с современной оценкой его вклада в формирование нового научного мировоззрения, в фундамент многих разделов современной теоретической физики и механики. Творчеству Галилея, вкладу в механику, влиянию его результатов на формирование научных интересов ученых следующих поколений посвящены детальные исследования его научных последователей — Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, братьев Бернулли, Вариньона, Мопертюи, Эйлера, Даламбера, Лагранжа и историков науки — Койре [211], Цейтлина [88], Кузнецова [50], Григорьяна [22, 23], Дюга [187], Дрейка [185], Кирсанова [44] и других. С позиции предлагаемой периодизации истории механики Галилея можно считать типичным представителем механики начального периода. Но исторически сложилось так, что разделы механики, привлекшие его внимание, оказались основными в дальнейшем строительстве теоретической механики. Таким образом, он является одним из основоположников механики переходного периода.

Для ясной оценки вклада Галилея в механику кратко остановимся на позициях (понятия, взгляды) его ближайших предшественников. В статике — это понятие тела, механизма (рычаги, наклонные плоскости, блоки, винты), условий равновесия (центр тяжести подвешенного тела находится на вертикали, проведенной через точку подвеса; равенство моментов сил, равенство работ[1] сил; силовой треугольник), правила сложения и разложения сил, принципы отвердевания и «невозможности вечного движения» («невозможности самостоятельного наруше-

[1]Понятия *момента* и*работы силы* существовали еще раньше, но они не имели общепринятого названия и разными авторами назывались по-разному.

Галилео Галилей

ния равновесия»), гидростатический закон Архимеда и правила определения давления воды на дно и стенки сосуда, закон сообщающихся сосудов. В динамике — это критическое комментирование физических концепций Аристотеля (с одной стороны, привычных и казавшихся незыблемыми, а с другой — устаревших и сомнительных, с точки зрения накопившихся за истекшие двадцать веков наблюдений и экспериментальных результатов); это идея «импетуса» во всех ее вариантах, это понятие равномерного и равноускоренного движения, это задача о движении тяжелого тела. И всегда речь шла не о построении общей теории равновесия или движения тел, а о решении конкретных, иногда практически важных, иногда надуманных задач механики.

Статическая концепция Галилея была вполне традиционной: понятие *тяжести, момента силы*, принцип виртуальных скоростей, принцип равенства моментов. Но для него покой — это состояние, предшествующее началу движения, которое определяется «отменой» статической силы, освобождением импетуса тяжелого тела. *Ускорение* начавшегося *движения пропорционально* «отменяемой» статической *силе*, которую Галилей определяет по величине скорости в конечный момент времени. «В такой, весьма смутной, форме подходит Галилей к фундаментальному закону механики», — говорит Р. Дюга [187, с. 73]. Им получены условия равновесия тела на наклонной плоскости, высказано утверждение о равенстве действия и противодействия.

Принято считать, что в начальный период творчества[1] Галилей находился под влиянием идей своего старшего современника Джамбаттисты Бенедетти — ученика Тартальи. Напомним, что Бенедетти развивал свои представления о движении в духе теоретиков Парижской школы: отстаивал представления об импетусе как о «вложенной силе», помещенной в движущееся тело, имеющей и величину, и направление, отвергал возможность вечного движения, считал скорость падения тела зависящей от соотношения между его весом и плотностью среды (точнее, от того, на сколько вес тела превышает вес равного ему объема окружающей среды, — идея, навеянная сочинениями Архимеда по гидростатике).

Итоги динамических воззрений Галилея, изложенных им в «Диалоге» (1632) и «Беседах» (1638), убедительно подведены исследователями его творчества и сводятся к следующему. В природе существует

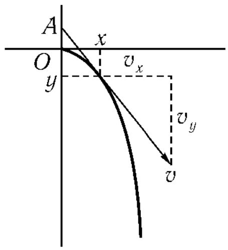
[1] «О движении» — так назывался ранний трактат Галилея, написанный в Пизе около 1590 года.

фундаментальное единство материи и движения, «земные» движения аналогичны космическим, и законы их едины. Приобретенное круговое движение «будет продолжаться непрерывно и с равномерной скоростью» [18, Т. 1, с. 125–126]. Среда не может быть причиной движения брошенного тела, она может только препятствовать движению. Тела на вращающейся Земле удерживаются тяготением. Принцип независимости движений (при падении камня, его движение складывается из вертикального свободного падения и кругового движения вместе с Землей). Принцип относительности движения: физические законы инвариантны относительно систем отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно. «Ускорение[1] движения свободно падающего тела растет постоянно с мгновения на мгновение» и изменение пройденных путей «...совершается соответственно ряду нечетных чисел[2], начиная с единицы..., иначе говоря, ...пройденные пространства относятся друг к другу как квадраты времен»[3] [18, Т. 1, с. 322]. Скорость падения не зависит от веса тела и пропорциональна времени. Время (период) колебаний маятника не зависит от амплитуды (изохронность) и пропор-

[1] В смысле изменения скорости.

[2] Еще Н. Орем установил, что при равноускоренном движении (речь не шла о свободном падении тел) проходимые в равные времена отрезки составляют прогрессию: 1, 3, 5, 7, ... Отсюда можно заключить, что пути пропорциональны квадратам времен: $s_1 = 1 = 1^2$; $s_2 = 1 + 3 = 2^2$; $s_3 = 1 + 3 + 5 = 3^2$; $s_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2; \ldots$; $s_t = t^2$.

[3] Рассматривая падение тела из точки O, Галилей считал, что его траекторией будет парабола, скорость направлена по касательной к параболе и складывается



из горизонтальной $v_x = \text{const}$ и вертикальной v_y ($\sim t$) составляющих. Из подобия получающихся треугольников,

$$y + OA = \frac{x \cdot v_y}{v_x} = \frac{v_x t \cdot v_y}{v_x} \sim t^2.$$

В «Беседах» [19] приводится доказательство «мертонского правила», близкое к доказательству Орема [55, с. 138].

ционально корню квадратному из его длины. Снаряд движется по параболической траектории. Сила удара складывается из скорости и веса тела, и эффект ее действия многократно превосходит давление «мертвого груза».

Динамические концепции Галилея значительно отличались от традиционных и поэтому привлекли внимание научных кругов. А их широкому распространению способствовал судебный процесс 1633 г., привлекший внимание к имени Галилея, переводы его трудов на французский язык и их популяризация Мерсенном и Гассенди, издание «Бесед» в Голландии. Следующим революционным шагом в формировании не только новой механики, но и нового мировоззрения стало творчество французского философа, математика, механика, физиолога — Рене Декарта.

2.4. Механические концепции натуральной философии Р. Декарта

Декарт не был чьим-либо сторонником, скорее он был оппонентом своих предшественников и современников. Оригинальность его мысли, ее математическая стройность и ясность, философская общность и глубина оказали значительное влияние на форму и содержание научных концепций не только XVII, но и последующих веков. Значительную роль в этом сыграла высокая престижность занятий наукой во всех европейских странах, но особенно ярко это проявилось во Франции, где «этот процесс приобрел национальный характер, и ему не в силах были противостоять даже те, кому принадлежала власть в стране» [44, с. 212]. Инициаторами и участниками многочисленных научных сообществ[1], как правило, были просвещенные священники, государственные чиновники, профессора колледжей и университетов, ученые-любители.

Существенное влияние на формирование научных интересов Декарта оказали Мерсенн и Бекман[2]. Декарт писал, что физические идеи

---

[1]Кружки в Лиможе, Каоре, Дижоне, Провансе (кружок Пейреска — одного из наиболее известных просветителей Европы, в доме которого нашел убежище Кампанелла), Париже (кружки де Ту и братьев дю Пюи, монаха Мерсенна и герцога де Монмора).

[2]Исаак Бекман (Beeckman) — голландский математик и механик, независимо от Галилея открывший законы скоростей падающих тел и проходимых ими расстояний, предвосхитивший некоторые принципы философии Декарта.

«позволяют достичь знаний, очень полезных в жизни, и вместо умозрительной философии, преподаваемой в школах, можно создать практическую, при помощи которой, зная силу и действие огня, воды, воздуха, звезд, небес и всех прочих окружающих нас тел, так же отчетливо, как мы знаем различные ремесла наших мастеров, мы могли бы, наравне с последними, использовать и эти силы во всех свойственных им применениях и стать, таким образом, как бы господами и владетелями природы» [32, с. 54].

Для всего творчества Декарта характерно стремление проникнуть в суть вещей, узнать некий фундаментальный принцип[1], из которого бы все остальное получалось как необходимое следствие. И его методологический принцип — сомневаться в уже известном и искать самоочевидные фундаментальные истины — оказался эффективным средством для достижения целей, одна из которых — построение новой механики, основанной на понятии количества движения. Картезианская философская система быстро завоевала популярность в научных кругах, но век ее оказался коротким. Провозглашая новую концепцию «практической» философии, сам Декарт во многом оставался поборником «умозрительной» науки. Это подтверждается как содержанием его научного творчества, посвященного формулировке принципов устройства мира, движения и взаимодействия тел, так и его оценкой творчества Галилея, о котором он говорил, что тот, «не касаясь первопричин в природе, искал причины лишь некоторых ограниченных явлений и, таким образом, строил здание без фундамента» [184, с. 391]. Однако ньютонианская философия естествознания, развивающая взгляды Галилея, получила более широкое распространение как наиболее стройная, обоснованная и эффективная в практических приложениях. Потому что механика Ньютона строилась уже с учетом достоинств и недостатков картезианских механистических воззрений.

Динамические воззрения излагаются Декартом в трех его главных сочинениях — «Мир», «Рассуждения о методе», «Начала философии» — и состоят в следующем: Вселенная заполнена непроницаемой материей (пустоты нет); материя и пространство тождественны; Бог неизменен, поэтому количество движения материи постоянно. По Декарту, в мире существуют законы сохранения, относящиеся к миру в целом, взаимодействия же составных частей мира должны подчиняться

[1]Подобное было характерно и для Кеплера, которому не удалось реализовать эту идею в той мере, как это сделал Декарт.

законам (правилам) природы, которые нельзя приписывать непосредственно действию Бога. Эти правила таковы.

«Первое правило состоит в том, что каждая часть материи по отдельности всегда продолжает оставаться в одном и том же состоянии до тех пор, пока встреча с другими частями не вызовет изменений этого состояния» [31, с. 167]. Таким образом, автор формулирует закон инерции и использует понятие «состояние», обобщающее прежние понятия «покой» и «движение». В «Началах философии» Декарт дополняет этот закон вторым: «Всякое движущееся тело стремится продолжать свое движение по прямой»[1] [31, с. 487]. Оба правила-закона являются следствием неизменности количества движения материи, под которым Декарт понимал произведение количества материи на скорость. Кроме этого, он считал, что не существует абсолютной системы отсчета, а следовательно, и абсолютного движения или покоя, эти понятия относительны.

У Декарта нет современного понятия *массы тела*, скорость определяется только величиной, поэтому его понятие *количества движения* отлично от современного, а теория удара оказалась ошибочной, как и объяснение причин притяжения тел. Но несомненно, что открытие двух фундаментальных законов (инерции и сохранения количества движения) оказало важнейшее влияние на все последующее развитие механики.

Статическая концепция Декарта ясно свидетельствует о преемственности идей Стевина, в частности, его принципа возможных перемещений (скоростей, работ). В работе «Объяснение приспособлений, с помощью которых можно малой силой поднимать большие тяжести», приложенной к письму К. Гюйгенсу (5.10.1637), Декарт пишет: «Объяснение всех этих приспособлений основано на одном принципе, состоящем в том, что одной и той же силой можно поднять, например, груз в 100 фунтов на высоту 2 фута или груз в 200 фунтов на высоту в 1 фут...» [187, с. 135]. Из дальнейших рассуждений автора видно, что под силой он понимает, в зависимости от задачи, либо момент, либо работу[2] силы в их нынешнем понимании.

Любопытно отметить, что формирование научных интересов, идеологии механических воззрений как Галилея, так и Декарта про-

[1] Галилей считал, что инерционное движение может быть круговым.

[2] Термин «работа» впервые использовался в механике последователем Стевина Саламоном де Ко. Бекман называл это словом «cracht», являющимся фламандским эквивалентом немецкого слова «krafft», т. е. *сила*.

исходило под влиянием творчества Стевина. Но результаты этого влияния оказались существенно различными. Влияние на Декарта творчества Стевина было опосредованным, через взгляды и интересы Бекмана — талантливого и разностороннего ученого, с которым Декарт познакомился в Голландии (г. Бреда) в возрасте 22 лет во время учебы (1618–1619) в военной школе для иностранцев. Бекман не публиковал научных сочинений, и только его переписка с Декартом, Мерсенном и обнаруженный в 1905 Корнелием де Ваардом «Журнал»[1] позволяют судить о его естественно-научных взглядах: идеи отсутствия пустоты, всемирного эфира, сохранения движения материи, коперниканский взгляд на устройство Солнечной системы с кеплеровским объяснением движения планет, теория падения тел в воздухе, корпускулярная теория света, теория абсолютно неупругого удара тел[2], парадоксы гидростатики и их объяснение механикой Стевина. Во время непродолжительной дружбы с Декартом, 30-летний Бекман делился с ним своими взглядами, они оба мечтали «о совместном, по воле Бога, проникновении в самый центр научного пространства» [187, с. 122]. Но этим мечтам не суждено было сбыться. Позднее все свои научные открытия Декарт считал только личной заслугой. В 1637 г. в возрасте 48 лет Бекман умер от туберкулеза легких. В том же году Декарт издал свой главный математический труд «Геометрия»[3]. Его научные заслуги получили всеобщее признание.

Знакомство с эпистолярным наследием Декарта убеждает, что принцип сомнений он применял не только в научной работе, но и в оценке творчества своих оппонентов, тщательно защищая личные взгляды и авторитет. Это ярко подтверждается его заочной[4] полемикой с Галилеем, Робервалем, Боном по поводу большинства актуальных в тот период вопросов механики: принципы равновесия тел, свойства инерции, притяжения и удара тел.

В «Трактате о механике...» (1636), посвященном статике и развивающем идеи Стевина, Архимеда, Гвидо Убальдо, Люка Вале-

[1]«Журнал» [128] — своеобразный дневник, раскрывающий основные черты философии Бекмана. Рукопись обнаружена в библиотеке Миддельбурга, где родился Бекман.

[2]Абсолютно правильная в отличие от декартовой теории удара упругих тел.

[3]Полное название трактата — «Рассуждения о методе» [32].

[4]Через переписку с Мерсенном, Кавендишем, К. Гюйгенсом, Мореном.

ра, Роберваль обращает внимание на направленность действия силы. В частности, указывает, что «линия действия свободного тяжелого тела проходит через центр его тяжести и ... центр Земли» [187, с. 156]. Ассоциация взаимодействия тел с направленными отрезками позволяет ему заменять сложную систему взаимодействий тел более простой. Для этого он пользуется *аксиомой о переносе силы вдоль линии ее действия* («В какую бы точку линии действия ни была приложена сила, она тянет и толкает одинаково» [187, с. 156]) и *законом сложения сил* («правило параллелограмма»), вошедшими в современную статику. Закон сложения сил Роберваль совмещает с принципом виртуальных работ. Декарт возражает Робервалю: «...он говорит о времени или о скорости там, где я говорю о пространстве, что является очень большой ошибкой, которую я объяснял ранее»[1] [187, с. 157].

В своей полемике Декарт *а*) признает относительность покоя и движения и существование у тел инерционных свойств (более того, в письме Морену он указывает и меру инертности: «...можно сказать по этому поводу, что чем больше материи вмещает тело, тем больше у него натуральной инерции» [187, с. 158]); *б*) пытается понять физическую сущность удара тел и различает ударные силы и силы давления; *в*) отвергает идею о наличии у всех тел свойства взаимного притяжения, взаимодействия, высказанную Робервалем в работе 1644 г. и в письме Ферма (1636) как развитие философии Аристарха Самосского; *г*) вводит понятие *центра качаний* (d'agitation) для тел, совершающих чисто вращательное движение вокруг неподвижной оси.

Отвечая на возражения Декарта, Роберваль подвергает критике метод определения этой точки, предложенный Декартом, и предлагает свой метод определения аналогичной точки, названной им *центром удара* (percussion). К сожалению, взаимные упреки не способствовали решению проблемы и оставили ее открытой. И только решение Гюйгенсом, а позднее Я. и И. Бернулли, Лопиталем, Германном задачи о центре колебаний стало импульсом для создания теории механических колебаний и привело к пополнению арсенала механики новыми понятиями[2] (в том числе, осевого момента инерции тела) и принципом построения динамических уравнений движения, ставшим прообразом принципа Даламбера.

---

[1] Цитата Декарта, в которой он ссылается на свою работу «Ecrit de Statique».

[2] Более подробно в п. 2.8.

2.5. Математические методы

Философские и физические воззрения, технические проблемы и формирующиеся математические теории определяют форму и содержание механики на всех этапах ее становления. Это утверждение, вполне очевидное в XX в., показалось бы странным в долагранжевский период истории науки. И странность заключалась бы в искусственности выделения задач и методов механики из общего ансамбля математических проблем и теорий. В Парижской академии наук и тех, кого мы называем основоположниками теоретической механики, и творцов новых разделов современной математики именовали одинаково — геометры[1]. И все они занимались созданием и приложениями новых математических идей и теорий. Поэтому обособление истории теоретической механики от истории математики представляется искусственным и не очень оправданным. Теоретическая, а может, точнее — математическая, механика формировалась параллельно с новыми разделами математики.

Фактически до начала XVIII в. основным математическим инструментом механики была геометрия, достаточно развитая еще в древнегреческий период. И работы по статике, и кинематические исследования движения земных и небесных тел, и первые работы по динамике опирались на достижения геометрии Евклида и Аполлония. Но это была, если так можно выразиться, «статическая геометрия». В XVII в., начиная с Кеплера, Галилея, Декарта, основной проблемой натуральной философии становится задача исследования механического движения тел (движение планет, комет, падение тел, влияние на движение тел внешних факторов, удар тел, колебания маятников, движение жидкостей и т. д.). Назрела необходимость в создании «геометрии движения».

Понятие «величина» до XVII в. ассоциировалось с конкретным количеством, размером, числом, постоянной величиной. Поэтому появление в математике «переменной величины» поначалу казалось парадоксальным. Но, развивая известную мысль Ф. Энгельса[2], можно утверждать, что математика переменных величин стала поворотным пунктом в механике движения тел. И первой предпосылкой новой механики ста-

[1]Академики-механики по сути больше напоминали современных инженеров-изобретателей.

[2]Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошло движение и диалектика.

ла *аналитическая геометрия* Р. Декарта и П. Ферма. Понятие переменной величины стало основным в математическом описании движения тел.

Первая из трех книг «Геометрии» Декарта начинается с разъяснений общих принципов и правил составления уравнений геометрических кривых: «Чтобы решить какую-либо задачу, нужно сначала считать ее как бы решенной и обозначить буквами все как данные, так и искомые линии. Затем, не делая никакого различия между данными и искомыми линиями, заметить зависимость между ними, так чтобы получить два выражения для одной и той же величины; это и приводит к уравнению, служащему для решения задачи, ибо можно приравнять одно выражение другому» [32]. Описанная здесь технология построения уравнений становится основой для формирования математического аппарата механики в трудах Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, Вариньона, Бернулли. Это определялось важнейшей ролью геометрических методов в решении задач механики той эпохи.

Второй важнейшей идеей геометрии Декарта стало использование для описания движения координатных осей. Оси у Декарта еще не равноправны: одна ось главная, другая — вспомогательная, расположенная под некоторым (не обязательно прямым) углом к главной оси. Все кривые у Декарта делятся на два класса: 1) описываемые непрерывным движением циркуля или линейки, или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются n предшествующими; 2) «механические» кривые, к которым относятся все остальные. «Механические» кривые Декарт исключал из класса допустимых кривых и, таким образом, рассматривал только кривые, которые могут быть построены с помощью некоторого шарнирного механизма. Декарт отмечал, что степень алгебраического уравнения кривой инвариантна относительно выбора системы координат. Но за основу классификации кривых он брал не степень их уравнения, а число звеньев соответствующего шарнирного механизма. Алгебраическая символика Декарта очень близка к современной. Всякое уравнение кривой приводится к виду $P_n(z) = 0$, где $P_n(z)$ — многочлен с целыми коэффициентами, расположенными по убывающим степеням неизвестного z. Декарт высказал предположение, что алгебраическое уравнение кривой имеет столько корней, какова его степень.

Независимо от Декарта, идеи аналитической геометрии были высказаны другим французским математиком — Пьером Ферма —

в небольшом сочинении «Введение в теорию плоских и пространственных мест», написанном в 1636, но опубликованном только в 1679 г. Для прямых линий и конических сечений Ферма впервые приводит привычные ныне уравнения:

$$y = mx, \quad xy = k^2, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 \pm a^2y^2 = b^2,$$

записанные относительно, как правило, ортогональных осей [76, с. 134]. Исследования в том же направлении опубликовали англичанин Дж. Уоллис («Трактат о конических сечениях», 1655), голландец Ян де Витт («Основы кривых линий», 1659), француз Г. Лопиталь («Аналитический трактат о конических сечениях», 1707). В 1704 г. Ньютон издал «Перечисление кривых третьего порядка», где введены равноправные и ортогональные оси координат, в основу классификации кривых положена степень их алгебраического уравнения. Для приведения уравнений кривых к каноническому виду автор использовал линейные преобразования координат. Геометрии пространственных кривых была посвящена работа соотечественника Декарта и Ферма — А. Клеро — «Исследования о кривых двоякой кривизны» (1731). Наиболее законченный вид аналитическая геометрия приобрела во «Введении в исчисление бесконечно малых» (1748) Л. Эйлера.

Начиная с XVII в. возрастает интерес к алгебре, особенно в связи с внедрением символьных обозначений. Алгебраическая символика формировалась на протяжении многих столетий (Диофант, Лука Пачоли, Никола Шюке и др.), но решающий шаг — введение буквенных коэффициентов — был сделан французом Ф. Виетом в работе «Введение в аналитическое искусство» (1591). В результате алгебра приобрела характер чисто символьного исчисления. Это позволило построить общую теорию алгебраических уравнений, внести вклад в развитие геометрической алгебры (теории операций над отрезками) и теории конических сечений, в которых прежде доказательства сводились к построению с помощью циркуля и линейки.

В XVII в. были заложены основы математического анализа, ставшего основой математического аппарата классической механики. По определению С. М. Никольского, «математический анализ — часть математики, в которой функции и их обобщения изучаются методом пределов. Понятие предела тесно связано с понятием бесконечно малой величины, поэтому можно также сказать, что математический анализ изучает функции и их обобщения методом бесконечно малых» [57, стр. 591]. Идеи анализа пронизывают всю современную математику, включая ее приложения. Различают математический анализ в широком и узком смысле. Анализ в широком смысле — это вся совокупность математических дисциплин, представляющих непосредственное развитие идей и методов дифференциального и интегрального исчисления: дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, вариационного исчисления, теории функций действительного переменного и так далее. Анализ в узком смысле — это интегральное и дифференциальное исчисление. Его созданию и были посвящены математические исследования Г. Галилея, И. Кеплера, Г. Сен-Венсана, Р. Декарта, Ф. Б. Кавальери, П. Ферма, Ж. П. Роберваля, Э. Торричелли, Дж. Уоллиса, Н. Меркатора, Б. Паскаля, П. Менголи, Х. Гюйгенса, И. Барроу, Дж. Грегори, И. Ньютона, Г. В. Лейбница, Я. и И. Бернулли.

Общие методы дифференцирования и интегрирования функций, как взаимно обратные методы, могли быть открыты только теми, кто владел геометрическими методами древних греков, алгебраическими методами Декарта и Уоллиса, понятиями функции и бесконечно малой величины, кто нуждался в методах анализа для решения своих прикладных проблем. Честь этого открытия выпала на долю англичанина Исаака Ньютона и немца Готфрида Вильгельма Лейбница.

Теория «флюксий»[1] Ньютона тесно связана с работами его учителя И. Барроу, Дж. Грегори[2] и Дж. Уоллиса («Арифметика бесконечных», 1655). Ее создание было обусловлено потребностью в решении практических задач, в том числе, проблем небесной механики. Две главные задачи теории «флюксий» состоят в следующем: 1) для данного соотношения между «флюентами» определить соотношение между «флюксиями», 2) для известного соотношения между «флюксиями» найти соотношения между «флюентами». С современной точки зрения, это задачи дифференцирования и интегрирования.

[1] По терминологии Ньютона «флюента» — переменная величина, «флюксия» — скорость изменения «флюенты», то есть производная.

[2] Джеймс Грегори — профессор университетов Сент-Эндрюса и Эдинбурга (Шотландия). Использовал идею функциональной зависимости, изучил многие виды функций, изложил метод предельного перехода, широко использовал разложение функций в степенные ряды, открыл формулу биноминального ряда, интерполяционную формулу, получил формулы приближенного интегрирования, преобразования координат, вывел уравнения некоторых кривых.

Решение первой из задач Ньютон сводил к замене «флюент» их приближенными значениями. Рассмотрим решение Ньютона на примере уравнения $y = x^2$. Заменяя «флюенты» x и y их приближенными значениями $x+\dot{x}o$, $y+\dot{y}o$, где $\dot{x}$ и $\dot{y}$ — «флюксии», а $\dot{x}o$ и $\dot{y}o$ — «моменты флюент» (бесконечно малые величины)[1], получим $(y+\dot{y}o) = (x+\dot{x}o)^2$, откуда, в силу исходного уравнения, пренебрегая малыми второго порядка и сокращая обе части на значок o, приходим к искомому соотношению $\dot{y} = 2\dot{x}x$ между «флюксиями».

В решении второй задачи Ньютон столкнулся с трудностью, обнаружив, что даже линейное уравнение $P(x,\, y)\dot{x} + Q(x,\, y)\dot{y} = 0$ не всегда может быть проинтегрировано в явном виде. Для решения дифференциальных уравнений он пользовался разложением функций в степенные ряды. Эта идея, вошедшая в математику во второй половине XVII в. (Н. Меркатор, Дж. Грегори, Дж. Уоллис, Г. В. Лейбниц), оказалась весьма эффективной и получила дальнейшее развитие. Она сводила задачу интегрирования функций к задаче обращения (интегрирования) соответствующих рядов. Так, Меркатор в «Логарифмотехнике» (1668) рассматривал логарифм $\ln(1+x)$ как площадь под гиперболой $y = \dfrac{1}{1+x}$. Действительно,

$$\ln(1+x) = \int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

И ряд в правой части можно рассматривать как последовательное интегрирование ряда, получаемого после деления «по правилам алгебры» 1 на $(1+x)$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

В 80–90-х гг. XVII в., пытаясь придать своему исчислению более строгую, чем в методе «флюксий» и рядов, логическую форму, Ньютон начал развивать метод «первых» и «последних» отношений, изложенный им в ряде лемм в «Началах». Здесь основным являлось понятие *производной*, определяемой как «последнее» отношение исчезающего приращения функции (Δy) к исчезающему приращению аргумента (Δx), или как «первое» отношение возникающего приращения функции к возникающему приращению аргумента.

[1] Аналоги дифференциалов.

Ньютону, как и Барроу, была известна геометрическая интерпретация интеграла функции как площади соответствующей криволинейной трапеции, а также то, что производная этой площади по абсциссе является ординатой этой кривой. Понятия *определенного интеграла* у Ньютона нет, однако есть, хоть и не полная, но достаточно обширная таблица неопределенных интегралов. Большинство положений своего математического анализа он продемонстрировал в процессе решения конкретных задач, оставив своим последователям возможность построения стройной математической теории.

Официальным годом рождения дифференциального исчисления обычно называют 1684 — год выхода в лейпцигском журнале «Acta eruditorum» статьи Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов...», где вводится понятие дифференциала, правила дифференцирования функций (суммы, произведения, отношения), условия их экстремумов и точек перегиба[1]. Через два года Лейбниц опубликовал статью, посвященную основам интегрального исчисления. Новая математическая теория, удачная символика введенных понятий (дифференциала, интеграла) привлекли внимание континентальных ученых, и дальнейшее развитие математического анализа и его приложений в работах Я. и И. Бернулли, Г. Лопиталя, П. Вариньона и их последователей происходило в русле лейбницевой традиции.

Если подход Ньютона был «кинематическим», основанным на понятии скорости, то Лейбниц излагал свою теорию на основе геометрических представлений о «характеристическом треугольнике», впервые появившихся в работах Паскаля, Снеллиуса и Барроу («Геометрические лекции», 1670). Поясним подход Лейбница на примере параболы $y = x^2$ (рис. 2.5.1).

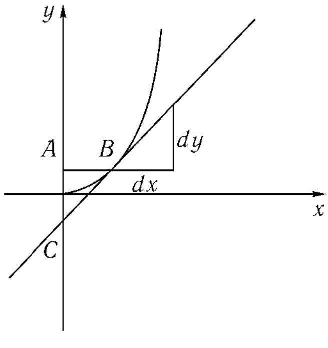


Рис. 2.5.1

Треугольник ABC, образованный касательной BC, подкасательной AC и отрезком AB, параллельным оси x, подобен «характеристическому треугольнику»

[1]Основные идеи анализа Лейбниц сформулировал между 1673 и 1676 г. под личным влиянием Гюйгенса, в результате изучения работ Декарта и Паскаля.

с катетами dx и dy. Таким образом, $dy = \frac{AC}{AB}dx$. Уравнению параболы должна удовлетворять и точка с координатами $(x + dx,\ y + dy)$, то есть $y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x\,dx + dx^2$.

Учитывая, что $y = x^2$, а $(dx)^2$ есть величина второго порядка малости, получаем: $dy = 2x\,dx$.

Сравнивая это уравнение с ранее полученным выражением для dy, легко получить выражение для подкасательной $AC = AB\cdot 2x = 2x^2 = 2y$.

Таковы основные математические результаты XVII в., имеющие непосредственное отношение к развитию механики.

2.6. Теория удара

Галилей раньше других заинтересовался ударом тел и начал не с теоретических построений, а с экспериментальных попыток определения величины ударной силы. Опыты[1] с весами, блоками, забиванием свай не привели его к желаемому результату, но убедили, что ударная сила может быть сколь угодно большой. Философский гений Декарта не позволял ему принимать всерьез экспериментальные факты. Поэтому «правила удара» в «Началах философии» он заканчивает заявлением: «Все эти доказательства настолько достоверны, что хотя бы опыт и показал обратное, однако мы вынуждены придавать нашему разуму больше веры, нежели нашим чувствам» [31, с. 496]. Опыт показал именно то, чего опасался Декарт. И причина его заблуждений состояла не в неправильности сформулированного им фундаментального принципа сохранения количества движения, а в непонимании (или неумении записать) того, что количество движения имеет не только величину, но и направление. Это заблуждение, позднее замеченное Гюйгенсом, вылилось у Декарта в ошибочное правило сложения количеств движения тел.

Метод и цели Галилея были восприняты его учеником Торричелли в опубликованных им популярных лекциях «Об ударе» и чешским естествоиспытателем Йоханнесом Маркусом Марци, издавшим в Праге трактат «О соотношении движений или правила соударений» (1639). Здесь впервые различаются три вида сталкивающихся тел — жесткие, мягкие и упругие. Рассматривая центральный удар упругих шаров, автор считает ударный импульс (меру «мощности или качества переме-

[1]Возможно, что некоторые из опытов носили умозрительный характер.

щения») пропорциональным весу и скорости, экспериментально показывает независимость постударных скоростей от размеров тел. Опыты с подвешенными шарами привели его к выводам: 1) если движущееся тело сталкивается с равными ему по весу и по материалу покоящимся телом, то само оно остается в покое, другое же тело воспринимает его движение; 2) если два равных тела с равными, но произвольными скоростями сталкиваются, то оба отталкиваются друг от друга после удара с равными, но противоположными скоростями. Через 15 лет, после выхода книги Марци, с ней познакомился молодой Х. Гюйгенс.

Научные интересы Гюйгенса, внесшего наиболее значительный вклад в теорию удара, формировались под влиянием творчества Кеплера, Галилея и Декарта. Принимая научную эстафету от Декарта, он, тем не менее, пошел своим собственным путем. Изучение явлений природы, процессов движения и взаимодействия тел экспериментальными и математическими методами, а не поиск их причин и философские размышления стали основным содержанием его научного наследия. Высокий авторитет Гюйгенса в европейском научном сообществе во многом определил дальнейший прогресс таких разделов механики, как *теория удара, теория колебаний, теория притяжения, теория центральных сил*, способствовал ускорению внедрения идей *математического моделирования* и созданию универсальной физико-математической теории движения и равновесия тел — *теоретической механики*.

В мемуаре «О движении тел под влиянием удара» [27] Гюйгенс формулирует законы удара абсолютно упругих тел. Особое внимание к удару объясняется не только утилитарными потребностями техники (чеканка монет), но и тем, что это один из важнейших способов взаимодействия тел природы. В основу трактата положены гипотезы, ясно характеризующие состояние механики середины XVII в[1].

«1. Тело, приведенное в движение, при отсутствии противодействия продолжает свое движение неизменно с той же скоростью и по прямой линии.

---

[1]Мемуар был опубликован в 1703 г. после смерти автора, но его главные идеи докладывались Гюйгенсом в Лондонском королевском обществе (1661), в Парижской академии наук (1668) и опубликованы в «Journal des Sçavants» (1669). Результаты были получены гораздо раньше. Об этом свидетельствуют рукопись 1656 г. (опубликована в 14-м томе Полного собрания сочинений Гюйгенса, с. 137–149), письма Схоутену (1654), Робервалю (1656), Слюзу [187, с. 285–286].

2. Не входя в рассмотрение причины отскакивания твердых тел после соударения, принимаем следующее положение: если два одинаковых тела, движущихся с одинаковой скоростью навстречу друг другу, сталкиваются прямым ударом, то каждое из них отскочит назад с той же скоростью, с какой ударилось.

Удар называется *прямым*, если само движение и соприкосновение происходят на прямой линии, соединяющей центры тяжести тел.

3. Движение тел, а также их одинаковые или разные скорости надо рассматривать как относительные по отношению к другим тела, которые мы считаем покоящимися, не учитывая того, что как те, так и другие тела могут участвовать в другом, общем движении. Поэтому два тела, соударяясь, даже в случае, если оба вместе участвуют еще в другом равномерном движении, для лица, также участвующего в общем движении, действуют друг на друга так, как будто бы этого общего движения не существовало» [27, с. 213].

Суть этих гипотез была высказана еще до Гюйгенса. И опора автора именно на эти утверждения позволяет их считать общепринятыми в середине XVII в. Последующие гипотезы 4 и 5, по мнению Гюйгенса, отражают его личные физические воззрения[1] и позволяют внести коррективы в декартову теорию удара.

«4. Если большее тело соударяется с меньшим, находящимся в покое, то оно сообщает последнему некоторое движение и, следовательно, теряет несколько в своем движении» [27, с. 218].

«5. Если при соударении двух твердых, движущихся навстречу друг другу тел обнаруживается, что одно из них сохранило свое движение, то и другое не выигрывает и не теряет ничего в движении» [27, с. 219].

Теория удара представлена тринадцатью предложениями-теоремами, доказательство которых проводится в строгих геометрических традициях предшественников с широким привлечением мысленных экспериментов[2], согласующихся с физическими представле-

[1] Фактически это было уже у Декарта.

[2] В качестве объекта исследования используются шары, подвешенные на нитях. Позднее Мариоттом была создана соответствующая лабораторная установка, позволившая ему подтвердить результаты Гюйгенса и внести свой вклад в развитие теории удара. В доказательстве теорем активно используется идея относительности движения.

ниями читателей. Основные результаты теории Гюйгенса состоят в следующем:

«Если с покоящимся телом соударяется одинаковое с ним тело, то ударившее тело приходит в состояние покоя, а покоившееся тело приходит в движение со скоростью ударившегося о него» [27, с. 214].

«Если два одинаковых тела соударяются с разными скоростями, то они при ударе обмениваются скоростями» [27, с. 216].

«Если два тела сталкиваются, то их относительная скорость удаления после удара та же, что и относительная скорость сближения до удара» [27, с. 219].

Доказательство последнего утверждения основано на пятой гипотезе. Но что в ней подразумевается под «сохранением движения»? Сохранение величины скорости, направления движения, количества движения (в современном смысле)? Эта неопределенность бросает тень сомнения на верность не только последнего утверждения (у Гюйгенса — предложение IV), но и последующих предложений-теорем. Пятая гипотеза играет важную роль в теории Гюйгенса. Именно в ней содержится недостающее для решения практических задач условие, аналогичное введению Ньютоном коэффициента k восстановления (удара). И рассматриваемый Гюйгенсом случай абсолютно упругого удара соответствует $k = 1$.

«При соударении двух тел сумма произведений из их величин на квадраты их скоростей остается неизменной до и после удара; при этом отношение величин и скоростей должны быть выражены числами и отрезками» [27, с. 235].

Эта теорема (предложение IX) впервые использует введенное Лейбницем в 1695 г. понятие «живой силы», позднее названное кинетической энергией и играющее важную роль в современной физике и механике. Гюйгенс постоянно оперирует понятием «величина тела». Это еще не ньютоновская масса, но в статье, опубликованной в «Journal des Sçavans» (1669), он пишет: «...я рассматриваю тела из одного и того же вещества или же принимаю, что величина тел определяется их весом» [27, с. 367]. В этой же статье у Гюйгенса есть еще один результат, не попавший в мемуар 1703 г.: «Кроме того, я заметил удивительный закон природы, который я могу доказать для сферических тел и который, по-видимому, справедлив и для всех других тел, твердых (упругих) и пластичных при прямом и при косом ударе: общий центр тяжести двух, трех или скольких угодно тел продолжает двигаться равномерно в ту же сторону по прямой линии как до, так и после удара» [27, с. 366].

Галилея в явлении удара интересовала величина ударного импульса. Декарт, Роберваль, Гюйгенс сосредоточили свое внимание на последствиях удара, на попытке определения постударных скоростей соударяющихся тел. Этому же были посвящены работы англичан Уоллиса (1668), Рена (1668) и француза Мариотта (1673).

Джон Уоллис — выпускник Кембриджского университета, профессор геометрии Оксфордского университета, один из первых членов Лондонского королевского общества — основательно изучил работы (многие перевел и издал) античных ученых, Торричелли, Кавальери, Декарта, был первым английским математиком, начавшим заниматься анализом бесконечно малых. В «Арифметике бесконечных» (1656), сыгравшей важную роль в предыстории интегрального исчисления, Уоллис, независимо от Ферма и Роберваля, фактически вычислил определенные интегралы от степеней с любыми рациональными показателями и некоторых других алгебраических функций. Он первым рассматривал интеграл как *предел отношения числовых последовательностей.* В «Трактате о конических сечениях» (1656) Уоллис показывает преимущества аналитического метода Декарта. В более поздних трактатах Уоллис построил график функции $y = \sin x$, высказал идею геометрического представления комплексных чисел, ввел знак для бесконечности, понятия «интерполяция», «мантисса», «непрерывная дробь», занимался приближенными вычислениями, логарифмами, биномом Ньютона, методом бесконечно малых. Его высокий авторитет в среде английских ученых XVII в. повлиял на формирование научных интересов И. Барроу и И. Ньютона.

В 1669–1671 гг. Уоллис опубликовал трехтомный трактат «Механика или геометрический трактат о движении»[1] [323], наиболее полно отражавший состояние механики доньютоновского периода. Трактат начинается двадцатью двумя определениями основных механических понятий. Здесь, по-видимому, впервые делается попытка явного определения скорости.

«Скорость есть свойство движения, отражающееся в сравнении длины и времени; а именно, она определяет, какая длина в какое время проходится».

[1]Переиздан в 1695 г. в собрании сочинений Уоллиса.

«Равномерная скорость — та, которая в одинаковое время проходит равную длину».

«Бо́льшая скорость — та, которая в одинаковое время проходит большую длину или одинаковую длину в меньшее время; притом большая в таком отношении, в каком указанная длина больше или время меньше. Меньшая (скорость) — наоборот» [323].

Очевидно, что приведенные определения отличаются от современных своей абстрактностью, но в них уже содержатся элементы нынешних представлений. До Уоллиса попытки определения скорости, с современной точки зрения, либо были неудачными, либо совсем не предпринимались ввиду «очевидности» этого понятия. Но «очевидность», как правило, была индивидуальной и не способствовала ни прояснению сущности, ни закреплению этого понятия в механике. И. Ньютон также не определял понятие скорости, возможно, имея в виду определения Уоллиса.

К понятию силы Уоллис относится в духе декартовских традиций, определяя ее как произведение веса на путь, проходимый точкой приложения веса. Но иногда пользуется и представлениями Галилея: сила измеряется произведением веса на скорость точки ее приложения. Это понятие силы позволяет автору сформулировать по-своему принцип возможных перемещений: «Величины опускания различных грузов стоят друг к другу в таком же отношении, в каком произведения весов на высоты падения; поднятия определяются совершенно также... Говоря в совершенно общей форме, продвижения вперед и отходы назад, обусловленные действием движущих сил, определяются произведениями сил на длину продвижения вперед, или отходя назад, измеряемую по линии направления силы» [323, ч. I, гл. 2, предл. 5]. Говоря о силах в машинах, Уоллис различает движущие силы, измеряемые «моментом», и сопротивление, измеряемое «импедиментом».

Свои законы удара, позднее вошедшие в упомянутый трактат, Уоллис впервые сформулировал в 1668 г., участвуя в конкурсе Лондонского королевского общества. При этом он исходил из принципов своей механики, представляющих причудливую смесь схоластической динамики и статики в стиле Стевина или Декарта: если сила ν перемещает вес P за время T на расстояние L, то сила $m\nu$ переместит вес mP за время nT на расстояние nL так, что отношение $\dfrac{\nu T}{PL}$ остается постоянным. Или еще — если сила ν перемещает вес P со скоростью C, то сила $m\nu$

переместит вес P со скоростью mC или вес mP со скоростью C. Как бы мы ни оценивали сейчас эти идеи Уоллиса, но это уже были принципы, положенные в основу построения новой науки о движении. Эти принципы позволили автору получить верные законы абсолютно неупругого удара, они давали возможность проводить расчеты характеристик движения. Но главное — сомнительность происхождения этих принципов, их субъективность послужили основой для поиска новых, более совершенных.

Вклад в теорию удара К. Рена и Э. Мариотта является развитием взглядов Гюйгенса и Уоллиса. Работа Рена была участницей того же Лондонского конкурса 1668 г. Сочинение Мариотта «Трактат об ударе или столкновении тел» [245], впервые[1] изданное в 1673 г., не только повторяет результаты Гюйгенса, Марци, Уоллиса и Рена, но и подводит под них обширную экспериментальную базу, связывает изучение удара с колебанием тел[2] (соударяются шары, совершающие колебательное движение), разрешает давний спор Декарта и Роберваля о центре качаний или удара тел (доказав совпадение этих точек для случая треугольника, качающегося около одной из сторон) и, возможно, впервые обращает внимание на то, что *количество движения должно определяться не весом, а количеством вещества* в теле. Он пишет: «Под весом тела здесь понимается не свойство, заставляющее (тело) двигаться к центру Земли, а его объем с определенной плотностью или концентрацией частей его материи, который, очевидно, и является причиной тяжести» [187, с. 298]. Таким образом, Мариотт фактически определяет понятие массы (не вводя этого слова) за пятнадцать лет до его появления в «Началах» Ньютона.

2.7. Теория притяжения

Поиски причин тяжести тел, изучение свойств равновесия и движения притягивающихся тел занимали важнейшее место в истории теоретической механики. Без особого преувеличения можно утверждать, что эти вопросы занимали умы всех выдающихся геометров XVII в. Кеплер, установив неравномерность движения планет, естественно, задался вопросом о причинах этого явления. Его идеи объяснения причин

[1] Состоялось еще два издания, второе — в 1684.

[2] Упругость тел поясняется на примере колебаний струны.

движения были традиционными — действие «душ светил», магнитные силы взаимодействия Солнца и планет[1], распространяющиеся как свет и обратно пропорциональные расстоянию. Движение Луны объясняется («Тайна Вселенной», 1596) земным притяжением, а земные приливы и отливы — притяжением Луны.

Но уже Галилей сменил акцент в проблеме тяготения: от поиска причин к изучению свойств. «Мне думается, что сейчас неподходящее время для занятий вопросом о причинах ускорения естественного движения тел, по поводу которого различными философами было высказано столько различных мнений. Будет достаточно, если мы рассмотрим, как он [Галилей] исследует и излагает свойства ускоренного движения (безотносительно к причинам последнего)» [19, с. 301–302]. Это отношение к задаче тяготения стало определяющим в работах Гюйгенса и Ньютона.

Французский астроном Измаэль Бульо, которого Ньютон называл в «Началах» своим предшественником (как и Борелли), в «Популярной астрономии» (1645) утверждал, что если Солнце и планеты взаимодействуют как свет, то Кеплер ошибается в выражении этой силы. Если бы эта сила, подобно свету, распространялась от одной поверхности сферы к другой, то и менялась бы она по величине обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца[2]. Джованни Альфонсо Борелли в книге «Теория медицейских планет, выведенная из физических причин» (1666) утверждал, что планеты стремятся к Солнцу по той же причине, по которой тяжелые тела стремятся к Земле. Он сравнивал движение планет с движением камня на краю пращи и считал, что «инстинкт», заставляющий планету стремиться к Солнцу, уравновешивается тенденцией тела удаляться от центра, говоря современным языком, *центробежной силой*[3].

Идея всеобщности взаимодействия (притяжения) тел была высказана Робервалем в 1644 г. в трактате «Система мира по Аристарху ...». Комментируя этот трактат, Декарт писал, что Роберваль «предполагает, что вся мировая материя и каждая из ее частей имеют определенное свойство, в соответствии с которым вся материя объединяется и группируется в одно протяженное тело, все части которого имеют

[1]Кеплер находился под влиянием идей У. Гильберта — основоположника теории магнетизма тел.

[2]Плотность распределения лучей обратно пропорциональна поверхности сферы.

[3]Термин введен Х. Гюйгенсом.

наклонность и делают усилия к соединению одних с другими, притягиваясь взаимно одно к другому для того, чтобы быть связанными так тесно, как только это возможно. Что все и каждая из частей земли, воды и воздуха также имеют очень похожее свойство, в соответствии с которым они также взаимно притягиваются одна к другой и делают усилия для соединения» [187, с. 163]. Позднее, в 1669 г., Роберваль писал: «Я всегда по возможности буду стараться подражать Архимеду, который именно в связи с тяжестью выдвигает в качестве принципа или постулата постоянный и во все минувшие до сей поры столетия засвидетельствованный факт: существуют тяжелые тела, отвечающие условиям, о которых он говорит в начале своего трактата на эту тему. На этом основании я построю, как и он, свои рассуждения о механике, не затрудняя себя вопросом, что же такое в конце концов начала и причины тяжести, и довольствуясь тем, что буду следовать истине, если она пожелает когда-либо предстать ясно и отчетливо передо мною. Вот правило, которого я всегда хочу держаться в сомнительных рассуждениях» [23, с. 168].

В 60–80-х гг. проблема тяготения захватила умы английских ученых и завершилась в 1687 г. блестящим результатом Ньютона — формулировкой *закона всемирного тяготения*. Важным завоеванием этого периода было распространение на тяготение статуса силы, до того рассматриваемой только в статике как *эффективность действия одного тела на другое*. Уже Борелли в названном трактате 1666 г., писал, что каждая планета двигается под действием трех сил: силы «естественного» стремления планеты к Солнцу (направлена к Солнцу), силы солнечного света, заставляющая планеты вращаться, и силы отталкивания планеты от Солнца, которая является следствием вращения планет по кругам. Равенство первой и третьей сил обеспечивает планете движение по орбите. Первая сила предполагалась одинаковой для всех планет, а третья — обратно пропорциональной расстоянию Солнце–планета.

Первое выступление Гука в Лондонском Королевском обществе, посвященное притяжению тел, состоялось 21 марта того же 1666 г. Гук утверждал: «Представляется, что тяготение является одним из наиболее общих действующих принципов мира...» [10, с. 126]. Далее Гук произвел ряд экспериментов, стараясь доказать, что движение по кругу состоит из прямолинейного движения по касательной и другого движения, направленного к центру вращения. В первой из «кутлеровских лекций»[1], опубликованной в 1674 г. под названием «Движение Земли», Гук предлагает свой взгляд на устройство Вселенной и, в частности, утверждает, что все небесные тела действуют с «тяготительной силой», направленной к их центрам, и степень притяжения уменьшается по мере удаления тел. В 1680 г. Гук уточнил: «...Я предполагаю, что притяжение всегда действует в отношении, обратном квадрату расстояния» [10, с. 131].

Из дневниковых записей Гука (ноябрь 1675) известно, что он изучал «Маятниковые часы» Гюйгенса, где были приведены законы центробежного движения. С 1679 г. он восстановил переписку с Ньютоном по поводу закона всемирного тяготения, в 80-е гг. этой проблемой активно заинтересовались К. Рен, Э. Галлей, Х. Гюйгенс и многие видные геометры Европы. Появление *теории всемирного притяжения* становилось неизбежным. В 1687 г. «Начала» Ньютона сделали неизбежность реальностью.

Эта теория важна не только сама по себе (в ее философском, мировоззренческом, физическом, математическом содержании), но для формирования механики чрезвычайно важен и сам исторический процесс ее создания, процесс формирования основных понятий, принципов и свойств движения и равновесия тел на базе идеи унификации природных и технических процессов методами математического моделирования.

Понятие количества движения, до Декарта остававшееся весьма аморфным, в его работах, в названных работах Роберваля, Уоллиса, Гюйгенса приобретает определенность. В «кутлеровских лекциях» 1680–1681 гг. Гук относит к важнейшим параметрам движения количество движения, качество движения и силу. «Под количеством движения, — пишет Гук, — я понимаю только степень скорости, присущей в определенном количестве вещества.

Под качеством движения я понимаю его модификации в теле, простое оно или сложное, преломленное или отраженное, прямое или наклонное и так далее.

Под силой я понимаю действие, или эффект, который она производит на другие тела, вибрируя или двигая их» [10, с. 121].

Эти определения количества движения и силы гораздо ближе к ньютоновским, чем к декартовским. Ближе по годам, ближе по существу.

---

[1] Д. Кутлер пообещал выплачивать Гуку 50 фунтов в год за ежегодное чтение 16 лекций для распространения знаний по искусствам и природе [10, с. 183].

Христиан Гюйгенс

2.8. Теория колебаний маятника

История изобретения точных механических часов связана с именами Галилея и Гюйгенса. Галилей высказал идею использования часов для определения долготы места, что имело огромное значение для мореплавания. В 1612, 1616, 1630 гг. он пытался вступить в переговоры с испанским правительством о передаче своего открытия — измерителя времени. Попытки были безуспешными, и в 1636 г. он обратился с этим предложением к Генеральным штатам Нидерландов, которые приняли предложение и назначили комиссию для его рассмотрения. Комиссия указала на некоторые недостатки часов Галилея (он их признал справедливыми, но преодолимыми) и постановила отправить ему в дар золотое колье стоимостью 500 флоринов. Но по инициативе кардинала Барберини Генеральный инквизитор Флоренции запретил переговоры, и Галилей вынужден был отказаться и от дара, и от продолжения переговоров, которые с голландской стороны поддерживались Константином Гюйгенсом — отцом Христиана. Галилею, — писал Вивиани[1] в 1641 г., «...пришло в голову, что можно добавить маятник к часам с гирями и с пружиной» [187, с. 90]. Установлено, что такие часы были построены самим Вивиани.

В 1657 г. о создании собственных часов сообщил Х. Гюйгенс[2]. В его часах обеспечивалась изохронность колебаний маятника и использовался анкерный (у Галилея — крючковый) спуск для передачи движения механизму. Но изохронность была недостаточной, и Христиан продолжил теоретические расчеты. Ему удалось показать, что период маятника будет независим от амплитуды и движения маятника будут равномерными, если он будет двигаться не по окружности, а по циклоиде. Для реализации такого движения Гюйгенс установил вблизи точки подвеса маятника ограничители определенной конфигурации («щеки»). Для расчета формы «щек» и была создана математическая *теория эволют*.

Трактат Х. Гюйгенса «Маятниковые часы или геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленных к часам» был издан в Париже в 1673 г. Он сразу привлек внима-

---

[1]Член Флорентийской академии наук, Лондонского Королевского общества и Парижской академии наук, математик великого герцога Тосканского, ученик Галилея.

[2]Изобретение имело большой успех, было защищено 16 июня 1657 г. патентом Генеральных штатов и описано в книге «Часы» (1658).

ние и практиков, интересующихся конструкцией часов[1], и геометров. Здесь впервые приводится *теория эволют и эвольвент* (часть третья — «О развертке и измерении кривых»), формулируются начала теории колебаний весомых тел (часть вторая — «О падении весомых тел и их движении по циклоиде», часть четвертая — «О центре качания») и приводятся (без доказательства) 13 теорем о центробежной силе. Центральные части книги достаточно независимы (это развитие идей предшественников), но все они объединены единой задачей (о колебании маятника) и единым методом исследования (геометрия Евклида).

Гюйгенс был прямым продолжателем работ Галилея и Торричелли, теории которых он, по его собственному выражению, «подтверждал и обобщал» [54, с. 91]. Аксиомы (закон инерции; независимость вертикального движения, вызванного весом, и произвольного равномерного движения, составляющих сложное, то есть реальное движение) и первые одиннадцать теорем («предложений») второй части «Маятниковых часов» обобщают результаты Галилея в задаче о колебаниях маятника (считается, что колебания происходят в вертикальной плоскости, под действием тяжести, по траектории, являющейся предельным положением ломаной). Следующий шаг в обобщении идей Галилея–Гюйгенса сделал Ньютон, предложив систему понятий и законы[2], ставшие основой теоретической механики. Остановимся на некоторых из теорем Гюйгенса.

Предложение I. «Скорость свободно падающего тела возрастает в равные времена на одинаковые величины. Равным образом и пути, проходимые в одинаковые времена, начиная от начала движения, возрастают на одинаковые величины»[3] [27, с. 35].

При доказательстве этой теоремы автор предполагает, что вес является единственной причиной падения тел. В этом случае любые два тела постоянного веса в равные промежутки времени (от начала дви-

[1] Первая и пятая части трактата посвящены детальному описанию конструкции часов.

[2] Своим предшественником по первым двум законам Ньютон считал Галилея, по третьему — Гюйгенса, использовавшего эту гипотезу при построении теории удара.

[3] Вторая часть Предложения I нуждается в комментарии. Из дальнейшего текста следует, что здесь речь не идет о том, что пройденный путь пропорционален времени. Двусмысленность неудачного перевода позволяет предполагать, что либо речь идет о сравнении путей разных тел, либо о возрастании путей тела на одинаковые по выражению величины ($v\Delta t$).

жения) будут проходить равные пути. Обобщая эту мысль Галилея–Гюйгенса, мы приходим к заключению Ньютона — сила является единственной причиной неравномерного движения тел. По Ньютону вес — одна из движущих сил, падение — одно из движений, в процессе которого меняется количество движения. Падение (изменение количества движения) является следствием действия силы (причины движения), а всякое следствие пропорционально его причине. Таким образом, обобщение Ньютона, ставшее его вторым законом, становится не просто логичным, а очевидным: «изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует» [65, с. 40].

Предложение III. «Если при свободном падении взять два произвольных промежутка времени (оба от начала движения), то пути, пройденные за эти промежутки времени, относятся как квадраты времен или так же, как квадраты приобретенных конечных скоростей» [27, с. 38].

Предложение IV. «Если тело начнет подниматься вверх со скоростью, приобретенной в конце свободного падения, то оно в одинаковые времена будет проходить вверх те же пути, которые проходило раньше в обратном направлении, и тело поднимется до той же высоты, с которой оно падало; кроме того, в равные времена скорость будет убывать на равные величины» [27, с.40].

При доказательстве этой теоремы использовался «энергетический принцип», ранее встречавшийся в работах Торричелли[1] и Роберваля, который Гюйгенс обобщил на систему тел: «Система весомых тел, движущихся под влиянием силы тяготения, не может двигаться так, чтобы общий центр тяжести тел поднялся выше первоначального положения» [27, с. 308].

Предложение VI. «Скорости, приобретаемые весомыми телами при падении по наклонным плоскостям разного наклона, одинаковы, если высоты наклонных плоскостей равны» [27, с. 47].

Предложения VII–X посвящены адаптации полученных результатов на случай движения по ломаной или произвольной кривой, расположенных в вертикальной плоскости.

---

[1] С принципом Торричелли Гюйгенс познакомился в ранний период своего творчества, когда он занимался чисто статическими проблемами. Этот принцип был опубликован Торричелли в «De Motu gravium» (1644) и касался только двух тел.

Предложение XI. «Если тело падает вдоль какой-нибудь поверхности и потом меняет направление движения и поднимается по той же или по симметричной и симметрично расположенной поверхности, то при падении и поднятии одинаковые пути проходятся в одинаковые времена» [27, с. 51].

Итак, для равномерности часового хода траектория движения маятника должна быть некоторой кривой, симметричной относительно вертикальной оси. Далее Гюйгенс рассматривает циклоиду, образованную точкой окружности катящегося по прямой колеса. Доказав в предложениях XII–XX свойства циклоиды и движения по ней, автор устанавливает, что искомая траектория движения маятника — это циклоида с вертикальной осью и вершиной, обращенной вниз (предложения XXV–XXVI).

Третья часть «Маятниковых часов» излагает теорию эволют и эвольвент, четвертая часть «О центре качания» посвящена изложению начал теории колебаний, механики системы точек и тел. Гюйгенс начинает с истории[1] возникновения проблемы центра качания и определений:

«1. Под маятником мы будем понимать любую, обладающую весом фигуру (линию, плоскость или тело), так подвешенную, что она может совершать колебательные движения вокруг некоторой точки или, вернее, вокруг горизонтальной оси.

2. Горизонтальную ось, вокруг которой надо мыслить колебания маятника, мы будем называть осью колебаний.

3. Под простым маятником мы будем понимать нить или линию, не гнущуюся и невесомую и несущую на нижнем конце прикрепленный груз. Вес этого груза как бы сосредоточен в одной точке.

4. Под сложным маятником мы будем понимать тело, состоящее из нескольких грузов, сохраняющих неизменное расстояние как друг от друга, так и от оси колебаний. Таким образом, всякое подвешенное тяжелое тело может быть названо сложным маятником, так как оно может быть мысленно разделено на любое число частей.

5. Изохронными назовем маятники, совершающие колебания через подобные дуги[2] в одинаковые времена.

---

[1] Задача была сформулирована Мерсенном, ее пытались решить Декарт, Оноре Фабри и другие.

[2] Это означает — при равных амплитудах. В этом случае центральные углы равны, и дуги подобны независимо от длины маятника (радиуса). Фактически речь идет о движении разных точек совершающего колебания стержня.

6. Под плоскостью колебаний будем понимать плоскость, проходящую через центр тяжести подвешенной фигуры перпендикулярно к оси колебаний.

7. Линией центра фигуры будем называть прямую, проведенную через центр тяжести фигуры и через ось колебаний, перпендикулярно к этой оси.

8. Отвесной линией будем называть линию, проведенную от оси колебаний в плоскости качаний перпендикулярно к плоскости горизонта.

9. Центром качаний любой фигуры назовем ту точку оси фигуры, расстояние от которой до оси колебаний равно длине простого маятника, изохронного с подвешенной фигурой.

10. Любую линию, проходящую через центр тяжести фигуры, назовем осью тяжести.

11. Назовем колебания плоской фигуры или плоской кривой плоскими, если ось колебаний лежит в плоскости фигуры или линии.

12. Назовем колебания плоской фигуры или плоской линии боковыми, если ось колебаний расположена перпендикулярно к плоскости фигуры или кривой.

13. Если говорят, что надо веса помножить на прямые линии, то это означает, что перемножаются числа или отрезки прямых, которые выражают величину весов или их отношение друг к другу» [27, с. 120–122].

Легко заметить, что далеко не все из введенных понятий[1] вошли в современную теорию колебаний, некоторые получили иное название. Простой и сложный маятники ныне называются, соответственно, математическим и физическим, иначе определяются плоские колебания, нет необходимости в понятиях боковых колебаний, линии центра фигуры. Но именно здесь начинается формирование языка одного из важнейших разделов теоретической механики. Понятийный аппарат теории Гюйгенса продолжают две гипотезы.

1. «Если любое число весомых тел приходит в движение[2], благодаря их тяжести, то общий центр тяжести этих тел не может подняться выше, чем он был в начале движения» [27, с. 122].

2. Сопротивление воздуха и другие помехи движению отсутствуют.

---

[1]Далее по тексту еще вводится понятие клина (часть цилиндрической поверхности, расположенной между двумя пересекающимися плоскостями) и его субцентрики (расстояние между проекцией центра тяжести клина и касательной к цилиндру).

[2]Подразумевается, что из положения устойчивого равновесия.

Первая из гипотез уже использовалась при доказательстве «Предложения IV» второй части и здесь поясняется на уровне человеческого опыта и здравого смысла. Гюйгенс считает эту гипотезу чрезвычайно важной и перспективной: «Эта моя гипотеза применима также и к жидкостям. И при помощи ее можно доказать не только все теоремы Архимеда о плавании тел, но и много других теорем механики. И если бы изобретатели новых машин, напрасно пытающиеся построить вечный двигатель, пользовались этой моей гипотезой, то они легко бы сами сознали свою ошибку и поняли, что такой двигатель нельзя построить механическими средствами» [27, с. 124].

Теория включает 24 теоремы-предложения, посвященные способам нахождения центра качания, и две теоремы, позволяющие определить единицу длины и ускорение свободного падения тел. Это есть первая попытка строгого геометрического изложения механики системы тел применительно к задаче о колебаниях. Здесь впервые используются (но не определяются) понятия *связи, осевого момента инерции*, доказывается теорема о моменте инерции относительно оси, параллельной данной, вычисляются осевые моменты инерции и центры качаний круга, прямоугольника, равнобедренного треугольника, параболы, кругового сектора, окружности, правильного многоугольника, пирамиды, конуса, шара, цилиндра, параболического и гиперболического коноидов, половины конуса, находится ускорение свободного падения[1].

Предложение I устанавливает правило нахождения координат центра тяжести системы тел. Следующее предложение уточняет это правило для случая n равных тел. Третья теорема, говоря современным языком, доказывает, что при перемещении тел системы сумма работ их весов равна работе общего веса всех тел на соответствующем перемещении центра тяжести. Четвертое предложение устанавливает, что наибольшая высота центра тяжести системы тел не изменится, если тела будут в какой-то момент освобождены от связей между ними. Центральное место в теории занимает предложение V, дающее формулу для определения положения центра качания или приведенной длины физического маятника.

В современных курсах теоретической механики эта формула получается из сравнения дифференциальных уравнений колебаний матема-

[1]Обозначение g для ускорения свободного падения введено И. Бернулли. Для широты Парижа из расчетов Гюйгенса получается $g = 9{,}799$ м/с^2 (нынешнее значение — $g = 9{,}809$ м/с^2) [27, с. 362].

тического

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{2.1}$$

и физического

$$\ddot{\varphi} + \frac{mlg}{J}\sin\varphi = 0 \tag{2.2}$$

маятников (φ — угол отклонения от вертикали, g — ускорение свободного падения, l — расстояние от оси вращения до центра тяжести, m — масса, J — осевой момент инерции). Сопоставляя равенства (1) и (2) легко заметить, что физический маятник будет вести себя как математический маятник длиной

$$l_0 = \frac{J}{ml}. \tag{2.3}$$

Это и есть формула для определения приведенной длины (l_0). Если воспользоваться теоремой Гюйгенса–Штейнера[1] $J = J_0+ml^2$, где J_0 — момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести, то легко установить, что $l_0 = l + \frac{J_0}{ml}$, то есть $l_0 > l$.

По аналогии с математическим, период малых колебаний физического маятника будет определяться равенством

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}. \tag{2.4}$$

Результат, сформулированный Гюйгенсом в «Предложении V», полностью совпадает с равенством (3), но пришел он к нему далеко не так просто и не очень быстро. Эту задачу он получил от Мерсенна в письме его отцу в сентябре 1646 г. В ответном письме (26.10.1646) Христиан благодарит знаменитого Мерсенна за внимание и делится своими соображениями о решении задачи. Мерсенн, отвечая на послание Христиана (8.12.1646), поддерживает его намерения, но советует в поисках решения следовать не Галилею, а Декарту — «...наиболее выдающемуся мыслителю мира...» [187, с. 301]. Называя Христиана Аполлонием и Архимедом тех лет, Мерсенн тем не менее, указывает и на недостатки его решения. По свидетельству самого Гюйгенса,

[1] Якоб Штейнер — член Берлинской академии наук (с 1834), профессор Берлинского университета — более чем через 150 лет повторил результат Гюйгенса и придал ему современную форму.

до 1665 г. ни он сам, ни Мерсенн, ни Декарт, ни Роберваль не дали удовлетворительного решения этой проблемы, ставшей актуальной в связи с работами по конструированию часов. С 1661 г. колебаниями маятника (в том числе сложного) заинтересовались представители Лондонского Королевского общества. Правда, их интерес был связан не с созданием маятниковых часов, а с идеей установления с помощью маятника «естественного стандарта» — универсальной меры длины и с намерениями определить силу сопротивления воздуха. К этому времени Гюйгенс окончательно определился со своими естественно-научными принципами[1], стал одним из искуснейших геометров Европы, и ему нужно было предложить способ регулирования колебаний маятника. Чисто инженерная проблема требовала математического решения — «самого элегантного и самого точного, какое только было возможно» [187, с. 304].

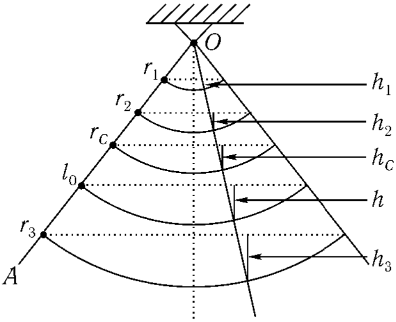


Рис. 2.8.1

Это прекрасное доказательство заслуживает воспроизведения[2] хотя бы для того, чтобы показать, как в механику вошло понятие *момента инерции*. Пусть физический маятник — невесомый стержень OA с тремя грузами, расположенными на заданных расстояниях r_k (рис. 2.8.1), m_k — масса груза r_k, v_k — скорость груза r_k, r_c — положение центра тяжести грузов, h_k, h_c, h — «одновременные» отрезки перпендикуляров к хордам в сегментах траекторий. Стержень OA совершает колебания, грузы и их центр тяжести описывают дуги радиусов r_k и r_c. Допустим, что существует математический маятник, длиной l_0 и массой $m = m_1 + m_2 + m_3$, совершающий колебания, изохронные с нашим стержнем. Пересечем все дуги произвольной прямой, проходящей через O. Все грузы, их центр тяжести и математический маятник окажутся на этой прямой в один и тот же момент t, и у них будут

[1]Аксиоматика работ Гюйгенса убедительно доказывает, что он не воспользовался советом Мерсенна во всем следовать Декарту.

[2]Приводимое здесь доказательство не копирует, но в точности следует идеологии Гюйгенса. При этом используются современные обозначения.

скорости v_k, v_c, v (v_c и v — скорости центра масс и математического маятника).

Все сегменты подобны, поэтому

$$\frac{h_k}{h} = \frac{r_k}{l_0}; \quad \frac{h_c}{h} = \frac{r_c}{l_0}. \tag{2.5}$$

Точки движутся по окружностям, то есть

$$\frac{v_k}{v} = \frac{r_k}{l_0}; \quad \frac{v_c}{v} = \frac{r_c}{l_0}. \tag{2.6}$$

В соответствии с предложением III второй части,

$$\frac{h_k}{h} = \frac{v_k^2}{v^2}; \quad \frac{h_c}{h} = \frac{v_c^2}{v^2}. \tag{2.7}$$

Третье предложение-теорема четвертой части с точностью до замены весов массами приводит к равенству:

$$\sum_{k=1}^{3} m_k h_k = m h_c. \tag{2.8}$$

Подставляя в полученное равенство $h_c = \frac{r_c}{l_0} h$ (из (5)) и $h_k = \left(\frac{r_c}{l_0}\right)^2 h$ (из (7) и (6)), получим:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{3} m_k r_k^2}{l_0^2} h = m \frac{r_c}{l_0} h,$$

а после преобразований и выражение для приведенной длины:

$$l_0 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{3} m_k r_k^2}{m r_c}. \tag{2.9}$$

Числитель этой формулы позднее (у Эйлера) получил название момента инерции.

Следующие предложения-теоремы развивают полученный результат для конкретных примеров тел. В том числе доказывается и аналог уже упоминавшейся теоремы Гюйгенса–Штейнера (Предложение IX), показывается, что $l_0 > r_c$, устанавливаются правила вычисления разности $l_0 - r_c$ (Предложение XVIII) и возможности перемены мест подвеса и центра качания (Предложение XX), используется понятие периода и частоты[1] колебаний (Предложение XXV).

2.9. Теория центробежных сил

Круговое движение планет, маятников происходит по наблюдаемым, известным траекториям. Первые попытки объяснения причин кругового движения тел, как известно, предпринимались еще в Древней Греции. К середине XVII в. прежние метафизические объяснения теряют былую популярность и заменяются либо вихревой теорией Декарта, либо идеей взаимного притяжения тел. Как уже отмечалось, Борелли в 1666 г. высказал мысль о том, что в процессе движения планеты по орбите сила притяжения к Солнцу уравновешивается некоторой силой отталкивания от Солнца, вызванной вращательным движением планеты по орбите. Изучая колебания маятника, Гюйгенс установил, что эти движения происходят под действием тяжести, но в процессе движения возникает некоторая дополнительная сила, натягивающая нить даже в горизонтальном положении. Некоторые теоремы об этой силе, названной Гюйгенсом *центробежной*, он сообщил в 1669 г. Лондонскому королевскому обществу в виде анаграммы. В 1673 г. тринадцать теорем (без доказательств) были опубликованы в пятой части «Маятниковых часов». И только в 1703 г. появилось посмертное сочинение «О центробежной силе»[2], в котором раскрывается смысл этого понятия и приводятся доказательства.

Идея центробежной силы заинтересовала Гука и Ньютона, как возможность определения противоположной силы — *силы центростремительной* или *силы гравитационного притяжения* планеты к Солнцу.

[1] Без определения и названия, но с указанием правила для их вычисления: «...длины каких-либо двух маятников относятся между собой как квадраты времен, потребных для одного колебания, вследствие этого они обратно пропорциональны квадратам чисел, которые указывают, сколько колебаний происходит за определенный промежуток времени» [27, с. 200–201].

[2] Основная часть сочинения была написана в 1659 г.

В связи с развитием дифференциального исчисления эта идея получила дальнейшее развитие в трудах Лейбница, Лопиталя, Вариньона, И. Бернулли. Позднее центробежные силы стали атрибутом теоретической механики, как разновидность сил инерции, породивших длительные споры о их реальности и позволивших, по предложению Даламбера, описывать динамические процессы статическими уравнениями.

Из введения и первых пяти предложений-теорем сочинения Гюйгенса следует, что при круговом движении центробежная сила пропорциональна весу (величине) тела, квадрату скорости и обратно пропорциональна радиусу окружности. В предложении VI используется[1] понятие *угловой скорости* тела и показывается (в современных обозначениях), что при горизонтальном вращении точки по окружности радиуса $R = g$ (радиус равен численной величине ускорения свободного падения) с угловой скоростью $\omega = 1$ на нее будет действовать центробежная сила, равная весу. Следующие девять теорем посвящены *силам инерции*, возникающим при движении точки по конической поверхности. И последние две теоремы устанавливают величину *силы натяжения* нити маятника в его нижнем положении B в случае начала движения с уровня точки подвеса C и из верхней точки D траектории (вертикальной окружности, рис. 2.9.1).

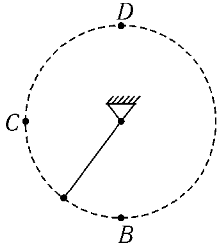


Рис. 2.9.1

Из того, что центробежная сила натягивает нить маятника так же, как и сила тяжести, Гюйгенс делает вывод об аналогичности и реальности этих сил. Возможно, А. К. Клеро в 1742 г. первым обратил внимание на фиктивный характер центробежной силы[2]. Но наиболее ясно это было высказано через 150 лет Герцем: «Заставим вращаться камень, привязанный к нити; как известно, таким образом мы прикладываем к камню некоторую силу; эта сила последовательно удаляет камень с прямолинейной траектории, и если мы изменим эту силу, массу камня и длину нити, то убедимся, что движение камня происходит в соответствии со вторым законом Ньютона. Но третий закон требует существования реакции, противоположной силе действия нашей руки на камень. На вопрос, касающийся этой реакции, отвечает хорошо извест-

[1] Но не определяется и не вводится обозначение.

[2] Более подробно эта проблема обсуждается П. В. Харламовым [87].

ное утверждение: камень действует на руку силой инерции, и эта сила инерции в точности противоположна приложенной нами силе. Можно ли так утверждать? Разве то, что мы называем силой инерции или центробежной силой, не есть инерция тела? Можем ли мы, не нарушая ясности представлений, дважды учитывать действие инерции: первый раз в связи с наличием массы и второй раз как силу. В наших законах движения сила была причиной движения, существующей до движения. Можем ли мы, не запутывая наши представления, говорить о силе, порождаемой движением, являющейся следствием движения? Можем ли мы делать вид, что в наших законах уже определили нечто касающееся природы этих новых сил? Можем ли мы делать вид, что имеем право приписывать им свойства сил только потому, что им предоставлено название силы? На все эти вопросы следует открыто ответить — нет; и нам ничего не остается, кроме следующего объяснения: представление силы инерции в качестве силы непригодно; это название, как и название живой силы, является пережитком истории и причины полезности больше служат подтверждением бездоказательности использования этого названия. Но что становится, таким образом, требованием третьего закона, кому нужна сила, действующая со стороны неодушевленного камня на руку и кто не удовлетворен наличием только реальной силы, а не простым названием?» [20, с. 6–7].

Глава 3
НОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНЦЕПЦИИ

Сочинение это нами предлагается как математические основы естествознания [65, с. 3].

3.1. Формирование динамики на основе понятия количества движения

Идея количественной оценки движения тел, появившаяся в трудах оксфордских и парижских ученых в средние века, получила дальнейшее развитие в XVII в. Это было время, когда большинство видных математиков и механиков занимались проблемами движения тел. Изучение движения планет, движения брошенных тел, колебаний маятника, удара тел математическими методами было невозможно без использования некоторых количественных характеристик, в качестве которых стали выступать *время, скорость движения, пройденный путь, масса* («величина») *тела.*

Особую роль во второй половине XVII в. стало играть введенное Декартом понятие *количества движения* (произведение «величины тела» на скорость). Оно имело простое математическое выражение, вполне определенный физический смысл, с ним можно было совершать математические операции, и это была уже не кинематическая, а динамическая (скорость с учетом массы) характеристика движения тела. После добавления Гюйгенсом, Уоллисом и Реном свойства направленности, понятие количества движения оказалось одним из важнейших в динамике Ньютона, Лейбница, И. Бернулли и к началу XVIII в. окончательно укоренилось в терминологии механики в качестве одной из основных мер (количественных характеристик) движения.

В 1663 г. на средства Генри Люкаса в Тринити-колледже Кембриджского университета была учреждена кафедра математики, первым профессором которой стал член Королевского общества, богослов, блестящий знаток математики и древних языков (латынь, греческий[1], арабский) Исаак Барроу. Биографы Ньютона утверждают, что 33-летний профессор Барроу и студент Исаак Ньютон познакомились в апреле 1664 г.[2], когда последний, изучив «Геометрию» Декарта, работы Схоутена, Уоллиса, Грегори, Слюза, был уже искушенным математиком. Через пять лет Барроу передал полномочия профессора люкасовской кафедры своему талантливому 26-летнему ученику и вскоре был назначен духовником короля, а через три года — магистром (главой) Тринити-колледжа. В «Оптических и геометрических лекциях», изданных Барроу в 1674 г., он выражал благодарность своему младшему коллеге за сотрудничество и сообщал: «Наш коллега д-р Исаак Ньютон (муж славный и выдающихся знаний) просмотрел рукопись, указал несколько необходимых исправлений и добавил нечто и своим пером, что можно заметить с удовольствием в некоторых местах» [12, с. 21].

И. Барроу и Б. Пуллейн оказали большое влияние на формирование научных интересов, взглядов, на выбор жизненного пути молодого Ньютона. Далее круг его научных интересов, отражая запросы того времени, расширялся естественным путем. Однако достижения Ньютона в области классической механики, математического анализа, оптики, небесной механики имели революционное значение. Позднее они стали отправной точкой для формирования современного научного мировоззрения и сделали Ньютона одним из самых выдающихся людей в истории мировой науки.

В 1687 г. Ньютон издал свой знаменитый трактат «Математические начала натуральной философии»[1], ставший итогом более чем двадцатилетних размышлений автора об устройстве мироздания, о возможности строгого обоснования законов природы, законов движения тел математическими средствами. Размышлений, навеянных изучением идей далеких предшественников, трудов Галилея, Декарта, Роберваля, Борелли, Уоллиса, Меркатора, Гюйгенса, Рена, Гука. Как некогда Платон, Аристотель, Евклид, Декарт в этом сочинении Ньютон пытался заложить основы целостной теории — философии естествозна-

[1] До этого он был профессором греческого языка.

[2] Тьютором, то есть наставником Ньютона-студента, был профессор греческого языка Бенджамин Пуллейн, под руководством которого в январе 1695 г. Ньютон окончил университет со степенью бакалавра искусств.

[1] Инициатором издания «Начал» был Э. Галлей.

ния (точнее физики). Однако делал он это языком не философских, а физико-математических понятий. Как и большинство его предшественников и современников, он стремился к предельной ясности понятий, постановок задач, максимальной общности методов и получаемых результатов. По традиции эпохи он придерживался *аксиоматического* метода построения теории и геометрических доказательств. А в арсенале математики второй половины XVII в. были уже не только методы алгебры и евклидовой геометрии, но и «геометрии бесконечно малых», которой пользовались Уоллис, Паскаль, Гюйгенс, Лейбниц и в развитие которой Ньютон внес свой значительный вклад.

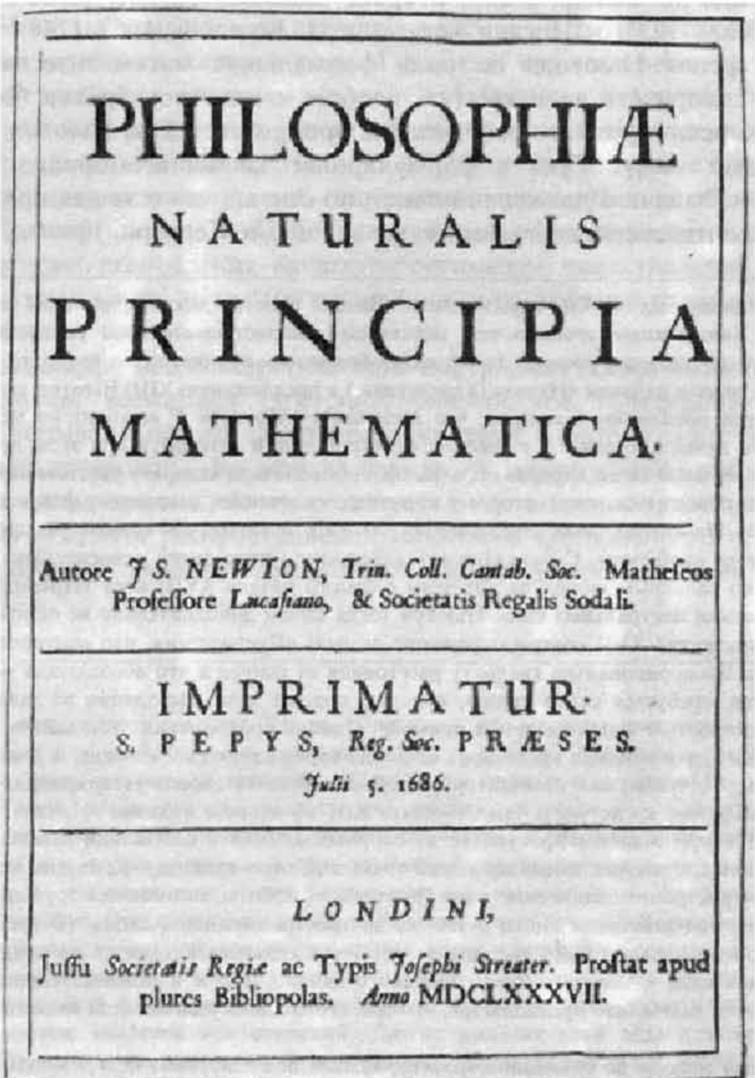
«Начала» Ньютона состоят из трех книг, главной из которых автор считал последнюю — «О системе мира», — где строится научная картина мира, формулируется закон всемирного тяготения и получается математическое выражение для силы взаимного притяжения тел — «силы, что движет Мирами». Рассмотренные здесь задачи движения небесных тел (планет и их спутников) представляли большой интерес и во многом определили бурное развитие небесной механики и астрономии XVIII в.

Первые две книги «Начал», имеющие одинаковое название «О движении тел», являются теоретическим фундаментом третьей. Но как основы теоретических построений Ньютона, именно они и представляют для нас наибольшее значение. Особенно предварительный раздел («Предисловие автора», «Определения», «Аксиомы или законы движения») первой книги[1], в котором сосредоточены основные механические понятия и законы, составившие основу классической механики. На первый взгляд может показаться странным: то, что сейчас в первую очередь ставится в заслугу Ньютону, сам автор не считал самым важным. Но в действительности в этом нет ничего удивительного. Ньютон пользовался известными для его современников понятиями, законами, естественно, не подозревая о тех далеко идущих последствиях, к которым привели сделанные им уточнения понятий, добавления к законам, его собственные взгляды на механику Галилея, Декарта, Уоллиса, Гюйгенса.

Ньютон очень основательно подошел к построению своей динамики. Но, тем не менее, в «Началах» у него нет определения одной из

[1]Во второй книге рассматриваются задачи механики жидкости и газа, движение тел с учетом сопротивления среды. По словам К. Трусделла, эта книга является «полностью оригинальной, и многое в ней ошибочно» [296, с. 91].

Исаак Ньютон



PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Титульный лист первого издания «Начал» Ньютона основных кинематических характеристик — *скорости*. Это означает, что сложившееся к тому времени понятие скорости было общепринятым и, с его точки зрения, не нуждалось в определениях[1]. Как уже отмечалось, эти представления о скорости не совпадают с современными. В первом предварительном разделе первой книги даются определения массы, количества движения, инерции, приложенной и центробежной сил.

«**Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее**» [65, с. 23]. С современной точки зрения это определение представляется ущербным, так как масса определяется через плотность, то есть массу единицы объема. С исторической же точки зрения такое определение массы вполне логично, так как, следуя «корпускулярной философии» Декарта и Бойля, Ньютон считал, что плотность определяется количеством «первоначальных частиц» (атомов). Об этом свидетельствует детальная картина внутреннего строения вещества, изложенная им в приложениях к «Оптике»[2] («Вопросы»). Аналогичная точка зрения излагалась и в курсах физики конца XVII – начала XVIII вв. В частности, в очень популярном и многократно издававшемся[3] «Трактате по физике» [277] известного французского профессора Жака Рохо — активного проповедника картезианства. Таким образом, по сути, ньютоновская «масса» мало отличается от декартова «количества материи» и лейбницевой «величины тела», использовавшихся учеными до появления «Начал».

«**Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе**» [65, с. 24]. Декарт под количеством движения понимал произведение количества материи на скорость. Определения Ньютона и Декарта формально совпадают. Однако, как и Гюйгенс, Ньютон ясно осознавал векторный характер скорости, а значит, и количества движения, ставшего в его динамике основной мерой движения. «**Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямо-**

[1]Более подробно об этом — в работах Л. Л. Кульвецаса [51, 52].

[2]Издана в 1704 г.

[3]Во Франции переиздавался почти 60 лет (с 1671 по 1730 гг.), в Англии с 1697 по 1718 г. издавался четыре раза [187, с. 263].

линейного движения» [65, с. 25]. Ньютон добавляет, что «эта сила всегда пропорциональна массе и если отличается от инерции массы, то только воззрением на нее. Из-за инерции материи… всякое тело лишь с трудом выводится из состояния покоя или движения. Поэтому **«врожденная сила» могла быть весьма вразумительно названа «силой инерции»** [65, с. 25]. Ньютон подчеркивает, что эта сила проявляется как «сопротивление» и как «напор». «Сопротивление приписывается обыкновенно телам покоящимся, напор — телам движущимся» [65, с. 26]. То, что Ньютон называет инерцию тел силой, — вполне в духе времени. Об этом свидетельствует и лейбницева теория сил. Сам термин «сила» использовался в механике со времен Аристотеля, последовательно принимая различные смысловые оттенки, начиная с простейшего синонима — *величина.* Гораздо ближе к современному следующие два определения силы.

«**Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения**» [65, с. 26]. Ньютон подчеркивает, что в отличие от «врожденной силы» «приложенная сила» «проявляется единственно только в действии и по прекращении действия в теле не остается». В теле остается только врожденная сила инерции. «**Происхождение приложенной силы может быть различное: от удара, от давления, от центростремительной силы**».

«**Центростремительная сила есть та, с которою тела к некоторой точке, как и к центру, притягиваются, гонятся или как бы то ни было стремятся**» [65, с. 26]. По Ньютону, «такова сила тяжести, под действием которой тела стремятся к центру Земли; магнитная сила, которою железо притягивается к магниту, и та сила, каковою бы она не была, которою планеты постоянно отклоняются от прямолинейного движения и вынуждаются обращаться по кривым линиям. Камень, вращаемый в праще, стремится удалиться от вращающей пращу руки и этим своим стремлением натягивает пращу тем сильнее, чем быстрее вращение, и как только ее пустят, то камень улетает. Силу, противоположную сказанному стремлению… я и называю центростремительной» [65, с. 27].

Ньютон различает три рода величин в центростремительной силе: *абсолютную, ускорительную* и *движущую.* «Абсолютная величина центростремительной силы есть мера большей или меньшей мощности самого источника ее распространения из центра в окружающее его пространство» [65, с. 27]. «**Ускорительная величина центростремительной силы есть ее мера, пропорциональная той скорости, которую она производит в течение данного времени**» [65, с. 28]. «**Движущая величина центростремительной силы есть ее мера, пропорциональная количеству движения, которое ею производится в течение данного времени**» [65, с. 28]. «**Эти понятия**, — добавляет Ньютон, — **до́лжно рассматривать как математические, ибо я еще не обсуждаю физических причин и места нахождения сил**» [65, с. 28].

Отдельное определение центростремительной силы потребовалось в связи с особым характером ее действия. В отличие от «контактных» сил удара, давления, упругости, она действует на расстоянии, постоянно меняет свое направление и величину, как следствие изменения скорости. В результате анализа было выяснено, что независимо от происхождения, от природы центростремительной силы, ее действие на тело в данной точке может быть измерено либо «ускорительной величиной», то есть «приложенной» силой, рассчитанной на единицу массы, либо самой «приложенной» силой, названной «действующей величиной». Понятие силы является одним из важнейших в механике Ньютона, целью которой было «**...по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления**» [65, с. 3].

Далее Ньютон приводит пояснение понятий *времени, пространства, движения* — понятий общеизвестных, но в силу того, что они постигаются нашими чувствами, они требуют определений. При этом он делит эти понятия на «абсолютные и относительные, истинные и кажущиеся, математические и обыденные».

«Абсолютное, истинное, математическое время само по себе и по своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью.

Относительное, кажущееся, или обыденное время есть или точная, или изменчивая, постигаемая чувствами, внешняя, совершаемая при посредстве какого-либо движения мера продолжительности, употребляемая в обыденной жизни вместо истинного математического времени, как-то: час, день, месяц, год» [65, с. 30].

«Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным.

[12]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel oblique obliquo adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſq; determinationem componitur.

Lex. III.

[13]

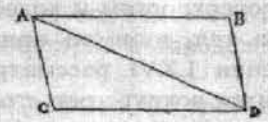
Lex. III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem : ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit Equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum, tantumq; impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunq; mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum ſed motuum, (ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis :) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.



Si corpus dato tempore, vi ſola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, & vi ſola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *B D* parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *B D* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *B D* ſive vis *N* imprimatur, ſive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa

Законы движения в первом издании «Начал»

Относительное есть его мера или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая определяется нашими чувствами по положению его относительно некоторых тел и которое в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное: так, например, протяженное пространство подземного воздуха или надземного, определяемых по их положению относительно Земли. По виду и величине абсолютное и относительное пространство одинаковы, но численно не всегда остаются одинаковыми» [65, с. 30].

«Как неизменен порядок частей времени, так неизменен и порядок частей пространства. ...время и пространство составляют как бы вместилища самих себя и всего существующего» [65, с. 32].

«Место есть часть пространства, занимаемая телом, и по отношению к пространству бывает или абсолютным, или относительным» [65, с. 31].

«Во времени все располагается в смысле порядка последовательности, в пространстве — в смысле порядка положения. По самой своей сущности они суть места, приписывать же первичным местам движения нелепо. Вот эти-то места и суть места абсолютные, и только перемещения из этих мест составляют абсолютные движения» [65, с. 32].

Со времен Ньютона представления о времени — об одной из основных научных и житейских категорий — в классической механике остаются практически неизменными. Определить это понятие через какие-то более ясные и более фундаментальные категории не удается, поэтому, как правило, ограничиваются перечислением установленных свойств: время непрерывно, всегда и везде одинаково, течет в одном направлении, не зависит от влияния природы, человека или технических средств. Первая попытка пересмотра сложившихся представлений была связана с появлением теории относительности А. Эйнштейна. В 70-х гг. двадцатого столетия профессор Николай Александрович Козырев (первооткрыватель вулканизма на Луне) в своей теории текущего на планете Земля времени утверждал, что время 1) обладает направленным ходом и плотностью; 2) поглощается и излучается материальными телами; 3) экранируется, заслоняется (стеклом, металлом) или отражается (зеркалом); 4) не преломляется; 5) не распространяется, как свет, появляется сразу во всей Вселенной; 6) взаимодействуя с веществом звезд, является источником их энергии; 7) не является материальным носителем. Вряд ли эти утверждения можно считать истиной в последней инстанции. Наука о Времени делает следующие шаги, развивающие взгляды Ньютона.

Понятий *системы отсчета* или *инерциальной системы* в «Началах» нет, но по существу координатная система используется. Роль координат выполняют взаимные расстояния тел или точек. Кроме этого, Ньютон вводит понятие «места», которое, в отличие от «положения»[1] тела и «объемлющей его поверхности», имеет определенную величину.

«Абсолютное движение есть перемещение тела из одного абсолютного его места в другое; относительное — из относительного в относительное же» [65, с. 31]. «По положениям и расстояниям предметов от какого-либо тела, принимаемого за неподвижное, определяем места вообще, затем и о всех движениях судим по отношению к этим местам, рассматривая тела лишь как переносящиеся по ним. Таким образом, вместо абсолютных мест и движений пользуются относительными...» [65, с. 32]. Далее автор говорит о реальности абсолютного места и абсолютного движения и о сложности разграничения абсолютных и относительных понятий. «Причины происхождения, которыми различаются истинные и кажущиеся движения, суть те силы, которые надо к телам приложить, чтобы произвести эти движения. Истинное абсолютное движение не может ни произойти, ни измениться иначе, как от действия сил, приложенных непосредственно к самому движущемуся телу, тогда как относительное движение тела может быть и произведено и изменено без приложения сил к этому телу...» [65, с. 34].

Введенные понятия позволили Ньютону сформулировать во втором предварительном разделе «аксиомы или законы движения».

Закон I. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не принуждается приложенными силами изменять это состояние.

Закон II. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

Закон III. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

После законов идут Следствия: правило параллелограмма для сложения сил[2], законы сохранения количества движения и скорости цен-

---

[1] Понятие «положение» у Ньютона ассоциируется с ориентацией тела в пространстве.

[2] **«При силах совокупных тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, в течение которого оно описало бы стороны такового**

тра тяжести[1], механический принцип относительности. Вводная часть «Начал» заканчивается изложением элементов теории удара. Ньютон замечает, что результаты Гюйгенса и Рена верны только для «абсолютно твердых или вполне упругих тел». Результаты же экспериментов самого автора показывают, что скорость тела после удара меньше его скорости до удара. Ньютоновская идея введения коэффициента восстановления (в теории удара) позднее стала общепринятой, а установленные им значения коэффициента для некоторых соударяющихся тел близки к современным.

В силу научных традиций той эпохи, законы не имели математических выражений и формулировались только словесно. Это обстоятельство породило массу вопросов проницательных читателей. Особенно это касалось второго закона, который многочисленные комментаторы «Начал» упорно интерпретировали формулой

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

считая, что, говоря об изменении движения, Ньютон имел в виду изменение количества движения, а изменение — это производная. Если же под изменением автор понимал разность за некоторое время Δt, то тогда под силой понимался импульс силы $\vec{F}\Delta t$. Но все эти попытки «уберечь Ньютона от якобы сделанной им ошибки», как писал И. Б. Коэн, бессмысленны. Ньютон пользовался научными категориями своего времени, они были понятны его современникам. И только после Ньютона и благодаря ему стало возможным уточнение законов механики до современных представлений.

Ньютон был одним из первооткрывателей законов механики, автором окончательной редакции их текста. Но то, что он не был единственным и самым первым, ни в коей мере не умаляет его заслуг в формировании математической теории движения тел, в ее успешном приложении к решению многих актуальных проблем небесной и земной механики. Законы конкретных движений (движение планет, падение,

---

при раздельно действующих силах» [65, с. 55]. По мнению А. Н. Крылова, в современной терминологии — это правило параллелограмма для сложения количеств движения.

[1] «Следствие IV. Центр тяжести системы двух или нескольких тел от взаимодействия тел друг на друга не изменяет ни своего состояния покоя, ни движения; поэтому центр тяжести системы всех действующих друг на друга тел при отсутствии внешних действий и препятствий или находится в покое, или движется равномерно и прямолинейно» [65, с. 47].

движение по наклонной плоскости, удар, колебания), открытые его предшественниками и современниками, он обобщил на случай произвольных движений и взаимодействий тел. В этом суть одного из важнейших научных достижений Ньютона.

В отличие от Декарта, стремившегося к построению глобальной научной доктрины устройства Мира, Кеплер, Галилей, Уоллис, Гюйгенс, Ньютон и многие их современники сосредоточили свое внимание на решении конкретных проблем: движения планет и их спутников, движения тел на Земле, соударения и колебаний тел, влияния сопротивления среды… Идея всеобщего взаимного притяжения тел во второй половине XVII в. была если не общепринятой, то хорошо известной. Причина этого взаимодействия и его величина были неизвестны. На какое-то время ответы на вопросы давала гипотеза эфирных вихрей Декарта. Но даже после дополнительных «реконструкций» последователями Декарта (в том числе Гюйгенсом) она казалась слишком сложной и мало убедительной. Следуя Галилею, Ньютон предложил не обсуждать вопрос о причинах притяжения тел, а ограничиться определением величины, то есть силы этого взаимодействия. Ведь именно сила[1], по сложившимся представлениям, и является причиной и источником криволинейного и неравномерного движения.

Вопрос о величине силы притяжения Ньютон решает очень оригинальным чисто математическим методом. Движение планеты ассоциируется с круговым движением шарика под действием центростремительной силы (притяжения). В соответствии со вторым законом величина этой силы должна быть пропорциональна изменению количества движения. Если рассматривать движение по окружности как предельное движение по вписанной в окружность ломаной линии, то движение по ломаной можно рассматривать как последовательность прямолинейных движений с изменением направления скорости в угловых точках. Проведя через угловую точку ломаной касательную к окружности, можно считать, что шарик, двигавшийся по звену ломаной, в угловой точке ударяется о касательную и продолжает движение в другом направлении (по следующему звену ломаной). Из законов абсолютно упругого удара и геометрических соображений, после предельного перехода от ломаной к окружности Ньютон получает выражение для центробежной (выталкивающей шарик-планету в наружную сто-

[1] «Мертвая сила» — у Галилея и Лейбница, «движущая сила» — у Ньютона.

рону орбиты) силы, прекрасно согласующееся с результатом Гюйгенса. Но для удержания шарика на его орбите необходима противоположно направленная и равная по величине центростремительная сила. Далее он показывает, что отношение центростремительных сил планет в силу третьего закона Кеплера обратно пропорционально квадратам радиусов орбит. Таким образом получено ядро будущего закона всемирного тяготения.

Говоря современным языком, Ньютон показал, что центростремительное ускорение определяется формулой

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

Но, по теории Галилея, тело, падающее с высоты $h = a\frac{t^2}{2}$ за одну секунду, должно иметь ускорение a, численно равное $2h$.

Проведенные в 1666 г. расчеты по этим формулам показали расхождение результатов. Но после уточнения Ж. Пикаром величины радиуса Земли[1] Ньютон получил совпадение результатов, подтверждающее верность его вывода о величине силы взаимного притяжения тел.

Детальный анализ «Начал», как и всех особенностей научного мировоззрения И. Ньютона, выходит за рамки данной работы. Однако следует отметить, что особая роль «Начал», взгляды Ньютона на устройство мироздания, на содержание основных физических законов, на роль математики в создании новых научных теорий были настолько значительными в истории классической механики, что несмотря на пристальное внимание историков науки к личности Ньютона и его творчеству[2], эта тема заслуживает дальнейших исследований.

«Начала» — это не только один из истоков современной теоретической механики, но и блестящий пример наглядного решения механико-математическими методами огромного количества не только интересных, но и практически важных проблем. Задачи, решаемые Ньютоном во всех трех книгах его «Начал», составили фундамент многих самостоятельных разделов современной науки: небесной механики,

[1] В 1675 г. Жак Пикар опубликовал свои результаты о новой величине радиуса Земли в «Philosophical Transactions», но Ньютон, занятый в этот период оптическими исследованиями, узнал о них от секретаря Лондонского Королевского общества Г. Ольденбурга позднее.

[2] Из российских наиболее известны исследования А. Н. Крылова, С. И. Вавилова, В. С. Кирсанова.

баллистики, теории колебаний, механики сплошной среды и других. В отличие от механических теорий предшественников механика Ньютона — это первый образец новой механики, построенной на фундаменте собственного понятийного аппарата, единых физических законов, математического аппарата геометрии и исчисления бесконечно малых. Это инструмент для решения многих задач техники и естествознания.

Была ли альтернатива ньютоновскому развитию механики на основе понятия количества движения? На этот вопрос можно ответить утвердительно. Известно, что в основу построения математической модели вместо второго закона Ньютона может быть положена теорема об изменении кинетической энергии. Если в качестве меры механического движения принять кинетическую энергию, а мерой взаимодействия тел считать не силу, а работу силы на некотором перемещении, то и второй закон, и теорема об изменении энергии могут быть сформулированы единообразно: изменение меры движения точки равно мере взаимодействия ее с окружающими телами.

Этот второй путь формирования механики был наглядно продемонстрирован Лагранжем в его знаменитой «Аналитической механике» через сто лет после выхода «Начал». И этот путь пролегал через творчество Галилея, Декарта, Гюйгенса, Лейбница, И. и Д. Бернулли, Даламбера. Вывод о сохранении величины, называемой ныне *кинетической энергией*, для движения точки в центральном поле сил мы видим в «Началах» (Книга первая, предложение XL). Однако ни Ньютон, ни еще ранее Гюйгенс в его *теории удара* не придавали этому результату особого значения, статуса закона. И только Лейбниц, ссылаясь на авторитет Галилея, предложил считать мерой движения не декартово количество движения, а величину mv^2, названную им «живой силой». Он же первым и сформулировал закон сохранения «живых сил», и дал словесную формулировку теоремы об изменении кинетической энергии. Работы И. и Д. Бернулли укрепили в механике понятие «живой силы» и сделали естественным переход от второго закона к теореме энергии в ее математическом выражении.

Понятие же работы силы, то есть произведение силы на ее перемещение по линии действия, является одним из старейших в механике, одним из основных в «кинематической статике». Оно использовалось для определения условий равновесия тел и систем тел. Поэтому представляется вполне естественным использование его и в выражении условий движения тел. Ведь и равновесие, и движение тел осуществляется под действием сил. Но этот факт был осмыслен не сразу.

Путь формирования механики на основе понятия кинетической энергии («живой силы») был как бы запасным. Для подтверждения своих результатов И. Бернулли показывал, что их можно получить и из второго закона Ньютона. Но после Даламбера, установившего не одинаковость, но равноценность обеих мер движения, Лагранж убедительно показал, что оба пути построения механики равноправны.

В континентальной Европе «Начала» были встречены напряженным молчанием. Ньютон мало заботился о публикации своих научных результатов[1], и его имя не было столь популярным, как в следующие века. Тираж первого издания книги был невелик. Содержание книги, особенно математические доказательства, было трудным для понимания. Многие физические идеи Ньютона существенно отличались от ставших к тому времени привычными идей философии Декарта.

Через несколько десятилетий молчаливая оценка «Начал» сменяется одобрением, переходящим в восторг. Этому способствовали приоритетные споры[2] Ньютона с Гуком, Лейбницем и другими учеными, переиздание (1713, 1726) переработанных автором «Начал», включение важнейших ньютоновских идей в английский перевод[3] «Трактата по физике» Рохо, издание Гравесандом в 1726 г. книги «Математические элементы натуральной философии»[4] [197], выступления в поддержку ньютоновской теории Мопертюи (1732) и Вольтера (1738), издание «Механики» [92] Эйлера, перевод «Начал» на французский язык[5].

[1]Это привело к тому, что во второй половине жизни ему пришлось потратить много сил и времени для отстаивания своего приоритета в открытии закона всемирного тяготения, оптических законов, создании телескопа и исчисления бесконечно малых.

[2]Исторический анализ показывает, что в приоритетной борьбе он не всегда был объективен и справедлив к своим научным оппонентам. Особенно после 1703 г., когда Ньютон занял высокий пост Президента Лондонского Королевского общества.

[3]Осуществлен в 1723 г. Джоном Кларком.

[4]Виллем Якоб Стром с'Гравесанде — голландский математик, секретарь голландского посольства в Лондоне (1715-1717), профессор Лейденского университета (1717–1742), член Лондонского Королевского общества (с 1715 г.). В этой книге подробно излагается содержание «Начал» с минимальным использованием математики.

[5]Перевод по инициативе Вольтера и при участии А. К. Клеро осуществила маркиза Г. Э. дю Шателе в 1759 г.

Механика Ньютона еще далека от современной классической механики. Но своим творчеством Ньютон подвел итог многовековых поисков всеобщих законов движения и взаимодействия тел, заложив, тем самым, основы дальнейшего развития научного естествознания и техники в русле математического моделирования.

Важную роль в формировании основ механики играли и идеи современника Ньютона–Лейбница. Научное наследие Ньютона и Лейбница стало основой для дальнейшего развития классической механики в трудах Вариньона, Я., И. и Д. Бернулли, Мопертюи, Эйлера, Даламбера и Лагранжа.

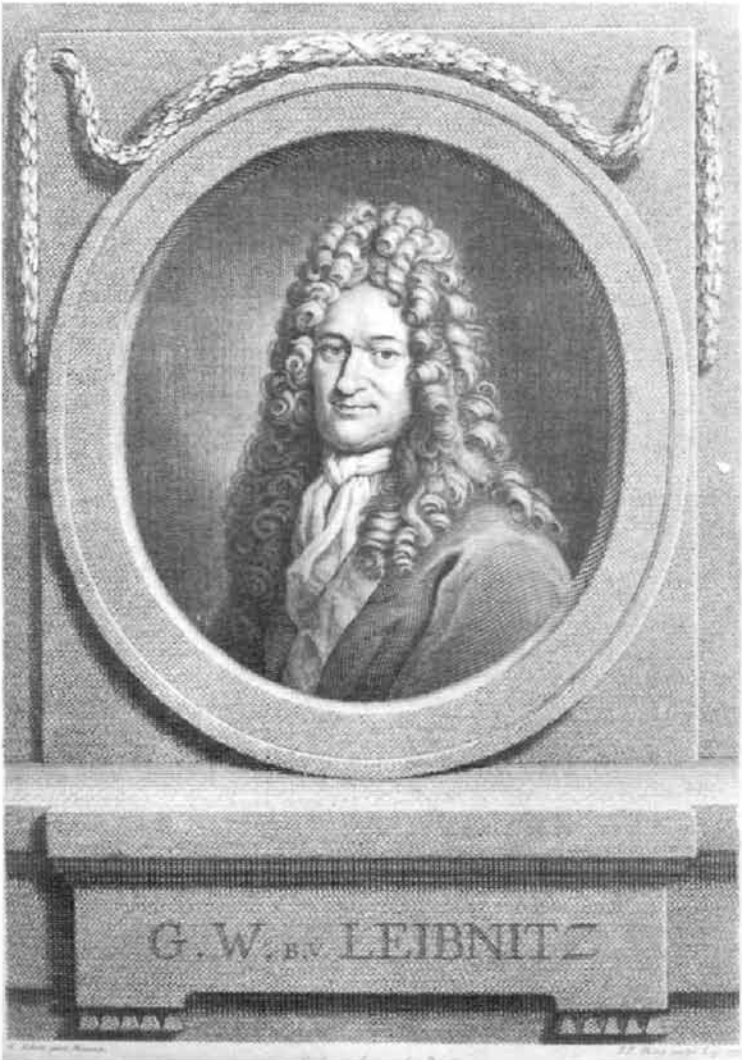
3.2. Теория сил в философии Г. В. Лейбница

Бурные политические (буржуазные революции), экономические, научные события XVII в. нашли отражение в формировании целого ряда новых философских доктрин, претендовавших на роль теоретической основы нового мировоззрения. Англичане Фрэнсис Бэкон и Томас Гоббс, французы Рене Декарт, Пьер Гассенди и Блез Паскаль, нидерландец Барух Спиноза, англичане Джон Локк, Исаак Ньютон, немец Готфрид Вильгельм Лейбниц стали основоположниками философских течений, захвативших умы просвещенной Европы и получивших дальнейшее развитие в следующих столетиях.

Формирование науки нового времени, естественно, происходило в рамках популярных философских концепций. Таким образом, теоретический аппарат новой механики создавался не только параллельно с рождением новой математики переменных величин и не только для утилитарного решения актуальных естественно-научных и технических проблем, но и под влиянием философских позиций ее создателей. Это наглядно подтверждается вкладом в механику Лейбница — одного из выдающихся философов конца XVII – начала XVIII вв., основоположника дифференциального и интегрального исчисления.

Лейбница нельзя исключать из списка основоположников теоретической механики хотя бы потому, что он является одним из родоначальников математики непрерывных величин и теории дифференциальных[1] уравнений, ставших основным аппаратом новой механики. Но его вклад не исчерпывается только этим. Теории движений и сил, ди-

[1]Термин, введенный Лейбницем.



Готфрид Вильгельм Лейбниц

намическая концепция механики, многолетний спор о «живых силах» и борьба с картезианским сохранением количества движения, обсуждение проблем механики с Гюйгенсом, Мальбраншем, Уоллисом, Я. и И. Бернулли, Лопиталем не остались без внимания выдающихся математиков, механиков и астрономов следующего столетия — Клеро, Мопертюи, Эйлера, Даламбера, Лагранжа, Лапласа.

Одной из сложностей в изучении научного наследия Лейбница является изменчивость его философской позиции по мере его последовательного проникновения в мир идей Аристотеля, Бэкона, Галилея, Декарта, Гоббса, Гюйгенса. Диапазон этой изменчивости — от принятия некоторой концепции до ее полного отвержения, включая попытки примирения, сближения крайностей. Второй особенностью теоретических построений Лейбница является их метафизичность, проистекающая из убежденности в примате мира Идей над миром Природы.

В 1671 г. Лейбниц представил Парижской академии наук эссе «Теория абстрактного движения». Эта была первая часть сугубо философского сочинения «Новая физическая гипотеза», в котором тело представляется как триединство геометрических, механических[1] и физических свойств; пространство — бесконечно делимая на реальные части протяженность, в которой существуют и «неделимые» или точки, не имеющие возможности расширяться, но состоящие из частей, между которыми нет расстояний; движение протяженно, непрерывно[2], и покой — это не некоторое его положение в пространстве, а нуль на бесконечности (времени); источником начала и окончания движения является conatus (усилие, напряженность, стремление), играющий в протяженности движения роль точки пространства, единичного усилия, измеряющегося расстоянием, пройденным за неделимый[3] отрезок времени; конатус в теле может быть не один, и они могут взаимодействовать; два конатуса могут быть заменены одним; все происходящее имеет причины.

Изучение движения, реальной скорости Лейбниц заменяет изучением тенденции к движению, виртуальной (возможной) скорости. Он формулирует законы соударения тел как правила изменения скорости

[1]Способность перемещаться.

[2]Гассенди считал движение дискретной последовательностью «покоев».

[3]Лейбниц использует понятие «неделимых» Кавальери, которое позднее привело его к понятию дифференциала. Понятие конатуса заимствовано у Гоббса.

после удара (игнорируя понятие количества движения), объясняет причину целостности тела взаимодействием конатусов его частей, а давление — «конатусом проникновения» одного тела в другое.

В том же 1671 г. Лейбниц направил Лондонскому Королевскому обществу вторую часть упомянутого сочинения под названием «Теория конкретного движения», где движение тел и их свойства объясняются действием эфира[1], заполняющего всю Вселенную. Солнечный шар испускает свет, принимаемый земным шаром. В соответствии с законами абстрактной теории оба шара совершают в эфире вращательное движение, обеспечивающее и их целостность, и их взаимную силу сцепления. Гравитация является следствием вращения эфира, и сила притяжения тела, по взглядам Лейбница, должна возрастать пропорционально квадрату его расстояния до центра Земли. Автор раскрывает природу тел (жидких, твердых, упругих, мягких, вязких и хрупких), объясняет процесс удара упругих тел по правилам Гюйгенса–Рена, законы отражения и преломления, изохронные колебания маятника, циркуляцию крови и физиологическое действие нервов на мускулы. Таким образом, эфир является и источником тяжести тел, и причиной движения планет, и фактором упругости тел.

Дальнейшие размышления приводят Лейбница к необходимости «...прибегнуть к силе, являющейся причиной движения и действующей между телами». «В природе есть нечто большее чисто геометрического, то есть протяженности и ее изменений. И для лучшего ее понимания необходимо связать несколько высших или метафизических понятий, таких как *субстанция, действие* и *сила*; и эти понятия приводят к тому, что все, влачащее жалкое существование, должно действовать взаимно, что все действующее должно испытывать некоторую реакцию, и, следовательно, покоящееся тело, приводимое в движение движущимся, изменит его направление и скорость» [187, с. 467].

Широко используемое Лейбницем понятие «протяженности» постепенно приобретает смысл «величины» тела, в которую вкладываются не столько геометрические размеры, сколько его прочие индивидуальные особенности. Внимательный анализ определений «протяженности», данных им в разных работах, убеждает в исключительной близости этого понятия ньютоновской массе. Точнее с массой сравни-

[1] Согласно Лейбницу, эфир пронизывает все тела природы, имеет божественное происхождение, порождает на Земле разнородные элементы (вода, воздух, земля).

вать лейбницеву «первичную материю» (materia prima)[1], наделенную «протяженностью», непроницаемостью и сопротивлением или инерцией (в смысле Кеплера). Все эти свойства считаются однородными и равномерно распределенными в теле. Тем самым Лейбниц вводит характеристики *пассивности*[2] *материи*.

Понятием, противоположным первичной материи, является «вторичная материя» (materia secunda) — материя, наделенная активностью. Понятие «сила», обобщающее первичную и вторичную материю, таким образом, включает «пассивную силу» (массу) и «активную силу», аналогичную душе живых существ и придающую движению реальность. В свою очередь «активные силы» подразделяются на «простейшие» (force primitive), присутствующие в любой материальной субстанции, и «производящие силы» (force dérivative), являющиеся результатом взаимодействия тел, «...что некоторые называют «импетусом», то есть конатусом или стремлением к определенному движению...» [187, с. 471].

Позднее Лейбниц пополнил свою теорию сил еще двумя понятиями — *мертвая сила* и *живая сила*. Мертвая сила — это, например, давление, которое или производит движение, или стремится его произвести. Живая сила существует в движении. Но между этими силами есть взаимосвязь: всем телам присуща собственная сила, между движением и покоем нет качественного различия, живая сила возникает из импульсов мертвой силы[3]. Но что же является мерой живой силы или каково ее математическое выражение? Для Лейбница очевидна невозможность вечного движения, позднее получившая выражение закона сохранения энергии. В соответствии с галилеевым законом высота и квадрат скорости падения тела пропорциональны. Это означает, что и для подъема тела на высоту h ему нужно придать импульс, пропорциональный квадрату скорости. Таким образом, мера живой силы должна определяться квадратом скорости тела. Но Лейбниц не ограничивается только определением живой силы. Он использует это понятие для формулировки общего закона механического движения — принци-

[1] Порой он и называл ее массой (masse) [187, с. 469]. Особенно в более поздних работах.

[2] Пассивность материи, по Лейбницу, необходима для избежания всемирного хаоса, неизбежного при отсутствии сопротивления всем причинам движения.

[3] Это напоминает «импетус» французских философов и итальянских механиков средневековья.

па сохранения живых сил, впервые изложенного в короткой (6 страниц) работе, опубликованной в «Acta eruditorum» в 1686 г. «Краткое доказательство удивительной ошибки Декарта и других относительно закона природы, согласно которому, как полагают, Господь всегда сохраняет одно и то же количество движения, но который разрушает механику».

Эта публикация стала отправной точкой в затянувшемся на десятилетия «споре о живой силе» или дискуссии о мерах механического движения. Важность этого события в формировании идеологии новой механики подтверждается составом участников дискуссии: Гюйгенс, Папен, Мальбранш, Арнольд, Германн, И. и Д. Бернулли, Мопертюи, Клеро, Кениг, Вольтер, Эйлер, Даламбер[1]. Суть полемики состояла в определении математического выражения меры движения. Пользуясь современными обозначениями, $m\vec{v}$ (по Декарту) или mv^2 (по Лейбницу)? Тот или иной ответ на поставленный вопрос определял не только математический облик будущей теории движения тел, круг решаемых ею задач, но и затрагивал фундаментальные философские положения о сущности движения, его причинах, о соотношении физического и метафизического, о познаваемости Природы.

В формулировке Декарта, без определения понятия массы и осознания векторного характера скорости, закон сохранения количества движения был ошибочен. Впервые Лейбниц писал об этом Галуа в декабре 1676 г., затем в январе 1680 г. Филиппи: «В физике Декарта имеется большая ошибка; она состоит в том, что его правила движения или законы природы, которые должны быть фундаментом, в большинстве своем ошибочны. Этому есть доказательство. И его великий принцип о том, что количество движения в мире сохраняется, является заблуждением. То, что я говорю, признано наиболее талантливыми людьми Франции и Англии» [187, с. 474]. В названной работе 1686 г., на смену принципу Декарта, Лейбниц предлагает свой принцип сохранения: «Разумно говорить, что в природе сохраняется одна и та же сумма движущих сил, что эта сумма не убывает, так как мы никогда не видели, чтобы тело потеряло какую-то силу, которая не трансформировалась бы в другую, и тем более, что эта сумма не возрастает, так как вечное движение нереально и никакая машина, а следовательно и весь мир, не может сохранять свою силу без новых импульсов извне» [187, с. 474]. Лейбниц принимает идею сохранения в качестве

[1] Любопытные подробности дискуссии изложены во втором издании книги Монтюкла «История математики» [258].

основного принципа механики и ищет истинную величину, определяющую стабильность мира.

Декартова идея сохранения количества движения имеет свои истоки в единстве Бога и «золотом правиле» механики, определяющем условия равновесия рычага. Лейбниц апеллирует к галилеевым законам падения тел и гюйгенсовой теореме о сохранении mv^2 до и после удара абсолютно упругих тел. Гюйгенс, естественно, откликнулся на публикацию Лейбница, но его оценка была весьма осторожной. Оспаривая мнение Лейбница о том, что Декарт вывел свой принцип из эквивалентности[1] количества движения движущим силам, Гюйгенс считает, что «...если допустить эту эквивалентность и таким способом получить его (Декарта) природный закон количества движения, то отсюда не следует, что закон недостаточно доказан или вовсе не доказан. Для утверждения его ошибочности господину Лейбницу необходимы другие доказательства» [187, с. 475]. И далее считает, что Лейбниц может претендовать только на формулировку своего принципа сохранения движущих сил (без доказательства его справедливости).

Все участники дискуссии о мере движения ссылались на авторитет Декарта, Галилея, Гюйгенса, Лейбница, обсуждали результаты экспериментов (в том числе мысленных) в задачах об ударе и падении тел. И после смерти Лейбница его сторонники (Германн, И. и Д. Бернулли, Бильфингер, Вольф) продолжали спор с картезианцами. Но кроме приверженцев одной меры движения появились ученые, стремившиеся занять какую-то промежуточную позицию[2]. Именно этот дуализм, состоящий в том, что выбор меры движения полностью определяется постановкой задачи, укоренился в механике после издания «Динамики» Даламбера и положил конец дискуссии.

Благополучный исход многолетней дискуссии способствовал формированию сторонниками Лейбница новых механических понятий кинетической, потенциальной, полной механической энергии, прочно укоренившихся в механике только в XIX в. И. Бернулли, подкрепляя теоретические результаты экспериментами, использовал закон живых сил

[1]До Декарта в «схоластической» механике эквивалентность F и mv рассматривалась как определение движущей силы. Из этой эквивалентности можно сделать вывод о постоянстве количества движения (mv) при постоянстве движущих сил (F). Возможно, это противоречие и привело к необходимости поиска иной связи между F и mv. Связи, впервые высказанной Галилеем, а затем Ньютоном в его втором законе.

[2]Среди них был и молодой Кант.

для решения задач о колебаниях физического маятника, о движении тяжелой точки, об упругом ударе. Д. Бернулли положил этот закон в основу своей знаменитой «Гидродинамики» (1738), а в работе «Замечания о принципе сохранения живых сил, рассматриваемом в общем смысле», опубликованной в трудах Берлинской академии за 1748 г., фактически формулирует закон сохранения механической энергии для системы точек в виде

$$\sum m_k v_k^2 = -2 \sum m_k \int \xi_k \, dx,$$

где m_k — массы, v_k — скорости, ξ_k — «ускоряющие силы» точек, сумма правой части — сумма работ сил. При этом утверждается, что живая сила системы точек не изменяется при освобождении точек от связей, именуемых ныне *идеальными*. Таким образом, уточнение закона сохранения живой силы стало источником формирования в механике понятия связи и принципа освобождения от связей, положенного позднее в основу механики несвободного движения тел. Утверждение в механике двух выражений меры движения способствовало формированию ее математического аппарата по двум направлениям: с позиций изменения количества движения и с позиций изменения живой силы.

Очень неоднозначное понятие силы в механике Лейбница, как и в физике Аристотеля, было одним из важнейших. Сила — в древнегреческом языке — dynamis[1], а dynamikos — относящийся к силе или силовой. Поэтому свою механику Лейбниц называл динамикой. Позднее этим термином стали пользоваться многие ученые[2], а после «Динамики» (1743) Даламбера он окончательно укоренился в механике как название теории движения тел под действием сил. Наиболее полно динамические воззрения Лейбница выражены в работах «Применение динамики к законам движения, где показано, что сохраняется не количество движения, а абсолютная сила или количество движущего действия», «Динамика сил и законов природы тел»[3] (1691) и «Образец

[1]Dynamis — латинский перевод греческого $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\zeta$.

[2]И. Бернулли, Клеро, Монтиньи, Дарси, Куртиврон, Д. Бернулли, Эйлер, Лагранж, Пуассон.

[3]Впервые опубликованы в 1860 г., но их содержание было известно при жизни автора, благодаря его обширной переписке с современниками. Здесь Лейбниц дает одно из первых (раньше него Уоллис, 1669) определений скорости: «Скорость в произвольном движении есть аффект движущегося тела, пропорциональный длине,

динамики» («Specimen Dynamicum»), опубликованной в 1695 г. в «Acta eruditorum».

В первой из работ автор указывает, что сомнения в истинности принципа сохранения количества движения закрались даже у таких ярых сторонников Декарта, как Мальбранш. Появились сомнения не только в сохранении количества движения, но и в существовании какой-либо иной величины, способной оставаться неизменной. Далее автор вводит понятие «прогресса» (progres), как количества движения в определенном направлении, пропорционального, по Гюйгенсу, скорости центра тяжести. Понятие «прогресса» позволяет установить, что «более всего повлияло на смешивание силы с количеством движения злоупотребление статической доктриной. В статике известно, что два тела находятся в равновесии, если, в соответствии с их положением, их скорости обратно пропорциональны массам или весам, или когда они имеют одинаковое количество движения» [187, с. 482].

Лейбниц утверждает, что сохранение силы в статике является следствием другого принципа. Для пояснения своего принципа он вводит понятия: «насильственного результата действия» (l'effet violent) как меры абсолютной силы[1]; «абсолютной живой силы» (la force vive absolut), которая оценивается производимым ей насильственным результатом действия; «движущего действия» (l'action motrice), определяемого «формальным эффектом» (l'effet formel) или тем, что изменено движением (для равномерного поступательного движения тела, это произведение массы на длину пути ее перемещения), и «энергией» или быстротой его реализации. А сам принцип состоит в том, что «...одно и то же действие сохраняется в равные времена» [187, с. 485].

Для иллюстрации своего принципа Лейбниц обращается к теории удара тел и формулирует три «уравнения удара»:

1) выражающее сохранение причин удара или взаимных скоростей (в предположении абсолютной упругости тел);

2) выражающее сохранение общего «прогресса» двух тел;

3) выражающее сохранение общей абсолютной силы или движущего действия.

которую оно пробежало бы, если бы в течение данного времени его движение продолжалось с тем же аффектом. Аффект же тела остается тем же, если в равные времена оно пробегает равные расстояния; в таком случае движение называется равноскорым» [52, с. 37].

[1]Понятие фактически совпадает с современной потенциальной энергией.

В этих уравнениях, как подчеркивает автор, нет необходимости следить за изменением знаков в связи с изменением направления скоростей, так как в уравнения входят квадраты скоростей. Кроме этого, только два уравнения независимы, а третье является их следствием.

Одним из важнейших свойств тел природы Лейбниц считает эластичность, объясняемую наличием в них очень «легкой жидкости» («эфира»). И вторым основным постулатом природы, после закона сохранения движущего действия, он называет закон непрерывности, продолжаемости (la loi de la continuité), в соответствии с которым «все изменения должны происходить непрерывно (par des passages inassignable), но не скачками» [187, с. 486].

Возвращаясь к понятиям, следует сказать, что Лейбниц уверенно пользуется понятием *массы*. Он ввел в механику понятие *действия*, определение которого, впрочем, не достаточно конкретно. Но если все-таки обратиться к определениям[1] и логике автора, то, обозначив действие буквой L, можно считать, что

$$L = mvs = mv^2t.$$

Несмотря на некоторую неопределенность, понятие действия прочно укоренилось в механике, благодаря публикации Вольфа в первом томе (1726) петербургских «Комментариев» и его развитию в трудах Мопертюи, Дарси, Эйлера, Лагранжа, Гамильтона, где оно рассматривалось не с позиций его стационарности, а как критерий экстремальности движения. Это способствовало появлению нового раздела математики — *вариационного исчисления*, позволившего сформировать новый взгляд на принципы построения механики и методы решения задач.

Прочие его понятия не вошли в арсенал классической механики и их математическое выражение весьма неопределенно. Это обстоятельство делает не достаточно ясной и формулировку самого принципа. В письме Вольфу в начале 1711 г. Лейбниц писал о принципе, что «...его аргументация является чисто метафизической и проникает в природу явлений глубже, чем все доказательства, которые пытались привести физики в области движения» [187, с. 488].

Вторая из названных работ (1695) впервые явно устанавливает связь между живыми и мертвыми (или статическими) силами. Лейб-

[1] «...движущее действие есть то, что получается при умножении формального эффекта на скорость...» [52, с. 37]. Формальный эффект у Лейбница — это произведение массы тела на пройденный путь.

ниц пишет, что древние «из механики знали только *статику* или «науку о мертвых силах», в которой изучается только первый конатус тел между собой, до того как они получат *импетус*, то есть конечное количество движения» [187, с. 489]. К мертвым силам, которые могут быть только побуждением движения, он относит *центробежные, гравитационные* (центростремительные) и *силы упругости пружин.* «При ударе, производимом падающим тяжелым телом или натянутым луком, сила является живой и порождается бесконечностью непрерывных влияний мертвой силы» [187, с. 490].

Далее Лейбниц поясняет: «...в случае тяжелого тела, получающего в каждый момент падения увеличение, равное бесконечно малой скорости, можно рассматривать одновременно мертвую и живую силы; скорость увеличивается как время, абсолютная сила[1] — как квадрат времени; по аналогии с нашей геометрией или с нашим анализом, побуждения — это dx, скорость — x и силы — x^2 или $\int x\,dx$. Итак, закон статики использует дифференциалы, а закон динамики — интегралы. Таким образом, мы обнаруживаем, что природа устроила очень элегантное примирение между законом равновесия противоборствующих тел, которое *относительно*, и законом эквивалентности причин и последствий (эффектов), которое *абсолютно* и осуществляется последовательным переходом причин в последствия с избежанием каких-либо скачков. Этот переход можно получить только непрерывными или бесконечно малыми увеличениями, то есть с помощью мертвых сил» [187, с. 490].

Сейчас можно только догадываться об истинных взглядах Лейбница, но из законов Галилея $v = gt$, $h = g\dfrac{t^2}{2}$ (в современной трактовке), к которым он апеллировал, легко получить равенство $mgh = \dfrac{mv^2}{2}$, устанавливающее связь между приложенной к двигающейся точке силой (mg) и кинетической энергией. Именно так И. Бернулли записывал закон сохранения живых сил. Современный закон сохранения полной механической энергии, выражаемый записанным равенством, является эффективным методом математического решения многих задач механики. Его физическая сущность, новая, отличная от ньютоновской, связь движения с порождающими его причинами впервые была сформулирована Лейбницем.

[1] В смысле Лейбница, то есть живая сила.

3.3. Механико-математические работы Г. В. Лейбница

Как выдающийся математик конца XVII в., Лейбниц не мог оставить без внимания традиционные задачи механики, занимавшие умы большинства геометров этого периода. Конкретным задачам статики, кинематики и динамики движения планет и падающих тел посвящено значительное количество работ, продолжающих исследования Галилея, Кеплера, Гюйгенса, Ньютона, Я. и И. Бернулли.

В работе «Доказательство правила, полученного в статике, но часто подвергаемого сомнению, касающегося давления тяжелого тела на наклонную плоскость, и решение элегантной проблемы, предложенной в «Acta» в ноябре 1684 г. относительно сферы, расположенной между двумя наклонными, перпендикулярными плоскостями, с определением давления, оказываемого на каждую из двух плоскостей», опубликованной в 1684 г. в «Acta eruditorum», автор рассматривает равновесие сферы, изображенной на рис. 3.3.1.

Обозначив Q — вес сферы, i — угол наклона одной из плоскостей к горизонту, P — искомое давление на одну, P' — на другую плоскость, исходя из условия $P + P' = Q$, после очень сложных рассуждений и преобразований, Лейбниц получает результат:

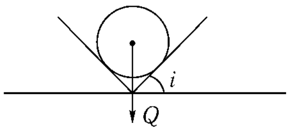


Рис. 3.3.1

$$P' = \frac{Q}{2}(1 - \cos i + \sin i),$$

$$P = \frac{Q}{2}(1 - \sin i + \cos i).$$

Но что понимается под давлением тела на наклонную плоскость? Если воспользоваться современным подходом, то в соответствии с правилами освобождения от связей силы P' и P должны быть перпендикулярными соответствующим плоскостям, и из равенства

$$\overline{P} + \overline{P}' = \overline{Q}$$

следует, что $P = Q\cos i$, $P' = Q\sin i$. Анализ результата Лейбница позволяет предположить, что он под давлением тела на наклонную плоскость понимал ***вертикальную составляющую давления***, то есть силу, противоположную *вертикальной составляющей реакции связи* (при $i = 0$, $P' = 0$, $P = Q$; при $i = \frac{\pi}{2}$, $P' = Q$, $P = 0$). Однако и в этом случае современный результат ($P = Q\cos^2 i$, $P' = \sin^2 i$) не совпадает с формулами Лейбница, так как равенства $1 - \cos i + \sin i = 2\sin^2 i$, $1 - \sin i + \cos i = 2\cos^2 i$ и не являются тождествами, и выполняются только при $i = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. Несмотря на неудачное решение Лейбница, эта задача (или ее модификации) ныне входит в большинство задачников по теоретической механике[1].

Правилу параллелограмма посвящена статья[2] «Общее правило сложения движений» [227], опубликованная Лейбницем в сентябрьском номере «Journal des Sçavans» за 1693 г. Она является своеобразным итогом длившейся с 1687 г. переписки-дискуссии по этой проблеме с Гюйгенсом, Чирнхаузом, Лопиталем и Фатио Дюилье, ставшим позднее одним из основных противников Лейбница в его приоритетном споре с Ньютоном. Как и Гюйгенс, Лейбниц исходит из проблемы нахождения центра тяжести системы тел. «В современной терминологии, общее правило сложения движений, полученное Лейбницем состоит в следующем. Если $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ являются составляющими скоростями движения, в котором участвует тело A, то $\overline{AM} = 4\overline{AG}$ — скорость сложного движения» [179, с. 79]. Здесь G — центр тяжести тела, и доказательство сводится к тому, что $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} = 4\overline{AG}^2$.

Лейбниц одним из первых обратил внимание на необходимость учета сил трения при изучении движения машин. Этому были посвящены экспериментальные и теоретические работы Витрувия, Галилея, инженеров С. Морланда[3], Олафа Рёмера[4] и Гийома Амонтона. В «Исследовании природы сопротивлений, порождаемых в машинах взаимодействием тел, и о способах их уменьшения», опубликованном в Miscellanea Berolinensia (1706), Лейбниц подробно говорит о главной причине возникновения сил трения — шероховатости взаимодействующих поверхностей тел. Он дает высокую оценку сформулированным Амонтоном в 1699 г. *законам трения*, в частности, пропорциональности сил трения взаимному давлению, вводит определение *движений скольжения, ка-*

---

[1] Например, № 2.19 в «Сборнике задач ...» И. В. Мещерского.

[2] Полный перевод статьи приводится в Приложении 1.

[3] Книга о водяных насосах, изданная в Париже в 1685 г.

[4] Работа об эпициклоидальной передаче выполнена в Парижской обсерватории в период пребывания там Лейбница, но опубликована только в 1710 г. в первом томе трудов Берлинской академии наук.

чения и *смешанного*, приводит примеры вычисления сил трения. В качестве средств, уменьшающих вредное действие трения скольжения, он предлагает использовать смазку или заменять скольжение качением.

Задача о движении планет породила в XVII в. вопросы о причинах этого движения, о природе притяжения тел, о зависимости притяжения от характеристик движения, о центробежных и центростремительных силах, о геометрической форме планет и целый ряд других. Некоторым из этих вопросов Лейбниц посвятил «Исследование движения планет», опубликованное в «Acta eruditorum» (1689). Своими предшественниками по обсуждаемым вопросам он считает Пифагора, Аристотеля, Птолемея, Коперника, Тихо Браге, Кеплера, Декарта и Ж. Д. Кассини. Имя Ньютона не упоминается, хотя, по-видимому[1], автор был знаком с «Началами» Ньютона и сделал попытку приложения своей динамики и нового анализа к изучению движения планет.

Взгляды Лейбница на природу движения планет несут отпечаток воззрений его предшественников: все тела, включая планеты, движутся в некой жидкости (эфире), которая и приводит их в движение. Движение планеты считается сложным, состоящим из вращательного или кругового и «парацентрического», то есть вдоль радиуса. Круговое движение гармонично, утверждает автор. А гармоничным называется движение, скорость которого обратно пропорциональна радиусу.

В начале XIX в. французский математик, механик и астроном Жак Филипп Мари Бинэ, переиздавший в 1816 г. «Аналитическую механику» Лагранжа, при выводе своих формул воспользовался именно этим способом описания движения планеты. Введя полярные координаты r, φ и переменную $u = \frac{1}{r}$, он получил известную формулу[2]

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right],$$

позволяющую записать дифференциальное уравнение движения планет:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2},$$

[1]В октябре 1690 г. Лейбниц писал Гюйгенсу, что книгу Ньютона впервые увидел в Риме во время путешествия по Италии. До этого он имел о ней представление только в объеме аннотации в «Acta eruditorum».

[2]«Формула Бинэ».

где v — скорость планеты, $\mu = \gamma M$ — постоянная Гаусса, M — масса Солнца, γ — гравитационная постоянная, c — константа [91, с. 46–47]. Для вращательного движения $v_\varphi = r\dot{\varphi}$, а если движение гармонично (по Лейбницу), то $v_\varphi = \frac{c}{r}$. Из этих формул следует, что $r\dot{\varphi} = \frac{c}{r}$ или $r^2\dot{\varphi} = c$, то есть для любого парацентрического движения выполняется *закон площадей* (Кеплера). Именно это (площадь, описываемая радиусом r, пропорциональна времени) и предполагал Лейбниц, говоря как о движении планет вокруг Солнца, так и о движении спутников вокруг планет.

Далее Лейбниц подробно рассматривает оба вида движения, подробно обсуждая побуждающие их причины. Эфир совершает «гармоническое» (по Декарту) движение, и круговое движение планет связано с участием в «орбитальных течениях» (orbes fluides), в которых тело совершает пассивное «плавание». «Орбитальное движение» создает центробежную силу, определяемую скоростью и расстоянием до центра. Скорость убывает при удалении планеты от центра. Парацентрическое движение происходит благодаря центробежной силе и притяжению планет Солнцем, обладающим магнитными свойствами. Все тела, совершающие криволинейное движение, стремятся двигаться по касательной к траектории. Для того чтобы принудить тело двигаться по его траектории (а не по касательной!), необходимо некоторое усилие, направленное перпендикулярно касательной.

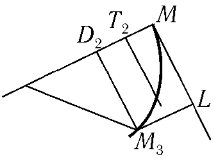


Рис. 3.3.2

Рассматривается бесконечно малое перемещение планеты по траектории (дуге) MM_3. В пятом пункте этой работы автор поясняет, что порядок бесконечно малых может быть различным. Так, если MM_3 — бесконечно малая, то разность между этой дугой и секущей будет малой второго порядка. Если ML — касательная к траектории, то $LM_3 = MD_2$ — бесконечно малое отклонение от касательной за время dt, произошедшее под влиянием притяжения и центробежных сил. Геометрические построения и пропорции между бесконечно малыми величинами позволяют автору получить дифференциальное уравнение, приводящее к выводу о том, что центробежная сила пропорциональна[1] $\frac{1}{r^3}$. Выражение центробежной силы совпадает с результатами Гюйгенса и Ньютона, но получено с при-

[1]Формально этот вывод подтверждается законом площадей. Из $r^2\dot{\varphi} = c$ следу-

влечением элементов анализа бесконечно малых. В этом и состоит главная ценность рассматриваемой работы, не лишенной значительного количества ошибок и заблуждений.

Из прочих результатов работы можно назвать следующие: вращательная скорость планеты больше парацентрической; скорость планеты максимальна в перигелии и минимальна в афелии; в перигелии и афелии парацентрическая скорость равна нулю; центробежная сила всегда меньше притяжения планеты Солнцем; движение планеты периодическое, то есть все действия и положения повторяются; планеты двигаются по эллипсам, но если центральная сила будет равна притяжению Солнца или будет больше притяжения, то движение будет параболическим или гиперболическим.

В связи с малым распространением на континенте гораздо более фундаментальной работы Ньютона («Начала») эта публикация Лейбница получила целый ряд откликов, в том числе и критического свойства. Ответом Лейбница на высказанные замечания стала статья «Выдержки из письма, написанного автором одному другу по поводу его физической гипотезы, касающейся движения планет» (Acta eruditorum, 1706). Лейбниц пытается показать физический смысл полученных им математических выражений. Приведем пример его рассуждений.

Если считать, что движение планеты происходит по дуге окружности ABC (рис. 3.3.3), то по закону инерции из положения B планета должна переместиться за dt по касательной BD. За то же время, под действием притяжения, она проходит путь DC. По галилееву закону

ет $r\dot{\varphi}^2 = \dfrac{c^2}{r^3}$. Однако Лейбниц сделал этот вывод иным путем. Он считал, что для объяснения притяжения тел нужно принять одну из двух гипотез: либо считать, что гравитационное притяжение действует аналогично распространению света, и тогда для него пригодны известные законы оптики, либо принять, что «на всякой орбите или на концентрическом круговом месте точек вращающейся материи сохраняется одно и то же количество мощности (quantité de puissance)». Согласно Лейбницу, последнее означает $mv^2 = m'v'^2$, а так как масса m вращающейся по кругу жидкости пропорциональна его радиусу, то $\dfrac{v^2}{v'^2} = \dfrac{r'}{r}$. Время в периодическом движении пропорционально $\dfrac{r}{v}$, в таком случае $\dfrac{r^2}{v^2} \sim r^3$. И если центробежное усилие пропорционально $\dfrac{v^2}{r}$, то оно, как и сила притяжения, будет пропорционально $\dfrac{1}{r^2}$.

падения тел, $DC = \frac{1}{2} j\, dt^2$ или $j = \frac{2DC}{dt^2}$, где j — ускорение, которое Лейбниц считает силой инерции. Но в полученном выражении его смущает то, что ускорение определяется двойным расстоянием DC. И в качестве объяснения он предлагает считать, что в точке B у планеты была скорость $2v$ как результат сложения собственной скорости и скорости, приобретенной в предыдущем движении (по дуге AB), дающей добавку $ED = DC$.

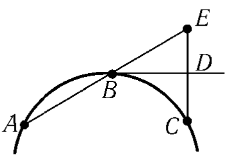


Рис. 3.3.3

Подобные рассуждения, естественно, не могли удовлетворить современников и ставили под сомнения прочие результаты. Однако мысль о том, что гравитация в каждый момент притягивает, а центробежная сила отдаляет планету от Солнца, хоть и не была новой, но не вызывала возражений. В том числе и у Гюйгенса, который после выхода в свет работы 1689 г. вел с Лейбницем оживленную переписку. Они оба дали высокую оценку достижениям Ньютона в решении задач небесной механики, но оба были абсолютно не удовлетворены его объяснениями физической природы гравитации, его идеей дальнодействия, взаимодействия тел без прямого контакта и без участия некоторого посредника («эфира»). Эта идея противоречила сложившимся после Декарта физическим представлениям, разделяемым большинством ученых. Сам Ньютон не раз признавал, что у него нет оснований настаивать на ее справедливости. Но и гипотеза посредника-эфира его также не устраивала и он, следуя Галилею, акцентировал внимание не на физической природе притяжения, ограничившись констатацией его наличия, а на принципах математического анализа движения тел. В том числе и тел Солнечной системы.

Со времен Галилея задачи о движении падающих или брошенных тел привлекали внимание всех известных ученых XVII в. «Третий день» «Бесед» [19] Галилей посвятил количественной теории свободно падающих и скользящих вдоль наклонной плоскости тел. При обсуждении задачи о падении тел он приводит, в своей терминологии, формулировку аналога будущего второго закона Ньютона: «Совершенно ясно, что импульс тела[1] к падению столь же велик, как то наименьшее сопротивление или та наименьшая сила, которые достаточны для

[1] По тексту ясно, что «импульс тела к падению» пропорционален современному ускорению.

того, чтобы воспрепятствовать падению и удержать тело» [19, с. 326]. В завершение «Третьего дня» излагается теория движения (падения) тела по наклонной плоскости и по ломаной, расположенной в вертикальной плоскости и состоящей из отрезков прямых разного наклона. Эта теория позволила автору рассмотреть (предельным переходом) колебания точки по дуге окружности, то есть заложить основы теории колебаний математического маятника. В «Четвертом дне» Галилей обсуждает движение бросаемых тел. Начиная с закона инерции[1], автор использует закон сложения равномерного горизонтального и естественного ускоренного движений и получает траекторию падения тела в виде полупараболы с вертикальной осью (теорема I). В теореме II этого же «дня» доказывается, со ссылкой на опыт, правило сложения скоростей при сложном движении точки. «Четвертый день» закладывает основы баллистики[2], а приведенные здесь таблицы дальности полета снарядов имеют важное значение в артиллерии.

Аналогичным проблемам посвящен главный трактат профессора Пражского университета И. М. Марци «О соотношении движений» (1639). Результаты Марци и Галилея совпадают. В 1644 г. ученик Галилея Торричелли опубликовал трактат «О движении естественно падающих и брошенных тел», в котором продолжается использование идеи Галилея, ставшей одной из основных в формировании методологии теоретической механики идеи непрерывного приращения скорости тела, находящегося под действием окружающих тел.

Откликом на результаты Ньютона («Начала») в задаче о движении тела с учетом сопротивления среды стала публикация Лейбница «О сопротивлении среды и движении тяжелых точек в сопротивляющейся среде» (Acta eruditorum, 1689). Автор отмечает ограниченность результатов Галилея, Торричелли и Блонделя в связи с неучетом ими сил сопротивления среды. В своей баллистической теории он различает «абсолютное» и «соответствующее» сопротивления. Его «абсолютное» сопротивление напоминает трение. Оно не зависит от скорости тела и его величина пропорциональна площади контакта тела и среды. «Соответствующее» сопротивление определяется плотностью сре-

---

[1]«Когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления движению, то ... движение его является равномерным и продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца» [19, с. 417–418].

[2]Галилей не упоминает о более ранних работах Тартальи.

ды и пропорционально одновременно скорости и объему тела. Через него передается действие частиц среды на тело и благодаря ему ускоренно двигающееся тело (например, падающее тело) стремится достичь предельной скорости.

Траектория снаряда, движущегося в сопротивляющейся среде, зависит от сложения равномерно замедленного движения (по причине «абсолютного» сопротивления) и ускоренного движения, тормозящегося «соответствующим» сопротивлением. Он считает, что «если движение равномерное, то оно будет замедленным пропорционально пройденному пути». Это означает, что при силе сопротивления, пропорциональной пути ($F = ks$), движение будет равномерным. Но и Галилей, и Декарт, и Гюйгенс, и Ньютон утверждали, что для равномерного движения тела необходимо отсутствие сил в направлении движения.

Далее автор решает задачу о движении тела в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости движения тела. Из закона сохранения живых сил получается дифференциальное уравнение и его интеграл

$$t = \int \frac{a^2\,dv}{a^2 - v^2},$$

или[1] $t = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \ldots$ Здесь не ставится ныне традиционный вопрос об определении закона движения тела. И ценность работы состоит в первых шагах адаптации идей математического анализа применительно к чисто механической задаче. Гюйгенс, откликнувшись на эту статью[2], выразил свое несогласие с предлагаемой теорией и приверженность взглядам Ньютона. В ответном письме (октябрь, 1690) Лейбниц уверял: «Что касается сопротивления среды, я бы хотел заметить, что теоремы г. Ньютона, по крайней мере те, которые мне известны, соответствуют моим. То, что он называет сопротивлением пропорциональным квадрату скоростей (в случае равных времен), есть не что иное, как то, что я называю *соответствующим сопротивлением*, которое у меня определяется скоростями и проходимыми путями, независимо от того, равны интервалы времени или нет, таким же образом, как мне

[1]Это разложение справедливо только для $\left|\frac{v}{a}\right| < 1$, и в нем v следует заменить на $\frac{v}{a}$.

[2]Письмо Гюйгенса Лейбницу от 6.02.1690 г.

кажется, как и у Вас; но мне необходимо время, чтобы еще поразмышлять об этом» [187, с. 544].

В переписке 1690–91 гг. Гюйгенс и Лейбниц неоднократно возвращаются к проблеме движения тел в среде с сопротивлением[1]. Итогом размышлений Лейбница стала статья «Добавление к сопротивлению среды» (Acta eruditorum, апрель 1691), в которой Лейбниц полностью соглашается со взглядами Гюйгенса и Ньютона о том, что сила сопротивления среды пропорциональна квадрату скорости на каждом интервале времени.

В 1687 г. Лейбниц сформулировал в «Acta» задачу о «парацентрической изохроне» — найти кривую, по которой тяжелая точка опускается в равные промежутки времени на равные высоты. Через два года в том же журнале Лейбниц приводит решение своей задачи без подробного описания метода его получения [226]. Исходя из своего принципа сохранения живых сил $v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0)$ и постоянства ускорения $\frac{dv}{st} = k$, после исключения времени и интегрирования, он получает квадратно-кубическую параболу $9g^2k^2(x + c)^2 = (3gy - k^2)^3$, где $c = \text{const}$[2]. Автор сохраняет в тайне метод интегрирования и усложняет задачу новым условием: найти кривую, которую должно пройти весомое тело, чтобы его расстояние до фиксированной точки изменялось на равную величину за равное время.

Первым на задачу Лейбница откликнулся Гюйгенс. Это было геометрическое решение. А в мае 1690 г. Я. Бернулли опубликовал в «Acta eruditorum» решение, в котором вывел дифференциальное уравнение искомой кривой и проинтегрировал его. При этом он впервые употребил в печати термин «интеграл» и указал, что из равенства дифференциалов следует равенство интегралов. Это была его первая публикация по применению нового анализа бесконечно малых. Лейбниц опубликовал свое решение в 1694 г. [228], попутно указав Я. Бернулли на некоторые ошибки. Решение Лейбница сводилось к интегрированию

[1]В частности, в письме от 23.02.1691 г., Гюйгенс писал, что Лейбниц понимает сопротивление иначе, чем Ньютон и сам Гюйгенс: «...вы понимаете под сопротивлением потерянную скорость или потерю скорости по причине среды... Откуда очевидно, что вы принимаете эффект сопротивления за само сопротивление. Но для г. Ньютона и для меня сопротивление — это давление среды на поверхность тела... Это, безусловно, правдоподобное и наиболее естественное определение сопротивления» [187, с. 545].

[2]Решение в современных обозначениях.

уравнения

$$dc = \frac{\sqrt{a^2 + ax}}{a}\, dt,$$

где $\frac{dc}{dt} = v$ — скорость движения. Здесь впервые вместо $d\,dy$ он вводит обозначение d^2y.

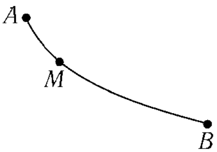


Рис. 3.3.4

В июньском номере «Acta eruditorum» за 1696 г. И. Бернулли сформулировал свою знаменитую задачу о брахистохроне, положившую начало развитию вариационного исчисления: «В вертикальной плоскости даны две точки A и B (рис. 3.3.4). Определить путь AMB, спускаясь по которому под влиянием собственной тяжести, тело M, начав движение из точки A, дойдет до другой точки B в кратчайшее время» [6, с. 19]. Лейбниц не мог не откликнуться на эту задачу и первым прислал ее решение (траектория — циклоида). Кроме самого И. Бернулли решения позднее прислали Я. Бернулли, Лопиталь и Ньютон. В работе 1697 г. (Acta eruditorum), где Лейбниц опубликовал свое решение задачи о брахистохроне, отмечаются особые заслуги Я. Бернулли и Лопиталя в развитии нового анализа и И. Бернулли в продолжении исследований движения тел, начатых Галилеем.

Задача о брахистохроне стала принципиально новым шагом в истории механики. Условие минимальности времени движения из A в B можно считать произвольным предположением, сделанным И. Бернулли ради усложнения математической проблемы Галилея. Но серьезность отношения к этой задаче ведущих механиков конца XVII в. свидетельствует о напряженном поиске некоторого универсального принципа, по сути философско-метафизического, по форме математического, который бы своим простым и ясным содержанием охватывал все свойства движения тел. И по сути такой принцип уже был известен со времен древнегреческой философии — *природа действует наиболее легкими и доступными путями*. Проблема состояла в математической формулировке этого положения. Обобщая известный принцип Герона об отражении света, Пьер Ферма[1] предполагал, что действительный путь распространения света между точками A и B отлича-

[1] Автор знаменитой теоремы о том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, где n — целое число, большее двух, не имеет решения в целых положительных числах.

ется от всех других путей тем, что для его прохождения требуется минимальное (из всех возможных) время. И это условие минимальности времени непрерывного движения стало возможным сформулировать средствами нового математического анализа. Физические воззрения оптико-механической аналогии и последовательное появление математических понятий интеграла, вариации интеграла, скорости-производной, действия позволили получить различные математические выражения принципов, давших новый импульс в формировании в XVIII–XIX вв. математического аппарата теоретической механики.

В работе 1690 г. Я. Бернулли не только дал решение задачи Лейбница, но и предложил свою задачу о форме кривой, по которой расположится подвешенная за концы однородная гибкая нить под действием собственного веса. Впервые об этой задаче упоминали Жирар (1634), указавший, что кривая будет параболой, и Галилей («Беседы», 1638), считавший, что кривая близка к параболе. Правильное решение задачи дали Гюйгенс, Лейбниц и И. Бернулли. Искомую кривую, полученную традиционными геометрическими построениями и отношениями, Гюйгенс назвал «цепной линией». Лейбниц и И. Бернулли нашли уравнение цепной линии с помощью исчисления бесконечно малых. Как и задача о брахистохроне, задача о цепной линии стала впоследствии одной из основных в истории вариационного исчисления. В ее решении условие равновесия тяжелой нити представлялось как требование минимальности высоты точек нити и представлялось соответствующими интегралами по дуге кривой. Решению задачи о цепной линии Лейбниц посвятил несколько публикаций в «Acta eruditorum» за 1691–93 гг.

Две публикации 1706 года посвящены кинематическим задачам движения тел. В статье «Построение касательной к линии центров тяжестей изменяющейся фигуры» (Miscellanea Berolinensia) рассматривается задача о построении касательной к линии, описываемой центром тяжести G криволинейного прямоугольного треугольника («трилинии») ABC (рис. 3.3.5), когда его основание BC перемещается параллельно самому себе.

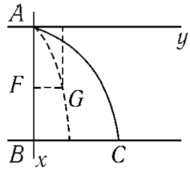


Рис. 3.3.5

Иными словами, решается задача об определении траектории центра тяжести плоской фигуры переменной формы (площади). В современных обозначениях ($AB = x$, $BC = y$, $AF = z$, $CCF = u$, S — площадь ABC, J_x и J_y — моменты относительной осей x и y) решение сводится к следующему:

$$S=\int y\,dx,\quad J_x=\frac{1}{2}\int y^2dx,\quad J_y=\int xy\,dx,$$

$$z=\frac{J_y}{S},\quad u=\frac{J_x}{S},\quad dz=\ldots,\quad du=\ldots,$$

$$\frac{dz}{du}=d\frac{x\int y\,dx-\int xy\,dx}{y\int y\,dx-\int y^2\,dx}.$$

В качестве проверки полученного результата автор предлагает геометрический способ решения той же проблемы.

Вторая публикация «О движении одной линии по другой и о трех его разновидностях — скольжении, качении и сложном движении» (Acta eruditorum) предвосхищает работы Л. Пуансо, сводящие плоское движение твердого тела к движению подвижной центроиды по неподвижной. Лейбниц показывает, что при качении одной кривой (тела) по другой без проскальзывания подвижная кривая поворачивается около точки контакта (через 100 лет названной Пуансо *мгновенным центром скоростей*). Кроме этого, при некоторых условиях, у подвижной фигуры существует точка, траектория которой совпадает с неподвижной кривой.

Лейбниц прожил семьдесят лет, сорок из которых он занимал должность библиотекаря, советника юстиции и историографа ганноверских герцогов Иогана Фридриха (с 1665 по 1679), его младшего брата Эрнста Августа (с 1679 по 1698) и старшего сына последнего — Георга Людвига (с 1698 по 1714), ставшего королем Англии (Георг I). Герцоги ждали от Лейбница историю своего рода, рода Вельфов или Брауншвейгского дома. И он описал ее со вступления на престол императора Карла Великого (768 г.) до 1005 г. Это был огромный добросовестный труд, ради которого он совершил трехлетнее путешествие в Италию (1687–1690) и который превратился в историю не только германских герцогств, но и всей Священной Римской Империи, которая во времена Лейбница, по замечанию Вольтера, уже «не была Священной, не была Римской и не была Империей».

Но Лейбниц не мог подолгу заниматься одним делом, такова была особенность его характера. В сентябре 1695 г. он писал Планку: «Нет слов, чтобы описать, насколько я не сосредоточен. Ищу в архивах разные вещи и собираю напечатанные рукописи, с помощью которых надеюсь пролить свет на историю Брауншвейгского дома. Я получаю и отправляю немалое число писем. У меня столько нового в математике, столько мыслей в философии, столько других литературных заметок, которым я не могу дать погибнуть, что я часто не знаю, за что раньше приняться, и я чувствую, как прав был Овидий, восклицая: изобилие делает меня нищим! Уже свыше двадцати лет назад французы и англичане видели мою счетную машину . . . , с тех пор Ольденбург, Гюйгенс и Арно, сами или через своих друзей, побуждали меня издать описание этого искусного устройства, а я все откладывал это, потому что я сперва имел только маленькую модель этой машины, которая годится для демонстрации механику, но не для пользования. Теперь же с помощью собранных мною рабочих готова машина, позволяющая перемножать до 12 разрядов. Уже год, как я этого достиг, но рабочие еще при мне, чтобы можно было подготовить другие подобные машины, так как их требуют из разных мест. А прежде всего я хотел бы закончить свою «Динамику», в которой, полагаю, я наконец нашел истинные законы материальной природы, и посредством их могу решать такие задачи о действии тел, для каких недостаточны доселе известные правила. Мои друзья, которые знают о построенной мною высшей геометрии, настаивают на издании моей «Науки о бесконечном», содержащей основы моего нового анализа. К этому надо добавить «Характеристику положения», над которой я работаю, и еще более общие вещи относительно искусства открытия.

Но все эти работы, за вычетом исторических, идут украдкой. Вы ведь знаете, при дворе ищут и ожидают совсем иного! . . . » [68, с. 171].

Таков далеко не полный диапазон научных интересов Лейбница. По его инициативе и с его участием на его родине в Лейпциге профессора Отто Менке и Христиан Пфаутц начали с 1682 г. издавать «Acta eruditorum»[1] (Лейпцигские ученые записки). Он был автором идеи создания в Берлине научного Общества по подобию Парижской академии наук или Лондонского Королевского общества. В 1700 г. Прусский король назначил его президентом этого Общества, но участие Лейбница в деятельности Общества было достаточно формальным. В последние годы жизни он обсуждал с Петром I и с императором Карлом V идею создания аналогичных обществ в Петербурге[2] и Вене, где жил с конца 1712 по сентябрь 1714 г. В Вене он написал свою знамени-

[1] Издавался до 1774 г.

[2] Более подробно об этом в [24, с. 169–182].

тую «Монадологию», замыкающую философскую «трилогию» — «Новые опыты о человеческом разуме...» (1704, против Локка) и «Теодицея» (1710, против Бейля). С конца 90-х гг. Лейбниц активно отстаивал свой приоритет[1] в открытии дифференциального и интегрального исчисления.

Создание математического анализа происходило в процессе решения старых и новых задач механики. Использование нового анализа в механических проблемах дало простор для постановки новых задач, для формирования новой идеологии и понятийного аппарата теоретической механики. Однако было бы ошибочным сводить историю механики только к истории ее задач и математического аппарата. Механика, как часть системы научного мировоззрения, формировалась под влиянием конкретных исторических условий, философских, метафизических и даже теологических теорий.

Трудно переоценить роль математического анализа, теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления в современной механике. Но, кроме этого, после Лейбница в механике осталось понятие *действия*. Его «живая сила» в XIX в. была переименована в кинетическую энергию, получив при этом и ясный физический смысл, и официальный статус меры движения. Его теоретические идеи обогатили механику Галилея, Декарта, Гюйгенса, его решения задач, как правило, подтверждали результаты знаменитых современников (Гюйгенса, Ньютона, Я. и И. Бернулли, Лопиталя). Идейное наследие и методы Лейбница получили развитие в трудах его последователей — Бернулли, Вариньона, Клеро, Мопертюи, Эйлера, Даламбера и Лагранжа.

3.4. Метод Я. Бернулли

Открытие Ньютоном и Лейбницем новых принципов натуральной философии и математического анализа стало поворотным пунктом в истории механики. Дальнейшее развитие идеологии и методологии теоретической механики шло по пути совершенствования, конкретизации и математизации ее понятийного аппарата, принципов построения и анализа математических моделей движения и равновесия тел. Из разряда философских наук механика окончательно переходит в разряд математических.

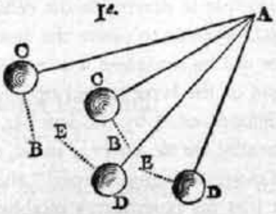
[1]Полемика Лейбница с С. Кларком описана в [187].

Якоб Бернулли

nouvelle eſpece de centre, que j'appelle *centre de tenſion*, où l'hypothêſe de M. Huguens ne ſçauroit avoir lieu: j'expliqueray en ſon tems ce que j'entends par là. Et comme je n'ay encore rien publié de tout cela, je veux vous l'envoyer par parties, pour pouvoir être preſenté à l'Academie, ſi vous trouvez qu'il le merite. Je commence par la premiere.

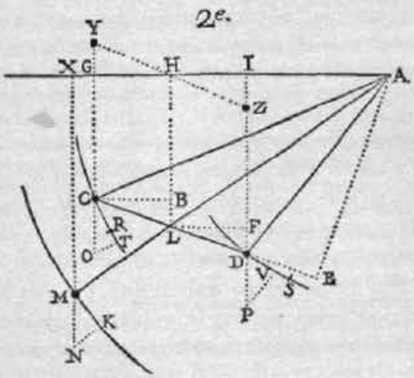
Principe du Levier tiré ou pouſſé par des puiſſances qui ſont en mouvement.

FIGURE I. Soient AC, AC, AD, AD, les branches d'un levier mobile autour du point A; ſoient C, C, D, D, des poids ou des puiſſances muës avec des vîteſſes CB, CB, DE, DE, leſquels faſſent impreſſion ſuivant les directions CB, CB, DE, DE, perpendiculaires aux bras de levier AC, AC, AD, AD. Je ſuppoſe que ſi tous les produits des puiſſances C par AC & CB, ſont égaux à tous les produits des puiſſances D (qui agiſſent en ſens contraire) par AD & DE; ou bien ſi tous les produits de C par AC & CB (entant qu'on conçoit toutes les puiſſances agir en même ſens) ſont égaux à rien, le levier doit demeurer en équilibre.



Ce principe a été démontré par feu M. Mariotte dans la Prop. 13. de la ſeconde Partie de ſon Traité de la Percuſſion des corps; & il n'y a perſonne qui en diſconvienne.

SOLUTION.



SOLUTION.

Soit maintenant A l'axe horizontal du balancement; AXM un plan vertical droit à l'axe; AM le diametre de la figure qui balance, auquel on ait appliqué dans le même plan l'ordonnée CLD à angle donné ALD, laquelle ait $CL = LD$. Soient de plus C & D deux petites parcelles de la figure, leſquelles décrivent dans leur balancement les arcs CT, DS; ſoit auſſi AM la longueur du Pendule ſimple, qui fait ſes vibrations dans le même tems que la figure qui balance. FIGURE II.

De ce que le balancement tant de M, que de C & D, s'acheve par l'hypothèſe en même tems, il s'enſuit que les vîteſſes dont ces poids ſe meuvent à chaque inſtant, ſont proportionnelles à leurs diſtances AM, AC, AD, de l'axe A; & que par conſéquent leur mouvement peut être continué avec ces vîteſſes, ſans que les poids C & D agiſſent en aucune maniére l'un ſur l'autre M: De ſorte qu'il ne faut conſiderer que la ſeule impulſion que la peſanteur ajoûte à chaque moment aux vîteſſes acquiſes. Soit donc

Фрагмент работы (1703) Я. Бернулли

Значительный вклад в постановку новых и модернизацию уже известных задач, в адаптацию к ним дифференциального и интегрального исчисления внесли известные швейцарские математики и механики братья Якоб[1] и Иоганн Бернулли. Их решения уже упоминавшихся задач о цепной линии, о брахистохроне, о центре качаний физического маятника, об ударе тел, о движении в сопротивляющейся среде и проблем баллистики, о равновесии тел показали универсальность и эффективность нового математического аппарата, подтвердили и обобщили результаты их предшественников. В первую очередь — Лейбница, чьи идеи и методы получили в их творчестве наибольшее развитие.

Принцип[2], заложенный Гюйгенсом в решение задачи о центре колебаний, некоторым ученым казался сомнительным, и поэтому Я. Бернулли предложил свое решение, основанное на идее компенсации движущих сил силами инерции, получившей дальнейшее развитие у Германна, Эйлера, в «Динамике» Даламбера и благодаря Лагранжу вошедшей в теоретическую механику под названием «принцип Даламбера»[3]. Решение Якобом Бернулли задачи о центре качаний (колебаний), опубликованное в «Acta eruditorum» за 1691 г. и «Мемуарах» Парижской академии за 1703 г., сводится к следующему.

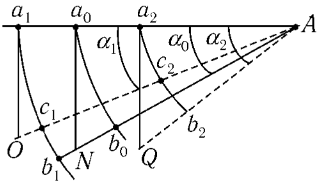


Рис. 3.4.1

Пусть в точках a_1 и a_2 (рис. 3.4.1) жесткого невесомого стержня Aa_1 укреплены две точечные массы m_1 и m_2. Необходимо найти длину изохронного математического маятника или расстояние $l_0 = Aa_0$ до точки a_0, в которой сосредоточена масса $m_0 = m_1 + m_2$, если $Aa_1 = l_1$, $Aa_2 = l_2$.

Если бы стержень свободно падал под действием тяжести грузов m_1 и m_2, то за Δt точки a_1, a_2, a_0 переместились бы в положения O, N, Q, причем $Oa_1 = Na_0 = Qa_2$. Но стержень поворачивается вокруг точки A и через Δt займет положение AN, точка a_1 пройдет путь $a_1b_1 > a_1O$, точка a_0 — путь $a_0b_0 \approx a_0N$, точка a_2 — путь $a_2b_2 < a_2Q$. Пока точка a_1 не достигла положения c_1, все точ-

[1]По мнению К. Трусделла, классическая механика обязана своим созданием Я. Бернулли в той же мере, что и И. Ньютону [296, с. 101].

[2]Гипотеза 1 из § 2.8.

[3]Современный вид принцип Даламбера принял после выхода в 1856 г. «Трактата рациональной механики» Ш. Делоне.

ки «падали» свободно. Но в положении c_1, как говорит Я. Бернулли, «действие веса точки a_1 истощилось» [40, с. 139] и она продолжает свое движение к точке b_1 за счет веса точки a_2. За время прохождения точкой a_1 дуги c_1b_1 точка a_2 пройдет меньшую дугу c_2b_2, то есть точка a_1 действует на a_2 замедляющим образом. Таким образом, точка a_1 своей инерцией (силой инерции) замедляет вращение стержня, а точка a_2 его ускоряет, точка a_0 не вносит никакого вклада, оставаясь в данный момент как бы неподвижной. В таком случае стержень Aa_1 можно отождествлять с рычагом второго рода с точкой опоры в A, находящимся в равновесии под действием сил инерции $m_1c_1b_1$ и $m_2c_2b_2$ грузов m_1 и m_2, направленных в противоположные стороны. Уравнение равновесия рычага

$$m_1l_1 \cdot c_1b_1 = m_2l_2 \cdot c_2b_2,$$

из-за малости дуг $c_1b_1 = l_1(\alpha_0 - \alpha_1)$, $c_2b_2 = l_2(\alpha_2 - \alpha_0)$ и углов $\alpha_1 \sim \sim \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{Oa_1}{l_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{Qa_2}{l_2}$; $\alpha_0 = \dfrac{Na_0}{l_0}$, после преобразований приводит к искомому выражению:

$$l_0 = \frac{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}{m_1l_1 + m_2l_2}.$$

Для случая нескольких масс решение будет аналогичным. Кроме идеи сведения изучения движения тела к изучению его равновесия с учетом сил инерции, Я. Бернулли высказал мысль о возможном определении реакции связи. Истинное движение $a_1c_1(a_2b_2)$ он разложил на свободное $a_1O(a_2Q)$ и движение $Oc_1(Qb_2)$ вдоль стержня. Каждому движению он ставит в соответствие силу. Вертикальному движению $a_1O(a_2Q)$, естественно, соответствует сила тяжести, а сила, соответствующая движению вдоль стержня, уравновешивается опорой A. По современным представлениям — реакцией связи. Ученик Я. Бернулли — Якоб Германн[1] дал иную интерпретацию идеи использования сил инерции. В наиболее известном сочинении «Форономия или две книги о силах и движениях твердых и жидких тел» [200], решая задачу о нахождении центра колебаний физического маятника, он разлагает силу тяжести каждой материальной точки на две составляющие: одна направлена по линии подвеса, другая — перпендикулярно

[1]Один из первых академиков Петербургской академии наук.

первой. Первая из сил уравновешивается реакцией связи (опора A), вторая — силой инерции, равной массе точки, умноженной на касательное ускорение (по закону ускоряющих сил Ньютона). Это рассуждение относится к каждой точке маятника, то есть к маятнику в целом, и приводит к следующему принципу: **в каждый момент времени движущие силы (вес), реакции связи и силы инерции уравновешиваются**. Воспользовавшись этим принципом для решения своей задачи, Германн не придал ему всеобщего статуса. Это сделал позднее другой академик Петербургской академии наук, ученик И. Бернулли — Леонард Эйлер, использовавший сформулированный принцип (в своей интерпретации[1]) для решения многих задач, в том числе и не связанных с колебаниями.

3.5. In magnis voluisse sat est[2]

Важнейшую роль в формировании идеологии и методологии механики сыграли многочисленные работы Иоганна Бернулли, принесшие ему мировую известность. Эти работы начинались как развитие идей математического анализа и динамики Лейбница и вылились в обширный цикл задач, актуальных в конце XVII – начале XVIII вв. Задач, сформулированных Галилеем, Гюйгенсом, Лейбницем, Ньютоном, им самим, как правило, решаемых методами дифференциального и интегрального исчисления[3] на основе принципов и законов механики XVII в. Для истории теоретической механики наибольший интерес представляет сочинение «Рассуждение о законах передачи движения» [136], представленное в 1724 г. на конкурс Парижской академии наук. Знакомство с содержанием этой работы позволит получить представление о состоянии механики в первой трети XVIII в.

---

[1]Пусть тело движется по плоскости под действием силы F, приложенной к центру масс тела. Разложим F на касательную (F_τ) и нормальную (F_n) составляющие. Сила F_n уравновесится реакцией плоскости, сила F_τ вызовет ускоренное движение или силу инерции ($m\vec{a}$). Если силу инерции направить противоположно ускорению $\vec{a}$, то можно считать, что она «уравновешивает» F_τ. Иначе говоря, в каждый момент времени $\vec{F}$, $m\vec{a}$ и реакции поверхности уравновешиваются [40, с. 141]. Такова Эйлерова трактовка идеи Бернулли – Германна.

[2]«Довольно и того, что хочешь быть среди великих» — девиз И. Бернулли в сочинении, представленном Парижской академии наук на конкурс 1724 года.

[3]Термин «интегральное исчисление» ввел И. Бернулли.

Иоганн Бернулли

Вопрос, предложенный для конкурсного решения, состоял в следующем: «Каковы те законы, согласно которым совершенно твердое движущееся тело приводит в движение другое такое же, находящееся в покое или в движении, тело, которое оно встречает в пустоте или же в среде?» [6, с. 47]. По-видимому, подобная постановка проблемы свидетельствовала о некотором недоверии принципам механики Декарта, Ньютона, Гюйгенса, Лейбница и должна была стать стимулом для поиска новых принципов и более убедительных доказательств. В ясной постановке проблемы оказалась одна терминологическая неопределенность. Какое тело следует считать «совершенно твердым»? Разночтения в этом вопросе членов конкурсной комиссии и И. Бернулли не позволили ему получить еще одну порцию международного признания и сумму в 2500 ливров, предназначенных для победителя[1] конкурса.

Разъяснение своей позиции («Философ и геометр, обязанные соблюдать в своих доказательствах ясность и очевидность, должны заботливо избегать какой бы то ни было двусмысленности в выражениях» [6, с. 47–48]) автор начинает с определения понятия «твердость». Он пишет: «Обычно тело считают твердым, если его части, оставаясь в покое одна относительно другой, таковы, что их связи могут быть разрушены лишь какой-либо внешней силой, и считают, что эта твердость тем более совершенна, чем большую силу необходимо применить, чтобы отделить части этого тела друг от друга. В соответствии с этим понятием, тело будет совершенно твердым, в смысле абсолютного совершенства, когда его части не смогут быть разделены никаким конечным усилием, каким бы большим мы это усилие ни предположили» [6, с. 48].

Но И. Бернулли не может принять такое определение как нереальное. Он называет его химерой, противоречащей основному закону

[1] И. Бернулли заслужил похвалу Королевской академии наук, а премию получил Мазьер. Однако в том же году И. Бернулли разделил с сыном Даниилом первую премию (той же академии) конкурса на тему: «О средствах сохранять равномерность водяных или песочных часов на море». Основные положения теории передачи движения (удара) Мазьера, опубликованной в 1727 г., состояли в следующем: причина упругости тела (пружины) не может быть по воле разума (Бог или первопричина); причиной не может быть твердое тело; поэтому эфир (тончайшая материя, жидкость) является основной причиной упругости пружины; эфир циркулирует в недоступных нашим чувствам каналах, пронизывающих тело (пружину); эфир состоит из бесконечного числа вихрей, вращающихся вокруг своих центров; относительное равновесие вихрей осуществляется под действием бесконечно больших центробежных сил; центробежная сила вихрей является физической причиной упругости; сила упругости тел является причиной изменения их скорости.

природы — «закону непрерывности, в силу которого все, что выполняется, выполняется через бесконечно малые изменения. Здравый смысл, кажется, диктует то, что никакое изменение не может осуществляться скачками: Natura non operatur per saltum[1], ничто не может перейти от одной крайности к другой, не переходя через все промежуточные ступени» [6, с. 49]. Реальные тела не могут отвечать требованиям «совершенной твердости», они разрушаемы, деформируемы. Но их разрушение не является мгновенным, скачкообразным, оно является непрерывной последовательностью стадий, протекающих некоторое (пусть малое!) время. Поэтому все твердые тела по своим физическим свойствам ассоциируются с телами деформируемыми (мяч, наполненный воздухом; пружина). В итоге автор приходит к следующему определению: «...тело будет твердым..., если его чувственные части с трудом меняют свое положение и если части этого тела, сдвинутые вследствие удара другого тела, в незаметный промежуток времени очень быстрой и упругой пружинистостью приводятся в свое первоначальное положение. Эта упругость совершенна, если все сдвинутые части восстанавливают свое первоначальное состояние; она несовершенна, если некоторые из них в него не возвращаются. Совершенную упругость можно назвать тугостью»[6, с. 55–56]. Таким образом, понятию «совершенной твердости» соответствует «бесконечная тугость», по Бернулли («...тело будет бесконечно тугое, если нужно бесконечное давление для конечного сжатия этого тела или если нужно конечное давление для бесконечно малого сжатия его» [6, с. 56]).

В основу теории передачи движения И. Бернулли полагает законы инерции и равенства действия — противодействия абсолютно упругих тел. Обсуждая физическую сущность соударения тел, он предлагает модель трубки, закрытой с одного конца, внутри которой перемещается поршень. Перемещение поршня под действием внешней силы (удара) приводит к увеличению внутреннего давления воздуха, гасящего удар по поршню и далее возвращающего поршень в начальное положение. Это — своеобразный аналог пружины, упругие свойства которой определяются ее геометрическими размерами (длиной). И сила пружины по своему действию аналогична силе веса.

Опыты показали, что упругость воздуха пропорциональна его плотности. Для трубки постоянного диаметра это означает, что сила

[1] «Природа ничего не делает скачком». Это одно из основных положений философии Лейбница.

упругости воздуха обратно пропорциональна длине $eA = x$ (рис. 3.5.1). Пользуясь законом $dv = F\,dt$, где $dt = \frac{dx}{v}$, Бернулли получает $dv = \frac{1}{x}\frac{dx}{v}$ или $v\,dv = \frac{dx}{x}$ и далее интегрирует это дифференциальное уравнение с учетом начальных условий. Обратим внимание на то, что полученное выражение устанавливает пропорциональность живой силы активной силе и является, говоря современным языком, аналогом теоремы об изменении кинетической энергии.

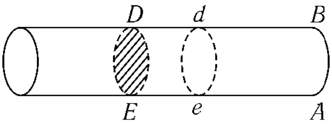


Рис. 3.5.1

Поведение поршня в трубке фактически является моделью движения снаряда в стволе пушки. Это обстоятельство позволяет Бернулли дать несколько полезных рекомендаций по поводу свойств пороха и оптимальной длины ствола для получения наибольшей скорости снаряда в момент его вылета.

В третьей главе работы вводятся основные понятия и принцип равновесия, впервые сформулированный автором в письме Вариньону (26.01.1717) и получивший позднее высокую похвалу Лагранжа.

«**Определение I.** *Виртуальной скоростью* я называю ту скорость, которую приобретают две или несколько сил, находящихся в равновесии, когда им сообщают небольшое движение. Или, если эти силы уже находятся в движении, то виртуальная скорость есть элемент скорости, на который увеличивается или уменьшается скорость каждого тела, за бесконечно малое время, если считать направление этого элемента совпадающим с направлением скорости» [6, с. 71–72].

Понятие виртуальной скорости является одним из основных в современной аналитической механике. Оно формировалось на протяжении всей истории механики, но впервые получило четкое определение в работах Бернулли. В уже упомянутом письме Вариньону он пишет: «Представьте себе несколько различных сил, которые действуют по различным направлениям, чтобы держать в равновесии точку, линию, поверхность или тело; представьте также, что всей системе этих сил сообщают малое движение или параллельно самой себе по какому-нибудь направлению, или же вокруг какой-нибудь неподвижной точки. Вам будет легко понять, что при этом движении каждая из сил продвинется или отступит по своему направлению, за исключением тех, которые направлены перпендикулярно к направлению малого движения. В этом последнем случае эти — одна или несколько сил — не продвинутся вперед и не отступят назад, так как эти продвижения или отступления, называемые мною виртуальными скоростями, суть не что иное, как то, на что увеличивается или уменьшается линия направления каждой силы при этом малом движении; эти увеличения или уменьшения можно определить, если из конца линии направления какой-либо силы опустить перпендикуляр на линию направления, взятую в соседнем ее положении после малого движения, на которой он (перпендикуляр) отсечет маленькую часть, которая и будет мерой виртуальной скорости этой силы» [6, с. 262–263]. Эта конкретизация понятия виртуальной скорости ясно показывает и представление Бернулли о силе как о направленном отрезке («линия направления»), произведение которого на виртуальную скорость характеризует состояние тела. Эта характеристика названа им «энергией».

Дав определения живой силы («...та сила, которая пребывает в равномерно движущемся теле») и мертвой силы («...та, которую получает тело без движения, если оно побуждается и принуждается к движению, или же, которая побуждает двигаться быстрее или медленнее, если тело уже находится в движении»), автор формулирует основной принцип: «Два фактора находятся в равновесии, то есть имеют равные моменты, когда их абсолютные силы находятся в обратном отношении к своим виртуальным скоростям, — безразлично, находятся ли действующие одна на другую силы в движении или в покое» [6, с. 72]. По сути этот принцип — прообраз общего уравнения динамики, сформулированного Лагранжем через 60 лет.

Отметим, что требование равномерности движения в определении живой силы не является обременительным, так как речь идет о бесконечно малом движении, фактически о мгновенной скорости. Бернулли утверждает, что «это — обычный принцип статики и механики», поэтому он не нуждается в доказательствах. Однако следует иметь в виду, что этот старейший принцип ранее применялся для изучения только равновесия тел. Но, возможно, именно этот принцип навел Декарта на мысль о *законе сохранения количества движения*, подтверждающем всеобщность принципа. Для Бернулли же закон Декарта является следствием общего принципа.

Исходя из галилеевых законов падения тел, Лейбниц установил, что живая сила тела равна произведению его массы на квадрат скорости. Бернулли приходит к такому же выводу исходя из других соображений. Если рассмотреть взаимодействие двух тел A и B, соединенных пружиной (это его модель взаимодействия), то центр тяжести C тел A и B всегда будет покоиться. Это означает, что «живая сила тела $B(A)$ является полным результатом действия части $CB(CA)$ пружины». Результат же действия пружины пропорционален ее удлинению (длине). Если обозначить $f(F)$ — живую силу тела $A(B)$, $a(b)$ — скорость тела $A(B)$, то

$$\frac{f}{F} = \frac{CA}{CB}; \quad \frac{CA}{CB} = \frac{a}{b}.$$

Из закона сохранения количества движения[1] $aA = bB$. В таком случае

$$\frac{f}{F} = \frac{a}{b} \cdot \frac{aA}{bB} = \frac{Aa^2}{Bb^2}.$$

После введения меры живой силы как произведения массы на квадрат скорости подробно обсуждаются природа и свойства живых сил, способы их измерения, приводится аналог теоремы об изменении кинетической энергии, который используется как метод решения задач, но не объявляется в качестве возможного принципа механики.

Законы соударения тел (определения скоростей после удара) Бернулли получает основываясь на идее относительности движения в стиле Гюйгенса. Для этого он добавляет достаточно очевидную аксиому («предложение II») о том, что относительные движения тел в результате удара не зависят от движения плоскости, в которой происходит удар (движение). При этом вводится понятие «количество направления», позднее вошедшее в механику как «количество движения центра масс». Полученные результаты, по мнению автора, обобщают результаты Гюйгенса в теории удара.

Современное понятие кинетической энергии тела по своей математической форме мало чем отличается от понятия живой силы. Поэтому история формирования понятия живой силы, трансформация его физического содержания не просто любопытна, а является способом освоения понятия кинетической энергии, его роли в современном понимании природы и описании движения тел. Бернулли указывает, что мертвая сила оказывает давление, она производит движение или вызывает «сопротивление препятствия», называемое ныне *реакцией связи*. Эта реак-

[1] Массу тела $A(B)$ Бернулли, как это было общепринято, ассоциирует с самим телом.

ция связи всегда равна и противоположна действующей силе. Примерами мертвой силы являются силы тяжести, упругости пружины. Природа живой силы совершенно отлична. Эта сила возникает и исчезает не мгновенно, а за некоторое время; она непрерывно производится в теле и может в нем сохраняться после прекращения действия вызвавшей ее причины; «она эквивалентна той части причины, которая израсходовалась производя ее, ибо всякая действующая причина должна быть равна своему действию, полностью выполненному. Тело, получающее эту силу, если оно не задерживается никаким препятствием, не оказывает никакого противодействия этой силе за исключением того, которое зависит от инерции, всегда пропорциональной массе; ...по мере того как тело воспринимает новые доли силы, причина, их производящая, должна их в той же степени терять... Именно эту силу, передаваемую телу, приведенному в движение посредством истощения давления пружины, и нужно называть собственно «живой силой». Благодаря ей тело и переносится с одного места в другое с известной скоростью, большей или меньшей в соответствии с энергией пружины» [6, с. 95–97]. Кроме этого, автор добавляет, что живая сила может быть израсходована на производство мертвой силы, например, на сжатие пружины. И степень ее сжатия будет равна той, которая была необходима для приобретения данной живой силы.

«В этом именно равенстве и состоит сохранение силы тел, находящихся в движении, так как очевидно, что ничтожная часть позитивной причины не может исчезнуть, не произведя взамен такого действия, при помощи которого эта потеря может быть восстановлена» [6, с. 98].

Останавливаясь далее на заслугах Лейбница во введении понятия живой силы, формулировке принципа сохранения живых сил, Бернулли выражает искреннее удивление и сожаление по поводу неприятия понятия живой силы сторонниками Ньютона и некоторыми французскими учеными[1]. Себя он называет первым последователем Лейбница. «Надо сказать, что доказательства Лейбница мне казались[2] недостаточно сильными, чтобы решиться принять его взгляд, ибо я признаюсь, что эти доказательства, будучи непрямыми и не будучи извлеченными из существа вопроса, о котором идет речь, убедить меня не могли. Однако они дали мне случай над этим задуматься. И лишь после длительного и серьезного размышления я нашел, наконец, средство убе-

[1]Bignon, Catelan, Mairan, Louville.

[2]Это было 28 лет назад (в 1686 г.).

дить самого себя при помощи прямых доказательств, стоящих выше всех возражений. Лейбниц, которому я их сообщил, был мне благодарен, — они послужили ему для привлечения последователей и привели к его взгляду некоторых из тех, которые раньше были втянуты в длительный спор с ним, так как не были полностью разубеждены его рассуждениями» [6, с. 101–102].

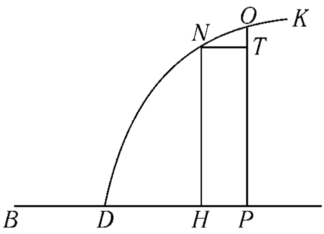


Рис. 3.5.2

Сравнение и измерение живых сил Бернулли сводит к сравнению и измерению упругих сил соответствующих пружин — сил, пропорциональных удлинению пружин. Возвращаясь к вопросу о математическом выражении живой силы, он приводит следующие рассуждения. Пусть BD — длина пружины, DH — траектория точки D (рис. 3.5.2), DNK — кривая скоростей, $BD = a$, $DH = x$, $HP = NT = dx$, $Hn = v$, $TO = dv$. «Элементарное приращение скорости в H, то есть дифференциал TO или dv, согласно известному закону ускорения, пропорционально произведению движущей силы, то есть давления p, и малого времени, в течение которого тело проходит дифференциал HP, то есть dx» [6, с. 113]. Бернулли записывает[1]:

$$dv = p\,dt = p\frac{HP}{HN} = p\frac{dx}{v},$$

$$v\,dv = p\,dx; \quad \frac{1}{2}v^2 = \int p\,dx.$$

Возможно, нелюбовь к понятию *количества движения* помешала Бернулли приравнять произведение $p\,dt$ к dmv (а не к dv), как того требовал известный закон ускоряющих сил (Ньютона). В этом случае он смог бы получить выражения теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной и интегральной (с добавлением константы) формах. А интегральная форма привела бы его и к соответствующему закону сохранения. Но едва ли можно всерьез упрекать Бернулли

[1]Аналогичные равенства были получены Вариньоном в работе 1700 г. В 1707 г. он получил правильное выражение (дифференциальное и интегральное) для теоремы об изменении кинетической энергии.

за то, что он не стремился писать свою механику на понятном нам языке[1]. У автора здесь совсем иная цель. Он стремится к оценке величины живой силы и делает это, в соответствии с традицией той эпохи, в форме отношений. Так, в первом следствии из полученного результата делается вывод о том, что «живые силы относятся как произведения масс на квадраты скоростей». В третьем следствии рассматривается случай постоянного давления p, откуда следует параболичность кривой скоростей DNK (парабола с параметром $2p$). Четвертое следствие устанавливает аналогию между постоянной силой давления и весом тела в задаче Галилея о падении тяжелых тел. Это означает, что «ускорение шаров в этом случае следует тому же закону, которому следуют падающие весомые тела». И пятое следствие говорит о том, что и в задаче о падении тяжелых тел, и в задаче о движении под действием постоянной силы пружины проходимые расстояния пропорциональны живым силам. Этот вывод оправдывает измерение Лейбницем живых сил высотами, с которых падали тела или на которые поднимались.

Далее автор приводит экспериментальные доказательства. Шарики, равные по величине, но разного веса, падали с различных высот на мягкое вещество (сало, гончарная глина) с горизонтальной поверхностью. Многочисленные опыты показали, что углубления от шариков в мягком веществе «равны, когда шарики падали с высот, обратно пропорциональных их весам. Из равенства углублений следует, что в момент начала погружения шарики имеют одинаковую силу. Эта сила пропорциональна углублению, высоте падения, а по закону Галилея — v^2. Таким образом,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2}.$$

Во втором эксперименте рассматривается косой абсолютно упругий удар двух шаров A и C (рис. 3.5.3).

В момент удара (шар A в положении B) движение (скорость) шара B раскладывается по направлению CB (проходящему через центры шаров) и перпендикулярному — BE. В результате удара шар В теряет составляющую скорости по направлению BCD (передает эту скорость шару C), равную FB, и продолжает движение по направлению BE со скоростью AF. Третий эксперимент является обратным второму: ша-

[1]Если под давлением p понимать удельное давление, приходящееся на единицу массы тела, то теорема энергии приобретает вполне законченный вид.

ры E и D движутся по перпендикулярным направлениям EB и DC, в момент удара гасится скорость DC шара $C(D)$, а шар $B(E)$ приобретает равную ей скорость BF в направлении BF. Показывается, что отношение живых сил до и после удара в первом случае будет равно $\frac{AB^2}{AF^2}$, во втором случае — обратному отношению. Далее аналогичные выводы делаются на примере мысленных экспериментов, связанных с ударом шара о пружины.

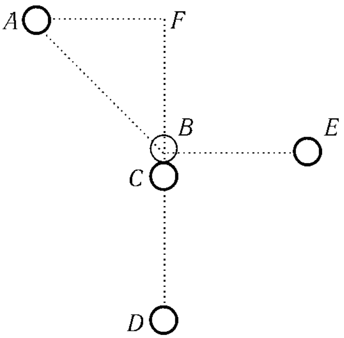


Рис. 3.5.3

Возвращаясь к законам *прямого удара абсолютно упругих тел*, Бернулли демонстрирует как из закона сохранения количества движения до и после удара получить соответствующий закон сохранения живых сил, впервые установленный, но не осознанный Гюйгенсом. Он предлагает считать эти законы единым законом, имеющим разные математические выражения. По-видимому, именно так отнесся к ним Гюйгенс, не придав своему равенству статуса нового закона сохранения — сохранения живой силы как основной меры движения. «Если не прибегать к помощи природы и к ее первым началам, то самые важные теоремы вырождаются в простые спекуляции», — поучительно восклицает Бернулли, имея в виду важность понимания физической сущности движения. Но здесь же он восторгается «полным согласием между законами природы и законами геометрии, согласием, наблюдаемым настолько постоянно и во всех обстоятельствах, что кажется, будто природа советовалась с геометрией, устанавливая законы движения» [6, с. 132]. Для Бернулли законы сохранения, как математический, теоретический аналог философского закона равенства действующих причин и их результатов, являются залогом стабильности природы, ее порядка. Эта мысль чрезвычайно важна для статуса законов сохранения (как основополагающих принципов теории и методов решения задач) в последовательном развитии физики и теоретической механики.

Рассматривая далее задачу об ударе одним телом нескольких (системы) тел, Бернулли использует ее решение для изучения движения тел в сопротивляющейся среде. Представляя среду как множество шариков-молекул, он отождествляет силу сопротивления среды с суммарной силой последовательных ударов тела о шарики-молекулы. Исследование начинается с задачи об ударе тела C о два покоящихся шара A и B одинаковой массы (рис. 3.5.4).

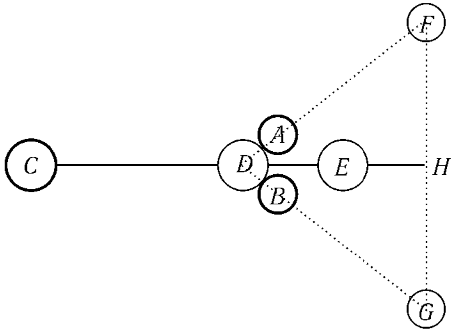


Рис. 3.5.4

Направления движения шаров после соударения соответствуют линиям CDE (для шара C), DAF и DBG (для A и B). Обозначая скорость шара C через $CD = a$, скорость C после удара (в положении D) через $DE = x$, скорости шаров A и B через AF и BG, равные y, массы A или B через n, а массу C через m, Бернулли составляет уравнение сохранения количества направления[1]:

$$ma = mx + \frac{2q}{p}\,ny.$$

При этом предполагается, что точка H является серединой прямой, соединяющей центры шаров A и B в положениях F и G, и центром тяжести шаров F и G, а $\frac{DH}{DF} = \frac{q}{p}$. Записывая далее уравнение сохранения живых сил до (ma^2) и после удара $(mx^2 + 2ny^2)$

$$ma^2 = mx^2 + 2ny^2,$$

автор решает полученную систему двух уравнений и находит, что

$$x = \frac{p^2ma - 2q^2na}{p^2m + 2q^2n}, \quad y = \frac{2pqma}{p^2m + 2q^2n}.$$

[1]Количества движения системы тел в данном направлении.

Дальнейший анализ этих результатов для различных углов FDH и соотношений между массами позволяет получить конкретные величины скоростей после удара.

Полученные формулы приводят Бернулли к двум новым оптимизационным задачам: 1) при какой величине угла $FDH(GDH)$ относительная скорость шаров A и B будет наибольшей, 2) при каком угле $FDH(GDH)$ скорость шара $A(B)$ в направлении $AF(BG)$ будет наибольшей. Для решения этих задач используется метод максимумов, состоящий в нахождении дифференциала dy и приравнивании его нулю. Дальнейшее обобщение полученных формул связано с произвольным увеличением количества пар шаров (A, B) и приводит автора к следующим результатам: предлагаемая теория позволяет определить «абсолютные действия сопротивления среды»; среда «оказывает движущимся в ней телам сопротивление, пропорциональное квадратам их скоростей»; «можно найти средство точно определить, сколько в действительности тело... потеряет в своей скорости после того, как им будет пройдено данное расстояние»; «исследование этого нового вопроса столь же любопытно, сколь и полезно на практике. Оно может привести к законам различных явлений, и тем достойнее было бы в него углубиться, что никто еще этим не занимался»; «величина потери скорости зависит и от формы движущегося тела», и от отношения плотности тела к плотности среды. Сделанные выводы используются для получения расчетных данных[1] движения в воздухе свинцовой пули (коноида), куба, прямого конуса. Выводится закон движения тела по траектории для случая *квадратичного закона сопротивления*, определяются кривые остаточных скоростей и времен. Задача обобщается для случая сопротивления среды пропорционального произвольной степени скорости. Это ответ на вызов[2] ньютонианца Кейля, ранее опубликованный в Acta eruditorum (май, 1719).

Последняя глава книги называется «Новый способ определения центра качания сложного маятника при помощи теории живых сил...». Задача об определении центра качания физического маятни-

---

[1]Если D — диаметр пули, то на расстоянии $3700D$ скорость уменьшится на половину; если a — сторона куба, то уменьшение скорости в два раза произойдет после прохождения пути $1770a$; аналогичное уменьшение скорости конуса с диаметром основания D произойдет через $924D$, если он движется вершиной вперед, и через $462D$ при движении основанием вперед.

[2]Ньютон решил задачу для случая $F_{\text{сопр}} \sim v$. Кейль предложил Бернулли решить задачу для $F_{\text{сопр}} \sim v^2$. Он решил задачу и для $F_{\text{сопр}} \sim v^2$, и для $F_{\text{сопр}} \sim v^n$.

ка, сформулированная в первой половине XVII столетия и привлекшая внимание всех видных механиков, наряду с задачами о падении тяжелых тел и ударе стала своеобразным полигоном для формулировки новых принципов механики и проверки — эффективности новых методов решения задач. Поэтому обращение И. Бернулли к этой задаче было вполне естественным. Первые публикации решения назывались «О природе центра качания» [137] и «Новая теория центра качания» [135].

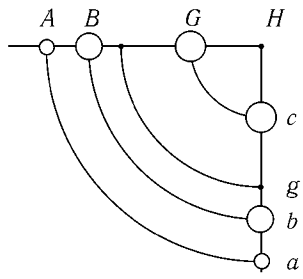
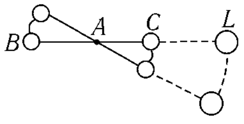


Рис. 3.5.5

И. Бернулли, как и его брату, принцип[1], положенный Гюйгенсом в основу его решения, казался недостаточно естественным, и он пользуется принципом сохранения живых сил[2]. Пусть физический маятник состоит из трех грузов A, B и C (рис. 3.5.5), связанных друг с другом или нанизанных на несгибаемый стержень AH и совершающих колебания вокруг оси H. Маятник опускается из горизонтального положения AH в верти-

[1]«...если после того, как сложный маятник опустился с данной высоты и достиг вертикального положения, вдруг разделить на составляющие его элементарные грузы так, чтобы каждый из этих грузов поднимался отдельно со скоростью, приобретенной им в момент своего отделения, то центр тяжести этих грузов сможет подняться не выше той высоты, с которой он опустился» [6, с. 167].

[2]В работах 1713–1714 гг. он пользуется иной идеей, очень близкой к методу его брата (работы 1691 и 1703 годов), изложенному в начале этого параграфа. Суть идеи состоит в замене физического маятника изохронным ему математическим («мнимым») маятником равной массы. Эта замена демонстрируется на примере маятника BAC, вращающегося около A и отождествляемого с маятником ACL, в котором мнимая точка L имеет отрицательное ускорение свободного падения. Вес тела B возбуждает в точке L мнимую силу (точнее, момент силы), которую Бернулли называет «возмущающей силой» или «возмущающим средством» (force ou la vertu agitative). Равенство моментов сил, следующее из аналогичности маятников ABC и BCL, позволяет найти искомое расстояние AL.



Эту идею автор распространяет на произвольную систему тел. Далее результат обобщается на случай колебаний системы тел в среде. Работа [135], безусловно, является важнейшей прелюдией создания механики системы тел.

кальное Ha; приобретенные при этом скорости грузов относятся друг к другу как расстояния до H (следствие негибкости стержня AH), то есть $v_A \sim AH = a$, $v_B \sim BH = b$, $v_C \sim CH = c$.

Если представить, что грузы A, B и C свободны, то по закону Галилея в точках c, b и a скорости $v_c \sim \sqrt{Hc}$, $v_b \sim \sqrt{Hb}$, $v_a \sim \sqrt{Ha}$. Если $Hg = x$, то $v_g \sim \sqrt{x}$, $Hc = cx$, $Hb = bx$, $Ha = ax$, $v_c \sim \sqrt{cx}$, $v_b \sim \sqrt{bx}$, $v_a \sim \sqrt{ax}$. Тогда из принципа сохранения живых сил (сумма живых сил в горизонтальном и вертикальном положениях одинакова)

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 + m_C v_C^2 = m_A v_a^2 + m_B v_b^2 + m_C v_c^2$$

следует

$$x = \frac{m_A a^2 + m_B b^2 + m_C c^2}{m_A a + m_B b + m_C c}.$$

В «Добавлении к рассуждению о законах передачи движения тел», написанном в 1726 г., И. Бернулли обсуждает свою идею внутренней структуры тел и происходящих там процессов: тело пористо, и поры заполнены некоторой жидкостью, циркулирующей внутри тела как следствие внешних взаимодействий тел, связанных с деформацией, изменением формы тел. В процессе своих рассуждений автор обсуждает основы будущей гидродинамики. Упругость тел объясняется действием центробежных сил вихрей жидкости («эфира») в порах тел. Эта попытка Бернулли проникнуть в тайны микромира не получила дальнейшего развития и заслуживает внимания только с исторической точки зрения.

Продолжением «Рассуждения о законах передачи движения» стала работа И. Бернулли «Об истинном значении живых сил и их применении в динамике» [138], где уточняется понятие живой силы: «Живая сила состоит не в действительной работе, а *в способности к действию*: она существует и тогда, когда не действует и когда не имеет объекта, на который она могла бы действовать. Так, например, натянутая пружина или же, скажем, тело с установившимся движением имеют в себе способность к действию, хотя бы вне их, и не было ничего такого, на чем они могли бы проявить эту способность...» [6, с. 219]. Он считает, что живую силу «лучше было бы называть «способностью к действию», вкладывая в нее энергетический, потенциальный смысл. Из живой силы «ничего не может пропасть без того, чтобы мы снова не нашли эту потерю в произведенном действии; ... живая сила всегда сохраняется ..., находившаяся до действия в одном или нескольких телах ..., после действия обязательно встретится нам в другом теле или в других нескольких телах, если только она не останется неизменной в прежних телах.

Это и есть то, что мы называем *сохранением живых сил*» [6, с. 221].

Дальнейшее обращение Бернулли к идее сохранения живых сил показывает, что сохранение полной механической энергии тел было осознано им не только на физическом уровне, но и получило свое математическое воплощение:

$$P\,dS = V\,dV,$$

где P — «ускорительная сила», dS — элемент пройденного пути, V — скорость. Записанное уравнение автор использует для решения задач[1] и называет очень распространенным принципом динамики, «в правильности которого никто не сомневается».

Этот принцип далее используется для доказательства уже упоминавшегося принципа Торричелли – Роберваля – Гюйгенса о высоте центра тяжести системы тел: «В настоящее время я полагаю, что истинность этой аксиомы Гюйгенса доказана и подкреплена теорией живых сил, так что на будущее время она законно должна занять место среди тех предложений динамики, которые считаются наиболее достоверными» [6, с. 243–244].

Бернулли утверждает, что закон сохранения не является угрозой исчезновения движения, он является подтверждением единства физической сущности движения тел. «Если бы Ньютон, — пишет Бернулли, — понял раньше истинную природу живых сил, то он, конечно, не установил бы два различных начала: одно — для сообщения телам движения, другое — для сохранения их движения. Ведь то же самое начало, посредством которого движение сообщается, приводит и к тому, что движение сохраняется. Это начало заключается не в количестве движения, а в живой силе. Тем самым, делается совершенно ясно, что движение по природе вещей никогда не может исчезнуть, чего, по-видимому, боялся Ньютон, напуганный ложными страхами» [6, с. 244–245]. Цитируя «Оптику» Ньютона[2], Бернулли ясно выражает свое отношение

[1] В задаче о движении двух связанных нитью тел под действием силы тяжести Бернулли полагает $P = g$. Это обозначение ускорения свободного падения стало общепринятым в механике.

[2] «Для того, чтобы приводить тела в движение, вообще необходимо какое-то другое начало (кроме силы инерции). Когда же они приведены в движение, нужно

к важности теории живых сил: «Конечно, не в наших силах заставить кого-либо признать, что начинается день, хотя бы было видно, что над горизонтом поднимается солнце... Если бы эту теорию открыл великий Ньютон, то, — кто знает, — не рукоплескала ли бы ему уже давно вся Великобритания» [6, с. 244]. Сопоставление решений задач методом живых сил и другими методами[1] (в частности, решение Тейлором задачи о колебаниях струны) окончательно убеждает Бернулли: «И если бы Тейлор был теперь жив и имел бы хоть каплю благородства, то, возможно, это совпадение побудило бы его принять теорию живых сил» [6, с. 249].

Одной из самых известных задач, сформулированных и решенных И.Бернулли, была задача о брахистохроне (1696), то есть о линии, по которой тело проходит от одной точки до другой за кратчайшее время. В своем решении Бернулли исходил из принципа Ферма: «...луч света, проходящий из более редкой среды в более плотную, отклоняется к перпендикуляру таким образом, что за данный промежуток времени луч (который по предположению проходит последовательно от точки, испускающей свет, до освещаемой точки) совершает кратчайший путь» [6, с. 29–30]. Ферма показал, что синус[2] угла падения относится к синусу угла преломления как разряженности сред, или в обратном отношении их плотностей, или в отношении скоростей луча (точки) в средах. Этот результат был подтвержден Лейбницем (Acta eruditorum, 1682) и Гюйгенсом («Трактат о свете»). Считая, что среда имеет переменную плотность, Бернулли разбивает ее на бесконечно большое количество горизонтальных слоев с постоянной плотностью. При этом луч (шарик), перемещаясь от слоя к слою, будет описывать некоторую ло-

опять другое начало для сохранения движения этих тел». Далее Ньютон приводит явно ошибочный пример несохранения количества движения.

[1]Решение Германна задачи о движении двух тел, связанных нитью, не совпало с решением И. Бернулли. По этому поводу последний пишет: «...не раз замечалось, что этот почтенный муж, трактуя то там, то здесь вопросы динамики, часто говорил вздор. Это я говорю не для того, чтобы сколь-нибудь умалить его достоинства, а для того, чтобы другие учились осторожнее обращаться с этим вопросом, до сих пор еще покрытым густым туманом. Они должны видеть, что даже великие люди частенько спотыкались в них. В этом Германну уподобляется и Ньютон, которому иногда также приходилось расплачиваться за свои грехи, как я показал это выше, а еще больше в других местах» [6, с. 260].

[2]До Эйлера под синусом угла понималась длина перпендикуляра, опущенного в единичном круге из конца подвижного радиуса на неподвижный. А «полным синусом» назывался радиус круга.

маную, каждое звено которой является траекторией быстрейшего перемещения точки внутри отдельного слоя (от точки к точке). Эта линия будет траекторией точки, проходящей через среду, с разряженностью, пропорциональной скорости вертикального падения точки (с соответствующим ускорением).

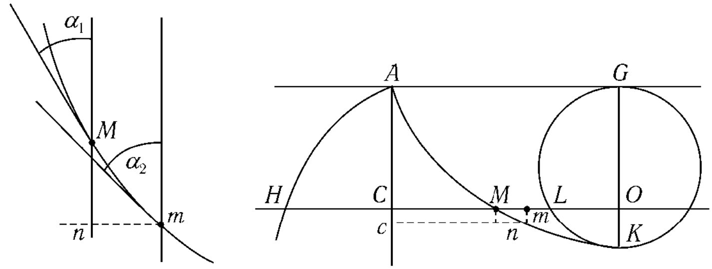


Рис. 3.5.6

Пусть точка движется из положения A (рис. 3.5.6) по искомой кривой AM, со скоростями, задаваемыми кривой AH, $AC = x$, $CM = y$, $Cc = dx$, $mn = dy$, $Mm = dz$, $CH = t$,[1] $a = \text{const}$,[1] $\sin\alpha_1 \approx dy$, $\sin\alpha_2 \approx dz$. На основании принципа Ферма

$$\frac{dy}{t} = \frac{dz}{a}.$$

Но $dz = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, поэтому полученное равенство приводит к уравнению

$$a^2(dy)^2 = t^2(dx)^2 + t^2(dy)^2,$$

из которого следует дифференциальное уравнение для траектории AM:

$$dy = \frac{t\,dx}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

По закону Галилея, кривая AH является параболой

$$t^2 = ax.$$

[1]Буквой t обозначена скорость (пропорциональная времени) в положении M, скорость за время перехода из M в m, т. е. по dz, считается постоянной, равной a.

В таком случае полученное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$dy = \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx.$$

Решение этого интеграла и является искомой кривой AM — брахистохроной.

Но Бернулли обращает внимание и на то, что брахистохрона является той же самой кривой, которая была получена Гюйгенсом при исследовании колебаний маятника. Это *циклоида.* Действительно, если считать, что круг GLK диаметром a катится без проскальзывания по линии AG, то можно показать, что точка K его окружности будет описывать кривую (циклоиду)

$$y = \int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx + C,$$

где $x = AC$, $y = CM$.[1] Это совпадение, отмечает автор, «вытекает только из основного положения Галилея; уже из этого можно было бы заключить, что это положение находится в согласии с природой. Природа всегда действует простейшим образом, — так и в данном случае она с помощью одной и той же линии оказывает две различных услуги» [6, с. 36–37].

Отметим, что решение задачи о брахистохроне было чисто кинематическим, основанным на законах Ферма и Галилея, и использовало идеи нового математического анализа. Оно было традиционным, но сама постановка задачи — определение движения, отвечающего некоторому экстремальному критерию, — оказалась чрезвычайно перспективной. Перспективной и с точки зрения формирования нового раздела математики — вариационного исчисления, как метода постановки и решения экстремальных задач, и с точки зрения открытия новых принципов движения тел природы. Мысль о том, что «...природа всегда действует простейшим образом», стала отправной в поисках критериев движения и равновесия тел (минимум времени, пути, действия, высоты центра тяжести, потенциальной энергии, ...), играющих роль законов природы. И аппарат вариационного исчисления, а позднее и теории

[1]Решение интеграла после замены $\sqrt{\dfrac{x}{a-x}} = \dfrac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} - \dfrac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$ не вызывает трудностей.

оптимального управления, стал одним из основных методов аналитической механики.

К задаче о брахистохроне И. Бернулли возвращался многократно[1]. Искал новые решения, ставил вопрос о единственности решения. Но в августе 1697 г. в «Journal des Scavans» он опубликовал постановку еще одной экстремальной задачи, обсуждавшейся им в переписке с Лейбницем, — о геодезических линиях: найти кратчайшую траекторию между точками на выпуклой поверхности. Задача оказалась непростой. Бернулли опубликовал свое решение только в 1742 г., хотя основная идея метода была высказана в письме Лейбницу в 1715 г. Первым же решение этой задачи опубликовал Эйлер («Комментарии Петербургской академии наук», 1732). В процессе решения задачи И. Бернулли ввел понятия пространственных координат и уравнения поверхности: «Под данной кривой поверхностью я разумею такую, отдельные точки которой (подобно точкам данной кривой линии) определяются тремя координатами: x, y, z, отношение между которыми выражается данным уравнением; эти же три координаты суть не что иное, как три перпендикулярных отрезка, проведенных из какой-либо точки поверхности к трем плоскостям, данным по положению и взаимно пересекающимся под прямыми углами» [64, с. 100].

За свою долгую жизнь[2] И. Бернулли внес значительный вклад в развитие новой механики. Его работы вызывали живой отклик не только современников, но и ученых следующих поколений. Он сформировал начальный круг научных интересов своих сыновей Даниила и Николая, Эйлера. Даламбер считал, что знанием математики и механики он обязан И. Бернулли. Трудно дать объективную оценку заслуг И. Бернулли в механике, не обращаясь к его математическому творчеству. Специфика теоретической механики состоит в том, что математические приемы решения задач, математический аппарат механики не есть нечто внешнее для механики, а является ее составной частью. Поэтому многие работы Бернулли-математика по своей сути имеют механическую направленность. Это работы, закладывавшие основы дифференциального и интегрального исчисления, теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления. Обширный перечень практических задач, сформулированных и решенных И. Бернулли, стал важ-

[1]Публикации в Мемуарах Парижской академии за 1706, 1718 гг. Работа 1706 г. («Решение задачи ... об изопериметрических») посвящена решению задачи (1697) Я. Бернулли и является примером классической постановки вариационной задачи.

[2]Родился 27 июля 1667 г., умер 1 января 1748 г.

ной составной частью многих разделов современной механики: теории удара, теории колебаний, динамики системы точек и тел, внешней и внутренней баллистики, гидродинамики, теории (динамике) корабля[1]. Особо следует отметить вклад И. Бернулли в формирование современного понятия кинетической энергии — одной из основных мер движения в теоретической механике. И Лейбниц, и Бернулли, раскрывая физический смысл живой силы (mv^2), подчеркивали, что она может быть причиной возникновения движущей (по их терминологии «мертвой») силы, то есть силы реальной, физической, как меры взаимодействия тел. Понятие живой силы позволило им дать импульс для формирования нового, отличного от ньютоновского, направления развития механики на основе принципа сохранения живых сил.

3.6. Д. Бернулли и принцип сохранения живых сил

Последовательным сторонником принципа сохранения живых сил, внесшим значительный вклад в раскрытие его физической сущности, стал следующий представитель рода Бернулли, выдающийся сын выдающегося отца (И. Бернулли) — Даниил Бернулли.

Творческий путь Д. Бернулли был очень разнообразен по научной тематике (математика, классическая механика, физиология, астрономия, физика, гидродинамика, теория упругости) и плодотворен. Как и для его дяди, отца, старшего брата Николая[2], стимулом для его творчества было решение практических, актуальных для начала XVIII в. научных задач. Эти задачи, отличные от задач предыдущих столетий, были интересны и по своей сути, и по перспективам практических при-

[1] В 1714 г. И. Бернулли издал в Базеле трактат «Новая теория управления кораблями» [139]. Книга посвящена изучению движения парусного судна под действием силы ветра с учетом силы сопротивления воды. Рассматривается движение тела (корабля) прямоугольной, ромбовидной, круглой или овальной формы в воде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости тела, под действием постоянной силы (ветра). Решаются задачи определения углов ориентации паруса и киля, дающих наибольшую движущую силу; определения траектории и скорости судна, формы паруса (решение — цепная линия). За четверть века до Бернулли, в 1689 г., книгу с похожим названием («Теория управления кораблями» [272]) издал Б. Рено. Критические замечания к этой работе Гюйгенса и Лопиталя и заставили Бернулли предложить свою теорию.

[2] Н. Бернулли — один из первых академиков Петербургской академии наук, профессор кафедры математики, возглавляемой Я. Германном. Профессором той же кафедры был известный академик Христиан Гольдбах — первый конференц-секретарь и советник академии.

менений, и по методам их решения, главным из которых стал аппарат нового математического анализа, который и создавался в процессе решения этих задач. Математическая модель задачи строилась на основании определенного принципа механики. Для Д. Бернулли таковым принципом стал принцип сохранения живых сил, в популяризацию которого он внес чрезвычайно важный вклад.

В статье «Исследование принципов механики и геометрические доказательства относительно сложения и разложения сил» (Комментарии Петербургской академии наук, 1726) Д. Бернулли рассматривает основные идеи и исходные принципы механики Ньютона и Вариньона. Он показывает, что закон сохранения количества движения ($\sum mv = \mathrm{const}$) аналогичен интегралу $\int p\,dt = \mathrm{const}$ второго закона Ньютона (p — давление, сила), называемому им «механическим началом». Аналогичным образом, после преобразования закона Ньютона к виду $v\,dv = p\,dx$, он установил, что $\frac{v^2}{2} = \int p\,dx$, то есть математическое выражение закона сохранения живых сил эквивалентно интегралу $\int p\,dx = \mathrm{const}$. Таким образом была установлена формальная связь между законами Декарта, Ньютона и Лейбница, служащая основательным подтверждением их истинности и устанавливающая соотношение между дифференциальными и интегральными принципами и сферами их применения. Однако суть этого соответствия была осознана только в следующем столетии.

Для ученых конца XVII – начала XVIII вв. привычными были принципы, выражающие сохранение той или иной величины. Такие принципы отражали единство, стабильность Мира и его Создателя. Они были более созвучны массовому сознанию. Философский же принцип соответствия причины и следствия, математическим и физическим выражением которого был второй закон Ньютона, многим казался недостаточно основательным. Об этом пишет и Д. Бернулли, считающий, что закон Ньютона получен из опытного изучения Галилеем падения тяжелых тел и не имеет всеобщего значения для любых видов движений и действующих сил. «Мы не знаем природы причины и способа ее действия, и потому не можем знать, действительно ли действие пропорционально своей причине, или же оно пропорционально какой-нибудь степени, или вообще какой-нибудь функции от своей причины», — пишет Д. Бернулли [26, с. 72].

Убедить ученый мир в полезности понятия живой силы и основополагающем характере соответствующего принципа можно было только эффективным решением уже известных и новых задач и доказательс-

Даниил Бернулли

твом непротиворечивости этого принципа общепринятым принципам механики. Именно по этому пути и пошли И. и Д. Бернулли. Использование ими принципа сохранения живых сил для решения задач удара, баллистики, физического маятника показало его эффективность как метода решения.

В «Исследованиях принципов механики ...» Д. Бернулли касается еще одного важного принципа классической механики — правила сложения сил. После работ Ньютона и Вариньона, когда механика окончательно стала не философской, а математической наукой, построение законченной теории движения или равновесия тел без этого правила было невозможно. Это обстоятельство еще долго (до появления понятия силы как вектора) вынуждало многих ученых[1] приводить свои собственные, как сейчас понятно — обреченные на неуспех, доказательства правила параллелограмма. И доказательство Д. Бернулли долгое время считалось наиболее убедительным[2].

Самым убедительным доказательством истинности принципа живых сил оказалось построение Д. Бернулли на его основе *теории о силах и движениях жидкостей.* Даже названием своей теории и посвященной ей основополагающей работы — «Гидродинамика»[3], — изданной в Страсбурге в 1738 г., Даниил подчеркивал преемственность динамических идей Лейбница. «Действительно, мне кажется, что во всем учении Лейбница о живых силах нет ничего такого, с чем не согласились бы все, хотя каждый и выражается по-своему, ...» [5, с. 29]. Но, апеллируя к Лейбницу, Д. Бернулли не забывает отметить, что свою теорию строит на прочном фундаменте общепринятых понятий и принципов: « ... я принимаю в механике только то, что принято всеми и, в том числе, Галилеем, когда он установил, что приращения скоростей пропорциональны давлениям и элементам времени»[4]. Анализ этой книги, написанной Д. Бернулли в петербургский период его жизни[5], выходит за рамки данной работы, поэтому остановимся только на некоторых ее фрагментах.

---

[1]Даламбер, Боссю, Монж, Л. Карно, Пуансо, Лаплас, Пуассон, Дарбу, Остроградский, Чебышев, Жуковский, Фридман.

[2]Более подробно в [99].

[3]Термин «гидродинамика» введен в механику Д. Бернулли.

[4]По мнению А. И. Некрасова, «последняя фраза описывает формулу $\Delta v = \dfrac{F}{m}\Delta t$» [5, с. 511].

[5]«Я охотно объявляю, что главнейшая часть этой работы обязана руководству, замыслам и поддержке со стороны Петербургской Академии наук» — пишет он в Предисловии к книге [5].

В первой, вступительной части «Гидродинамики» называются имена предшественников автора (Архимед, Кастелли, Торричелли, Борелли, Паскаль, Бойль, Мариотт[1], Ньютон, Вариньон, Германн, Я. и И. Бернулли), приводится краткая характеристика их вклада и содержания всей книги, формулируются основные гипотезы и понятия. «Важнейшим началом, — пишет Д. Бернулли, — является сохранение живых сил, или, как я выражаюсь, равенство между действительным опусканием и потенциальным подъемом» [5, с. 27]. Понятия «действительного опускания» и «потенциального подъема» автор поясняет следующим образом: «...потенциальный подъем системы, каждая из частей которой движется с любой скоростью, обозначает вертикальную высоту, которой достигает центр тяжести указанной системы, если представить себе, что каждая из ее частиц при обращенном вверх движении поднимется, насколько она может под влиянием собственной скорости, а действительное снижение обозначает вертикальную высоту, на которую снижается центр тяжести после того, как каждая из частиц пришла в состояние покоя» [5, с. 54].

Комментируя свою формулировку принципа сохранения живых сил, Д. Бернулли подчеркивает: «Поразительно, до какой степени полезно это положение в механической философии, на что правильно обратил внимание именно мой отец, указавший на него в различных работах, а впервые — в изданной в Париже диссертации «О законах движения...» [5, с. 28]. Суть же принципа сохранения, который Д. Бернулли связывает с именами Галилея, Гюйгенса и Лейбница, состоит в том, что «если любое количество весомых тел начинает двигаться произвольно под действием силы своей тяжести, то скорости отдельных тел повсюду будут таковы, что сумма их квадратов, умноженных на соответствующие массы, будет пропорциональна вертикальной высоте, на которую снизится общий центр тяжести этих тел, умноженной на массы всех тел» [5, с. 28].

Понятие «движущая сила» у Д. Бернулли вполне традиционно. Оно используется им для определения понятия «абсолютной мощнос-

[1]Значительное влияние на формирование научных интересов Д. Бернулли оказала книга Э. Мариотта «Трактат о движении вод и жидких тел» [246]. В книге анализируются природные свойства жидкости, обсуждается сущность упругости и причина ветров, рассматриваются различные случаи равновесия жидкостей под действием их веса, упругого сжатия и удара, проблемы измерения текущей воды, исследуются траектории струй жидкости различной геометрии, приводится большое количество опытных материалов, важных для практических применений.

ти»: «Произведение же, получающееся от умножения этой движущейся силы на ее скорость, а также на время, в течение которого она развивает свое давление, я буду называть абсолютной мощностью, а так как произведение скорости на время прямо пропорционально просто пройденному пути, то абсолютную мощь можно будет также определить с помощью движущей силы, умноженной на пробегаемое ею расстояние» [5, с. 232]. Очевидно, что «абсолютная мощность» если и отличается от современного понятия работы силы, то только знаком. Иными словами, абсолютная величина нынешней работы силы совпадает с «абсолютной мощностью» Д. Бернулли.

И еще два понятия — «потенциальная живая сила» и «действительная живая сила», близкие к современным понятиям потенциальной и кинетической энергии, — были использованы Д. Бернулли. Потенциальная живая сила возникает как следствие падения тела весом p с высоты x и равна px. Действительная живая сила, присущая телу в момент падения с высоты x, равна $\frac{1}{2}pv^2$ (v — скорость в момент падения). Обратим внимание на то, что в выражении живой силы присутствует коэффициент $\frac{1}{2}$ [5, с. 321], получающийся в результате интегрирования дифференциальной формы закона сохранения живых сил. Для Лейбница и И. Бернулли было важно показать, что живая сила пропорциональна квадрату скорости; Д. Бернулли впервые устанавливает ее точное выражение.

Значение «Гидродинамики» Д. Бернулли значительно шире сферы механики сплошных сред. Здесь не только решается обширный круг задач гидростатики, гидравлики и гидродинамики, но и закладываются основы современной механики жидкости и газа как естественное развитие фундаментальных понятий и принципов классической механики и математического анализа. Именно здесь дается физическое объяснение возможности потери живых сил и, по сути, лейбницев закон сохранения живых сил подменяется значительно более общим законом сохранения, близким к закону сохранения полной механической энергии. Сам автор справедливо отмечал: « . . . я рассматриваю настоящий трактат скорее как физический, чем как математический» [5, с. 34]. Формирование физических представлений, связанных с проблемами изучения движения и равновесия твердых тел и жидкостей, является одной из крупнейших заслуг Д. Бернулли и важнейшим достижением науки XVIII в.

Глава 4

ВКЛАД УЧЕНЫХ ПАРИЖСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

4.1. Европейское научное сообщество и Парижская академия наук конца XVII – начала XVIII века

Признанный научный авторитет Галилея, труды Декарта и его обширная переписка стали своеобразным катализатором мирового научного прогресса XVII–XVIII вв. Во второй половине XVII в. в некоторых странах Европы начался процесс огосударствления научной деятельности. Передовые государственные деятели, осознав практическую ценность развития научных исследований, превращали научную работу в престижный вид государственной службы, создавали благоприятные моральные и материальные условия для творческой деятельности ученых, защищали их авторские, а значит, и государственные, права. Именно в этом русле развивался процесс организации научных обществ, начавшийся созданием итальянских академий («Академия тайн природы» — Неаполь, 1560; Академия Деи Линчеи[1] (рысьеглазых) — Рим, 1603; Академия Дель Чименто[2] (опытных знаний) — Флоренция, 50-е гг. XVII в.), в Англии, Франции, Пруссии, России.

История Лондонского Королевского общества начинается с небольшого кружка ученых, интересующихся натуральной философией. Начиная с 1640 г., Уилкинс, Годдард, Энт, Глиссон, Меррет, Фостер, Гаак (инициатор встреч) и другие изредка собирались у кого-нибудь дома или в таверне около Грешемовского колледжа[3] для обсуждения вопросов физики, анатомии, геометрии, астрономии, механики, навигации, химии, физиологии, ..., новых книг, новых экспериментов. В конце 40-х Уилкинс, Годдард, Уоллис переезжают из Лондона в Оксфорд, в 1654 г. к ним присоединился Р. Бойль, взявший ассистентом в свою химическую лабораторию Р. Гука. Таким образом, кружок разбился на

[1]Одним из первых ее членов был Г. Галилей.

[2]Членами этой академии были Э. Торричелли, В. Вивиани, Дж. Борелли.

[3]Основан лорд-мэром Лондона Томасом Грешемом (1519–1579).

два: лондонский и оксфордский. В 1659 г. оба разросшихся кружка объединились, и заседания уже проводились в Грешемовском колледже, профессорами которого в то время были Кристофер Рен и Лоуренс Рук. После очередного доклада Рена (28.11.1660) двенадцать наиболее активных членов (Броункер, Бойль, Морей, Рен, Уилкинс, Рук и другие) решили ввести порядок в заседаниях, сделать их регулярными, а для этого организовать специальный колледж для проведения физико-математических экспериментов (по образцу итальянских академий). Тогда кружок состоял из 55 членов, а к марту 1661 г. их число возросло до 73 [10, с. 40].

Бурные политические события английской истории XVI–XVIII вв., особенно с приходом в 1603 г. к власти Якова I — первого короля династии Стюартов, косвенным образом способствовали повышению престижа ученых, распространению научных знаний. Монархи стремились приближать к себе видных ученых, прислушивались к их советам, назначали на важные государственные посты. Дочь Генриха VIII — королева Елизавета I (1558–1603), будучи сама высокообразованным человеком, покровительствовала интеллектуалам, своим придворным врачом она назначила выдающегося физика, заложившего основы учения о магнетизме, Уильяма Гильберта.

Влияние физических идей У. Гильберта на творчество Кеплера, Галилея, Декарта не вызывает сомнения. Идеолог науки нового времени, основоположник индуктивного метода исследования Френсис Бэкон, даже критикуя главное сочинение Гильберта «О магните» (1600), безусловно, находился под его влиянием.

Занявший после Елизаветы I престол Яков I всячески способствовал продвижению Ф. Бэкона от должности адвоката до поста генерального прокурора, члена тайного совета, лорда-хранителя печати, лорда-канцлера (с 1617), присвоил ему титулы виконта и барона. Эта блестящая государственная карьера не помешала Ф. Бэкону стать автором целого ряда популярных сочинений[1], в том числе и его основного труда «Новый органон» (1620), в котором он открыто выступает против догматизма учения Аристотеля и призывает в основу новой науки положить опыт. Опыт — как источник знания и как критерий его верности. «...Бэкон привел в движение умы, которые преобразовали мир», — писал выдающийся английский историк Т. Б. Маколей [44, с. 56].

[1] «Опыты или наставления нравственные и политические» (1597), «О значении и успехе знания ...» (1612), «О достоинстве и приумножении наук» (1623), «Новая Атлантида» (1627).

Внук Якова I Карл II[1], ставший королем в 1660, добился стабилизации внутригосударственной ситуации, покровительствовал развитию наук и 15 июля 1662 г. подписал хартию, в которой лондонское общество называлось «Лондонским Королевским обществом для развития знаний о природе» («Royal Society of London for Improving Natural Knowledge»). Однако четко продуманная деятельность Общества началась раньше. С марта 1661 г. начались выборы (ежемесячные) Президента. Первым главой Общества стал Роберт Морей, переизбиравшийся на этот пост еще девять раз, пять раз избирался Уилкинс, по разу — Бойль и Броункер. Первым президентом, утвержденным Карлом II, стал лорд Уильям Броункер.

Финансовая независимость Общества определялась достаточно высоким вступительным и еженедельными взносами его членов (в год организации — около ста человек, через десятилетие — почти двести). Каждый член Общества мог по своему усмотрению избирать тему и предмет своего исследования. Было решено учредить должность куратора Общества, которому вменялась организация заседаний, подготовка демонстрационных экспериментов, соответствующих установок и приборов. Первым куратором был избран Роберт Гук, выдвинувший свою программу деятельности Общества, направленную на экспериментирование и практическое исследование научных результатов. Эта программа была утверждена в 1663 г. во второй хартии, установившей герб Королевского общества с девизом «Nullius in Verba» («Ничто словесно» — перефразировка одной из строк Горация).

Броункер был президентом до 1677 г. и способствовал возрастанию авторитета Общества не только как видный математик, но и как важный государственный деятель, с 1662 г. бывший канцлером королевы, а с 1664 г. — комиссаром Адмиралтейства. С марта 1664 г. Общество начало издавать журнал «Philosophical Transactions». Первым из двух (по хартии) секретарей Общества в 1662 г. был избран Генри Ольденбург, сыгравший, наряду с Гуком, важнейшую роль на начальном этапе его формирования. Авторитет Лондонского Королевского общества был очень велик, его членами были многие выдающиеся ученые Европы (Гюйгенс с 1663, Ньютон с 1672, Лейбниц с 1673, И. Бернулли с 1712, Мопертюи с 1728, А. Клеро, Ж. Д. Кассини, Д. Бернулли с 1750, Кениг с 1751 и другие) [235].

---

[1]После казни его отца Карла I в 1649 г. у власти до 1658 был Кромвель (1599–1658).

Благоприятный интеллектуальный климат к середине XVII в. сложился в Голландии. Амстердам, как некогда Венеция, превратился в центр европейского книгопечатания и книжной торговли. Здесь жили и работали знаменитый чешский ученый и педагог Ян Амос Коменский, математики Григорий Сен-Венсан, Франц ван Схоутен[1], Ян де Витт, Иоганн Гудде[2], философы Барух Спиноза и Джон Локк[3].

Декарт, проживший в Голландии более 20 лет, познакомился с отцом Х. Гюйгенса — Константином — в доме известного арабиста и профессора математики Лейденского университета Якоба Голиуса. Константин Гюйгенс был не только видным государственным деятелем[4], но и известным поэтом, хорошим художником и музыкантом, говорил на большинстве европейских языков, был любителем и знатоком математики и физики. Крупный геометр Ян де Витт был действующим политиком — лидером республиканской партии, в качестве Великого пенсионария Голландии (с 1653), был фактическим руководителем республики Соединенных провинций (Нидерландов) с 1650 по 1672 г., (с 1674 г. к власти в Голландии пришел Вильгельм III Оранский, ставший в 1689 королем Англии и правивший совместно с женой Марией II Стюарт). Лейденский университет (основан в 1575) был одним из самых знаменитых университетов Европы. В разные годы в нем учились или преподавали Стевин, Скалигер, Снеллиус, Схоутен, опубликовавший сочинения Виета и «Геометрию» Декарта, отец и сын Гюйгенсы, с'Гравесанде.

Важнейшим научным центром Европы второй половины XVII в. становится Франция, в которой стихийный процесс создания научных кружков, обществ, «академий» развивался по итальяно-английскому сценарию. «Подлинным центром французской науки была, вплоть до его смерти в 1658 г., келья францисканского монаха Мерсенна, который сам был незаурядным ученым. Он неустанно вел переписку, будучи своего рода главным почтамтом для всех ученых Европы, начиная с Галилея и кончая Гоббсом» [4, с. 192].

После смерти Мерсенна, его роль перешла к королевскому библиотекарю Пьеру де Каркави. Все члены общества регулярно собира-

---

[1]Профессор математики, учитель Х. Гюйгенса.

[2]Был бургомистром Амстердама.

[3]Жил в Голландии с 1683 по 1688 г.

[4]Как и его отец (Христиан), а позднее и его старший сын (Константин), он занимал пост секретаря принца Оранского (при Фредерике-Гендрике, Вильгельме II, Вильгельме III), к концу жизни стал председателем государственного совета.

лись на «ассамблеи» в парижском доме высокопоставленного судебного чиновника герцога Абера де Монмора. Наиболее активными участниками встреч были Гассенди, Сорбиер, Роберваль, Мариотт, Дезарг, Э. Паскаль[1]. Желанным гостем общества был Х. Гюйгенс, посещавший Париж в 1655 и 1660 гг.

Активную роль в организации Парижской академии наук сыграл генеральный контролер финансов, то есть фактический руководитель финансовой политики короля Людовика XIV[2] (1643–1715), Жан Баптист Кольбер, объявивший об ее учреждении в 1666 г. В отличие от Французской академии, основанной Ришелье в 1635 г. для создания Словаря французского языка, и Академии словесности[3], образованной Кольбером в 1663 г. для исследований по истории и археологии, Парижская академия наук была организована для работ в области физико-математических, естественных наук и их приложений. Она включала 130 членов, 50 ассоциированных иностранных членов, 160 корреспондентов и 2 постоянных секретарей. Целями создания академии были пропаганда идей абсолютизма, управление и контроль научной деятельности. С 1669 г. новая академия наук получила покровительство короля. Главным отличием Парижской, или Королевской, академии наук от Лондонского Королевского общества было то, что она с самого основания находилась под управлением государства. Она существовала не на личные средства ее членов, а пользовалась финансовой поддержкой государства. Ее члены получали государственные пенсии, и результаты их деятельности оценивались практической полезностью проведенных исследований.

Незадолго до учреждения Парижской академии наук, в январе 1665 г. в Париже начал издаваться «Journal des Sçavans» («Журнал ученых»). Это было частное издание, непосредственно не связанное с Парижской академией наук и предназначенное для публикации рецензий на выходящие книги. Однако высокое качество публикуемых в «Journal des Sçavans» материалов вскоре обеспечило ему европейскую популярность и способствовало повышению авторитета французской науки и популяризации мировых научных достижений. Публикация трудов первых членов Парижской академии наук осуществлялась частным образом, но позднее началось регулярное издание в Париже и Амстердаме мемуаров, статей и научных обзоров в сборниках «Histoire

[1] Отец Блеза Паскаля.
[2] Известна его крылатая фраза: «L'etat c'est moi!» — «Государство — это я!».
[3] 40 членов, в том числе Ж.-Б.Кольбер.

de l'Academie royale des sciences» («История Королевской академии наук»), ставших наряду с «Philosophical Transactions», «Acta eruditorum», «Miscellanea Berolinensia» и «Комментариями Петербургской императорской академии наук»[1] главными научными трибунами XVIII в.

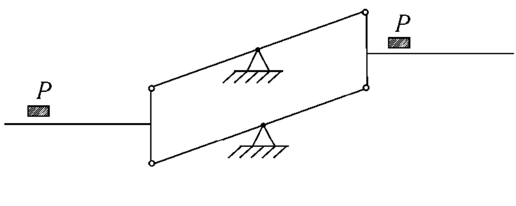
Виднейшими членами начального этапа Парижской академии наук были Х. Гюйгенс[2], Д. Кассини, О. Рёмер, Роберваль и Мариотт. Жиль Персон, известный как Роберваль (в честь местечка Роберваль, где он родился), был талантливым самоучкой, ставшим в 1634 г. профессором одного из лучших учебных заведений Франции — Коллеж де Франс. Независимо от Ф. Б. Кавальери он разработал «метод неделимых», развитие которого способствовало созданию анализа бесконечно малых. Свой метод он применял к решению задач на определение длины кривых линий, площадей фигур с криволинейными границами, объемов тел. Его теория построения касательных к кривым основана на идее сложения движений (истинное движение точки по кривой складывается по правилу параллелограмма из движений по касательной и нормали). Эта идея декомпозиции истинного движения позднее стала общепринятой и сыграла важнейшую роль в создании математического анализа, аналитической и дифференциальной геометрии и классической механики[3]. Роберваль участвовал в споре Декарта и Ферма о методе отыскания касательных к кривым. Известны его работы по астрономии и физике. В историю механики вошли «весы[4] Роберваля» — свое-

[1] «Комментарии», то есть «Записки», выходил в Петербурге с 1728 по 1806 гг. на латыни под названием «Commentarii Academiae Scientiarum imperialis Petropolitanae», позднее «Novi commentarii ...», «Acta ...», «Nova acta ...».

[2] Гюйгенс приехал в Париж в 1666 г. по приглашению Кольбера. В 1681 г. он, как и некоторые другие члены Академии (Д. Папен, О. Рёмер), отказался от звания академика и был вынужден покинуть Францию по причине религиозных гонений.

[3] Идея декомпозиции движения далее использовалась Я. Бернулли, Германном, Вариньоном, Эйлером, Даламбером при решении динамических задач методами статики (сведение динамических уравнений к уравнениям равновесия).

[4] Эта идея положена в основу современных «мостовых весов» и состоит в реализации поступательных движений обеих сторон весов типа шарнирного параллелограмма [41, с. 32].



образный парадокс, получивший разрешение только в следующем веке с помощью принципа возможных перемещений. К сожалению, большинство работ Роберваля по механике не были опубликованы. Но даже небольшой трактат, изданный Мерсенном, и переписка Роберваля с выдающимися учеными того времени позволяют утверждать, что его творчество было важной вехой в формировании новой естественно-научной идеологии. Аналогичный вывод можно сделать и о значении творчества аббата Эдма Мариотта, чьи многочисленные работы по теории удара, гидравлике оказали значительное влияние на содержание работ Я., И. и Д. Бернулли, Я. Германна (в частности, уже отмечалось влияние «Трактата о движении вод...» [246] на содержание «Гидродинамики» [5]).

В 1699 г. король утвердил новый Регламент Академии наук. В предисловии к Регламенту отмечаются заслуги Академии во Франции и ее высокий европейский авторитет. Тем не менее король поручил министру, государственному секретарю и Канцлеру Франции графу де Понтшартрену (1643–1727) и его племяннику, президенту Академии аббату Биньону «...придать Академии наук форму, наиболее пригодную для получения пользы, которую она способна предложить» [271, с. 2]. Регламент, разработанный в обстановке секретности под руководством Понтшартрена, впервые был оглашен Биньоном на ассамблее Академии 4 февраля 1699 г.

Первый пункт Регламента утверждает: «Королевская Академия наук находится под покровительством Короля и будет получать его указания через Государственного секретаря, которому Его Величество доверит попечение» [271, с. 4]. В составе Академии определялись четыре класса академиков: почетные, пансионеры, ассоциированные и адъюнкты. Все академики (10 почетных, остальных по 20) избирались с одобрения короля. Почетные академики избирались из числа известных математиков или физиков, один из них назначался Президентом. Пансионеры обязаны были жить в Париже, и в их число избирались три геометра (математика), три астронома, три механика, три анатома, три химика, три ботаника, секретарь и казначей. Двенадцать ассоциированных академиков представляли геометрию, астрономию, механику, анатомию, химию и ботанику (по два члена) и восемь остающихся мест предназначались для иностранных членов. Все адъюнкты должны были жить в Париже, и их научная специализация должна была соответствовать специализации академика-пансионера, за которым они закреплялись.

Кандидаты в почетные академики должны были быть одобрены королем и избирались большинством голосов членов Академии. Для занятия поста пансионера Академия выдвигала трех кандидатов (два из числа ассоциированных или адъюнктов), из которых король выбирал самого достойного. Аналогично Его Величество выбирал ассоциированных академиков из двух претендентов (один из числа адъюнктов) на место. Адъюнкты подбирались пансионерами и, с одобрения короля, избирались большинством голосов.

Кандидаты на пост академиков имели религиозные ограничения, должны были иметь особые научные заслуги (изданные труды, изобретенные машины), пансионеры и ассоциированные — быть старше 25 лет, адъюнкты — старше 20 лет.

Академические ассамблеи должны были проводиться в королевской библиотеке дважды (среда, суббота) в неделю и длиться не менее двух часов (с трех до пяти). Академические отпуска определялись точными датами (с 8 сентября по 11 ноября, две недели на Пасху, неделя на Троицу, Рождественские праздники) и могли быть изменены только с разрешения Его Величества.

Каждый ученый сам выбирал свой круг научных интересов, но обязан был участвовать и в общих делах, имеющих важное значение. В начале года академик-пансионер должен был письменно уведомить Академию о планируемой работе или задуманном сочинении. Свои планы должны были декларировать и остальные члены академии.

Все академики, независимо от специализации, должны были распространять свои исследования в сферу математики, инженерного дела, естествознания и физики. Все академики должны были регулярно докладывать на ассамблеях о результатах своей работы, участвовать в обсуждении представляемых докладов. Адъюнкты приглашались для обсуждений президентом Академии. Письменные тексты сообщений в тот же день передавались секретарю Академии. Эксперименты проводились в присутствии членов Академии. Даже форма дискуссии, особенно в случае несовпадения мнений, оговаривалась регламентом. Предписывалось устанавливать связи с учеными Парижа, прочих районов Франции и зарубежья, изучать их важнейшие труды по физике и математике. Публикация работ академиков осуществлялась только после их апробации и одобрения на ассамблеях. Если же ученый публиковал работу без одобрения Академии, то он, как автор, не имел право называть себя членом Академии.

На Академию возлагалась ответственность за сертификацию новых машин, изобретений. В этом мнение академиков (кроме адъюнктов) было решающим. Дважды в году Академия устраивала открытые ассамблеи, на которых могли присутствовать все желающие[1].

В регламенте определяются обязанности президента, секретаря и казначея. Первого января каждого года король называл имя президента Академии. Но это не означало, что это имя обязательно будет новым. Секретарь и казначей оставались неизменными, исполняя свои обязанности под контролем президента. Государство оказывало ученым помощь в издании их трудов, организации экспериментов, материально поощряло наиболее выдающихся ученых.

В феврале 1699 г. в числе первых академиков из старого состава Академии, предложенных Понтшартреном и одобренных королем, Биньон назвал маркиза де Лопиталя, капитана Рено, отца Мальбранша (почетные академики); аббата Галуа, Ролля, Вариньона, Кассини, Делаира, Лефевра, Купле (пансионеры); Лейбница, Чирнхауза (иностранные члены), Маральди, Режи, Кассини-сына, Делаира-сына, Ланьи (ассоциированные); в новый состав Академии были избраны аббат де Лувуа и маршал Вобан (почетные академики); братья Я. и И. Бернулли, Ньютон, Вивиани (иностранные члены); Паран, Амонтон (адъюнкты).

Таким образом, Парижская академия наук конца XVII в.[2] была не клубом почетных представителей науки, а скорее походила на современный многопрофильный НИИ, подчиненный высшим представителям государственной власти. Деятельность Академии была ясно нацелена на развитие как теоретических, так и чисто прикладных исследований. Четкая регламентация ее деятельности стала залогом процветания французской и европейской науки.

4.2. Развитие статики в творчестве П. Вариньона

Имя Вариньона в курсе теоретической механики ассоциируется с теоремой о моменте равнодействующей системы сходящихся сил:

«*Момент результирующего вектора системы сходящихся векторов относительно некоторой точки O равен геометрической сумме моментов составляющих векторов*» [1, с. 27].

---

[1] В остальных случаях нечлены Академии допускались на ассамблеи только с позволения секретаря.

[2] Следующий регламент Академии был принят в 1716 г.

Сейчас этот результат представляется практически очевидным, но мнение современников и последователей автора этой теоремы было совершенно иным. В 1687 г. это был далеко не очевидный, безусловно, очень важный и, естественно, не единственный результат трактата «Проект новой механики» [297], автором которого был П. Вариньон.

Биографические сведения о Пьере Вариньоне достаточно скупы. Он родился в 1654 г. в семье обычного архитектурного подрядчика. Поначалу Пьер избрал духовную карьеру и поступил в иезуитский коллеж своего родного горда Каэна (Caen) в Нормандии. Увлеченно занимаясь философией, случайно наткнулся на «Начала» Евклида, и эта книга с первых страниц захватила его. Ясность геометрических образов и истин оказалась привлекательнее туманных философских размышлений, и он стал целенаправленно искать книги по математике. После знакомства с работами Декарта, выбор в пользу математических наук стал окончательным, несмотря на неодобрительное отношение к этому родителей.

Продолжая образование по классу теологии, Вариньон блистал безукоризненной аргументацией в диспутах, проводимых учащимися по классу философии, среди которых был не менее замечательный эрудит Шарль де Костель — будущий аббат де Сен-Пьер. Общая любовь к поиску истины, стремление доказать правоту своих взглядов не только в философии, но и математике, физике сблизило молодых людей и стало основой их многолетней дружбы. Зная о материальных затруднениях Вариньона, Шарль выделил другу 300 ливров из получаемой им ренты в 1800 ливров.

В 1686 г. друзья переехали в Париж и поселились в небольшом домике в пригороде столицы. Фонтенель — будущий секретарь Парижской академии наук — вспоминал, что он часто навещал друзей, порой оставаясь у них на 2–3 дня. Вариньон был полностью погружен в математику, все дни проводил за работой, которая прерывалась далеко за полночь. Он быстро познакомился с видными учеными (Duhamel, du Verney, de Lahire), которые признавали не только его природный талант, но и прекрасную эрудицию. Особенно в сфере механики.

Выход в 1687 г. книги «Проект новой механики», посвященной Академии наук, «был встречен всеми геометрами с аплодисментами и дал возможность ее автору занять два важных места: в 1688 г. он стал геометром-пансионером Академии наук и профессором математики Коллежа Мазарини» [260, с. 414–415]. Эта книга, ставшая важным

Пьер Вариньон

событием в истории классической механики и сделавшая Вариньона знаменитым, была второй его публикацией. Первая работа, посвященная полиспастам, была опубликована в том же 1687 г. в периодическом издании П. Белье «Nouvelles de la république des lettres».

Проблема притяжения тел, несмотря на теории Декарта, Гюйгенса, Ньютона, Лейбница и их сторонников, в конце XVII в. продолжала оставаться актуальной. Этой теме была посвящена следующая большая работа Вариньона «Новые предположения о тяжести» [298].

В своих математических работах Вариньон всегда стремился к наиболее общим постановкам проблем. Его внимание, естественно, привлекли работы Лейбница, Я. и И. Бернулли, Лопиталя, Уоллиса по основам зарождающегося тогда дифференциального и интегрального исчисления. Он стал активным сторонником нового анализа. В период выступлений Ролля в Академии наук с критическими замечаниями в адрес дифференциального исчисления Вариньон эффективно использовал новый математический аппарат применительно к задачам о движении точки в центральном поле сил, внешней баллистики, гидродинамики.

В 90-х гг. Вариньон стал членом редакции «Journal des Sçavants», а с 1704 г., после отставки Ж.-Б. де Гамеля, — профессором кафедры греческой и латинской философии Коллеж де Франс (тогда College Royal). Но интенсивная научная и педагогическая деятельность имели не только положительные последствия. В 1705 г. Вариньон тяжело заболел. В течение шести месяцев его жизнь была в опасности[1], и следующие три года он страдал апатией и нервным истощением. Однако и в этот период, судя по публикациям, он не прекращал работу.

Вариньон много консультировал ученых, приезжавших к нему из Франции и других стран, вел активную переписку с крупнейшими математиками и механиками Европы[2] (Лейбниц, И. Бернулли). В последние годы жизни (умер в 68 лет, в ночь с 22 на 23 декабря 1722) он готовил к публикации свои учебные курсы по математике и трактат по механике, проект которого так блестяще начал его научную карьеру. В соответствии с завещанием Вариньона, все бумаги и рукописи после его смерти были переданы Секретарю Академии наук Фонтенелю, ко-

[1]По свидетельству Фонтенеля, во время прогулок по лесу Вариньону казалось, что все листья деревьев покрыты алгебраическими формулами.

[2]Был корреспондентом Лондонского Королевского общества, Берлинской академии наук.

торый привлек к изучению и изданию научного наследия Вариньона академика Бофорта и аббата Декамю. Так, в 1725 г. появились трактаты «Новая механика или статика, проект которой был опубликован в 1687», «Введение в анализ бесконечно малых», в 1731 г. — «Элементы математики». Это были последние из более 80 работ, написанных Вариньоном за 35 лет плодотворной научной и преподавательской деятельности, поставившей его имя в один ряд с именами самых выдающихся математиков той эпохи.

Следуя традиции своего времени, под статикой или механикой Вариньон понимал, говоря современным языком, *теорию механизмов.* Но вопрос об условиях равновесия механизма (рычага, клина, блока, наклонной плоскости, . . .) в этой теории был одним из важнейших. Поэтому проблемы, обсуждаемые в «Новой механике» [319], в большинстве своем являются задачами современной статики.

Одно из основных понятий современной физики и механики — понятие силы — прошло многовековой процесс формирования от осознания фактов взаимодействия тел природы до возможности точного описания этого взаимодействия по величине, направлению и месту приложения. Понятие вектора, возникшее в математике в XIX в. как геометрический образ комплексного числа, безусловно, формировалось и в недрах механики[1]. Еще в Древней Греции было установлено, что и взаимодействие тел и их движение всегда имеют некоторую величину и направление. Таким образом, свойства вектора как математического объекта были известны давно, но потребовалось более 20 веков для осознания необходимости расширения понятия числа, для геометризации этого понятия и построения теории векторов.

Впервые изображение силы направленным отрезком встречается в главном труде по механике С. Стевина «*Начало статики*». Здесь мы встречаемся с понятием *силового треугольника* и *законом сложения двух перпендикулярных сил.* Далее идея сложения двух сил была использована французским ученым Ж. П. Робервалем в «*Трактате по механике грузов, удерживаемых силами на наклонных плоскостях; о силах, поддерживаемых груз, висящий на двух веревках*», вышедшем в 1636 г., через два года после издания книги Стевина на французском языке. Роберваль не дает полного определения силы, но определяет

[1]Даламбер в работах по небесной механике пользовался выражением «радиус-вектор».

линию действия силы, говорит о возможности перенесения силы вдоль линии ее действия и дает доказательства правила сложения сил для случая произвольного угла между ними (правило параллелограмма).

В 1687 г. правило параллелограмма появилось сразу в трех трактатах — «*Началах*» Ньютона, «*Новый способ доказательства основных теорем механики*» [223] Лами[1] и «*Проекте*» Вариньона[2]. По-видимому, каждый из авторов пришел к правилу параллелограмма своим путем, но это совпадение не было случайным. Оно отражало главный итог многовекового развития понятия силы как меры взаимодействия между телами, связанного с общепринятыми ныне свойствами сил: наличие величины, направления, места приложения, правил геометрического сложения и разложения. До векторизации понятие силы, которое в разных ситуациях именовалось «мощностью», «импульсом», «импетусом», «моментом», «давлением», «притяжением», «отталкиванием», «сопротивлением», «весом», оно, выражая только интенсивность действия на тело, было сопоставимо с современными понятиями кинетической энергии или мощности. Поэтому иными (алгебраическими) были правила операций над силами и, как следствие, нельзя было сформулировать правила замены одной системы сил другой (в том числе простейшей), ввести современные понятия момента силы, пары сил, работы, мощности. Введение векторных свойств взаимодействия тел — чрезвычайно важное событие в истории механики, приведшее к «материализации» абстрактного понятия силы в виде направленного отрезка и построению в XIX в. на этой основе векторного анализа и теоретической механики.

Свой первый трактат Вариньон не случайно назвал «Проектом новой механики». Он планировал продолжить разработку основных идей механики и фактически занимался этим всю свою жизнь. Окончательная редакция трактата под названием «Новая механика или статика, проект которой был опубликован в 1687» была подготовлена к печати и издана Ф.-Ж.Декамю в двух томах уже после смерти Вариньона.

---

[1]Бернар Лами — видный французский механик, математик, археолог и теолог. Автор изданных в Париже книг: «Трактат по механике, о равновесии твердых тел и жидкостей» (1679), «Элементы математики» (1680), «Элементы геометрии» (1685) и других.

[2]Следует иметь в виду, что доказательством этого правила активно занимались Чирнхауз, Фатио де Дюилье, Гюйгенс, Лейбниц и многие другие ученые.

Первый том «Новой механики»[3] [319] начинается с основных определений, обозначений и аксиом. Машина или механизм определяется как приспособление для передвижения тел. Силой Вариньон называет то, что приводит машину в движение, или все то, что способно сдвинуть тело при помощи машины или без нее. Силы рассматриваются как геометрические величины (измеряются не фунтами, а футами и туазами), оцениваются по отношению к весу (тяжести) тела и изображаются отрезками (нитями), натягиваемыми рукой в определенную сторону.

Аксиомы сводятся к следующим утверждениям:

1. Действия всегда пропорциональны причинам, или силам, так как последние являются причинами первых.

2. Равные силы, или сопротивления, вызывают равные, или одни и те же, действия, и, следовательно, сила, заменяющая равную себе по величине и имеющая то же направление, вызывает то же самое действие.

3. Когда на тело действуют две равные противоположные силы, оно должно быть неподвижным, то есть в состоянии покоя. Это же верно, если одна из сил будет силою сопротивления.

4. Если тело под действием двух сил пребывает в покое (без всяких других препятствий), то силы должны быть равны и противоположно направлены. Одна из сил может быть силой сопротивления.

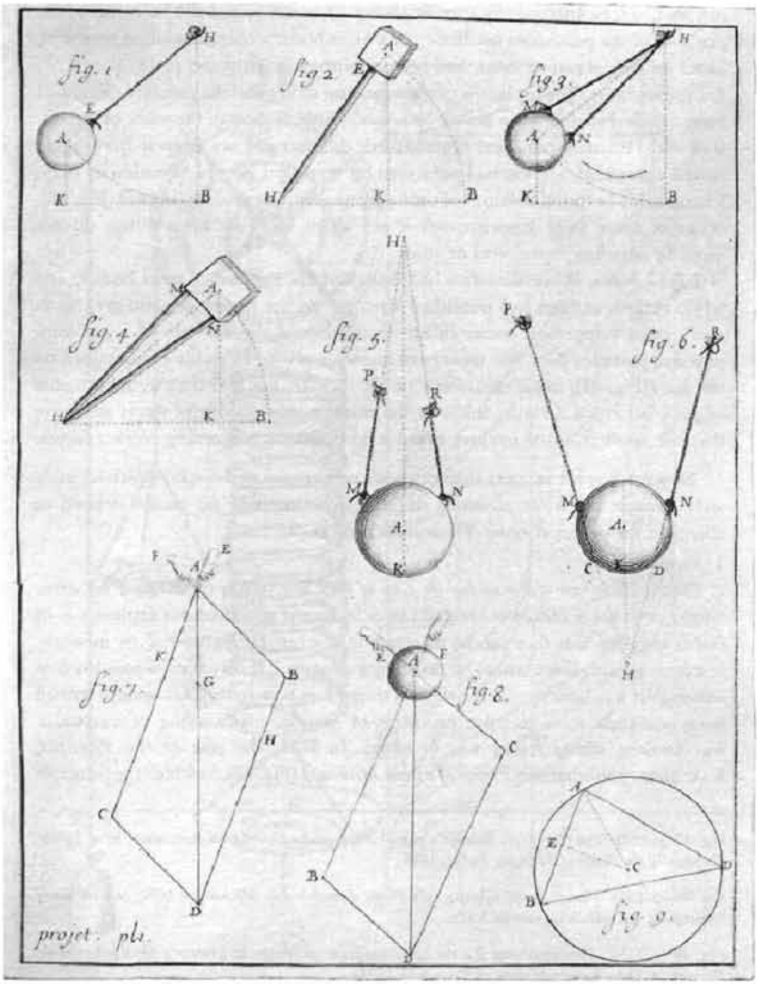
5. Тело, на которое действуют две противоположно направленные силы, будет двигаться в сторону большей силы, как если бы на него действовала одна сила в том же направлении, равная разности этих сил. Одна из сил может быть силой сопротивления (меньшая).

6. Скорости одного и того же тела или тел равной массы относятся как движущие силы, приложенные к телам, вызывающие эти скорости. Если скорости имеют указанное отношение, то они относятся либо к одному телу, либо к телам равной массы.

7. Расстояния, проходимые телом или телами равной массы с постоянной скоростью за равные промежутки времени, относятся как скорости и, наоборот, скорости пропорциональны расстояниям.

8. Расстояния, проходимые за равные промежутки времени одним телом или телами равной массы, относятся как силы, которые вынуждают их двигаться.

[3] Детальный анализ содержания трактата приводится в работах Тюлиной И. А. [80, 81].



Фрагмент «Проекта новой механики» П. Вариньона

Принцип геометрического сложения сил выделен Вариньоном в особую аксиому, названную «Основным принципом»: каково бы ни было число действующих на тело (предполагается — в одной точке) сил, направленных произвольным образом, это тело либо совсем не будет двигаться, либо будет двигаться по единственному пути вдоль линии, которая будет такой же, как если бы на тело действовала лишь одна сила в этом направлении и равная результирующей всех этих сил.

Отметим, что, говоря о величине силы, эквивалентной заданной системе сил, Вариньон не определяет ее, но постулирует лишь сам факт эквивалентности, то есть возможности замены нескольких сходящихся сил одной результирующей. А сам принцип сложения и разложения сил (леммы I и II) Вариньон доказывает в несколько этапов. Идея доказательства правила параллелограмма для двух сходящихся сил, изображаемых отрезками AB и AC, сводится к утверждению, что перемещение тела, на которое подействовали две силы, произойдет по некоторому отрезку AD, по которому оно передвигалось бы под действием одной результирующей силы. По существу, рассуждение идет о сложении двух перемещений, или скоростей, с которыми двигалось бы тело в первое мгновение под влиянием каждой из сил в отдельности. Согласно 6, 7 и 8-й аксиомам сила, скорость и путь, проходимый телом под действием силы, находятся в прямой пропорциональной зависимости друг от друга. Если 7-я аксиома не вызывает вопросов, то 6-я и 8-я требуют комментариев. Возможно, автор имеет в виду силы импульсного характера и соответствующие им мгновенные скорости, возможно, говоря о скорости, он подразумевает величину ее изменения, возможно, это дань популярному еще тогда картезианству.

Важные свойства силового параллелограмма устанавливаются в следствиях лемм I и II. Например, показывается пропорциональность составляющих и их результирующей двум сторонам и диагонали (соответственно) параллелограмма, построенного из любой точки диагонали AD силового параллелограмма, подобного ему. Автор приводит геометрическое построение для нахождения результирующей многих сходящихся сил. Фактически он находит замыкающую сторону их силового многоугольника и указывает на возможность переноса отрезка, изображающего силу в твердом теле, по его линии или по линии действия силы.

Лемма XVI, называемая теперь *теоремой Вариньона*, состоит в следующем. Если выбрать произвольную точку S и построить три треугольника с вершинами в этой точке, на двух сторонах параллелограмма $ABCD$ и на его диагонали AD, то сумма (если точка S лежит вне угла BAC) или разность (если точка S лежит внутри основного угла BAC) площадей треугольников, построенных на сторонах, равна площади диагонального треугольника SAD. Доказательство этого положения сводится к тому, что указанным свойством обладают высоты трех треугольников, имеющих общее основание AS. Если точка S лежит на диагонали или ее продолжении, то площади треугольников, построенных на сторонах AB и CD, равны.

Далее вводится понятие момента силы относительно точки S как произведение силы на «плечо» (кратчайшее расстояние от точки S до линии действия силы). В таком случае можно дать иную формулировку теоремы Вариньона (чего он, однако, не сделал): момент равнодействующей двух сходящихся сил относительно некоторой точки плоскости сил, равен алгебраической сумме моментов составляющих относительно той же точки. Первая теорема трактата, называемая теперь «теоремой о трех силах», доказывается пока для частного случая.

Техника веревочных машин, а также действие ветровой нагрузки на парус — вот две технические предпосылки, под влиянием которых в XVII в. возникла идея веревочного многоугольника Вариньона. Форма невесомой нерастяжимой веревки, закрепленной по краям и несущей в некоторых точках один, два и более грузов, напоминала форму паруса, вздутого ветром (в профиле). Еще более тесной становилась аналогия, когда число грузов увеличивалось бесконечно, или попросту веревка становилась весомой, с равномерно распределенным по ее длине весом. Задача о равновесии такой веревки аналогична задаче о равновесии тяжелой цепи, закрепленной по концам. Вероятно, метод графической статики — оперирование двумя взаимными плоскими многоугольниками — зародился из размышлений ученого над этой аналогией.

Сущность метода графостатики излагается в теоремах VIII, IX, X и их следствиях в конце II раздела. Последовательно, от простого случая двух параллельных, направленных в одну сторону сил, до любой плоской системы сил, не приводящей к паре, Вариньон доказывает справедливость оперирования двумя взаимными фигурами — веревочным многоугольником, напоминающим веревку, в узлах которой приложены силы по различным направлениям, и силовым многоугольником. В этой связи следует отметить, что первый многоугольник в графостатике начала XX в. был назван *шарнирным многоугольником*, или *многоугольником Вариньона* [42].

В первом следствии теоремы X дается метод нахождения условия равновесия четырех параллельных сил K, L, M, N. Суть метода Вариньона состоит в следующем. Даны грузы K, L, M, N и их линии действия CK, DL, PM, QN; через точки C, D, P, Q надо протянуть абсолютно нерастяжимую нить $AC\ldots B$ и считать, что будет иметь место равновесие такой системы. Из произвольной точки S плоскости (все силы расположены в одной плоскости, а так как это силы веса, они параллельны) проводятся лучи SE, SF, SG, SH, SR параллельно сторонам веревочного многоугольника AC, CD, DP, PQ, QB соответственно. На прямой OJ, параллельной заданным силам (веса), эти лучи отрежут куски EF, FG, GH, HR. Равновесие будет иметь место тогда и только тогда (по теореме X), когда заданные силы пропорциональны отрезкам EF, FG, GH, HR соответственно.

Терема XI распространяет этот метод построения взаимосвязанных веревочного и силового многоугольника на случай непараллельных сил на плоскости. Графостатика нового времени возродила метод Вариньона, сохранив его основу и дополнив его учение существенно новыми интереснейшими построениями и теоремами. Следствия теоремы XI раскрывают свойства цепной линии, то есть тяжелой однородной нерастяжимой цепи, или веревки, закрепленной по концам и предоставленной свободному провисанию.

Третий и четвертый разделы книги посвящены учению о равновесии сил в блоках, полиспастах и вóротах. Последовательно усложняются рассматриваемые задачи.

Элементы фундаментальной теории вновь обсуждаются в пятом разделе, называющемся «Рычаги всех родов, различных форм и размеров под действием всевозможных сил и грузов». Здесь обстоятельно обсуждается вопрос о величине и направлении силы реакции опоры рычага. В определении XXI речь идет об обобщенном рычаге, представляющем собой невесомое твердое тело произвольной конфигурации с неподвижной горизонтальной осью B. Если слева и справа от точки опоры B в произвольных местах приложены две силы E и F, то реакция опоры B поддерживает совместное действие двух названных сил.

Современная теорема о трех силах, представленная теоремой XXI, устанавливает условие равновесия трех произвольных непараллельных сил в плоскости. Вместо третьей силы может быть рассмотрена реакция опоры. Необходимым условием равновесия трех таких сил является пересечение линий их действия в одной точке. Теорема XXII устанавливает способ нахождения третьей (неизвестной) силы из правила геометрического сложения и разложения 3 сходящихся сил. Сейчас неизвестная сторона (сила) находится из условия замкнутости силового треугольника. Вариньон же, в силу сложившихся традиций, пользуется построением параллелограмма.

Для перехода от двух сходящихся сил к двум параллельным весьма важны следствия II и III теоремы XXI. Первое из них утверждает, что две произвольные (не параллельные) силы E и F, приложенные к концам коромысла прямого неравноплечного рычага первого рода, то есть с точкой опоры в промежутке между приложенными силами, при равновесии относятся между собой обратно пропорционально кратчайшим расстояниям их линий действия от точки опоры B рычага. Иначе говоря, при равновесии моменты этих сил относительно точки опоры равны. Утверждается и обратное: при равенстве моментов сил E и F относительно точки B рычаг останется в равновесии (следствие III).

Вариньон отмечает, что этот результат не нов, что он был известен Робервалю, Ферма и Паскалю. Только в их рассуждениях точка пересечения сил совпадала с центром Земли, и силы веса были фактически параллельными. Для перехода к названному случаю Вариньон вводит воображаемый круговой рычаг из дуги окружности, концентрической Земле. Позднее Лагранж заменит этот криволинейный рычаг коленчатым. Когда на твердое тело с точкой опоры действуют две параллельные силы, Вариньон предлагает точку схода сил E и F удалять в бесконечность, делая угол между прямыми сил бесконечно малым. В этом случае сохраняется равенство моментов сил относительно точки опоры, а отсюда легко вывести обратное отношение величин сил и соответствующих плеч. Кроме этого, Вариньон находит, что величина реакции опоры равна сумме величин приложенных сил. В теории равновесия рычага Архимеда–Стевина этого доказательства нет.

Первые три раздела 2-го тома «Новой механики» продолжают рассмотрение важных практических проблем статики чисто геометрическими методами. В разделе 6-м рассматриваются равновесия грузов, поддерживаемых наклонными поверхностями (в частных случаях — плоскостями). Теорема XXVI и ее следствия впервые четко разъясняют возможность замены силы реакции (сопротивления) гладкой поверхности активной силой, аналогичной тяге, направленной по перпендикуляру к плоскости (точнее, к касательной плоскости в данной точке поверхности). Следующий, 7-й, раздел посвящен *червячным передачам* и *винту*. Изложение основ геометрической статики, построенной на принципе сложения и разложения сил, завершается в 8-м разделе «О клине».

В последних двух разделах второго тома Вариньон последовательно излагает теорию равновесия уже рассмотренных механизмов, а также гидростатику, на основе принципа виртуальных скоростей. «Общие следствия предыдущей теории» (раздел 9) начинаются с цитаты из письма И. Бернулли Вариньону (от 26.01.1717), где дается формулировка принципа виртуальных скоростей как обобщения «золотого правила механики». Вариньон дает количественное определение понятия «энергии» как произведения величины силы на перемещение (с учетом знака!) точки ее приложения вдоль линии действия силы. В понятие «энергия» ныне вкладывается совсем иной смысл, а в определении Вариньона (точнее, И. Бернулли) легко угадывается современное понятие *работы силы*. Под виртуальными скоростями понимаются величины, пропорциональные малым перемещениям точек.

Как уже упоминалось, Декарт не привел словесного описания принципа возможных перемещений. Он формулировал его в числовом выражении. Аналогичным образом поступает и Вариньон, формулируя в десятом разделе книги законы гидростатики Паскаля, объясняя действие сифонов, сообщающихся сосудов и других устройств. «Однако указанные применения принципа виртуальных скоростей были еще слишком гипотетичными и, если можно так выразиться, слишком робкими, чтобы послужить основой для разработки строгой теории равновесия жидкостей», — писал Лагранж о гидростатических работах Декарта и Паскаля [53, Т. 1, с. 137]. «Этот вывод в значительной степени верен и в отношении гидростатики Вариньона. Однако настойчивый поиск нового подхода, нового пути построения статики, охватывающей более широкий круг актуальных проблем техники и естествознания, свидетельствует об огромном творческом потенциале Вариньона» [81].

«Проект» или «Новая механика» — это не единственная работа Вариньона по статике. Его первая работа, о которой уже упоминалось, «*Новое общее доказательство использования блоков в полиспастах*» (1687), была посвящена равновесию груза, укрепленного на веревке, переброшенной через блок, обе части которой не параллельны. Ссылаясь на работы Парди[1] и Дешаля, Вариньон сводит задачу к проблеме рычага (точки схода веревок с блока натягиваются обеими частями веревки, поддерживающей блок).

В статье «*Общее отношение сил, используемое применительно к винтам*» [301], опубликованной в 1699 г., рассматривается задача о работе пресса для получения виноградного сока. Вариньон заметил, что предположения, используемые при анализе винтов (нагрузка на винт параллельна его оси, а прикладываемая сила лежит в плоскости, перпендикулярной оси винта, и направлена перпендикулярно прямой, проходящей через ось и точку приложения силы), не выполняются для пресса, который он наблюдал (силы были приложены несколько иначе). Для этого случая автор нашел соотношение между прикладываемой силой и нагрузкой. При этом он неявно пользуется принципом возможных перемещений (виртуальных скоростей, работ), через 26 лет изложенным во втором томе «*Новой механики*».

Очень красивая статическая задача решается в статье, опубликованной в [312]. Это не традиционная проблема определения сил, углов и расстояний, а задача на определение геометрического места точек, обеспечивающего равновесие системы. В современных обозначениях и понятиях ее суть состоит в следующем. Если нить неопределенной длины ABP привязана одним концом к гвоздю A (рис. 4.2.1), перекинута через блок, и к другому ее концу привязан груз P, то нить (груз) будет в равновесии, и участок AB будет прямой. Если на участке AB в точке C к нити подвесить другой груз Q, то:

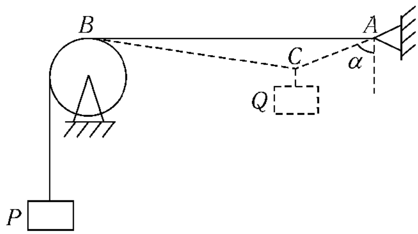


Рис. 4.2.1

1) если Q бесконечно мал — нить AB останется горизонтальной прямой;

2) если Q бесконечно велик (по сравнению с P), то он перетянет P через блок, и нить AP будет вертикальной прямой;

[1] В работе [262] подчеркивается мысль, разделявшаяся Робервалем и Гюйгенсом, о том, что центр тяжести является не только точкой приложения веса, но и своеобразным динамическим эквивалентом всего тела. Книга Игнаса-Гастона Парди оказала существенное влияние на формирование научных взглядов и интересов не только Вариньона, но и Лейбница [179, с. 54].

3) во всех остальных случаях равновесия системы участок AB будет ломаной ABC.

Зная отношение P/Q и необходимые геометрические размеры, Вариньон находит положение груза Q (для конкретной точки C) и геометрическое место точек C, для которых система находится в равновесии. Решение основано на подобии силового и геометрического треугольников. При этом реакция связи (естественно, она так не называется) — нити BCA — считается направленной противоположно весу Q и раскладывается по правилу параллелограмма по направлениям CB и CA. В обсуждении задачи явно обнаруживается понимание автором понятия связи и ее реакции, хотя до внедрения этих понятий в арсенал механики остается еще почти сто лет.

Сюжет большой статьи (38 с.) «*Решение одной проблемы статики с указанием метода, приемлемого для решения множества похожих задач*» [315] был предложен известным математиком, имя которого Вариньон не сообщает. Суть проблемы состоит в выяснении возможности и условий равновесия тела под действием четырех или более сходящихся сил (направления которых заданы), позволяющих реализовать равновесие.

Равновесие, или покой тела, определяется как невозможность его движения, неподвижность, осуществляемая при выполнении двух важных условий: равенство сил, стремящихся вызвать противоположные движения тела, и «оппозиционность» этих движений, их уравновешенность[1]. Вариньон опирается на «теорию сложных движений», изложенную в его «Проекте» и ставшую, как утверждает комментатор[2], «ключом ко всей Механике». Сложным называлось движение, рассматриваемое как результат одновременного сложения нескольких движений, происходящих под действием нескольких сил, приложенных в одной точке. Сложение движений по правилу параллелограмма далее использовалось для доказательства правила параллелограмма для сил. Вариньон отмечает, что доказательство правила параллелограмма можно найти не только в его «Проекте», но также «*во многих других более ранних и более поздних работах, в которых обсуждается сложное движение*» [315].

[1]Эти и многие другие представления Вариньона нашли свое дальнейшее развитие в творчестве Даламбера.

[2]Неизвестный автор комментария описываемой работы («История Королевской академии наук», 1714, с. 118).

В основу работы положены три леммы, первая из которых является формулировкой правила параллелограмма. Вторая лемма утверждает, что равновесие плоской системы сходящихся сил, расположенных в одной полуплоскости, невозможно. В третьей лемме говорится о том, что если силы лежат в одной плоскости, сходятся в одной точке, но не принадлежат одному полукругу, то каждая сила, продолженная за общую точку (узел), будет проходить между другими силами, то есть будет пересекать угол между какими-то силами.

На основании этих лемм-аксиом рассматриваются несколько плоских и пространственных случаев расположения 2, 3, 4 и 5 сил, приводятся геометрические доказательства, приводящие к условиям, при которых искомые силы могут быть определены или нет, равновесие тела невозможно. Критерием невозможности равновесия, естественно, является вторая лемма, а условия невозможности определения сил по сути сопоставимы с современными критериями статической неопределимости.

Во всех работах, посвященных статике, Вариньон широко пользовался геометрическими методами. Но как академик-геометр он не мог обойти вниманием проблему вычисления площади поверхности фигуры вращения чисто механическим методом, используя *понятие центра тяжести образующей.* Этому посвящена большая (56 с.) работа — «*Размышления об использовании механики в геометрии*» [314].

Ранее, в 1635 году, идею использования понятия центра тяжести для определения площади поверхности высказал П. Гульден. Далее эта идея получила развитие в работе Лейбница, опубликованной в 1695 г. в «*Acta eruditorum*», где автор без доказательства утверждает, что *площадь тела вращения равна произведению образующей на путь, пройденный ее центром тяжести.* Последовательно рассматривая систему тел, расположенных на покоящемся прямолинейном рычаге, систему произвольно расположенных тел, Вариньон получает формулы для траекторий центров тяжести этих систем тел, в случае их вращения вокруг некоторой оси, и приводит механико-геометрическое доказательство утверждений Гульдена и Лейбница. Таков результат этой работы.

Продолжая лучшие традиции древнегреческой механики Архимеда, Герона, Витрувия, работы Стевина, дель Монте, Галилея, Гюйгенса, Вариньон создал стройную теорию решения актуальных в конце XVII в. инженерных задач[1] о равновесии тел, аксиоматически построенную на геометрии Евклида и объединенную идеей принципа сложения сил[2]. История физики и механики убедительно доказала полезность современного понятия силы. До Вариньона это понятие не имело столь точно выраженных, зримых «материальных» свойств. Вариньон, как и Ньютон, не назвал силу вектором, но они сделали все для того, чтобы это сделали их последователи.

Самым замечательным достижением Вариньона в создании последовательной системы геометрической статики является успешная попытка увязать два основных принципа геометрической статики предшествующего периода — *принципа сложения сходящихся сил* (правило параллелограмма) и *принципа сравнения моментов сил.* Если статика Роберваля еще основывалась на этих двух независимых друг от друга положениях, то у Вариньона они переплелись в его XVI лемме. Обращает на себя внимание сочетание в творчестве Вариньона абстрактного математического мышления с большой инженерной интуицией и знанием техники своего времени.

С точки зрения математического аппарата, нововведением Вариньона было систематическое оперирование алгебраически записанными равенствами (пропорциями), а также широкое использование тригонометрических функций (и первое, и второе было выражено в весьма своеобразной форме).

Главный механический трактат Вариньона [319] получил высокую оценку выдающихся ученых, в том числе Эйлера, Даламбера и Лагранжа, как итог развития мировой статики до конца XVII в., как упрочение в науке идеи математического моделирования. Эйлер писал: «Что касается статики, то почти полную и во всех отношениях прекрасную работу издал на французском языке Вариньон в двух томах» [92, с. 32]. Еще более выразительной была оценка, данная Лагранжем через 100 лет после выхода «Проекта» Вариньона: «... *простота принципа сложения сил и легкость его применения ко всем проблемам равновесия имели своим результатом то, что все механики приняли его тотчас же после его открытия*; *можно сказать, что он служит основой почти*

[1] Декарт, Ньютон больше внимания уделяли задачам механического естествознания.

[2] Любопытно отметить, что идея написания «Проекта», как об этом писал в предисловии сам Вариньон, была навеяна одной из работ Декарта, в которой утверждалось, что «было бы нелепо строить теорию блока на теории рычага» [260, с. 418]. Вариньон блестяще и решительно развенчал заблуждение своего великого предшественника.

для всех работ по статике, какие появились с тех пор» [53, с. 21]. Столь высокая оценка вполне справедлива, так как большинство практических задач и теоретических проблем механики XVIII в. было связано с движением и равновесием тел под действием простейших систем сил (центральных, плоских, параллельных), для которых подход Вариньона был универсален. Архимедов «принцип рычага» (для покоящегося рычага первого рода — равенство моментов двух перпендикулярных ему сил, приложенных слева и справа опоры) сводится к теореме Вариньона через добавление к рычагу (слева и справа) равных, направленных по рычагу, но в разные стороны сил. При этом система двух параллельных сил приводится к системе двух сходящихся, имеющих равнодействующую.

Использование Вариньоном понятий *силы, момента, момента результирующей силы*, принципа «виртуальных скоростей», идеи сведения системы сил к простейшему виду, геометрических критериев равновесия (работа 1714 г.) и методов определения неизвестных сил (метод графостатики или веревочных и силовых многоугольников), в том числе сил-реакций со стороны опор, позднее названных *реакциями связей*, фактическое владение принципом освобождаемости от связей, получило дальнейшее развитие в прикладных и теоретических трудах его знаменитых соотечественников[1] XVIII – начала XIX в. После осознания младшим современником Лагранжа — Луи Пуансо — ограниченности как «принципа рычага», так и теоремы Вариньона для исследования произвольных систем сил, в частности, скрещивающихся сил, окончательного внедрения в механику декартовой системы координат, принципа виртуальных работ, идеи приведения произвольной системы сил к главному вектору и главному моменту, понятия и свойств *пары сил*, наконец, понятий *вектора* и *его момента* — только в XIX в. статика приобрела современный вид.

4.3. Дифференциальные методы в механике П. Вариньона

В Предуведомлении первого тома «Новой механики» [319] Вариньон определяет механику как науку о движении, его причинах и результатах — обо всем, что имеет отношение к движению тел. Именно проблемам движения тел, а не статики, с которой традиционно связы-

[1] Даламбер, Боссю, Монж, Л. Карно, Лагранж, Пуансо.

вается имя Вариньона, и посвящена основная часть его научного наследия. Это убедительно подтверждается анализом публикаций Вариньона за последние 25 лет его жизни в ежегодных сборниках «История Королевской академии наук»[1].

В марте 1699 г. Вариньон представил академии мемуар «Методы определения кривых, вдоль которых падающее тело приближается к горизонту» [299], где он развивал основные положения своей работы 1695 г., продолжавшей исследования Лейбница и братьев Бернулли по определению кривых, вдоль которых движется тело, падающее по закону Галилея.

В этой работе для случая поля параллельных сил тяжести, говоря современным языком, Вариньон, используя анализ бесконечно малых, строит простейшее дифференциальное уравнение, позволяющее ему при определенных предположениях об изменении скорости найти траекторию падающей точки. При этом приводятся следующие рассуждения.

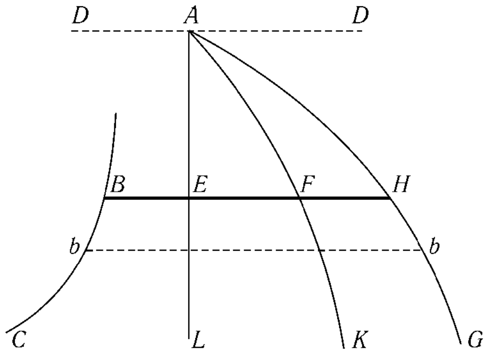


Рис. 4.3.1

Пусть DA (рис. 4.3.1) — уровень горизонта начального положения точки, AL — вертикаль, AFK и AHG — кривые изменения времени

[1]Из более 80 публикаций 14 посвящены геометрии, одна — алгебре (о нахождении решений уравнений второй и третьей степени, 1699), а все остальные — механике. Обычно при ссылках упоминается не сам ежегодник, а его составная часть — Mémoires de Mathématique et de Physique, которая далее будет называться «Мемуары».

и скорости, то есть $EF = z$, $EH = v$, ABC — искомая траектория, координаты текущей точки B которой обозначены так: $AE = x$, $BE = y$. В этом случае в момент z точка будет находиться в положении B с координатами x, y и скоростью v. Рассматривая бесконечно близкое к BH горизонтальное сечение bb, Вариньон пишет, что для прохождения пути Bb необходимо время $dz = \dfrac{Bb}{HE} = \dfrac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v}$. Отсюда и получается дифференциальное уравнение $a\sqrt{dx^2 + dy^2} = v\,dz$ $(a = 1)$, решению которого при различных предположениях относительно v и dz и посвящено дальнейшее содержание упомянутой работы. В том числе демонстрируются и решения Лейбница и Бернулли. Кроме этого, по той же схеме и столь же подробно рассматривается случай *центрального поля силы тяжести.* Отметим, что кривая скоростей AHG предполагается автором исследования произвольной, а не только «галилеевой» $(v = \sqrt{ax})$. Таким образом, здесь приводится постановка и решение наиболее общей из задач о падении тел.

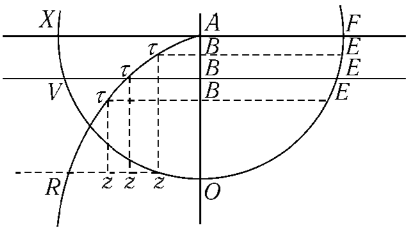


Рис. 4.3.2

В работе «Геометрический и общий способ создания клепсидров или водяных часов...» [300], представленной 29 апреля того же года, Вариньон также использует дифференциальное исчисление для нахождения кривой — образующей тело вращения, исполняющего роль емкости, из которой вытекает вода. Если FEO (рис. 4.3.2) — образующая тела вращения (вокруг AO), наполненного до уровня BE водой, вытекающей из отверстия O со скоростью v, определяемой кривой OVX $(v = BV)$, за время t, задаваемое кривой $A\tau R$ $(t = B\tau)$, то задача сводится к нахождению одной из этих кривых (FEO, XVO, $R\tau A$) по заданным двум остальным. Пусть $OB = x$, $BE = y$, поверхность воды на уровне BE равна z^2, площадь отверстия O равна c^2, тогда скорость вытекающей из O воды равна $\dfrac{dx}{dt}$, а из условия однородности следует, что $\dfrac{dx/dt}{v} = \dfrac{c^2}{z^2}$ или $dt = \dfrac{z^2 dx}{vc^2}$, и, кроме этого, $\dfrac{dx/dt}{v} = \dfrac{t^2}{z^2}$; $\dfrac{1}{a} = \dfrac{c^2}{f^2}$, где $AX = a$, $AF = b$, площадь поверхности на уровне AF равна f^2, а скорость этой поверхности — 1. Предположив, что $dx = dt$, получим $\frac{dx}{dt} = 1$, $v = BV = AX = a$, $c^2 = \frac{f^2}{a}$, $\frac{dx/dt}{v} = \frac{f^2/a}{z^2}$. Исходя из подобия поверхностей AF и BE: $\frac{f^2}{z^2} = \frac{bb}{yy}$,[1] тогда $\frac{dx/dt}{v} = \frac{bb/a}{yy}$ или $dt = \frac{ayy\,dx}{bbv}$. Полученное дифференциальное уравнение далее решается для конкретных кривых скоростей и времени (в частности, рассмотрен случай $v = \sqrt{px}$), и находится выражение для кривой FEO, определяющей форму емкости клепсидров, обеспечивающей равномерное вытекание воды. Это был новый подход к задаче о клепсидрах, которым большое внимание уделяли Х. Гюйгенс, Лами, и особенно Э. Мариотт и его последователь Д. Бернулли.

Обширный цикл работ Вариньона [303–308, 313] посвящен движению тела в центральном поле сил. Эти работы идейно и методически продолжили трактаты Гюйгенса «Маятниковые часы» (1673), «О центробежной силе» (1703), «Начала» (1687) Ньютона и работы Лейбница.

Рассматривая вращение шарика, закрепленного на нити, в горизонтальной плоскости, Гюйгенс поясняет физическую природу центробежной силы и заключает, что *эта сила действует на шарик так же, как сила натяжения нити, на которой вертикально подвешен шарик, то есть центробежная сила по своему действию на шарик аналогична его тяжести*[2]. Используя чисто геометрические построения и результаты мысленных экспериментов, автор доказывает основные свойства центробежных сил, которые ныне переданы формулой $f = m\frac{v^2}{R}$, где f — центробежная сила, m — масса, v — скорость шарика, R — радиус кривизны траектории. При этом речь идет о движении шарика или маятника по окружности или конической поверхности и величина центробежной силы измеряется количеством весов шарика, или отношением диаметров окружностей, или отношением квадратов скоростей. Получены и отношения времен обращения маятников. Ньютон при рассмотрении кругового движения шарика в горизонтальной плоскости получил ту же формулу для центробежной силы, использовав сводку результатов по теории удара и геометрические построения. Примерно в одно время с Гюйгенсом и Ньютоном понятием *центробежной силы* пользовался профессор математики Пизанского университета

---

[1] Здесь и далее используются принятые во времена Вариньона обозначения квадратов величин, как bb, yy и так далее.

[2] Комментарий этих взглядов Гюйгенса был приведен ранее.

Д. А. Борелли для объяснения того, почему планеты в своем вращении вокруг Солнца не падают на него.

По-видимому, интерес к теории центральных сил возник у Вариньона под влиянием знакомства с «Математическими началами натуральной философии» Ньютона. Об этом свидетельствуют исследования 1700–1701 гг. [302–305], где автор достигает тех же результатов, что и его знаменитый современник (второй отдел первой книги «Начал» озаглавлен «О нахождении центростремительных сил»), используя дифференциальное исчисление Лейбница, ставшее с 1698 г. основным математическим аппаратом Вариньона при изучении проблем механики.

В мемуарах [302–304] 1700 г. Вариньон, рассматривая сначала прямолинейное, а затем и произвольное движение тела, впервые применяет два правила, являющиеся дифференциальной формой записи законов Ньютона:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad y = \frac{ds\,d\,ds}{dx\,dt^2} = \frac{v\,dv}{ds}, \tag{$*$}$$

где s — дуга траектории, v — скорость, y — центростремительная сила.

Анализируя задачу о центростремительной силе, направленной к фокусу эллипса, по которому движется планета, Вариньон записал дифференциальную форму уравнения эллипса в полярных координатах:

$$b \cdot dr = dz \cdot \sqrt{4ar - 4r^2 - b^2},$$

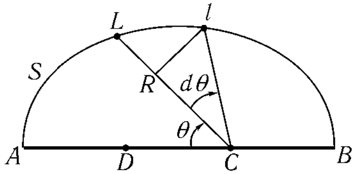


Рис. 4.3.3

где C — фокус эллипса, $CL = r$, $AL = s$, $Rl = dz = r\,d\theta$, $Ll = ds$, $Rl = dr$, $AB = a$, $CD = c$, $b^2 = a^2 - c^2$ (рис. 4.3.3). После преобразований, уравнение эллипса приняло вид:

$$\frac{4a - 4r}{r} = \frac{2b^2 ds\,d\,ds}{dt^2}.$$

Заменяя dr на dx и $\frac{ds\,d\,ds}{dx\,dt^2}$ на y (второе правило $(*)$), Вариньон находит выражение для центростремительной силы (точнее — ускорения):

$$y = \frac{2a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

В 1701 г. Вариньон опубликовал статью «Иное общее правило центральных сил» [305], где описано *получение тангенциальной и нормальной составляющих ускоряющей силы при движении тела по гиперболе и параболе.* На основе полученной Лопиталем общей формулы для радиуса кривизны он находит выражение для радиуса кривизны в рассматриваемой задаче.

Работа 1703 г. «О кривых, описываемых пересечением произвольных центральных сил, приложенных к разным точкам, лежащим как в плоскости, так и вне плоскости кривой» [306] была, как пишет сам Вариньон, инициирована Лейбницем, попросившим автора продолжить развитие его теории центральных сил, очень важной для изучения движения планет. Здесь рассматривается движение точки L по кривой Ll (рис. 4.3.4) под действием сил, исходящих из центров A, B, $C, \ldots$ и пересекающихся в точке L. Вариньон составляет дифференциальное уравнение движения точки в проекции суммы всех сил и ускорения на касательную к траектории Ll. Он пишет, что аналогичным образом поступал Германн («Acta eruditorum», ноябрь 1702). Обозначив: f — центральная сила, ds — элемент дуги траектории, n — ее радиус кривизны — Вариньон записывает уравнение

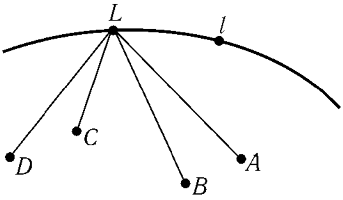


Рис. 4.3.4

$$f\,dx = \frac{ds^3}{n\,dt^2},$$

из которого получает выражения для случаев одной (кривая — окружность), двух, трех, ... центральных сил в дифференциальном виде и в виде функции от скорости в точке L. Для этого используется равенство $\dfrac{ds^3}{n\,dt^2} = \dfrac{v \cdot v\,ds}{n}$.

В представлении Вариньона центробежная сила — *это непременный атрибут криволинейного движения, каковым и является произвольное движение тела.* Большой мемуар (78 с.) «Сравнение центральных сил с абсолютной тяжестью...» [307] и его продолжение «Разные бесконечно общие способы определения касательных радиусов (лучей)...» [308], опубликованные в 1706 г., подводят итог исследований автором центральных сил, к которым он относит как центробежные, так и центростремительные силы.

Первая из названных работ начинается с пояснения физических причин возникновения центральных сил и напоминает содержание предыдущих публикаций по этой теме: приводятся общие правила для отношений центральных сил, определение их на бесконечности, случаи действия многих сил. Ее дальнейшее содержание посвящено поиску иных способов нахождения центральных сил и их определению через известную силу тяжести тела при его движении по горизонтальной плоскости.

Автор считает, что любое криволинейное движение тела, например, движение планеты вокруг Солнца по эллипсу, в каждый момент складывается из прямолинейного движения и радиального движения к Солнцу. В результате сложения этих бесконечно малых мгновенных движений по правилу параллелограмма получается эллиптическое движение. Первая из причин такого движения — естественное стремление всех тел двигаться прямолинейно (закон инерции), причина второго движения — центральная сила, притягивающая планеты к Солнцу. Движение планеты является результатом сложения (по правилу параллелограмма) этих двух причин.

Центральная сила в каждый момент времени сворачивает тело с прямолинейного пути, по которому оно стремится двигаться. И вид кривой (траектории) определяется тем, насколько сильно тело может сопротивляться изменению его прямолинейного движения. Степень сопротивления зависит от количества движения тела, то есть произведения массы (или тяжести) на скорость. Поэтому чем больше тяжесть тела, чем больше его скорость, тем труднее ему отклониться от прямолинейной траектории. Тяжесть считается известной, постоянной, проявляющейся самой собой. Скорость — это отношение пути ко времени. Таковы физические воззрения Вариньона.

С точки зрения «геометрии бесконечно малых»[1] тело в данный момент времени стремится двигаться по касательной к кривой (траектории), то есть по бесконечно малой дуге кривой, через концы которой проходят радиусы, пересекающиеся в центре, к которому, по предположению, приложена центральная сила. Это бесконечно малая дуга определяет бесконечно малую разность радиусов, выходящих из центра. Из

[1] Так автор называет *дифференциальное исчисление.*

подобия силового и геометрического треугольников — отношения касательной и центральной (радиальной) сил равны отношению путей. Центральная сила тем больше, чем больше искривлена траектория, то есть чем меньше радиус кривой. Если тело движется по прямой, то центральная сила исчезает. Кривизна кривой определяется ее радиусом (кривизны), который может принимать значения от 0 до ∞. Такова суть математической модели автора.

Пусть тело L движется (рис. 4.3.5) по кривой NLM под действием центральной силы, направленной в (из) точку C, называемую центром сил. LC, lC — лучи (радиусы), LQ — касательная, $lP \| LC$, P — точка пересечения Cl и LQ, HL — высота, с которой должно упасть тяжелое, весом p, тело для того, чтобы в точке L у него была скорость v_L, равная скорости движения тела по траектории NLM под действием центральной силы f, $v_{LQ} = \text{const}$, $v_L \sim t_{HL} = t$, $HL \sim t^2$. Считая, что f действует аналогично p, можно записать соотношение $\frac{f}{p} = \frac{s}{HL}$, где s — путь, пройденный телом под действием центральной силы. Если τ — малое время, необходимое для прохождения Pl или PL, то $Pl \sim \tau^2$, $PL \sim \tau$ и $\frac{Pl}{s} = \frac{PL^2}{LQ^2}$ или $s = Pl\frac{LQ^2}{PL^2}$.

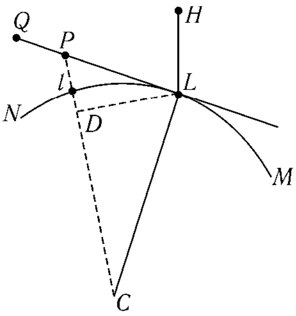


Рис. 4.3.5

Подставив это выражение в соотношение сил, получим

$$f = p\frac{Pl \cdot LQ^2}{HL \cdot PL^2}.$$

Но по закону Галилея $HL = \frac{a}{2}t^2$, $v_{LQ} = at$, $LQ = v_{LQ} \cdot t = at^2$ и $LQ = 2HL$. Тогда[1]

$$f = p\frac{Pl \cdot 4 \cdot HL}{PL^2}.$$

Далее автор предлагает еще несколько вариантов рассуждений, позволяющих получить тот же самый результат для величины центробежной силы тела, двигающегося по произвольной (не только по

[1]Промежуточные выкладки и обозначения отличаются от предложенных Вариньоном.

круговой или эллиптической траектории, как у Гюйгенса или Ньютона) траектории. В частности, вводя понятие соприкасающегося в точке L круга радиуса r и обозначая Ll символом ds, HL — h, LD — dx, Вариньон получает дифференциальное выражение для центробежной силы:

$$f = \frac{2ph\,ds}{r\,dx}.$$

Эту формулу автор применяет для различных кривых (логарифмической спирали, спирали Ферма, спирали Архимеда, эллипса, круга, гиперболы, параболы, произвольных конических сечений), в том числе в случае кривой MLN с несколькими фокусами[1].

Вариньон получил шесть различных выражений для центробежной силы, определяемой весом, параметром h и траекторией движения. Все эти формулы очень громоздки, что связано со сложными выражениями для радиуса кривизны[2] r, получаемыми во втором из названных мемуаров 1706 г. В нем исследователь приводит общий метод нахождения шести различных формул для радиуса кривизны произвольной гладкой кривой, используя, как и в первой работе, геометрические построения и доказательства для конечных и бесконечно малых величин.

В работе 1710 г., «Об обратных центральных силах» [313], Вариньон впервые четко формулирует две основные задачи динамики: «Возможны два вопроса, касающиеся центральных сил: первый — это найти силы, под действием которых описывается данная траектория, и второй — наоборот — по известным силам найти кривые, проходимые под действием этих сил. Первый из этих двух вопросов будет здесь называться *вопросом о прямых центральных силах*, а второй — *об обратных центральных силах*» [313, с. 533].

Для сравнения отметим, что в переписке Я. Бернулли и Германна, приведенной в том же сборнике «Мемуаров», мы видим, что Бернулли приводит два решения второй задачи и одно первой, Германн — только одно второй. Вариньон же получил общие формулы, дающие решение обеих проблем.

Идея использования в задачах механики синтеза исчисления бесконечно малых и геометрии получила развитие в публикациях Вариньона 1707–1711 гг., посвященных теории движения тел с учетом сопро-

---

[1] Кривые, изученные немецким математиком Э. В. фон Чирнхаузом.

[2] Касательный луч, радиус — по терминологии Вариньона.

тивления среды, динамике околоземного движения, баллистической задаче. Всем циклом работ автор пытается дать решение баллистической задачи в постановке Ньютона и в развитие статьи, опубликованной в январском номере «Journal de Trévaux» за 1706 г. В публикации 1707 г. «О движениях, совершающихся в среде, сопротивляющейся некоторым образом» [310] приводится общая постановка задачи о движении в произвольной среде (воздух, вода). Вариньон отмечает, что среда сопротивляется ее «разделению и проникновению движущегося тела, или, что одно и то же, тело встречается с некоторыми препятствиями при перемещении его частей». Необходимо определить степень убывания скорости в каждый момент времени. Для решения этой задачи необходимо знать скорость падения тела без учета сопротивления и величину силы сопротивления. Вариньон считает заданными произвольные (!) кривые (как функции времени) скоростей и сопротивлений, с помощью которых он определяет две другие — потерянной и оставшейся скоростей. Интегрирование последней кривой и приводит к решению задачи.

В работах 1708–1709 гг. [311], как и в предыдущей, движение тела, брошенного под углом к горизонту, рассматривается как *суперпозиция двух движений*: вертикального падения под действием силы тяжести и движения под углом к горизонту, как следствие заданной начальной скорости. В отличие от первых работ, где не учитывалось сопротивление среды свободному падению тела, в статье «Кривая движения тела в воздухе в предположении сопротивления, зависящего от скорости» [311], Вариньон рассматривает самый общий случай.

Траекторию, описываемую телом, брошенным под углом к горизонту, автор называет «кривой бросания» (courbe de projection). Прямую, проходящую через направление начальной скорости, — «линией бросания». Суть проблемы такова: «Найти кривую бросания тела в воздухе, линия бросания которой образует некоторый угол с вертикалью, в предположении сопротивления среды зависящим от скорости, вызываемой сопротивлением в каждый момент времени, и при выполнении предыдущей гипотезы[1] о проходимых телом под действием тяжести путях» [311].

Решение проблемы состоит в следующем. Пусть AC — не вертикальная линия бросания (рис. 4.3.6); AF, перпендикулярная AC, — ве-

[1] Следуя Галилею и Россиоли, Вариньон считает, что несмотря на сопротивление среды, проходимые при вертикальном падении тела пути относятся как квадраты времен.

личина начальной скорости; вертикаль ABO — «диаметр» в точке A параболы APO, описываемой телом с постоянной (начальной) скоростью под действием тяжести; ордината BP параллельна касательной AC к траектории APO; TP параллельно AB; TV параллельно AF; V — точка пересечения TV и прямой FV, параллельной AC; ARC — логарифмическая кривая, асимптотой которой является FVC; RG параллельна FVC; AGH — четверть угла, $AG = AH$; HL параллельно AO и пересекает BP в точке l. После весьма сложного геометрического доказательства, ссылаясь на свои предыдущие работы, автор утверждает, что кривая ALO и будет искомой кривой.

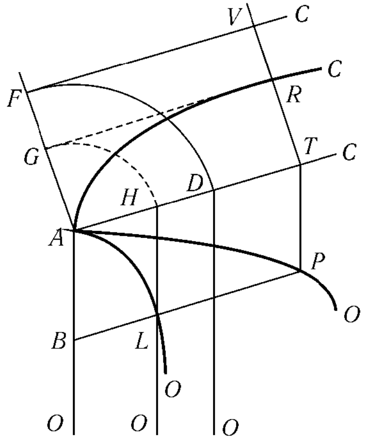


Рис. 4.3.6

В следствиях доказательства указывается, что траектория ALO всегда будет внутри параболы APO, с которой она пересекается только в точке A; вертикаль DO будет асимптотой кривой бросания AL; для получения аналитического вида кривой AL вводятся обозначения: $y = BL$, $x = AB$, $a = Af$; $t = AT$; $u = RV$, p — параметр параболы. Показывается, что выражения

$$y = a - u, \quad dy = -du, \quad \frac{dy}{a-y} = \frac{-\,du}{u}, \quad x = \frac{t^2}{p},$$

$$t = \sqrt{px}, \quad dt = \frac{p\,dx}{2\sqrt{px}}, \quad \frac{dt}{a} = \frac{p\,dx}{2a\sqrt{px}},$$

$\frac{-du}{u} = \frac{dt}{a}$ (уравнение логарифмической кривой ABC) приводят к равенству $\frac{dy}{a-y} = \frac{p\,dx}{2a\sqrt{px}}$, являющемуся дифференциальным уравнением искомой кривой. Интегрируя полученное уравнение, автор получает частное решение $\sqrt{px} = -\ln(a-y)$, определяющее баллистическую кривую в косоугольных координатах. Зависимость сопротивления среды от скорости определяется логарифмической (по гипотезе автора) кривой ARC, где u — скорость тела с учетом сопротивления, а v — скорость падения тела под действием тяжести без учета сопротивления среды. Считая, что $\frac{dt}{a} = \frac{dv-du}{\xi}$; $du = dt$; a и ξ — const, автор находит выражение для скорости $v = \frac{t^2+2at}{2a}$ и «ускоряющей силы»[1] $f = \frac{dv}{dt} = \frac{a+t}{a}$.

Используя далее обозначения Ньютона для дифференциалов (точка вместо d), Вариньон проводит сравнение движений с учетом и без учета сопротивления среды, отвечая тем самым на вопросы, поставленные в «Journal de Trevoux», предположительно, профессором математики из Каора (Cahors) Дюрраном.

Большой интерес для общей теории движения тел представляют работы Вариньона, посвященные общим законам ускоренного движения. Первая из таких работ опубликована в «Мемуарах» за 1693 г. С тех пор он неоднократно (1700, 1706, 1707, 1719) обращался к проблеме, признанным основоположником которой считался Галилей. Обращение Вариньона к проблемам его великого предшественника с позиций нового математического анализа было вполне закономерно.

Во времена Галилея и Декарта *равномерное, ускоренное* и *замедленное* движения рассматривались как самостоятельные. В работе 1707 г. «О произвольных переменных движениях, сравнимых между собой с равномерными» [309], Вариньон впервые убедительно доказывает, что это разновидности одного движения, которое им называется переменным. Он формирует новую физико-математическую идеологию — математическую теорию движения. Галилей показал, что при падении тела, его скорость пропорциональна времени, а пройденный

[1] Величину f Вариньон называет «тяжестью», но определяет равенством $f = \frac{dv}{dt}$, то есть фактически речь идет об ускорении или «ускоряющей силе» по Ньютону.

путь — его квадрату. Обобщая этот результат, Вариньон утверждает, что в общем случае путь и скорость, пользуясь терминологией Лейбница, являются функциями (function, affection) времени:

$$s = s(t), \quad v = v(t).$$

Исходя из классического философского закона о том, что все происходящее определяется причинами («Les effects sont toujours proportionels aux causes»), скорость называется причиной пройденного пути, что в современных обозначениях можно записать как $s = s(v)$. При постоянной скорости пройденный путь будет тем больше, чем больше скорость. При переменной скорости путь будет определяться интегралом от скорости — интегралом от ординат кривой $v = v(t)$, абсциссами которой является время[1]. Для сравнения пройденных телом путей для одной и той же функции $v(t)$ необходимо сравнивать времена движения. При разных функциях $v(t)$ пройденные пути будут различны. Если $v = \mathrm{const}$, то есть кривая $v(t)$ является прямой, то, говоря современным языком, и закон движения $s = s(t)$ будет изображаться в координатах $\{s, t\}$ прямой линией. В общем случае, нахождение закона движения $s = s(t)$ связано с интегрированием кривой скоростей $v(t)$. И Вариньон на примерах показывает, что чем сложнее вид кривой $v(t)$, тем труднее ее проинтегрировать.

Связь между ускоренным и замедленным движениями Вариньон демонстрирует очень наглядно: если на каком-то интервале времени движение было ускоренным, то это же движение, рассматриваемое в «обратном времени», будет замедленным. Переход от *прямого* к *обратному* времени выразится сменой знака алгебраического выражения для скорости или ускорения. Это означает, что достаточно изучать только законы ускоренного движения. Реальная скорость тела в каждый момент складывается из постоянной начальной скорости и скорости, приобретаемой в процессе ускорения (замедления), например, под действием тяжести тела. Решения, получающиеся математическими методами, в силу их общности могут не иметь физического смысла. Анализируя свои общие формулы переменного движения, Вариньон в конкретных примерах получает и выражение Галилея для равномерно ускоренного движения. Таковы основные положения кинематической теории движения Вариньона.

[1]Кривые $s = s(t)$, $v = v(t)$ имеют наглядное изображение в декартовой системе координат.

Эти воззрения использовались им в уже цитированной работе 1707 г., посвященной влиянию сопротивления среды, и в публикации 1719 г. «Сравнение скоростей тел произвольной тяжести, опускающихся или поднимающихся в пустоте по прямым или произвольным кривым линиям» [316]. Здесь, как указывает автор, используется результат, ранее сформулированный Ньютоном («Начала», книга 1, предложение 4, секция 8), И. Бернулли («Мемуары», 1710) и Германном («Форономия», книга 1, предложение 19), каждый из которых посвоему, доказал, что *два тела равной массы и тяжести, пропорциональной массе, на одинаковых расстояниях от центра тяжести, падая или поднимаясь в пустоте по произвольной траектории (прямой или кривой), имеют равные скорости.* Сами по себе выводы, сделанные Вариньоном по итогам этой работы, представляют, в основном, только историческое значение. Однако метод их получения был нов и перспективен. Этим методом была *теорема об изменении кинетической энергии* (в современной терминологии).

Опираясь на результат своей работы 1707 г. [309], Вариньон доказывает теорему, математическое содержание которой сводится к следующему. Если f — сила в направлении движения, m — масса, u — скорость тела, то из $f = \dfrac{\pm\, m\, du}{dt}$, $u = \dfrac{\pm\, dx}{dt}$ следует $\pm dx = u\, dt$, $f\, dx = m u\, du$ или

$$\int f\, dx = \pm\frac{mu^2}{2} + q,$$

где знаки $\pm$ определяют направление движения (падение или подъем), а q — константа, определяемая по начальным данным (положению и скорости). Рассматривая различные варианты начальных данных (движение из начала координат с нулевой скоростью, с заданной скоростью, аналогично из произвольной точки), движение в вертикальной плоскости, движение по наклонной плоскости, движение не только в поле центральных, но и параллельных сил, автор получает все возможные случаи соотношения *начальных, текущих* и *конечных* скоростей, особо отмечая, что из его теоремы следуют и соответствующие результаты Галилея.

Аналитическое выражение для силы $f = f(x)$, по предположению автора, должно задаваться заранее. Как уже отмечалось, эти выражения он получил в более ранних работах, посвященных теории центральных сил. В поле параллельных сил сила тяжести постоянна. Для графической иллюстрации задачи о вертикальном падении (подъеме) тела в центральном поле сил Вариньон приводит рисунок (рис. 4.3.7).

Здесь P — центр сил; A — начальная точка падения; DFM — кривая сил, ордината FB которой по величине равна f; AB — x; Bb — dx; $\int f\,dx$ — площадь $BFfb$.

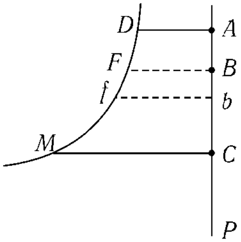


Рис. 4.3.7

Таким образом, в арсенале механики Вариньона мы видим понятия силы, как направленного отрезка; сил центральных и параллельных; массы; скорости, направленной по касательной к траектории в сторону движения и равной производной от пройденного пути как функции времени; ускорения, как величины изменения скорости, как производной от величины скорости; траектории, как геометрической кривой, определяющей положение тела (точки) в разные моменты времени. Он пользовался (не называя их) понятиями количества движения и лейбницевой «живой силы» для записи основных дифференциальных уравнений механики в виде, говоря современным языком, второго закона Ньютона или теоремы об изменении кинетической энергии. Именно в творчестве Вариньона в механике произошел переход от чисто геометрических методов Галилея, Декарта, Гюйгенса к аналитическим приемам дифференциального и интегрального исчисления.

Современный взгляд на механику, как на универсальную физико-математическую теорию произвольных движений тел, сформировался на основе использования одних и тех же понятий (положение, скорость, сила, ...), принципов, законов для описания различных явлений, решения физических и технических задач разного содержания. Процесс универсализации методов, ранее применяемых для исследования равновесия весов, рычагов, блоков, для изучения явления удара, падения земных тел, движения небесных тел — это и есть путь создания теоретической механики. Это последовательная модернизация, обобщение, уточнение, конкретизация методов применительно к бурно расширяющемуся кругу жизненно важных для человечества задач. От падения тела в пустоте — к движению тел с учетом сопротивления среды, от абсолютно упругого (неупругого) удара — к реальному удару тел, от задачи 2-х тел — к задаче n тел, задачам летательных аппаратов.

Путь универсализации методов, обобщения известных задач был главной чертой творчества Вариньона[1]. Но если его предшественники (Стевин, Галилей, Кеплер, Декарт) и современники (Гюйгенс, Ньютон, Лейбниц) искали универсальный принцип в мире философских идей, то он больше тяготел к универсализации математического аппарата механики. Особенно к адаптации идей математического анализа и дифференциальных уравнений. Основные идеи геометрической статики, принцип возможных перемещений[2], теорема об изменении количества движения, теорема об изменении кинетической энергии составляли основу механико-математических работ Вариньона. Это был пролог аналитической механики Эйлера–Даламбера–Лагранжа.

Анализируя результаты многолетнего творчества Вариньона, можно отметить явную тягу этого математика к прикладным задачам той эпохи. Даже его чисто математические работы 1699, 1706 гг. были ориентированы на развитие математического аппарата механики. Первый этап деятельности Вариньона (ориентировочно 1683–1692 гг.), связанный с освоением классической геометрии и механики предшественников, был «статическим». Изданием своего «Проекта» Вариньон не только подвел итог многовекового развития статики–механики, но и заложил основы для дальнейшего совершенствования ее математического аппарата (векторные свойства сил и движений, правило параллелограмма, теорема Вариньона) в трудах Д. Бернулли, Эйлера, Монжа, Л. Карно, Боссю, Лагранжа, Пуансо. Переписка Вариньона с Лейбницем и И. Бернулли, знакомство с трудами Ньютона и «Анализом бесконечно малых для исследования кривых линий» Лопиталя [203], полемика с Роллем[3] сделали Вариньона активным проводником идей нового математического анализа в механических приложениях.

Второй этап его деятельности (условно 1693–1719 гг.) связан с разработкой теории центральных сил, дифференциально-геометрического метода построения дифференциальных уравнений движения тел (точнее — точек) и их интегрирования. В качестве прямоугольных осей координат часто использовались касательная и нормаль. Возможно, именно это и навело Д. Бернулли и Эйлера на мысль записать дифференциальные уравнения[4] движения точки аналогичным образом.

[1]В своих исторических работах это отмечали Ж. Э. Монтюкла и Ш. Боссю.

[2]Здесь и далее современные названия.

[3]До 1706 г. активно критиковал исчисление бесконечно малых.

[4]Д. Бернулли — в 1726 г., Эйлер — в 1736 г.

Заключительный, третий, этап творчества Вариньона (1719–1722) составляет подготовка к публикации «Новой механики» [319], «Введения в анализ бесконечно малых» [317], «Элементов математики» [320], «Трактата о движении и измерении текущих вод» [318] — трудов итогового характера, обобщающих не только научные достижения, но и богатый преподавательский опыт исследователя.

В истории механики период XVII–начала XVIII в. стал эпохой перехода от механики отдельных явлений конкретных тел (механика начального периода) к механике произвольных движений любых тел (теоретическая, аналитическая механика). Это был этап смены методологии, универсализации научных доктрин. И Пьер Вариньон был одним из первых представителей новой эпохи.

4.4. Публикации по механике конца XVII – начала XVIII века

Творчество Вариньона, давшее мощный импульс дальнейшему развитию механики, опиралось на работы его предшественников и современников, также находившихся под влиянием идей Галилея, Декарта, Гюйгенса, Лейбница и Ньютона.

4.4.1. Имя маркиза де Лопиталя — автора одной из первых[1] книг по математическому анализу «Анализ бесконечно малых» [203], изданной в Париже в 1696 г., известно благодаря «правилу Лопиталя», автором которого И. Бернулли считал самого себя. Выходец из знатного рода[2], сын генерал-лейтенанта королевской армии, Лопиталь получил хорошее образование и рано проявил любовь к математике. По причине сильной близорукости Лопиталь вынужден был оставить военную службу в чине капитана кавалерии и, таким образом, получил возможность посвятить себя любимому делу. В 1691 г. Мальбранш познакомил Лопиталя с приехавшим в Париж И. Бернулли. Благодаря этому знакомству Лопиталь получил первое представление о работах Лейбница и Я. Бернулли по дифференциальному исчислению. В возрасте 32 лет Лопиталь был избран (1693) академиком Парижской академии наук.

[1]Bernard Nieuwentyt (1654–1718) был автором книг «Analysis infinitorum» (1695), «Considerationes cecundce circa differentiolis principia» (1696).

[2]Полное имя — Guillaume-Francois-Antoine de l'Hopital, chevalier, marquis de Sainte-Mesme, comte d'Entremont, seigneur d'Ouques, de Chaise, de Brean.

Сфера его научных интересов во многом совпадала с направлениями работ Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, Вариньона и братьев Бернулли.

Судьба привычного ныне дифференциального исчисления была достаточно сложной. Вскоре после издания книги Лопиталя появились выступления противников новой математики. В Парижской академии наук стан оппозиции возглавил известный аббат Галуа. Его поддерживали Ролль, аббат Биньон и Гоние. Одно из возражений Ролля состояло в том, что если $y^2 = ax - x^2$ является уравнением окружности, а его дифференциальное выражение, по Лопиталю, — $-2y\,dy = a\,dx - 2x\,dx$, то так как координаты $x + dx$ и $y + dy$, также должны удовлетворять уравнению окружности, получается, что $dx^2 + dy^2 = 0$ для dx и dy отличных от нуля [278]. По форме Ролль был прав, но по сути он пользовался понятием дифференцирования вместо производной, тогда как понятие предела тогда еще не существовало. В 1700 г. эта тема поднималась на нескольких заседаниях Академии. И неизменно (в том числе и против претензий И.Бернулли) в защиту Лопиталя выступали Вариньон и его друг Сорен (Saurin). Вскоре после смерти (2.2.1704, в возрасте 42 лет) Лопиталя Ролль снял свои замечания. Претензии же И. Бернулли на авторство первой книги по дифференциальному исчислению оказались небеспочвенными. Неизданная книга И. Бернулли, содержание которой во многом совпадало с книгой Лопиталя, позднее была обнаружена в библиотеке Базельского университета [260, с. 210]. Можно предположить, что в 1691 г., в поместье Лопиталя (Ouques), они работали над книгой совместно.

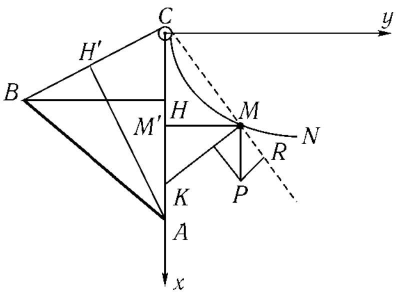


Рис. 4.4.1

Из малоизвестных работ Лопиталя по механике остановимся на статье «О кривой равновесия», опубликованной в «Acta eruditorum» за 1695 г. Задача состоит в нахождении «кривой равновесия» CMN, на которой должен находиться груз P, поддерживающий в равновесии подъемный мост AB (рис. 4.4.1). Невесомая нить BCM, скользящая без трения через блок C, привязана к точке B подъемного моста AB и удерживает мост в положении равновесия грузом P, привязанным к точке M. Вес моста равен Q.

Сила натяжения нити (T) на участках BC и CM будет одинаковой. Вес груза P автор раскладывает на две составляющие, проектируя его на прямую CM (нить) и на нормаль MK к кривой CMN в точке M. Очевидно, что треугольники CMK и MRP будут подобны. Этот факт во времена Лопиталя записывался следующим образом:

$$CM\,.CK :: MR\,.MP.$$

В современных обозначениях

$$\frac{CM}{CK} = \frac{MR}{MP} = \frac{T}{P}, \qquad (*)$$

где $CM = \sqrt{x^2+y^2}$; $CK = CM' + M'K = x + y\dfrac{dy}{dx}$.

Рассматривая треугольник ABC, автор записывает: $BC \cdot AH' = CA \cdot BH$. Считая далее, что вес моста Q можно прикладывать не только к его центру тяжести, но и к точке B, Лопиталь выписывает уравнение равновесия моста: $Q \cdot BH = T \cdot AH'$. Сравнение двух последних равенств приводит его к выводу, что можно считать $Q = CA$, $T = BC$. Если длина нити $BCM = a$, то $T = BC = a - CM = a - \sqrt{x^2+y^2}$. Переобозначая $P = b$, равенство (*) в итоге приводится к уравнению:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x + y\dfrac{dy}{dx}} = \frac{a - \sqrt{x^2+y^2}}{b},$$

последовательное преобразование и интегрирование которого приводит к решению задачи.

Это решение не безупречно. В нем физическая ошибка — перенос силы Q в точку B. Не очень корректно сформулирована и сама задача, где речь фактически идет о поиске геометрического места точек приложения вертикальной силы P, поддерживающей мост в положении равновесия. Но постановка задачи о поиске геометрического места точек абсолютно нова. Это открытие нового класса задач статики, решение которых возможно только методами математического анализа[1]. Эта математическая задача имела и ясное практическое значение. В качестве примеров практической направленности работ Лопиталя можно сослаться на статьи: «Простой метод нахождения круглого тела, которое при опускании в покоящуюся воду параллельно его оси, встречает наименьшее сопротивление из всех тел, имеющих одинаковую длину, ширину и скорость опускания» [204] и «Решение одной физико-математической задачи» [205]. Последняя из этих работ содержит и решение задачи о брахистохроне И. Бернулли.

4.4.2. Задачи, поставленные учеными XVI – XVII вв., продолжают оставаться в центре внимания и в начале XVIII в. Это проблемы движения снаряда[2] (тела, брошенного под углом к горизонту), движение небесных тел, удара тел, центра колебаний. Одним из инициаторов работ по внешней баллистике в Парижской академии наук был Николь Франсуа Блондель — член Парижской академии наук (с 1669), профессор Королевского коллежа, профессор и директор Академии архитектуры (с 1671), маршал Франции, один из основоположников строительной механики[3]. В 1677 г. он предложил задачу о нахождении угла, под которым необходимо произвести выстрел из пушки для достижения снарядом заданной высоты. Различные решения этой проблемы предложили Бюо, Рёмер и Делаир. Сам Блондель проблемам внешней баллистики посвятил книгу «Об искусстве бросания бомб» [141], ставшую основой для дальнейшего развития этого направления. Обращаясь к этой проблеме в «Анализе бесконечно малых», Лопиталь нашел огибающую семейства парабол, получаемых при переменном угле вылета снаряда.

Аналогичные проблемы обсуждаются и в работах ученика Вариньона — Гисне[4]. В «Мемуарах» за 1704, 1705 и 1707 гг. он опубликовал работы: «Общий метод геометрического определения фокусов ... »,

[1]Подобные задачи можно встретить в некоторых задачниках по теоретической механике.

[2]Тарталья в XVI в. установил, что траектория движения снаряда — кривая, дающая наибольшую дальность при угле 45°. Галилей, Марци, Роберваль в XVII в. показали, что эта кривая — парабола.

[3]Работал над планом перестройки Парижа.

[4]Член Парижской академии наук (с 1702 г. — адьюнкт, с 1711 г. — пансионер-механик), королевский профессор и инженер, профессор математики Торгового коллежа (College de La Marché, Paris), учивший Мопертюи.

«Обзор методов максимумов и минимумов . . . » и «Теория бросания тел или бросание бомб по гипотезе Галилея». В 1705 г. им издан «Трактат о приложениях алгебры к геометрии» [198]. Все работы Гисне получили высокую оценку его коллег (трактат дважды переиздавался, третье издание — в 1753 г.) как развитие вклада Лопиталя и Блонделя. В публикации 1707 г. он пишет: «Теория бросания тел, которую я здесь предлагаю, не является абсолютно новой. Это развитие теории и более простые доказательства того, что есть в книге «Об искусстве бросания бомб» Блонделя и его последователей» [260, с. 201].

4.4.3. Идеи нового анализа позволили Лопиталю вернуться к теории центральных сил Гюйгенса и построить свою теорию для случая кругового движения тела. Эта теория была опубликована в «Мемуарах» за 1700 г. Как уже упоминалось, в это же время аналогичными проблемами активно занимался Вариньон. В 1707 г. доктор теологии, аббат Филипп Вильмо издал в Лионе книгу «Новая система или новое объяснение движения планет» [322], вызвавшую неоднозначную реакцию. Теорию центральных сил автор использовал для описания движения планет. При этом закон Кеплера считался не a priori заданным, а его предстояло определить. В качестве физической причины возникновения центральных сил используется гипотеза вихрей Декарта, развитая позднее Мальбраншем и Гюйгенсом. В 1707 г. Фонтенель и Боми[1] в статье «О центробежных и центростремительных силах, рассматриваемых в общем случае для любых видов кривых и, в особенности, для круга» [141] высказали критические замечания в адрес книги Вильмо.

В своей статье Боми писал о книге Вильмо: «Насколько мне известно, господин Гюйгенс был первым, кто нам дал идею центробежных и центростремительных сил в своей отличной книге «Маятниковые часы». Господин Ньютон после него изучил эти силы еще глубже. После них господин Вариньон дал очень общие методы, касающиеся этого материала и опубликованные в различных статьях «Мемуаров» этой академии. «Новая система или новое объяснение движения планет» полностью основано на этой идее и рассмотрение этих видов сил дает автору книги возможность искусного объяснения движения небесных тел». «Господин Ньютон в IV теореме второго раздела первой книги «Начал» доказывает отношение центростремительных сил для двух

[1]Член Парижской академии наук. В [260] он упоминается как Бури (Bourie), в «Мемуарах» — Боми (Bomie).

разных кругов. Как мне кажется, это доказательство имеет много общего с принципом «новой системы» и, таким образом, теорема господина Ньютона и фундаментальный принцип господина Вильмо имеют важные последствия и в физике, и в астрономии, и я надеюсь с удовольствием увидеть, что оба этих заключения являются естественными следствиями одного более общего и более простого предположения».

Суть этого предположения Боми сводится к следующему. «Если тело движется по некоторой кривой APG таким образом, что постоянно стремится к бесконечно малому удалению по касательной PQ, то при действии некоторой силы, направленной к произвольному центру C, оно будет обязано описывать бесконечно малую часть PQ кривой; я утверждаю, что центростремительная сила, которую я обозначаю f, будет относиться к некоторой постоянной a, как маленький отрезок GQ к квадрату времени» [260, с. 60].

Рассматривая далее два круга с окружностями C и c, центростремительными силами F и f, скоростями V и v, как следствие общего предположения, Боми получает пропорцию

$$\frac{V^2}{v^2} = \frac{C}{c},$$

которая и составляет суть общего предположения «новой системы».

Установив эту пропорцию, Боми пишет: «Очевидно, что этот принцип можно естественно получить из теоремы Ньютона и что эта теорема есть не что иное, как следствие предположения, которое я доказал». «В силу того, что автор «новой системы» предполагает только $F = f$, но пытается доказать это равенство, я считаю возможным выразить сомнение по поводу правильности его доказательства» [260, с. 61].

Далее Боми отмечает противоречие и в физических представлениях Вильмо: «Этот автор (Вильмо) считает (флюид) «жидкость» однородной, то есть имеющей всюду одинаковое сопротивление. Он считает, что все части «жидкости» покоятся, и взяв две точки, одну ближе к центру, другую дальше от него, он заставляет их двигаться вокруг центра. В этом случае он доказывает, что центростремительные силы одинаковы, и вот лемма, которую он пытается доказать: «Центростремительные силы нескольких тел, движущихся по окружности в однородной «жидкости» с разными скоростями, равны». «Тела, вращаясь по окружностям, стремятся удаляться в направлении касательном к окружностям; таким образом, «жидкость» оказывает сопротивление только касательному движению; но такое сопротивление не влияет на центростремительную силу, какой бы ни была плотность среды («жидкости»); то есть однородность «жидкости» ничего не добавляет такого, что могло бы приближать или удалять тело от центра» [260, с. 436–437].

В «Мемуарах» за 1712 г. Боми опубликовал оригинальную работу «Свойства трактрисы» [143], получившую дальнейшее развитие в работах его соотечественников Буге и Мопертюи и публикациях современных авторов. Речь идет о движении связки двух тел A и B. «Если на горизонтальной плоскости представить груз A, привязанный к концу нерастяжимой нити AB, и если конец B нити движется по произвольной прямой BC, то груз A описывает в своем движении трактрису AM». Так автор определяет трактрису, доказывая далее шесть свойств этой кривой. Используя циркуль и линейку, он приводит и доказывает способ построения отрезка прямой, составляющей часть произвольной трактрисы. Аналогичными построениями, но без необходимого доказательства, ранее пользовался Гюйгенс. Автор отмечает и интересные перспективы использования трактрисы. В публикациях Буге и Мопертюи трактриса называлась «кривой преследования» или «кривой погони» в предположении, что тело A преследует тело B. Эту задачу далее рассматривал Г. К. Суслов [77], а в нашем веке ее развитие легло в основу целого раздела теории оптимального управления — *теории дифференциальных игр*[1]*, изучающей задачи стыковки и преследования, поражения и защиты движущихся объектов.*

4.4.4. Уже отмечалось, что механика как наука зародилась из потребности изучения машин. Ученые, философы, изобретавшие первые механизмы и описывавшие их работу, и были первыми механиками. На протяжении всей истории изобретательский талант человечества расширял ассортимент применяемых механизмов и машин. Вместе с ним возрастали количество и сложность задач механики. Важность этой прикладной сферы научной деятельности в конце XVII – начале XVIII вв. подтверждается включением в состав Парижской академии наук академиков-механиков. В их числе можно назвать Совера[2], Парана, Амонтона, Лефевра, Трюше. В Англии работал бывший ученик Гюйгенса и Бойля — Дени Папен.

---

[1]Работы Айзекса Р., Красовского Н. Н., Понтрягина Л. С., Осипова Ю. С., Куржанского А. Б., Петросяна Л. А. и других.

[2]Задолго до Эйлера сформулировал и решил задачу «О трении нити вокруг неподвижного цилиндра» [281].

К концу XVII в. было осознано, что важную роль в работе машин и механизмов играет явление трения при взаимодействии тел. Возникла необходимость в количественной оценке возникающих между телами взаимодействий. Одним из первых к этой проблеме обратился французский механик и физик-экспериментатор[1] Гильом Амонтон. Во втором томе «Мемуаров» за 1699 г. опубликованы три его статьи: «Удобный метод установления действия огня на силу людей и лошадей для движения машин», «О сопротивлении, возникающем в машинах как в результате трения их составляющих частей, так и из-за жесткости использования ремней (шкивов) и способы вычисления тех и других», «Таблица сопротивлений, возникающих в машинах». Наибольший интерес для механики представляет вторая из публикаций, где впервые обобщаются результаты экспериментов, связанных с трением. Не претендуя на развернутую теорию трения, автор формулирует некоторые из открытых им закономерностей. В частности, он указывает, что величина трения пропорциональна взаимному давлению между телами. Следующий важный вклад в теорию сухого трения скольжения внес соотечественник Амонтона — Шарль Огюст де Кулон[2].

4.4.5. Видным математиком и механиком конца XVII – начала XVIII вв. был ученик Вариньона, член Парижской академии наук Луи Карре. Он родился 26 июля 1663 г. в местечке Клифонтен недалеко от Нежье-ан-Бри. Его отец — земледелец — мечтал видеть своего сына священником, и сын покорно изучал теологию в течение трех лет. Однако после окончания учебы он отказался от вступления в орден, и отец прекратил оказывать ему помощь, необходимую для жизни в Париже. Эта неприятность судьбы сослужила Карре хорошую службу.

Поиск пристанища привел Карре к Мальбраншу, взявшему его в качестве секретаря. Под руководством этого виднейшего ученого конца XVII в. Карре семь лет изучал математику, метафизику, сформировался его глубокий интерес к исследовательской деятельности. Покинув Мальбранша, он начал преподавать математику и философию, в 1697 г. был избран членом Академии наук, на него обратил внимание Вариньон, отличавшийся особой скрупулезностью в выборе своих учеников.

---

[1]Автор многих экспериментов с клепсидрами, термометрами, барометрами, трением.

[2]Член Парижской академии наук (с 1781 г.), Национального института (с 1795 г., в 1801 г. его президент), генеральный инспектор народного образования (1802–1806).

Первое крупное сочинение Карре, опубликованное в 1700 г., было посвящено механике и интегральному исчислению [167]. Поддержка Вариньона позволила ему из адъюнктов (с 1699 г.) вскоре перейти в ассоциированные члены Академии, а позднее занять и почетную должность академика-пансионера. Став пансионером-механиком, Карре увлекся сферой музыки и музыкальных инструментов, теорией звука. Но вскоре ухудшилось состояние его здоровья. Это ухудшение продолжалось последние шесть лет его жизни, и 11 апреля 1711 г. он скончался[1], оставив после себя, кроме указанной книги, мемуар о распространении звука (Jounal des Sçavans, 1707 г.) и около десяти статей по различным вопросам механики и математики, опубликованных в «Мемуарах» Академии наук.

Одна из этих статей — «О законах движения» [168], опубликованная в 1706 г., наилучшим образом характеризует не только вклад и личные воззрения автора, но и состояние науки о движении в начале XVIII в. Убежденный последователь Мальбранша (а значит, — Декарта), Карре считает, что движение может передаваться от одного тела другому только в результате непосредственного взаимодействия, одним из способов которого является удар. Поэтому законы удара, передачи движения и являются центральными в теории движения тел. По-видимому, этой же логике следовали и организаторы конкурса Парижской академии наук 1724 г., и один из конкурсантов — И. Бернулли.

«В физике нет вопросов, которые бы занимали философов и математиков прошедшего века больше, чем законы движения. Действительно, эти законы являются самыми интересными и самыми важными для этой науки» — пишет Карре в предисловии к своему мемуару. Не останавливаясь на оценке работ предшественников, Карре предлагает свое общее правило («Предложение»), следствиями которого являются известные законы, открытые до него. При этом автор пользуется понятиями *массы, скорости, силы, законом равенства действия и противодействия.* Обратимся к некоторым его определениям.

«1. Масса тела является количеством собственного вещества, содержащегося в занимаемом телом пространстве, и это пространство называется *объемом.*

2. Скорость тела является отношением пути ко времени, или это пройденный путь, деленный на время его прохождения.

3. Сила тела — это произведение его массы на его скорость».

---

[1] Его место академика-пансионера занял другой ученик Вариньона — Гисне.

Казалось бы, автор пользуется языком знакомых ныне понятий. Но его «скорость» — это современная средняя скорость, его «сила» — это нынешнее количество движения, точнее, его модуль. Обозначения же для массы и скорости (m и v) одного из тел вполне современны. В основу своей *теории соударения* тел Карре полагает четыре очевидных, с его точки зрения, аксиомы:

«Очевидно, 1) что если два неравных тела движутся с равными скоростями, то их силы относятся как их массы или количества материи; 2) если эти тела одинаковы и движутся с неравными скоростями, то их силы относятся как их скорости; 3) если эти тела различны по их массам и скоростям, то отношение их сил сложным образом зависит от их масс и скоростей; 4) если два неравных тела имеют одинаковые силы, их скорости обратно пропорциональны их массам» [168].

Удар считается упругим и прямым. Под последним понимается, что центры тяжести тел и их общий центр тяжести всегда лежат на одной прямой или, если тела являются шарами, то линия, соединяющая их центры, проходит через точку соприкосновения в момент удара. Обозначив v и r — скорости соударяющихся тел до удара, m и n — их массы, Карре формулирует следующее «общее предложение»: «Я говорю, что сумма этих тел относится к удвоенному одному или другому, как сумма их скоростей к скорости, которая, будучи отнятой от той или другой скорости до удара, дает скорости этих тел после удара; или, что аналогично, скорость каждого из тел после удара будет равна разности скорости до удара и произведения удвоенного второго тела на сумму скоростей тел, деленную на сумму их масс» [168].

Автор записывает этот результат в виде

$$m + n\,.2n :: v + r\,.\frac{2n \times \overline{v + r}}{m + n},$$
$$m + n\,.2m :: v + r\,.\frac{2m \times \overline{v + r}}{m + n},$$

что в современных обозначениях эквивалентно записи:

$$\frac{m+n}{2n} = \frac{v+r}{\dfrac{2n(v+r)}{m+n}}.$$

Скорости тел после удара будут равны соответственно $v - \dfrac{2n(v+r)}{m+n}$ и $r - \dfrac{2m(v+r)}{m+n}$.

Доказательство этого предложения основано на законе равенства действия и противодействия, экспериментальных данных и рассуждениях о физической природе соударения и последующей деформации тел. Физические же представления автора полностью соответствуют картезианской теории эфира и с современной точки зрения не могут быть признаны безупречными.

Далее автор приводит 35 следствий «общего предложения», иллюстрируемых конкретными числовыми примерами. Среди этих следствий встречаются, например, такие. «Центр тяжести соударяющихся тел движется с одной и той же скоростью до и после удара; и если центр тяжести покоился до удара, то он также будет покоится и после удара». «Если два тела столкнутся повторно с теми же скоростями, которые они приобрели после первого удара, то они приобретут те же скорости, какие имели до первого соударения». «В соударяющихся телах не сохраняется одно и то же количество движения, оно может увеличиться или уменьшиться». «Если два одинаковых тела сталкиваются с одинаковыми или различными скоростями, то они обмениваются скоростями после удара и отскакивают». «Если два неравных тела соударяются при встречных движениях, а их скорости обратно пропорциональны их массам, то они отскочат после удара с прежними скоростями». «Если два неравных тела соударяются при встречных движениях, после чего оба движутся в одну сторону, или одно остается неподвижным, то сумма их количества движения после удара будет равна разности их количества движения до удара».

Следствие под номером 13 повторяет результат Гюйгенса и Лейбница о сохранении «живых сил»: «Если два тела соударяются, то сумма произведений масс на квадраты скоростей до и после удара сохраняется». Далее Карре показывает, что сколь угодно малое тело ударом может привести в движение сколь угодно большое тело и даже целую систему тел. При этом соответствующим подбором масс системы последовательно соударяющихся тел на выходе можно получить любую, в том числе и значительно превосходящую начальную, скорость. Полученные результаты автор сопоставляет с выводами Лопиталя, Гюйгенса и Сорена. Имя Ньютона и «Начала» не упоминаются, хотя трудно представить, что они не известны ученику Вариньона.

Анализ этой публикации показывает, как по-разному относятся к механике два современника — Ньютон и Карре. Первый ставит перед собой задачу построения новой методологии механики (по заданным силам найти движение, и наоборот), второй, как приверженец традиционной методологии, рассматривает, безусловно, важную, но частную проблему. С современной точки зрения вклад в механику Карре не представляется значительным. Но с точки зрения истории науки этот вклад интересен. Интересен тем, что в начале XVIII в. были уже близкими к современным понятия *скорости* и *массы*, понятие же *силы*, как и во времена Декарта, включало в себя нынешнее понятие *количества движения*. Все понятия имеют ясное математическое выражение, позволяющее совершать необходимые операции. Этого, кстати, не хватает ньютоновскому определению силы, которое, как мера взаимодействия тел, в силу своего физического содержания[1] может быть записано и как $\vec{F}$ и как $\vec{F}\cdot t$. Только сравнительная характеристика результатов деятельности ученых определенного периода позволяет дать объективную с современной точки зрения оценку их заслуг.

4.4.6. Заметим, что эта оценка может не совпадать с оценкой современников автора. В «Истории Королевской академии наук» за тот же 1706 г. можно прочесть обстоятельную рецензию «О законах удара тел» [293] на названную работу Карре. В первом же абзаце этой статьи автор называет постыдным тот факт, что философия так поздно обратила внимание на существование определенных правил или законов передачи движения между телами. Он подчеркивает, что с момента появления идеи таких законов, «которые должны быть первейшими основами физики», прошло порядка ста лет. Самые известные философы обращались к поиску этих законов и в том числе великий Декарт, сформулировавший их ошибочный вариант. Карре, обобщив опыт своих многочисленных предшественников, привел «универсальную формулу, из которой следуют все полученные результаты, ранее получаемые длинными и сложными способами» [293].

Рецензент обнаруживает ясное понимание идей механики XVII в. и в том числе теории удара, различая прямой и косой удар, удар абсо-

[1]Взаимодействие тел может быть кратковременным, как в случае удара, так и протяженным во времени.

лютно упругих и деформируемых тел. Он пишет: «Движение совершает определенная сила, и эта сила должна быть тем больше, чем больше приводимое в движение тело или чем больше его скорость. Если она постоянна и действует вся полностью, то она дает наименьшую скорость наибольшему телу и наибольшую скорость — наименьшему, и эти скорости обратно пропорциональны массам или тяжестям тел. Таким образом, *сила*, под действием которой приводится в движение тело, *или*, что одно и то же, *количество движения*, является произведением массы или тяжести на скорость, и это произведение может оставаться постоянным, в то время как эти две входящие в него величины могут варьироваться бесконечным количеством способов, в чем и состоит великий Принцип Механики. Таким образом, для определения скорости тела, количество движения и масса которого известны, достаточно разделить количество движения на массу и результатом будет скорость. Если предполагается, что масса будет возрастать при сохранении количества движения, то скорость будет убывать, так как одно и то же количество движения делится на бо́льшую величину».

Обращаясь к законам бесконечных величин, автор пишет, что, в этом случае, тело бесконечно большой массы должно иметь бесконечно малую скорость, то есть фактически оно должно покоиться. И если сила бесконечно мала или равна нулю, то для любой и даже самой малой конечной массы будет самая малая конечная скорость. Отсюда следует, что сила удара бесконечна по сравнению с простой тяжестью и бесконечно малая масса, двигающаяся с наибольшей конечной скоростью, будет иметь бесконечно малую силу. Именно эти метафизические рассуждения, а не эксперимент, и являются, по мнению рецензента, обоснованием закона равенства действия и противодействия.

Рассмотрев варианты поведения тел после удара, автор приходит к выводам: 1) количество движения тел не может увеличиться в результате удара, 2) оно может уменьшиться и даже уничтожиться, 3) скорость убывает всегда. Это приводит его к заключению о том, что движение во Вселенной в каждый момент времени должно уничтожаться, и Природа постепенно должна приходить в состояние апатии, изнеможения, стремясь в итоге ко всеобщему покою, гибельному для всех существ, если для восстановления движения не будут использоваться постоянные ресурсы. Один из ресурсов — это *упругость тел*.

Избегая физических гипотез природы упругости тел, автор указывает только на то, что она связана с изменением и восстановлением их формы. При этом он пользуется идеей переноса силы вдоль линии ее действия и в само понятие силы вкладывает привычный нам смысл меры взаимодействия тел (а не количества движения): «...если я сжимаю руками два упругих тела, например два шара, их упругости действуют одна на другую с силой, равной давлению рук, и это аналогично тому, что упругость одной силы, равной давлению моих рук, приложена между шарами и стремится их разъединить, направляя один в одну, а другой — в другую сторону» [293]. И далее рецензент пишет, что если сжимаемые шары не равны, то есть их массы различны, то сила упругости, приложенная к меньшему телу, вызовет большую скорость, чем скорость, приданная той же силой бо́льшему телу. Упругая сила шаров стремится их разделить, но если после удара шары движутся в одном направлении, с одинаковыми скоростями (как одно тело), то «сила этой упругости есть не что иное, как их обоюдная скорость». Следует заметить, что автор ясно различает и использует абсолютное, относительное движение и соответствующие скорости.

Эта рецензия неизвестного автора[1] замечательна не столько своей оценкой работы Карре[2], сколько в качестве самостоятельного мемуара по теории удара. Обстоятельность изложения понятий, законов, понимание физической сущности явления удара свидетельствуют о хорошем владении автором излагаемой теорией и историей ее создания. Она интересна и потому, что здесь впервые понятие бесконечно малой величины используется не только применительно к традиционным геометрическим и кинематическим понятиям (перемещение, изменение скорости), но и применительно к физической величине массы тела, что является очередным шагом в адаптации идей анализа бесконечно малых в механике.

4.4.7. Одним из авторитетнейших ученых конца XVII – начала XVIII вв. был Н. Мальбранш[3]. Последовательный сторонник философии Декарта, он известен как автор двухтомного философского трак-

[1]Возможно это были Сорен или Паран.

[2]Автор дает высокую оценку «общей формулы» Карре, как теоретического итога развития теории удара и как эффективного метода решения множества практических задач.

[3]Никола Мальбранш — родился в Париже (6.8.1638), получил философское (college de Marche) и теологическое (Sorbonne) образование, видный философ, теолог, физик, геометр, член Парижской академии наук. Умер 13.10.1715 г. в Париже. Его взгляды существенно повлияли на воззрения Лейбница и других ученых конца XVII – начала XVIII в.

тата «Поиск истины» [241], за три года до смерти дополненного и переизданного автором в трех томах под общим названием «Поиск истины, где говорится о природе человеческого разума и о его использовании для избежания ошибок в науке» [242]. Одной из важнейших задач этого издания было изложение новой физической картины Природы. По своей сути эта теория не была принципиально новой. Это была очередная попытка популяризации картезианской философии природы, основанной на гипотезе эфирных вихрей. Составной частью физики Мальбранша была «общая теория законов движения», развитие которой мы видим в работах Лейбница, Карре и И. Бернулли. Заметим, что для понимания законов движения Мальбранша от читателей требовалось не только знание философии, но и очень хорошая математическая подготовка.

4.4.8. Имя Бернара Лами[1] упоминается Лагранжем в «Аналитической механике»: «Для того, чтобы не упустить чего-либо, относящегося к истории открытия сложения сил, я должен здесь вкратце упомянуть о маленькой работе, которую в 1687 г. опубликовал Лами под заглавием «Новый способ доказательства основных теорем элементов механики». Автор отмечает, что когда тело испытывает на себе действие двух сил, заставляющих его двигаться по двум различным направлениям, оно необходимо идет по среднему направлению, так что, в случае, если бы путь по этому направлению оказался для него закрытым, оно осталось бы в покое, и обе силы уравновесили бы друг друга. Среднее же направление он определяет путем сложения двух движений, которые приобрело бы тело в первое мгновение под влиянием каждой из обеих сил, если бы последние действовали отдельно одна от другой, и таким образом получает диагональ параллелограмма, стороны которого составляют пути, которые были бы пройдены в течение одного и того же времени под действием обеих сил и которые, следовательно, пропорциональны этим силам. Отсюда он тотчас же выводит теорему, что обе силы относятся друг к другу обратно отношению синусов углов, которые их направления образуют со средним направлением, по которому двигалось бы тело, если бы оно не было задержано какими-либо препятствиями; эту теорему он применяет к наклонной плоскости и к рычагу, на концы которого действуют силы тяги, направления ко-

[1]Родился в июне 1640 в Мане (Mans), умер 29.01.1715 г. в Париже. В книге [260] он упоминается не как Lamy, а как Laury.

торых образуют между собою некоторый угол; однако для того случая, когда направления этих сил параллельны, он пользуется ненадежными и малоубедительными соображениями» [53, Т. 1, с. 20–21].

Из этой цитаты следует, что Лами считал силу источником движения тела и действие на тело двух сил предлагал заменять одной, определяемой правилом параллелограмма. Здесь же мы видим и условие равновесия тел, сводящееся к «равновесию» сил. Эти идеи перекликались с идеями, изложенными в «Проекте новой механики» Вариньона, изданном в том же году. В связи с этим в апреле 1688 г. в «Histoire des Ouvrages des Sçavants» появилась заметка, обвиняющая Лами в плагиате. В сентябре того же года Лами опубликовал в «Journale de Sçavants» оправдательное письмо. Однако Вариньон не откликнулся на приоритетные претензии, и дискуссия по этому поводу прекратилась.

Следует заметить, что судьба Лами была достаточно сложной. Получив в молодые годы достаточно хорошее образование (учился в Мане, Париже, Жюйи, Сомюре), он начал преподавательскую деятельность в Анжере (Angers), где зарекомендовал себя ярым картезианцем, нажив тем самым врагов из числа профессоров — сторонников Аристотеля. Совет коллежа Анжу сначала запретил ему преподавание картезианских идей, а затем (2 августа 1675 г.) ему было запрещено вести преподавательскую деятельность во Франции. Отец Лами был сослан в монастырь в Дофине. Благодаря расположению к нему епископа Гренобля, он вскоре вернулся в Париж, где его опять ждали неприятности со стороны архиепископа Харлая, связанные с выходом его книги «Евангелическая гармония». Лами был автором книг, посвященных поэзии, теологии и археологии. В 1701 г. он издал в Париже «Трактат о перспективе» [224], позднее высоко оцененный Монтюкла в «Истории математики» [259]. Его книги по математике «Элементы математики» [221] и «Элементы геометрии» [222] не раз переиздавались[1], он вычислил π с точностью до 128 знаков. Механике, кроме упомянутой работы, Лами посвятил «Трактат о механике, о равновесии твердых тел и жидкостей» [220]. Второе издание этой книги вышло в один год с «Началами» Ньютона и «Проектом» Вариньона.

4.4.9. Жак Озанам, ставший членом Парижской академии наук в 61 год в 1701 г., больше известен как математик. Однако четвертый

[1]Книга «Элементы математики», известная еще под названием «Трактат об общей величине» («Traité de la grandeur en général»), была переиздана в 1715 г. «Элементы геометрии» переиздавалась четырежды (4-е издание в 1710 г.).

том его пятитомного сочинения «Курс математики, включающий все части этой науки» [261], изданный в 1693 г. в Париже и переизданный в 1699 г. в Амстердаме, посвящен механике и теории перспективы.

Механике посвящены и некоторые работы Филиппа де Лаира[1] — известного астронома, математика, архитектора и метеоролога, участника экспедиции[2] по уточнению географических координат. В девятом томе «Старых мемуаров» («Anciens Mémoires»), переизданном в 1730 г., опубликован большой «Трактат по механике» [215] и «Трактат об эпициклоидах и их использовании в механике» [216]. В первом из трактатов излагаются не только основные понятия и принципы механики, но и решаются некоторые инженерные задачи[3]. Второй мемуар посвящен изучению кривых, называемых эпициклоидами, и их использованию в конструировании формы зубьев зубчатых колес, используемых в механизмах. Речь идет о том, что при работе механизма основная нагрузка, в том числе и вредное трение, приходится на способ зацепления зубчатых колес. Поэтому форма зубьев шестерен не может быть произвольной, а должна иметь совершенно определенную форму, описанную автором. В «Мемуарах» за 1700 г. им опубликована статья по баллистике «Общий метод бросания бомб во всех возможных случаях ...» [217], развивающая некоторые идеи уже названной книги Блонделя. А в работе «Замечания о падении тел в воздухе», опубликованной в «Мемуарах» за 1714 г., Лаир сравнивает результаты опытов Мариотта по определению величины сопротивления воздуха с собственными. При этом подробно описываются опыты Мариотта и Галилея, схема его экспериментальной установки (весы с маятником) и приводятся результаты, которые, по оценке автора, соответствуют выводам его предшественников.

4.4.10. После работ Роберваля, Вариньона, Лами, Ньютона правило параллелограмма применительно к силам не вызывало сомнений.

---

[1] Пансионер-астроном Парижской академии наук (1678), профессор математики в Collége de France, профессор архитектуры в Académie d'architecture. Подготовил к изданию трактат Мариотта о движении жидкостей [246].

[2] Членами экспедиции были Пикар и Кассини.

[3] В «Трактате по механике» и в [218] излагается важная задача строительной механики — расчет арочных конструкций. Автор рассматривает арку как совокупность идеально гладких клиньев, силы взаимодействия которых направлены по нормали к поверхностям соприкасающихся клиньев. Веса клиньев определяются графическим методом. Вторая теория Делаира [219] посвящена определению размеров колонн, необходимых для поддержания арки. Теория Делаира позднее использовалась Белидором в его «Инженерной науке» [131].

Но можно ли его применять для сложения скоростей? Бернар Рено[1] Делисагараи в книге «Теория маневра кораблей» [272] на этот вопрос отвечал утвердительно. Ему возразил Гюйгенс, считавший, что силы сопротивления воды пропорциональны не скорости, а квадрату скорости. Поэтому правило для сил не может быть применено для скоростей. Позднее к этой дискуссии (на стороне Гюйгенса) подключились маркиз де Лопиталь и И. Бернулли[2]. Но в 1714 г. в «Трактате маневра кораблей» [139] Бернулли поддержал точку зрения Рено, который еще раз подтвердил ее в работе «О теории, касающейся одного принципа механики жидкости, оспоренного Гюйгенсом» [273], изданным в Париже в 1717 г.

4.4.11. Вполне традиционным по тематике был трактат Антуана Парана[3] «Элементы механики и физики, где геометрически выводятся принципы удара и равновесия для любых типов тел; с естественными приложениями к основным машинам» [263], изданный в Париже в 1700 г. В докладе, зачитанном Параном 24 июля 1700 года в Парижской академии, он впервые использовал систему трех ортогональных координат в пространстве для записи уравнения сферы. По иронии судьбы Академия отказала автору в праве публикации этого доклада. Но в 1702 г. он опубликовал другую работу, посвященную гиперболоиду вращения, где также использовалась пространственная система координат. А в 1703–1705 гг. в Париже был издан трактат «Исследования по физике и математике»[4] [264], в котором вновь используются три пространственные координаты[5]. Здесь же Паран пытается показать ошибочность доказательства Гюйгенса, касающегося траектории изохронного движения маятника[6]. Сорен, а позднее Лувиль и И. Бернулли, вы-

---

[1]Морской военный инженер, генерал французского и испанского флота, близкий друг маршала Вобана, Мальбранша. В книге [260, с. 376–380] его фамилия названа как Renan (Ренан), в «Memoires» и «Larousse» — как Renau (Рено).

[2]Лейбниц в статье «Общее правило сложения движений» [227] подтвердил точку зрения Рено.

[3]Адъюнкт (с 1699 г.) академика-механика Дебийете, ординарный академик (с 1716 г.) Парижской академии наук, автор многих работ по механике, математике, физике, опубликованных в Journal des Sçavants, Mémoires de Trévoux, Mercure.

[4]Второе (трехтомное) издание вышло в Париже в 1713 г.

[5]Заметим, что равноправные и ортогональные оси координат на плоскости Ньютоном впервые вводятся в 1704 г. в сочинении «Перечисление кривых третьего порядка» [55, с. 88].

[6]Галилей считал, что траектория будет дугой окружности. Гюйгенс доказал, что это циклоида.

разили несогласие с мнением автора. Особенно резок был И. Бернулли, сравнивавший автора с «человеком, чья цель жизни, кажется, состоит в вырывании чужих идей» [260, с. 358].

В «Мемуарах» Академии за 1704 г. Паран опубликовал две работы: «Новая статика с трением и без трения или правила расчета трений машин в состоянии равновесия» [265] и «О наиболее возможном совершенстве машин» [266]. Первая из публикаций, очень созвучная с работами Амонтона, содержит критические замечания по поводу результатов Реомюра и Мариотта. Во второй, используя исчисление бесконечно малых, Паран приводит три парадокса, общая идея которых состоит в том, что усилия, развиваемые машинами, не пропорциональны прилагаемым к ним силам.

Очень интересна работа 1714 г. «О наивысшем совершенстве Машин, приводящихся в движение Животными» [267]. Здесь впервые, говоря современным языком, ставится вопрос о коэффициенте полезного действия двигателя и приводится методика оценки эффективности машины. Эта методика предполагает умение определения сил трения, сопротивления, преодоления препятствий. В частности, рассматривая движение судна, Паран вводит силу сопротивления воды, пропорциональную площади подводной поверхности судна и квадрату относительной скорости движения воды. Эффективность действия машины оценивается отношением движущих сил к силам сопротивления.

4.4.12. Видным механиком начала XVIII в. был Франсуа-Жозеф Декамю[1] — автор «Трактата о движущих силах для практики ремесел» [164] и «О движении, ускоренном с помощью пружин, и о силах, сохраняющихся в движущихся телах» [165]. Конец его жизненного пути оказался трагичным. Выходец из знатного рода, избравший поначалу духовную карьеру, он в зрелые годы увлекся конструированием механизмов (в том числе часов). В 44 года он был избран в Академию наук, а в 60 лет исключен из числа академиков за «недостаточное усердие». Именно в это время он был увлечен созданием составного весла, с помощью которого могли бы передвигаться даже крупные суда. В поисках средств для реализации своего проекта Декамю переезжает в Голландию, затем в Англию, где и умирает в нищете и безвестности.

---

[1] Родился в Ришоме (недалеко от Сен-Мишеля) в 1672 г., член Академии наук с 1716 г.

В первом из трактатов речь идет о механике машин, и кроме традиционных сведений автор описывает двадцать три новых механизма. Некоторые из них являются занимательными автоматами, но большинство носят чисто практический характер (например, механизм для обработки земли, аппарат для забивания свай). Второй трактат написан в русле современной классической механики — это защита теории живых сил Лейбница–Бернулли от нападок Лувиля и Мэрана. Возможно, что интерес Декамю к чисто теоретическим, математическим проблемам возник у него после завершенного им в 1725 г. издания двухтомной «Новой механики» П. Вариньона.

Глава 5

РАБОТЫ ФРАНЦУЗСКИХ УЧЕНЫХ ВТОРОЙ ЧЕТВЕРТИ XVIII ВЕКА

5.1. Шевалье де Лувиль и дискуссия о «живой силе»

Жак-Эжен Даллувиль де Лувиль родился в родовом замке де Лувиль в провинции Эр э Луар 14 июля 1671 г. В возрасте 12 лет он самостоятельно познакомился с «Началами» Евклида и с той поры сохранил глубокий интерес к математике. Взрослая жизнь Жака-Эжена началась с военной службы. Сначала на флоте, затем в сухопутных войсках. Служил не только во Франции, но и четыре года в Испании (по протекции его старшего брата, служившего у испанского короля). В 1708 г. он попал в плен и два года провел в Голландии. После возвращения во Францию шевалье де Лувиль оставляет военную службу (в чине полковника) и начинает новую — научную карьеру.

Он ведет астрономические наблюдения, участвует в экспедициях по определению географических долгот, конструирует и изготовляет собственные астрономические инструменты. В 1714 г. его избирают членом Парижской академии наук, а позднее и членом Лондонского Королевского общества. Круг его научных интересов был обширен и включал не только математику и механику, но и геодезию, физику, философию, астрономию. Основные его работы опубликованы в «Acta Eruditorium», «Mercure» и «Memoires». Умер Эжен де Лувиль 10 декабря 1732 г. в местечке Карре недалеко от Орлеана.

Из работ по механике наибольший интерес представляют две публикации из «Мемуаров»: «Объяснение одной трудности статики, предложенной в Академии» [232] и «О теории переменных движений, то есть таких, которые непрерывно ускоряются или непрерывно замедляются. С учетом способа оценки силы тел в движении» [233].

Первая из работ разъясняет парадокс, ранее замеченный Параном, связанный с несогласованностью результатов Галилея и Гюйгенса в задаче о траектории падающих тел. Независимо от Парана и Сорена[1] Лувиль показывает[2] согласованность решений Гюйгенса и Галилея, получив при этом важный математический результат. Он нашел разложение функции $F(p, q, x) = \dfrac{1}{\sqrt{p^2 - 2qx - x^2}}$ в ряд $\sum\limits_{n=0}^{n=\infty} f_n(p, q) \cdot x^n$, где коэффициенты $f_n(p, q)$ являются функциями, позднее введенными в анализ Эйлером и Лежандром и названными *сферическими функциями первого рода.*

Вторая из названных работ начинается с определения механики. Заметим, что *механика* уже определяется не как *теория механизмов*, а как *теория движения.* «Наука о движении в общем случае является частью Математики, получившей название Механика, которая рассматривает законы, которым следует и которые соблюдает Природа при передаче движений; иначе говоря, тот общий и незыблемый закон, по которому тело, получившее движение, передает его полностью или частично другому телу, которое его уже имело или совсем не имело» [233].

Далее автор определяет основные понятия. Прежде всего он утверждает, что обсуждение причин, приведших в движение изначально покоящиеся тела Вселенной, находится вне рамок механики («c'est une chose hyperméchanique»). В механике речь идет «только о материи (телах), протяженности и времени». «Так как покоящееся тело не может привести в движение другое тело или само себя, необходимо, чтобы другое движущееся тело передало ему нечто, способное привести его из состояния покоя в движение; и это нечто, каким бы оно ни было, получило название *движущая сила* или просто *сила*» [233].

Основными понятиями считаются *сила, тело, пространство* (путь) и *время.* Производным от этих понятий называется понятие *скорости*, которая определяется либо как отношение силы к массе[3], либо как отношение пути ко времени. Все общие теоремы механики, лежащие в ее основе, посвящены установлению отношений между этими пятью величинами. Введя обозначения для величин (f — сила, m — масса или количество вещества в теле, e — пройденный путь, t — за-

[1]Член Академии наук с 1707 г., математик, физик, друг Вариньона, Лопиталя, Мальбранша, один из редакторов «Journal des Sçavants».

[2]Этому был посвящен и его доклад в Академии в апреле 1720 г.

[3]Геометрические размеры тела в расчет не принимаются, и величина тела ассоциируется с его массой.

траченное время, u — скорость), автор приводит первую теорему: «Чем больше будет сила, приводящая в движение тело, тем больше будет его скорость; и если одна и та же сила заставляет двигаться два тела с разными массами, то чем больше масса движущегося тела, тем меньше будет его скорость, и наоборот, чем меньше будет его масса, тем больше будет скорость ..., таким образом, всегда $u = f/m$. ...или иначе $f = m \cdot u$». Эту формулу, кажущуюся некоторым известным «геометрам» сомнительной, Лувиль считает несомненной. Заметим, что с момента публикации «Начал» Ньютона уже прошло более 40 лет. И то, что ныне называется *вторым законом Ньютона*, оказывается, еще не стало общепринятым, несомненным. Трактовка же Лувиля вполне соответствует второму закону [65, с. 40]. А если предположить, что под *силой* автор подразумевал *кратковременное взаимодействие тел* (то, что ныне называется *импульсом силы*), то логика его рассуждений вполне современна.

Далее Лувиль определяет скорость как путь, пройденный в единицу времени $u = \frac{e}{t}$, и его первая теорема принимает вид $f = m\frac{e}{t}$. Для случая равномерного движения $e = tu$. Как следствие первой теоремы, «если скорости двух тел обратно пропорциональны их массам, то силы тел равны; и наоборот, если силы двух тел равны, то их скорости обратно пропорциональны их массам» [233].

«Любое тело, получившее импульс или силу, приведшую его в движение, будет вечно двигаться с той же скоростью, в том же направлении, если не появится какая-либо причина, которая увеличит или уменьшит его скорость или изменит его направление. Это принцип, который все механики считают аксиомой или неоспоримой истиной, не нуждающейся в доказательствах, ...». Но, принимая этот принцип, Лувиль утверждает, что для изменения скорости тела, то есть для того, чтобы движение стало ускоренным или замедленным, необходимо последовательное приложение импульсов (сил), которые не могут быть непрерывными, таких, считает он, нет в природе. Отсюда следует, что изменение скорости движущихся тел может быть только *дискретным, скачкообразным*, а значит, и ускорение нельзя считать величиной непрерывной, оно дискретно. Именно это, утверждает Лувиль, и является причиной того, что иногда скорость убывает, а путь возрастает (пример — тело, брошенное вверх) или того, что скорость и путь изменяются по разным законам (как в случае падения тел по закону Галилея $u \sim t$, $e \sim t^2$). Кстати, закон Галилея для падающих тел Лувиль доказывает следующим образом. Падающее тело в равные времена получает равное количество импульсов, сообщающих ускорение, то есть изменение (увеличение) скорости. Сумма этих импульсов увеличивается пропорционально их числу и равна скорости. Число импульсов пропорционально времени, тогда скорость также пропорциональна времени, а из $e = ut$ следует, что путь пропорционален квадрату времени, а время — квадратному корню из пройденного пути. Если считать пройденный путь абсциссой некоторой параболы, то скорость движения и будет этой параболой.

Далее Лувиль, дав высокую оценку взглядов Лейбница на механику, усматривает в них противоречие, содержащееся в выдержках из его работы 1689 г. «О сопротивлении среды ...»[1]. В частности, он приводит определение «абсолютного» и «соответствующего» сопротивления среды, физических причин и математических выражений соответствующих сил. В этих пространных цитатах автор усматривает противоречие между результатом рассуждений Лейбница о величине силы сопротивления (пропорциональна скорости) и его же принципом, выражающем величину живой силы (пропорциональна квадрату скорости). При этом величина силы сопротивления, как причины замедления, торможения движения, у Лувиля ассоциируется с величиной замедления (отрицательного ускорения) скорости. Это отрицательное ускорение он так и называет — сопротивление. И вывод, к которому приходит автор, состоит в том, что ускорение или сопротивление пропорционально величине импульсов и их количеству или произведению этих величин.

Суть же противоречия состоит в том, что «абсолютное» сопротивление у Лейбница пропорционально не только геометрическим размерам тела, но и вязкости, «липкости» среды, в которой происходит движение, то есть оно (а значит, и сила) пропорционально пройденному пути, в то время как «соответствующее» сопротивление среды пропорционально ее плотности, то есть скорости тела или времени движения.

Для различия этих величин Лувиль вводит понятие «силы каждого импульса», то есть «мгновенной силы или скорости» (forse ou vitesse instantanée), ею сообщаемой в каждый момент времени, и «актуальной силы или скорости» (forse ou vitesse actuelle), являющейся произведением силы каждого импульса на число импульсов, получаемых телом в равные промежутки времени. Эти понятия «мгновенных» и «акту-

[1] См. параграф 3.3.

альных» сил автор отождествляет с «мертвыми» и «живыми» силами Лейбница. Точнее, считая понятие «живой» силы не достаточно ясным, Лувиль предлагает заменить его своей «актуальной силой», которая, по своему математическому выражению, также пропорциональна квадрату скорости. «Актуальной» силой он называет и «соответствующее» сопротивление Лейбница, имеющее аналогичное математическое выражение.

Для случая движения тела в сопротивляющейся среде Лувиль записывает и дифференциальное уравнение движения

$$-du = \frac{u\,dx}{a},$$

где $-du$ — убывание скорости; сила сопротивления среды пропорциональна скорости (u) тела и пройденному пути[1] (dx), a — константа «для соблюдения закона однородности», то есть для приведения в соответствие величин и их размерностей. Ранее это уравнение было получено И. Бернулли[2]. К обсуждению его результатов в «Рассуждении о законах передачи движения» и переходит Лувиль.

Прежде всего автор пытается осмыслить физическую сущность, природу, механизм взаимодействия тел. Без этого невозможно ясное определение понятия силы, как меры взаимодействия тел, в частности, твердого тела и упругой пружины. Суть взглядов автора сводится к следующему: движение тела может происходить только как результат действия силы; действие на тело любых сопротивлений (среды, пружины, других тел) аналогично; упругость пружины связана с ускоренным движением в ней некой невидимой жидкости; эта невидимая жидкость «действует в пружине не сразу всей своей массой . . . , а как повторяющаяся последовательность импульсов»; эффект от ускоренного движения невидимой жидкости зависит от «скорости или величины каждого импульса и от их количества»; количество импульсов может быть пропорционально времени[3].

---

[1]Сила сопротивления пропорциональна количеству встречаемых телом препятствий, то есть частиц среды. А количество частиц (для однородной среды) пропорционально пройденному пути.

[2]Параграф 3.4 данной работы («Рассуждение о законах передачи движения»).

[3]Именно так представляет Лувиль и природу равновесия тела на плоскости: сила веса тела уравновешивается действием импульсов невидимой жидкости, содержащейся в плоскости. В этом, считает он, суть гипотезы Галилея.

Величина импульса, по Лувилю, и есть «мгновенная» сила («мертвая» сила — по Лейбницу и И. Бернулли). А величина, мера взаимодействия тел — это результат последовательного (во времени) наложения «мгновенных» сил. Поэтому он вводит понятие «актуальной» силы как меры действия на тело за некоторое время t или dt. Но, кроме этих двух, автор вводит и третье понятие — «виртуальной» силы или скорости, суть которого можно пояснить следующим образом. Если представить пружину как последовательность одинаковых упругих элементов, то «виртуальная» сила пружины пропорциональна их числу.

Ссылаясь на выдержки из работы Бернулли и умозрительные эксперименты, Лувиль возражает против полученного Бернулли математического выражения величины «живой» силы[1] и отождествляет ее с двумя (в разных случаях) введенными им силами — «актуальной» и «виртуальной». При этом утверждается, что величина «актуальной» силы определяется величиной и количеством «мгновенных» сил. Общепринятое же мнение о том, что сила определяется величиной импульса и временем его действия, справедливо только в предположении, что время является мерой количества импульсов. Однако, в отличие от И. Бернулли, Лувиль не подкрепил свои теоретические рассуждения решением каких-либо задач.

Гюйгенс установил сохранение величины mv^2 при абсолютно упругом ударе. Лейбниц назвал эту величину «живой» силой. И. Бернулли и Декамю использовали ее для построения своей механики. Но физический смысл «живой» силы оставался неясным. Это обстоятельство и послужило причиной появления публикаций их оппонентов — Лувиля и Мэрана. Первая публикация Мэрана на эту тему «Рассуждение об учете и измерении сил, движущих тела» [238] появилась в «Мемуарах» за 1728 г. Именно здесь высказываются сомнения в полезности понятия «живой» силы и критические замечания в адрес работы И. Бернулли. Теория Лувиля стала естественным продолжением дискуссии, начатой Мэраном[2] в Парижской академии наук. Даже после выступления в защиту И.Бернулли известной в научных кругах маркизы Дюшателе Мэран продолжал отстаивать свою позицию. Этому

[1]Считает, что она должна быть пропорциональна скорости.

[2]Еще раньше теорию «живых» сил не приняли и последователи Ньютона. По-видимому, все это и помешало И.Бернулли получить премию Парижской академии наук за 1724 г.

были посвящены его работы, опубликованные в Париже в 1741 г. («Рассуждение о силах, движущих тела» [239], «Письмо мадам Дюшателе по вопросу о живых силах» [240]).

Многолетняя дискуссия о физической природе и математическом выражении сил, участниками которой были практически все механики XVII – начала XVIII вв., была чрезвычайно актуальной и важной для истории механики. Это был процесс рафинирования понятия *силы*, без которого невозможно современное построение *теории движения* и *равновесия тел.*

5.2. Вклад П. Л. М. де Мопертюи

Пьер-Луи Моро де Мопертюи родился в городке Сен-Мало на атлантическом побережье Франции 17 июля 1698 г. Его образование началось с частных уроков, а в 1714 г. он переезжает в Париж и поступает в коллеж La Marche, где математику преподавал ученик Вариньона — академик Гисне. Через два года Мопертюи покидает коллеж и уезжает в Голландию. В 1718 г. он поступает на военную службу, вскоре получает звание лейтенанта, но в 1723 г. выходит в отставку и становится ассистентом академика-геометра Ф. Николя. В 1725 г. он избирается[1] в Парижскую академию наук, через три года едет в Лондон и становится членом Лондонского Королевского общества. Из Англии он переезжает в Швейцарию, где вместе с Клеро и Кенигом слушает в Базельском университете лекции И. Бернулли по интегральному исчислению. Вернувшись в Париж, в 1731 г. он становится академиком[2] Академии наук.

Первые публикации[3] Мопертюи были сугубо математическими, но большинство работ 1732–1734 гг. посвящены развитию и популяризации во Франции идей Ньютона, в частности, его *теории гравитации.* Одним из итогов научной активности Мопертюи становится назначение его руководителем лапландской (север Швеции) экспедиции[4] (июль 1736 – май 1737 г.) по определению длины градуса меридиана. Публикация в 1738 г. результатов экспедиции значительно повысила

[1] Ассоциированный ассистент (adjoint-associé).

[2] Associé-pensionnaire.

[3] 1726–1732 гг.

[4] В ее состав входили Клеро, Камю и другие.

авторитет Мопертюи в научных кругах, у него устанавливаются дружеские отношения с Вольтером, маркизой Дюшателе и ее окружением, его приглашает[1] прусский король Фридрих, в 1743 г. он избирается членом Французской академии.

Первая публикация Мопертюи о принципе наименьшего действия относится к 1744 г. Именно в этот год он принимает предложение Фридриха Великого занять пост президента Берлинской академии наук и переезжает в Берлин. Это было официальное признание высоких научных заслуг Мопертюи — автора нескольких известных книг и большого количества статей по математике, механике[2], физике, астрономии, биологии и прикладным проблемам. Публикации по принципу наименьшего действия — это не только новый этап в творчестве Мопертюи, поиск фундаментальных принципов мироздания, но и важнейшее событие в истории классической механики. Начавшаяся после публикации принципа дискуссия, активными участниками которой стали Кениг, Эйлер, Даламбер, Дарси, Куртиврон, Вольтер, Лагранж, Л. Карно и другие видные ученые XVIII–XIX вв., привела к уточнению многих ранее введенных понятий, философскому осмыслению роли механики и ее принципов в системе наук, формированию нового математического аппарата механики, получившей после Лагранжа название *аналитической*.

Работа 1744 г. была доложена Парижской академии наук и называлась «Согласование различных законов природы, которые до сих пор казались несовместимыми» [14, 249, 252]. Ссылаясь на публикации Ферма, Декарта и Лейбница, Мопертюи показывает аналогичность законов движения светового луча и твердых тел и формулирует их общий принцип. На примере движения луча света в разных средах он показывает, что движение по кратчайшему пути и движение за кратчайшее время не совпадают. Это наводит его на мысль провозгласить свой принцип, конкретизирующий принцип Ферма: «Природа во всех своих явлениях действует всегда простейшим образом» [252, Т. 4, с. 12]. Суть этого принципа — «выбираемый путь таков, что для него количество действия является наименьшим» [252, Т. 4, с. 17].

---

[1] Их встреча состоялась в 1740 г.

[2] В качестве иллюстрации, в приложении к данной работе приводится перевод статьи «Арифметическая баллистика» [247]. В этом же томе «Мемуаров» опубликованы его статьи, посвященные опытам над скорпионами и исследованию полярного сияния.

Что же следует понимать под количеством действия? «Для перемещения тела из одной точки в другую необходимо некоторое действие: оно зависит от скорости тела и от пройденного пути, но ни от скорости, ни от пути, взятых отдельно. Количество действия, таким образом, тем больше, чем больше скорость и чем длиннее пройденный путь; оно пропорционально сумме пройденных путей, умноженных на скорости их прохождения» [252, Т. 4, с. 17]. Здесь автор делает сноску, где утверждается, что при рассмотрении одного тела его масса может не учитываться.

Свой принцип Мопертюи демонстрирует на примере прохождения луча света через границу CD (рис. 5.2.1) двух сред. Если m — скорость луча в верхней среде, n — в нижней, то количество действия должно быть наименьшим. Переписывая действие в виде $m\sqrt{AC^2+CR^2} + n\sqrt{BD^2+DR^2}$, дифференцируя ($AC$ и BD — константы) и приравнивая результат нулю, получаем равенство

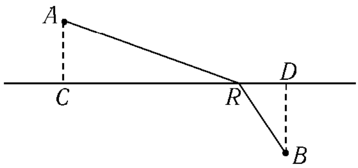


Рис. 5.2.1

$$\frac{mCR\,dCR}{\sqrt{AC^2+CR^2}} + \frac{nDR\,dDR}{\sqrt{BD^2+DR^2}} = 0,$$

из которого при $CD = \text{const}$, то есть $dCR = -dDR$, следует известный закон преломления света:

$$\frac{CR}{AR} : \frac{DR}{BR} = \frac{n}{m}.$$

В этом Мопертюи видит надежное подтверждение провозглашенного им принципа, следствием которого является принцип Ферма. Вторым подтверждением этого принципа является разумность Высшего Существа. «Механика слепа, и нужно следовать замыслам наиболее ясного и свободного Разума; и если бы наш рассудок был достаточно обширен, он бы видел причины физических явлений, либо рассчитывая свойства тел, либо изучая то, что они имеют наиболее существенного для их осуществления» [252, Т. 4, с. 21].

Завершается мемуар выдержкой из работы Эйлера, проясняющей разницу между действием по Лейбницу и действием по Мопертюи, а значит, и между их принципами. Эйлер показывает, что принцип «простейшего пути», полученный Лейбницем как следствие той же дискуссии между Декартом и Ферма, является частным случаем принципа Мопертюи, когда сопротивление среды пропорционально скорости движения тела.

Но к сущности законов движения тел Мопертюи приходит через осознание «Законов покоя». Именно так назывался его доклад 20.02.1740 г. в Парижской академии наук [252, Т. 4, с. 45–64]. Доклад был посвящен попытке обобщения, ранее установленного экспериментально, условия равновесия системы тел — принципа наинизшего положения ее центра тяжести. Но как найти функцию, экстремальное значение которой и будет соответствовать этому условию? Мопертюи рассматривает систему трех центральных сил, придает точкам их приложения возможные перемещения и записывает условие равновесия системы тел в виде равенства[1]

$$\sum_{k=1}^{n} m_k f_k \, dr_k = 0,$$

(m_k, f_k, dr_k — массы, величины сил, перемещения тел), которое считается несомненным. Сама идея формулировки экстремального принципа равновесия системы тел, по своей сути связанная с принципом наименьшего количества действия, была интересной и перспективной. Но ее математическая реализация, предложенная Мопертюи, была недостаточно убедительной. Это подтверждает и приведенный им пример равновесия рычага. В полной мере эта идея была осуществлена Лагранжем в «Аналитической механике» [53, Т. 1, отдел 3, § V].

От идеи записи принципов построения научной теории на основе очевидных или экспериментально установленных причинно-следственных связей между явлениями, а в математическом выражении — между соответствующими понятиями, Мопертюи предлагает перейти к принципам, выражающим некоторую оптимальность, разумность явлений природы. От ни физически, ни метафизически необъяснимых причинно-следственных взаимосвязей между явлениями (понятиями) он предлагает перейти к принципам, отражающим новый, более глубокий уровень проникновения в тайны природы, из которых причинно-следственные законы получаются простыми математически-

[1] Использованы современные обозначения.

ми преобразованиями[1]. Разумность же природных явлений является следствием разумности Творца. Такова философская, теологическая подоплека метафизического принципа, сформулированного Мопертюи 15 апреля 1744 г. в Парижской Академии наук и опубликованного в «Мемуарах» за тот же год. Подробное изложение принципа и его приложение к задаче удара было доложено в Берлинской академии наук в 1746 г. и опубликовано в трудах этой академии в 1748 г. под заголовком «Законы движения и покоя, выведенные из метафизического принципа» [250]. Фрагмент этой статьи, разъясняющий механико-математическое содержание принципа, приведен в «Трудах Мопертюи» [252, Т. 4, с. 31–42].

Мопертюи определяет инерцию как силу, необходимую для сохранения состояния (покоя или движения) тел, пропорциональную количеству содержащейся в них материи. «Непроницаемость тел и их инерция приводят к необходимости установления некоторых законов для согласования этих двух свойств, в каждый момент противоположных одно другому в Природе» [252, Т. 4, с. 31].

Далее формулируется задача о прямом центральном ударе «совершенно твердых» и «совершенно упругих» шаров, в которой по известным скоростям шаров до удара необходимо найти их скорости после удара. «Совершенно твердые тела таковы, что их части неразделимы и несгибаемы и, следовательно, их формы неизменны». «Совершенно упругие» тела (по Мопертюи) ныне называются абсолютно упругими. По предположению автора, твердые тела после удара должны двигаться с общей (одинаковой) скоростью, что же касается упругих тел, то у них одинаковой должна быть относительная скорость до и после удара. Следует обратить внимание на то, что рассматриваемые Мопертюи тела достаточно нереальны, поэтому полученные им далее законы представляют только теоретический интерес.

«Общий принцип» состоит в следующем: «Когда в Природе происходит некоторое изменение, количество действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим из возможных. Количество действия есть произведение массы тел на их скорость и на проходимый ими путь» [252, Т. 4, с. 36].

Рассматривая удар двигающихся в одну сторону друг за другом со скоростями a и b ($a > b$) твердых шаров A и B, Мопертюи считает,

[1]Аналогичную идею можно увидеть в «Динамике» Даламбера.

что тело A, двигаясь до удара со скоростью a, пройдет путь, пропорциональный a; двигаясь после удара со скоростью x, оно пройдет путь, пропорциональный x. Таким образом, изменение скорости $(a-x)$ и пути $(a-x)$ тела A, которые можно представить как перемещения тела A «нематериальной плоскостью» назад со скоростью $a-x$ на расстояние $a-x$ и есть те изменения тела A, о которых идет речь в Общем принципе. Аналогичные изменения для тела B будут $x-b$ и $x-b$, количеством действия для тел A и B будет сумма

$$A(a-x)^2 + B(x-b)^2,$$

величина которой должна быть минимальной. Дифференцируя по x и приравнивая результат нулю, Мопертюи получает

$$x = \frac{Aa+Bb}{A+B}.$$

Для случая встречного движения тел

$$x = \frac{Aa-Bb}{A+B}.$$

Рассматривая удар двух упругих тел (шаров), скорости которых после удара автор обозначает α и β (для A и B соответственно), он вновь получает сумму изменений количеств действия тел

$$A(a-\alpha)^2 + B(b-\beta)^2,$$

из условия минимальности которой получаются выражения для послеударных скоростей α и β, как в случае движения шаров в одну сторону, так и в случае встречного движения. Попутно рассматриваются и ситуации, когда одно из тел неподвижно до удара или когда оно является непреодолимым препятствием, то есть когда оно неподвижно не только до, но и после удара.

Статическую задачу о равновесии двух, лежащих на рычаге тел A и B, Мопертюи формулирует нетрадиционным образом: найти точку[1] Z между телами, относительно которой они покоятся. Если считать, что расстояние между телами (мысленный рычаг) равно c, то нарушение равновесия тел приведет к их повороту вокруг точки Z,

[1] z — расстояние от тела A до «точки равновесия» Z.

то есть к перемещению по дугам радиуса z (для тела A) и $c - z$ (для тела B). Скорости этих малых перемещений будут также пропорциональны радиусам, и количество действия тел A и B будет представлено суммой

$$Az^2 + B(c - z)^2,$$

условие минимальности которой и дает искомое выражение

$$z = \frac{Bc}{A + B}.$$

Мопертюи демонстрирует свой принцип наименьшего количества действия, как некогда Декарт и Гюйгенс — закон сохранения количества движения, на примере задачи об ударе тел. Для подтверждения справедливости своего принципа он показывает, что как количество движения, так и «живые силы» тел до и после удара сохраняются, то есть эти законы сохранения являются следствием его принципа. Для случая равновесия тел принцип Мопертюи идейно примыкает к принципу виртуальных скоростей И. Бернулли. Но еще более убедительным подтверждением справедливости нового принципа оказалась, вышедшая в конце того же 1744 г., статья[1] Эйлера «Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов» [14].

Пользуясь современными обозначениями (m — масса, v — скорость, ds — элемент дуги траектории), суть принципа, сформулированного и используемого Эйлером для решения задач о падении тел, сводится к следующему: «...я утверждаю, что линия, описываемая телом, будет такова, что среди всех других линий, содержащихся между теми же пределами, у нее будет минимум $\int mv\,ds$ или, так как m постоянна, $\int v\,sd$» [14, с. 31].

Эйлер иллюстрирует свой принцип, к которому, в отличие от Мопертюи, он пришел не из теологических соображений, а в итоге обобщения результатов решения изопериметрических задач механики, на конкретных примерах движения точки в поле параллельных и центральных сил. Он отмечает, что выражение принципа, полученное из

[1]Статья была откликом на вопрос Д. Бернулли о возможности решения задачи центральных сил методом изопериметров. Она была опубликована как приложение к книге Эйлера «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи...».

количества движения, можно трансформировать к виду, следующему из понятия «живых сил». Действительно, заменяя ds выражением $v\,dt$, получим

$$\int v\,ds = \int v^2 dt,$$

«так что для кривой, описываемой брошенным телом, сумма всех живых сил, находящихся в теле в отдельные моменты времени, будет наименьшей. Таким образом, ни те, кто полагает, что силы следует оценивать по самим скоростям, ни те, кто — по квадратам скоростей, не найдут здесь ничего неприемлемого» [14, с. 31–32]. Так Эйлер откликается на спор о мерах движения.

По-видимому, Мопертюи и Эйлер пришли к принципу[1] каждый своим путем. В форме Мопертюи он применим для конечных изменений скорости, в форме Эйлера он охватывает непрерывные движения. Принимая во внимание необычность принципа, его универсальность и научный авторитет его создателей, легко предположить, что он быстро привлек внимание ученых. Начавшаяся в 1750 г. дискуссия[2], в которой активно участвовали Эйлер, Даламбер, Вольтер, Лагранж и другие, затянулась на несколько десятилетий. Для механики, для развития вариационных методов она оказалась чрезвычайно плодотворной. Она позволила выработать новый взгляд на физическую сущность законов природы, придала импульс развитию нового математического аппарата — вариационного исчисления и сформировала новый путь построения классической механики в работах Лагранжа, Гамильтона, Якоби, Гаусса. Эта траектория развития механики имела своим истоком законы и принципы Галилея, Декарта, Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, Эйлера, Мопертюи, и ее математическая реализация была адекватна формированию в XVIII–XIX вв. новых разделов математики.

Однако в судьбе самого Мопертюи эта дискуссия сыграла трагическую роль. Эйлер в своих последующих выступлениях по поводу принципа наименьшего действия неизменно подчеркивал идейный приоритет Мопертюи и отмечал его выдающиеся заслуги[3]. Выступления же Кенига, Вольтера, Дарси и некоторых других современников носили

---

[1]Эйлер не дал своему принципу особого названия.

[2]Началом послужило выступление против Мопертюи и его принципа профессора Гаагского университета Самуела Кенига, утверждавшего, что Мопертюи воспользовался принципом, ранее открытым Мальбраншем, Гравесандом, Лейбницем и Вольфом.

[3]Статьи Эйлера [14, с. 56–108].

вызывающий и оскорбительный характер. Это отразилось на состоянии здоровья Мопертюи. В 1756 г. он переехал из Берлина во Францию, и состояние его здоровья стало улучшаться. В сентябре 1758 г. он решил навестить Базель, но дорога оказалась слишком тяжелой, болезнь обострилась, «...и он там скончался[1] в окружении семейства Бернулли, которое до конца продемонстрировало ему свою самую нежную привязанность и благодарную преданность» [260, с. 309].

5.3. Пьер Буге и теория управления кораблем

Как и Мопертюи, Пьер Буге (10.02.1698–15.08.1758) родился в Бретани. Его отец Жан Буге — королевский профессор гидрографии в портовом городке Кроассик — считался одним из известнейших гидрографов того времени, был прекрасным математиком, автором «Полного трактата по навигации» («Traité complet de navigation»), позднее переработанного и дополненного его сыном.

Первыми словами, произнесенными юным Пьером, были математические термины, его первыми игрушками были астрономические и гидрографические приборы отца, его талант формировался в атмосфере научных изысканий. «Он был хорошим математиком еще до того, как расстался с детством» [260, с. 62]. Это быстро обнаружилось в иезуитском коллеже города Ванне, где он получал образование. Когда Пьер учился в пятом классе, один из его учителей, обнаружив обширность математических познаний ученика, брал у него уроки математики. А через два года тринадцатилетний Пьер осмелился не согласиться с одним из выводов его профессора математики, который воспринял это как оскорбление его профессионального достоинства. Буге принял вызов и публично доказал свою правоту. Это обстоятельство вынудило профессора покинуть коллеж.

Отец умер в 1713 г. еще до того, как Пьер окончил коллеж, оставив своим двум сыновьям очень скромное состояние. Это обстоятельство побудило Буге добиваться разрешения занять место его отца. По поручению министра пятнадцатилетний претендент был экзаменован королевским профессором гидрографии Обертом, который удостоил экзаменуемого наивысших похвал. Так, несмотря на то, что большинство учеников были старше Буге, он получил должность профессора в Кроассик и начал свои научные разработки.

[1]Это произошло 27 июля 1759 г. в возрасте 61 года.

Случайная встреча с Шарлем-Рене Рейно[1] круто изменила дальнейшую судьбу молодого профессора. Рейно, сам к тому времени уже известный ученый, показал Мэрану работу Буге, посвященную управлению мачтами парусного корабля. Рукопись Буге произвела на Мэрана сильное впечатление, и он предложил Парижской академии наук объявить в 1727 г. конкурс на приз по этой тематике. Конкурс был объявлен, и Буге получил первое крупное признание — приз Академии. В 1729 г. Буге вновь получает приз Академии за мемуар «О наилучшем способе определения на море высоты звезд». Через два года он в третий раз получает премию за работу «О наиболее удобном способе наблюдения отклонения магнитной стрелки на море». В сентябре того же года он получает место ассоциированного геометра Парижской академии наук, освободившееся в связи с избранием Мопертюи пансионером. Вскоре его включают в состав экспедиции в Перу для определения длины одного градуса меридиана, и он становится пансионером-астрономом Академии наук. С 1752 по 1755 гг. Буге был одним из редакторов «Journal des Sçavants». После тяжелой болезни Буге скончался в Париже в возрасте шестидесяти лет. Его научное наследие включает большое количество работ по математике, механике, морской навигации, астрономии, геодезии и оптике.

В 1732 г. Буге опубликовал мемуар «О новых кривых, которые могут быть названы кривыми преследования» [144]. Задача состояла в определении кривой, по которой должно двигаться судно, преследующее другое судно, совершающее прямолинейное движение, если отношение скоростей судов постоянно. Такую кривую Буге назвал «кривой преследования»[1] или «кривой погони».

Получив из геометрических (кинематических) соображений дифференциальное уравнение

$$2a\,dx = y\,dy - \frac{dy}{y},$$

[1]Близкий друг Мальбранша, профессор философии в Тулоне, затем в Пезена, профессор математики в Анжере, с 1716 г. — член Академии наук. Автор книг «Определенный анализ или способ решения задач математики» [275] и «Наука вычисления общих величин» [276]. Первая книга была известна тем, что в ней автор свел все наиболее важные открытия Декарта, Лейбница и Ньютона. Она считалась во Франции классической до той поры, пока Даламбер (в 1741) не указал на допущенные Рейно ошибки.

[1]В работах XIX в. эта кривая именовалась «погонной линией» или «собачьей кривой».

Буге записывает его решение, определяющее кривую преследования, в виде

$$x = \frac{n}{2n+2m}\, a^{-\frac{m}{n}} y^{\frac{n+m}{n}} - \frac{n}{2n-2m}\, a^{\frac{m}{n}} y^{\frac{n-m}{n}} + \frac{mn}{n^2-m^2}\, a.$$

Дальнейший анализ кривой сводится к перебору соотношений между n и m.

В том же томе «Мемуаров» за 1732 г. помещена короткая заметка Мопертюи[1] «О кривых преследования», продолжающая поднятую Буге тему. Автор отмечает, что для кривой преследования ее дуга пропорциональна «резекте», то есть части абсциссы, взятой от начального до конечного положения касательной. Из этого условия Мопертюи получает уравнение Буге. Далее он формулирует более общую задачу: найти кривую преследования для произвольной (не прямолинейной) траектории преследуемого корабля. О ее решении он пишет: «Задача сводится к следующему: пусть дана кривая CE; нужно найти кривую BM, касательные ME к которой отсекают на CE и BM пропорциональные дуги». Из этого условия Мопертюи получает дифференциальное уравнение второго порядка, решение или какой-либо анализ которого в работе отсутствует. Как и Буге, Мопертюи не ссылается на мемуар Боми, опубликованный Академией двадцатью годами раньше. Хотя «трактриса» Боми по сути совпадает с «кривой преследования» Буге.

Значительное место в научном наследии Буге занимают работы по теории корабля, в частности, по кинематике и динамике его движения, написанные после перуанской экспедиции. В подтверждение этого можно привести список его публикаций по этой тематике в «Мемуарах»:

1. Разъяснение к проблеме рангоута[2] судов [145].

2. О новой конструкции лаг, с примечаниями об использовании других инструментов, которые могут использоваться для измерения скорости хода судов [146].

3. Мемуар об операциях, названных лоцманами корректировками; с разнообразными примечаниями, которые могут быть полезными в практических разделах математики [147].

4. Решение важнейших проблем маневров судов [148].

[1] Мопертюи пишет, что вскоре после выступления Буге в Академии с сообщением о кривой преследования, он нашел другое, более простое решение его задачи о преследовании. Этому решению и посвящена заметка.

[2] Рангоут — совокупность надпалубных частей судового оборудования (мачты, реи, гафели, гики,...).

Этот список следует пополнить книгами:

1. Новый трактат по навигации и управлению, содержащий теорию и практику управления[1] [149].

2. Трактат о судне, его конструкции и его движениях [150].

3. Трактат о маневрах кораблей или трактат по механике и динамике [151].

Очевидно, что все перечисленные работы не являются сугубо теоретико-механическими. Но как и некогда задачи о равновесии рычага, о движении падающих тел, планет, теории удара и колебании тел, задачи о движении и маневрах судов были одновременно и объектом для практического приложения известных механических теорий, и средством для проверки, уточнения их истинности, и источником возникновения новых механических понятий и математических методов. Таким образом, являясь по своей сути прикладными, работы Буге имели значение и для развития теоретической механики, как в плане ее адаптации к новому кругу задач, так и в плане расширения ее теоретической базы.

Остановимся на первом из названных мемуаров [145], завершенном Буге в 1748 г., после смерти И. Бернулли. По-видимому, именно в этом году Буге доложил Академии основное содержание этой публикации, начинающейся с высокой оценки вклада И. Бернулли в развитие математики и, особенно, анализа. Как уже упоминалось, в 1714 г. И. Бернулли издал большой трактат «Новая теория управления кораблем» [139]. Актуальность и новизна целой гаммы проблем, связанных с движением и устройством корабля, привлекла многих механиков, математиков и инженеров. В частности, Рено, Вариньона, Мэрана, Лани[2], Савериана, Пезена[3], Камю. Речь шла о создании научно обоснованной теории конструирования корабля и об использовании механики в исследовании его динамики. Следует особо подчеркнуть, что это были первые работы по механике управляемого движения тел. «Разъяснения к проблеме рангоута судов» — это попытка Буге осмыслить трактат

---

[1]Именно эта книга и содержала поправки и развитие идей отца Буге, изложенных в его уже упоминавшейся книге «Полный трактат по навигации». Трактат Буге еще дважды переиздавался. Его третье издание, с замечаниями и дополнениями Лаланда, вышло в Париже в 1792 г.

[2]Лани, а еще ранее Вариньон и Мэран, были членами комиссии Академии наук по навигации.

[3]Профессор гидрографии в Марселе, член нескольких академий, автор многих публикаций.

И. Бернулли, с которым он вел переписку, и дать собственный взгляд на проблему управления движением парусных судов.

Рассматривая равномерное движение судна, Буге, как и И. Бернулли, утверждает, что все действующие на корабль силы (приложенная к парусам сила ветра, сила тяжести, приложенные к корпусу корабля силы сопротивления воды и выталкивающие («архимедовы») силы) должны в итоге уравновешиваться. Это условие далее используется для построения уравнения движения судна. Еще в работах древних механиков использовалось понятие «гипомоклион» — это точка, относительно которой рассматривается равновесие тела, оплот равновесия покоящегося тела. В случае рычага гипомоклионом является точка опоры, которая покоится, даже если рычагу придали какое-то перемещение. Что следует считать гипомоклионом для равномерно двигающегося корабля? Буге считает, что это центр тяжести[1]. Бернулли ассоциирует эту точку с центром вращения — своеобразным аналогом центра колебаний или центра удара тел. Однако Буге утверждает, что эти расхождения не являются принципиальными. «Идеальное равновесие предполагает полное взаимное уничтожение всех сил. Таким образом, для меня не так важно, в каком месте мы выберем эту точку, так как рассматриваемое мной равновесие, как абсолютное, идеальное, должно быть таковым относительно любой возможной точки» [145]. Говоря о свойствах гипомоклиона, Буге подчеркивает, что в отличие от древних представлений, когда считалось, что эта точка может выдержать бесконечную нагрузку, или ее нагрузка вообще не рассматривалась, современная ему механика имеет удобные способы « . . . для определения во всех случаях нагрузки гипомоклиона . . . ». С современной точки зрения эта задача аналогична задаче определения реакции связи.

Как опытный практик, Буге утверждает, что для жизнеспособности корабля наиболее опасны резкие порывы ветра (импульсы прикладываемой к парусам силы ветра) и периоды разгона судна (от начала движения до выхода на постоянную скорость). И в том, и в другом случае возможно опрокидывание судна или, пользуясь современной терминологией, возможно возникновение его неустойчивости. Действие сил ветра и сопротивления воды ассоциируется с ударными силами. Буге определяет время разгона или развития неустойчивости из следующих

---

[1] Основанием для выбора центра тяжести в качестве гипомоклиона Буге считает следующее: сила, действующая на тело, заставляет его вращаться только в том случае, когда линия действия силы не проходит через центр тяжести тела.

соображений. Если a — скорость ветра, v — скорость судна, то $a - v$ — относительная скорость ветра. Пусть A — скорость ветра, необходимая для создания силы, действующей на паруса, равной силе тяжести корабля, B — скорость корабля, при которой движущая сила корабля уравновешивается силой сопротивления воды о днище. Величины a, A, B известны. Считая, что импульс каждой силы аналогичен[1] силе тяжести и пропорционален квадрату соответствующей скорости, Буге записывает выражение для общей ускоряющей силы корабля в виде $\frac{(a-v)^2}{A^2} - \frac{v^2}{B^2}$, где $\frac{(a-v)^2}{A^2}$ — сила ветра, $\frac{v^2}{B^2}$ — сила сопротивления воды. Для равномерного движения корабля эта сила должна быть равна нулю, откуда следует, что $v = \frac{aB}{A+B}$. Считая, что $dv \approx F\,dt = \left[\frac{(a-v)^2}{A^2} - \frac{v^2}{B^2}\right] dt$, после разделения переменных и интегрирования, он получает $t = \log \frac{aB + Av - Bv}{aB - Av - Bv}$. Путь, пройденный судном за время t, определяется интегралом $s = \int v\,dt$.

В случае неожиданного сильного порыва ветра отплывающее судно, особенно, если отплытие происходит по криволинейной траектории, приобретает сильный крен. При этом, как показывает опыт, сила ветра в меньшей мере влияет на увеличение скорости корабля и в большей мере на увеличение его крена. Объясняя этот феномен, Буге пишет: «Это в точности тот случай, когда тело толкается силой, приложенной не в центре тяжести тела, ... тело поворачивается около точки, известной механикам под названием *центра конверсии* (*обращения*)»[2] [145]. Этот центр обращения (конверсии) или вращения должен находиться ниже центра тяжести корабля. Исходя из практики, Буге считает, что в случае возникновения крена[3] корабля от порыва ветра нужно регулировать паруса так, чтобы бóльшая часть силы ветра шла на увеличение скорости корабля, а не его крена. При этом он восторгает-

[1] В том смысле, что импульс силы ветра, как и сила тяжести, создают ускоренное движение корабля со скоростью $v \sim t$.

[2] Centre de convertion. Далее автор называет эту точку центром вращения.

[3] Буге подчеркивает, что возникновение крена от взаимодействия сил ветра и сопротивления воды не следует путать с причиной возникновения бортовых колебаний, частота которых зависит от взаимного расположения грузов на корабле. Форма корабля, расположение на нем грузов, определяющие положение центра тяжести корабля, считаются неизменными.

ся тем, насколько убедительно И. Бернулли доказывает преимущество (для сохранения равновесия судна) ускоренного движения перед равномерным, сторонником которого был сам Буге. В конце работы он сравнивает задачу движения судна с задачей, решение которой уже известно, — о движении тела под действием пружины, и дает конкретные рекомендации по управлению парусником в экстремальных условиях.

Исследования по теории корабля И. Бернулли, Буге, Камю получили дальнейшее теоретическое и экспериментальное развитие в работах Даламбера, Кондорсе, Боссю [100]. Их прикладной аспект, в связи с прогрессом судостроения и прочих разделов техники, ныне утратил свою актуальность. Но их теоретическое значение как сферы применения понятий и законов механики, как источника формирования понятий устойчивости и неустойчивости равновесия и движения тел, ставших позднее основой теории устойчивости движения, по-прежнему велико.

Легко заметить определенную схожесть судеб и научных интересов Мопертюи и Буге. Оба родились в Бретани, в один год, получили прекрасное математическое образование, проявили интерес к астрономии, геодезии, ньютоновской теории притяжения тел, оптике, теории фигур небесных тел, чисто математическим проблемам геометрии и теории дифференциальных уравнений, участвовали в географических экспедициях, были видными учеными, академиками-пансионерами Парижской академии наук и умерли с интервалом в один год. Эта общность интересов и жизненных событий, естественно, не была абсолютной, у каждого из них был свой жизненный путь. Но схожесть судеб, по-видимому, была не случайной. Они оба объективно выражали интересы своего времени, отражали особенности французского научного менталитета начала XVIII в.

5.4. Обзор некоторых публикаций

Замечательной особенностью Парижской академии наук был коллективный характер деятельности ее ученых. Каждый член Академии имел полную свободу в выборе своей научной тематики (и часто она была очень разнообразной), но обязательные публичные выступления, публикации работ вызывали естественный обмен мнений, критические замечания, соответствующие оценки практической полезности и теоретической перспективности работ. Таким образом, персонифицируя определенные достижения в науке, нельзя забывать о влиянии на «созревание мысли» конкретного ученого его научной среды. В 20-х–50-х годах эта среда была представлена такими членами академии как де Мольер[1], Шевалье[2], Реомюр[3], Николь[4], Мэран, Делиль[5], Кателан[6], Белидорде.

5.4.1. Известный астроном, математик, физик, археолог, член Парижской академии наук (с 1718 г., секретарь с 1741 по 1743 г.), Французской академии (с 1743 г.), Лондонского Королевского общества, Петербургской академии наук, Болонского института, главный редактор «Journal des Sçavants» Жан-Жак Дорту де Мэран был автором нескольких публикаций по механике.

---

[1] С 1721 г. — адъюнкт, с 1729 г. — ассоциированный (механик) член Академии, член Лондонского Королевского общества, преемник Вариньона по кафедре философии в college Royal, последовательный сторонник и защитник взглядов А. Клеро.

[2] Профессор артиллерийской школы в Страссбурге, адъюнкт (1699), ассоциированный (1707) член Парижской академии наук. Умер в 1748 г.

[3] Член Парижской академии наук с 1708 г., известный физик и экспериментатор. Первым обнаружил эффект скрученной веревки, которая выдерживает бо́льшую нагрузку, чем сумма нагрузок, выдерживаемых отдельными ее нитями (Мемуары, 1711 г.). Изобрел термометр, носящий его имя.

[4] Пансионер (механик) Парижской академии наук. Внес значительный вклад в развитие теории эволют и эвольвент (Гюйгенса) и фактически создал предпосылки для появления понятия и изучения свойств подвижной и неподвижной центроиды (Пуансо).

[5] Семейство Delisle является своеобразным феноменом французской науки. Глава семейства Claude Delisle (1644–1720) был известным ученым-географом. По его стопам пошли и его три сына: Гильом (Guillaume, 1675–1726), Жозеф-Никола (Joseph-Nicola, 1688–1768) и Луи (Louis, умер на Камчатке в 1741). Гильом — член Парижской академии наук (с 1702), первый географ французского королевства (с 1718), автор карт Каспийского моря. Жозеф-Никола — член Парижской академии наук (с 1714), выдающийся астроном, физик, один из первых членов Петербургской академии наук (жил в России с 1726 по 1747), член Берлинской, Шведской и других академий наук. Луи — член Парижской (с 1725) и Петербургской академий наук, известный географ, исследователь европейского севера и российского побережья Ледовитого океана вплоть до Камчатки.

[6] Секретарь Парижской академии наук Фонтенель в 1707 г. назвал имена самых выдающихся математиков — Лопиталь, Кателан, Совер и Вариньон. Однако аббат Кателан больше известен как неутомимый критик. Он критиковал работы Гюйгенса (о центре колебаний, теорию эволют и эвольвент, теорию колебаний), Лейбница (теорию сил, дифференциальное исчисление), Лопиталя и других, вызывая, тем самым ответные выступления известных ученых (И. Бернулли, Вариньон и другие).

Первая публикация Мэрана, одобренная Солмоном и Лувилем, называлась «О колесе Аристотеля»[1]. Суть парадокса, обнаруженного Аристотелем, состояла в следующем.

Если колесо (рис. 5.4.1) совершит при качении по прямой полный оборот, то точки B и A перейдут в положения B' и A'. Очевидно, что $AA' = BB'$. Но, с другой стороны, каждая точка при этом пройдет путь равный длине своей окружности, а они явно не равны. Попытки разрешения этого парадокса Аристотелем, Галилеем и другими учеными оказались неубедительными. И только Мэран, используя понятие переносного движения, показал, что пути, пройденные точками A и B, будут различны, и они не совпадают с AA' или BB'.

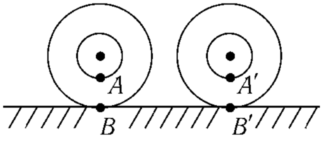


Рис. 5.4.1

Уже упоминались работы Мэрана по механике корабля [236, 237], о природе движущих и живых сил [239–240]. Последняя из указанных работ была адресована мадам дю Шателе.

5.4.2. Дочь барона де Бретей-Габбриель-Эмили де Тоннельер де Бретей, после замужества — маркиза дю Шателе, была одной из самых ярких личностей своей эпохи. Обширное образование (математика, философия, языки: латынь, итальянский, английский, испанский), многогранный талант (математик, философ, отличный музыкант) и женское обаяние сблизили Эмили с маркизом де Гебрианом, герцогом де Ришелье, Вольтером[2], Клеро[3], Мопертюи, Кенигом[4], И. Бернулли, Сен-Ламбертом. Главная заслуга маркизы в механике состояла в том, что она предприняла попытку перевода на французский язык «Начал» Ньютона. Очевидно, что это предприятие активно поддерживалось ее упомянутыми друзьями, осознавшими важность взглядов Ньютона для дальнейшего развития механики во Франции. Перевод «Начал» и его

[1]Работа обсуждается в [292].

[2]Она жила в доме Вольтера, в замке Сирей, более 14 лет (с 1733 по 1747 г.). Позднее он тяжело переживал их разлуку. После ее смерти (последствие поздних родов) Вольтер писал: «Я потерял не любовницу, я потерял свою половину, душу, для которой была создана моя душа, друга, возникшего на моих глазах» [260, с. 125–126].

[3]Для нее была написана его «Геометрия» [172], переиздававшаяся в 1765, 1831, 1921 гг. и переведенная на шведский, голландский и польский языки.

[4]В 1738 г. Кениг стал опекуном детей маркизы.

издание (Париж, 1756) были завершены уже после смерти маркизы. В 1738 г. дю Шателе получила премию Академии наук за работу «Рассуждение о природе и распространении огня», опубликованную в «Мемуарах» (1738) и переизданную в 1744 г. [171]. Письмо Мэрана (1741) содержало разъяснение его позиции относительно понятия «живой силы» в работах И. Бернулли. В ответном письме, опубликованном в Брюсселе в 1741 г., мадам дю Шателе выразила свое несогласие с Мэраном и выступила в защиту авторитета Бернулли.

5.4.3. Видным ученым XVII в. был Шарль Камю. В 1727 г. он представил на конкурс Парижской академии наук мемуар «О самом выгодном способе расположения надпалубных построек кораблей». Премию академии получил Буге, но и работа Камю не осталась без внимания. В том же году Камю стал членом Парижской академии наук. В 1736 г. он становится участником экспедиции Мопертюи в Лапландию, затем с Кассини и Буге участвует в измерении градуса парижского меридиана, после чего становится профессором геометрии и экзаменатором в парижских школах инженерного дела и артиллерии, с 1760 г. — постоянным секретарем Академии архитектуры, с 1765 г. — членом Лондонского Королевского общества.

Наиболее известными работами Камю были «Трактат по гидравлике» [159], «Курс математики для школ инженерного дела и артиллерии» [160], «Элементы статической механики» [161], «О действиях мушкетной пули, пронзающей толстый деревянный брусок, не передавая ему существенной скорости» [162], «Задача статики» [163].

«Курс математики» и «Элементы» были написаны как учебные пособия. Последний из мемуаров посвящен решению задачи о равновесии свободно вращающегося на оси колеса, по радиусам которого столь же свободно (без трения) могут перемещаться грузы, находящиеся под действием сил, исходящих из единого центра.

5.4.4. Никола-Луи де Лакайль (аббат де Лакайль) известен, прежде всего, как знаменитый астроном, сотрудник Парижской обсерватории, в которой работали Кассини[1], Пикар[2], Клеро, Мопертюи, член Парижской (с 1741 г.) и Берлинской академий наук. Однако известны и его работы по механике и математике (как некогда Вариньон, он был

[1]Знаменитое семейство ученых-астрономов: Jean-Dominique Cassini (1625–1712), его сын Jacques Cassini (1677-1756), сменивший отца на посту директора обсерватории, и внук César-François Cassini de Thury (1714–1784).

[2]В 1675 г. уточнил величину радиуса Земли.

профессором математики в Collége Mazarin). После смерти друга Буге, Лакайль издал его «Трактат по оптике», переиздал «Трактат по навигации». В 1743 г. он опубликовал в Париже быстро ставший популярным учебник по механике «Лекции по механике или краткий курс движения и равновесия» [214], выдержавший пять изданий (пятое издание в 1781 г.).

5.4.5. Биография маркиза де Куртиврона началась с военной службы в кавалерии. Однако вскоре успешная карьера офицера (он дослужился до звания полковника) плавно перешла в научную. Он погрузился в проблемы математики, физики и механики, был избран почетным членом Академии наук. Из работ по механике назовем: «О колебаниях маятников по дугам круга, когда дуги малы» [181]; «Исследования статики и динамики, в которых дается новый общий принцип для изучения тел, приводимых в движение переменными силами в соответствии с некоторым законом» [182].

В первой работе получено дифференциальное уравнение малых колебаний математического маятника. Новый общий принцип, излагаемый в работах 1748–1749 гг., состоит в том, «что из всех положений, которые последовательно занимает система тел, связанных между собой нитями, рычагами или любыми другими средствами и двигающихся под действием некоторых сил, положение, в котором система имеет наибольшую сумму произведений масс на квадраты скоростей, то есть наибольшую живую силу, является именно тем положением, в которое необходимо в первую очередь поместить систему, чтобы она оставалась в покое» [182]. Из определения принципа с достаточной ясностью следует его аналогичность принципу возможных перемещений, сформулированному ранее И. Бернулли. Однако эта аналогичность может быть установлена только с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, тогда уже известной отдельным ученым, но еще не вошедшей в общепринятый арсенал теоретической механики. Поэтому принцип Куртиврона можно считать новым. Строгое доказательство своего принципа Куртиврон не приводит, ограничившись его демонстрацией на конкретных примерах.

5.4.6. В «Мемуарах» первой половины XVIII в. есть несколько публикаций по механике Этьена Монтиньи[1]. Одна из них — «Задачи динамики, в которых определяются траектории и скорости множества

[1] Советник короля, казначей Франции, глава дорожного ведомства парижского округа, член Парижской академии наук, корреспондент Берлинской академии.

тел, двигающихся вокруг неподвижного центра» [257]. Ссылаясь на одну из работ Д. Бернулли, Монтиньи использует понятие живой силы для решения двух задач, в которых нужно найти скорость и траектории произвольного количества тел (масс) A, B, $C, \ldots$, привязанных к кольцу и совершающих движение вокруг некоторой точки S.

Исследования по теории корабля и навигации были продолжены Александром Саверианом[1] в работах:

Выступление о маневрах кораблей [282].

Выступление о навигации и экспериментальной физике [283].

Новая теория маневров кораблей с точки зрения лоцманов [284].

Новая теория рангоута [285].

Исторические исследования о началах и прогрессе в конструировании кораблей в древности [286].

Искусство измерения на море скорости струи за кормой судна с идеей о состоянии вооружения французских судов [287].

Савериан был также автором нескольких популярных книг по теории тяготения, математике, физике и истории науки. В частности, известно его четырехтомное издание «История прогресса человеческого разума в точных науках и связанных с ними искусствах» [288]. В 1749 г. он издал на французском языке «Трактат о флюксиях» Маклорена, а в 1755 г. — «Архитектурный словарь» Авилера.

5.4.7. Патрик Дарси (шевалье Дарси) — ирландец, ставший маршалом Франции и пансионером-геометром Парижской академии наук. Основная часть его научного наследия (работы по астрономии, артиллерии, механике, математике, гидравлике, электричеству) выходят за рамки рассматриваемого временного периода, поэтому остановимся только на ранних публикациях Дарси по механике, появившиеся в «Мемуарах»: «Задача динамики о взаимодействии систем тел» [119]; «Размышления о принципе наименьшего действия г. де Мопертюи» [120]; «Продолжение мемуара по динамике, опубликованного в Мемуарах Академии за 1747 год» [121]; «Реплика к мемуару г. де Мопертюи о принципе наименьшего действия ...» [122].

Работа 1747 г. является переработанным вариантом трех мемуаров, доложенных Дарси в Академии наук в 1746–1747 гг. Это был первый крупный успех двадцатидвухлетнего ученого, открывший ему

[1] Морской инженер, литератор, член Лионской академии.

двери Академии. Суть предложенных мемуаров, как и их продолжения 1750 г., состояла в изложении нового принципа механики. В «Задаче динамики...» [119] этот принцип имеет следующее содержание: «Пусть A, B, C и т. д. — система тел, каждое из которых получило некоторый импульс через нити, несгибаемые стержни или законы притяжения и т. д. Пусть Aa, Bb, Cc и т. д. — дуги, описываемые телами за одинаковое время. Я утверждаю, что если провести из произвольного центра O линии OA, Oa, OB, Ob, OC, Oc и т. д., то результирующая сумма произведений разных секторов AOa, BOb, COc на соответствующие им массы A, B, C будет всегда пропорциональна времени». В «Продолжении...» [121] 1750 г. Дарси модернизирует свой принцип: «...если взять некоторую другую точку P, считающуюся центром тяжести в покое, и провести через нее линии PA, Pa, PB, Pb и так далее, то $APa \cdot A + BPb \cdot B + CPc \cdot C+$ и так далее равно $AOa \cdot A + BOb \cdot B + + COc \cdot C+$ и так далее».

Принцип Дарси, безусловно, был новым, но его экзотичность, связанная с его физическим смыслом, математическим оформлением, сделали его достоянием только истории механики. Популяризации принципа не помогли даже рассмотренные Дарси примеры.

Как это следует из названий, мемуары 1749 и 1752 гг. посвящены дискуссии, связанной с принципом наименьшего действия. Уже первая из этих работ свидетельствует об удивительной мудрости ее молодого автора, ясном понимании им существа вопроса и полной независимости от высокого авторитета Мопертюи. Дарси формулирует общий принцип Мопертюи и его анализ разбивает на два вопроса: равно ли действие произведению массы, скорости и пути (?) и будет ли оно минимальным (?). На оба вопроса Дарси дает отрицательный ответ. В первом случае это связано с тем, что Дарси накладывает на понятие действия определенный физический смысл (величина физического взаимодействия), в то время как Мопертюи рассматривает его как некую математическую формальность. Аналогично и во втором вопросе, где Дарси подменяет логику Мопертюи своей. Переходя же далее к анализу закона покоя, Дарси допускает целый ряд физических и математических ошибок, обесценивающих его дальнейшую аргументацию.

Однако Дарси не останавливается только на критических замечаниях. Он предлагает свой «общий принцип динамики». Следуя Даламберу, который в «Энциклопедии» определяет действие как «движение, производимое телом, или то, которое тело стремится произвести в другом теле», Дарси определяет «...действие тела вокруг точки как массу, умноженную на скорость и на перпендикуляр, опущенный из точки на направление тела» [120]. Далее он формулирует «общий принцип»: «Любое действие (существующее в Природе в какой-то момент) вокруг данной точки будет произведено в единственном данном теле; количество действия этого тела вокруг этой точки будет всегда одинаковым» [120].

За доказательством этого принципа Дарси отсылает к упоминавшейся работе 1747 г. («Задача динамики...», [119]), где тот же его принцип сформулирован в иных терминах. Действительно, площади указанных там секторов могут быть заменены произведением скоростей на перпендикуляры к их направлениям. На примере задачи об ударе двух тел Дарси показывает аналогичность его принципа *закону сохранения живых сил.* Рассматривая равновесие тел, он демонстрирует свой принцип для задач определения положения центров тяжести, колебаний и удара, для получения законов преломления света. Работа 1752 г. [122] повторяет аргументы Дарси. На публикации Дарси откликнулся швейцарский математик Ж. Л. Бертран[1]. В трудах Берлинской академии за 1753 г. он писал, что принцип наименьшего действия следует «из вычислений г. де Мопертюи, которые он привел для определения закона удара твердых тел. В связи с тем, что г. Дарси далек от признания этих вычислений подозрительными, что, несомненно, означало бы ошибочность принципа Мопертюи, ничего не остается, кроме как признать завышенную очевидность заключения (Дарси. — В. Я.). Г. Дарси должен был подумать о согласовании этого очевидного противоречия, понять, как это возможно, что он и г. де Мопертюи, исходя из принципа наименьшего действия, с помощью сугубо математических преобразований, пришли он — г. Дарси — к абсурду, а г. де Мопертюи — к хорошо известной истине» [260, с. 29].

5.5. Задачи механики в творчестве А. Клеро

Алексис Клеро — один из самых известных ученых Франции XVIII в. В семье парижского профессора математики Жана Клеро[2]

[1]Профессор математики Академии Женевы, член Берлинской академии, ученик Эйлера.

[2]Jean-Baptiste Clairaut (умер в 1765) — корреспондент Берлинской академии, автор нескольких мемуаров по геометрии в «Micsellanea Berolinensia», отец.

был 21 ребенок. Алексис был вторым. Под руководством отца Алексис очень рано обнаружил свой математический талант. В десятилетнем возрасте он читал серьезные математические книги (например, Лопиталя), в двенадцать впервые доложил свой первый мемуар (о четырех алгебраических кривых четвертого порядка[1]) в Парижской академии наук и получил высокую похвалу академиков Николя и Пито. В 1729 г. Клеро представил Академии большой мемуар о кривых двоякой кривизны, получивший восторженную оценку Мэрана, Николя и изданный в Париже в 1731 г. Успех этой книги, ставшей в дифференциальной геометрии классической, позволил ее автору получить в этом же году место адъюнкта Парижской академии. Для этого потребовалось особое разрешение короля, так как Клеро тогда еще не было, положенного по регламенту Академии, двадцати одного года.

Круг научных интересов Клеро был обширен. Но наибольший вклад он внес в развитие дифференциальной геометрии, теории дифференциальных уравнений, интегрального исчисления, астрономии, небесной механики, гидростатики и геодезии. Клеро был участником экспедиции (1736) Мопертюи в Лапландию, в 1743 г. вышла его знаменитая «Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики», в 1752 г. — «Теория движения Луны, выведенная единственно из начала притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний»[2]. Огромную популярность Клеро принесло его сбывшееся предсказание о появлении в 1759 г. кометы 1531, 1607, 1682 гг. («кометы Галлея»). Умер Клеро от оспы в расцвете творческих сил, в зените славы, нескольких дней не дожив до пятидесяти двух лет.

Большинство работ Клеро, в том числе и работы по механике, опубликованы в «Мемуарах» Парижской академии наук. Назовем некоторые из них[3].

Изучение различных колебаний, которые может совершать тело, подвешенное на нити, под действием некоторого импульса (1735) [173].

Решение некоторых проблем динамики (1736) [174].

О центрах колебаний в сопротивляющихся средах (1738) [175].

Физико-математическая проблема (1740) [176].

---

[1] $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$; $x^2(x^2 + y^2) = a^4$; $x^2(a^2 - y^2) = a^4$; $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$.

[2] «Теория фигуры Земли» была премирована Петербургской академией наук, а ее автор в 1754 г. был избран Почетным членом Академии.

[3] Более подробно об этом пишет Р. Татон [78].

О некоторых принципах, дающих решение множества проблем динамики (1742) [177].

Новое решение некоторых задач маневров кораблей, имеющихся в томе Академии за 1754 год (1760) [178].

Мемуар 1736 г. был доложен Академии в апреле 1735 г., но его публикация задержалась в связи с подготовкой экспедиции в Лапландию. Инициатором работы был Фонтен[1], опубликовавший в «Мемуарах» за 1734 г. статью об определении кривой, описываемой вершиной угла, стороны которого скользят по некоторой заданной кривой [193]. В предисловии автора к мемуару читаем: «Дискуссия о «трактрисе» между г. Фонтеном и мной, длившаяся на протяжении нескольких ассамблей, побудила меня к исследованиям, которые я предлагаю» [174].

Работа посвящена решению семи задач о движении связки двух точек в горизонтальной или вертикальной плоскостях. При этом траектория одной из точек или центра тяжести системы точек считается заданной (прямая, окружность, произвольная плоская кривая), и задача состоит в определении траектории другой точки или обеих точек, когда величины и направления их начальных скоростей заданы. Для решения задач автор использует как традиционные геометрические приемы, так и методы дифференциального исчисления. В основу положен принцип сохранения живых сил[2], который Клеро называет общепринятым, несмотря на дискуссии о сомнительности понятия живой силы.

При изучении движения точек в горизонтальной плоскости их вес компенсируется плоскостью (точнее, ее реакцией), и математическая форма записи принципа (без учета сил трения о плоскость, сопротивления среды) —

$$\sum mv^2 = \mathrm{const}$$

— неизменна со времен Лейбница. Как же записывает Клеро этот принцип для движения точек в вертикальной плоскости? Для задачи типа

[1]Математик, механик, член Парижской академии наук (1733). Корреспондент Берлинской академии (1747). Многие его результаты в теории дифференциальных уравнений, интегральном исчислении, механике предвосхищали работы Эйлера, Клеро, Н. Бернулли, Даламбера, Лагранжа. В 1764 г. он издал в Париже книгу «Математические мемуары ...» [194], в предисловии к которой писал, что свой принцип механики, развитый далее Даламбером, он сформулировал в 1739 г.

[2]Клеро ссылается на работы Д. Бернулли.

двойного маятника (рис. 5.5.1) он записывает:

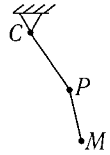


Рис. 5.5.1

$$Mv \cdot v + \frac{Pv \cdot v\, dr^2}{ds^2} = 2g(z-b)P + 2g(y-c)M,$$

где M, P — массы тел; v — скорость точки M; $z-b$ и $y-c$ — вертикальные перемещения точек P и M.

В этом равенстве трудно не узнать *теорему об изменении кинетической энергии*, авторство которой традиционно связывается с именем Лагранжа. Еще раньше Лагранжа эту теорему, как следствие другой теоремы, сформулировал Эйлер [92, с. 123; Предложение 19, Следствие 1] в знаменитой «Механике» 1736 г. Однако Клеро писал свою работу раньше. А переписка Клеро с Эйлером, содержащая 61 письмо, началась с 1741 г. Как уже отмечалось, до Эйлера этим результатом пользовались И. и Д. Бернулли, Вариньон, Лейбниц и Ньютон.

Следует обратить внимание на одну важную деталь. Клеро рассматривает не просто движение двух взаимосвязанных точек, как это делали до него Мопертюи, Буге и Боми. Он изучает поведение одной точки, на которую, говоря современным языком, наложены заданные геометрические связи. Этот подход, встречающийся и в его задачах 3-х и n тел в небесной механике, был важен для создания основ механики несвободного движения точки, системы точек и абсолютно твердого тела в работах Даламбера, для формирования не только статического (связь-опора), но и динамического понятия связи и ее реакции.

В мемуаре «О центрах колебаний…» [175] решается задача определения скорости центра колебаний несгибаемого стержня, нагруженного несколькими точечными массами, совершающего колебания в среде, сопротивление которой является некоторой функцией скорости. Клеро приводит два способа решения, один из которых использует принцип сохранения живых сил.

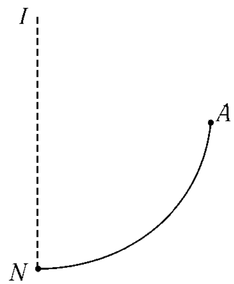


Рис. 5.5.2

Работа 1740 г. («Физико-математическая проблема» [176]) была откликом на задачу профессора математики из Упсала Клингенстьерна, с которым Клеро познакомился во время лапландской экспедиции. Задача состояла в определении такой кривой AN (рис. 5.5.2), по которой точка N, начав движение со скоростью v, равной скорости падения с высоты IN $(IN = NA)$, достигнет точки A. Сопротивление среды считается пропорциональным квадрату скорости.

Последняя из названных работ (1760, [178]) затрагивает актуальную проблему управления парусными судами. Клеро дает оценку уже упоминавшемуся мемуару Буге 1754 г. и приводит некоторые новые доказательства его результатов. Он пишет: «...то, что геометрия должна перенять из механики, я нашел в мемуаре Буге; убежден, что этот знаменитый геометр, рассуждая о принципах управления кораблями, выбрал из них самые удобные для использования на практике» [178].

Важнейшими научными проблемами XVIII в. были задачи небесной механики, теоретическое решение которых могло быть подвергнуто астрономической проверке. Это был строгий экзамен теоретических основ механики, а их решение всегда было связано с использованием одного из важнейших достижений «Начал» Ньютона — закона всемирного тяготения. Ньютоновская теория движения Луны, по мнению Клеро, противоречила наблюдениям и это побудило его, Даламбера и Эйлера основательно заняться этой проблемой. В 1743 г. Клеро опубликовал в «Мемуарах» свою первую работу «Об орбите Луны в системе Ньютона», получившую продолжение в 1745 г. под заголовком «О системе мира по принципам всемирного тяготения».

Отдавая дань уважения заслугам Ньютона в механике, в том числе в небесной механике, в мемуаре 1745 г. Клеро делает попытку уточнения закона всемирного тяготения на примере решения задачи трех тел: Солнце, Земля, Луна. Суть уточнения Клеро состоит в предложении о добавлении к силе, обратно пропорциональной (по Ньютону) квадрату расстояния между телами, некоторого слагаемого, обратно пропорционального 4-й или 3-й степени расстояния. В том же томе «Мемуаров» опубликована большая статья Даламбера «Общий метод определения орбит всех планет с учетом их взаимодействия»[1] [118], написанная независимо от результатов Клеро, но подтверждающая его выводы. Свои соображения о теории Клеро в том же томе опубликовал Бюффон[2], выступивший против усложнения стройной теории

[1] Отметим, что в основу своей теории Даламбер положил уравнение $v\,dv = -\left(\frac{Fa\cdot a}{x\cdot x}+\varphi\right)dx + \frac{\pi\cdot x\cdot\xi}{a}$, выражающее современную теорему об изменении кинетической энергии.

[2] Известный ботаник, автор нескольких работ по математике и теории тяготения, член Парижской академии наук с 1733 г.

Ньютона. («Рассуждения о законе притяжения», [153]). Заканчивается том 1745 г. дискуссией между Клеро и Бюффоном по теории всемирного тяготения и теории движения Луны, в которой каждый из авторов настаивает на своем мнении. Но независимо от мнений, эта последовательность утверждений, возражений, математических выкладок и разъяснений привлекла к публикациям Клеро, Даламбера и Бюффона пристальное внимание многих европейских ученых и способствовала бурному развитию небесной механики, триумфально продолженному Лапласом.

Подводя итоги вклада Клеро в развитие механики первой половины XVIII в., можно сделать вывод о том, что он был одним из главных «проводников» идей ньютонианской механики во Франции, одним из первых создателей теории дифференциальных уравнений для задач классической и небесной механики, предвестником динамических взглядов и методов Даламбера.

5.6. «Динамика» Ж. Л. Даламбера

Жан Лерон Даламбер, как и Клеро, был одним из наиболее выдающихся ученых XVIII в. Работы по математике, классической и небесной механике, гидродинамике, философии, истории, литературе, участие в издании «Энциклопедии» принесли ему мировую известность.

Биография знаменитого ученого начиналась весьма драматично. В возрасте грудного ребенка он был оставлен родителями[1] на ступенях церкви Сан-Жан-Лерон монастыря Нотр-Дам в Париже. Подобравшие младенца стекольщик Руссо и его жена и стали его приемными родителями. С четырех до десяти лет Жан Лерон воспитывался в пансионате, с тринадцати лет учился в коллеже Мазарини, где получил хорошее гуманитарное образование и фамилию Даламбер (d'Alembert). В 1735 г. он становится магистром искусств, в 1739 г. — адвокатом. Интерес к математике, по-видимому, был «велением времени», и математическое образование он получал самостоятельно. В 1741 г. он избран адъюнктом (астрономом), а в 1746 г. — ассоциированным (геометром) членом Академии наук, в 1754 г. — членом Французской академии,

[1]Мать — К. де Тансен, хозяйка одного из популярных парижских салонов, отец — шевалье Детуш (Destouches), комиссар артиллерии. Отец, а после его смерти, дед оказывали своему сыну и внуку материальную помощь. После смерти деда Даламбер получал ренту в 1200 ливров.

Жан Лерон Даламбер

в 1756 г. — сверхштатным[1] пансионером Парижской академии наук, в 60-е годы — членом всех известных европейских академий[2], в 1772 г. — постоянным Секретарем Французской академии.

Научное наследие Даламбера чрезвычайно обширно и многогранно. Даже его вклад в развитие классической механики, в силу его важности для дальнейшего развития теории, требует длительного и пристального изучения. Однако это уже выходит за рамки данной работы. В этом параграфе мы ограничимся лишь краткой характеристикой содержания и основных идей «Динамики» Даламбера. Издание «Трактата по динамике» [29, 116] стало одним из важнейших событий истории механики XVIII в., серьезной попыткой переосмысления основных понятий и принципов науки о равновесии и движении тел, заложенных в «Началах» Ньютона, «Форономии» Германа, «Новой механике» Вариньона, «Рассуждении о законах передачи движения» И. Бернулли, «Механике» Эйлера.

Основная цель трактата ясна из его полного названия: «Трактат по динамике, в котором законы равновесия и движения тел сведены к их наименьшему количеству и доказаны новым способом, и где дается общий Принцип для определения движения нескольких тел, взаимодействующих между собой некоторым образом» [29]. Книга состоит из введения и двух частей: I. «Общие законы движения и равновесия тел»; II. «Общий принцип для нахождения движения нескольких тел, произвольным образом действующих друг на друга, а также некоторые применения этого принципа».

Во введении Даламбер уточняет место механики в системе математических наук и говорит о необходимости положить в ее основу наименьший набор ясных, общепринятых принципов, позволяющих эффективно решать любые задачи равновесия и движения тел. «Движение и его общие свойства — таков первый и главный объект механики» [29, с. 17]. «Принцип равновесия вместе с принципом силы инерции и принципом сложения движений позволяет находить решение всех задач, относящихся к движению одного тела...» [29, с. 23].

Переходя к содержательной стороне принципов, автор впервые стремится дать их определение без понятия силы. Не дать свое определение силы, как это делали его предшественники, а избавиться от нее.

[1]Место штатного пансионера он получил только в 1765 г., заняв после смерти Клеро его место.

[2]Петербургской — с 1764 г.

«Я полностью изгоняю[1] присущие движущемуся телу силы, как понятия неясные и метафизические, способные лишь распространить мрак над ясной самой по себе наукой» [29, с. 24]. Это намерение Даламбера представляется вполне естественным, так как физическое и даже философское содержание понятия силы, его математические интерпретации в работах его великих предшественников были очень различными. Это силы тяжести, движущие силы, силы постоянные и переменные, импульсы, аналоги момента, работы, центробежные, центростремительные, живые и мертвые, ускоряющие, инерции, сопротивления среды, притяжения и отталкивания, ударные и упругие, мгновенные, виртуальные, ... Даламбер подчеркивает, что реально существуют только тела, их движения и взаимодействия. Он считает, что о причине движения можно судить по чисто кинематическим характеристикам движения, поэтому и принципы механики должны выражать геометрические свойства движения.

В этом Даламбер не слишком последователен. С одной стороны, он пишет: «Очевидно, что достаточно одного применения геометрии и анализа, чтобы без помощи каких бы то ни было иных принципов, найти общие свойства движения ... » [29, с. 19]. С другой стороны, рассуждает: «Но каким образом получается, что движение тела подчиняется именно тому или иному закону в частности? Одна геометрия ничего не может сказать по этому поводу. Это и есть то, что можно рассматривать как первую задачу, относящуюся непосредственно к механике. Прежде всего совершенно очевидно, что никакое тело не может сообщить движение самому себе. Оно может быть выведено из состояния покоя только в результате действия какой-либо внешней причины» [29, с. 19–20]. Однако некоторая непоследовательность авторской мысли, как об этом свидетельствует дальнейшее содержание книги, вовсе не свидетельствует о непонимании автором существа дела. Избавиться от силы как меры взаимодействия тел ему не удастся.

Говоря «о силе движущихся тел», что в современной терминологии эквивалентно мере движения тел, Даламбер подводит итог длительной, начатой еще Лейбницем, дискуссии о ее математическом выражении. «Когда говорят о силе движущихся тел, то или с произносимым словом вовсе не связывают никакой ясной цели, или под ним понимают свойства движущихся тел преодолевать встречаемые ими препятствия

[1]Любопытная деталь. «Изгоняя» понятие силы, Даламбер называет свою механику «Динамикой», что, по терминологии Лейбница, было синонимом теории сил.

или сопротивляться этим препятствиям» [29, с. 25]. Он показывает, что в зависимости от постановки задачи, мера движения может быть как $m\vec{v}$, так и mv^2, а «затронутый вопрос представляет собой не более, как совершенно бесплодный метафизический спор или спор о словах, недостойный внимания философов» [29, с. 27].

Первая часть книги начинается с определения непроницаемости, тела, места тела в пространстве, движения, времени, равномерного, ускоренного и замедленного движений, силы (точнее свойства) инерции, силы или движущей причины. Далее приводится доказательство первого принципа — *принципа силы инерции*. Этот принцип формулируется в виде двух законов:

«Тело, находящееся в покое, будет неизменно пребывать в покое, пока какая-нибудь внешняя причина не выведет его из этого состояния» [29, с. 38].

«Тело, приведенное однажды какой-либо причиной в движение, должно неизменно пребывать в состоянии равномерного прямолинейного движения, пока на него не подействует какая-нибудь новая причина, отличная от той, которая привела его в движение» [29, с. 39].

Далее вводятся понятия «направления» тела, совпадающее с современным направлением скорости, само понятие скорости и ускоряющей силы. И физическое понятие скорости, и ее математическое выражение, в виде производной $u = \dfrac{de}{dt}$ (e — путь), повторяют взгляды Эйлера и вполне современны. Ускоряющей силой φ называется величина, пропорциональная приращению скорости du и удовлетворяющая уравнениям

$$\varphi\, dt^2 = \pm d^2 e, \quad \varphi\, dt = \pm du, \quad \varphi\, de = \pm u\, du, \tag{$*$}$$

которые ранее приводились Вариньоном (параграф 4.3). Под движущей причиной понимается «произведение движущейся массы на элемент ее скорости».

Второй основополагающий принцип механики — *принцип сложения движений* — формулируется в виде теоремы: «Если на тело или на точку A действуют одновременно две какие-либо силы так, что под действием одной из них тело за известный промежуток времени прошло бы равномерно путь от A до B, а под действием другой оно за тот же промежуток времени прошло бы равномерно путь от A до C, причем на AB и AC можно построить параллелограмм $ABCD$, то я утверждаю, что тело A пройдет равномерно диагональ AD за то же время, за какое оно прошло бы расстояния AB или AC» [29, с. 68–69].

Третий основной принцип — *принцип равновесия.* Этот принцип Даламбер ясно формулирует только для задачи о равновесии тела, ссылаясь на то, что «...все законы передачи движения от одного тела к другому сводятся к законам равновесия...» [29, с. 30]. Суть принципа составляет теорема: «Если два тела, обладающих скоростями, обратно пропорциональными их массам, имеют противоположные направления, так что одно тело не может двигаться, не сдвигая с места другое тело, то между этими телами будет иметь место равновесие» [29, с. 83].

Напомнив понятие количества движения, автор приводит иную формулировку этой теоремы: «...если два тела имеют равные и прямо противоположные количества движения, то они уравновешивают друг друга» [29, с. 87]. Доказательство теоремы приводится для четырех случаев соотношения масс и скоростей на физическом уровне строгости. При этом Даламбер не скрывает аналогичности своего принципа равновесия принципу виртуальных скоростей, которым ученые пользовались со времен создания теории равновесия рычага, а позднее Декарт, Гюйгенс, Вариньон, Лейбниц, И. Бернулли. Эта аналогия связана с расширенным пониманием скорости не только как свойства состоявшегося движения, но и как свойства возможного, виртуального «движения» покоящихся тел, то есть как «виртуальной скорости».

Рассматривая условия равновесия прямого или ломаного рычага, Даламбер распространяет эти условия на случай произвольной пространственной системы сил и впервые записывает их, практически в современном виде, то есть как систему шести уравнений равенства нулю сумм проекций всех сил и проекций их моментов на оси координат:

$$\begin{aligned} &\int G = 0, \quad &&\int F\zeta - \Pi\mu = 0,\\ &\int F = 0, \quad &&\int G\xi - \Pi\nu = 0,\\ &\int \Pi = 0, \quad &&\int F\theta - G\chi = 0, \end{aligned}$$

Здесь G, F, Π — взаимно перпендикулярные проекции сил; знаком $\int$ Даламбер обозначает нынешний знак $\sum$; ζ, μ, ξ, θ, χ, ν — расстояния от точек приложения сил до соответствующих плоскостей. При этом отмечается, что для равновесия под действием сил G, F, Π тела с закрепленной (неподвижной) точкой достаточно трех правых уравнений.

Вторая часть «Динамики» посвящена изложению общего принципа и его применению для решения конкретных задач удара тел и движения систем тел, связанных стержнями или нитями. Приведем этот принцип в авторском изложении.

«**Определение.** Скорость тела с учетом ее направления я буду в дальнейшем называть *движением* этого тела. Под *количеством движения* я буду понимать, как обычно, произведение массы на скорость.

Общая задача. Дана система тел, расположенных друг относительно друга произвольным образом. Каждому из этих тел передается некоторое движение, которое оно, однако, не может воспринять вследствие действия прочих тел. Найти движение каждого из данных тел.

Решение. Пусть система состоит из тел A, B, C и так далее, и предположим, что им передаются движения a, b, c и так далее, которые, вследствие взаимного действия тел, последние изменяют в $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и так далее. Ясно, что передаваемое телу A движение a можно рассматривать как составленное из воспринятого им движения $\boldsymbol{a}$ и из некоторого другого движения α. Точно так же и движение b, c и так далее можно рассматривать как составленные из движений $\mathbf{b}$ и β, $\mathbf{c}$ и χ и так далее. Следовательно, движение действующих друг на друга тел A, B, C и так далее будет точно такое же, как если бы вместо импульсов a, b, c и так далее им передавались сразу по два импульса: $\mathbf{a}$ и α, $\mathbf{b}$ и β, $\mathbf{c}$ и χ и так далее. Но, по предположению, тела A, B, C и т. д. сами по себе восприняли движения $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и так далее. Отсюда следует, что движения α, β, χ и т. д. должны быть таковы, чтобы нисколько не нарушались движения и так далее; другими словами, если бы тела получили только движения α, β, χ и так далее, то эти движения взаимно уничтожались бы, и тела остались бы в покое.

Отсюда вытекает следующее правило для нахождения движения нескольких тел, действующих друг на друга. Нужно движения a, b, c и так далее, передаваемые этим телам, разложить каждое на два движения: $\mathbf{a}$ и α, $\mathbf{b}$ и β, $\mathbf{c}$ и χ и так далее, причем эти последние движения должны быть таковы, что если телам будут переданы лишь движения $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и так далее, то тела могут сохранить эти движения, не мешая друг другу; если же телам будут переданы лишь движения α, β, χ и так далее, то тела будут оставаться в покое.

Ясно, что **a**, **b**, **c** и так далее и будут теми движениями, которые могут быть восприняты телами вследствие их взаимного действия друг на друга. Что и требовалось найти» [29, с. 108–109].

Попытаемся перевести рассуждения Даламбера на язык современных понятий. Пусть $\{A_k\}$ — система n $(1 \leqslant k \leqslant n)$ точек, на движение которых наложены связи

$$\left|\overline{r}_i - \overline{r}_j\right| \leqslant l_{ij},$$

где $\overline{r}_k$ — радиус-вектор точки A_k, l_{ij} — заданные константы $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Автор утверждает, что скорости $\overline{v}_k = \dot{\overline{r}}_k$ точек системы могут быть представлены в виде суммы

$$\overline{v}_k = \overline{v}'_k + \overline{v}''_k$$

скоростей $\overline{v}'_k$, реально осуществимых, допускаемых связями, и скоростей $\overline{v}''_k$, гасящихся наложенными связями. В изложении своего принципа Даламбер фактически указывает только то, что необходимо найти. Сам же принцип, как метод построения уравнений, явно не сформулирован. Остается предполагать, что описываемый автором принцип сводится к условиям равновесия системы точек (тел), двигающихся со скоростями $\overline{v}''_k$.

Далее Даламбер использует сформулированную им идею разложения скоростей для исследования свойств движения центра тяжести (или центра масс, как его называл Д. Бернулли в «Трактате о приливах и отливах», 1740 г.) и решения конкретных задач. Здесь приводится вполне современное определение равнодействующей системы сил[1], указывается способ определения реакции связи («закрепленной точки»), скорости движения центра тяжести системы точек (тел)

$$\overline{v}_c = \frac{\sum m_k \overline{v}_k}{M}$$

(в современных обозначениях), показывается, что состояние (движения или покоя) системы тел «не меняется от взаимного действия этих тел друг на друга» (иначе говоря, равнодействующая внутренних сил равна нулю).

---

[1] «Если несколько сил действуют совместно, то силу, равную и прямо пропорциональную той, которая может их уравновесить, я буду называть *равнодействующей этих сил*» [29, с. 111].

Проиллюстрируем идею Даламбера на задаче о колебаниях маятника. «Найти скорость стержня CR, закрепленного в точке C (рис. 5.6.1) и нагруженного произвольным количеством тел A, B, R, предполагая, что если бы этим телам не препятствовал указанный стержень, они в равные промежутки времени описывали бы бесконечно малые линии AO, BQ, RT, перпендикулярные к стержню.

Решение сводится к следующему. Если бы тела A, B, R были свободными (не связанными общим стержнем), то за некоторое время они прошли бы пути RT, BQ, AO. Но стержень вносит свои коррективы в движение тел: если тело R будет в S, то тела A и B должны быть в точках M и G соответственно. Помня, что скорости пропорциональны перемещениям, будем считать, что скорости RT, BQ и AO состоят из скоростей RS, BG, AM и «потерянных» скоростей ST, $-QG$, $-OM$. Обозначим $AO = a$, $BQ = b$, $RT = c$; $CA = r$, $CB = \tau$, $CR = \rho$, $RS = z$; A, B и R — массы соответствующих тел. Тогда условие «равновесия»[1] рычага при сообщенных ему «потерянных» скоростях будут иметь вид:

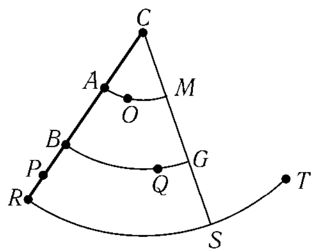


Рис. 5.6.1

$$A \cdot MO \cdot r + B \cdot GQ \cdot \tau = R \cdot ST \cdot \rho,$$

или после геометрических преобразований MO и GQ —

$$R(c - z)\rho = Ar\Big(\frac{zr}{\rho} - a\Big) + B\tau\Big(\frac{z\tau}{\rho} - b\Big),$$

откуда

$$z = \frac{Aar\rho + Bb\tau\rho + Rc\rho^2}{Ar^2 + B\tau^2 + R\rho^2}.$$

Обозначая движущие силы тел A, B, R буквами F, f, φ и считая, что соответствующие ускоряющие силы[2] пропорциональны скоростям или перемещениям a, b, c, после подстановки в последнее равенство

[1] В соответствии с примечанием Безу, силами здесь следует считать величины $A \cdot MO$, $B \cdot GQ$, $R \cdot ST$.

[2] В современной терминологии — ускорения.

вместо $a \sim \dfrac{F}{A}$, $b \sim \dfrac{f}{B}$, $c \sim \dfrac{\varphi}{R}$ получим выражение для ускоряющей силы тела R:

$$\frac{Fr + f\tau + \varphi\rho}{Ar^2 + B\tau^2 + R\rho^2} \cdot \rho.$$

Подставляя полученное выражение в последние из равенств (∗), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{Fr + f\tau + \varphi\rho}{Ar^2 + B\tau^2 + R\rho^2} \cdot \rho \cdot dz = u\,du,$$

связывающему элемент дуги dz и скорость u тела R.

Из приведенного примера ясно, что своей идеей разделения движений Даламбер пользуется только для определения выражения ускоряющей силы. А само построение дифференциального уравнения движения осуществляется на основе *закона ускоряющих сил*, выражаемого равенствами (∗).

Рассматривая решение задачи о колебаниях маятника, автор показывает, как можно получить аналогичное дифференциальное уравнение для случая колебаний в среде, сопротивляющейся пропорционально произвольной степени u^n скорости движения. Здесь же он сравнивает свой принцип с методами, ранее предложенными Д. Бернулли и Эйлером, которые он считает теоретически недостаточно обоснованными.

Завершается «Динамика» доказательством принципа сохранения живых сил на основе даламберовой идеи разделения движений и решением некоторых задач удара упругих тел и движения жидкости.

Первое знакомство с идеей Даламбера, положенной им в основу и следующей книги — «Трактата о равновесии и движении жидкостей, ...» [117] — можно продолжить, обратившись к авторской статье «Динамика» в «Энциклопедии»: «Положим, что нескольким телам передаются какие-то движения, которые у них не могут удержаться вследствие их взаимодействия и которые они вынуждены заменить другими. Известно, что всякое движение можно рассматривать как сложное движение, состоящее из двух движений по выбору. Поэтому мы можем первоначальное движение каждого тела рассматривать как сложное движение, составленное из двух движений, из которых одно мы возьмем такое, какое данное тело воспринимает вследствие действия на него других тел. Но если бы каждое тело получило бы это последнее движение вместо своего первоначального, которое ему было передано, то все тела могли бы сохранить это самое движение без всяких изменений: это как раз те движения, которые тела воспринимают сами по себе. Вследствие этого другие составляющие движения должны быть таковы, что они нисколько не будут нарушать первых составляющих движений. Другими словами, вторые движения должны быть таковы, что если бы только их сообщить всем телам и ничего больше, то система осталась бы в покое.

Отсюда следует, что для того, чтобы найти движение нескольких тел, действующих друг на друга, нужно разложить полученные телами движения, то есть движения, с которыми тела стремятся двигаться, на два других движения. Эти составляющие движения должны быть подобраны таким образом, что у каждого тела одно из этих составляющих движений должно уничтожиться, а другое должно быть таким и так направленным, чтобы действие окружающих тел не могло ничего в нем изменить. Отсюда легко видеть, что все *законы движения тел* могут быть сведены к *законам равновесия*. В самом деле, для решения любой задачи динамики нужно только разложить движение каждого тела на два движения. Зная одно из этих составляющих движений, мы сможем найти другое... Указанные условия всегда дадут все уравнения. Нет такой задачи динамики, которую нельзя было бы решить этим приемом или, по крайней мере, привести ее к уравнению, — а это есть все, что можно требовать от динамики.

Мне кажется, что данное правило в самом деле приводит все задачи, относящиеся к движению тел, к более простой задаче равновесия. Кроме того, этот принцип не опирается ни на какой вредный или неясный метафизический принцип[1]. Он рассматривает в движении лишь то, что в нем в действительности имеется, то есть пройденный путь и затраченное на это время. Он не пользуется ни действиями, ни силами, — одним словом, никаким из тех вторичных начал, которые, может быть, сами по себе и хороши и могут быть иногда полезными для сокращения и облегчения решения, но которые никогда не будут началами первичными, поскольку метафизика этих начал никогда не станет ясной» [29, с. 334–335].

В этом Даламбер был прав. Метафизичность основных законов механики лишает их наглядности, а значит, и ясности. Однако и пред-

[1]К числу таких принципов Даламбер относил и второй закон Ньютона.

лагаемый им принцип только создает эффект полной ясности. Если же попытаться сравнить этот принцип, как метод решения задач, с законами сохранения количества движения, живых сил, законом ускоряющих сил, то он менее «технологичен», он применим только для несвободных движений тел. Но в этом же и его достоинство — впервые делается попытка построения теории движения системы связанных тел. Благодаря Даламберу объектом внимания механиков становится не только свободное тело, но и система тел.

Своей «Механикой» Эйлер стремился расшифровать, разъяснить, упростить, развить, обобщить основные понятия и законы механики, созданной его предшественниками. В первую очередь — Ньютоном. «Динамика» Даламбера — это попытка радикальной перестройки основ механики, стремление к физической ясности ее понятий[1], предельной универсальности, всеобщности, наглядности и эффективности ее основополагающих принципов. Традиционный принцип виртуальных скоростей (перемещений) был прекрасным образцом основ теории равновесия тел. Поэтому идея его модернизации для нужд теории движения тел представляется вполне естественной. Но потребовалась не столько модернизация математического содержания принципа, сколько пересмотр физического понятия равновесия, покоя. Идея возможности уравновешивания, «уничтожения» некоторых динамических характеристик двигающегося тела в каждый момент времени связями (другими телами) оказалась очень перспективной. Именно эту идею положил Лагранж в основу своего общего уравнения динамики, опубликованного в 1788 г.

[1]В приложениях к работе приводится перевод главы «Механика» из «Очерка основ философии» Даламбера, где уточняются многие его определения и взгляды на механику.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Классическая механика как единая методология изучения равновесия и движения тел природы и технических устройств, как целостная система, построенная на отождествлении математических[1] и физических[2] понятий и принципов, формировалась на протяжении многих столетий. Формирование ее понятийного аппарата, ее важнейших законов — это плод коллективного разума многих ученых, представлявших разные исторические эпохи, разные народы, разные географические регионы.

Важнейший вклад в этот процесс внесли ученые XVII – начала XVIII вв. Именно в этот период были сформированы ставшие общепринятыми основные понятия, законы и принципы механики. Окончательно утвердилась идея математизации понятий и принципов механики: постоянные, не меняющиеся величины ассоциировались с числом, меняющиеся — с переменной, функцией. Свойства физических понятий, физические законы получили математическую интерпретацию.

Главными стимулами построения теории стали новые задачи о движении тел. Математическое описание Кеплером движения планет, осознание Галилеем физических причин падения земных тел и получение соответствующих математических законов. Задачи о передаче движения посредством удара, ставшие одним из важнейших звеньев декартовой системы натуральной философии и получившие математические решения у Уоллиса, Рена, Гюйгенса, Мариотта. Сугубо техническая задача о колебаниях маятника, решенная Гюйгенсом геометрическим методом, привела к понятиям центробежной силы и центра колебаний. Задачи удара тел породили понятия, связанные с деформацией тел (упругость, абсолютная твердость, . . .), укрепили представления о взаимодействии тел как о причине их движения. После введения Декартом понятия количества движения эта причинно-следственная

[1] Число, множество, точка, линия, поверхность, функция, производная, интеграл, . . .

[2] Тело, точка, движение, скорость, взаимодействие, масса, сила, траектория, энергия, ускорение, . . .

связь между ударяющим и ударяемым телами, между действием (силой, импульсом) и производимым им эффектом (изменением количества движения) получила ясное выражение в виде математического равенства ($F = m\nu$), ставшего одним из главных принципов теории движения тел. *Закон равенства действия и противодействия* был своеобразным аналогом *закона сохранения количества движения.*

Повышенный интерес к причинам и свойствам движения планет стал источником целого цикла задач небесной механики. Сложившееся в середине века понимание силы как меры взаимодействия тел, как первопричины движения и установление ее причинно-следственной связи с осуществляемым движением, позволило Ньютону сформировать в 1687 г. первую целостную теорию движения тел под действием сил. Одним из важнейших открытий Ньютона было осознание дуализма задач механики: *определение движений по заданным силам и определение сил по заданным движениям.* Вторая из этих задач позволяла как бы материализовать понятие силы, найти ее математическое выражение и численную величину. Первым подобную задачу решил Гюйгенс, найдя выражение для центробежной силы. Затем это сделал Ньютон, открыв формулу для силы взаимного притяжения планет. После работ Лейбница и Вариньона задача математического определения, вычисления сил стала одной из основных задач механики. Сила получила статус не только физической (определяемой экспериментально), но и математической величины.

В конце XVII – начале XVIII в. решение любой задачи основывалось на признании некоторых механических принципов или законов. Эти принципы, установленные давным-давно или открытые совсем недавно, либо выражали результаты определенных физических экспериментов (то есть были обобщением конкретных результатов опытов), либо носили метафизический характер (то есть были конкретизацией неких общих философских законов). Решение задачи, как правило, сводилось к решению некоторого (алгебраического или дифференциального) уравнения, являющегося математическим выражением принятого принципа или закона.

Принцип — Метод решения — Результат. Эта технология отрабатывалась далее на новых задачах движения тел в среде, удара тел, движения тел Солнечной системы, движения парусного корабля, колебаний тел, равновесия тел. В качестве принципов принимались правило сложения движений (сил), законы инерции и падения тел в пустоте, принцип относительности движения, закон наинизшего расположения центра тяжести, закон сохранения количества движения, закон сохранения живых сил, законы равенства действия и противодействия, изменения количества движения и силы, принципы скорейшего пути и наименьшего действия, принцип «уравновешивания» (Я. Бернулли – Германн – Эйлер – Даламбер) либо какие-то их интерпретации. Некоторые принципы, носившие эмпирический характер, допускали их физическую проверку. Верификация других осуществлялась на основе экспериментального подтверждения (наблюдения) результатов указанной технологии. Эта технология оказалась мощным стимулом формирования нового теоретического аппарата математики (математического анализа, вариационного исчисления, теории дифференциальных уравнений, аналитической и дифференциальной геометрии), подтверждением не только его логического совершенства, но и возможности экспериментальной проверки его эффективности.

Формирование науки — это последовательное (порой одновременно несколькими учеными) развитие (уточнение, обобщение) идей, понятий, методов, принципов, завершающееся построением логически обоснованной, получившей экспериментальное подтверждение теории. Это процесс не только поступательного, но и порой скачкообразного развития, связанного с пересмотром устаревших доктрин, отказом от утративших актуальность понятий. И если введение новых задач, понятий и принципов, их совершенствование всегда персонифицировано, то их общественное признание в качестве общепринятых научных результатов всегда предполагает соучастие научного сообщества: одобрение, выражение замечаний, предложений по развитию идей, отрицание результатов. Это своеобразный экзамен классиков перед научной общественностью. Гюйгенс, Рен, Уоллис, Марци, Роберваль, Мариотт своими работами популяризовали достижения Галилея и Декарта. Их идеи подвергались критической оценке со стороны Лейбница и Ньютона. Гюйгенс и Лейбниц отвергали идею Галилея – Ньютона о взаимодействии тел на расстоянии, Лейбниц — декартов закон сохранения количества движения, Гюйгенс — лейбницеву теорию движения тел в среде, ньютонианцы — понятие живой силы и соответствующий закон сохранения. И. Бернулли, напротив, был активным сторонником этого понятия и соответствующего закона. Большинство европейских ученых восприняли «Начала» Ньютона только как теорию движения небесных тел. Поэтому многие французские механики конца XVII – начала XVIII в.

продолжали работы Галилея, Декарта, Роберваля, Мариотта, Гюйгенса, Лейбница, братьев Бернулли в их традиционной постановке.

Блестящим развитием механики Ньютона стала «Механика» Эйлера, начавшая новый — аналитический этап истории механики. Популяризация Мопертюи, Вольтером, Клеро и другими французскими учеными ньютонианских идей на континенте привела к их критической переоценке и попыткам построения общей теории движения и равновесия тел на базе новых понятий и принципов. Динамика и статика системы тел (Даламбер), абсолютно твердого тела (Эйлер), совершенствование аппарата математического анализа и связанных с ним разделов математики, решение новых задач небесной механики, теории корабля, баллистики, теории машин и механизмов стали основой для создания Лагранжем «Аналитической механики», для дальнейшего развития теоретической механики в работах Боссю, Монжа, Л. Карно, Лапласа, Пуансо, Пуассона, Кориолиса, Гамильтона, Якоби, Гаусса, Остроградского и их последователей.

Таковы основные результаты развития классической механики до середины XVIII в. Результаты, составившие предысторию аналитического периода ее развития.

Литература

[1] *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960.

[2] *Араго Ф.* Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. Т. I–III. СПб, 1859–1861.

[3] *Аристотель.* Физика. М.: Соцэкгиз, 1936.

[4] *Бернал Д.* Наука в истории общества. М.: ИЛ., 1956.

[5] *Бернулли Д.* Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкостей. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

[6] *Бернулли И.* Избранные сочинения по механике. М.–Л.: Об. науч.-техн. изд-во, 1937.

[7] Биографический словарь деятелей естествознания и техники. Т. 1, 2. Отв. ред. А. А. Зварыкин. М.: Советская энциклопедия, 1958.

[8] *Боголюбов А. Н.* Механика в истории человечества. М.: Наука, 1978.

[9] *Боголюбов А. Н.* Математики, механики. Биографический справочник. Киев: Наукова думка, 1983.

[10] *Боголюбов А. Н.* Роберт Гук. М.: Наука, 1984.

[11] *Бугаенко Г. А., Маланин В. В., Яковлев В. И.* Основы классической механики. М.: Высшая школа, 1999.

[12] *Вавилов С. И.* Исаак Ньютон. М.: Наука, 1989.

[13] *Вакуленко А. А., Михайлов Г. К.* Клиффорд Трусделл и современная история механики // Вопр. ист. ест. и техн. Вып. 3. М.: Наука, 2000.

[14] Вариационные принципы механики. М.: ГИФМЛ, 1959.

[15] *Веселовский И. Н.* Христиан Гюйгенс. М.: Учпедгиз, 1959.

[16] *Веселовский И. Н.* Очерки по истории теоретической механики. М.: Высшая школа, 1974.

[17] *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Физматгиз, 1960.

[18] *Галилей Г.* Избранные труды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1964.

[19] *Галилей Г.* Сочинения. Т. 1. Беседы и математические доказательства. М.–Л.: Гостехиздат, 1934.

[20] *Герц Г. Р.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

[21] *Гессен Б. М.* Социально-экономические корни механики Ньютона. М.–Л.: Гостехиздат, 1933.

[22] *Григорьян А. Т., Зубов В. П.* Очерки развития основных понятий механики. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

[23] *Григорьян А. Т.* Механика от античности до наших дней. М.: Наука, 1974.

[24] *Григорьян А. Т.* Механика в России. М.: Наука, 1978.

[25] *Григорьян А. Т., Рожанская М. М.* Механика и астрономия на средневековом Востоке. М.: Наука, 1980.

[26] *Григорьян А. Т., Ковалев Б. Д.* Даниил Бернулли. М.: Наука, 1981.

[27] *Гюйгенс Х.* Три мемуара по механике. М.: Изд-во АН СССР, 1951.

[28] *Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж.* Пути и лабиринты. М.: Мир, 1986.

[29] *Даламбер Ж. Л.* Динамика. М.: ГИТЛ, 1950.

[30] *Декарт Р.* Космогония. М.–Л.: Госполитиздат, 1934.

[31] *Декарт Р.* Избранные произведения. М.: Госполитиздат, 1950.

[32] *Декарт Р.* Рассуждения о методе. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1953.

[33] *Дмитриев И. С.* Неизвестный Ньютон: силуэт на фоне эпохи. СПб.: Алетейя, 1999.

[34] *Дорфман Я. Г.* Всемирная история физики с древнейших времен до конца XVIII века. М.: Наука, 1974.

[35] *Ельевич А. Н.* Галилео Галилей. Указатель литературы. М.: Гос. биб. — биб. изд., 1940.

[36] *Зубов В. П.* Об архимедовой традиции в средние века. // Историко-математические исследования. Вып. XVI. М.: Наука, 1965.

[37] *Идельсон Н. И.* Этюды по истории небесной механики. М.: Нау-ка, 1975.

[38] Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

[39] Исследования по истории физики и механики. М.: Наука, 1985.

[40] История механики с древнейших времен до конца XVIII века. М.: Наука, 1971.

[41] *Кирпичев В. Л.* Беседы о механике. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.

[42] *Кирпичев В. Л.* Основание графической статики. М.–Л.: ГИТТЛ, 1933.

[43] *Кирсанов В. С.* К истории возникновения «Начал» Ньютона. // Вопр. ист. ест. и техн. Вып. 3. М.: Наука, 1987.

[44] *Кирсанов В. С.* Научная революция XVII века. М.: Наука, 1987.

[45] *Кирсанов В. С., Михайлов Г. К.* К трехсотлетию «Математических начал натуральной филофии» Ньютона. // Успехи механики. Т. 11, № 3, Варшава, 1988.

[46] *Кирсанов В. С.* Первый русский перевод «Космотеороса» Гюйгенса. // Вопр. ист. ест. и техн. Вып. 2. М.: Наука, 1996.

[47] *Кирсанов В. С.* Переписка Исаака Ньютона с Робертом Гуком 1679–1680 гг. // Вопр. ист. ест. и техн. Вып. 4. М.: Наука, 1996.

[48] *Комилов А. Ш.* Физика ар-Рази и Ибн-Сины. М.: Изд-во МГУ, 1999.

[49] *Крылов А. Н.* Ньютон и его значение в мировой науке (1643–1943). М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1943.

[50] *Кузнецов Б. Г.* Галилей. М.: Наука, 1965.

[51] *Кульвецас Л. Л.* О попытках И. Ньютона определить понятие скорости. // Методология естествознания в его развитии. Киев: Наукова думка, 1987.

[52] *Кульвецас Л. Л.* К истории определения понятия скорости. // Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983.

[53] *Лагранж Ж. Л.* Аналитическая механика. Т. I, II. М.–Л.: ГИТЛ, 1938.

[54] *Льоцци М.* История физики. М.: Мир, 1970.

[55] *Марков С. Н.* Курс истории математики. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1995.

[56] *Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А.* Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, VIII–XVII вв. Т. 1–3. М.: Наука, 1983.

[57] Математическая энциклопедия. Т. 3, М.: Советская энциклопедия, 1982.

[58] *Мах Э.* Механика. Историко-критический очерк ее развития. СПб, 1909 (Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000).

[59] *Меркин Д. Р.* Краткая история классической механики Галилея–Ньютона. М.: Физматлит, 1994.

[60] Механика и физика XVIII века. М.: Наука, 1976.

[61] *Михайлов Г. К.* К истории применения закона живых сил к истечению воды из сосудов. // Вопр. ист. ест. и техн. Вып. 10. М.: Наука, 1960.

[62] *Михайлов Г. К.* Критические замечания о книге Н. Д. Моисеева «Очерки развития механики». // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. Вып. 2. М.: Наука, 1962.

[63] *Моисеев Н. Д.* Очерки развития механики. М.: Изд-во МГУ, 1961.

[64] *Никифоровский В. А.* Великие математики Бернулли. М.: Наука, 1984.

[65] *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. // Собр. тр. акад. А. Н. Крылова. Т. 7. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

[66] *Ньютон И.* О движении сферических тел в жидкости. // Вопр. ист. ест. и техн. Вып. 3. М.: Наука, 1987.

[67] Очерки по истории математики. Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Изд-во МГУ, 1997.

[68] *Погребысский И. Б.* Готфрид Вильгельм Лейбниц. М.: Наука, 1971.

[69] *Погребысский И. Б.* От Лагранжа к Эйнштейну. М.: Янус, 1996.

[70] *Полак Л. С.* Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике. М.: Физматгиз, 1960.

[71] *Рожанская М. М.* Механика на средневековом Востоке. М.: Наука, 1976.

[72] *Рожанская М. М., Куртик Г. Е.* Механика и наука средневекового Востока // Механика в истории мировой науки. М.: Наука, 1993.

[73] *Рыбников К. А.* История математики. М.: Изд-во МГУ, 1974.

[74] *Соколов В. В.* Европейская философия XV–XVII веков. М.: Высшая школа, 1984.

[75] *Стеклов В. А.* Галилео Галилей. Биографический очерк. Берлин: Госиздат РСФСР, 1928.

[76] *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1969.

[77] *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.–Л.: Гостехиздат, 1946.

[78] *Татон Р.* Хронологическое описание работ А. Клеро. // Историко-математические исследования. Вып. 2. М.: Наука, 1976, с. 240–260.

[79] *Тюлина И. А., Ракчеев Е. Н.* История механики. М.: Изд-во МГУ, 1962.

[80] *Тюлина И. А.* Геометрическая статика П. Вариньона. // Вопр. ист. ест. и техн. Вып. 3–4. М.: Наука, 1977.

[81] *Тюлина И. А.* О трактате Вариньона «Новая механика». // История и методология естественных наук. Вып. 2. М.: Изд-во МГУ, 1978.

[82] *Тюлина И. А.* История и методология механики. М.: Изд-во МГУ, 1979.

[83] *Тюлина И. А., Яковлев В. И.* О жизни и взглядах Ж. Л. Даламбера. // История и методология науки. Пермь: Изд-во ПГУ, 1994.

[84] Физика на рубеже XVII–XVIII веков. М.: Наука, 1974.

[85] *Фоменко А. Т.* Критика традиционной хронологии античности и средневековья. М.: Изд-во МГУ, 1993.

[86] *Франкфурт У. И., Френк А. М.* Христиан Гюйгенс. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

[87] *Харламов П. В.* Основания механики Ньютона. Препринт № 250 Ин-та пробл. мех. АН СССР, М., 1985.

Харламов П. В. Очерки об основаниях механики. Киев: Наукова думка, 1995.

[88] *Цейтлин З.* Галилей. М.: Журн.-газ. объед., 1935.

[89] *Чиненова В. Н.* Одна из первых попыток применения дифференциального исчисления в учении о движении. // История и методология естественных наук. Вып. 32. М.: Изд-во МГУ, 1986.

[90] *Чиненова В. Н.* Ранний этап использования дифференциальных уравнений в механике. // История и методология науки. Вып. 3. Пермь: Изд-во ПГУ, 1997.

[91] *Чиненова В. Н., Яковлев В. И.* Вклад П. Вариньона в науку о движении // Исследования по истории физики и механики. 1998–1999. М.: Наука, 2000.

[92] *Эйлер Л.* Основы динамики точки. М.–Л.: ГИТЛ, 1939.

[93] *Юшкевич А. П.* Обзор Советской юбилейной литературы о Ньютоне. // Труды Ин-та истории естествознания АН СССР. Т. 1. М., 1947.

[94] *Яковлев В. И.* О некоторых понятиях классической механики. // Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Изд-во ПГУ, 1990.

[95] *Яковлев В. И.* История классической механики. Учебное пособие для вузов. Пермь: Изд-во ПГУ, 1990.

[96] *Яковлев В. И.* Очерки по истории механики XIX века. Учебное пособие для вузов. Пермь: Изд-во ПГУ, 1993.

[97] *Яковлев В. И.* Математические модели классической механики. Учебное пособие для вузов. Пермь: Изд-во ПГУ, 1995.

[98] *Яковлев В. И., Карпова В. И.* Очерк истории теоретической механики. Учебное пособие для вузов. Пермь: Изд-во ПГУ, 1996.

[99] *Яковлев В. И., Гилев И. В.* К истории развития принципов механики. Правило параллелограмма сложения и разложения сил. // История и методология науки. Вып. 3. Пермь: Изд-во ПГУ, 1996.

[100] *Яковлев В. И., Гилев И. В., Карпова В. И.* К творчеству Ш. Боссю. // История и методология науки. Вып. 3. Пермь: Изд-во ПГУ, 1996.

[101] *Яковлев В. И.* Развитие статики в творчестве П. Вариньона. // Проблемы механики и управления. Пермь: Изд-во ПГУ, 1997.

[102] *Яковлев В. И., Колодкина М. В.* Из истории принципа наименьшего действия. // История и методология науки. Вып. 4. Пермь: Изд-во ПГУ, 1997.

[103] *Яковлев В. И.* Дифференциальные методы в механике Вариньона. // История и методология науки. Вып. 4. Пермь: Изд-во ПГУ, 1997.

[104] *Яковлев В. И.* Теория сил в философии Г. В. Лейбница. // История и методология науки. Вып. 5. Пермь: Изд-во ПГУ, 1998.

[105] *Яковлев В. И.* Механико-математические работы Лейбница. // История и методология науки. Вып. 5. Пермь: Изд-во ПГУ, 1998.

[106] *Яковлев В. И., Маланин В. В., Гилев И. В., Карпова В. И.* Из истории механики XVIII–XIX веков. Учебное пособие для вузов. Пермь: Изд-во ПГУ, 1998.

[107] *Яковлев В. И.* In magnis voluisse sat est. // Проблемы механики и управления. Пермь: Изд-во ПГУ, 1998.

[108] *Яковлев В. И.* Луи Карре и законы движения тел. // Проблемы механики и управления. Пермь: Изд-во ПГУ, 1998.

[109] *Яковлев В. И.* Вклад в механику П. Л. М. де Мопертюи. // История и методология науки. Вып. 6. Пермь: Изд-во ПГУ, 1999.

[110] *Яковлев В. И.* Шевалье де Лувиль и дискуссия о «живой силе». // История и методология науки. Вып. 6. Пермь: Изд-во ПГУ, 1999.

[111] *Яковлев В. И.* Пьер Буге и теория управления кораблем. // История и методология науки. Вып. 6. Пермь: Изд-во ПГУ, 1999.

[112] *Яковлев В. И., Ильиных С. В.* Задача о движении снаряда в начальный период истории механики. // История и методология науки. Вып. 6. Пермь: Изд-во ПГУ, 1999.

[113] *Яковлев В. И.* Задачи механики в творчестве А. Клеро. // Проблемы механики и управления. Пермь: Изд-во ПГУ, 1999.

[114] *Яковлев В. И.* Европейское научное сообщество и Парижская академия наук конца XVII – начала XVIII вв. //История и методология науки. Вып. 7. Пермь: Изд-во ПГУ, 2000.

[115] *d'Alembert J.* Oeuvres philosophiques, historiques et litterairers. T. 2. Paris: J.–F. Bastien, 1805.

[116] *d'Alembert J.* Traité de dynamique. Paris, 1743.

[117] *d'Alembert J.* Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides, pour servir de suite au Traité de dynamique. Paris, 1744.

[118] *d'Alembert J.* Méthode générale pour déterminer les orbites et les mouvements de toutes les planètes, en ayant égard à leur action mutuelle. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1745 (1749), p. 365–390.

[119] *d'Arcy P.* Probléme de dynamique sur l'action rèciproque des systêmes des corps les uns sur les autres. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1747 (1752), p. 344–361.

[120] *d'Arcy P.* Réflection sur le principe de la moindre action de Mr. de Maupertuis. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1749 (1753), p. 531–538.

[121] *d'Arcy P.* Suite d'un mémoire de dynamique imprimé dans les mémoires de l'Académie de 1747. // Mem. Acad. roy. sci. Paris, 1750 (1754), p. 107–108.

[122] *d'Arcy P.* Réplique à un mémoire de M. de Maupertuis, sur le principe de la moindre action, inséré dans les Mémoires de l'Académie Royal de sciences de Berline, de l'année 1752. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1752 (1756), p. 503–519.

[123] *d'Arcy P.* Théorèmes de dynamique. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1758 (1763), p. 1–8.

[124] *Auger L.* Un savant méconnu: Gilles Personne de Roberval (1602–1675). Son activité intellectuelle dans les domaines mathématiques, physiques, mécaniques et philosophiques. Paris, 1962.

[125] *Barthélémy G.* Newton mécanicien du cosmos. Paris: J. Vrin, 1992.

[126] *Bechler Z.* Newton's physics and the conceptual structure of the scientific revolution. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[127] *Bedini S. A.* The pulse of time: Galileo Galilei, the determination of longitude and the pendulum clock. Firenze: Leo S. Olschki, 1991.

[128] *Beeckman I.* Journal tenu par Isaac Beeckman de 1604 à 1634. T .1–4. La Haye: Nijhoff, 1939–1953.

[129] *Bélidor B.* Sommaire d'un cours d'architecture militaire, civile, hydraulique, et des autres traitez les plus utiles aux ingéniers et architectes. Paris, 1720.

[130] *Bélidor B.* Nouveau cours de mathématiques à l'usage de l'artillerie et du génie. Paris, 1725; nouvelle édition, Paris, 1759.

[131] *Bélidor B.* La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile. Paris, 1729; nouvelle édition avec des notes par Navier, Paris, 1813.

[132] *Bélidor B.* Le bombardier francois, ou nouvelle méthode de jetter les bombes avec précision. Paris, 1731; Amsterdam, 1734.

[133] *Bélidor B.* Architecture hydraulique, ou l'art de conduire, l'éver et de ménager les eaux pour des différens besoins de la vie. T. 1–4. Paris, 1737–1753.

[134] *Bell A. E.* Christan Huygens and the development of science in the 17^{th} century. London: Arnold, 1947.

[135] *Bernoulli J.* Nouvelle theorie du centre d'oscillation. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1714 (1717), p. 208–230.

[136] *Bernoulli J.* Discours sur les loix de la communication du mouvement. Paris, 1727; Opera omnia. T. 3, p. 1–107.

[137] *Bernoulli J.* Meditatio de natura centri oscillationis. // Acta eruditorum, 1714, p. 257–272; Opera omnia. T. 2, p. 168–186.

[138] *Bernoulli J.* De vera notione virium vivarum earumque usu in dynamicis. // Acta eruditorum, 1735, p. 210–230; Opera omnia. T. 3, p. 239–260.

[139] *Bernoulli J.* Essay d'une nouvelle théorie de la manoeuvre des vaisseaux. Basel, 1714; Opera omnia. T. 2, p. 1–96.

[140] *Blay M.* La naissance de la mécanique analytique: La science du mouvement au tournant des XVIIe et XVIIIe siecles. Paris: Press. Univ. de France, 1992.

[141] *Blondel N. F.* De l'art de jetter les bombes. Paris, 1683.

[142] *Bomie A.* Des forces centripètes et centrifuges, considérées en général dans toutes sortes de courbes, et, en particulier sur le cercle. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1707 (1708), p. 477–487.

[143] *Bomie A.* Propriétés de la tractrice. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1712 (1712), p. 215–225.

[144] *Bouguer P.* Sur des nouvelles courbes auxquelles on peut donner le nom de lignes de poursuite. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1732 (1735), p. 1–14.

[145] *Bouguer P.* Eclaircissemens sur le problème de la mâture des vaisseaux. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1745 (1749), p. 309–328.

[146] *Bouguer P.* Sur une nouvelle construction de loch avec des remarques sur l'usage des autres instruments qui peuvent servir à mesurer le sillage des vaisseaux. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1747 (1752), p. 644–664.

[147] *Bouguer P.* Mémoire sur les opérations nommées corrections par les pilotes; avec diverses remarques, qui puevent être utiles dans les parties pratiques des mathématiques. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1752 (1756), p. 1–26.

[148] *Bouguer P.* Solutions des principaux problèmes des la manoeuvre des vaisseaux. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1754 (1759), p. 342–368.

[149] *Bouguer P.* Nouveau traite de navigation, contenant la théorie et la pratique du pilotage. Paris, 1753.

[150] *Bouguer P.* Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements. Paris, 1746.

[151] *Bouguer P.* De la manoeuvre des vaisseaux, ou traité de méchanique et de dynamique. Paris, 1757.

[152] *Bucciantini M.* Contro Galileo. Firenze: Leo S. Olschki, 1995.

[153] *Buffon G.-L. L.* Réflexions sur la loi de l'attraction. // Mém. Acad. roy. sci., Paris, 1745 (1749), p. 493–500.

[154] *Buffon G.-L. L.* Addition au mémoire qui a pour titre: Réflexions sur la loi de l'attraction. // Mém. Acad. roy. sci., Paris, 1745 (1749), p. 551–552.

[155] *Buffon G.-L. L.* Seconde addition au mémoire qui a pour titre: Réflexions sur la loi de l'attraction. // Mém. Acad. roy. sci., Paris, 1745 (1749), p. 580–583.

[156] *Brunet P.* Maupertuis. L'oeuvre et sa place dans la pensée scientifique et philosophique de XVIII siècle. Paris, 1929.

[157] *Brunet P.* L'introduction des théories de Newton en France au XVIII siècle. T. 1. Avant 1738. Paris: Blanchard, 1931.

[158] *Brunet P.* La vie et l'oeuvre de Clairaut. // Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 1951, t. 4, p. 13–40, 109–153; 1952, t. 5, p. 334–349; 1953, t.6, p. 1–15.

[159] *Camus Ch.* Traité sur l'hydraulique. Paris, 1739.

[160] *Camus Ch.* Cours de mathématiques à l'usage des ecoles du génie et de l'artillerie. I–IV, Paris, 1749, 1766.

[161] *Camus Ch.* Eléments de mécanique statique. Paris, 1751.

[162] *Camus Ch.* Sur l'action d'une balle de mousquet, qui perce une pièce de bois d'une épaisseur considérable, sans lui communiquer de vitesse sensible. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1738 (1740), p. 147–158.

[163] *Camus Ch.* Problème de statique. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1740 (1742), p. 201–209.

[164] *de Camus F.-J.* Traité des forces mouvantes pour la pratique des arts et des métiers. Paris, 1722.

[165] de Camus F.-J. Du mouvement accéléré par des ressorts et des forces qui résident dans les corps en mouvement. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1728 (1730), p. 147–158.

[166] *Caroti S.* Nel segno di Galileo: erudizione, filosofia e scienza a Firenze nel secolo XVII: I «Trattati academici» di Vincenzio Capponi. Firenze: Studio per Edizioni Scelte, 1993.

[167] *Carré L.* Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion et d'oscillation, par application du calcul intégral. Paris, 1700.

[168] *Carré L.* Des loix du mouvement. // Mém. Acad. roy. sci., Paris, 1706 (1707), p. 442–461.

[169] *Carré L.* Réflexion des caustiques. Réflecxion formées par le cercle, la cycloide ordinaire et la parabole, et de leurs développées, avec la mesure des espaces qu'elles renferment. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1703 (1705), p. 183–199.

[170] *Carteron H.* L'idée de la force mécanique dans le système de Descartes. // Revue philosophique de la France et de l'étranger, 1922, t. 94, p. 243–277, 483–511.

[171] *Du Châtelet G.-E.* Dissertation sur la nature et sur la propagation du feu. Paris, 1744.

[172] *Clairaut A.-C.* Eléments de géométrie. Paris, 1741.

[173] *Clairaut A.-C.* Examen des différentes oscillations qu'un corps suspendu par un fil peut faire lorsqu'on lui donne une impulsion quelconque. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1735 (1738), p. 281–298.

[174] *Clairaut A.-C.* Solution de quelques problèmes de dynamique. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1736 (1739), p. 1–22.

[175] *Clairaut A.-C.* Des centres d'oscillation dans des milieux résistants. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1738 (1740), p. 159–168.

[176] *Clairaut A.-C.* Problème physico-mathématique. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1740 (1742), p. 254–263.

[177] *Clairaut A.-C.* Sur quelques principes qui donnent la solution d'un grand nombre de problemes de dynamique. // Mém. Acad. roy. sci. 1742 (1745), p. 1–52.

[178] *Clairaut A.-C.* Nouvelle solution de quelques problèmes sur la manoeuvre des vaisseaux, qui se trouvent dans le vol. de l'Académie de 1754. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1760 (1766), p. 171–178.

[179] *Costabel P.* Leibniz et la dynamique. Lex textes de 1692. Paris: Hermann, 1960.

[180] *Costabel P.* Pierre Varignon et la diffusion en France du calcul differentiel et integral. Paris, 1966.

[181] *de Courtivron G.* Sur les oscillations des pendules dans des arcs de cercle, principalement lorsque les arcs ont peu d'étendue. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1744 (1746), p. 384–394.

[182] *de Courtivron G.* Recherches de statique et de dynamique, où l'on donne un nouveau principe général pour la considération des corps animès par des forces variables, suivant une loi quelconque. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1748 (1752), p. 304.

[183] *Damerow P.*, Freudenthal G., McLaughlin P., Renn J. Exploring the limits of preclassical mechanics: a study of conceptual development in early modern science: free fall and compound motion in the work of Descartes, Galileo and Beeckman. New York–Berlin: Springer Verlag, 1992.

[184] *Descartes R.* Letters. T. 2. Paris, 1959.

[185] *Drake S.* Galileo studies: personality, tratition, and revolution. Ann. Arbor: Univ. of Michigan Press, 1970.

[186] *Drake E. T.* Restless genius: Robert Hooke and his earthly thoughts. New York–Oxford: Oxford Univ. Press, 1996.

[187] *Dugas R.* La mécanique au XVII siecle. Neuchâtel: Griffon, 1954.

[188] *Dugas R.* Histoire de la mécanique. Neuchâtel: Griffon, 1950.

[189] *Duhem P.* L'évolution de la mécanique. Paris: Hermann, 1905.

[190] *'Espinasse M.* Robert Hooke. Berkley: Univ. California Press, 1962.

[191] *Fantoli A.* Galileo: for copernicianism and for the church. Vatican City State: Vatican Observatory Publications, 1994 (рус. пер. Фантоли А. Галилей: в защиту учения Коперника и достоинства Святой Церкви. М: МИК, 1999).

[192] *Finocchiaro M. A.* The Galileo affair: a documentary history. Berkeley – Los Angeles: Univ. California Press, 1989.

[193] *Fontaine des Bertins A.* Une courbe étant donnée, trouver celle qui seroit décrite par le sommet d'un angle... // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1734 (1736), p. 527–530.

[194] *Fontaine des Bertins A.* Mémoires donnés à l'Academie royale des sciences, non imprimés dans leur temps. Paris, 1764.

[195] *Gille B.* Leonard de Vinci et la technique de son temps. // Leonard de Vinci et l'experience scientifique au seizième siècle. Paris, 1953, p. 141–150.

[196] *Goldstein C., Gray J., Ritter J.* L'Europe mathématique: histoires, mythes, identites. Paris: Ed. de la Maison des sciences de l'homme, 1996.

[197] *s'Gravesande W. J.* Physices Elementa Mathematica, experimentis confirmata, Sive Introductio ad Philosophiam Newtonianam, Lugduni Batavorum (=Leiden), 1720; ed. 2 — Lugduni Batavorum, 1725; Mathematical elements of natural philosophy. London, 1726.

[198] *Guisnée A.* Application de l'algèbre à la géométrie. Paris, 1705; 3e éd. 1753.

[199] *Hall A. R.* Isaac Newton: adventurer in thought. Oxford – Cambridge Mass.: Blackwell, 1993.

[200] *Hermann J.* Phoronomia sive de viribus et motibus corporum solidorum libri duo. Amsterdami, 1716.

[201] *Hero Alexandrinus.* Mechanica. T. 5, fasc. I. Lipsiae, 1900, p. 152.

[202] *Hesse M.* Hooke's vibration theory and the isochrony of springs. // Isis, 1966, t. 57, p. 433–441.

[203] *L'Hôpital G.-F.-A.* Analyse des infiniment petits, pour intelligance des lignes courbes. Paris, 1696; 5e éd. 1781.

[204] *L'Hôpital G.-F.-A.* Méthode très facile pour trouver un solide rond qui étant mû... // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1699 (1702), p. 107–112.

[205] *L'Hôpital G.-F.-A.* Solution d'un problême physico-mathématique. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1700 (1703), p. 9–21.

[206] *Hunter M., Schaffer S. (ed.)* Robert Hooke: new studies. Suffolk–Wolfeboro, New York.: Boydell Press, 1989.

[207] *Iakovlev V., Malanin V.* Pierre Varignon: contribution a la mécanique. // XXth Intern. congr. of history of science. Liege, 1997.

[208] *Jolley N. (ed.)* The Cambridge companion to Leibniz. Cambridge–New York: Cambridge Univ. Press, 1995.

[209] *Jones P.* Sir Isaak Newton: a catalogue of manuscripts and papers collected and published on microfilm by Chadwyck–Healey. Cambridge: Chadwyck–Healey, 1991.

[210] *Juan Arana C.-A.* Apariencia y verdad: estudio sobre la filosofia de P. L. M. de Maupertuis (1698–1759). Buenos Aires: Editorial Charcas, 1990.

[211] *Koyré A.* Etudes Galiléennes. T. 1–3. Paris: Hermann, 1939.

[212] *Koyré A.* An unpublished letter of Robert Hooke to Isaac Newton. // Isis, 1952. T. 43.

[213] *Koyré A.* Newtonian studies. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press, 1965.

[214] *de Lacaille N.-L.* Leçons de mécanique, ou traité abrégé du mouvement et de l'équilibre. Paris, 1743; 5e éd. 1781.

[215] *de Lahire P.* Traité de mécanique. Paris, 1695.

[216] *de Lahire P.* Traité des épicycloïdes et de leurs usage dans les mécaniques. // Mém. Acad. roy. sci. Paris depuis 1666 jusqu'à 1699. T. 9, Paris, 1730, p. 341–447.

[217] *de Lahire P.* Méthode générale pour les jets des bombes dans toutes sortes de cas proposés avec un instrument universel qui sert à cet usage. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1700 (1703), p. 199–206.

[218] *de Lahire P.* Remarques sur la forme de quelques arcs dont on sert dans l'architecture. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1702 (1704), p. 94–97.

[219] *de Lahire P.* Sur la construction des voûtes dans les édifices. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1712 (1714), p. 70–78.

[220] *Lamy B.* Traité de mécanique, de l'équilibre des solides et des liqueurs. Paris, 1679; 2e éd. 1687.

[221] *Lamy B.* Eléments de mathématiques. Paris, 1680; 2e éd. 1715.

[222] *Lamy B.* Eléments de géométrie. Paris, 1685; 4e éd. 1710.

[223] *Lamy B.* Nouvelle manière de démontrer les principaux théorèmes de mécanique. Paris, 1687.

[224] *Lamy B.* Traité de perspective. Paris, 1701.

[225] *Leibniz G. W.* Mathematische Schriften. T. 1–7. Berlin: ed. C. I. Gerhardt, 1849–1863.

[226] *Leibniz G. W.* De linea isohrona in qua grave sine acceleratione descendit. // Acta eruditorum, 1689, p. 195–198; Math. Schriften, Bd. 5, p. 234–237.

[227] *Leibniz G. W.* La règle générale de la composition des mouvements. // Journal des Sçavans. Paris, 1693; Acta eruditorum, 1693, p. 417–419; Math. Schriften, Bd. 6, p. 231–233.

[228] *Leibniz G. W.* Constructio propria problematis de curva isohrona paracentrica... // Acta eruditorum, 1693, p. 364–375; Math. Schriften, Bd. 5, p. 309–318.

[229] *Leibniz G. W.* Specimen dynamicum, pro admirandis naturae legibus circa corporum vires et mutuas actiones detegendis, et ad suas casuas revocandis. // Acta eruditorum, 1695, p. 145–157; Math. Schriften, Bd. 6, p. 234–246.

[230] *Leibniz G. W.* Essay de dynamique. // P. Costabel. Leibniz et la dynamique. Paris, 1960.

[231] Leibniz' dynamica. // Symposion der Leibniz – Gesellschaft in der Evangelischen Akademie Loccum. 2 bis 4. Juli 1982, Stuttgart, 1984.

[232] *Louville J.-E.* Eclaircissement sur une dificulté de statique proposée à l'Académie. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1722 (1724), p. 128–142.

[233] *Louville J.-E.* Sur la théorie des mouvements variés, c'est-'a-dire, qui sont continuellement accélérés, ou continuellement retardés; avec la manière d'estimer la force des corps en mouvement. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1729 (1731), p. 154–184.

[234] *Lux D. S.* Patronage and royal science in seventeenth-century France: The Académie de physique in Caen. Ithaca, New York – London: Cornell Univ. Press, 1989.

[235] *Lyons H.* The Royal Society, 1660–1940. Cambridge, 1944.

[236] *de Mairan J.-J. D.* Instruction abrégée, et méthode pour la jaugeage des navires, avec un exemple figuré et des remarques pour la pratique. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1724 (1726), p. 227–240.

[237] *de Mairan J.-J. D.* Lettre à M. l'abbé Bignon sur la mâture des vaisseaux. Paris, 1727.

[238] *de Mairan J.-J. D.* Dissertation sur l'estimation et la mesure des forces motrices des corps. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1728 (1730), p. 1–49.

[239] *de Mairan J.-J. D.* Dissertation sur les forces motrices des corps. Paris, 1741.

[240] *de Mairan J.-J. D.* Lettre à Madame du Châtelet sur la question des forces vives. Paris, 1741.

[241] *Malebranche N.* Recherche de la vérité. T. I–II. Paris, 1674–1675.

[242] *Malebranche N.* Recherche de la vérité, où l'on traite de la nature de l'esprit de l'homme et de l'usage qu'il en doit faire pour éviter des erreurs dans la science. T. I–III. Paris, 1712.

[243] *Mancosu P.* Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century. New York – Oxford: Oxford Univ. Press, 1996.

[244] *Marie M.* Histoire des sciences mathématiques et physiques. T. 5–6, Paris: Gauthier – Villars, 1884–1885.

[245] *Mariotte E.* Traité de la percussion ou du choc des corps. Paris, 1673.

[246] *Mariotte E.* Traité du mouvement des eaux et des corps fluides. Paris, 1686.

[247] *Maupertuis P.-L. M.* Ballistique arithmétique. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1731 (1733), p. 297–298.

[248] *Maupertuis P.-L. M.* Sur les courbes de poursuite. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1732 (1735), p. 15–16.

[249] *Maupertuis P.-L. M.* Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1744 (1748), p. 417–428.

[250] *Maupertuis P.-L. M.* Les loix du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique. // Mém. Acad. sci. et belles-lettres Berlin, 1748, t. 2 (1746), p. 267–294.

[251] *Maupertuis P.-L. M.* Réponse à un mémoire de M. d'Arcy, inseré dans le volume de l'Académie royale des sciences de Paris pour l'année 1749. // Mém. Acad. sci. et belles-lettres Berlin, 1754, t. 8 (1752), p. 293–298.

[252] *Maupertuis P.-L. M.* Oeuvres. T. 1–4. Lyon, 1768.

[253] *Meli D. B.* Equivalence and priority: Newton versus Leibniz: including Leibniz's unpublished manuscripts of the principia. Oxford: Clarendon Press of Oxford Univ. Press, 1993.

[254] *de Moliéres J. P.* Leçons de mathématiques, nécessaires pour l'intellegence des principes de physique qui s'enseignet actuellement au collége Royal. Paris, 1726.

[255] *de Moliéres J. P.* Leçons de physique, dictées au collége Royal, contenant les éléments de la physique détermines par les seules lois de la mécanique. T. 1–4. Paris, 1733–1739.

[256] *de Moliéres J. P.* Explication physique et mécanique du choc des corps à ressort. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1726 (1728), p. 7–68.

[257] *de Montigny E.* Problémes de dynamique, où l'on détermine les trajectoires et les vitesses d'une infinité de corps mis en mouvement autour d'un centre immobile. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1741 (1744), p. 280–291.

[258] *Montucla E.* Histoire des mathématiques. T. 1–2. Paris, 1758; 2e éd. en 4 vol., 1799–1802.

[259] *Moody E. A., Clagett M.* The medievial science of weights. Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1952.

[260] *Nielsen N.* Géomètres français du dix-huitième siecle. Copenhague: Lenin & Munksgaard – Paris: Gauphier – Villars, 1935.

[261] *Ozanam J.* Cours de mathématiques, qui comprend toutes les parties de cette science. T. 1–4. Paris, 1693; 2e éd. Amsterdam, 1699.

[262] *Pardies I.-G. S.* La statique ou la science des forces mouvants. Paris, 1673.

[263] *Parent A.* Eléments de mécanique et de physique, òu l'on donne géométriquement les principes du choc et des équilibres entre toutes sortes de corps; avec application naturelle des machines fondamentales. Paris, 1700.

[264] *Parent A.* Recherches de physique et de mathématique. Paris, 1703–1705.

[265] *Parent A.* Nouvelle statique avec frotemens et sans frotemens, ou régles pour calculer les frotemens des machines dans l'état de l'éqiulibre. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1704 (1706), p. 173–186.

[266] *Parent A.* Sur la plus grande perfection possible des machines. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1704 (1706), p. 323–338.

[267] *Parent A.* Sur la plus grande perfection possible des machines mues par les animaux. // Histoire de l'Académie royale des sciences. Paris, 1714 (1717), p. 93–98.

[268] *Parenty H.* Les tourbillons de Descartes et la science moderne. Paris: Champion, 1903.

[269] *Pulte H.* Das prinzip der kleinsten wirkung und die kraftkonzeptionen der rationalen mechanik: eine untersuchung zur grundlegungsproblematik bei Leonhard Euler, Pierre Louis Moreau de Maupertuis und Joseph Louis Lagrange. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 1989.

[270] *Réaumur R.-A. F.* Expériences pour connaitre si la force des cordes surpasse la somme des forces des fils qui composent les mémes cordes. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1711 (1714), p. 6–16.

[271] Reglement ordonné par le Roy pour l'Académie Royale des Sciences. // Histoire de l'Académie royale des sciences. Paris, 1699 (1702), p. 3–20.

[272] *Renau d'Eliçagaray B.* Théorie de la manoeuvre de vaisseaux, imprimée par ordre du roi. Paris, 1689.

[273] *Renau d'Eliçagaray B.* De la théorie sur un principe de la méchanique des liqueures qui a été conteste par Huygens. Paris, 1717.

[274] *Reston J. Jr.* Galileo: a life. New York: Harper Collins Publishers, 1994.

[275] *Reynau Ch.-R.* Analyse déterminée ou maniér de rèsoudre des problémes de mathématiques. Paris, 1708.

[276] *Reynau Ch.-R.* La science du calcul des grandeurs en général. T. 1–2. Paris, 1714.

[277] *Rohault J.* Traité de physique. Paris, 1671.

[278] *Rolle M.* Du nouveau systeme de l'infini. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1703 (1705), p. 312–336.

[279] *Rostenberg L.* The library of Robert Hooke: the scientific book trade of restoration England. Santa Monica, California: Modoc Press, 1989.

[280] *Saurin J.* Eclaircissement sur une difficulté proposée aux mathématiciens par M. le chevalier de Louville. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1722 (1724), p. 70–95.

[281] *Sauveur J.* Du frotemens d'une corde autour d'un cilindre immobile. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1703 (1705), p. 305–311.

[282] *Saverien A.* Discoours sur la manoeuvre des vaisseaux. Paris, 1744.

[283] *Saverien A.* Discoours sur la navigation et la physique expérimentale. Paris, 1744.

[284] *Saverien A.* Nouvelle théorie de la manoeuvre des vaisseaux, à la portée des pilotes. Paris, 1746.

[285] *Saverien A.* Nouvelle théorie de la mâture. Paris, 1747.

[286] *Saverien A.* Recherches historiques sur l'origine et les progres de la construction des navires des anciens. Paris, 1747.

[287] *Saverien A.* L'art de mesurer sur mer le sillage des vaisseaux, avec une idée de l'état d'armemnt des vaisseaux de France. Paris, 1750.

[288] *Saverien A.* Histoire des progrès de l'esprit humain dans les sciences exactes et dans les arts qui en dépendent. T. 1–2. Paris, 1766–1778.

[289] *Schneider I.* Isaac Newton. München: Beck, 1988.

[290] *Segre M.* In the wake of Galileo. New Brunswick. New York: Rutgers Univ. Press, 1991.

[291] *Sullivan J. W. N.* Isaac Newton, 1642–1727. New York: Macmillan, 1938.

[292] Sur la roue d'Aristote. Histoire de l'Académie royale des science. Paris, 1715 (1718), p. 30–35.

[293] Sur les loix du choc des corps. Histoire de l'Académie royale des science. Paris, 1706 (1707), p. 124–139.

[294] *Szabó I.* Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen. Basel: Birkhäuser, 1976. XV + 491 s. (2. Aufl. 1979).

[295] *Theerman P., Seeff A. F. (eds.)* Action and reaction: proceedings of a symposium to commemorate the tercentenary of Newton's Principia. Newark: Delavare Univ. Press; London – Toronto: Associated Univ. Press, 1993.

[296] *Truesdell C.* Essays in the history of mechanics. Berlin: Springer – Verlag, 1968.

[297] *Varignon P.* Projet d'une nouvelle méchanique avec un examen de l'opinion de M. Borelli sur les propriétez des poids suspendus par des cordes. Paris, 1687.

[298] *Varignon P.* Nouvelles conjectures sur la pesanteur. Paris, 1690.

[299] *Varignon P.* Méthode pour trouver des courbes le long desquelles un corps tombant s'approche ou s'éloigne de l'horizon en telle raison des tems qu'on voundra, et dans quelque hypothese de vitesses qui ce soit, etc. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1699 (1702), p. 1–13.

[300] *Varignon P.* Maniere géométrique et général de faire des Clepsydres ou Horloges d'eau avec toutes sortes de vases donnés, ... // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1699 (1702), p. 51–63.

[301] *Varignon P.* Rapport général des qu'il faut employer dans l'usage de la Vis. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1699 (1702), p. 91–96.

[302] *Varignon P.* Maniere général de déterminer les forces, les vitesses, les espaces, et les temps une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvemens rectilignes variés à discretion. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1700 (1703), p. 22–27.

[303] *Varignon P.* Du mouvement en général par toutes sortes des courbes; et des forces centrales, tant centrifuges, que centripetes, nécessaires aux corps qui les décrivent. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1700 (1703), p. 83–101.

[304] *Varignon P.* Des forces centrales, ou des pesanteurs nécessaires aux planètes pour leur faire décrire les orbites qu'on leur a supposséez jusqu'icy. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1700 (1703), p. 218–237.

[305] *Varignon P.* Autre regle générale des forces centrales. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1701 (1704), p. 20–38.

[306] *Varignon P.* Des courbes décrites par le concours de tant de forces centrales qu'on voudra, placées à discrétiion entre elles, et par rapport aux plans de ces mêmes courbes. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1703 (1705), p. 212–229.

[307] *Varignon P.* Comparaison des forces centrales avec les pésanteurs absolues des corps mûs de vitesses variées à discrétion le long de telles courbes qu'on voudra. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1706 (1707), p. 178–235.

[308] *Varignon P.* Différentes maniéres infiniment générales de trouver les rayons osculateurs de toutes sortes des courbes, soit qu'on regarde ces courbes sous la forme de polygones, ou non. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1706 (1707), p. 490–507.

[309] *Varignon P.* Des mouvemens variés à volonté, comparés entr'eux et avec les uniformes. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1707 (1708), p. 222–275.

[310] *Varignon P.* Des mouvemes faits dans les milieux qui leur résistent en raison quelconque. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1707 (1708), p. 382–476.

[311] *Varignon P.* Courbe de projection décrite en l'air dans l'hypothèse des résistances de ce milieux en raison des vitesses actuelles du mobile. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1709 (1711), p. 69–85.

[312] *Varignon P.* Problème de statique. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1709 (1711), p. 351–354.

[313] *Varignon P.* Des forces centrales inverses. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1710 (1712), p. 533–544.

[314] *Varignon P.* Réflexions sur l'usage que la mécanique peut avoir en géométrie. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1714 (1717), p. 77–121.

[315] *Varignon P.* Solution d'un problème de statique, avec la maniére d'en résoudre une infinité d'autres de la même espèce. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1714 (1717), p. 280–311.

[316] *Varignon P.* Comparaison des vitesses des corps de pesanteurs quelconques, en descendant ou en montant dans le vuide, tant en lignes droites qu'en lignes courbes aussi quelconques. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1719 (1721), p. 195–229.

[317] *Varignon P.* Eclaircissments sur l'analyse des infiniment petits. Paris, 1725.

[318] *Varignon P.* Traité du mouvement et de la mesure des eaux courantes et jaillissantes, avec un traité préliminaire du mouvement en général. Paris, 1725.

[319] *Varignon P.* Nouvelle mécanique ou statique dont le project fut donné en 1687. T. 1–2. Paris, 1725.

[320] *Varignon P.* Eléments des mathématiques. Paris, 1731.

[321] *Vilain Ch.* La mécanique de Christian Huygens. La relativité du mouvement au XVIIe siecle. Paris: Blanchard, 1996.

[322] *Villemot Ph.* Nouveau système, ou nouvelle explication du mouvement des planètes. Lyon, 1707.

[323] *Wallis J.* Mecanica, sive de motu tractatus geometricus. — In: Wallis J. Opera mathematica. T. 1, p. 575–1063, Oxoniae (Oxford), 1695.

[324] *Westfall R. S.* Never at rest: A biography of Isaac Newton. Cambridge Univ. Press, 1980.

Westfall R. S. The life of Isaac Newton. Cambridge – New York: Cambridge Univ. Press, 1993.

[325] *Whitaker V.* Christopher Wren. His life and times. London, 1932.

[326] *Wilson C.* Leibniz's metaphysics: a historical and comparative study. Princeton – New York: Princeton Univ. Press, 1989.

[327] *Woolhouse R.* Descartes, Spinoza, Leibniz: the concept of substance in seventeenth-century metaphysics. London – New York: Routledge, 1993.

[328] *Woolhouse R.* G. W. Leibniz: critical assessments. T. 1–4. New York: Routledge, 1994.

Примечание. Mém. Acad. roy. sci. — Mémoires de Mathématique et de Physique de l'Académie Royale des Sciences.

Приложение 1

«ОБЩЕЕ ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ» Г. В. ЛЕЙБНИЦА

Впервые эта работа была опубликована 7 и 14 сентября 1693 г. в Journal des Sçavans. Ее копия, как и копия предыдущей работы, была обнаружена П. Костабелем в дневниках пансионера-механика Дебийете за 1692 г., хранящихся в архиве Парижской академии наук. Предлагаемый перевод копии работы из [179] (с французского языка) дает возможность познакомиться с ее содержанием.

«Пусть прямые AB, AC, AD и т. д. представляют частные движения тела A, которые должны составить общее движение, и пусть G является центром тяжести всех тенденционных точек B, C, D и т. д. Наконец, если AG продолжено до точки M такой, что отношение AM к AG равно отношению количества составляющих движений к единице, то составное (общее) движение будет AM. Проще говоря, если тело A через секунду времени может переместиться из A в B или C, или D и т. д., рассматривая каждое из движений в отдельности, то, участвуя во всех этих движениях одновременно и не имея возможности одновременно двигаться по каждому из направлений, тело A будет двигаться к центру тяжести точек B, C, $D, \ldots$ со скоростью, которую оно получит, через секунду оказавшись в точке M, таким образом, как если бы с телом случилось то же, что и с его центром тяжести, в случае, когда тело разделилось бы на все свои составляющие движения, происходящие с более быстрыми скоростями, чем скорость центра тяжести.

Это объяснение может играть роль доказательства. Оно несет в себе столько же нового, сколько и предыдущие доказательства, но те, кто желает получить доказательство в традиционной форме, легко найдут его, проследив следующие рассуждения.

Если провести через A две прямые, образующие в A прямой угол, то можно разложить каждое из этих частных движений на два, взятых по сторонам этого прямого угла. Таким образом, сложение всех этих движений по одной из сторон будет средним арифметическим движением, умноженным на количество движений. То есть для определения расстояния от точки A до тенденционной точки (B, C, $D, \ldots$) движения по этой стороне угла, нужно будет умножить расстояние по этой стороне угла от центра тяжести до всех тенденционных точек на число тенденций[1]. Так как известно, что расстояние от A до центра тяжести точек, взятое по одной прямой, является средним арифметическим расстояний от A до этих точек, каково бы ни было их число. Я называю величину средней арифметической из многих величин, если она является их суммой, деленной на их число.

Таким образом, сложное движение вдоль каждой из сторон будет движением центра тяжести составляющих движений или частей тела, умноженным на их число, как в случае движения по диагонали, состоящего из двух движений по сторонам и являющегося сложным движением.

Из этого правила выводятся два важных следствия, дающих решение двух следующих задач.

Задача 1. Провести касательную к кривой типа конических сечений или овалов Декарта.

Из точки A на кривой описать круг, пересекающий кривую в точках B, C, D и т. д., найти центр тяжести G этих точек, и линия AG будет перпендикуляром к кривой, а перпендикуляр к AG, проходящий через точку A, будет искомой касательной. Если кривая более сложной формы, то нужно рассматривать две или три точки в одном месте, примерно как если бы одна из этих точек была бы более тяжелой.

Таково основание для того, что является принципом нахождения. Следует считать, что усилие, натягивающее нити[2], может рассматриваться как имеющее столько направлений с одинаковыми скоростями, сколько нитей[3]. Так как когда их тянут, они тянутся. Таким образом, сложное направление, которое должно быть перпендикулярно кривой, проходит через центр тяжести стольких точек, сколько нитей. И эти точки, в силу равенства натяжений, также удалены от центра натяжения и стремятся, таким образом, к пересечению круга с нитями.

[1]Речь идет об использовании формулы для центра тяжести G системы точек ($\vec{p} \cdot \vec{r}_G = \sum^n \vec{r}_k \cdot \vec{p}_k$), которая для случая равных весов p_k ($p = n \cdot p_k$) принимает вид $\sum^n r_k = n \cdot r_G$ (*прим. перев.* — В. Я.).

[2]Силы, действующие на A со стороны точек B, C, $D, \ldots$ (*Прим. перев.* — В. Я.).

[3]Направлений частных движений (*Прим. перев.* — В. Я.).

Г. Чирнхауз был первым, кто попытался найти некоторое правило для касательных к кривым, описываемым нитями[1], и это позволило г. Лейбницу его также установить, что он сделал с успехом и так, как об этом только что было сказано, но так как он не торопился публиковать свои мысли, то г. Фатио, которого мы знаем по замечательным статьям по математике, получил результаты, близкие к выше сформулированным, и г. Гюйгенс внес в это свой вклад, но по пути, совершенно отличающемуся от этого.

Задача 2. Одно и то же тело толкается одновременно бесконечным количеством побуждений, найти его движение. Я называю побуждениями любые бесконечно малые усилия, каковыми являются тяжесть или еще центробежная сила, множество которых составляет обычное движение.

Найдите центр тяжести места тенденционных точек всех побуждений, и сложное движение пройдет через центр, но получаемые скорости будут пропорциональны величинам мест. Места могут быть линиями, поверхностями и даже телами.

Правильно также думать, что там, где речь идет о количестве прогресса[2], скорости и их величины компенсируются. И таким образом, можно рассматривать разнообразные движения, т. к. всегда сохраняется одно и то же количество движения, но притом доказано, что когда речь идет об абсолютной силе[3], они вовсе не компенсируются, так как не всегда сохраняется одно и то же общее количество движения.»

---

[1] Точнее точкой A (*Прим. перев.* — В. Я.).

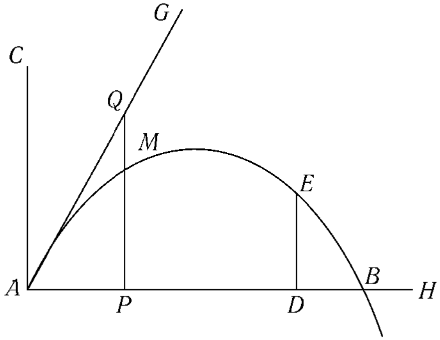
[2] Количество движения с учетом направления (*Прим. перев.* — В. Я.).

[3] Живая сила (*Прим. перев.* — В. Я.).

Приложение 2

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ БАЛЛИСТИКА[1] М. ДЕ МОПЕРТЮИ

Так как уже было много трактатов по баллистике, я надеюсь, что изложение всего этого искусства на одной странице, содержащей, как я осмелюсь утверждать, все имеющееся в более толстых трактатах, не вызовет особого раздражения; и содержащей все более простым образом и более удобно для использования, чем геометрические построения, зависящие от свойств окружности и параболы.



I. Пусть скорость[2] снаряда будет равна той, которую он приобрел бы, падая с высоты CA, т. е. $= \sqrt{a}$, $AQ = s$, $QM = z$; для снаряда, вылетающего в направлении AG будет $t\,.2z :: \sqrt{a}.\sqrt{z}$, или $tt = 4az$.[3] Для отнесения этой параболы к горизонтальной линии AH, образующей с AG угол, тангенс которого, при луче равном 1, равен n; пусть $AP = x$, $PM = y$, $PQ = nx$; имеем $QM = PQ - PM$ $(z = nx - y)$

[1][247]. Эта небольшая статья 1731 года хорошо характеризует научный почерк Мопертюи.

[2]Речь идет о начальной скорости снаряда в точке A.

[3]В современных обозначениях $t/2z = \sqrt{a}/\sqrt{z}$; $t^2 = 4az$.

и $AQ^2 = AP^2 + PQ^2$ ($tt = xx + nnxx$). И исключая z и t из первого Уравнения $tt = 4az$, получаем $(nn - 1)xx = 4nax - 4ay$.

II. Для поражения данным весом пороха (зарядом — В. Я.) заданной точки E.

Пусть $AD = b$, $ED = c$; необходимо, чтобы когда x станет b, y стало c; таким образом, $(nn+1)bb = 4nab - 4ac$. Откуда получаем направление ствола (пушки) $n = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{4aa - 4ac - bb}$. Откуда видно, что для поражения E данным зарядом существуют два положения ствола.

След. 1. Чтобы n было возможно, необходимо, чтобы $4aa =$ или $>$ $> 4ac + bb$.

След. 2. Если E на горизонтали, имеем $n = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{4aa - bb}$.

III. Для поражения точки E в данном направлении.

Имеем: $a = \frac{nn+1}{4nb - 4c}\, bb$. Что определяет заряд.

След. Этим показано, что при неизменном положении пушки горизонтальная дальность полета пропорциональна линии CA, взятой в качестве силы бросания. Так как c стало $= 0$, имеем $b = \frac{4n}{nn+1}\, a$.

IV. Для нахождения направления наибольшей дальности бросания.

Имеем: $AB = x = \frac{4n}{nn+1}\, a$ должна быть максимальной. Дифференцируя эту величину или просто $\frac{n}{nn+1}$ и приравнивая нулю, находим $n = 1$. Откуда видно, что полупрямой угол дает наибольшую возможную горизонтальную дальность.

V. Для определения наименьшего заряда, который может поразить E.

Имеем: $a = \frac{nn+1}{4nb - 4c}\, bb$ должна быть минимальной. Дифференцируя это количество, считая n переменной, или просто дифференцируя $\frac{nn+1}{nb - c}$, получаем $n = \frac{c}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{bb + cc}$; подставляя положительное значение n в $a = \frac{nn+1}{4nb - 4c}\, bb$, находим $a = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{bb + cc}$.

Приложение 3

ФИЛОСОФСКИЕ, ИСТОРИЧЕСКИЕ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ СОЧИНЕНИЯ ДАЛАМБЕРА,

члена всех европейских академий наук

Том второй

Париж, Жан-Франсуа Бастен, год XIII (1805)

ОЧЕРК ОСНОВ ФИЛОСОФИИ, ИЛИ О ПРИНЦИПАХ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ПОЗНАНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

VII. Мораль.

VIII. Разделение морали. человеческая мораль.

IX. Мораль законодателей.

X. Государственная мораль.

XI. Мораль горожанина.

XII. Мораль философа.

XIII. Грамматика.

§ 9. Пояснение о том, что говорят о разных смыслах одного слова.

§ 10. Тоже об инверсии и по этому поводу о том, что называется искусством языка.

XIV. Математика. Алгебра.

§ 11. Разъяснение об элементах алгебры.

XV. Геометрия.

§ 12. Разъяснение об элементах геометрии.

§ 13. Тоже о приложении алгебры к геометрии.

§ 14. Тоже о метафизическом принципе исчисления бесконечно малых.

§ 15. Тоже об использовании и целях метафизики и геометрии и в общем в математических науках.

XVI. Механика.

§ 16. Пояснение о пространстве и времени.

XVII. Астрономия.

XVIII. Оптика.

XIX. Гидростатика и гидравлика.

XX. Общая физика.

XXI. Заключение. (476 с.).

XVI. МЕХАНИКА

Принципы геометрии и алгебры включают в себя то, что необходимо философу для подхода к механике. Эта наука заслуживает того, чтобы мы на ней остановились.

Из того, что мы сказали ранее о ясности и применимости абстрактных понятий, следует, что для обсуждения, следуя лучшему возможному методу одной из частей математики (мы даже можем говорить одной из возможных наук), его нужно не только ввести и использовать как это допустимо, исходя из знаний, почерпнутых в науках более абстрактных, а следовательно, более простых, но еще рассматривать с точки зрения наибольшей возможной абстрактности и простоты особенности этой науки: ничего не предлагать и не допускать в сущности этой науки, кроме свойств, которые считаются ей принадлежащими. Отсюда следуют два преимущества: принципы принимают всю ясность, с которой их только можно выразить, и их количество оказывается наименьшим из возможных, благодаря чему они не могут быть отброшены и приобретают наибольшую общность.

С давних пор и с успехом думали заполнить в математике одну часть по плану, который мы намерены предначертать: в геометрии успешно использовали алгебру, в механике — геометрию и каждую из этих трех наук — во всех остальных, для которых они являются основой и фундаментом. Но не были так внимательны ни к тому, чтобы сократить до минимума количество принципов этих наук, ни к тому, чтобы придать им наибольшую ясность, какую только можно желать. Представляется, что именно в механике к этому относятся с наименьшим вниманием. Поэтому большинство ее принципов либо являются неясными сами по себе, либо выражены и доказаны в неясной форме, что порождает многие щекотливые вопросы.

Философ, механик, таким образом, должен заняться двумя вещами: расширить пределы механики и определить подход к ней; кроме этого, он должен постараться дополнить, в определенном смысле, некоторые из этих объектов другими, то есть не только свести принципы механики к наиболее ясным понятиям, но еще, сводя их, сделать их более общими; показывать всякий раз бесполезность многих принципов, которые до сих пор использовались в механике, и выигрыш, который можно получить, комбинируя прочие, для прогресса этой науки. Чтобы показать, как можно воплотить эти разные взгляды, возможно, не будет бесполезным приступить к убедительному рассмотрению науки, о которой идет речь.

Движение и его свойства являются первыми и главными объектами механики; это наука предполагает существование движения, и мы это также будем предполагать, как это принято и признано всеми философами. По взглядам на природу движения эти же философы значительно разделяются. Вне сомнения, нет ничего более естественного, чем понимать под движением последовательное приложение тела в различных частях неопределенного пространства, которое мы представляем как вместилище тел; но это понятие предполагает пространство, части которого проницаемы и неподвижны; однако никто не знает, что картезианцы (секта, которая, по правде, почти не существует сегодня) не признают точку пространства, отличную от тел, считая протяженность и материю одним и тем же. Следует признать, что исходя из похожего принципа, движение становится вещью наиболее сложной для понимания и что картезианец будет скорей отрицать существование, чем искать, как определить природу. Тем не менее, каким бы абсурдом нам не казалось мнение этих философов и как бы не было мало ясности и точности в их метафизических принципах, на которые они опираются, мы не предпримем ничего для их опровержения здесь; стремясь к общим понятиям, мы будем довольствоваться представлением о безграничном пространстве как о вместилище тел, пусть реальных или предполагаемых, и будем смотреть на движение как на перемещение тел из одного места в другое.

Обсуждение движения порой входит в исследование чистой геометрии; так часто представляют прямые или кривые линии как порождение непрерывного движения точки, поверхности как движение линии, и, наконец, тела как движение поверхности. Но между механикой и геометрией существует разница не только в способе построения фигур с помощью движения, то есть произвольно и с чистым изяществом, но еще и в том, что в геометрии движение рассматривается только как пройденное пространство, в то время как в механике принимают во внимание и время, в течение которого тело совершило перемещение в пространстве.

Нельзя сравнивать между собой такие две вещи разной природы, как пространство и время, но можно сравнивать отношение отрезков времени с соответствующими отрезками пройденного пространства. Время по своей природе течет равномерно, и механика предполагает эту равномерность. К тому же, не зная сущности времени и не имея его точной меры, мы не можем представить отношение его частей более ясно, чем как отношение отрезков бесконечной прямой. Таким образом, можно сравнивать отношением частей пройденного пространства, как сравнивают в геометрии отношение частей одной линии с отношением частей другой линии; отсюда легко видеть, что использование только геометрии и вычислений позволяет найти общие свойства движения, изменяющегося по какому-то закону, без использования какого-либо иного принципа. Но как узнать, что движение тела происходит по тому или иному частному закону? Это то, о чем одна только геометрия ничего не может нам сказать, и это то, что можно рассматривать в качестве первой задачи механики.

Прежде всего со всей ясностью видно, что тело не может само себе придать движение. Таким образом, оно не может быть выведено из покоя иначе, как под действием какой-то посторонней причины. Но продолжает ли оно двигаться само по себе, или, чтобы двигаться, оно нуждается в повторяющемся действии причины? В дальнейшем, будучи однажды предположенным, движение всегда будет считаться, несомненно, существующим без каких-либо частных гипотез; наиболее простой закон движения тела — это закон равномерности, и, следовательно, ему и должно следовать. Таким образом, движение является равномерным по своей природе; правда, доказательства этого принципа, приводимые до сих пор, возможно, недостаточно убедительны; философ должен заставить почувствовать сложности, которые этому можно противопоставить и показать путь, на котором можно избежать необходимости их разрешать.

Этот закон равномерности — важнейший для движения, рассматриваемого как само по себе, — составляет одну из важнейших причин, на которую будет опираться измерение времени с помощью равномерного движения. Хотя эта дискуссия и не является в механике абсолютно необходимой, тем не менее, коли она не является полностью инородной, мы остановимся здесь на некоторых деталях по этому поводу.

Так как отношение частей времени само по себе нам неизвестно, единственный способ, который мы можем использовать для познания этого отношения, состоит в поисках какого-то другого отношения, более ощутимого и лучше известного, с которым можно сравнить исходное. Напротив, всякий закон ускорения или замедления движения является, так сказать, произвольным и зависящим от внешних условий.

Следовательно, неравномерное движение не может быть естественной мерой времени, так как, во-первых, не будет причины для того, чтобы считать один частный вид неравномерного движения мерой времени более предпочтительной, чем другие виды движения. Во-вторых, мы не сможем измерять время с помощью неравномерного движения, не установив предварительно каким-то частным способом аналогию между отношением времени и отношением пройденных пространств, которые будут соответствовать предполагаемому движению. К тому же, как выявить эту аналогию иначе, чем из опыта, а опыт — не предполагает ли он меру времени уже известной фиксированной и определенной?

Но как можно убедиться, что движение будет идеально равномерным? Прежде всего я отвечу, что также нет ни одного неравномерного движения, закон которого мы знаем точно, и что, таким образом, эта сложность доказывает только то, что мы не можем знать точно и со всей строгостью отношение частей времени; но отсюда не следует, что равномерное движение по своей природе не будет его первой и простейшей мерой. Таким образом, не имея возможности установить точную и строгую меру времени, мы будем ее искать в движениях почти равномерных как, по крайней мере, приближенную меру. У нас есть три способа, позволяющих судить о равномерности движения; 1° когда движущееся тело проходит равные пространства в течение времен, о которых мы рассуждаем; и мы можем считать времена равными, когда в повторяющемся эксперименте мы наблюдаем, что за эти времена происходят сходные явления, наблюдения за которым должны быть длительными; таким образом, мы имеем право утверждать, что времена, необходимые водяным часам для опустошения, равны; тогда, если тело за эти времена проходит равные пространства, мы можем заключить, что его движение равномерно; 2° когда мы имеем право считать, что эффект от взаимных ускорений и замедляющих причин не заметен: так, благодаря этим двум причинам, их соединению, установили, что вращение земли вокруг ее оси является равномерным; и это предположение не только не противоречит другим небесным явлениям, но даже кажется прекрасно совпадающим с ним; 3° когда мы сравниваем движение, о котором идет речь, с другим движением и наблюдаем в каждом из них один и тот же закон. Так, если несколько тел движутся таким образом, что проходимые ими за одинаковое время пространства всегда будут точно или примерно в одном и том же отношении, то движение этих тел считают точно или почти точно равномерным.

Так как, если тело, движущееся равномерно, проходит определенное пространство за взятое произвольно время, и другое тело, движущееся также равномерно, проходит другое пространство за то же время, то отношение пройденных пространств будет всегда одним и тем же, независимо от того, начали ли тела двигаться одновременно либо в разные моменты времени; и равномерное движение является единственным, обладающим этим свойством. Поэтому, если разделить время на равные или произвольные неравные части, то получим, что пространства, пройденные телами за те же части времени, находятся в том же отношении; и чем больше будет частей времени, тем больше у нас будет права утверждать, что движение каждого из тел является равномерным.

Ни один из этих трех способов не является точным, с точки зрения геометрической строгости; но они достаточны, особенно если они повторяются и объединяются, для получения пригодного заключения, если уж не в случае абсолютной равномерности движения, то, по меньшей мере, для очень приближенной равномерности.

После этого, честно говоря, не единственного отступления, посвященного измерению времени с помощью движения, вернемся к принципам механики.

Силу инерции, то есть свойство тел сохранять состояние покоя или движения, будем считать однажды установленной. Ясно, что движение для начала или, по меньшей мере, существования которого необходима некоторая причина, не может быть ускорено или замедлено иначе, чем внешней причиной. Однако каковы причины, способные производить или изменять движение тел? До сих пор мы знаем два их вида. Одни выражают собой одновременно эффект, который они производят или причиной которого они являются; это те, которые проистекают из непосредственного взаимодействия тел как результат их непроницаемости; они сводятся к импульсам и к производным от них действиям. Все остальные причины не могут быть познаны иначе, чем через эффект их действия, и мы будем полностью пренебрегать их природой; таковы причины, заставляющие падать весомые тела к центру Земли и удерживающие планеты на их орбитах.

Скоро мы увидим, как можно определить эффекты импульса и причин, ему соответствующих. Касаясь здесь причин второго рода, следует понимать, что если речь идет об эффектах, производимых этими причинами, то эти эффекты должны всегда даваться независимо от знания причины, так как они не могут быть получены из причины. Поэтому, не зная причин тяжести, мы примем из опыта, что пространства, описываемые падающим телом, относятся как квадраты времен. В общем случае при переменных движениях, чьи причины неизвестны, очевидно, что эффект, произведенный причиной за конечное время или мгновенно, должен всегда задаваться уравнением, связывающим времена и пространства; этот известный эффект, предложенный принцип силы инерции, геометрия и вычисления составляют все, что необходимо для открытия свойств этих видов движений. Зачем в таком случае мы будем прибегать к принципу, которым все пользуются в настоящее время: ускоряющая или замедляющая сила пропорциональна элементу скорости? Принцип, опирающийся на расплывчатую и неясную аксиому о том, что эффект пропорционален своей причине. Мы не сможем ничего обсуждать, если этот принцип является необходимой истиной; мы только получили бы, что приводимые до сих пор доказательства оказываются вне достижимости: вместе с геометрами мы больше не сможем их использовать в качестве возможной истины; это то, что разрушает достоверность механики и сводит ее не более, чем к экспериментальной науке: мы должны будем довольствоваться наблюдениями того, что истинно или сомнительно, ясно или непонятно, то есть того, что бесполезно и должно быть отброшено из механики.

До сих пор мы упоминали только об изменении скорости тела под влиянием причин, способных изменить его движение; но мы ничего еще не знаем о том, что должно произойти, если движущая причина стремится изменить направление движения тела. Все, что мы имеем в этом случае из принципа ускоряющей силы, состоит в том, что тело может описывать только прямую линию и описывать ее равномерно; но это не дает возможности узнать ни его скорость, ни направление. Тогда приходится прибегать ко второму принципу, называемому принципом сложных движений, с помощью которого определяется единственное движение тела, стремящегося одновременно двигаться по разным направлениям с данными скоростями. В доказательстве этого принципа философ будет стремиться, с одной стороны, избежать всех сложностей, возникающих в приводимых обычно доказательствах, а с другой стороны, он не должен отбрасывать из большого количества сложных предложенный принцип, который, будучи одним из первых в механике, неизбежно должен опираться на простые и легкие доказательства.

Так как движение тела, меняющего свое направление, можно рассматривать как сложное, состоящее из того, что было прежде, и нового движения, которое оно приобрело, по аналогии, прежнее движение можно рассматривать, как состоящее из нового движения, в котором находится тело, и другого, которое оно утратило. Отсюда следует, что законы движения, изменяемые какими бы то ни было препятствиями, зависят только от законов движения, разрушенного этими препятствиями. Так как очевидно, что достаточно разложить движение тела до встречи с препятствием на два движения: на то, которому препятствие мешает, и на то, которому не мешает. Этим способом можно не только доказать законы движения, изменяемого непреодолимыми препятствиями, единственное, что было найдено до сих пор этим методом, им можно также определить, в каком случае движение разрушено этими препятствиями. С точки зрения законов движения, изменяющихся препятствиями, которые сами по себе не являются непреодолимыми, по той же причине ясно, что в общем случае для определения этих законов достаточно точно установить только законы равновесия.

Ну а каким должен быть общий закон равновесия тел? Все геометры согласны, что два тела с противоположными направлениями находятся в равновесии, когда их массы обратно пропорциональны скоростям, с которыми они стремятся двигаться; но, возможно, не просто доказать этот закон со всей строгостью, исключая всяческую неясность; таким образом, большинство геометров, вместо того, чтобы стремиться его доказать, предпочитают считать его аксиомой. Тем не менее, отнесясь к этому внимательно, увидим, что это единственный случай, где равновесие проявляется ясным и четким образом; здесь, когда массы тел равны, их скорости равны и противоположны. Мне кажется, что для доказательства равновесия в других случаях, достаточно их свести, если это возможно, к этому простому и очевидному по себе случаю.

Принцип равновесия, соединенный с принципами силы инерции и сложного движения, приводит нас к решению всех проблем, где рассматривается такое движение тела, которое может быть изменено непроницаемым подвижным препятствием, то есть в общем случае другим телом, которому наше тело должно с необходимостью передавать движение, чтобы сохранить хотя бы часть своего. Таковы общие законы передачи движения, найденные, наконец-то, философами после долгого незнания о их существовании и ошибочности взглядов на них.

Если принципы силы инерции, сложного движения и равновесия существенно отличаются один от другого, так как между ними нельзя установить соответствие, и если, с другой стороны, эти три принципа достаточны в механике, то свести эту науку к наименьшему числу принципов — это значит установить на этих принципах все законы движения тел при каких бы то ни было условиях.

С точки зрения доказательств самих этих принципов, план, которому необходимо следовать для полной ясности и простоты, присущей принципам, состоит в том, чтобы выводить их всегда из рассмотрения одного только движения самым простым и ясным способом. Все, что мы очень ясно увидим в движении тела, как мы уже ранее говорили, состоит в том, что оно проходит некоторое пространство за некоторое время. Таким образом, это единственная идея, из которой должны быть получены все принципы механики, если желают их доказать наиболее ясным и точным образом; из этих соображений философ должен, если можно так выразиться, отклонить вышеназванный взгляд на движущие причины, рассматривая только движение, которое они производят; особенно он должен полностью изгнать силы, присущие движущимся телам как неясные, метафизические, которые способны только распространять мрак на науку, ясную в своей сущности.

Именно по этой самой причине воздерживаются от изучения знаменитого вопроса о живых силах. Этот вопрос, тридцать лет разделявший геометров, состоит в выяснении, является ли сила движущегося тела пропорциональной произведению массы на скорость или произведению массы на квадрат скорости; например, если тело в два раза большее другого, имеет в три раза большую скорость, то его сила будет в восемнадцать или всего лишь в шесть раз больше? Несмотря на дискуссии, вызванные этим вопросом, абсолютная бесполезность которого для механики должна исключить его из книги основ, тем не менее, большой шум, поднятый им, знаменитые люди, обсуждавшие его, интерес, проявленный к нему учеными, вынуждают нас очень кратко продемонстрировать принципы, которые могут быть использованы для его решения.

Когда говорят о силах движущихся тел, либо произносимые слова не содержат никакой идеи, либо, в общем случае, под этим подразумевается только свойство движущегося тела преодолевать встречаемые им препятствия или им сопротивляться. Таким образом, сила не определяется, как это должно было бы быть, ни через пространство, равномерно пройденное телом, ни через время, потраченное на его прохождение, ни, наконец, через простое, единственное и абстрактное рассмотрение его массы и скорости; только через встречаемые телом препятствия и сопротивление, оказываемое им. Большее препятствие, которое может преодолеть тело или которому может сопротивляться, означает большую силу; не желая представлять этим словом мнимую сущность, присущую телу, будем считать, что слово «сила» служит только для краткого выражения факта; примерно, как говорят, что тело имеет в два раза большую скорость, чем другое тело, вместо того, чтобы сказать, что оно в равные времена проходит в два раза большие пространства, не претендуя при этом на то, что слово «скорость» представляет некоторую сущность, присущую телу.

Разумеется, ясно, что движению тела можно противопоставить три вида препятствий: где непреодолимые препятствия уничтожают полностью движение, каким бы оно ни было, где препятствия, являющиеся точнее сопротивлением для прекращения движения тела, останавливают движение в данный момент — это случай равновесия и, наконец, где препятствия, постепенно останавливающие движение, — это случай замедленного движения. Так как непреодолимые препятствия прекращают все виды движения, они не могут быть использованы для определения силы: только в равновесии или в замедленном движении можно искать ее меру. Все согласны, что в случае равновесия двух тел произведения их масс на виртуальные скорости, то есть скорости, с которыми они стремятся двигаться, равны между собой. Таким образом, в равновесии произведение массы на скорость или, что то же самое, количество движения может представлять силу. Все так же знают, что в замедленном движении количество преодоленных препятствий пропорционально квадрату скорости; так что тело, например, сжавшее пружину с определенной скоростью, сможет с удвоенной скоростью мгновенно или последовательно сжать не две, а четыре пружины, девять с утроенной скоростью и так далее. Отсюда сторонники живых сил заключают, что движущие силы в этом и в общем случае пропорциональны произведению массы на квадрат скорости. В сущности, какие неудобства можно встретить в том, что мера сил в равновесии и замедленном движении будет равной? Поскольку, если не хотят обсуждать с помощью ясных идей, то это следует делать с помощью слова «сила», понимая под этим эффект преодоления препятствий или сопротивления им. Тем не менее, следует признать, что мнение тех, кто смотрит на силу как на произведение массы на скорость, может иметь место не только в случае равновесия, но и в случае замедленного движения, если в последнем случае силу измеряют не абсолютным количеством препятствий, а суммой их сопротивлений.

Так как не стоит сомневаться в том, что эта сумма сопротивлений не будет пропорциональна количеству движения, потому что, по всеобщему признанию, количество движения, теряемое телом в каждый момент, пропорционально произведению сопротивления на бесконечно малую длительность времени, а сумма этих произведений, очевидно, является общим сопротивлением. Таким образом, вся сложность состоит в выяснении, следует ли измерять силу абсолютным количеством препятствий или суммой их сопротивлений. Более естественным кажется измерение силы последним образом, так как препятствие таково, каково его сопротивление, и, честно говоря, сумма сопротивлений и является преодолеваемым препятствием; более того, вводя силу таким образом, мы получаем единую меру для равновесия и замедленного движения. Тем не менее, коли мы не имеем точного ясного смысла слова «сила», кроме как выражающего некоторый эффект, я считаю, что каждый должен это сделать по своему усмотрению, а весь вопрос может состоять только в пустой метафизической дискуссии или словесном диспуте, недостойном философов.

Того, о чем мы только что сказали, достаточно для того, чтобы дать представление читателям. Но одна естественная мысль сделает их убеждения окончательными. Пусть тело стремиться двигаться с некоторой скоростью, а это стремление остановлено некоторым препятствием; пусть оно реально движется с этой скоростью; пусть, наконец, оно начинает двигаться с той самой скоростью, которая расходуется и постепенно уничтожается какими бы то ни было причинами; во всех этих случаях производимый телом результат различен, но само по себе тело в любом случае не приобретает ничего нового; только действие причины, производящей эффект, приложено по-разному. В первом случае эффект сводится к одному стремлению, которое не содержит в себе ничего от точной меры, так как из него не следует никакого движения; во втором случае эффектом является равномерно пройденное за данное время пространство, и этот эффект пропорционален скорости; в третьем случае эффект — это пространство, пройденное до полного затухания движения, и этот эффект пропорционален квадрату скорости. Очевидно, что все эти разные эффекты произведены одной причиной, поэтому, говоря о силе, соответствующей скорости или ее квадрату, под этим подразумевают только эффект, выражаемый таким образом. Это разнообразие эффектов, проистекающих из одной причины, может служить для показа малой справедливости и точности, так часто используемой, мнимой аксиомы о пропорциональности причин производимым ими эффектом.

Наконец, те, кто не будут в состоянии подняться до метафизических принципов вопроса о живых силах, легко увидят, что это не что иное, как диспут о словах, если они осознают, что обе части полностью согласуются с фундаментальными принципами равновесия и движения. Когда одну и ту же проблему механики предлагают решить двум геометрам, один из которых является противником, а другой — сторонником живых сил, их решения, если они правильны, будут одинаковы; вопрос о мере сил, таким образом, полностью бесполезен в механике и даже лишен реальной сущности. Следовательно, он, конечно, не возник бы в стольких томах, если бы стремились различать то, что в нем ясно и неясно. Принимаясь за это, потребуется только несколько строк для решения вопроса; но кажется, что большинство из тех, кто касался этого вопроса, побоялись ответить на него несколькими словами.

Сведение всех законов механики к трем — силы инерции, сложного движения и равновесия — можно использовать для решения большой метафизической проблемы, недавно предложенной одной из самых знаменитых академий Европы: являются ли законы движения и равновесия необходимой истиной или случайностью? Чтобы сосредоточить наши мысли на этом вопросе, его следует сократить до разумных пределов. Речь не о том, чтобы обсуждать, смог ли бы Творец природы дать нам другие законы, отличные от тех, которые мы наблюдаем; из предположения о существовании разумного Существа, способного воздействовать на материю, очевидно, что это Существо в каждый момент может ее двигать и останавливать по своему усмотрению или в соответствии с законами равномерности, или по законам, отличающимся для разных моментов и разных частей материи; постоянный опыт движения наших тел нам достаточно доказал, что материя, предоставленная сама себя, может двигаться иначе, чем если бы она двигалась с некоторым мысленным принципом. Таким образом, поставленный вопрос сводится к тому, чтобы узнать, отличаются ли законы равновесия и движения, наблюдаемые в природе, от тех, которым следует сама материя; разовьем эту идею. Из последнего очевидно, что, ограничиваясь предположением о существовании материи и движения, из этого двойного существования с необходимостью следуют некоторые эффекты; что тело, начав движение под действием некоторой причины, должно через некоторое время либо остановиться, либо продолжать движение; что тело, стремящееся двигаться одновременно по двум сторонам параллелограмма, необходимо должно описывать либо диагональ, либо какую-то другую линию; что когда несколько движущихся тел встречаются и ударяются, то, вследствие их взаимной непроницаемости, с необходимостью должны произойти изменения в состоянии всех или, по крайней мере, некоторых из этих тел. Но среди различных возможных эффектов, будь то движение изолированного тела или нескольких взаимодействующих тел, есть один, который в любом случае должен неминуемо иметь место как следствие одного только существования материи, не говоря о всех других принципах, которые могут изменить или исказить этот эффект. Таков путь, по которому должен идти философ для разрешения поставленного вопроса. С помощью рассуждений он, прежде всего, должен постараться открыть законы статики и механики материи самой по себе; затем он должен изучить экспериментально, каковы эти законы в пространстве; если одни отличаются от других, то отсюда он сделает вывод, что те законы статики и механики, которые дает опыт, являются случайной истиной, так как они будут следствием частной и умышленной воли высшего Существа; если, напротив, экспериментальные законы соответствуют открытым из рассуждений, то отсюда будет следовать вывод, что наблюдаемые законы являются необходимой истиной; не в том смысле, что Создатель не мог установить совершенно других законов, но в том смысле, что он не думал об их установлении иначе, как о следствии самого существования материи.

Итак, доказано, что предоставленное само себе (свободное) тело должно постоянно сохранять состояние покоя или равномерного движения; также доказано, что тело, стремящееся двигаться по сторонам параллелограмма, движется по диагонали, выбирая, таким образом промежуточный путь. И, наконец, доказано, что все законы связи движений между телами сводятся к законам равновесия и что сами законы равновесия сводятся к законам равновесия двух равных тел, двигающихся в противоположных направлениях с одинаковыми виртуальными скоростями. В последнем случае очевидно, что два движения уничтожаются одно другим; и как геометрическое следствие, здесь по необходимости будет равновесие, когда массы будут обратно пропорциональны скоростям; остается только выяснить, является ли случай равновесия единственным, то есть, если массы не являются обратно пропорциональными скоростям, то одно из тел обязательно приведет в движение другое тело. Но легко понять, что если есть один возможный и необходимый случай равновесия, то других не будет: без этого законы удара тел, сводящиеся с необходимостью к законам равновесия, становятся неопределенными; но этого быть не может, так как тело, ударившее другое тело, должно в результате иметь единственный эффект, с необходимостью следующий из существования и непроницаемости этих тел. Можно, конечно, доказать единственность закона равновесия и другими рассуждениями, более математическими, чем развиваемые в этом сочинении.

Из всех этих рассуждений следует, что законы статики и механики таковы, как это следует из существования материи и движения. Так опыт нам доказывает, что эти законы действительно наблюдаются для окружающих нас тел. Таким образом, законы равновесия и движения, которые мы получаем из наблюдений, являются необходимой истиной. Метафизик для доказательства этого, возможно, воспользовался бы тем, что сказал, что невозможность установления других законов равновесия и движения, кроме тех, что следуют только из существования и взаимной непроницаемости тел, проистекает из мудрости Творца и простоты его взглядов. Но мы считали долгом отказаться от подобной манеры доказательства, потому что нам казалось, что она проистекает из слишком неопределенного принципа; природа верховного Существа слишком спрятана от нас для того, чтобы мы непосредственно могли знать, что его мудрости соответствует, а что нет; мы можем только предвидеть эффекты этой мудрости, в то время как математическое доказательство поможет нам понять простоту этих законов и, как нам показал опыт, их приложения и распространенность.

Это размышление, мне кажется, может нам послужить для того, чтобы дать оценку доказательствам, данным многими философами для законов движения в соответствии с принципом последней причины, то есть в соответствии со взглядами, что Автор природы должен предлагать свои услуги, устанавливая эти законы. Из подобных доказательств нельзя получить силу иначе, чем как это было сделано ранее и, опираясь на прямые доказательства, полученные из принципов, которые дополнительно будут в нашем распоряжении; иначе будет часто случаться, что они вводят нас в заблуждение. Следуя именно этой дорогой, считая, что благодаря мудрости Создателя в пространстве всегда сохраняется количество движения, Декарт ошибался в законах удара. Те, кто будет подражать, будут подвергаться риску либо ошибиться, как он, либо выдвинуть принцип, который будет иметь место только в некоторых случаях, либо, наконец, выглядеть в качестве примитивного закона природы, являющегося чисто математическим следствием некоторых формул.

К тому же, когда спрашивают, являются ли законы движения необходимой истиной, то речь идет о том, каковы законы, связывающие движение одного тела с другим, но ничего не говорят о том, каковы законы, по которым тело начинает движение без всякой импульсной причины. Таковы, например, законы тяжести, предполагаемые, как сегодня считают многие философы, лишенными импульсной причины. В этом предположении очевидно, что законы, о которых идет речь, в любом смысле не могут быть необходимой истиной; что падение весомых тел будет следствием мгновенной и особой воли Создателя; и что без этой непременной воли тело, расположенное в воздухе, останется в равновесии. Правда, большинство, приученные видеть неподдержанное тело падающим, считают, что одной этой причины достаточно, чтобы заставить тело падать. Но это предубеждение легко разрушить простыми рассуждениями. Представим тело, лежащее на горизонтальном столе; почему оно не движется горизонтально вдоль стола, когда ему ничто не мешает? Почему оно не движется снизу вверх, когда ничто не противопоставляется его движению в этом направлении? Почему, наконец, оно движется сверху вниз, предпочитая это движение другим, в то время как очевидно, что ему безразлично направление движения? Поэтому не беспричинно удивление философов, видящих падающий камень; и этот столь распространенный феномен действительно является одним из наиболее удивительных среди тех, что нам предоставляет природа.

Способ, которым действует эта неизвестная сила, заставляющая падать тела на землю, не более прост для понимания, чем сама сила. Все философы, кажется, согласны, что скорость, с которой начинает двигаться падающее тело, равна нулю; почему, в таком случае, когда поддерживают весомое тело, стремящееся упасть, испытывают сопротивление, которого нет в других направлениях, кроме вертикального; возможно, будут говорить, что в момент, следующий за начальным, скорость, с которой тело стремится падать, возрастет и станет конечной, в то время как в других направлениях она останется всегда нулевой, поэтому тело не имеет других тенденций к движению, кроме как в вертикальном направлении. Таким образом, можно объяснить, почему весомое поддерживаемое тело будет падать, если оно предоставлено самому себе, но это еще не объясняет, почему его нельзя поддерживать без усилий. Так как конечная скорость, которую должно приобрести тело в момент падения, следующий за начальным, не существует еще в начальный момент, когда тело поддерживается; таким образом, она не может порождать сопротивление для преодоления препятствия. Говорит ли это о том, что скорость, с которой тело стремиться падать в начальный момент, не абсолютный нуль, а только мала? Но тогда мы оказываемся в другой сложности. Следуя гипотезе, в общем принятой всеми философами, действие тяжести является непрерывным и стремится в каждый момент сообщать телу ту же скорость, что и в начальный момент; таким образом, эта скорость, если она была конечной в начальный момент, станет неопределенной в конце определенного времени, что противоречит наблюдениям. Эту проблему мы оставляем для разрешения философам-механикам.

Именной указатель

Вадим Иванович Яковлев

Предыстория аналитической механики

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка Ю. В. Высоцкий
Корректор З. Ю. Соболева

Подписано в печать 10.07.01. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,07. Уч. изд. л. 20,02.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная №1.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru